HEYDY MELCHORA SANTOS DAMIAN

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2019

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Santos Damian, Heydy Melchora, 1990-

S327e Existência de soluções para sistemas elípticos não lineares /
2019 Heydy Melchora Santos Damian. – Viçosa, MG, 2019.

viii, 68 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Edir Júnior Ferreira Leite.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 67-68.

1. Equações diferencias elípticas. 2. Teoria do ponto crítico (Análise matemática). 3. Equações diferenciais não-lineares. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.3533

HEYDY MELCHORA SANTOS DAMIAN

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2019.

Olímpio Hiroshi Miyagaki

Anderson L. Albuquerque de Araujo

Edir Júnior Ferreira Leite
(Orientador)

Dedico este trabalho aos meus pais,
Rosa Marina e Orlando.

A ciência moderna ainda não
produziu um medicamento
tranquilizador tão eficaz como o
são umas poucas palavras boas.

Sigmund Freud

Agradecimentos

Sobretudo, à Deus por tudo o que tenho em minha vida, por uma família maravilhosa e pelas oportunidades apresentadas em meu caminho.

Aos meus pais Rosa Marina e Orlando, pelo amor, apoio, valores e todos ensinamentos que me fizeram uma pessoa melhor. Pelo apoio e acompanhamento das minhas primeiras conquistas até hoje, sendo vocês minha principal motivação.

Ao meu orientador, Edir J. Ferreira Leite, pelo incentivo desde o começo, por sua disposição, conselhos, confiança e pela paciência para me ajudar nas correções de meus erros durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus irmãos: Cris, Juan, Katherine e Lisbeth, pelo carinho e apoio de sempre para comigo.

Ao meu namorado, por acreditar sempre em mim, que esteve apoiando-me e incentivando-me para não desistir. Porque me faz ver um lado bom em todas as coisas da vida.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, os quais me deram as ferramentas necessárias para minha formação e de alguma ou outra maneira contribuírem para a realização deste trabalho e pelos serviços prestados.

Cordialmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

SANTOS DAMIAN, Heydy Melchora, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Existência de soluções para sistemas elípticos não lineares.** Orientador: Edir Júnior Ferreira Leite.

Neste trabalho estudamos a existência de solução não trivial para sistemas elípticos da forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0, \ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $p > 0$, Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz condições apropriadas (por exemplo $f(s) = s^2 e^s$).

Abstract

SANTOS DAMIAN, Heydy Melchora, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019. **Existence of solutions for nonlinear elliptic systems**. Adviser: Edir Júnior Ferreira Leite.

In this work we study the existence of nontrivial solution for elliptic systems of the form:

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{in } \Omega \\ -\Delta v = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0, \;\; v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $p > 0$, Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function satisfying appropriate conditions (for example $f(s) = s^2 e^s$).

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em algumas questões relacionadas a sistemas que têm o seguinte modelo como protótipo:

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0, \ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $p > 0$, Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e sem restrição de crescimento.

O problema (1) foi amplamente investigado na literatura durante as três últimas décadas. Para $f(s) = |s|^{q-1}s$ as noções de sublinearidade, superlinearidade e criticalidade foram introduzidas em [9], [17], [18] e [22]. Note que, o comportamento de (1) é superlinear quando $pq > 1$, sublinear quando $pq < 1$ e crítico (supercrítico, subcrítico) quando $N \geq 3$ e (p, q) está sobre (acima, abaixo) a hipérbole crítica

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}.$$

O caso superlinear e subcrítico foi completamente estudado em [6], [11] e [13], onde a existência de pelo menos uma solução clássica positiva é encontrada. O caso sublinear foi estudado em [9], onde a existência e unicidade de solução clássica positiva é obtida. Agora, foi estabelecida em [17] em domínios estrelados, a inexistência de soluções clássicas positivas no caso supercrítico. Finalmente, quando $pq = 1$, seu comportamento é ressonante e o problema do autovalor correspondente foi abordado em [19].

O objetivo deste trabalho é o estudo da existência e regularidade de soluções para o sistema (1) conforme estabelecido no artigo [10] de Figueiredo e Ruf, de 2004. Para isto, precisaremos das seguintes definições:

Definição 0.1. *Dizemos que o par $(u, v) \in E_p \times E_q$, para $1 < q < \infty$, é **solução fraca** do sistema (1) se u e v satisfazem*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega |v|^{p-1} v \phi dx, & \forall \ \phi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla \psi \nabla v dx = \int_\Omega f(u) \psi dx, & \forall \ \psi \in C_0^\infty(\Omega) \end{cases}$$

onde $E_p = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $E_q = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$.

Definição 0.2. *Dizemos que o par* (u, v) *é* ***solução clássica*** *do sistema* (1) *se* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ *e satisfazem o sistema (1) pontualmente.*

O principal resultado deste trabalho, pode ser enunciado como segue.

Teorema 0.3. *Suponha que*

1. $\begin{cases} 0 < p, & se \quad N = 2 \\ 0 < p < \frac{2}{N-2}, & se \quad N \geq 3 \end{cases}$;

2. $f \in C(\mathbb{R})$ *e defina* $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$;

   (a) *Existem constantes* $\theta > \begin{cases} 2, & se \quad p \geq 1 \\ 1 + \frac{1}{p}, & se \quad p < 1 \end{cases}$ *e* $s_0 \geq 0$ *tais que*

   $$0 < \theta F(s) \leq f(s)s, \ \forall |s| \geq s_0;$$

   (b) *e para* s *em uma vizinhança de zero:* $f(s) = \begin{cases} o(s), & se \quad p \geq 1 \\ o(s^{\frac{1}{p}}), & se \quad p < 1 \end{cases}$.

Então o sistema (1) *admite solução fraca não trivial.*

Observação 0.4. *Note que se* $f > 0$ *em* $\mathbb{R}$, *então pelo Princípio do Máximo, as soluções obtidas no Teorema 0.3 são positivas. Além disso, se* $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R})$, *para algum* $\alpha \in (0, 1)$, *então o sistema* (1) *possui solução clássica.*

Este trabalho está subdividido do seguinte modo:

No capítulo 1, apresentaremos de forma sucinta as principais ferramentas para o estudo do capítulo seguinte. Por exemplo, definições e resultados de Análise Funcional, resultados de imersões compacta e contínua, e espaços de funções que iremos trabalhar, como espaços de funções $C^k(\Omega)$ e $C^k(\overline{\Omega})$, espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\Omega)$ e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, espaços $L^p(\Omega)$, espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e os espaços de Sobolev Fracionário $W^{s,p}(\Omega)$. Mais ainda, apresentaremos definições e resultados sobre a teoria elíptica e também sobre o Teorema do Passo da Montanha. As principais referências deste capítulo são Biezuner [1], Botelho, Pelegrino e Teixeira [4], Brezis [5], Demengel e Demengel [7] e Gilbarg e Trudinger [12].

No capítulo 2, abordaremos a prova do Teorema 0.3. Uma maneira de encontrar soluções de (1) é procurar pontos críticos do funcional correspondente ao sistema (1).

O funcional correspondente a este sistema é dado por:

$$\Phi(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |v|^p dx - \int_\Omega F(u) dx$$

no espaço $(H_0^1(\Omega))^2$. A parte quadrática do funcional Φ, isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

é positiva sobre o subespaço $\{(u,u) \in (H_0^1(\Omega))^2\}$ e negativa sobre o subespaço $\{(u,-u) \in (H_0^1(\Omega))^2\}$ de $(H_0^1(\Omega))^2$. Assim, o sistema (1) é chamado fortemente indefinido. No entanto, para que o funcional Φ esteja bem definido e seja de classe C^1, é preciso impor restrições muito fortes sobre F. Assim, faremos uma reformulação variacional adequada. Para isto, vamos dividir a prova do Teorema 0.3 em duas partes.

Para o caso $p > 1$ $(N = 2)$ e $1 < p < 2$ $(N = 3)$, encontramos espaços fracionários $E = E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$ e operadores A^s e A^t adequados para definirmos o funcional

$$I(u,v) = \int_\Omega A^t u A^s v dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^p dx - \int_\Omega F(u) dx$$

associado ao sistema (1). Nesse sentido, é necessário estabelecer os resultados de imersão do espaço E em $C(\overline{\Omega}) \times L^{p+1}(\Omega)$. Ademais, para encontrar pontos críticos, usaremos um Teorema de Li e Willem [15], de 1995.

Para o caso $0 < p \leq 1$ $(N = 2,3)$ e $0 < p < \frac{2}{N-2}$ $(N \geq 4)$, a abordagem para fornecer os resultados de existência de solução é dada por: isolando v na primeira equação do sistema (1) e substituindo na segunda equação, temos que

$$\begin{cases} -\Delta\left(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)\right) = f(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = -\Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{2}$$

Veremos que as soluções do sistema (1) serão dadas por (u,v), onde u é solução do problema (2) e

$$v := |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u).$$

Para encontrar as soluções do problema (2) buscamos os pontos críticos do funcional $I \in C^1(E_p, \mathbb{R})$ dado por

$$I(u) = \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$$

que é obtido pelo Teorema do Passo da Montanha e pelas imersões contínua e compacta $E_p \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Tais resultados de imersão são de extrema importância, uma vez que a função real f não possui nenhum tipo de restrição de crescimento.

Em ambos os casos, usando critérios de regularidade, concluiremos a existência de solução clássica para o sistema (1).

Como aplicação, mostraremos a existência de solução clássica positiva para o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = u^2 e^u & \text{em } \Omega \\ u = 0, \ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

onde $\dfrac{1}{2} < p < \dfrac{2}{N-2}$, se $N \geq 3$ e $\dfrac{1}{2} < p$, se $N = 2$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo do capítulo seguinte.

1.1 Análise Funcional

Nesta seção, vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional. Para maiores detalhes, consultar Botelho, Pelegrino e Teixeira [4], e Brezis [5].

Definição 1.1. *Um espaço normado X que é também um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma é chamado de espaço de Banach.*

Definição 1.2. *Um espaço com produto interno H que é completo com a métrica induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert.*

Proposição 1.3. *(Lei do Paralelogramo) Seja H um espaço vetorial com um produto interno. Então*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall\ x, y \in H.$$

Demonstração. Veja Botelho, Pelegrino e Teixeira [[4], Proposição 5.1.7]. □

Definição 1.4. *Sejam $(X, \|.\|_X)$ e $(Y, \|.\|_Y)$ espaços normados sobre $\mathbb{R}$.*

(i) Dizemos que $T : X \to Y$ é um operador linear, se T for linear, isto é:

- *$T(x+y) = T(x) + T(y)$ para quaisquer $x, y \in X$ e*
- *$T(ax) = aT(x)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e qualquer $x \in X$.*

(ii) Dizemos que $T : X \to Y$ é um operador linear contínuo, se além de T ser linear T também for contínuo, isto é, para todos $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $\|x - x_0\|_X < \delta$.

Definição 1.5. (*i*) *Uma função* $f : M \to N$ *entre espaços métricos é uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

(*ii*) *Um isomorfismo entre espaços normados* X *e* Y *é um homeomorfismo linear* $T : X \to Y$. *Neste caso, dizemos que* X *e* Y *são isomorfos. Se além disso, for uma isometria, isto é,* $\|T(x)\| = \|x\|$, *para todo* $x \in X$, *dizemos que* T *é um isomorfismo isométrico e que* X *e* Y *são isomorfos isometricamente.*

Teorema 1.6. *Sejam* X *e* Y *espaços normados e* $T : X \to Y$ *um operador linear. Então são equivalentes:*

(*a*) T *é lipschitziano.*

(*b*) T *é uniformemente contínuo.*

(*c*) T *é contínuo.*

(*d*) T *é contínuo em algum ponto de* X.

(*e*) T *é contínuo na origem.*

(*f*) $\sup\{\|T(x)\| : x \in X \quad \text{e} \quad \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(*g*) *Existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração. Veja Botelho, Pelegrino e Teixeira [[4], Teorema 2.1.1]. □

Definição 1.7. *Sejam* $(X, \|.\|)$ *um espaço normado sobre o corpo* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *é um funcional linear contínuo se* φ *for linear e contínuo. Além disso, chamamos*

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{\varphi : X \to \mathbb{R}; \varphi \text{ é um funcional linear e contínuo}\}$$

de espaço dual de X.

Teorema 1.8. *Seja* $(X, \|.\|)$ *um espaço normado qualquer. Então* X' *é um espaço de Banach, com a norma*

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Demonstração. Veja Botelho, Pelegrino e Teixeira [[4], Proposição 2.1.4 e Corolário 2.1.5]. □

Definição 1.9. *Um espaço de Banach* X *que contém um subconjunto enumerável e denso é dito separável.*

Proposição 1.10. *Seja* X *um espaço de Banach separável e* $Y \subset X$. *Então* Y *é separável*

Demonstração. Veja Brezis [[5], Proposição 3.25]. □

Definição 1.11. *Seja* $(X, \|.\|)$ *um espaço normado. Definimos o bidual de* X *por* $X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{R}) = \{\psi : X' \to \mathbb{R}; \psi$ *é um funcional linear contínuo* $\}$.

Teorema 1.12. *Seja* X *um espaço normado qualquer. Então* X'' *é um espaço de Banach, com a norma*

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(\varphi)| : \varphi \in X' \quad e \quad \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Demonstração. Note que $X'' = (X')'$. Como X' é um espaço normado, pois $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ define uma norma em X', obtemos pelo Teorema 1.8 que $X'' = (X')'$ é um espaço de Banach, com a norma

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(\varphi)| : \varphi \in X' \quad \text{e} \quad \|\varphi\| \leq 1\}.$$

□

Proposição 1.13. *Para todo espaço normado* X, *o operador linear*

$$J_X : X \to X'', \quad J_X(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in X \text{ e } \varphi \in X'$$

é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de X *em* X''. *Em particular,* X *é isometricamente isomorfo a* $J_X(X) \subset X''$.

Demonstração. Veja Botelho, Pelegrino e Teixeira [[4], Proposição 4.3.1]. □

Definição 1.14. *Um espaço normado* X *para o qual o mergulho canônico* $J_X : X \to X''$ *é sobrejetor é chamado espaço reflexivo.*

Definição 1.15. *Seja* X *um espaço normado. Seja* $(\varphi)_{\varphi \in X'}$ *uma coleção de funcionais* $\varphi : X \to \mathbb{R}$. *A topologia em* X *gerada pelos funcionais* $\varphi \in X'$ *é chamada topologia fraca em* X.

Notação: Denotamos a topologia fraca por $\sigma(X, X')$ *e a convergência nessa topologia, chamada convergência fraca, por* $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 1.16. *Seja uma sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* X. *Então*

(i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ em } \sigma(X, X')] \Leftrightarrow [f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in X']$.

(ii) Se $x_n \to x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(X, X')$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(X, X')$, *então* $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ *é limitada e* $\|u_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(X, X')$ *e* $f_n \to f$ *em* X', *então* $f_n(x_n) \to f(x)$ *em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Veja Brezis [[5], Proposição 3.5]. □

Corolário 1.17. *Se* X *é reflexivo, então todo subespaço fechado de* X *é reflexivo.*

Demonstração. Veja Botelho, Pelegrino e Teixeira [[4], Corolário 6.4.6]. □

Definição 1.18. *Dizemos que um espaço de Banach X é uniformemente convexo se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in X,\ ||x|| \leq 1,\ ||y|| \leq 1 \text{ e } ||x-y|| > \epsilon \Rightarrow ||\tfrac{x+y}{2}|| < 1-\delta.$$

Teorema 1.19 (Milman-Pettis)**.** *Todo espaço de Banach uniformemente convexo X é reflexivo.*

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 3.31]. □

Proposição 1.20. *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \to x$.

Demonstração. Veja Brezis [[5], Proposição 3.32]. □

Teorema 1.21. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Veja Botelho, Pelegrino e Teixeira [[4], Teorema 6.5.4]. □

Definição 1.22. *Um operador linear $T : X \to Y$ entre espaços normados é dito compacto se $T(B_X)$ é relativamente compacto em Y, isto é, $\overline{T(B_X)}$ é compacto em Y. Aqui denotamos $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.*

Proposição 1.23. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear e contínuo.*

(i) Se T é compacto, então vale a implicação,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{em} \quad X \Longrightarrow T(x_n) \to T(x) \quad \text{em} \quad Y. \tag{1.1}$$

(ii) Se X é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, vale (1.1).

Demonstração. Veja Botelho, Pelegrino e Teixeira [[4], Proposição 7.2.8]. □

Definição 1.24. *Sejam X e Y dois espaços normados tais que $X \subset Y$.*

(a) Dizemos que X está imerso continuamente em Y se a aplicação identidade $id : X \to Y$ for um operador linear contínuo. E denotamos por $X \hookrightarrow Y$.

(b) Dizemos que X está imerso compactamente em Y se a aplicação identidade $id : X \to Y$ for um operador linear compacto. E denotamos por $X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$.

Definição 1.25. *Seja X um espaço de Banach e $f : U \subset X \to \mathbb{R}$ uma função real, onde U é um subconjunto aberto de X. Seja $x \in U$ e Δ um subespaço linear de X. A função f é Δ-diferenciável em x, se existe uma aplicação linear $f'_\Delta(x) : \Delta \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f'_\Delta(x)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \text{ para toda direção } h \in \Delta$$

e tal que para todo $h \in \Delta$, a aplicação $x \mapsto f'_\Delta(x)(h)$ é contínua. A função f é dita Δ-diferenciável se é Δ-diferenciável para qualquer ponto $x \in U$.

Se $X = \Delta$ e $f'_\Delta(x)$ é contínua em X para todo $x \in X$, então f é Gâteaux diferenciável.

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, apresentaremos definições e propriedades importantes dos espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Denotamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções de Ω em $\mathbb{R}$ integráveis.

Definição 1.26. *Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 < p < \infty$. Definimos:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

dotado da norma

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.27. *Definimos:*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists C > 0 : |f(x)| < C \text{ q.t.p em } \Omega\}$$

dotado da norma

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| < C \text{ q.t.p em } \Omega\}.$$

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos q como o conjugado de p o número, tal que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.28 (Desigualdade de Hölder)**.** *Assuma que* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* q *o conjugado de* p*. Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 4.6]. □

Teorema 1.29. $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach se* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 4.8]. □

Teorema 1.30. $L^p(\Omega)$ *é um espaço reflexivo se* $1 < p < \infty$*.*

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 4.10]. □

Teorema 1.31. *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e seja* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $||f_n - f||_{L^p} \to 0$*. Então existe* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tais que*

1. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω*;*
2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p em* Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 4.9]. □

Definição 1.32. *Seja* $1 \leq p < \infty$ *definimos:*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável} : \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \text{ para todo } K \subset \Omega \text{ compacto}\}.$$

Teorema 1.33. *O espaço* $L^p(\Omega)$ *é separável se* $1 \leq p < \infty$*.*

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 4.13]. □

Teorema 1.34 (Teorema da representação de Riez)**.** *Sejam* $0 < p < \infty$*,* q *o conjugado de* p *e* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$*. Então, existe uma única função* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\varphi(f) = \int_\Omega ufdx \ , \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$*, ou seja,* $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$ *no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.*

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 4.11]. □

Teorema 1.35 (Egorov)**.** *Assuma que* $|\Omega| < \infty$*. Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis, tais que* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. (com* $|f(x)| < \infty$ *q.t.p.). Então para todo* $\delta > 0$*, existe* $A \subset \Omega$ *mensurável tal que* $|A| < \delta$ *e* $f_n \to f$ *converge uniformemente em* $\Omega \backslash A$*.*

Demonstração. Veja Brezis [[5], Teorema 4.29]. □

1.3 Espaços de Hölder

Nesta seção, descreveremos as notações e definições dos espaços de Hölder que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Definiremos a seguir os espaços de Hölder que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

Usaremos a notação de multi-índice para denotar a derivada parcial

$$D^\gamma f(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} ... \partial x_n^{\gamma_n}}(x),$$

onde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n$.

Definição 1.36. *Para $k \geq 0$ um inteiro. Definimos*

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : D^\gamma f \text{ é contínua em } \Omega, \ \forall |\gamma| \leq k\}.$$

Denotaremos $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Definição 1.37. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. Definimos o suporte de f como o conjunto*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Se $\operatorname{supp}(f)$ *for um compacto em Ω, então dizemos que f possui suporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ ao espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto.*

Definição 1.38. *O conjunto das funções $f \in C^k(\Omega)$ e que tem suporte compacto é denotado por $C_0^k(\Omega)$ (ou $C_0^\infty(\Omega)$ se $k = \infty$).*

Corolário 1.39. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u f dx = 0, \ \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então $u = 0$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Veja Brezis [[5], Corolário 4.24]. □

Definição 1.40. *Para todo $k \geq 0$ inteiro e $0 < \alpha \leq 1$, os espaços de Hölder são definidos como:*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega), \ \forall |\gamma| \leq k\},$$

onde $C^\alpha(\Omega)$ é o espaço das funções Hölder contínuas, isto é, as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\sup_{x,y\in\Omega; x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Não podemos adotar a norma do sup para transformar $C^k(\Omega)$ em um espaço normado. Mas, lembrando que uma função limitada e uniformemente contínua em Ω tem uma única extensão contínua limitada em $\overline{\Omega}$, podemos definir o seguinte espaço.

Definição 1.41. *Para todo $k \geq 0$ inteiro, definimos*

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\Omega) : D^\gamma f \text{ é limitada e uniformemente contínua em } \Omega, \forall |\gamma| \leq k\}$$

dotada da norma

$$||f||_{C^k} = \max_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{L^\infty}.$$

Similarmente, definimos

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\overline{\Omega}) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega),\ \forall |\gamma| \leq k\}$$

e transformamos $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ em um espaço normado definindo

$$||f||_{C^{k,\alpha}} = ||f||_{C^k} + \max_{|\gamma|\leq k} [D^\gamma f]_{C^\alpha},$$

onde

$$[D^\gamma f]_{C^\alpha} = \sup_{x,y\in\Omega; x\neq y} \frac{|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Proposição 1.42. *$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja Biezuner [[2], proposição 1.21]. □

Teorema 1.43. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então para todo k e para todos $0 < \alpha < \beta \leq 1$ valem as seguintes imersões:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \tag{1.2}$$
$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \tag{1.3}$$
$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{1.4}$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas.
Se Ω é convexo, valem duas imersões adicionais:

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}), \tag{1.5}$$
$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \tag{1.6}$$

sendo a última compacta se Ω for também limitado.

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Teorema 9.6]. □

1.4 Espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Nesta seção, apresentaremos as notações e resultados sob espaços de Sobolev, os quais serão definidos, no que segue. Para tais definições $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Definição 1.44. *Dizemos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é k-vezes fracamente diferenciável, se para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = k$ existe $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, tal que*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

onde v_α é denotada por $D^\alpha u$.

Definição 1.45. $W^k(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) : u$ *é m-vezes fracamente diferenciável com* $1 \leq m \leq k\}$.

Observação 1.46. $C^k(\Omega) \subsetneq W^k(\Omega)$.

Exemplo 1.47. *Sejam $\Omega = (-1, 1)$ e $u(x) = |x|$. Então $u \in W^1(\Omega)$, mas $u \notin C^1(\Omega)$. De fato, como u é contínua, então $u \in L^1(\Omega)$.*

Assim, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Logo, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^0 x\varphi'(x)dx + \int_0^1 x\varphi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi(x)dx - \int_0^1 \varphi(x)dx \\ &= -\left(\int_{-1}^0 (-1)\varphi(x)dx + \int_0^1 \varphi(x)dx\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^1 v(x)\varphi(x)dx,$$

onde

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{, se } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{, se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Daí, $Du = v$. Assim, $u \in W^1(\Omega)$. Note que u' não é contínua em 0. Logo $u \notin C^1(\Omega)$.

Definição 1.48. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $k \geq 0$ um inteiro. Definimos*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega); \textit{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Tal conjunto é chamado de Espaço de Sobolev. Esse é um espaço normado, munido da norma

$$||u||_{W^{k,p}} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{L^p},$$

quando $1 \leq p < \infty$, *e da norma*

$$||u||_{W^{k,\infty}} = \max_{0\leq|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{L^\infty},$$

quando $p = \infty$.

Definimos ainda:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Observação 1.49. *Note que das definições de* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *e* $W^{k,p}(\Omega)$, *para todo* $p \geq 1$ *e* $k \geq 0$ *inteiro, temos que:*

$$C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Teorema 1.50. $W^{k,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach se* $1 \leq p \leq \infty$, *separável se* $1 \leq p < \infty$, *e reflexivo e uniformemente convexo se* $1 < p < \infty$.

Demonstração. Seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então para cada $|\alpha| \leq k$, $(D^\alpha u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$.

De fato, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $n, m \geq n_0$ temos

$$||D^\alpha u_n - D^\alpha u_m||_{L^p} \leq ||u_n - u_m||_{W^{k,p}} < \epsilon.$$

Como $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach temos para cada $|\alpha| \leq k$, existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_m \to v_\alpha$.

Por outro lado, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Então existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$, quando $m \to \infty$.

Para concluir que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, basta provar que $D^\alpha u = v_\alpha \in L^p(\Omega)$.

De fato, temos que para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(D^\alpha\varphi)dx = & \lim_{m\to\infty}\int_\Omega u_m(D^\alpha\varphi)dx = & \lim_{m\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (D^\alpha u_m)\varphi dx \\ = & (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha\varphi dx. \end{aligned}$$

Logo, $v_\alpha = D^\alpha u$ e, portanto, $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Para provar o resto de propriedades, considere a aplicação

$$T : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow \prod_{0\leq|\alpha|\leq k} L^p(\Omega)$$

dada por $T(u) = (D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq k}$. Note que T é isometria linear.

Mostraremos que $T(W^{k,p}(\Omega))$ é fechado em $\prod\limits_{0\leq|\alpha|\leq k} L^p(\Omega)$.

De fato, seja

$$D^\alpha u_m \to v_\alpha \in \prod_{0\leq|\alpha|\leq k} L^p(\Omega)$$

quando $m \to \infty$. Pela definição de fracamente diferenciável temos, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega D^\alpha u_m \varphi dx = (-1)^n \int_\Omega u_m D^\alpha \varphi dx. \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$||u_m - u_n||_{W^{k,p}} = ||T(u_m) - T(u_n)||_{\prod\limits_{0\leq|\alpha|\leq k} L^p} \to 0.$$

Assim, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Como $W^{k,p}(\Omega)$ é Banach temos

$$u_m \to u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Daí, quando $m \to \infty$ em (1) temos

$$\int_\Omega v_\alpha \varphi dx = (-1)^n \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx.$$

Logo, $v_\alpha = D^\alpha u$ para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$.

Como o produto finito de subespaços fechados de espaços de Banach separáveis (resp. reflexivos, uniformemente convexos) são separáveis (resp. reflexivos, uniformemente convexos), concluímos que $W^{k,p}(\Omega) \cong T(W^{k,p}(\Omega))$ é separável (resp. reflexivo, uniformemente convexo). □

Corolário 1.51. *$(W^{k,2}(\Omega), ||.||_{W^{k,2}})$ é um espaço de Banach, na verdade é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Direto do Teorema 1.50 e do fato que $L^2(\Omega)$ é Hilbert. □

Definição 1.52. *Uma função suavizante é uma função não negativa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}\varphi = B_1(0)$ e satisfazendo $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$.*

Definição 1.53. *Considere $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dado $\epsilon > 0$, a regularização u_ϵ de u é definida como senda a convolução*

$$u_\epsilon(x) = \tfrac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y)dy.$$

Proposição 1.54 (Regra de Leibnitz)**.** *Se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $\phi u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Proposição 11.16]. □

Observação 1.55. *Espaços locais $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ podem ser definidos como aqueles espaços cujos elementos são funções que pertencem ao espaço $W^{k,p}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, ou seja, $\overline{\Omega'}$ é compacto em Ω.*

Lema 1.56. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u_\epsilon \to u$ em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, isto é, $u_\epsilon \to u$ em $W^{k,p}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$.*

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Lema 11.17]. □

Teorema 1.57 (Meyer)**.** *Para $1 \leq p < \infty$, $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\Omega_n = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\} \cap B_n(0)$.
Note que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ e $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$. Considere $\{\Omega_{i+1} \backslash \overline{\Omega}_{i-1}\}_{i=0}^\infty$ cobrimento de Ω.
Seja $(\phi_i)_{i=1}^\infty$ uma partição da unidade subordinada à dita cobertura, isto é:

$$\phi_i \in C_0^\infty(\Omega_{i+1} \backslash \overline{\Omega}_{i-1}) \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = 1.$$

Sejam $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$. Como $\phi_i \in C_0^\infty(\Omega)$, pela regra de Leibniz, temos $\phi_i u \in W^{k,p}(\Omega)$.
Pelo Lema 1.56, para cada $1 \leq i < \infty$, podemos escolher ϵ_i tal que $\text{supp}(\phi_i u)_{\epsilon_i} \subset \Omega_{i+1} \backslash \overline{\Omega}_{i-1}$ e

$$||(\phi_i u)_{\epsilon_i} - \phi_i u||_{W^{k,p}} < \tfrac{\epsilon}{2^i}.$$

Considere $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i u)_{\epsilon_i} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} ||v - u||_{W^{k,p}} &= ||\sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i u)_{\epsilon_i} - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i u||_{W^{k,p}} \\ &= ||\sum_{i=1}^{\infty} [(\phi_i)_{\epsilon_i} - \phi_i u]||_{W^{k,p}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} ||(\phi u)_{\epsilon_i} - \phi_i u||_{W^{k,p}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, $||v - u||_{W^{k,p}} < \epsilon$. Portanto, $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$. □

Corolário 1.58. $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Corolário 11.21]. $\square$

Exemplo 1.59. *Seja* $\Omega = (-1,1)\backslash\{0\}$. *A função*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se } x \in (0,1) \\ 0 & ,\text{se } x \in (-1,0) \end{cases}$$

pertence a $W^{1,2}(\Omega)$ *(sua derivada fraca de ordem 1 é identicamente nula), mas ela não pode ser aproximada por elementos de* $C^\infty(\overline{\Omega})$. *De fato, se* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *então*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{0} u(x)\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} u(x)\varphi'(x)dx \\ &= \int_0^1 \varphi'(x)dx \\ &= \lim_{b\to 1, a\to 0} \int_a^b \varphi'(x)dx \\ &= \lim_{b\to 1, a\to 0} [\varphi(b) - \varphi(a)] = 0, \end{aligned}$$

pois $\varphi = 0$ *numa vizinhança de* $\partial\Omega$. *Assim,* $Du = 0 \in L^2(\Omega)$. *Portanto,* $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Agora, suponha que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$ *em* $W^{1,2}(\Omega)$. *Pela definição da norma em* $W^{1,2}(\Omega)$, *temos que* $u_n \to u$ *em* $L^2(\Omega)$. *Logo, pelo Teorema 1.31 existe* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Logo, já que $|\Omega| < \infty$ *e* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de funções mensuráveis, pelo Teorema de Egorov temos*

$$\forall\delta > 0,\ \exists A \subset \Omega \text{ mensurável tal que } |A| < \delta \text{ e } u_{n_k} \to u \text{ uniformemente em } \Omega\backslash A.$$

Tomando $\delta = \frac{1}{2}$, *concluímos que* u *é uniformemente contínua em* $\Omega\backslash A$ *(pois, é limite de funções uniformemente contínuas). Mas isso é um absurdo, pois* u *não é contínua em* $\Omega\backslash A$ *e, portanto, não é uniformemente contínua em* $\Omega\backslash A$.

Agora, apresentaremos definições e resultados importantes de imersões contínuas dos espaços de Sobolev que serão utilizadas ao longo das seguintes seções.

Definição 1.60. *Dado* $x \in \mathbb{R}^n$, *escreve-se* $x = (x', x_n)$ *com* $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. *Definimos:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_+ &= \{x : x_n > 0\}; \\ Q &= \{x : \|x\| < 1\}; \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}^n_+; \\ Q_0 &= \{x : x_n = 0, \|x\| < 1\}. \end{aligned}$$

Dizemos que um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, se para todo $x \in \partial\Omega$, existe uma bola $U = B(x)$ em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação bijetiva $\psi : Q \longrightarrow U$ tal que

$$\psi \in C^1(\overline{Q}), \psi^{-1} \in C^1(\overline{U}), \psi^{-1}(\Omega \cap U) \subset Q_+ \text{ e } \psi^{-1}(U \cap \partial\Omega) \subset Q_0.$$

Se $\psi \in C^{k,\alpha}(\overline{Q})$ e $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\overline{U})$, $0 \leq \alpha \leq 1$, dizemos que Ω é de classe $C^{k,\alpha}$. Em particular, se $\psi \in C^{0,1}(\overline{Q})$ e $\psi^{-1} \in C^{0,1}(\overline{U})$ dizemos que Ω é um aberto Lipschitz.

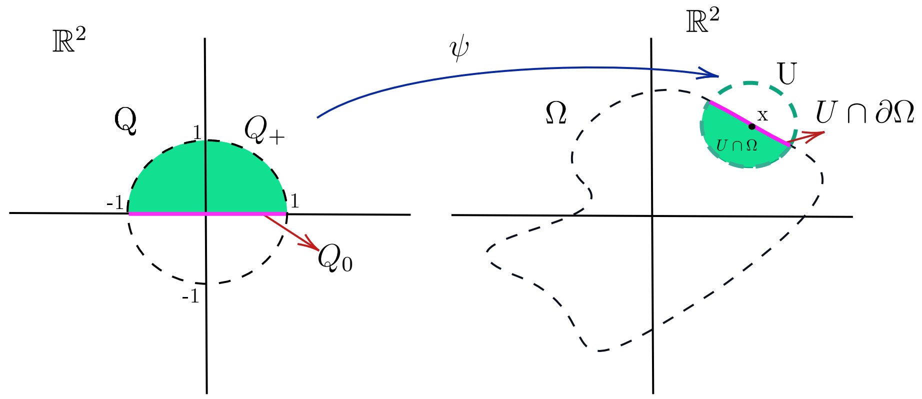

Figura 1

Teorema 1.61. *Seja Ω um aberto de classe C^1. Se $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Teorema 11.24]. □

Teorema 1.62 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e de classe C^1. Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in C_0^1(\Omega)$ temos:*

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C \left(\int_\Omega |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Lema 11.27]. □

Teorema 1.63. *Seja $p \geq 1$. Então:*

1. *Se $kp < n$, temos $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q \in [p, p_k^*]$, $\frac{1}{p_k^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ com $p_k^* = \frac{np}{n-kp}$;*

2. *Se $kp = n$, temos $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \forall q \in [p, \infty)$;*

3. *Seja $kp > n$.*

(a) *Se* $k - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, *então*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

onde $m = [k - \frac{n}{p}]$ *e* $\alpha = k - \frac{n}{p} - m$;

(b) *Se* $k - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$, *então*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m-1}(\mathbb{R}^n),$$

onde $m = k - \frac{n}{p}$.

Demonstração. Veja Demengel e Demengel [[7], Teorema 2.31]. □

Teorema 1.64. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1 *e* $p \geq 1$. *Então:*

1. *Se* $kp < n$, *então* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, p_k^*]$, $\frac{1}{p_k^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ *com* $p_k^* = \frac{np}{n-kp}$.
2. *Se* $kp = n$, *então* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, \infty)$.
3. *Se* $kp > n$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$$

para todo $0 \leq m \leq k - \frac{n}{p}$, *onde* $0 < \alpha < [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}$, *se* $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ *e* $0 < \alpha < 1$ *se* $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Teorema 11.33, Teorema 11.37 e Teorema 11.45]. □

Proposição 1.65 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e limitado. Se* $1 \leq p < n$, *então existe uma constante* $c(n, p, \Omega) = c > 0$ *tal que:*

$$||u||_{L^p} \leq c||Du||_{L^p} \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ .$$

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Corolário 11.58]. □

Finalmente, apresentaremos um resultado de imersão compacta para o espaço de Sobolev que será utilizado ao longo das seguintes seções.

Teorema 1.66 (Rellich-Kondrakhov)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1, $kp < n$ *e* $p \geq 1$. *Então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*).$$

Demonstração. Veja Biezuner [[1], Teorema 11.49]. □

1.5 Espaços de Sobolev Fracionários $W^{s,p}(\Omega)$

Nesta seção, apresentaremos definições e noções preliminares dos espaços de Sobolev fracionários, assumindo certa regularidade para o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Apresentaremos resultados importantes como os Teoremas de imersão contínua e compacta, que serão utilizados ao longo deste trabalho. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $0 < s < 1$.

Definição 1.67. *Para $p > 1$ com $n \geq 1$, definimos os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}(\Omega)$ como:*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Os espaços de Sobolev fracionários são espaços de Banach intermediários entre $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$ induzido com a norma

$$||u||_{W^{s,p}} := \left(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde

$$[u]_{W^{s,p}} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

é chamado seminorma de Gagliardo de u.

Proposição 1.68. *O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Veja Demengel e Demengel [[7], Proposição 4.27]. □

Vamos adotar a seguinte notação:

$$C_b^k(\Omega) := C^k(\overline{\Omega}).$$

Uma definição análoga para os espaços de Hölder é dada por

$$C_b^{0,\lambda}(\Omega) = \{\varphi \in C_b^0(\Omega) : \exists C > 0; |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^\lambda, \ \forall (x,y) \in \Omega^2\}.$$

Quando $\lambda = 1$, seus elementos são chamados de funções contínuas e Lipschitz. Mais geralmente:

$$C_b^{k,\lambda}(\Omega) = \{\varphi \in C_b^k(\Omega) : \exists C > 0; |D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)| \leq C|x-y|^\lambda, \ \forall |\alpha| = k, \ \forall (x,y) \in \Omega^2\}.$$

Teorema 1.69. *Seja* $0 < s < 1$ *e* $p > 1$.

1. *Se* $sp < n$, *então* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $q \leq \frac{np}{n-sp}$;
2. *Se* $sp = n$, *então* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $q < \infty$;
3. *Se* $sp > n$, *então* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e, mais, precisamente,*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{0,s-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Veja Demengel e Demengel [[7], Teorema 4.47]. □

Definição 1.70. *Dizemos que* Ω *admite uma* (s,p)*-extensão, se existe um operador linear contínuo*

$$T : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

dado por $T(u) = \overline{u}$, *tal que*

$$\forall x \in \Omega,\ u \in W^{s,p}(\Omega);\ Tu(x) = u(x).$$

Proposição 1.71. *Seja* $0 < s < 1$ *e* $p > 1$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto que admite uma* (s,p)*- extensão. Então* $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ *é denso em* $W^{s,p}(\Omega)$.

Demonstração. Veja Demengel e Demengel [[7]. Proposição 4.52]. □

Corolário 1.72. *Seja* $0 < s < 1$ *e* $p > 1$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e Lipschitz.*

1. *Se* $sp < n$, *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q \leq \frac{np}{n-sp}$;
2. *Se* $sp = n$, *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q < \infty$;
3. *Se* $sp > n$, *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *e, mais precisamente,*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,s-\frac{n}{p}}(\Omega).$$

Demonstração. Veja Demengel e Demengel [[7], Corolário 4.53]. □

Teorema 1.73. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto, Lipschitz e limitado. Sejam* $0 < s < 1$, $p > 1$ *e* $n \geq 1$.

1. *Se* $sp < n$, *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q < \frac{np}{n-sp}$;
2. *Se* $sp = n$, *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q < \infty$;
3. *Se* $sp > n$, *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ *para* $\lambda < s - \frac{n}{p}$.

Demonstração. Veja Demengel e Demengel [Veja [7], Teorema 4.54]. □

Definição 1.74. *Seja $s \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ com $s > 1$. Definimos*

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{[s],p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{s-[s],p}(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| = [s]\},$$

onde $[s]$ é o maior inteiro menor que s, α denota a n-upla $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha|$ denota a soma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

O espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo dotado da norma

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \left(\|u\|^p_{W^{[s],p}} + [u]^p_{W^{s-[s],p}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 1.75. *Se $s = k$ é um inteiro, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ coincide com o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.*

Lema 1.76. *Seja $p \geq 1$ e $s, s' > 1$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto lipschitz. Então, se $s \leq s'$, temos*

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja Di Nezza, Palatucci e Valdinoci [[20], Corolário 2.3]. □

Proposição 1.77. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e Lipschitz. Para $s > 0$ e $p \geq 1$, temos que:*

1. *Se $p < \infty$, $W^{s,p}(\Omega)$ é separável.*
2. *Se $1 < p < \infty$, $W^{s,p}(\Omega)$ é uniformemente convexo (e, portanto, reflexivo).*

Teorema 1.78 (Teorema da imersão contínua de Sobolev)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e Lipschitz. Sejam $s > 0$, $p \geq 1$ e $n \geq 1$.*

1. *Se $sp < n$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \leq \frac{np}{n-sp}$;*
2. *Se $sp = n$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q < \infty$;*
3. *Para $sp > n$, temos que:*
   - *Se $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{[s-\frac{n}{p}],s-\frac{n}{p}-[s-\frac{n}{p}]}(\Omega)$;*
   - *Se $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{s-\frac{n}{p}-1,\lambda}(\Omega)$ para todo $\lambda < 1$.*

Demonstração. Consideremos os seguintes casos:

Caso 1: $sp < n$. Faremos a prova por indução em $[s]$. Se $[s] = 0$, pelo Corolário 1.72, temos o resultado.

Assumindo que o Teorema está provado para $[s] = m-1$, com $m \geq 1$. Suponha que $[s] = m$ e seja $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Então, $D^\beta u \in W^{s-1,p}(\Omega)$, onde $\beta = (0, ..., 1, ..., 0)$ com 1 na posição $1 \leq i \leq n$. De fato,

$$D^\beta u \in W^{s-1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow D^\alpha(D^\beta u) \in W^{s-1-(m-1),p}(\Omega), \forall |\alpha| = m-1,$$

onde $[s-1] = m-1$. Note que

$$D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha(D^\beta u)$$

e se $|\alpha| = m-1$ e $|\beta| = 1$, temos que $|\alpha+\beta| = m$.

Assim,

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u \in W^{s-m,p}(\Omega) = W^{s-1-(m-1),p}(\Omega), \forall |\alpha+\beta| = m,$$

pois $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Por definição, $u \in W^{[s],p}(\Omega)$. Portanto, como $(s-1)p < sp < n$ e pela hipótese de indução, temos que

$$W^{s-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \leq \tfrac{np}{n-(s-1)p}.$$

Então, $D^\beta u \in L^q(\Omega)$, para todo $q \leq \frac{np}{n-(s-1)p}$ e como $u \in W^{[s],p}(\Omega)$ e $[s]p \leq sp < n$, pelo Teorema 1.64, temos $u \in L^q(\Omega)$, para todo $q \leq \frac{np}{n-[s]p}$.

Observe que

$$n-(s-1)p \leq n \text{ e } s-1 \leq [s] \text{ implicam que } p \leq \tfrac{np}{n-(s-1)p} \leq \tfrac{np}{n-[s]p}.$$

Logo,

$$D^\beta u \in L^r(\Omega) \text{ e } u \in L^r(\Omega) \text{ com } r = \tfrac{np}{n-(s-1)p}.$$

Usando os fatos anteriores, concluímos que $u \in W^{1,r}(\Omega)$.

Observe que $sp < n \Leftrightarrow r < n$. Assim, pelo Teorema 1.64, temos que

$$u \in L^q(\Omega), \forall q \leq \tfrac{nr}{n-r}.$$

Em particular, para $q = \frac{nr}{n-r}$, temos que

$$u \in L^{\frac{nr}{n-r}}(\Omega) = L^{\frac{np}{n-sp}}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \leq \tfrac{np}{n-sp}.$$

Caso 2: $sp = n$. Note que, $[s]p < n$ e $(s-1)p < n$. Se $u \in W^{s,p}(\Omega)$, pelo raciocínio anterior, temos $u \in W^{1,r}(\Omega)$ com $r = \frac{np}{n-(s-1)p} = n$.

Portanto, $r = n$ e pelo Teorema 1.64, temos

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para todo } q < \infty.$$

Logo,

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para todo } q < \infty.$$

Caso 3: $sp > n$. Se $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$. Seja j um inteiro satisfazendo $s - 1 - \frac{n}{p} < j < s - \frac{n}{p}$.

Logo, se $u \in W^{s,p}(\Omega)$, então $v = D^\beta u \in W^{s-j,p}(\Omega)$, onde $\beta = (0, ..., j, ..., 0)$ com j na posição $1 \leq i \leq n$. De fato,

$$D^\beta u \in W^{s-j,p}(\Omega) \Leftrightarrow D^\alpha(D^\beta u) \in W^{s-j-[s-j],p}(\Omega), \forall |\alpha| = [s-j].$$

Observe que,

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$$

e $|\alpha| = [s-j] = [s] - [j]$ implica que $|\alpha + \beta| = [s]$. Daí,

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u \in w^{s-[s],p}(\Omega) = W^{s-j-[s-j],p}(\Omega),$$

pois $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Agora, pelo Lema 1.76,

$$v = D^\beta u \in W^{s-j,p}(\Omega) \subseteq W^{s-j-1,p}(\Omega)$$

e, pelo Caso 1, $D^\gamma v \in W^{s-j-1,p}(\Omega)$, onde $\gamma = (0, ..., 1, ..., 0)$ com 1 na posição $1 \leq i \leq n$. Então, $v, D^\gamma v \in W^{s-j-1,p}(\Omega)$.

A equação $(s - j - 1)p < n$ implica que, pelo Caso 1,

$$W^{s-j-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \leq \tfrac{np}{n-(s-j-1)p}.$$

Em particular,

$$W^{s-j-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \text{ com } r = \tfrac{np}{n-(s-j-1)p}.$$

Assim, $v, D^\gamma v \in L^r(\Omega)$. Logo, pelo mostrado no Caso 1, $v \in W^{1,r}(\Omega)$. Note que $j < s - \frac{n}{p}$ implica que $r > n$.

Assim, $v \in C_b^{0,1-\frac{n}{r}}(\Omega) = C_b^{0,s-\frac{n}{p}-j}(\Omega)$. De fato, pelo Teorema 1.64, temos

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$$

para todo $0 \leq m < 1 - \frac{n}{r}$, onde

$$0 < \theta < [\tfrac{n}{r}] + 1 - \tfrac{n}{r}, \text{ se } \tfrac{n}{r} \notin \mathbb{N},$$
$$0 < \theta < 1 \text{ se } \tfrac{n}{r} \in \mathbb{N}.$$

Observe que, $C^{m,\theta}(\overline{\Omega}) = C_b^{m,\theta}(\Omega)$. Em particular, quando $m = 0$ e $\theta = 1 - \frac{n}{r}$ temos $v \in C_b^{0,1-\frac{n}{r}}(\Omega)$. Como $r = \frac{np}{n-(s-j-1)p}$, temos que $v \in C_b^{0,s-\frac{n}{p}-j}(\Omega)$.

Sabemos que $v = D^\beta u \in C_b^{0,s-\frac{n}{p}-j}(\Omega)$. Então,

$$\exists C > 0, \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega, |D^\beta u(x) - D^\beta u(y)| \leq C|x - y|^{s-\frac{n}{p}-j}.$$

Portanto,

$$u \in C_b^{[s-\frac{n}{p}],s-\frac{n}{p}-[s-\frac{n}{p}]}(\Omega).$$

Se $s - \frac{n}{p} = j \in \mathbb{N}$, então $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Logo, $D^\beta u \in W^{s-j,p}(\Omega)$, onde $\beta = (0, ..., 1, ..., 0)$ com 1 na j-ésima coordenada $1 \leq j \leq n$.

Além disso, $D^{\beta-\gamma} u \in W^{s-(j-1),p}(\Omega)$ implica $D^{\beta-\gamma} u \in W^{s-j,p}(\Omega)$, onde $\gamma = (0, ..., 1, 0, ..., 0)$ com 1 na i-ésima coordenada $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$D^{\beta-\gamma} u, D^\beta u \in W^{s-j,p}(\Omega) = W^{\frac{n}{p},p}(\Omega).$$

Daí, deduzimos que

$$D^{\beta-\gamma} u \in W^{1,q}(\Omega), \forall q < \infty.$$

De fato, observe que $D^\gamma(D^{\beta-\gamma})u = D^\beta u$. Pelo Caso 2, temos

$$D^\beta u \in W^{\frac{n}{p},p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q < \infty.$$

Então,

$$D^\beta u \in L^q(\Omega), \forall q < \infty.$$

Assim,

$$D^{\beta-\gamma} u \in W^{1,q}(\Omega), \forall q < \infty.$$

Portanto, $D^{\beta-\gamma} u \in C_b^{0,\lambda}(\Omega)$, para todo $\lambda < 1$. De fato, pelo Teorema 1.64, para $q > n$, temos

$$D^{\beta-\gamma} u \in W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\theta}(\overline{\Omega}) = C_b^{m,\theta}(\Omega)$$

para todo $0 \leq m < 1 - \frac{n}{q}$ e

$$0 < \theta < [\tfrac{n}{q}] + 1 - \tfrac{n}{q}\text{ , se } \tfrac{n}{q} \notin \mathbb{N},$$
$$0 < \theta < 1, \text{ se } \tfrac{n}{q} \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $m = 0$ e $\theta = \lambda < 1$, temos

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\Omega).$$

Assim, $D^{\beta-\gamma}u \in C_b^{0,\lambda}(\Omega)$. Portanto, pelo mesmo raciocínio como no Caso anterior,

$$u \in C^{s-\frac{n}{p}-1,\lambda}(\Omega) \text{ para todo } \lambda < 1.$$

Isto conclui a prova. □

Teorema 1.79 (Teorema da imersão compacta de Sobolev)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, Lipschitz e limitado. Sejam $s > 0$, $p \geq 1$ e $n \geq 1$.*

1. *Se $sp < n$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q < \frac{np}{n-sp}$;*
2. *Se $sp = n$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q < \infty$;*
3. *Para $sp > n$, temos:*
   - *Se $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C_b^{[s-\frac{n}{p}],\lambda}(\Omega)$ para todo $\lambda < s - \frac{n}{p} - [s - \frac{n}{p}]$;*
   - *Se $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C_b^{s-\frac{n}{p}-1,\lambda}(\Omega)$ para todo $\lambda < 1$.*

Demonstração. Veja Demengel e Demengel [[7], Teorema 4.58]. □

Observação 1.80. *Nos casos $(0 < p \leq 1)(N = 2, 3)$ e $0 < p < \frac{2}{N-2}(N \geq 4)$ temos que $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C_b(\Omega)$. De fato, note que*

$$\tfrac{1}{p} > \tfrac{N-2}{2} \Rightarrow \tfrac{p+1}{p} > \tfrac{N}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{p+1}{p}\right) > N$$

vale para todo $N \geq 2$. Logo, pelo Teorema 1.79, temos:

- *Se $2 - \frac{pN}{p+1} \notin \mathbb{N}$, então $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C_b^{\left[2-\frac{pN}{p+1}\right],2-\frac{pN}{p+1}-\left[2-\frac{pN}{p+1}\right]}(\Omega)$.*
- *Se $2 - \frac{pN}{p+1} \in \mathbb{N}$, então $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C_b^{2-\frac{pN}{p+1}-1,\lambda}(\Omega)$, para todo $\lambda < 1$.*

Mas,

$$C_b^{\left[2-\frac{pN}{p+1}\right],2-\frac{pN}{p+1}-\left[2-\frac{pN}{p+1}\right]}(\Omega) \subset C_b(\Omega)$$

e

$$C_b^{2-\frac{pN}{p+1}-1,\lambda}(\Omega) \subset C_b(\Omega),$$

para todo $\lambda < 1$.

Assim, concluímos que $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C_b(\Omega) = C(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.81 (Teorema da imersão compacta de Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave e limitado. Sejam $s > 0$, $p \geq 1$ e $n \geq 1$. Então:*

1. *$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C_b^{\mu}(\Omega)$ se, e somente se, $s - \frac{n}{p} > \mu$.*
2. *$W^{s_1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow W^{s_2,q}(\Omega)$ se, e somente se, $q \geq p, s_1 - \frac{n}{p} > s_2 - \frac{n}{q}$.*

Demonstração. Veja Qin [[21], Teorema 1.1.16]. □

1.6 Pontos Críticos

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados que serão de grande relevância para o trabalho a seguir. Para mais detalhes consultar Evans [8] e Jabri [14].

Sejam H espaço de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional não linear em H.

Definição 1.82. *Dizemos que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ se existe $I'(u)$, $\forall u \in H$ e além disso $I' : H \to H'$ é continuo.*

Definição 1.83. *Dizemos que*

(i) $u \in H$ é um ponto crítico, se $I'(u) = 0$;

(ii) $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico, se $K_c := \{u \in H : I(u) = c; I'(u) = 0\} \neq \emptyset$.

Definição 1.84 (Palais-Smale (PS))**.** *O funcional $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale, se qualquer sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ tal que*

(i) $I(u_n)$ é limitada;

(ii) $I'(u_n) \to 0$ em H',

admite uma subsequência convergente em H.

Teorema 1.85 (Teorema do Passo da montanha)**.** *Seja $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Suponha que:*

(i) $I(0) = 0$;

(ii) Existem constantes $r, a > 0$ tais que

$$I(u) \geq a, \text{ se } \|u\| = r;$$

(iii) Existe $v \in H$ tal que $\|v\| > r$, $I(v) \leq 0$.

Então

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(g(t))$$

é um valor crítico de I, onde $\Gamma := \{g \in C([0,1], H) : g(0) = 0; g(1) = v\}$.

Demonstração. Veja Evans [[8],Teorema 2]. □

1.7 Um pouco sobre a teoria elíptica

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados sobre problemas envolvendo operadores elípticos, o qual será definido no que segue. Para mais detalhes consultar Gilbarg e Trudinger [12]. Seja L um operador linear de segunda ordem da forma:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu, \tag{1.7}$$

onde $a_{ij} = a_{ij}(x), b_i = b_i(x), c = c(x), D_{ij}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Definição 1.86. *Dizemos que o operador L definido em (1.7) é elíptico no ponto $x \in \Omega$, se a matriz dos coeficientes $(a_{ij}(x))$ é positiva, isto é, se $\lambda(x), \Lambda(x)$ denotam respectivamente o autovalor mínimo e máximo de $(a_{ij}(x))$ então*

$$0 < \lambda(x)\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)\|\xi\|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

onde $\|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$.

O operador é dito elíptico em Ω se o for em cada ponto $x \in \Omega$. Agora, dizemos que o operador L é estritamente elíptico em Ω se existe $\lambda_0 > 0$ (λ_0 não depende de x) tal que $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Além disso, se $\dfrac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado em Ω, então L é dito uniformemente elíptico.

Teorema 1.87. *(Princípio do Máximo Forte) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Seja L um operador uniformemente elíptico tal que $c = 0$. Suponha que u satisfaz $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$) em Ω. Se u atinge o seu máximo (mínimo) no interior de Ω, então u é constante.*

Se $c \leq 0$ e u atinge um máximo não-negativo (mínimo não-positivo) no interior de Ω, então u é constante.

Independentemente do sinal de c, se u atinge um máximo igual a 0 (mínimo igual a 0) no interior de Ω, então u é constante.

Demonstração. Veja Gilbarg e Trudinger [[12], Teorema 3.5]. □

Corolário 1.88. *(Propriedade de Preservação de Positividade) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Seja L um operador uniformemente elíptico com $c \leq 0$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$\begin{cases} -Lu \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

então $u(x) > 0$ para $x \in \Omega$ ou $u \equiv 0$.

Demonstração. Veja Sweers [[23], Corolário 2.5]. □

Teorema 1.89. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe $C^{1,1}$ e L um operador estritamente elíptico em Ω com coeficientes $a_{ij} \in C(\overline{\Omega}), b_i, c \in L^\infty$, com $i, j = 1, ..., n$ e $c \leq 0$. Então, se $h \in L^p(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $Lu = h$ em Ω, $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Veja Gilbarg e Trudinger [[12], Teorema 9.15]. □

Lema 1.90. *Seja L um operador que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.89. Então, existe C (independente de u) tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), 1 < p < \infty$.

Demonstração. Veja Gilbarg e Trudinger [[12], Lema 9.17]. □

Teorema 1.91. *Seja $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ solução da equação elíptica $Lu = f$, num domínio Ω, com coeficientes de L pertencendo a $C^{k-1,1}(\Omega)$ $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$, $f \in W_{loc}^{k,q}(\Omega)$ $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$ com $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$ e $0 < \alpha < 1$. Então,*

$$u \in W_{loc}^{k+2,q}(\Omega) \ (C^{k+1,\alpha}(\Omega)).$$

Além disso, se $\Omega \in C^{k+1,1}$ $(C^{k+1,\alpha})$, L é estritamente elíptico em Ω com coeficientes em $C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ $(C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega}))$ e $f \in W^{k,q}(\Omega)$ $(C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega}))$ então,

$$u \in W^{k+2,q}(\Omega) \ (C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})).$$

Demonstração. Veja Gilbarg e Trudinger [[12], Teorema 9.19]. □

Teorema 1.92. *(Teorema de Kellogg) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$. Sejam $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, o problema de Dirichlet para equação de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f & em\ \Omega \\ u = g & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

possui uma única solução u de classe $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Veja Gilbarg e Trudinger [[12], Corolário 4.14]. □

Definição 1.93. *(Notação o pequena de Landau) Sejam f, g funções reais, definidas num mesmo suconjunto de $\mathbb{R}$, escrevemos*

$$f = o(g) \quad \textit{quando} \quad x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Observação 1.94. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Suponhamos que f e F satisfazem a condição 2(a) do Teorema 0.3, então existem constantes $c, d_1 > 0$ tais que*

$$F(s) \geq c|s|^\theta - d_1.$$

Demonstração. Veja Jabri [[14], Observação 7.5]. □

Capítulo 2

Sistemas elípticos não lineares

2.1 O caso $p > 1$

Nesta seção, consideremos Ω um domínio Lipschitz e limitado de $\mathbb{R}^N$ e $1 < p < \frac{2}{N-2}$, isto é, $N = 2, 3$.

O objetivo desta seção é obter a existência de solução fraca para o sistema (1), utilizando as ideias dadas por Figueiredo e Ruf [10] e Hulshoff e van der Vorst [13]. Estabeleceremos uma estrutura variacional apropriada para estudar o sistema (1). Para isto, usaremos os espaços fracionários $E^s(\Omega)$.

Considere o operador Laplaciano

$$-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega).$$

Seja e_n uma autofunção de $-\Delta$ dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta e_n & = & \lambda_n e_n & \text{em } \Omega \\ e_n & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. ,$$

onde λ_n é o autovalor correspondente de e_n, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \to \infty$. Então, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega e_j e_i dx = \delta_{i,j}.$$

Seja

$$E^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

e definimos um operador linear

$$A^s : E^s(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

dado por

$$A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} a_n e_n,$$

onde

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n \text{ com } a_n = \int_\Omega u e_n dx.$$

O operador A^s é linear. De fato, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u,v \in E^s(\Omega)$ tais que $u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ e $v = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e_n$, temos que

$$\begin{aligned} A^s(u+v) &= A^s\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e_n\right) = A^s\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) e_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} (a_n + b_n) e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} (a_n e_n + b_n e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n^{\frac{s}{2}} a_n e_n + \lambda_n^{\frac{s}{2}} b_n e_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} a_n e_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} b_n e_n. \end{aligned}$$

Assim,

$$A^s(u+v) = A^s u + A^s v.$$

Também, temos

$$\begin{aligned} A^s(\alpha u) &= A^s\left(\alpha\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n\right)\right) = A^s\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{\frac{s}{2}} (\alpha a_n) e_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\lambda^{\frac{s}{2}} a_n e_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{\frac{s}{2}} a_n e_n = \alpha(A^s u). \end{aligned}$$

Logo, A^s é um operador linear.

O operador A^s é injetivo. De fato, dados $u,v \in E^s(\Omega)$ tais que $u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ e $v = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e_n$.

Note que, se $A^s u = A^s v$ temos que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} a_n e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} b_n e_n.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} a_n e_n - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} b_n e_n = 0$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} (a_n - b_n) e_n = 0.$$

Como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é linearmente independente temos

$$\lambda_n^{\frac{s}{2}} (a_n - b_n) = 0.$$

Assim, $\lambda_n^{\frac{s}{2}} = 0$ ou $a_n - b_n = 0$.

Note que, como $\lambda_n > 0$, temos $a_n - b_n = 0$. Logo, $a_n = b_n$ e, portanto, $u = v$.

O operador A^s é sobrejetivo. De fato, dado $v \in L^2(\Omega)$, onde $v = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$. Tomemos $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\frac{s}{2}}} a_n e_n$. Então,

$$A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} \left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{s}{2}}} a_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n = v.$$

Afirmamos agora que $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\frac{s}{2}}} a_n e_n \in E^s(\Omega)$. De fato, basta demostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^s \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{s}{2}}} a_n \right|^2 < \infty.$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^s \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{s}{2}}} a_n \right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^s \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{s}{2}}} \right|^2 |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^s \frac{1}{\lambda_n^s} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v|^2 dx &= \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n \right)^2 dx \\
&\geq \int_\Omega (a_1^2 e_1^2 + ... + a_n^2 e_n^2 + ...) dx \\
&= a_1^2 \int_\Omega e_1^2 dx + ... + a_n^2 \int_\Omega e_n^2 dx + ... \\
&= a_1^2 + ... + a_n^2 + ...
\end{aligned}$$

Assim,

$$\infty > \int_\Omega |v|^2 dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 dx.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^s \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{s}{2}}} a_n \right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Assim concluímos que A^s é um isomorfismo, ou seja, $E^s(\Omega)$ é isomorfo a $L^2(\Omega)$.

Note que:

$$\begin{aligned}
E^s(\Omega) &= H^s(\Omega) \ se \ \ 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\
E^{1/2}(\Omega) &\subset H^{1/2}(\Omega), \\
E^s(\Omega) &= \{u \in H^s(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\} \ se \ \frac{1}{2} < s \leq 2 \ e \ s \neq \frac{3}{2}, \\
E^{3/2}(\Omega) &\subset \left\{u \in H^{3/2}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Os espaços $E^s(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_s = \int_\Omega A^s u A^s v dx.$$

As propriedades de produto interno são satisfeitas pela linearidade do funcional A^s e da linearidade da integral.

As seguintes observações serão de muita ajuda na sessão (2.1.4).

Observação 2.1. *A partir do anterior consideremos os seguintes casos:*

- *Se $0 \leq s < \frac{1}{2}$, temos que $E^s(\Omega) = H^s(\Omega)$. Logo, $H^2(\Omega) \subset H^s(\Omega)$. Além disso, $H^1(\Omega) \subset H^s(\Omega) = E^s(\Omega)$. Daí, obtemos $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset E^s(\Omega)$.*
- *Se $\frac{1}{2} < s \leq 2$, com $s \neq \frac{3}{2}$, obtemos que $E^s = \{u \in H^s(\Omega) \ : \ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ com $H^2(\Omega) \subset H^s(\Omega)$. Então $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset E^s(\Omega)$.*

Assim, concluímos que $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset E^s(\Omega)$ para todo $0 \leq s \leq 2$, tal que $s \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

Proposição 2.2. *Seja $0 \leq s \leq 2$. Então a seguinte imersão*

$$E^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

é contínua se, $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$ e compacta se, $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.78 item (1), a imersão é contínua se, $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$, e pelo Teorema 1.79 item (1), a imersão é compacta se, $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$. □

2.1.1 O funcional

Lembre que $E_p = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $E_q = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$.

Vamos definir o espaço de Hilbert $E := E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$, dotado da norma

$$\|(u,v)\|_E = (\|u\|_{E^t}^2 + \|v\|_{E^s}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Consideremos o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ associado ao sistema (1) dado por

$$I(u,v) = \int_\Omega A^t u A^s v dx - \int_\Omega (\frac{1}{p+1}|v|^{p+1} + F(u))dx \tag{2.1}$$

com s e t tais que $s + t = 2$. O seguinte resultado garante que os pontos críticos deste funcional é uma solução fraca do sistema (1).

Proposição 2.3. *Suponha que $(u,v) \in E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$ é um ponto crítico do funcional I. Então $u \in E_p$ e $v \in E_q$, para todo $q > 1$ e, portanto, o par (u,v) é uma solução fraca do sistema (1).*

2.1.2 A escolha dos espaços $E^s(\Omega)$ e $E^t(\Omega)$

Nesta subseção, provamos que existem números positivos s e t com $s + t = 2$ tais que o funcional I está bem definido e é de classe C^1. Para isto, provaremos dois lemas fundamentais.

Lema 2.4. *Seja $1 < p$ $(N = 2)$, ou $1 < p < 2$ $(N = 3)$. Então existem parâmetros $s > 0$ e $t > 0$ com $s + t = 2$ tais que as seguintes imersões são contínuas e compactas*

$$E^s(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega), \quad E^t(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Pela Proposição 2.2, a imersão $E^s(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ é contínua, para todo $\frac{1}{p+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$ e a imersão é compacta se, $\frac{1}{p+1} > \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$.

Caso $N = 2$. Note que,

$$\frac{1}{p+1} > \frac{1}{2} - \frac{s}{2} = \frac{1-s}{2} \Rightarrow \frac{2}{p+1} > 1 - s \Rightarrow s > 1 - \frac{2}{p+1}.$$

Como $p > 1$ temos $1 - \frac{2}{p+1} > 0$. Assim,

$$1 - \frac{2}{p+1} > \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{2}{p+1} > -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{2}{p+1} < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow p > 3.$$

Então, para $p > 3$ escolha $0 < \frac{1}{2} < 1 - \frac{2}{p+1} < s < 1$.

Por outro lado, para $1 < p \leq 3$ temos

$$\begin{aligned} 2 < p+1 &\leq 4 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{2}{p+1} &< 1 \\ -1 < -\frac{2}{p+1} &\leq -\frac{1}{2} \\ 0 < 1 - \frac{2}{p+1} &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então para $1 < p \leq 3$, escolha $0 < 1 - \frac{2}{p+1} \leq \frac{1}{2} < s < 1$. Logo,

$$\tfrac{1}{2} < s < 1 \Rightarrow -1 < -s < -\tfrac{1}{2} \Rightarrow 1 < 2 - s < \tfrac{3}{2}.$$

Assim, escolhendo $t = 2 - s > 1$ obtemos $s + t = 2$. Como $t > 1$ temos

$$\tfrac{t}{2} > \tfrac{1}{2} \Rightarrow \tfrac{t}{N} > \tfrac{1}{2} \Rightarrow 2t > N.$$

Pelos Teoremas 1.78 e 1.79, temos o resultado.

Caso $N = 3$. Observe que

$$\tfrac{1}{p+1} > \tfrac{1}{2} - \tfrac{s}{3} = \tfrac{3-2s}{6} \Rightarrow \tfrac{6}{p+1} > 3 - 2s \Rightarrow 2s > 3 - \tfrac{6}{p+1} \Rightarrow s > \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{p+1}.$$

Como $1 < p < 2$ temos $0 < \frac{3}{2} - \frac{3}{p+1} < \frac{1}{2}$. Logo $\sup\{\frac{3}{2} - \frac{3}{p+1} : 1 < p < 2\} = \frac{1}{2}$. Escolha $\frac{3}{2} - \frac{3}{p+1} < s < \frac{1}{2}$. Então

$$s < \tfrac{1}{2} \Rightarrow -s > -\tfrac{1}{2} \Rightarrow 2 - s > \tfrac{3}{2}.$$

Assim, escolhendo $t = 2 - s > \frac{3}{2}$ obtemos $s + t = 2$. Como $t > \frac{3}{2}$ então $2t > 3$, ou seja, $2t > N$.

Finalmente, pelos Teoremas 1.78 e 1.79, concluímos o Lema 2.4. $\square$

Agora, vejamos algumas propriedades importantes dos operadores A^s e dos espaços $E^s(\Omega)$.

Lema 2.5. *Sejam $s > 0$ e $t > 0$.*

1. *$z \in E^s(\Omega)$ se, e somente se, $A^s z \in L^2(\Omega)$ e $\|z\|_{E^s} = \|A^s z\|_{L^2}$.*
2. *Seja $z \in E^{s+t}(\Omega) = E^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)$, então $A^{s+t}z = A^s A^t z = A^t A^s z$.*

Demonstração. 1) Por definição $A^s z \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow z \in E^s(\Omega)$.

Além disso:

$$\|z\|_{E^s}^2 \;=\; (z,z)_s = \int_\Omega A^s z A^s z dx = \int_\Omega |A^s z|^2 dx = \|A^s z\|_{L^2}^2.$$

Portanto, $\|z\|_{E^s} = \|A^s z\|_{L^2}$.

2) Seja $z = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i e_i \in E^{s+t}(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} A^{s+t} z &= \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{\frac{(s+t)}{2}} a_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{\frac{s}{2}+\frac{t}{2}} a_i e_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{\frac{s}{2}} \lambda_i^{\frac{t}{2}} a_i e_i \\ &= A^s \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{\frac{t}{2}} a_i e_i \right) = A^s A^t z. \end{aligned}$$

Analogamente, $A^{s+t} z = A^t A^s z$. Portanto, $A^{s+t} z = A^s A^t z = A^t A^s z$. □

Pelo Lema 2.4, podemos concluir que o operador A^s é um isomorfismo isométrico. Ou seja, $E^s(\Omega)$ é isometricamente isomorfo a $L^2(\Omega)$. Além disso, pelo Lema 2.4 podemos fixar s e t, tais que o funcional

$$I : E^t(\Omega) \times E^s(\Omega) \to \mathbb{R}$$

dado por

$$I(u,v) = \int_\Omega A^t u A^s v dx - \int_\Omega \left(\frac{1}{p+1}|v|^{p+1} + F(u)\right) dx$$

está bem definido. De fato, se $u \in E^t(\Omega)$ e $v \in E^s(\Omega)$ então $A^t u \in L^2(\Omega)$ e $A^s v \in L^2(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$A^t u A^s v \in L^1(\Omega),$$

isto é,

$$\int_\Omega |A^t u A^s v| dx < \infty.$$

Note que, $v \in E^s(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega |v|^{p+1}dx < \infty.$$

Note também que $u, f \in C(\overline{\Omega})$, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$ é diferenciável (e, portanto, contínua). Então,

$$F(u) = F \circ u \in C(\overline{\Omega})$$

e, assim,

$$\int_\Omega |F(u)|dx < \infty.$$

Portanto,

$$I(u,v) = \int_\Omega A^t u A^s v dx - \int_\Omega (\frac{1}{p+1}|v|^{p+1} + F(u))dx < \infty,$$

para todo $(u,v) \in E$.

Finalmente, I é de classe C^1 em E, cuja derivada de Gâteaux na direção $(\phi, \psi) \in E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$ é dado da seguinte maneira. Tomemos

$$\begin{aligned} I_1(u,v) &= \int_\Omega A^t u A^s v dx \\ I_2(v) &= \int_\Omega \frac{1}{p+1}|v|^{p+1}dx \\ I_3(u) &= \int_\Omega F(u)dx. \end{aligned}$$

Então, pela definição de derivada de Gâteaux, temos

$$\begin{aligned} I_1'(u,v)(\phi,\psi) &= \lim_{\tau\to 0} \frac{I_1((u,v)+\tau(\phi,\psi)) - I_1(u,v)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{\int_\Omega A^t(u+\tau\phi)A^s(v+\tau\psi)dx - \int_\Omega A^t u A^s v dx}{\tau}. \end{aligned}$$

Usando a linearidade de A^t e A^s, obtemos:

$$\begin{aligned} I_1'(u,v)(\phi,\psi) &= \lim_{\tau\to 0} \frac{\tau\int_\Omega A^t u A^s \psi dx + \tau\int_\Omega A^t\phi A^s v dx + \tau^2\int_\Omega A^t\phi A^s\psi dx}{\tau} \\ I_1'(u,v)(\phi,\psi) &= \lim_{\tau\to 0} \int_\Omega A^t u A^s \psi dx + \int_\Omega A^t\phi A^s v dx + \tau\int_\Omega A^t\phi A^s\psi dx \\ I_1'(u,v)(\phi,\psi) &= \int_\Omega A^t u A^s \psi dx + \int_\Omega A^t\phi A^s v dx. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
I_3'(u)\phi &= \lim_{\tau\to 0}\frac{I_3(u+\tau\phi)-I_3(u)}{\tau}\\
I_3'(u)\phi &= \lim_{\tau\to 0}\frac{\int_\Omega F(u+\tau\phi)dx-\int_\Omega F(u)dx}{\tau}\\
I_3'(u)\phi &= \lim_{\tau\to 0}\frac{\int_\Omega\left(\int_0^1\frac{d}{dh}(F(u+h\tau\phi dh)\right)dx}{\tau}\\
I_3'(u)\phi &= \lim_{\tau\to 0}\frac{\int_\Omega\left(\int_0^1(F'(u+h\tau\phi)\tau\phi)dh\right)dx}{\tau}\\
I_3'(u)\phi &= \int_\Omega\left(\phi\int_0^1 F'(u)dh\right)dx\\
I_3'(u)\phi &= \int_\Omega F'(u)\phi dx=\int_\Omega f(u)\phi dx.
\end{aligned}
$$

Agora, tomando

$$G(v)=\tfrac{1}{p+1}|v|^{p+1} \text{ temos que } G'(v)=|v|^{p-1}v.$$

Então,

$$I_2'(v)\psi=\int_\Omega G'(v)\psi dx=\int_\Omega |v|^{p-1}v\psi dx.$$

Assim, a derivada de I na direção $(\phi,\psi)\in E$ é dada por

$$I'(u,v)(\phi,\psi)=\int_\Omega(A^tuA^s\psi+A^t\phi A^sv)dx-\int_\Omega|v|^{p-1}v\psi dx-\int_\Omega f(u)\phi dx.$$

2.1.3 Existência de pontos críticos não triviais

Nesta subseção, utilizaremos um resultado devido a Li e Willem [15] para obter pontos críticos não triviais do funcional I.

Teorema 2.6 (Li e Willem, 1995). *Seja $\Phi : E\to\mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 e $E=E^+\oplus E^-$, onde E^+ e E^- são subespaços de dimensão infinita, satisfazendo:*

A1) Φ tem um entrelaçamento local na origem, isto é, para algum $r>0$:

$$\Phi(z)\geq 0,\ \forall z\in E^+,\ \|z\|_E\leq r$$

e

$$\Phi(z)\leq 0,\ \forall z\in E^-,\ \|z\|_E\leq r;$$

A2) Φ *leva conjuntos limitados em conjuntos limitados;*

A3) Seja E_n^+ *um subespaço n-dimensional de* E^+*, então* $\Phi(z) \to -\infty$ *se* $\|z\| \to +\infty$*,* $z \in E_n^+ \oplus E^-$*;*

A4) Φ *satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).*

Então Φ *tem um ponto crítico não trivial.*

Vamos verificar que o funcional I definido em (2.1) satisfaz as hipóteses do teorema acima.

Vimos anteriormente que I é um funcional de classe C^1 em $E = E^t(\Omega)\times E^s(\Omega)$, onde t e s foram obtidos no Lema 2.4. Consideremos os seguintes subespaços de E:

$$E^+ = \{(u, A^{-s}A^t u) : u \in E^t(\Omega)\} \text{ e } E^- = \{(u, -A^{-s}A^t u) : u \in E^t(\Omega)\}.$$

Afirmamos que $E = E^+ \oplus E^-$. De fato, temos que $E^+ + E^- \subset E$. Agora, seja $(u, v) \in E = E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$. Então, $A^t u, A^s v \in L^2(\Omega)$. Logo, $A^{-s}A^t u \in E^s(\Omega)$ e $A^{-t}A^s v \in E^t(\Omega)$. Assim,

$$\left(\tfrac{u}{2} + A^{-t}A^s\tfrac{v}{2}, A^{-s}A^t\left(\tfrac{u}{2} + A^{-t}A^s\tfrac{v}{2}\right)\right) = \left(\tfrac{u}{2} + \tfrac{A^{-t}A^s v}{2}, A^{-s}A^t\tfrac{u}{2} + \tfrac{v}{2}\right) \in E^+$$

e

$$\left(\tfrac{u}{2} - A^{-t}A^s\tfrac{v}{2}, -A^{-s}A^t\left(\tfrac{u}{2} - A^{-t}A^s\tfrac{v}{2}\right)\right) = \left(\tfrac{u}{2} - \tfrac{A^{-t}A^s v}{2}, -A^{-s}A^t\tfrac{u}{2} + \tfrac{v}{2}\right) \in E^-.$$

Logo,

$$\left(\tfrac{u}{2} + \tfrac{A^{-t}A^s v}{2}, A^{-s}A^t\tfrac{u}{2} + \tfrac{v}{2}\right) + \left(\tfrac{u}{2} - \tfrac{A^{-t}A^s v}{2}, -A^{-s}A^t\tfrac{u}{2} + \tfrac{v}{2}\right) = (u, v).$$

Assim, $E \subset E^+ + E^-$. Portanto, $E = E^+ + E^-$.

Suponha que $E^+ \cap E^- \neq \{0\}$. Então, existe $z \in E^+ \cap E^-$ com $z \neq 0$. Logo,

$$z \in E^+ \Rightarrow z = (u_1, A^{-s}A^t u_1) \text{ para algum } u_1 \in E^t(\Omega)$$

e

$$z \in E^- \Rightarrow z = (u_2, -A^{-s}A^t u_2) \text{ para algum } u_2 \in E^t(\Omega).$$

Então,

$$(u_1, A^{-s}A^t u_1) = (u_2, -A^{-s}A^t u_2).$$

Assim, $u_1 = u_2$ e $A^{-s}A^t u_1 = -A^{-s}A^t u_2$. Logo, $2A^{-s}A^t u_1 = 0$. De onde obtemos $u_1 = 0 = u_2$, isto é, $z = 0$, contradizendo a hipótese. Portanto, $E = E^+ \oplus E^-$.

$A1)$ Considere $z = (u, A^{-s}A^t u) \in E^+$. Logo,

$$\|(u, A^{-s}A^t u)\|_E^2 = \|u\|_{E^t}^2 + \|A^{-s}A^t u\|_{E^s}^2 = \|u\|_{E^t}^2 + \|A^t u\|_{L^2}^2.$$

Assim,

$$\|(u, A^{-s}A^t u)\|_E = \sqrt{2}\|u\|_{E^t}.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} I(u, A^{-s}A^t u) &= \int_\Omega A^t u A^s (A^{-s}A^t u)dx - \int_\Omega (\frac{1}{p+1}|A^{-s}A^t u|^{p+1} + F(u))dx \\ &= \int_\Omega |A^t u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |A^{-s}A^t u|^{p+1} dx - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \|A^t u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t u\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_\Omega F(u)dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4, existe $C > 0$ tal que

$$\|A^{-s}A^t u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C\|A^{-s}A^t u\|_{E^s}^{p+1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} I(u, A^{-s}A^t u) &\geq \|A^t u\|_{L^2}^2 - \frac{C}{p+1}\|A^{-s}A^t u\|_{E^s}^{p+1} - \int_\Omega F(u)dx \\ &\geq \|A^t u\|_{L^2}^2 - \frac{C}{2}\|A^{-s}A^t u\|_{E^s}^{p+1} - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \|u\|_{E^t}^2 - \frac{C}{2}\|A^t u\|_{L^2}^{p+1} - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \|u\|_{E^t}^2 - \frac{C}{2}\|u\|_{E^t}^{p+1} - \int_\Omega F(u)dx. \end{aligned}$$

Note que,

$$\lim_{a\to 0}\frac{|f(a)|}{|a|} = 0,$$

isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(a)}{a}\right| \leq \epsilon,$$

sempre que $|a| < \delta$. Pelo Lema 2.4, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C_0 \|u\|_{E^t},$$

para todo $u \in E^t(\Omega)$. Assim, se $\|u\|_{E^t} < \frac{\delta}{C_0}$ então $|u| < \delta$ em Ω. Logo,

$$|f(u)| \leq \epsilon |u|,$$

sempre que $\|u\|_{E^t} < \frac{\delta}{C_0}$.

Portanto,

$$\left| \int_{\Omega} F(u)dx \right| \leq \frac{C'}{2} \epsilon \|u\|_{E^t}^2,$$

com $C' > 0$, sempre que $\|u\|_{E^t} < \frac{\delta}{C_0}$. Assim,

$$I(u, A^{-s}A^t u) \geq \|u\|_{E^t}^2 - \tfrac{C}{2}\|u\|_{E^t}^{p+1} - \int_{\Omega} F(u)dx \geq \|u\|_{E^t}^2 - \frac{C}{2}\|u\|_{E^t}^{p+1} - \frac{C'}{2}\epsilon \|u\|_{E^t}^2,$$

sempre que $\|u\|_{E^t} < \frac{\delta}{C_0}$.

Tomemos $\epsilon < \frac{1}{C'}$. Portanto, existe $r < \sqrt{2}\frac{\delta}{C_0}$ tal que $I(z) \geq 0$, para todo $z \in E^+$ com $\|z\|_E \leq r$.

Agora, considere $z = (u, -A^{-s}A^t u) \in E^-$. Então,

$$\begin{aligned} I(u, -A^{-s}A^t u) &= \int_{\Omega} A^t u A^s(-A^{-s}A^t u)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\Omega} |-A^{-s}A^t u|^{p+1}dx - \int_{\Omega} F(u)dx \\ &= -\|A^t u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t u\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_{\Omega} F(u)dx \\ &\leq -\|u\|_{E^t}^2 - \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t u\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_{\Omega} F(u)dx. \end{aligned}$$

Note que,

$$-\int_{\Omega} F(u)dx \leq \left| \int_{\Omega} F(u)dx \right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(u, -A^{-s}A^t u) &\leq -\|u\|_{E^t}^2 - \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t u\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_{\Omega} F(u)dx \\ &\leq -\|u\|_{E^t}^2 - \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t u\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{C'}{2}\epsilon \|u\|_{E^t}^2, \end{aligned}$$

sempre que $\|u\|_{E^t} < \frac{\delta}{C_0}$. Finalmente, tomando $\epsilon < \frac{1}{C'}$, existe $r < \sqrt{2}\frac{\delta}{C_0}$ tal que $I(z) \leq 0$, para todo $z \in E^-$ com $\|z\|_E \leq r$.

A2) Seja $B \subset E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$ um conjunto limitado, isto é:

$$\|(u,v)\|_E \leq c \text{ para todo } (u,v) \in B.$$

Logo,

$$\|(u,v)\|_E^2 = \|u\|_{E^t}^2 + \|v\|_{E^s}^2 \leq c^2 \text{ para todo } (u,v) \in B.$$

Assim,

$$\|u\|_{E^t} \leq c, \ \|v\|_{E^s} \leq c \text{ para todo } (u,v) \in B.$$

Mostremos que $I(B)$ é limitado.

Dado $(u,v) \in B$, temos que

$$\begin{aligned} |I(u,v)| &= \left| \int_\Omega A^t u A^s v dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |v|^{p+1} dx - \int_\Omega F(u) dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |A^t u A^s v| dx + \frac{1}{p+1} \int_\Omega |v|^{p+1} dx + \int_\Omega |F(u)| dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e como $p+1 > 2$, temos que

$$\begin{aligned} |I(u,v)| &\leq \int_\Omega |A^t u A^s v| dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |v|^{p+1} dx + \int_\Omega |F(u)| dx \\ &\leq \|A^t u\|_{L^2} \|A^s v\|_{L^2} + \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \int_\Omega |F(u)| dx \\ &\leq \|u\|_{E^t} \|v\|_{E^s} + C\|v\|_{E^s}^{p+1} + \sup_{x\in\Omega} |F(u(x))||\Omega| \\ &\leq c^2 + Cc^{p+1} + \sup_{x\in\Omega} |F(u(x))||\Omega| = C. \end{aligned}$$

*A*3) Seja $z_k = z_k^+ + z_k^- \in E_n^+ \oplus E^-$ uma sequência, tal que $\|z_k\|_E \to +\infty$. Note que, z_k pode ser reescrita como:

$$z_k = (u_k, A^{-s}A^t u_k) + (w_k, -A^{-s}A^t w_k) = (u_k + w_k, A^{-s}A^t(u_k - w_k)),$$

com $u_k \in E_n^t$ e $w_k \in E^t(\Omega)$, onde E_n^t é um subespaço n-dimensional de $E^t(\Omega)$. Assim, o funcional I aplicado em z_k, toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} I(z_k) &= \int_\Omega A^t(u_k + w_k) A^t(u_k - w_k) dx \\ &- \int_\Omega \left(\frac{1}{p+1} |A^{-s}A^t(u_k - w_k)|^{p+1} + F(u_k + w_k) \right) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I(z_k) &= \int_\Omega (A^t u_k + A^t w_k)(A^t u_k - A^t w_k)dx \\
&- \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t(u_k - w_k)\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_\Omega F(u_k + w_k)dx \\
&= \int_\Omega |A^t u_k|^2 dx - \int_\Omega |A^t w_k|^2 dx \\
&- \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t(u_k - w_k)\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_\Omega F(u_k + w_k)dx \\
&= \|A^t u_k\|_{L^2}^2 - \|A^t w_k\|_{L^2}^2 \\
&- \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t(u_k - w_k)\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_\Omega F(u_k + w_k)dx \\
&= \|u_k\|_{E^t}^2 - \|w_k\|_{E^t}^2 - \frac{1}{p+1}\|A^{-s}A^t(u_k - w_k)\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \int_\Omega F(u_k + w_k)dx.
\end{aligned}
$$

Note que, pela lei do paralelogramo,

$$
\begin{aligned}
\|z_k\|_E^2 &= \|u_k + w_k\|_{E^t}^2 + \|A^{-s}A^t(u_k - w_k)\|_{E^s}^2 \\
&= \|u_k + w_k\|_{E^t}^2 + \|A^t(u_k - w_k)\|_{L^2}^2 \\
&= \|u_k + w_k\|_{E^t}^2 + \|(u_k - w_k)\|_{E^t}^2 \\
&= 2(\|u_k\|_{E^t}^2 + \|w_k\|_{E^t}^2).
\end{aligned}
$$

Disto, temos que

$$
\|z_k\|_E \to +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \|u_k\|_{E^t}^2 + \|w_k\|_{E^t}^2 \to +\infty.
$$

Agora, se

1) $\|u_k\|_{E^t} \leq c$ então, $\|w_k\|_{E^t}^2 \to +\infty$. Daí, $-\|w_k\|_{E^t}^2 \to -\infty$.
Assim,

$$
I(z_k) \to -\infty.
$$

2) $\|u_k\|_{E^t} \to +\infty$, então usando o fato que $t - s > 0$ e $p > 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |A^{t-s}(u_k - w_k)|^{p+1} dx &\geq c\|A^{-s}A^t(u_k - w_k)\|_{L^2}^{p+1} \\
&= c\|(u_k - w_k)\|_{E^{t-s}}^{p+1} \\
&\geq c_1\|(u_k - w_k)\|_{L^2}^{p+1}.
\end{aligned}
$$

e pela Observação 1.94, temos que

$$
\int_\Omega F(u_k + w_k)dx \geq c_2\|u_k + w_k\|_{L^2}^\theta - d. \tag{2.2}
$$

Agora, vamos dividir o restante da prova em dois casos:

1) $p+1 \leq \theta$. Neste caso, pela hipótese 2(a) do Teorema 0.3, obtemos

$$0 < (p+1)F(s) \leq \theta F(s) \leq f(s)s$$

para todo $|s| \geq s_0$. Assim, pela Observação 1.94, temos que

$$\int_\Omega F(u_k + w_k)dx \geq c_2 \|u_k + w_k\|_{L^2}^{p+1} - d$$

e, portanto, obtemos

$$I(z_k) \leq \|u_k\|_{E^t}^2 - c_3(\|u_k - w_k\|_{L^2}^{p+1} + \|u_k + w_k\|_{L^2}^{p+1}) + d$$

onde $c_3 = \min\{c_1, c_2\}$.

Observe que

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \forall\ p \geq 1. \tag{2.3}$$

Assim,

$$I(z_k) \leq \|u_k\|_{E^t}^2 - c_3 \frac{1}{2^p}(\|u_k - w_k\|_{L^2} + \|u_k + w_k\|_{L^2})^{p+1} + d.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2} \leq 2\|u_k\|_{L^2} = \|2u_k\|_{L^2} = \|u_k + w_k + u_k - w_k\|_{L^2} \\ \leq \|u_k + w_k\|_{L^2} + \|u_k - w_k\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Daí,

$$I(z_k) \leq \|u_k\|_{E^t}^2 - c_3 \frac{1}{2^p} \|u_k\|_{L^2}^{p+1} + d.$$

Como em E_n^t as normas $\|u_k\|_{E^t}$ e $\|u_k\|_{L^2}$ são equivalentes, concluímos que $I(z_k) \to -\infty$.

2) $p+1 > \theta$. Pela equivalencia das normas, temos que $\|u_k\|_{L^2} \to +\infty$. Logo, por (2.4), $\|u_k + w_k\|_{L^2} + \|u_k - w_k\|_{L^2} \to +\infty$. Então temos 2 casos:

(a) $\|u_k - w_k\|_{L^2} \to +\infty$. Então existe $k_0 > 0$ tal que, a menos de subsequência, $\|u_k - w_k\|_{L^2} \geq 1$ para todo $k \geq k_0$. Logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega |A^{t-s}(u_k - w_k)|^{p+1} dx &\geq c_1 \|(u_k - w_k)\|_{L^2}^{p+1} \\ &\geq c_1 \|(u_k - w_k)\|_{L^2}^{\theta}. \end{aligned}$$

Assim, usando (2.2), temos que

$$I(z_k) \leq \|u_k\|_{E^t}^2 - c_3(\|u_k - w_k\|_{L^2}^\theta + \|u_k + w_k\|_{L^2}^\theta) + d.$$

Portanto, $I(z_k) \to -\infty$.

(b) A menos de subsequência $\|u_k - w_k\|_{L^2} \leq c$ para todo k.
Neste caso, usando que

$$\int_\Omega |A^{t-s}(u_k - w_k)|^{p+1} dx \;\geq\; c_1 \|(u_k - w_k)\|_{L^2}^{p+1}$$

e por (2.2), temos que

$$\begin{aligned} I(z_k) &\leq \|u_k\|_{E^t}^2 - c_3(\|u_k - w_k\|_{L^2}^{p+1} + \|u_k + w_k\|_{L^2}^\theta) + d \\ &\leq \|u_k\|_{E^t}^2 - c_3\|u_k + w_k\|_{L^2}^\theta + d. \end{aligned}$$

Note que, por (2.4), temos que

$$\|u_k\|_{L^2} \;\leq\; \|u_k + w_k\|_{L^2} + c.$$

Assim, usando (2.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2}^\theta &\leq (\|u_k + w_k\|_{L^2} + c)^\theta \\ &\leq 2^{\theta-1}(\|u_k + w_k\|_{L^2}^\theta + c^\theta). \end{aligned}$$

Daí,

$$I(z_k) \;\leq\; \|u_k\|_{E^t}^2 - c_3 \frac{1}{2^{\theta-1}} \|u_k\|_{L^2}^\theta + c_4 + d$$

onde $c_4 = c_3 c^\theta$.
Como $\theta > 2$ e pela equivalencia das normas no espaço de dimensão finita E_n^t, concluímos que $I(z_k) \to -\infty$.

A4) Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência (PS), isto é,

$$|I(z_n)| \leq c, \text{ e } \;|I'(z_n)\eta| \leq \epsilon_n \|\eta\|_E, \;\; \forall \eta \in E, \;\text{ e }\; \epsilon_n \to 0. \tag{2.5}$$

Mostraremos primeiro o seguinte lema:

Lema 2.7. *A sequência (PS) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E.*

Demonstração. De (2.5) temos para $z_n = (u_n, v_n)$

$$I(u_n, v_n) = \int_\Omega A^t u_n A^s v_n dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v_n|^{p+1} dx - \int_\Omega F(u_n) dx \leq c$$

e

$$\begin{aligned} I'(u_n, v_n)(\phi, \psi) &= \int_\Omega (A^t u_n A^s \psi + A^t \phi A^s v_n) dx - \int_\Omega |v_n|^{p-1} v_n \psi dx - \int_\Omega f(u_n)\phi dx \\ &\leq \epsilon_n \|(\phi, \psi)\|_E, \end{aligned} \tag{2.6}$$

para todo $(\phi, \psi) \in E$. Tomando $(\phi, \psi) = (u_n, v_n) \in E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} I'(u_n, v_n)(u_n, v_n) &= 2\int_\Omega A^t u_n A^s v_n dx - \int_\Omega |v_n|^{p+1} dx - \int_\Omega f(u_n) u_n dx \\ &\leq \epsilon_n \|(u_n, v_n)\|_E. \end{aligned}$$

Subtraindo $I'(u_n, v_n)(u_n, v_n)$ de $2I(u_n, v_n)$ segue que

$$\left(1 - \frac{2}{p+1}\right) \int_\Omega |v_n|^{p+1} dx - 2\int_\Omega F(u_n) dx + \int_\Omega f(u_u) u_n dx \leq 2c + \epsilon_n \|(u_n, v_n)\|_E \quad (2.7)$$

Procedemos agora a fazer a seguinte decomposição

$$\int_\Omega F(u_n) dx = \int_{\{x \in \Omega : |u_n| > s_0\}} F(u_n) dx + \int_{\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}} F(u_n) dx.$$

Agora, vamos analisar as duas integrais, separadamente.

Para a primeira integral, temos que

$$\int_{\{x \in \Omega : |u_n| > s_0\}} F(u_n) dx \leq \frac{1}{\theta} \int_{\{x \in \Omega : |u_n| > s_0\}} f(u_n) u_n dx.$$

Logo,

$$-2\int_{\{x \in \Omega : |u_n| > s_0\}} F(u_n) dx \geq -\frac{2}{\theta} \int_{\{x \in \Omega : |u_n| > s_0\}} f(u_n) u_n dx.$$

Para a segunda integral, usando o fato que F é contínua e Ω é limitado, obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_{\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}} F(u_n) dx &\leq 2\int_{\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}} \max_{|t| \leq s_0} F(t) dx \\ &= 2\max_{|t| \leq s_0} F(t) \left(\int_{\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}} dx \right) \\ &= 2\max_{|t| \leq s_0} F(t) \left(m(\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}) \right) = c_1. \end{aligned}$$

Então,

$$2\int_{\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}} F(u_n) dx \leq c_1,$$

isto é,

$$-2\int_{\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}} F(u_n) dx \geq -c_1.$$

Segue disto que

$$-2\int_\Omega F(u_n)dx \quad \geq \quad -\frac{2}{\theta}\int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} f(u_n)u_n dx - c_1.$$

Então, de (2.7), temos que

$$\left(1-\tfrac{2}{p+1}\right)\int_\Omega |v_n|^{p+1}dx - \frac{2}{\theta}\int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} f(u_n)u_n dx - c_1 + \int_\Omega f(u_n)u_n dx \leq 2c + \epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E.$$

Note que,

$$\int_\Omega f(u_n)u_n dx = \int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} f(u_n)u_n dx + \int_{\{x\in\Omega:|u_n|\leq s_0\}} f(u_n)u_n dx.$$

Então, existe $C_0>0$ tal que

$$\left(1-\frac{2}{p+1}\right)\int_\Omega |v_n|^{p+1}dx + \left(1-\frac{2}{\theta}\right)\int_\Omega f(u_n)u_n dx \leq C_0 + \epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E.$$

Fazendo $k_1 = 1-\frac{2}{\theta} > 0$ e $k_2 = 1-\frac{2}{p+1} > 0$, temos que

$$\int_\Omega f(u_n)u_n dx \leq \frac{1}{k_1}(C_0 + \epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E) \tag{2.8}$$

e

$$\int_\Omega |v_n|^{p+1}dx \leq \frac{1}{k_2}(C_0 + \epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E). \tag{2.9}$$

Agora, tomando $(\phi,\psi) = (0, A^{-s}A^t u_n) \in E^t(\Omega)\times E^s(\Omega)$ em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} I'(u_n,v_n)(0,A^{-s}A^t u_n) &= \int_\Omega |A^t u_n|^2 dx - \int_\Omega |v_n|^{p-1}v_n A^{-s}A^t u_n dx \\ &\leq \epsilon_n\|(0,A^{-s}A^t u_n)\|_E. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Note que,

$$\int_\Omega |v_n|^{p-1}v_n A^{-s}A^t u_n dx \leq \int_\Omega |v_n|^{p-1}|v_n||A^{-s}A^t u_n|dx = \int_\Omega |v_n|^p |A^{-s}A^t u_n|dx.$$

Logo, de (2.10), temos que

$$\|u_n\|_{E^t}^2 = \|A^t u_n\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega |v_n|^p|A^{-s}A^t u_n|dx + \epsilon_n\|A^{-s}A^t u_n\|_{E^s}.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|u_n\|_{E^t}^2 \leq \||v_n|^p\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}\|A^{-s}A^t u_n\|_{L^{p+1}} + \epsilon_n\|A^{-s}A^t u_n\|_{E^s}.$$

Além disso, pelo Lema 2.5, temos

$$\|A^{-s}A^t u_n\|_{E^s} = \|A^t u_n\|_{L^2} = \|u_n\|_{E^t}.$$

Agora, pelo Lema 2.4, $E^s(\Omega)$ está imerso em $L^{p+1}(\Omega)$, isto é,

$$\|A^{-s}A^t u_n\|_{L^{p+1}} \leq C\|A^{-s}A^t u_n\|_{E^s} = C\|u_n\|_{E^t},$$

para algum $C > 0$. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{E^t}^2 &\leq \||v_n|^p\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}\|A^{-s}A^t u_n\|_{L^{p+1}} + \epsilon_n\|u_n\|_{E^t} \\ &\leq C\left(\int_\Omega |v_n|^{p+1}dx\right)^{\frac{p}{p+1}}\|u_n\|_{E^t} + \epsilon_n\|u_n\|_{E^t}. \end{aligned}$$

Pela equação (2.9) temos

$$\|u_n\|_{E^t} \leq C\left(\frac{1}{k_2}\right)^{\frac{p}{p+1}}(C_0 + \epsilon_n\|(u_n, v_n)\|_E)^{\frac{p}{p+1}} + \epsilon_n.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $C_0 > 1$, e tomando $c_2 = C\left(\frac{1}{k_2}\right)^{\frac{p}{p+1}} > 0$, obtemos

$$\|u_n\|_{E^t} \leq c_2(C_0 + \epsilon_n\|(u_n, v_n)\|_E) + \epsilon_n. \tag{2.11}$$

De maneira análoga, note que $A^{-t}A^s v_n \in E^t(\Omega)$ e, assim, tomando $(\phi, \psi) = (A^{-t}A^s v_n, 0) \in E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$ em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} I'(u_n, v_n)(A^{-t}A^s v_n, 0) &= \int_\Omega |A^s v_n|^2 dx - \int_\Omega f(u_n)A^{-t}A^s v_n dx \\ &\leq \epsilon_n\|(A^{-t}A^s v_n, 0)\|_E. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|v_n\|_{E^s}^2 = \|A^s v_n\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega f(u_n)A^{-t}A^s v_n dx + \epsilon_n\|A^{-t}A^s v_n\|_{E^t}.$$

Como $E^t(\Omega)$ está imerso em $C(\overline{\Omega})$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|A^{-t}A^s v_n\|_C \leq C_1\|A^{-t}A^s v_n\|_{E^t},$$

onde

$$\|A^{-t}A^s v_n\|_{E^t} = \|A^s v_n\|_{L^2} = \|v_n\|_{E^s}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|v_n\|_{E^s}^2 &\leq \|A^{-t}A^s v_n\|_C \int_\Omega |f(u_n)|dx + \epsilon_n \|v_n\|_{E^s}\\ &\leq \|v_n\|_{E^s}\left(C_1 \int_\Omega |f(u_n)|dx + \epsilon_n\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\|v_n\|_{E^s} \leq C_1 \int_\Omega |f(u_n)|dx + \epsilon_n. \tag{2.12}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u_n)|dx &= \int_{\{x\in\Omega:|u_n|\leq s_0\}} |f(u_n)|dx + \int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} |f(u_n)|dx\\ &\leq \int_{\{x\in\Omega:|u_n|\leq s_0\}} \max_{|t|\leq s_0} |f(t)|dx + \int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} |f(u_n)|dx\\ &\leq d_2 + \frac{1}{s_0}\int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} f(u_n)u_n dx,\end{aligned}$$

para algum $d_2 > 0$. Usando (2.12), temos que

$$\|v_n\|_{E^s} \leq C_1\left(d_2 + \frac{1}{s_0}\int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} f(u_n)u_n dx\right) + \epsilon_n.$$

Por (2.8), obtemos:

$$\|v_n\|_{E^s} \leq C_1 d_2 + \frac{C_1}{s_0}\left(\frac{1}{k_1}(C_0 + \epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E)\right) + \epsilon_n.$$

Assim,

$$\|v_n\|_{E^s} \leq d_3 + d_4\epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E + \epsilon_n, \tag{2.13}$$

onde $d_3 = C_1 d_2 + \frac{C_1 C_0}{s_0 k_1}$ e $d_4 = \frac{C_1}{s_0 k_1}$ são constantes positivas.

Agora, somando (2.11) e (2.13), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{E^t} + \|v_n\|_{E^s} &\leq c_2(C_0 + \epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E) + \epsilon_n + d_3 + d_4\epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E + \epsilon_n\\ &\leq C + 2\epsilon_n + D\epsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E,\end{aligned}$$

onde $C = c_2 C_0 + d_3$ e $D = c_2 + d_4$. Como

$$\|(u_n,v_n)\|_E^2 = \|u_n\|_{E^t}^2 + \|v_n\|_{E^s}^2 \leq (\|u_n\|_{E^t} + \|v_n\|_{E^s})^2,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\|(u_n, v_n)\|_E &\leq \|u_n\|_{E^t} + \|v_n\|_{E^s} \leq C + 2\epsilon_n + D\epsilon_n\|(u_n, v_n)\|_E \\
&\Rightarrow \|(u_n, v_n)\|_E - D\epsilon_n\|(u_n, v_n)\|_E \leq C + 2\epsilon_n \\
&\Rightarrow \|(u_n, v_n)\|_E \leq \frac{C + 2\epsilon_n}{1 - D\epsilon_n}.
\end{aligned}$$

Portanto, a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E. $\square$

Continuando a verificação da condição $A4)$ do Teorema 2.6, resta mostrar que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge em E. De fato, considere $z_n = (u_n, v_n)$. Como $E^t(\Omega)$ é reflexivo, pois é um fechado no espaço reflexivo $H^t(\Omega) = W^{t,2}(\Omega)$, e $\|u_n\|_{E^t}$ é limitado, pelo Teorema 1.21, temos que a sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ fracamente convergente, digamos $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $E^t(\Omega)$.

Como as aplicações

$$A^t : E^t(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ e } A^{-s} : L^2(\Omega) \to E^s(\Omega)$$

são isomorfismos isométricos, temos que

$$A^t : (E^t(\Omega), \sigma(E^t(\Omega), (E^t(\Omega))')) \to (L^2(\Omega), \sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega)))$$

e

$$A^{-s} : (L^2(\Omega), \sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))) \to (E^s(\Omega), \sigma(E^t(\Omega), (E^t(\Omega))'))$$

são fracamente contínuos. Assim,

$$A^t(u_{n_k} - u) \rightharpoonup 0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

e

$$A^{-s}A^t(u_{n_k} - u) \rightharpoonup 0 \text{ em } E^s(\Omega).$$

Como $E^s(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow L^{p+1}(\Omega)$ e pela Proposição 1.23, concluímos que

$$A^{-s}A^t(u_{n_k} - u) \to 0 \text{ em } L^{p+1}(\Omega).$$

Similarmente, como $E^s(\Omega)$ é reflexivo e $\|v_n\|_{E^s(\Omega)}$ é limitado, pelo Teorema 1.21 a sequência $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(v_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ fracamente convergente, digamos $v_{n_k} \rightharpoonup v$ em $E^s(\Omega)$. Pela Proposição 1.23, temos que $v_{n_k} \to v$ em $L^{p+1}(\Omega)$.

Logo,

$$|v_{n_k}|^{p-1}v_{n_k} \to |v|^{p-1}v \text{ em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

Escolhendo $(\phi, \psi) = (0, A^{-s}A^t(u_{n_k} - u)) \in E^t(\Omega) \times E^s(\Omega)$ em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega A^t u_{n_k} A^t(u_{n_k} - u)dx &\leq \int_\Omega |v_{n_k}|^{p-1}v_{n_k}(A^{-s}A^t(u_{n_k} - u))dx + \epsilon_{n_k}\|A^{-s}A^t(u_{n_k} - u)\|_{E^s} \\ &\leq \int_\Omega |v_{n_k}|^{p-1}|v_{n_k}\|A^{-s}A^t(u_{n_k} - u)|dx + \epsilon_{n_k}\|A^{-s}A^t(u_{n_k} - u)\|_{E^s} \\ &\leq \int_\Omega |v_{n_k}|^p|A^{-s}A^t(u_{n_k} - u)|dx + \epsilon_{n_k}\|A^{-s}A^t(u_{n_k} - u)\|_{E^s}. \end{aligned}$$

Como o lado direito da desigualdade acima converge para 0, temos que

$$\int_\Omega A^t u_{n_k} A^t(u_{n_k} - u)dx \quad \to \quad 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega A^t u_{n_k}(A^t u_{n_k} - A^t u)dx = \int_\Omega |A^t u_{n_k}|^2 dx - \int_\Omega A^t u_{n_k} A^t u dx \to 0. \tag{2.14}$$

Por outro lado, sabemos que $A^t u_{n_k} \rightharpoonup A^t u$ em $L^2(\Omega)$ e, usando a Proposição 1.16, segue que $\varphi(A^t u_{n_k}) \to \varphi(A^t u)$, para todo $\varphi \in (L^2(\Omega))'$. Daí, usando o Teorema de Representação de Riesz 1.34, temos que

$$\int_\Omega A^t u_{n_k} f dx \to \int_\Omega A^t u f dx, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Em particular, tomando $f = A^t u$ temos:

$$\int_\Omega A^t u_{n_k} A^t u dx \to \int_\Omega |A^t u|^2 dx. \tag{2.15}$$

Usando (2.14)e (2.15), obtemos a seguinte convergência

$$\int_\Omega |A^t u_{n_k}|^2 dx \quad = \quad \int_\Omega |A^t u_{n_k}|^2 dx - \int_\Omega A^t u_{n_k} A^t u dx + \int_\Omega A^t u_{n_k} A^t u dx \to \int_\Omega |A^t u|^2 dx.$$

Logo,

$$\|A^t u_{n_k}\|^2_{L^2} \quad \to \quad \|A^t u\|^2_{L^2},$$

isto é,

$$\|u_{n_k}\|_{E^t} \quad \to \quad \|u\|_{E^t}.$$

Assim, pela Proposição 1.20, concluímos que $u_{n_k} \to u$ em $E^t(\Omega)$.

Analogamente, obtemos a convergência forte de $(v_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ em $E^s(\Omega)$. Como

$$A^s : E^s(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad e \quad A^{-t} : L^2(\Omega) \to E^t(\Omega)$$

são isomorfismos isométricos, temos que

$$A^s : (E^s(\Omega), \sigma(E^s(\Omega), (E^s(\Omega))')) \to (L^2(\Omega), \sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega)))$$

e

$$A^{-t} : (L^2(\Omega), \sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))) \to (E^t(\Omega), \sigma(E^t(\Omega), (E^t(\Omega))'))$$

são fracamente contínuos. Assim, $A^{-t}A^s(v_{n_k} - v) \rightharpoonup 0$ em $E^t(\Omega)$, ou seja,

$$A^{-t}A^s v_{n_k} \rightharpoonup A^{-t}A^s v \text{ em } E^t(\Omega).$$

Agora, como $E^t(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C(\overline{\Omega})$ e pela Proposição 1.23, concluímos que

$$A^{-t}A^s(v_{n_k} - v) \to 0 \text{ em } C(\overline{\Omega}).$$

Escolhendo $(\phi, \psi) = (A^{-t}A^s(v_{n_k} - v), 0)$ em (2.6), obtemos

$$\int_\Omega A^s(v_{n_k} - v)A^s v_{n_k} dx - \int_\Omega f(u_{n_k})A^{-t}A^s(v_{n_k} - v)dx \;\; \leq \;\; \epsilon_{n_k}\|A^{-t}A^s(v_{n_k} - v)\|_{E^t}.$$

Daí,

$$\int_\Omega A^s(v_{n_k} - v)A^s v_{n_k} dx \;\; \leq \;\; \int_\Omega f(u_{n_k})A^{-t}A^s(v_{n_k} - v)dx + \epsilon_{n_k}\|A^{-t}A^s(v_{n_k} - v)\|_{E^t}.$$

Como $\|A^{-t}A^s(v_{n_k} - v)\|_C \to 0$ segue que

$$\int_\Omega f(u_{n_k})A^{-t}A^s(v_{n_k} - v)dx \;\; \leq \;\; \|A^{-t}A^s(v_{n_k} - v)\|_C \int_\Omega |f(u_{n_k})|dx \to 0.$$

Então,

$$\int_\Omega |A^s v_{n_k}|^2 dx - \int_\Omega A^s v_{n_k} A^s v dx = \int_\Omega A^s(v_{n_k} - v)A^s v_{n_k} dx \to 0.$$

Note que, $v_{n_k} \rightharpoonup v$ em $E^s(\Omega)$ implica que $A^s v_{n_k} \rightharpoonup A^s v$ em $L^2(\Omega)$. Assim, pela Proposição 1.16 temos

$$\varphi(A^s v_{n_k}) \to \varphi(A^s v); \quad \forall \varphi \in (L^2(\Omega))'.$$

Usando o Teorema de representação de Riesz 1.34, temos

$$\int_\Omega A^s v_{n_k} g dx \to \int_\Omega A^s v g dx; \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

Em particular, tomando $g = A^s v$ obtemos

$$\int_\Omega A^s v_{n_k} A^s v dx \to \int_\Omega |A^s v|^2 dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega |A^s v_{n_k}|^2 dx \quad = \quad \int_\Omega |A^s v_{n_k}|^2 dx - \int_\Omega A^s v A^s v_{n_k} dx + \int_\Omega A^s v A^s v_{n_k} dx \to \int_\Omega |A^s v|^2 dx.$$

Então,

$$\|A^s v_{n_k}\|_{L^2}^2 \to \|A^s v\|_{L^2}^2.$$

Pelo Lema 2.5, $\|v_{n_k}\|_{E^s}^2 \to \|v\|_{E^s}^2$. Assim, pela Proposição 1.20, $v_{n_k} \to v$ em $E^s(\Omega)$.

Portanto,

$$z_{n_k} = (u_{n_k}, v_{n_k}) \to (u, v) = z \text{ em } E = E^t(\Omega) \times E^s(\Omega).$$

Logo, as condições do Teorema 2.6 estão satisfeitas. Assim, obtemos um ponto crítico não trivial (u, v) para o funcional I.

2.1.4 Solução fraca

Nesta subseção, provaremos a existência de solução fraca não trivial para o sistema (1).

Demonstração da Proposição 2.3: Seja (u, v) um ponto crítico do funcional I, isto é,

$$I'(u, v)(\psi, \phi) = 0, \forall (\psi, \phi) \in E^t(\Omega) \times E^s(\Omega).$$

Logo,

$$0 = \int_\Omega A^t u A^s \phi dx + \int_\Omega A^t \psi A^s v dx - \int_\Omega |v|^{p-1} v \phi dx - \int_\Omega f(u) \psi dx,$$

para todo $(\psi,\phi) \in E^t(\Omega)\times E^s(\Omega)$. Tomando $(\psi,0),(0,\phi) \in E^t(\Omega)\times E^s(\Omega)$, obtemos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^t u A^s \phi dx = \int_\Omega |v|^{p-1} v\phi dx, \quad \forall\ \phi \in E^s(\Omega) \\ \\ \displaystyle\int_\Omega A^t \psi A^s v dx = \int_\Omega f(u)\psi dx, \qquad \forall\ \psi \in E^t(\Omega) \end{cases} \tag{2.16}$$

Consideremos a primeira igualdade de (2.16).

Seja $\phi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \subset E^s(\Omega)$ tal que $u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ e $\phi = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e_n$. Logo,

$$\begin{aligned} A^t u &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{t}{2}} a_n e_n, \\ A^s \phi &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} b_n e_n, \\ A^2 \phi &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n b_n e_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega A^t u A^s \phi dx = \int_\Omega u A^2 \phi dx = \int_\Omega u(-\Delta\phi)dx. \tag{2.17}$$

Pelo Lema 2.4, como $v \in E^s(\Omega)$ temos que $v \in L^{p+1}(\Omega)$. Logo, $|v|^{p-1}v \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.89 (considerando $L = -\Delta$, $h = |v|^{p-1}v$ e $\varphi = 0$), existe uma única solução $y \in E_p$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta y &= |v|^{p-1} v & \text{em } \Omega \\ y &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Pela escolha de s no Lema 2.4, temos $\frac{1}{p+1} > \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$, o qual é equivalente à

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} > 1 - \frac{1}{2} - \frac{s}{N} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{p+1} - \frac{s}{N} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} > \frac{p}{p+1} - \frac{s}{N}. \end{aligned}$$

Como $s < 2$, então

$$\tfrac{1}{2} > \tfrac{p}{p+1} - \tfrac{s}{N} > \tfrac{p}{p+1} - \tfrac{2}{N}$$

o qual é equivalente à

$$\frac{1}{2} > \frac{Np-2(p+1)}{N(p+1)} \quad \Rightarrow \quad 2 < \frac{N(p+1)}{Np-2(p+1)}$$
$$\Rightarrow \quad 2 < \frac{N\left(\frac{p+1}{p}\right)}{N-2\left(\frac{p+1}{p}\right)}.$$

Pelo Teorema de imersão de Sobolev

$$W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Como o operador Laplaciano é autoadjunto, obtemos

$$\int_\Omega |v|^{p-1} v\phi dx = \int_\Omega (-\Delta y)\phi dx = \int_\Omega y(-\Delta\phi)dx. \tag{2.18}$$

Assim, de (2.17) e (2.18)

$$\int_\Omega u(-\Delta\phi)dx = \int_\Omega y(-\Delta\phi)dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (u-y)(-\Delta\phi)dx = 0, \quad \forall\phi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

Pela Observação 1.49 e pelo Corolário 1.39 segue que $u = y$. Portanto, $u \in E_p$.

Consideremos agora a segunda igualdade de (2.16). Analogamente, para $\psi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \subset E^t(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega (-\Delta\psi)v dx = \int_\Omega A^2\psi v dx = \int_\Omega A^t\psi A^s v dx = \int_\Omega f(u)\psi dx. \tag{2.19}$$

Note que, $E^t(\Omega) \subset \{u \in H^t(\Omega)|\ u|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^t(\Omega)$. Pelo Lema 2.4 temos

$$\begin{cases} 1 < t < 2, & se\ N = 2, \\ \frac{3}{2} < t < 2, & se\ N = 3. \end{cases}$$

Assim, $2t > N$. Agora, se $N = 2$ temos que $0 < t - \frac{N}{2} < 1$ e se $N = 3$ temos que $0 < t - \frac{N}{2} < \frac{1}{2}$, ou seja, $t - \frac{N}{2} \notin \mathbb{N}$.

Então, pelo Teorema de imersão de Sobolev, temos

$$H^t(\Omega) = W^{t,2}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,t-\frac{N}{2}}(\Omega) \subset C^{t-\frac{N}{2}}(\Omega).$$

Assim, $E^t(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega)$ com $\alpha = t - \frac{N}{2}$. Então, $u \in C^\alpha(\Omega)$ com $\alpha > 0$. Isto implica que $f(u) \in L^\infty(\Omega)$ e, assim, existe uma única solução $w \in E_q, \forall q > 1$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta w &= f(u) \quad \text{em } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Novamente, como o operador de Laplace é autoadjunto, segue que

$$\int_\Omega f(u)\psi dx = \int_\Omega (-\Delta w)\psi dx = \int_\Omega w(-\Delta\psi)dx. \tag{2.20}$$

Assim, de (2.19) e (2.20) obtemos

$$\int_\Omega (-\Delta\psi)v dx = \int_\Omega w(-\Delta\psi)dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (v - w)(-\Delta\psi)dx = 0, \quad \forall\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Análogo ao caso anterior, como $C_0^\infty(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ segue que $w = v$, e daí $v \in E_q$, para todo $q > 1$.

Portanto, o par $(u, v) \in E_p \times E_q$ é uma solução fraca do sistema (1).

2.2 O caso $p \leq 1$

Nesta seção, consideremos os casos $0 < p \leq 1 (N = 2, 3)$ e $0 < p < \frac{2}{N-2} (N \geq 4)$.

2.2.1 O funcional

Considere o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.21}$$

O sistema (2.21) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u) = v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.22}$$

Substituindo $v = |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)$ na segunda equação de (2.22), obtemos o problema

$$\begin{cases} -\Delta(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)) = -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = -\Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.23}$$

Para a equação (2.23) podemos associar o funcional

$$I(u) = \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \int_\Omega F(u)dx \tag{2.24}$$

que está bem definido em $E_p = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. De fato, temos que

$$\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx < \infty, \text{ pois } u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

Além disso, como f é contínua em $\mathbb{R}$, temos que $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$ (pelo Teorema fundamental do cálculo) é contínua em $\mathbb{R}$. Como $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e pela Observação 1.80, obtemos $u \in C(\overline{\Omega})$. Logo, $F(u)$ é contínua, e daí $\displaystyle\int_\Omega F(u)dx$ é limitada. Portanto, o funcional I está bem definido em E_p.

2.2.2 Existência de pontos críticos

Nesta subseção, utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha no funcional I para garantirmos a existência de pontos críticos. Em seguida, mostraremos a existência de solução fraca para o sistema (1).

Considerando o funcional

$$I(u) = \tfrac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \int_\Omega F(u)dx$$

temos que $I \in C^1(E_p, \mathbb{R})$, cuja derivada de Gâteaux na direção $v \in E_p$ é dada por

$$I'(u)v = \int_\Omega (|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u))(-\Delta v)dx - \int_\Omega f(u)v dx.$$

Verificaremos agora que o funcional I definido em (2.24) satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz (ver Teorema 1.85).

1) Vimos que, pela Observação 1.80, $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_C \leq C_1 \|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}}.$$

Pelo Lema 1.90, tomando $L = -\Delta$ e $1 < \frac{p+1}{p} < \infty$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}} \leq C_2 \| -\Delta u\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}.$$

Então,

$$\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}} \leq C_3 \| -\Delta u\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}},$$

onde $C_3 = C_1 C_2$. Logo,

$$\frac{p}{p+1}\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}} \quad \leq \quad C_3 \frac{p}{p+1}\| -\Delta u\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}}.$$

Assim,

$$\frac{p}{p+1} C\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}} \leq \frac{p}{p+1}\| -\Delta u\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}}, \tag{2.25}$$

onde $C = \frac{1}{C_3}$.

Note que,

$$\lim_{s \to 0} \frac{|f(s)|}{|s^{\frac{1}{p}}|} = 0.$$

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $|s| < \delta$ então $\frac{|f(s)|}{|s|^{\frac{1}{p}}} \leq \epsilon$. Logo, $f(s) \leq |f(s)| \leq \epsilon |s|^{\frac{1}{p}}$, sempre que $|s| < \delta$. Integrando, obtemos

$$F(s) \leq \frac{\epsilon p}{p+1}|s|^{\frac{p+1}{p}}, \qquad \text{sempre que } |s| < \delta.$$

Considere $\Gamma := \{u \in E_p : \|u\|_C = \frac{\delta}{2}\}$. Como $|u(x)| \leq \max_{x \in \Omega} |u(x)| = \|u\|_C$, temos que $|u(x)|^{\frac{p+1}{p}} \leq \|u\|_C^{\frac{p+1}{p}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(u)dx &\leq \int_\Omega \frac{p}{p+1}\epsilon \|u\|_C^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &\leq \frac{\epsilon p}{p+1} m(\Omega)\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}}, \end{aligned}$$

para todo $u \in \Gamma$. Então,

$$-\int_\Omega F(u)dx \geq -\frac{\epsilon p}{p+1} m(\Omega)\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}}, \tag{2.26}$$

para todo $u \in \Gamma$. Logo, de (2.25) e (2.26), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{Cp}{p+1}\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}} - \frac{\epsilon p}{p+1} m(\Omega)\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}} \\ &\geq \frac{p}{p+1}\|u\|_C^{\frac{p+1}{p}}(C - \epsilon m(\Omega)), \end{aligned}$$

para todo $u \in \Gamma$. Tomando $\epsilon = \frac{C}{2m(\Omega)}$ temos que

$$I(u) > I(0) = 0,$$

para todo $u \in \Gamma$. Portanto, 0 é um mínimo local de I.

2) Considere $u_1 \in E_p$ com $u_1 \neq 0$ fixo. Escreva $v := su_1$, com $s > 0$. Então,

$$I(su_1) = \frac{p}{p+1} s^{\frac{p+1}{p}} \int_\Omega |-\Delta u_1|^{\frac{p+1}{p}} dx - \int_\Omega F(su_1)dx. \tag{2.27}$$

Pela Observação 1.94, existem constantes $c, d_1 > 0$ tais que

$$F(su_1) \;\; \geq \;\; c|su_1|^\theta - d_1 = cs^\theta |u_1|^\theta - d_1.$$

Daí,

$$-\int_\Omega F(su_1)dx \;\; \leq \;\; -cs^\theta \int_\Omega |u_1|^\theta dx + \int_\Omega d_1 dx.$$

Assim,

$$-\int_\Omega F(su_1)dx \;\; \leq \;\; -cs^\theta \|u_1\|^\theta_{L^\theta} + d, \tag{2.28}$$

onde $d = m(\Omega)d_1$. Logo, de (2.28) e (2.27), temos

$$\begin{aligned} I(su_1) &\leq \frac{p}{p+1} s^{\frac{p+1}{p}} \int_\Omega |-\Delta u_1|^{\frac{p+1}{p}} dx - cs^\theta \|u_1\|^\theta_{L^\theta} + d \\ I(su_1) &\leq \frac{p}{p+1} s^{\frac{p+1}{p}} \|-\Delta u_1\|^{\frac{p+1}{p}}_{L^{\frac{p+1}{p}}} - cs^\theta \|u_1\|^\theta_{L^\theta} + d. \end{aligned}$$

Note que $\theta > \frac{p+1}{p} > 2$ para $p < 1$ (no caso $p = 1$ temos $\theta > 2$). Assim, se s é suficientemente grande ($s \to +\infty$) então $s^\theta > s^{\frac{p+1}{p}}$. Portanto, se $s \to +\infty$ temos que

$$I(su_1) \to -\infty.$$

3) Finalmente, vamos mostrar que I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS). Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_p$ uma sequência (PS), isto é:

$$|I(u_n)| \leq c \quad \text{e} \quad |I'(u_n)\eta| \leq \epsilon_n \|\eta\|_{E_p}, \forall \eta \in E_p \text{ e } \epsilon_n \to 0.$$

Temos

$$|I'(u_n)\eta| = \left| \int_\Omega (|-\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u_n))(-\Delta \eta)dx - \int_\Omega f(u_n)\eta dx \right| \leq \epsilon_n \|\eta\|_{E_p},$$

para todo $\eta \in E_p$. Considerando $\eta = u_n$ na desigualdade acima, obtemos:

$$|I'(u_n)u_n| = \left| \int_\Omega |-\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx - \int_\Omega f(u_n)u_n dx \right| \leq \epsilon_n \|u_n\|_{E_p}.$$

Observe que,

$$|\theta I(u_n) - I'(u_n)u_n| \leq \theta |I(u_n)| + |I'(u_n)u_n| \leq c\theta + \epsilon_n \|u_n\|_{E_p}. \tag{2.29}$$

Por outro lado,

$$|\theta I(u_n) - I'(u_n)u_n| \quad \geq \quad \left(\theta \frac{p}{p+1} - 1\right) \int_\Omega |-\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx + \int_\Omega (f(u_n)u_n - \theta F(u_n))dx.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f(u_n)u_n - \theta F(u_n))dx &= \int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} (f(u_n)u_n - \theta F(u_n))dx \\ &+ \int_{\{x\in\Omega:|u_n|\leq s_0\}} (f(u_n)u_n - \theta F(u_n))dx. \end{aligned}$$

Note que,

$$0 \leq \int_{\{x\in\Omega:|u_n|>s_0\}} (f(u_n)u_n - \theta F(u_n))dx$$

e como $\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}$ é compacto e F, f e u_n são contínuas, então a imagem da função $f(u_n)u_n - \theta F(u_n)$ é um conjunto compacto, e daí existe $c_1 > 0$ tal que

$$|f(u_n)u_n - \theta F(u_n)| \leq c_1.$$

Então,

$$-c_1.m(\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\}) \quad \leq \quad \int_{\{x\in\Omega:|u_n|\leq s_0\}} f(u_n)u_n - \theta F(u_n)dx,$$

isto é,

$$-C \quad \leq \quad \int_{\{x\in\Omega:|u_n|\leq s_0\}} f(u_n)u_n - \theta F(u_n)dx,$$

onde $C = c_1.m(\{x \in \Omega : |u_n| \leq s_0\})$. Assim, obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_\Omega (f(u_n)u_n - \theta F(u_n))dx \geq -C. \tag{2.30}$$

Pela desigualdade (2.30), segue que

$$\begin{aligned} |\theta I(u_n) - I'(u_n)u_n| &\geq \left(\theta \frac{p}{p+1} - 1\right) \int_\Omega |-\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx - C \\ &\geq \left(\theta \frac{p}{p+1} - 1\right) \|-\Delta u_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}} - C. \end{aligned}$$

Usando (2.29), temos

$$c\theta + \epsilon_n \|u_n\|_{E_p} \geq \delta \| - \Delta u_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}} - C,$$

onde $\delta = \left(\theta \frac{p}{p+1} - 1\right) > 0$.

Pelo Lema 1.90, existe $c_1 > 0$ tal que $\|u_n\|_{E_p} \leq c_1 \| - \Delta u_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}$, daí

$$c\theta + \epsilon_n \|u_n\|_{E_p} \geq \frac{\delta}{d} \|u_n\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - C. \tag{2.31}$$

onde $d = c_1^{\frac{p+1}{p}}$. Para concluir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, vamos considerar dois casos:

Se $\|u_n\|_{E_p} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos o resultado. Agora suponha que, a menos de subsequência, $\|u_n\|_{E_p} \geq 1$. Como $\epsilon_n \to 0$, dado $\epsilon = \frac{\delta}{2d} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_n < \epsilon$, sempre que $n \geq n_0$.

Assim, de (2.31) segue que

$$c\theta + \tfrac{\delta}{2d} \|u_n\|_{E_p} \geq \frac{\delta}{c_1^{\frac{p+1}{p}}} \|u_n\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - C.$$

Como $\frac{p+1}{p} \geq 1$, temos $\|u_n\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} \geq \|u_n\|_{E_p}$. Assim, obtemos

$$\frac{\delta}{d} \|u_n\|_{E_p} - C \quad \leq \quad c\theta + \frac{\delta}{2d} \|u_n\|_{E_p}.$$

Logo,

$$\|u_n\|_{E_p} \quad \leq \quad \frac{2d}{c\theta + C)} \delta.$$

Portanto, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E_p. Como E_p é um espaço de Banach reflexivo, pela Proposição 1.21, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Agora, como $E_p \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C(\overline{\Omega})$ e pela Proposição 1.23, temos que $u_{n_k} \to u$ em $C(\overline{\Omega})$. Além disso, como $F \in C(\mathbb{R})$, obtemos

$$F(u_{n_k}) \to F(u) \text{ em } C(\overline{\Omega}).$$

Pelo Teorema da convergência dominada

$$\int_\Omega F(u_{n_k}) dx \to \int_\Omega F(u) dx.$$

Por outro lado, $(I(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado. Assim, passando a subsequência se necessário, obtemos que $(I(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Observe que

$$\begin{aligned} I(u_{n_k}) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u_{n_k}|^{\frac{p+1}{p}}dx - \int_\Omega F(u_{n_k})dx \\ &= \frac{p}{p+1}\|-\Delta u_{n_k}\|^{\frac{p+1}{p}}_{L^{\frac{p+1}{p}}} - \int_\Omega F(u_{n_k})dx. \end{aligned}$$

Assim, $(\Delta u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge forte em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Finalmente, pelo Lema 1.90, $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge em E_p.

Portanto, o funcional I satisfaz todas as condições do Teorema do Passo da Montanha 1.85. Assim, obtemos um ponto crítico não trivial do funcional I.

Teorema 2.8. *Seja $u \in E_p$ um ponto crítico do funcional I e defina*

$$v := |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u).$$

Então o par (u, v) é uma solução fraca do sistema (1).

Demonstração. Seja $u \in E_p$ é um ponto crítico não trivial do funcional I, então

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi &= 0, \forall \varphi \in E_p, \\ I'(u)\varphi &= \int_\Omega (|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u))(-\Delta\varphi)dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx = 0, \forall\varphi \in E_p. \end{aligned}$$

Defina $v = |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)$. Assim,

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega v(-\Delta\varphi)dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx = 0, \forall\varphi \in E_p.$$

Logo,

$$0 = I'(u)\varphi = \int_\Omega (-\Delta v)\varphi dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx, \forall\varphi \in E_p.$$

Assim, obtemos a seguinte igualdade

$$\int_\Omega (-\Delta v)\varphi dx = \int_\Omega f(u)\varphi dx, \forall\varphi \in E_p. \tag{2.32}$$

Note que,

$$\int_\Omega (-\Delta u)\psi dx = \int_\Omega |v|^{p-1}v\psi dx, \forall\psi \in E_q, \tag{2.33}$$

pois $v = |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)$.

Finalmente, concluimos de (2.32) e (2.33) que $(u, v) \in E_p \times E_q$ é uma solução fraca do sistema (1). □

2.3 Regularidade de solução

Nesta seção, mostraremos a existência de uma solução clássica para o problema (1), a partir da existência de uma solução fraca.

Seja (u, v) uma solução fraca do sistema (1) com $(u, v) \in E_p \times E_q$, para todo $1 < q < \infty$.

Pelo Teorema 1.64 item (3), obtemos que $v \in C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \gamma < 1$.

Observe que, se $r > 1$ e $w \in C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ então $|w|^{r-1}w \in C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, onde

$$\beta = \min\{\gamma, h(r)\}, \qquad h(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \in \mathbb{N} \\ r - [r] & \text{se } r \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

Em particular, $|w|^{r-1}w \in C_0^{0,\beta}(\overline{\Omega})$. Enquanto que, se $0 < r \leq 1$ e $w \in C_0^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ então a desigualdade (veja [[3], página 35])

$$||a|^{r-1}a - |b|^{r-1}b| \leq 2^{1-r}|a - b|^r, \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{2.34}$$

nos da que $|w|^{r-1}w \in C_0^{0,\gamma r}(\overline{\Omega})$. De fato, seja $w \in C_0^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, pela definição de espaço de Hölder existe uma constate $c > 0$ tal que

$$|w(x) - w(y)| \leq c|x - y|^\gamma, \forall\ x, y \in \Omega. \tag{2.35}$$

e pela desigualdade (2.34), obtemos

$$||w(x)|^{r-1}w(x) - |w(y)|^{r-1}w(y)| \leq 2^{1-r}|w(x) - w(y)|^r, \forall\ x, y \in\ \Omega. \tag{2.36}$$

Assim, de (2.35) e (2.36), temos

$$||w(x)|^{r-1}w(x) - |w(y)|^{r-1}w(y)| \leq C|x - y|^{r\gamma}; \forall\ x, y \in \Omega.$$

com constante $C = 2^{1-r}c^r$. Portanto, $|w|^{r-1}w \in C_0^{0,\gamma r}(\overline{\Omega})$.

Combinando esta observação e o fato que $v \in C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, temos que:

(i) Se $p > 1$, $|v|^{p-1}v \in C_0^{0,\beta}(\overline{\Omega})$.

(ii) Se $0 < p \leq 1$, $|v|^{p-1}v \in C_0^{0,\gamma p}(\overline{\Omega})$.

Logo, tomando $\alpha = \min\{\beta, \gamma p\}$, obtemos que $|v|^{p-1}v \in C_0^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Aplicando o Teorema 1.91 no problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

obtemos que $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\alpha = \min\{\beta, \gamma p\}$.

Supondo agora que $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$, temos que $f(u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Aplicando o

Teorema 1.91 no problema

$$\begin{cases} -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

obtemos que $v \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\alpha = \min\{\beta, \gamma p\}$.

Em particular, utilizando o Teorema 1.43, temos que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$. Portanto, (u, v) é solução clássica para o sistema (1).

2.4 O caso $f(s) = s^2 e^s$

Teorema 2.9. *Consideremos $f(s) = s^2 e^s$. Então o sistema* (1) *têm solução clássica positiva para todo $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{N-2}$, se $N = 3, 4, 5$, ou para todo $\frac{1}{2} < p$, se $N = 2$.*

Demonstração. Verifiquemos as condições do Teorema 0.3:

Temos que $f(s) = s^2 e^s$ é contínua, pois f é produto de funções contínuas (polinomial e exponencial).

Defina $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Assim,

$$F(s) = \int_0^s t^2 e^t dt = s^2 e^s - 2se^s + 2e^s - 2.$$

Dado $\theta > \begin{cases} 2, & se \quad p \geq 1 \\ 1 + \frac{1}{p}, & se \quad p < 1 \end{cases}$, temos que:

$$\begin{aligned} \theta F(s) &= \theta e^s(s^2 - 2s + 2) - 2\theta \\ &\leq \theta e^s(s^2 - 2s + 2). \end{aligned}$$

Considere $s_0 \geq 0$, tal que $\theta \leq s_0$. Seja s tal que $|s| \geq s_0$.

Se $s \geq s_0 \geq \theta > 2$, então

$$\theta F(s) \leq \theta e^s(s^2 - 2s + 2) \leq se^s s^2 = f(s)s.$$

Se $s \leq -s_0 \leq -\theta < -2$. Então $-s > 0$. Logo, utilizando

$$s^2 - 2s + 2 < e^{-s} \qquad \text{e} \qquad -s < e^{-s}$$

obtemos que

$$\theta F(s) = \theta[e^s(s^2 - 2s + 2) - 2] \leq se^s s^2 = sf(s).$$

Portanto, $0 < \theta F(s) \leq f(s)s$, $\forall\ |s| \geq s_0$.

Mostremos que: $f(s) = \begin{cases} o(s), & se\ p \geq 1 \\ o(s^{\frac{1}{p}}), & se\ \frac{1}{2} < p < 1 \end{cases}$. De fato, se $p \geq 1$ então

$$\lim_{s \to 0} \frac{|f(s)|}{|s|} = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 e^s}{|s|} = 0.$$

Agora, se $\frac{1}{2} < p < 1$ então:

$$\lim_{s \to 0} \frac{s^2 e^s}{|s^{\frac{1}{p}}|} = 0.$$

Observe que, se $p \leq \frac{1}{2}$ então

$$\lim_{s \to 0} \frac{s^2 e^s}{|s^{\frac{1}{p}}|} \text{ não existe.}$$

Então, pelo Teorema 0.3, o sistema (1) admite uma solução fraca não trivial $(u, v) \in E_p \times E_q$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e utilizando o Teorema 1.43, obtemos que o par (u, v) é uma solução clássica do sistema (1). Finalmente, pelo Corolário 1.88, temos que $u, v > 0$ em Ω. Portanto o sistema 0.3 admite uma solução clássica positiva. $\square$

Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesse trabalho, usamos métodos variacionais para mostrar a existência de soluções para sistemas elípticos não lineares da forma (1).

Uma observação muito importante é que devido a continuidade e compacidade das imersões $E_p \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ e $E^t(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, a função real f não possui nenhum tipo de restrição de crescimento.

Além disso, uma extensão natural desse trabalho é estudar o problema (1) quando $p \geq \frac{2}{N-2}$, $N \geq 3$. Pois, nessas condições temos um problema em aberto no sentido de estabelecer a existência ou não de solução não trivial.

Outra perspectiva de futuros estudos é sobre soluções positivas do problema (1), com $p \geq \dfrac{2}{N-2}$, sendo Ω um domínio estrelado em relação a origem, suave e limitado.

Referências Bibliográficas

[1] R.J. Biezuner. **Notas de Aula, Equações Diferenciais Parciais I/II**. 2010. 1-305.

[2] R.J. Biezuner. **Notas de Aula, Análise Funcional**. 2009. 1-123.

[3] D. Bonheure, E. M. dos Santos, M. Ramos. **Ground state and non ground state of some strongly coupled elliptic systems**. Transactions of the American Mathematical Society. v. 364, 447-491. 2012.

[4] G. Botelho; D. Pelegrino; E. Teixeira. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] H. Brezis. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, 2010.

[6] Ph. Clément; D. G. de Figueiredo; E. Mitidieri. **Positive solutions of semilinear elliptic systems**. Comm. Partial Differential Equations. 17 (1992), 923-940.

[7] F. Demengel; G. Demengel. **Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations**. Springer, 2012.

[8] L.C. Evans. **Partial differential equations (graduate studies in mathematics)**. Vol. 19, 2009.

[9] P. Felmer; S. Martínez. **Existence and uniqueness of positive solutions to certain differential systems**. Adv. Differential Equations 4 (1998), 575-593.

[10] D. G. de Figueiredo; B. Ruf. **Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth**. Mediterr. J. Math. 1 (2004), 417-431.

[11] D. G. de Figueiredo; P. Felmer. **On superquadratic elliptic systems**. Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 99-116.

[12] D. Gilbarg; N.S. Trudinger. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin, Springer-Verlag, 2001.

[13] J. Hulshof; R. van der Vorst. **Differential systems with strongly indefinite variational structure**. J. Funct. Anal. 114 (1993), 32-58.

[14] Y. Jabri. **The Mountain Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications**. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 2003.

[15] S. Li; M. Willem. **Applications of local linking to critical point theory**.J. Math. Anal. Appl. 189 (1995).

[16] J.L. Lions; E. Magenes. **Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications**. Vol I, II. Springer-Verlag, 1972.

[17] E. Mitidieri. **A Rellich type identity and applications**. Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), 125-151.

[18] E. Mitidieri. **Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic systems in $\mathbb{R}^n$**. Differential and Integral Equations 9 (1996), 465-479.

[19] M. Montenegro. **The construction of principal spectra curves for Lane-Emden systems and applications**.Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 29 (2000), 193-229.

[20] E. Di Nezza; G. Palatucci; E. Valdinoci. **Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces**. Bull. Sci. Math. 5 (2012), 521-573.

[21] Y. Qin. **Nonlinear Parabolic-Hyperbolic Coupled Systems and Their Attractors**. Birkhäuser Verlag, 2008.

[22] J. Serrin; H. Zou. **Existence of positive entire solutions of elliptic Hamiltonian systems**. Comm. Partial Differential Equations 23 (1998), 577-599.

[23] G. Sweers. **Maximum principles, a start**. `http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers/pdf/maxprinc.pdf`. 2000.