

JOÃO DE DEUS OLIVEIRA JÚNIOR

CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES UTILIZANDO O TEOREMA DE
POINCARÉ

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2010

JOÃO DE DEUS OLIVEIRA JÚNIOR

CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES UTILIZANDO O TEOREMA DE
POINCARÉ

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de Fevereiro de 2010.

Marinês Guerreiro

Catarina Mendes de Jesus

Simone Maria de Moraes
(Co-orientadora)

Francisco Dutenhofner
(Co-orientador)

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

*Dedico à minha família
e aos meus amigos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela saúde, por todas as conquistas alcançadas, pela capacitação e por ter colocado pessoas especiais á minha volta.

Aos meus pais, João Coivara e Maria Imaculada, pelo incentivo constante, pois sempre apoiaram em minhas decisões. A todos meus familiares que sempre estiveram ao meu lado. Agradeço, especialmente, a minha tia Sandra, minha segunda mãe, pela sua preocupação e constante prontidão a me ajudar.

Ao professor Mercio Botelho Faria, pela orientação e pela paciência. Aos meus co-orientadores Simone Moraes e Francisco Dutenhofner, foram fundamentais para o término do meu trabalho. Aos membros da banca examinadora.

Agradeço a todos os professores que contribuíram na minha formação, em especial ao Professor Olímpio Miyagaki e a professora Marinês Guerreiro pelo apoio no curso do mestrado. E a Mara, secretária do mestrado, pela sua amizade, carinho e constante apoio.

À Universidade Federal de Viçosa e ao Departamento de Matemática pela realização do curso e pela competência de seus profissionais.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro.

E a todos aqueles que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Geometria Hiperbólica	4
1.1 Transformações de Möbius	4
1.2 Modelos Hiperbólicos	7
1.2.1 Semi-plano Superior $\mathbb{H}^2$	7
1.2.2 Disco Unitário ou Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$	10
1.3 Ângulo	12
1.4 Área Hiperbólica	13
1.5 Polígonos Hiperbólicos	14
2 Grupos Fuchsianos e Domínio Fundamental	17
2.1 Grupo Discreto e Propriedades de Grupos Descontínuos	17
2.2 Grupos Fuchsianos	20
2.3 Domínio Fundamental	26
2.3.1 Domínios de Dirichlet	30
2.4 Superfície Compacta $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$	36
2.5 Calculando o Gênero de uma Superfície Compacta Orientável	37
3 Teorema de Poincaré para Polígonos	39
3.1 Teorema de Poincaré para Polígonos	39
4 Emparelhamentos Construídos	54
4.1 Emparelhamento de arestas de um polígono	54
4.2 Emparelhamentos Generalizados $\{12\eta - 8, 4\}$	55
4.3 Emparelhamentos Generalizados $\{12\mu - 12, 4\}$	59
4.4 Empacotamento de Esferas	63

4.5	Emparelhamentos de Arestas em Polígonos	
	Hiperbólicos de 16 Arestas	64
4.6	Emparelhamentos de Arestas em Polígonos	
	Hiperbólicos de 18 Arestas	69
A	Grupos Fuchsianos Abelianos e Grupo Elementar	72
A.1	Grupos Fuchsianos Abelianos	72
A.2	Grupos Elementares	74
B	Uma Nova Abordagem do Teorema de Poincaré	76
B.1	Outra Forma de Demonstrar o Teorema de Poincaré	76
B.2	Ladrilhamento Triangular	78

Resumo

OLIVEIRA JÚNIOR, João de Deus, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2010. **Construção de superfícies utilizando o Teorema de Poincaré.** Orientador: Mercio Botelho Faria. Co-orientadores: Simone Maria de Moraes e Francisco Dutenhofner.

Este estudo aborda a construção de superfícies compactas pelo quociente $\mathbb{M}^2/\mathbb{G}$ onde a superfície $\mathbb{M}^2$ ou é o plano euclidiano, ou é o plano esférico, ou é o plano hiperbólico, $\mathbb{G}$ é um grupo de isometrias das respectivas superfícies e esse grupo é gerado pelos emparelhamentos de arestas dos polígonos. O Teorema de Poincaré fornece um método de encontrar o grupo de isometrias $\mathbb{G}$ que consiste das funções de emparelhamento de arestas dos polígonos associados. Mediante o uso deste teorema nós construímos dois novos emparelhamentos de arestas generalizados (Capítulo 4), associados as tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$, respectivamente. Estas tesselações fornecem empacotamento de esferas cuja densidade de empacotamento é bem próxima do valor máximo $3/\pi$. Tais emparelhamentos são o ponto de partida para a busca de códigos com ótimas taxas de transmissão para canais de múltiplas entradas e múltiplas e saídas (MIMO).

Abstract

OLIVEIRA JÚNIOR, João de Deus, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2010. **Construction of surfaces using the Poincare's Theorem.** Adviser: Mercio Botelho Faria. Co-Advisers: Simone Maria de Moraes and Francisco Duthefner.

This study deals with the surface of the compact quotient $\mathbb{M}^2/\mathbb{G}$ where the surface $\mathbb{M}^2$ is either the Euclidean plane or the plane spherical or the hyperbolic plane, $\mathbb{G}$ is a group of isometries of their surfaces, and this group is generated by matching of edges of polygons. The Poincaré theorem that provides a method of finding the group of isometries $\mathbb{G}$ the functions that the pair of edges of the polygons involved. By using this theorem we construct two new pairings of generalized edges (Chapter 4) associated with the tessellations $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$, respectively. These tessellations provide packing of spheres whose packing density is very close to the maximum $3/\pi$. Such pairings are the starting point for finding codes with optimal transmission rates for Multiple-Input Multiple-Output (MIMO).

Introdução

O presente texto aborda o estudo de emparelhamento de arestas de polígonos ao qual construiremos superfícies compactas baseadas em quocientes $\mathbb{M}^2/\mathbb{G}$, onde a superfície $\mathbb{M}^2$ ou é a esfera $\mathbb{S}^2$, ou é o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, ou é o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{G}$ é um grupo de isometrias da respectiva superfície. Os casos euclidianos e esféricos são bem conhecidos (veja seção B.2), mas o caso hiperbólico não foi tão explorado e será nosso foco durante o desenvolvimento deste trabalho ([3], [12], [11], [18] e [22]).

Para conseguirmos tais quocientes $\mathbb{M}^2/\mathbb{G}$ faremos uso do Teorema de Poincaré (Capítulo 3) que nos fornece uma maneira para encontrarmos estes grupos $\mathbb{G}$ que consiste das funções de emparelhamento das arestas dos polígonos fundamentais associados. Após o estudo detalhado deste teorema nós geramos novos emparelhamentos e, portanto, novos grupos, que estão expostos no Capítulo 4. Além disto, fizemos o cálculo da densidade de empacotamento relacionada aos empacotamentos de esferas obtidos através dos emparelhamentos de arestas gerados (4).

O principal objetivo do problema de Empacotamento de Esferas é a busca pela maior densidade possível de empacotamento. Em [23, página 241], Toth apresentou o limitante máximo para esta densidade no plano hiperbólico. Segundo ele, a densidade de empacotamento é limitada superiormente por $\frac{3}{\pi}$.

Em [5, Cáp. 4 Teorema 4.1.1] foram feitos estudos assintóticos para reticulados do tipo $\{p, q\}$. Demonstraram que assintoticamente¹, a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$. Porém, temos que $\frac{3}{\pi}$ é atingido por empacotamentos de horobolas $\{\infty, 3\}$.

Assim, quando consideramos um reticulado da forma $\{p, q\}$, temos um empacotamento de esferas associado. A busca por empacotamentos reticulados ótimos, no sentido da maior densidade possível, está ligada à busca de códigos ótimos, pois maior densidade de empacotamento implica em menor probabilidade de erro.

A relevância dos resultados que apresentaremos neste trabalho para empacotamento de esferas, está no fato que reticulados hiperbólicos do tipo $\{12\eta - 8, 4\}$

¹Assintoticidade no sentido de p e q tenderem a infinito, onde p e q determinam um ladrilhamento $\{p, q\}$.

e $\{12\mu - 12, 4\}$ fornecem empacotamentos com densidades próximas ao empacotamento ótimo em relação a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Vale ressaltar que a busca por novos emparelhamentos é o processo inicial para encontrarmos os grupos Fuchsianos Aritméticos que estão diretamente relacionados com a construção e rotulamento de constelações de sinais geometricamente uniformes [4]. Esses grupos Fuchsianos Aritméticos nos fornecem códigos com altas taxas de transmissão sobre canais com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), [1]. Daí, nosso interesse em explorar os emparelhamentos de arestas de polígonos, em particular os polígonos com $12\eta - 8$ e $12\mu - 12$ arestas (seções 4.2 e 4.3).

Antes de iniciarmos o trabalho apresentamos um resumo do que está feito em cada capítulo.

No Capítulo 1, estudaremos o plano hiperbólico por meio de dois modelos, o semi-plano superior e o disco de Poincaré. Iremos apresentar o comprimento hiperbólico e a distância hiperbólica, descreveremos as geodésicas e as isometrias tanto no semi-plano superior quanto no disco de Poincaré e apresentaremos uma classificação das isometrias. Além disso, descreveremos o ângulo, a área hiperbólica e por fim comentaremos sobre a construção de um polígono hiperbólico.

O Capítulo 2 foi utilizado para apresentar grupos fuchsianos e domínios fundamentais. Os grupos fuchsianos são grupos discretos de isometrias do plano hiperbólico. A teoria, descrita no capítulo está bem estruturada. O texto pode ser encontrado no artigo *Théorie des Groupes Fuchsians* publicado por Poincaré em 1882 ([18]). A Teoria de Grupos Fuchsianos é bem acessível devido a existência de modelos euclidianos (semi-plano superior e o modelo do disco de Poincaré) para espaços hiperbólicos. O pré-requisitos formais não são muitos, basta conhecer a linguagem básica de variedade riemanniana, definições básicas da Teoria de Grupos, noções de Topologia Geral, noções de topologia Algébrica, bem como o conhecimento de grupo fundamental e característica de Euler.

O Teorema de Poincaré foi apresentado no Capítulo 3 onde fizemos sua demonstração. Veremos no Capítulo 2 que qualquer grupo fuchsiano $\mathbb{G}$ agindo sobre um disco unitário Δ possui um domínio fundamental $\mathcal{D}$, em particular, possui um polígono convexo fundamental $\mathcal{P}$. E existe uma coleção de emparelhamentos g_s de arestas do polígono $\mathcal{P}$ que geram $\mathbb{G}$. O Teorema de Poincaré está interessado em inverter esse processo, ou seja, começar com um polígono convexo hiperbólico e um conjunto de transformações de emparelhamentos de arestas e assim obter um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$.

O último Capítulo, 4, ficou reservado para os emparelhamentos que nós construímos. Iniciamos apresentando uma seção com a definição de emparelhamento de aresta e em seguida apresentamos em duas seções os emparelhamentos generalizados que nós construímos. Estes estão relacionados aos ladrilhamentos regulares

$\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$. Finalizamos o Capítulo com mais duas seções onde tratamos casos particulares de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos de 16 arestas e 18 arestas, respectivamente.

Capítulo 1

Geometria Hiperbólica

A Geometria Hiperbólica constitui o ponto de partida para os capítulos seguintes. Sendo assim, apresentamos conceitos e resultados de geometria hiperbólica que serão usados nos próximos capítulos. Pretendemos simplesmente nos situar com respeito a essas ferramentas, de modo que foge aos nossos objetivos a demonstração de todos os resultados aqui apresentados. A primeira seção deste capítulo trata das transformações Möbius para o caso $(n + 1)$ -dimensional de espaço hiperbólico, mas estamos interessados no caso bi-dimensional da Geometria Hiperbólica. Mais adiante neste capítulo, estudaremos dois modelos da Geometria Hiperbólica plana, bem como as isometrias em cada modelo apresentado. Além disso, iremos fazer um breve comentário sobre ângulo hiperbólico, área hiperbólica e polígono hiperbólico. Para este estudo, nós baseamos nos textos [5], [11], [19], [20], [21] e [26].

1.1 Transformações de Möbius

Nesta seção, apresentaremos as *transformações de Möbius* que são vistas com transformações que mantêm um disco ou um semi-plano invariantes. Mais adiante, estudaremos modelos para a Geometria Hiperbólica. Em um destes modelos, o modelo de semi-plano superior,

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\},$$

assumiremos que os arcos de circunferência e os segmentos de retas ortogonais ao bordo

$$\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\},$$

serão as “linhas retas” deste modelo. Como a nossa abordagem será essencialmente riemanniana e não axiomática, torna-se interessante estudarmos as transformações

que mantêm $\mathbb{H}^{n+1}$ invariante, assim como o conjunto de suas “linhas retas”. Estas transformações são assim chamadas transformações de Möbius.

Agora, introduziremos dois tipos de transformações de Möbius, as inversões e a reflexões. Para isso, considere o Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e sua *compactificação* por um ponto $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, onde as vizinhas do ponto ∞ (chamamos de ponto ideal) são da forma $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cup \{\infty\}$ onde A é um conjunto compacto qualquer de $\mathbb{R}^n$. O conjunto $\widehat{\mathbb{R}^n}$ é homeomorfo a esfera

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |(x_1, \dots, x_{n+1})|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

De fato, considerando a imersão $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\iota(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$.

Podemos definir a **projeção estereográfica**

$$\pi_N : S^n \setminus N \rightarrow \iota(\mathbb{R}^n) \cong \widehat{\mathbb{R}^n},$$

onde $N = (0, \dots, 0, 1)$ é o polo norte da esfera S^n . Esta projeção é definida do seguinte modo:

Dado um ponto $x \in S^n \setminus N$, existe uma única reta determinada por x e por N , sendo $x \neq N$, sua última coordenada é diferente de 1, logo a reta passando por x e por N intersecta o hiperplano $\iota(\mathbb{R}^n)$ em um único ponto que denotaremos por $\pi_N(x)$. É simples verificar que se $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, então

$$\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

Além disso, podemos verificar diretamente que π_N é um homeomorfismo. Ainda, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sequência em S^n , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = N \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_N(x_n)| = \infty.$$

Portanto, ao adicionarmos um ponto ideal em $\mathbb{R}^n$ e definirmos suas vizinhas como definido acima, a projeção estereográfica se estende a um homeomorfismo $\pi_N : S^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$. Denotaremos por $S_r(a)$ a esfera em $\mathbb{R}^n$ de centro a e raio r .

Definição 1.1.1. Dada uma esfera $S = S_r(a)$ em $\mathbb{R}^n$, definimos uma ***inversão*** em torno de S como sendo a aplicação $\iota_S : \widehat{\mathbb{R}^n} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$ tal que $\iota_S(a) = \infty$, $\iota_S(\infty) = a$ e para $x \neq a, \infty$, $\iota_S(x)$ é o único ponto da reta $\overline{ax}$ tal que $|a - x| |a - \iota_S(x)| = r^2$.

Proposição 1.1.2. Dada uma esfera $S = S_r(a)$, para todo $x \neq a, \infty$, temos

$$\iota_S(x) = a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}.$$

Demonstração:

De fato, como os ponto x, a e $a + r^2 \frac{x-a}{|x-a|^2}$ são colineares, temos

$$|a - x| \left| a - \left(a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} \right) \right| = r^2 |a - x| \left| \frac{x - a}{|x - a|^2} \right| = r^2.$$

■

Vamos considerar um hiperplano compactificado $P = P_t(a) \cup \{\infty\}$, onde $P_t(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = t\}$ é um plano de $\mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.3. Definimos a **reflexão** ι_P em P como sendo a aplicação que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa a um ponto $\iota_P(x)$ tal que o segmento $\overline{x\iota_P(x)}$ é ortogonal a P e intersecta o plano P em seu ponto médio.

A partir daqui, nesta seção, entenderemos por esferas tanto as esferas $S_r(a)$ como os hiperplanos compactificados $P_t(a) \cup \{\infty\}$. Neste caso, denotaremos a esfera por Σ e reservaremos a notação S e P para os casos a distinção for relevante.

Agora, apresentaremos resultado que estão demonstrados na referência [5], Seção 1.2.1.

Proposição 1.1.4. Seja ι_S uma inversão na esfera S . Então, para toda esfera Σ , $\iota_S(\Sigma)$ é uma esfera.

Proposição 1.1.5. Sejam $S = S_r(a)$ e $S' = S_{r'}(a')$ duas esferas e $P = P_t(b)$ um hiperplano. Então,

- i) se $a \in P$, $\iota_S(P) = P$ e se $x \notin P$, então $\iota_S(P)$ é uma esfera contendo o ponto a .
- ii) se $a \in S'$, então $\iota_S(S')$ é um plano e se $a \notin S'$, então $\iota_S(S')$ é uma esfera.

Demonstração:

Pela Proposição 1.1.4, basta notarmos que $\iota_S(a) = \infty$ e $\iota_S(\infty) = a$. ■

Definição 1.1.6. Uma aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita conforme se ϕ preserva ângulo entre curvas continuamente diferenciáveis.

Proposição 1.1.7. Para toda esfera $S = S_r(a)$, a inversão é uma aplicação conforme de $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

Definição 1.1.8. Uma **transformação de Möbius** de $\widehat{\mathbb{R}^n}$ é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas. O conjunto das transformações de Möbius é chamado **grupo geral de Möbius** o qual denotaremos por $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$.

Definição 1.1.9. O **grupo de Möbius** $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$ é o subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ formados pelas transformações de $\mathbb{R}^n$ que preservam a orientação.

Assim, temos a definição das transformações de Möbius para o Espaço Hiperbólico $(n+1)$ -dimensional. Mas estamos interessado no caso bi-dimensional, e assim, neste o grupo geral de Möbius e o grupo de Möbius ficarão denotados por $GM(\widehat{\mathbb{R}})$ e $M(\widehat{\mathbb{R}})$, respectivamente.

1.2 Modelos Hiperbólicos

Apresentaremos dois modelos convenientes para o nosso trabalho que são: o semi-plano superior, que denotaremos por $\mathbb{H}^2$, e o modelo do disco de Poincaré (ou disco unitário), que será denotado por $\mathbb{D}^2$. Veremos que há algumas vantagens em cada um desses dois modelos. Por exemplo, uma vantagem do modelo de disco de Poincaré sobre o semi-plano superior é que o disco unitário é um subconjunto limitado do plano euclidiano e assim, podemos visualizar todo o plano hiperbólico facilmente sobre uma folha de papel. E uma vantagem do semi-plano superior sobre o disco de Poincaré é a facilidade com que as coordenadas cartesianas podem ser utilizadas nos cálculos.

1.2.1 Semi-plano Superior $\mathbb{H}^2$

O modelo do **semi-plano superior** $\mathbb{H}^2$ é o conjunto de números complexos z com parte imaginária positiva, ou seja,

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\},$$

dotado com a métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \text{ ou seja, } ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \text{ onde } z = x + yi$$

e sua fronteira é dada por

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Definição 1.2.1. *Seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável no semi-plano superior. Então o **comprimento hiperbólico** de σ em $\mathbb{H}^2$ é dado por*

$$||\sigma||_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{|\sigma'(t)|}{\text{Im}[\sigma(t)]} dt.$$

Para efeito de simplificação, quando não houver nenhuma possibilidade de confusão, denotaremos o comprimento hiperbólico em $\mathbb{H}^2$ simplesmente por $||\sigma||$.

Definição 1.2.2. *Sejam dois pontos $z, w \in \mathbb{H}^2$ e $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$ com $\sigma(0) = z$ e $\sigma(1) = w$. Definimos a **distância hiperbólica** em $\mathbb{H}^2$ por*

$$d(z, w) = \inf ||\sigma||.$$

Quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos a distância hiperbólica em $\mathbb{H}^2$ simplesmente por d , mas para evitar confusão, em alguns casos usaremos a notação $d_{\mathbb{H}^2}$.

Proposição 1.2.3. *O semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ com a distância d é um espaço métrico $(\mathbb{H}^2, d)$.*

Demonstração:

Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}^2$ e $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$ tal que, $\sigma(0) = z_1$ e $\sigma(1) = z_3$, assim temos:

(i) $d(z_1, z_3) \geq 0$, pois como $\frac{|\sigma'(t)|}{\text{Im}[\sigma(t)]} \geq 0$, então, $||\sigma|| = \int_0^1 \frac{|\sigma'(t)|}{\text{Im}[\sigma(t)]} dt \geq 0$. Portanto, $d(z_1, z_3) = \inf ||\sigma|| \geq 0$. A igualdade vale se, e somente se, $z_1 = z_3$.

(ii) $d(z_1, z_3) = d(z_3, z_1)$. De fato, seja $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$ dado por $\lambda(t) = \sigma(1 - t)$ tal que $\lambda(0) = z_3$ e $\lambda(1) = z_1$ assim,

$$d(z_1, z_3) = \inf ||\sigma|| = \inf \int_0^1 \frac{|\sigma'(t)|}{\text{Im}[\sigma(t)]} dt$$

e

$$d(z_3, z_1) = \inf ||\lambda|| = \inf \int_0^1 \frac{|\lambda'(t)|}{\text{Im}[\lambda(t)]} dt.$$

Agora, considere a aplicação

$$\begin{aligned} h & : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ t & \mapsto 1 - t \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} d(z_1, z_3) = \inf \int_0^1 \frac{|\sigma'(t)|}{\text{Im}[\sigma(t)]} dt &= \inf \int_{h(0)}^{h(1)} \frac{|\sigma'(h(t))| |h'(t)|}{\text{Im}[\sigma(h(t))]} dt \\ &= \inf \int_1^0 \frac{|\sigma'(h(t))| (-1)}{\text{Im}[\sigma(h(t))]} dt \\ &= \inf \int_0^1 \frac{|\sigma'(h(t))|}{\text{Im}[\sigma(h(t))]} dt \\ &= \inf \int_0^1 \frac{|\lambda'(t)|}{\text{Im}[\lambda(t)]} dt = d(z_3, z_1). \end{aligned}$$

(iii) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$. De fato, considere os caminhos diferenciáveis $\lambda_1, \lambda_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$, com $\lambda_1(0) = z_1$, $\lambda_1(1) = \lambda_2(0) = z_2$ e $\lambda_2(1) = z_3$. Agora defina o caminho $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ por

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \lambda_2(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Assim, λ é um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$, com $\lambda(0) = z_1$ e $\lambda(1) = z_3$ e $||\lambda|| = ||\lambda_1|| + ||\lambda_2||$, de modo que

$$d(z_1, z_3) = \inf ||\lambda|| \leq \inf ||\lambda_1|| + \inf ||\lambda_2|| = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3).$$

■

Definição 1.2.4. Uma **isometria** em $(\mathbb{H}^2, d)$ é uma transformação de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$ que preserva a distância hiperbólica d . Denotaremos por $Isom(\mathbb{H}^2)$ o grupo formado por todas as isometrias de $(\mathbb{H}^2, d)$.

Agora enunciaremos dois resultados demonstrados em [5], Seção 1.3.1. O primeiro diz que as transformações de Möbius são isometrias de $\mathbb{H}^2$ e o segundo diz que as transformações de Möbius age transitivamente sobre o conjunto de todos os semi-círculos e semi-retas ortogonais ao eixo real.

Teorema 1.2.5. A métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

de $\mathbb{H}^2$ é invariante pela ação de elementos $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}})$, ou seja, $GM(\widehat{\mathbb{R}}) \subset Isom(\mathbb{H}^2)$.

Teorema 1.2.6. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto formado por todos os semi-círculos e semi-retas ortogonais ao eixo real. Então $GM(\widehat{\mathbb{R}})$ age transitivamente sobre $\mathcal{C}$.

Definição 1.2.7. Sejam $z, w \in \mathbb{H}^2$ tal que $z \neq w$. Uma **geodésica** (ou segmento geodésico) definida por z, w é uma curva de comprimento mínimo entre os pontos z e w em $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.2.8. As geodésicas no semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ são as semi-retas verticais ao eixo real e os semi-círculos com centro sobre o eixo real.

Demonstração:

Sejam $z, w \in \mathbb{H}^2$ e $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$ tal que, $||\sigma|| = d(z, w)$ com $\sigma(0) = z$ e $\sigma(1) = w$. Suponha, primeiramente, que $z = ia$ e $w = ib$ com $0 < a < b$, ou seja, que z e w estão no eixo imaginário. Aplicando a diferenciabilidade por partes em $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, temos

$$\begin{aligned} ||\sigma|| &= \int_0^1 \frac{|\sigma'(t)|}{Im[\sigma(t)]} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\frac{dy}{dt}|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Como $\ln \frac{b}{a}$ é o comprimento hiperbólico do segmento do eixo imaginário ligando ia e ib , então é uma semi-reta vertical ao eixo real. Agora, considere z e w arbitrários em $\mathbb{H}^2$, tome L como o único círculo com centro sobre o eixo real ligando esse dois pontos. O Teorema 1.2.6 nos garante que é possível encontrar uma transformação de Möbius γ que leva L no eixo imaginário, utilizando o argumento acima conclui-se que L é a geodésica ligando z e w .

Para provarmos que as semi-retas verticais ao eixo real e os semi-círculos com centro sobre o eixo real são todas as geodésicas de $\mathbb{H}^2$, consideremos $z, w \in \mathbb{H}^2$ e uma curva C ligando estes dois pontos. Seja L o semi-círculo ou a semi-reta ortogonal $\partial\mathbb{H}^2$ contendo z e w . Sem perda de generalidade, podemos supor que L seja uma semi-reta (caso contrário, pelo Teorema 1.2.6 podemos levar L a uma semi-reta). Nesta situação, se observarmos a primeira parte desta demonstração temos que $C = L$. ■

Observação 1.2.9. *Seja L uma geodésica (ou um segmento geodésico) em $\mathbb{H}^2$. Então, pelo Teorema 1.2.6, existe uma transformação de Möbius que aplica o segmento L no eixo imaginário.*

Denotaremos o segmento geodésico ligando z e w por $\overline{zw}$. Dizemos que um ponto ξ está entre z e w , quando $\xi \in \overline{zw}$. Neste caso, dizemos que z , w e ξ são **colineares** e que cada geodésica possui dois pontos finais.

1.2.2 Disco Unitário ou Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$

O modelo do **disco unitário** ou **disco de Poincaré** é o conjunto de números complexos z que têm módulo menor que um, ou seja,

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| < 1\}$$

dotado com a métrica a riemanniana

$$ds = \sqrt{\frac{4(dx^2 + dy^2)}{1 - (x^2 + y^2)}}$$

e sua fronteira é $\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Considere a aplicação

$$\eta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \text{ dada por } \eta(z) = \frac{z - i}{z + i}. \quad (1.1)$$

Essa aplicação transforma o plano $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$. É fácil verificar que a aplicação η é uma bijeção.

A inversa da aplicação η que transforma o disco unitário $\mathbb{D}^2$ em $\mathbb{H}^2$ é dada por

$$\mu = \eta^{-1} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \text{ dada por } \mu(z) = \eta^{-1}(z) = \frac{iz + i}{-z + 1}.$$

Seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ um caminho diferenciável no disco de Poincaré, assim $\mu \circ \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é um caminho diferenciável no semi-plano superior. Assim, o **comprimento hiperbólico** em $\mathbb{D}^2$ de σ , é dado por

$$\|\sigma\|_{\mathbb{D}^2} = \|\mu \circ \sigma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{|(\mu \circ \sigma)'(t)|}{\text{Im}[(\mu \circ \sigma)(t)]} dt = \int_0^1 \frac{|\mu'(\sigma(t))| |(\sigma'(t))|}{\text{Im}[(\mu \circ \sigma)(t)]} dt.$$

Calculando a derivada de μ , temos

$$\mu'(z) = \frac{-2}{(-iz + 1)^2} \quad \text{e} \quad \text{Im}[\mu(z)] = \frac{1 - |z|^2}{|-iz + 1|^2},$$

e daí

$$\|\sigma\|_{\mathbb{D}^2} = \|\mu \circ \sigma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{2}{1 - |\sigma(t)|^2} |\sigma'(t)| dt.$$

Para efeito de simplificação, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao uso das notações de comprimento hiperbólico de um caminho σ , denotaremos o comprimento em $\mathbb{D}^2$ simplesmente por $\|\sigma\|$.

Definição 1.2.10. Definimos a **distância** entre dois pontos z e w em $\mathbb{D}^2$ por

$$d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}(\eta^{-1}(z), \eta^{-1}(w)).$$

Quando não houver possibilidade de confusão quanto ao uso das notações de distâncias, por simplicidade, denotaremos a distância em $\mathbb{D}^2$ simplesmente por d .

Proposição 1.2.11. O disco unitário com a métrica $d_{\mathbb{D}^2}$ é um espaço métrico $(\mathbb{D}^2, d_{\mathbb{D}^2})$.

Demonstração:

A demonstração é análoga a demonstração da Proposição 1.2.3. ■

Proposição 1.2.12. Seja γ uma isometria em $\mathbb{H}^2$. Então $\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}$ é uma isometria em $\mathbb{D}^2$ (η é a aplicação dada em 1.1).

Demonstração:

Sejam $u, v \in \mathbb{D}^2$ então,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}^2}(\eta \gamma \eta^{-1}(u), \eta \gamma \eta^{-1}(v)) &= d_{\mathbb{H}^2}(\gamma \eta^{-1}(u), \gamma \eta^{-1}(v)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(\eta^{-1}(u), \eta^{-1}(v)) \\ &= d_{\mathbb{D}^2}((u), (v)). \end{aligned}$$

Logo, $\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}$ é uma isometria em $\mathbb{D}^2$. ■

As geodésicas do disco de Poincaré são as imagens por η das geodésicas do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.2.13. As geodésicas no disco de Poincaré são os diâmetros do disco $\mathbb{D}^2$ e os arcos de círculos que intersectam perpendicularmente à $\partial\mathbb{D}^2$.

Demonstração:

Como a aplicação η é uma isometria no plano complexo que preserva ângulo entre curvas e transforma círculos em círculos, então η leva o eixo real na fronteira do disco unitário $\mathbb{D}^2$. Assim, as curvas de comprimento mínimo em $\mathbb{H}^2$ são levadas nas curvas de comprimento mínimo em $\mathbb{D}^2$. Portanto, as geodésicas em $\mathbb{D}^2$ são os diâmetros do disco $\mathbb{D}^2$ e os segmentos de círculos que intersectam perpendicularmente à $\partial\mathbb{D}^2$. ■

1.3 Ângulo

Definimos ângulos no semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ da mesma forma que definimos na Geometria Euclidiana. Para ver o porque desse fato (e, na verdade, para ver como o conceito de “ângulo” é realmente definido), precisamos fazer um ligeiro desvio e recordar alguns fatos da Álgebra Linear.

Começamos por descrever como os ângulos são definidos no plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e suponha que $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ são dois vetores em $\mathbb{H}^2$ no ponto (x, y) . Definimos um **produto interno** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre os dois vetores v, w no ponto (x, y) por

$$\langle v, w \rangle_{(x,y)} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Definimos a **norma de um vetor** v no ponto (x, y) por

$$\|v\|_{(x,y)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{(x,y)}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

A **Desigualdade de Cauchy Schwartz** diz que

$$|\langle v, w \rangle_{(x,y)}| = \|v\|_{(x,y)} \|w\|_{(x,y)}.$$

E definimos o **ângulo** (euclidiano) $\theta = \angle v, w$ entre os vetores v, w no ponto (x, y) por

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle_{(x,y)}}{\|v\|_{(x,y)} \|w\|_{(x,y)}}.$$

Note que não estamos interessados no sinal do ângulo. Para os objetivos deste trabalho, os ângulos serão considerados com a mesma medida independentemente do sentido considerado, ou seja, $\angle v, w = \angle w, v$.

No semi-plano superior $\mathbb{H}^2$, temos uma definição semelhante de ângulo, mas usamos um produto interno diferente. Seja $z \in \mathbb{H}^2$ um ponto do semi-plano superior e v, w dois vetores no ponto z . Definimos o **produto interno** de v por w no ponto z denotado por $\langle v, w \rangle_z$ como sendo

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} (v_1 w_1 + v_2 w_2),$$

isto é, o produto interno usual euclidiano dividido pelo fator $1/\text{Im}(z)^2$. Também definimos a norma do vetor v em z por

$$\|v\|_z = \sqrt{\langle v, v \rangle_z} = \frac{1}{\text{Im}(z)} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

A desigualdade de Cauchy Schwartz é preservada e podemos definir o **ângulo** $\theta = \angle v, w$ entre dois vetores v, w no ponto z por

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle_z}{\|v\|_z \|w\|_z}.$$

Observe que os termos envolvendo $Im(z)$ são cancelados e assim esta definição de ângulo coincide com a definição Euclidiana.

Suponha que temos dois caminhos σ_1 e σ_2 diferenciáveis em $\mathbb{H}^2$, que se intersectam no ponto $z \in \mathbb{H}^2$. Escolhendo adequadamente as parametrizações dos caminhos, podemos assumir $\sigma_1(0) = z = \sigma_2(0)$. Assim, o ângulo entre σ_1 e σ_2 em z é definido como sendo o ângulo entre os vetores tangentes $\sigma'_1(0)$ e $\sigma'_2(0)$ que denotamos por $\angle \sigma'_1(0), \sigma'_2(0)$.

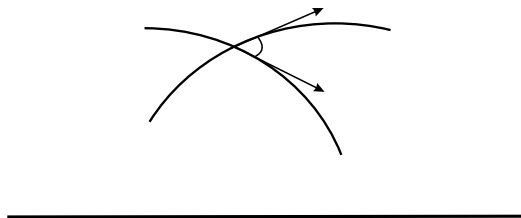


Figura 1.1: Ângulo formado por dois caminhos diferenciáveis em $\mathbb{H}^2$.

A definição de ângulo acima também se aplica ao disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$.

1.4 Área Hiperbólica

Antes de definirmos áreas hiperbólicas, vamos recordar a definição de comprimento hiperbólico de um caminho diferenciável.

Seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável no semi-plano superior, então o **comprimento hiperbólico** de σ , $||\sigma||$, é dado por

$$||\sigma|| = \int_0^1 \frac{|\sigma'(t)|}{Im[\sigma(t)]} dt = \int_{\sigma} \frac{1}{Im(z)} dz.$$

Pela discussão na Seção 1.3, podemos escrever o comprimento hiperbólico como

$$||\sigma|| = \int_0^1 ||\sigma'(t)||_{\sigma(t)} dt.$$

Intuitivamente, estamos aproximando o caminho σ por vetores de comprimento $||\sigma'(t)||_{\sigma(t)}$ e então integrando.

Seja $A \subset \mathbb{H}^2$ um subconjunto do semi-plano superior. Como podemos intuitivamente definir a área de A ? Se tomarmos um ponto $z \in A$, podemos aproximar a área perto de z , tendo um pequeno retângulo com lados dx e dy . A área desse retângulo é dada pelo produto dos comprimentos dos lados, ou seja,

$$\frac{1}{Im(z)} dx dy.$$

Assim, temos a seguinte definição:

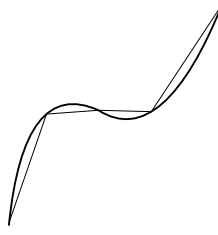


Figura 1.2: Aproximação por vetores de comprimento $\|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)}$.

Definição 1.4.1. A **área hiperbólica** de um subconjunto $A \subset \mathbb{H}^2$ é definida como sendo

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(A) = \int \int_A \frac{1}{\text{Im}(z)^2} dz = \int \int_A \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Seja $A \subset \mathbb{D}^2$ um subconjunto do disco unitário. Para definir a **área hiperbólica** em $\mathbb{D}^2$ usaremos a aplicação η para transferir a definição de área de $\mathbb{H}^2$ para $\mathbb{D}^2$. Na verdade, pode-se verificar que se $A \subset \mathbb{D}^2$, então $\mu(A) = \eta^{-1}(A) \subset \mathbb{H}^2$, assim

$$\text{Área}_{\mathbb{D}^2}(A) = \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mu(A)) = \int \int_{\mu(A)} \frac{1}{\text{Im}(z)^2} dz.$$

Mas, para um caminho diferenciável λ em $\mathbb{D}^2$, $\mu \circ \lambda$ é um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$, daí

$$\|\lambda\|_{\mathbb{D}^2} = \|\mu \circ \lambda\|_{\mathbb{H}^2} = \int_{\mu \circ \lambda} \frac{1}{\text{Im}(z)} dz = \int_0^{-1} \frac{|(\mu \circ \lambda)'(t)|}{\text{Im}[(\mu \circ \lambda)(t)]} dt$$

e, assim

$$\int_{\mu \circ \lambda} \frac{1}{\text{Im}(z)^2} dz = \int_0^1 \left(\frac{|(\mu \circ \lambda)'(t)|}{\text{Im}[(\mu \circ \lambda)(t)]} \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{2}{1 - |\lambda(t)|^2} |\lambda'(t)| \right)^2 dt.$$

Logo a **área** de $A \subset \mathbb{D}^2$ é dada por

$$\text{Área}_{\mathbb{D}^2}(A) = \int_A \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dz.$$

1.5 Polígonos Hiperbólicos

Na Geometria Euclidiana um polígono de n *arestas* é um subconjunto do plano euclidiano delimitado por linhas retas. Assim, as arestas de um polígono euclidiano são formados por segmentos de geodésicas euclidianas. Um polígono hiperbólico é definido de maneira análoga.

Nessa seção trabalharemos apenas com o semi-plano superior e tudo o que for feito para $\mathbb{H}^2$ será válido para $\mathbb{D}^2$.

Definição 1.5.1. Sejam $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$, um **polígono hiperbólico** $\mathcal{P}$ com vértices $z_1, \dots, z_n$ é uma região limitada por raios ou segmentos geodésicos

$$\overline{z_1 z_2}, \dots, \overline{z_{n-1} z_n}, \overline{z_n z_1}.$$

Veja que na definição acima, está incluída a possibilidade de termos um ou mais vértices na fronteira. Esses vértices são chamados de **vértices ideais**.

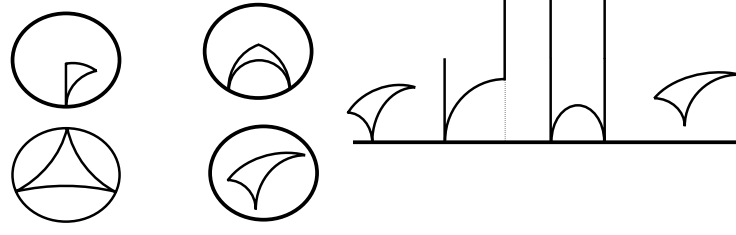


Figura 1.3: Triângulos hiperbólicos em $\mathbb{D}^2$ e em $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.5.2. *Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico de n arestas com vértices $v_1, \dots, v_n$ e ângulos internos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, então*

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{P}) = (n - 2)\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n).$$

Demonstração:

Primeiramente, vamos mostrar para $n = 3$, ou seja, vamos mostrar que a área de um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}^2$, com vértices v_1, v_2, v_3 e ângulos internos α, β, δ , é dada por

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \delta).$$

1º caso: Suponha, que um dos vértices, digamos v_3 , seja um vértice ideal de modo que o ângulo δ neste vértice seja nulo. Como as isometrias preservam áreas, podemos assumir que os vértices v_1 e v_2 pertencem à circunferência $|z| = 1$ e $v_3 = \infty$, de modo que as arestas ligando os vértices v_1 e v_2 à v_3 são semi-retas verticais determinadas pelas equações $x = a$ e $x = b$, respectivamente. Assim, temos

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\Delta) &= \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dx dy \\ &= \int_a^b \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \text{ fazendo } x = \cos\theta \text{ } (0 \leq \theta \leq \pi) \\ &= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

2º caso: Suponha que nenhum dos vértices seja um vértice ideal. Neste caso, prolongamos uma das arestas do triângulo em uma das direções, por exemplo, a aresta contendo os vértices v_1 e v_2 , na direção de v_2 até encontrar o eixo real (veja Figura 1.4).

Considerando o vértice ideal v_4 , obtemos dois novos triângulos, Δ_1 e Δ_2 determinados pelos vértices $\{v_2, v_3, v_4\}$ e $\{v_1, v_3, v_4\}$ respectivamente. O ângulo de Δ_1

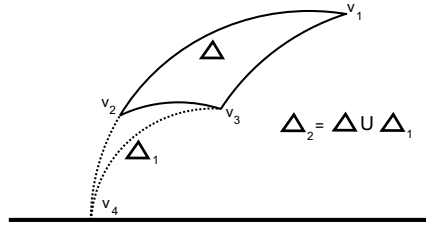


Figura 1.4: Área de um triângulos hiperbólicos.

em v_2 é $\pi - \beta$ e o ângulo de ambos os triângulos no vértice ideal v_4 é 0. Denotamos por θ o ângulo de Δ_1 no vértice v_3 . Assim, temos $\Delta_2 = \Delta \cup \Delta_1$ e

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\Delta) &= \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\Delta_2) - \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\Delta_1) \\ &= \pi - \alpha - (\delta + \theta) - (\pi - \theta - (\pi - \beta)) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \delta). \end{aligned}$$

Para obtermos a área de um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ de $n > 3$ arestas, com vértices $v_1, \dots, v_n$ e ângulos internos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, basta dividi-lo em n triângulos hiperbólicos com um vértice em comum. Como já sabemos calcular a área de um triângulo, então ao somarmos as áreas de todos os n triângulos de $\mathcal{P}$, obtemos a área de $\mathcal{P}$ dada por

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{P}) = (n - 2)\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n).$$

■

Agora, enunciaremos dois resultados, encontrados na referência [3] Seção 7.16, que diz respeito a polígonos convexos hiperbólicos. O primeiro é condição necessária e suficiente para um polígono hiperbólico ser convexo e o segundo estabelece a existência de polígonos através dos seus ângulos internos.

Teorema 1.5.3. *Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$. Então $\mathcal{P}$ é convexo se, e somente se, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, para cada $i = 1, \dots, n$.*

Isto é consequência imediata do Teorema 1.5.2, pois, a condição necessária para a existência de um polígono com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ é

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi.$$

Teorema 1.5.4. *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ ângulos ordenados por alguma n -upla e $0 \leq \theta_i < \pi$, para cada $i = 1, \dots, n$. Então existe um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ formados nesta ordem ao redor de $\partial\mathcal{P}$ se, e somente se,*

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi.$$

Capítulo 2

Grupos Fuchsianos e Domínio Fundamental

Este capítulo está dividido em 5 seções que são de grande importância para o desenvolvimento do Capítulo 4. Abordaremos na seção dos grupos discretos e propriedades de grupos descontínuos, somente os requisitos necessários para o devido desenvolvimento da seção dos grupos Fuchsianos e da seção dos domínios fundamentais.

Para este estudo, baseamos basicamente nos textos [11] e [12], mas também houve influência dos textos [3] e [18].

2.1 Grupo Discreto e Propriedades de Grupos Descontínuos

De acordo com a referência [12] página 26, $PSL(2, \mathbb{R})$ é um espaço topológico em que uma transformação $\gamma : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ pode ser identificada com o ponto (a, b, c, d) do $\mathbb{R}^4$. Isto é, o espaço topológico $PSL(2, \mathbb{R})$ pode ser identificado com o subconjunto do $\mathbb{R}^4$ dado por

$$\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = 1\}.$$

A norma de $PSL(2, \mathbb{R})$, induzida pela norma do $\mathbb{R}^4$, é definida por

$$\|\gamma\|_{PSL(2, \mathbb{R})} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad \text{onde } \gamma \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

e a métrica em $PSL(2, \mathbb{R})$ é definida por

$$d_{PSL(2, \mathbb{R})}(\gamma_1, \gamma_2) = \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{PSL(2, \mathbb{R})}, \quad \text{com } \gamma_1, \gamma_2 \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

Assim, $PSL(2, \mathbb{R})$ é um espaço métrico com a métrica $d_{PSL(2, \mathbb{R})}$.

Neste ponto é conveniente apresentar o seguinte teorema [12] página 8.

Teorema 2.1.1. *O grupo de Isom($\mathbb{H}^2$) é gerado pela transformações de Möbius, associada a uma matriz de $SL(2, \mathbb{R})$, em $PSL(2, \mathbb{R})$ juntamente com a transformação de $z \mapsto -z$, e é isomorfo para $PS^*L(2, \mathbb{R})^1$.*

Por este teorema enunciamos a seguinte definição.

Definição 2.1.2. *Um subgrupo $\mathbb{G}$ de Isom($\mathbb{H}^2$) é dito **discreto** se a topologia induzida em $\mathbb{G}$ for uma topologia discreta, isto é, se $\mathbb{G}$ for um subconjunto discreto na topologia do espaço Isom($\mathbb{H}^2$).*

Definição 2.1.3. *Uma família $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de subconjuntos de um espaço métrico X é dita **localmente finita**, se para todo compacto $K \subset X$, o conjunto*

$$\left\{ \alpha \in A \mid X_\alpha \cap K \neq \emptyset \right\}$$

for finito.

Definição 2.1.4. *Seja $\mathbb{G}$ um subgrupo de homeomorfismos de um espaço métrico X . Dizemos que a ação de $\mathbb{G}$ sobre X é **propriamente descontínua** se, para todo $x \in X$, a família $\{g(x) \mid g \in \mathbb{G}\}$ for localmente finita.*

Definição 2.1.5. *Sejam $\mathbb{G}$ um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}^2$. Definimos a **órbita** de z sobre $\mathbb{G}$, e a denotamos por $\mathbb{G}(z)$, o conjunto de pontos de $\mathbb{H}^2$ que podemos obter por aplicações de elementos de $\mathbb{G}$ em z ,*

$$\mathbb{G}(z) = \{\gamma(z) \mid \gamma \in \mathbb{G}\}.$$

Observação 2.1.6. *Da Definição 2.1.5, se $\mathbb{G}(z)$ for localmente finita então a ação de $\mathbb{G}$ sobre $\mathbb{G}(z)$ é propriamente descontínua.*

Definição 2.1.7. *Seja A um grupo de transformações de um conjunto X nele mesmo. O **estabilizador** de um ponto $x \in X$ é o subgrupo de A dado por $\{g \in A \mid g(x) = x\}$.*

Teorema 2.1.8. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X localmente compacto. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- 1) *A ação de $\mathbb{G}$ sobre X é propriamente descontínua;*
- 2) *Para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança aberta V_x tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ para apenas um número finito de elementos g de $\mathbb{G}$;*
- 3) *Cada ponto x de X possui uma vizinhança U_x tal que $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ implicando que $g(x) = x$;*
- 4) *Dado um subconjunto compacto K em X , $g(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos g de $\mathbb{G}$.*

¹ $PS^*L(2, \mathbb{R}) = S^*L(2, \mathbb{R})/\{\pm id\}$ onde $S^*L(2, \mathbb{R})$ é o grupo das matrizes quadradas reais, com determinante igual a ± 1 .

Demonstração:

(1 $\Rightarrow$ 2) Se a ação de $\mathbb{G}$ for propriamente descontínua e X for localmente compacto, as órbitas $\mathbb{G}(x)$ são discretas e o estabilizador $\mathbb{G}_x$ de cada ponto é finito. Assim, dado $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola $B(x, \epsilon)$ não contém outro ponto da órbita $\mathbb{G}(x)$. Portanto, se tomarmos $V \in B(x, \epsilon/2)$ temos $g(V) \cap V \neq \emptyset$ e isso implica que $g \in \mathbb{G}_x$. Como estabilizador $\mathbb{G}_x$ de cada ponto é finito, então o número dessas interseções só pode ocorrer para um número finito de elementos $g \in \mathbb{G}$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Sejam $x \in X$ e V_x uma vizinhança de x tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ para apenas um número finito de elementos g de $\mathbb{G}$. Agora, sejam $g_1, g_2, \dots, g_n$ elementos de $\mathbb{G}$ para os quais $g_i(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$, $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} = \{g_1, \dots, g_n\} \setminus \mathbb{G}_x$ e consideremos o conjunto de pontos $\{h_1(x), \dots, h_m(x)\}$. Considerando $U_x \subset V_x$ tal que $U_x \cap \{h_1(x), \dots, h_m(x)\} = \emptyset$, temos que se $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ e assim implica que $g(x) = x$.

(3 $\Rightarrow$ 4) Demonstraremos por absurdo. Suponha que exista um compacto K em X e uma seqüência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{G}$ tal que $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de X tal que $x_n \in K$ e $g_n(x_n) \in K$. Como K é compacto, a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui ponto de acumulação que denotamos por x . Seja y ponto de acumulação de $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Considere $\epsilon > 0$ e as bolas $B(x, \epsilon)$, $B(y, \epsilon/2)$. Existem números naturais N_x e N_y tais que $x_n \in B(x, \epsilon)$ para $n > N_x$ e $g_n(x) \in B(y, \epsilon/2)$ para $n > N_y$. Agora, tome $N = \max\{N_x, N_y\}$ e assim temos que $g_N^{-1}g_n(x) \in B(x, \epsilon)$, para todo $n > N$ que é um absurdo, pois cada ponto x de X possui uma vizinhança U_x tal que $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ apenas um número finito de elementos g de $\mathbb{G}$ implicando que $g(x) = x$.

(4 $\Rightarrow$ 1) Demonstraremos que as órbitas $\mathbb{G}(x)$ são discretas e os estabilizadores finitos. Os estabilizadores são finitos, pois os conjuntos $K_x = \{x\}$ são compactos e $g(K_x) \cap K_x \neq \emptyset$ é equivalente a termos $g \in \mathbb{G}_x$. Para provarmos que as órbitas são discretas, considere um ponto $x \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada $B[x, \epsilon]$ seja compacta. Então existe apenas um número finito de elementos $g_1, \dots, g_n$ em $\mathbb{G}$ tais que $g(B[x, \epsilon]) \cap B[x, \epsilon] \neq \emptyset$. Em particular, existe apenas um número finito destes elementos, digamos $h_1, \dots, h_m$ para os quais $h_i(x) \in B[x, \epsilon]$ e $h_i(x) \neq x$, para $i = 1, 2, \dots, m$. Desta forma, podemos separar $x, h_1(x), \dots, h_m(x)$ simultaneamente, ou seja, existem vizinhanças $V_0, V_1, \dots, V_m$ disjuntas entre si e cada uma dessas vizinhanças está contida em $B[x, \epsilon]$ tais que $x \in V_0, h_1(x) \in V_1, \dots, h_m(x) \in V_m$. Tomemos $g \in \mathbb{G}$ tal que $g(x)$ não pertence à $B[x, \epsilon]$ e fazemos a mesma construção, tomando cuidado de escolher uma bola fechada centrada em $g(x)$ que seja ao mesmo tempo compacta e não intercepte a bola $B[x, \epsilon]$ e assim sucessivamente construindo

vizinhanças disjuntas entre si de cada ponto da órbita de x . ■

Corolário 2.1.9. *Um grupo $\mathbb{G}$ age de forma propriamente descontínua em X se, e somente se, cada órbita de qualquer ponto de X for discreta e a ordem do estabilizador de cada ponto for finito.*

Demonstração:

Segue da equivalência entre os itens 1 e 3 do Teorema 2.1.8. ■

2.2 Grupos Fuchsianos

Nesta seção de grupos Fuchsianos, abordaremos somente os requisitos necessários para darmos desenvolvimento à seção de domínios fundamentais. Sendo assim, estudaremos a ação de matrizes quadradas como transformações de Möbius. Para isso, considere o grupo de matrizes reais quadradas de ordem 2 e determinante 1 dado por

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}.$$

Para $A \in SL(2, \mathbb{R})$, associe a transformação γ_A definida como

$$\begin{aligned} \gamma_A &: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

Veja que, se $Im(z) > 0$, então $Im(\gamma_A(z)) > 0$. De fato,

$$\gamma_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}.$$

Como c e d são reais e não ambos nulos, temos que $cz + d \neq 0$ se $Im(z) \neq 0$. Então,

$$Im(\gamma_A) = \frac{\gamma_A(z) - \overline{\gamma_A(z)}}{2i} = \frac{(ad - bc)Im(z)}{|cz + d|^2} = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2},$$

se $Im(z) > 0$.

Ou seja, para toda $A \in SL(2, \mathbb{R})$, temos $\gamma_A(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$. Além disto, dadas matrizes $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$, temos que $(\gamma_A \circ \gamma_B)(z) = \gamma_{AB}(z)$. E por último temos que $\gamma_A = \gamma_B$ se, e somente se, $AB^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2.

Diante do exposto, considere o grupo

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I_2\}},$$

onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

Assim, temos uma ação de $PSL(2, \mathbb{R})$ em $\mathbb{H}^2$. E com isso enunciaremos um resultado demonstrado em [11], Seção 4.2.1, que nos diz que $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo $M(\widehat{\mathbb{R}})$.

Teorema 2.2.1. *O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo $M(\widehat{\mathbb{R}})$ das transformações de Möbius que preservam a orientação.*

Agora, apresentaremos a definição de transformações de Möbius conjugadas, e verificaremos que a conjugação entre as transformações de Möbius é uma relação de equivalência.

Definição 2.2.2. *Sejam γ_1 e γ_2 duas transformações de Möbius. Dizemos que γ_1 e γ_2 são **conjugadas** se existe uma outra transformação de Möbius γ tal que $\gamma_1 = \gamma^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma$.*

Geometricamente, se γ_1 e γ_2 são conjugadas, então a ação de γ_1 em $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ é a mesma ação de γ_2 em $\gamma(\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2)$. Assim, a conjugação reflete uma mudança de coordenadas de $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$. E se γ_2 tem a matriz $A_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ e γ tem a matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$, então γ_1 tem a matriz $A^{-1}A_2A$.

A conjugação entre as transformações de Möbius é uma **relação de equivalência** que denotamos por $\cong$. De fato, sejam γ_1 , γ_2 e γ_3 transformações de Möbius, então temos:

- *Relatividade:* Toda transformação de Möbius γ_1 é conjugada a si mesma. De fato, quando tomamos Id como a transformação identidade, temos

$$\gamma_1 = Id^{-1} \circ \gamma_1 \circ Id, \quad \text{ou seja, } \gamma_1 \cong \gamma_1.$$

- *Simetria:* Se $\gamma_1 \cong \gamma_2$, então $\gamma_2 \cong \gamma_1$, pois, existem transformações de Möbius γ, λ tais que

$$\text{se } \gamma_1 = \gamma^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma, \text{ então } \gamma_2 = \gamma \circ \gamma_1 \circ \gamma^{-1}.$$

- *Transitividade:* Se $\gamma_1 \cong \gamma_2$ e $\gamma_2 \cong \gamma_3$, então $\gamma_1 \cong \gamma_3$. De fato,

$$\text{se } \gamma_1 = \gamma^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma \text{ e } \gamma_2 = \lambda^{-1} \circ \gamma_3 \circ \lambda, \text{ portanto } \gamma_1 = (\lambda \circ \gamma)^{-1} \circ \gamma_3 \circ (\lambda \circ \gamma).$$

Por simplificação, iremos nos referir ao subgrupo das transformações de Möbius que preservam a orientação por $PSL(2, \mathbb{R})$. Ou seja, quando dizemos que $\gamma_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ estamos dizendo que γ_A é uma isometria em $\mathbb{H}^2$ associada à matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que,

$$\gamma_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1.$$

Definição 2.2.3. *Seja $\gamma_A \in$ uma transformação de Möbius associada a uma matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

de $SL(2, \mathbb{R})$, com $\gamma_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Chamamos de **traço** de γ_A , denotamos por $Tr(\gamma_A)$, o número

$$Tr(\gamma_A) = |tr(A)| = |a + d|.$$

Agora, classificaremos os elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ (ou seja, classificaremos as isometrias em $\mathbb{H}^2$ que preservam a orientação) utilizando o traço da matriz associada à transformação.

Definição 2.2.4. *Seja γ_A uma transformação de Möbius associada a uma matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$, com $\gamma_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, onde $ad - bc = 1$, então:*

- (i) γ_A é uma isometria hiperbólica se $Tr(\gamma_A) > 2$;
- (ii) γ_A é uma isometria parabólica se $Tr(\gamma_A) = 2$;
- (iii) γ_A é uma isometria elíptica se $Tr(\gamma_A) < 2$.

Sabemos que o traço de uma matriz é invariante por conjugação, isto é, $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$, para toda matriz A, B em $GL(n, \mathbb{R})$. Logo, a classificação acima é invariante por conjugação.

Agora, veja que o número 2 na Definição 2.2.4, depende exclusivamente do número de auto-valores reais da matriz A . Sendo assim, temos:

- Se A tiver dois autovalores reais distintos, temos que a matriz é diagonalizável e portanto, a menos de conjugação, podemos assumi-la da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Mas como o determinante desta matriz é igual a 1, então $d = 1/a$ e obtemos $|tr(A)| > 2$ se $a \neq \pm 1$.
- Se A tiver apenas um autovalor real λ , este deve ter multiplicidade 2 e seu polinômio característico é da forma $(x - \lambda)^2$. Como o termo constante λ^2 deve ser o determinante de A temos que $\lambda^2 = 1$, donde segue que $\lambda = \pm 1$ e $|tr(A)| = |2\lambda| = 2$.
- Se A tiver apenas autovalores complexos não reais, temos que estes são da forma λ e $\bar{\lambda}$. Seu polinômio característico deve ser da forma $x^2 - Re(\lambda)x + |\lambda|^2$ onde $|\lambda|^2 = det(A) = 1$ e sendo $\lambda \neq \pm 1$, temos $|tr(A)| = |2Re(\lambda)| < 2$.

Seja $A \in SL(2, \mathbb{R})$ uma matriz da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Uma isometria γ_A em $PSL(2, \mathbb{R})$ é conjugada a um dos três casos abaixo:

1) Se γ_A for uma isometria hiperbólica, então γ_A é conjugada a $\gamma_\lambda : z \mapsto \lambda^2 z$, associada a matriz

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lambda \neq 1, \text{ e } \lambda \neq 0;$$

Quando $\lambda = \sqrt{e^k}$, denotaremos a transformação por γ_k e sua matriz por A_k .

2) Se γ_A for uma isometria parabólica, então γ_A é conjugada a $\gamma_t : z \mapsto z + t$, associada a matriz

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } 0 \neq t \in \mathbb{R};$$

3) Se γ_A for uma isometria elíptica, então γ_A é conjugada a $\gamma_\theta : z \mapsto \frac{z \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{-z \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$, associada a matriz

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ onde } 0 < \theta < 2\pi.$$

Agora, exibiremos um resultado que relaciona as isometrias do espaço hiperbólico com estes conceitos. A demonstração deste resultado pode ser encontrado na referência [11], Capítulo 5.

Teorema 2.2.5. *Seja $\gamma \neq id$ uma isometria do espaço hiperbólico que preserva orientação. Então, as afirmações em cada um dos itens abaixo são equivalentes:*

- a) a₁) γ é uma isometria elíptica;
- a₂) γ é conjugada em $PSL(2, \mathbb{R})$ a γ_θ , para algum $0 < \theta < 2\pi$;
- a₃) γ possui um ponto fixo ordinário p ;
- a₄) Existe um ponto ordinário p tal que as esferas centradas em p são invariantes por γ ;
- a₅) Existe ponto $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $0 = d_\gamma(p) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_\gamma(z)$.
- b) b₁) γ é uma isometria parabólica;
- b₂) γ é conjugada em $PSL(2, \mathbb{R})$ a γ_θ , para algum $0 < \theta < 2\pi$;
- b₃) γ possui um ponto fixo ordinário p ;
- b₄) Existe um ponto ordinário p tal que as esferas centradas em p são invariantes por γ ;
- b₅) Existe ponto $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $0 = d_\gamma(p) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_\gamma(z)$.
- c) c₁) γ é uma isometria hiperbólica;
- c₂) γ é conjugada em $PSL(2, \mathbb{R})$ a γ_k , para algum $k > 0$;
- c₃) γ possui dois ponto fixo ideais;
- c₄) Existe geodésica invariante por γ ;
- c₅) Existe geodésica L tal que $d_\gamma(L(s))$ é constante e

$$0 < d_\gamma(L(s)) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_\gamma(z).$$

Definição 2.2.6. Um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ é chamado de **grupo Fuchsiano**. Assim, um grupo Fuchsiano é um subgrupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$ das transformações que preservam a orientação.

Notemos que os grupos Fuchsianos atuam de maneira propriamente descontínua em todos os pontos de $\mathbb{H}^2$.

Proposição 2.2.7. Os subgrupos cíclicos de $PSL(2, \mathbb{R})$ gerados por elementos hiperbólicos ou parabólicos são grupos Fuchsianos. Um subgrupo cíclico gerado por um elemento elíptico é um grupo Fuchsiano se, e somente se, for finito.

Demonstração:

Seja

$$\mathbb{G} = \langle \gamma_A \rangle = \{ \dots, \gamma_A^{-2}, \gamma_A^{-1}, Id, \gamma_A, \gamma_A^2, \dots \} = \{ \dots, \gamma_A^{-2}, \gamma_A^{-1}, Id, \gamma_A, \gamma_A^2, \dots \}$$

um subgrupo cíclico gerado por um elemento γ_A de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Suponha, primeiramente, que γ_A seja uma isometria hiperbólica ou parabólica. Então a matriz A é conjugada de alguma matriz

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \neq t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix}, 0 \neq k \in \mathbb{R}$$

e $(A_t)^n = A_{nt}$ ou $(A_k)^n = A_{nk}$, para $0 \neq n \in \mathbb{N}$. Lembrando da norma de $PSL(2, \mathbb{R})$ temos

$$0 < \|Id - A_{nt}\|^2 = (nt)^2 < (n+1)^2 t^2 = \|Id - A_{(n+1)t}\|^2$$

e

$$\begin{aligned} 0 < \|Id - A_{nk}\|^2 &= (1 - \sqrt{e^{nk}})^2 + (1 - \frac{1}{\sqrt{e^{nk}}})^2 \\ &\leq (1 - \sqrt{e^{(n+1)k}})^2 + (1 - \frac{1}{\sqrt{e^{(n+1)k}}})^2 = \|Id - A_{(n+1)k}\|^2 \end{aligned}$$

de modo que, se tivermos $k, t > 0$, teremos vizinhanças de Id que não contêm nenhum ponto de $\mathbb{G}$ com exceção da própria Id , obtendo assim que o subgrupo $\mathbb{G}$ gerado por γ_{A_t} ou por γ_{A_k} é discreto, ou seja, um grupo Fuchsiano.

Agora, suponha que γ_A seja uma isometria elíptica, isto é, conjugada a alguma γ_{A_θ} . Temos $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$ para $n \in \mathbb{N}$. Obviamente, se $\mathbb{G}$ for finito ele será discreto. De qualquer modo, temos $A_\theta = A_{\theta+2\pi}$. Assim, se considerarmos que $\mathbb{G}$ é discreto, podemos considerar que existe $\theta_0 > 0$ tal que $\gamma_{A_{\theta_0}} \in \mathbb{G}$. Seja $m \in \mathbb{N}$ o maior número natural tal que $m\theta_0 \leq 2\pi$. Se tivermos $m\theta_0 < 2\pi$ teremos $(m+1)\theta_0 - 2\pi < \theta_0$ e

$$(\gamma_{A_{\theta_0}})^{m+1} = \gamma_{A_{(m+1)\theta_0}} = \gamma_{A_{(m+1)\theta_0-2\pi}} \in \mathbb{G},$$

contradizendo o fato de θ_0 ser o menor ângulo tal que γ_A seja uma isometria elíptica. Assim, temos $m\theta_0 = 2\pi$ e $\mathbb{G} = \langle \gamma_{A_{\theta_0}} \rangle$ é cíclico de ordem m . ■

Para os próximos resultados, utilizaremos os seguintes lemas, que estão demonstrados em [12] páginas 30 e 31.

Lema 2.2.8. *Sejam $w \in \mathbb{H}^2$ e $K \subset \mathbb{H}^2$ um conjunto compacto. Então o conjunto*

$$H = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T(w) \in K\}$$

é compacto.

Lema 2.2.9. *Sejam $\mathbb{G} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ um subgrupo com ação propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$ e $p \in \mathbb{H}^2$ um ponto fixo por algum elemento de $\mathbb{G}$. Então existe uma vizinhança W de p tal que outros pontos de W são pontos fixos por elementos de $\mathbb{G}$ diferentes da identidade.*

Agora provaremos que um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto (grupo Fuchsiano) se, e somente se, sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua.

Teorema 2.2.10. *Um subgrupo $\mathbb{G}$ de $PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto (ou seja, é um grupo Fuchsiano) se, e somente se, sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua.*

Demonstração:

Primeiramente, suponha que $\mathbb{G}$ seja um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$. Assim para todo $z \in \mathbb{H}^2$ e para todo compacto $K \subset \mathbb{H}^2$ temos,

$$\{\gamma \in \mathbb{G} \mid \gamma(z) \in K\} = \{\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid \gamma(z) \in K\} \cap \mathbb{G}.$$

Agora, o Lema 2.2.8 nos garante que $\{\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid \gamma(z) \in K\}$ é compacto. Logo $\{\gamma \in \mathbb{G} \mid \gamma(z) \in K\}$ é finito, já que é uma intersecção de um conjunto compacto com outro discreto e assim temos que a ação de $\mathbb{G}$ sobre $\mathbb{H}^2$ é propriamente descontínua.

Agora suponha que $\mathbb{G}$ age de modo propriamente descontínuo sobre $\mathbb{H}^2$ e que $\mathbb{G}$ não seja um subgrupo discreto em $PSL(2, \mathbb{R})$. Seja z em $\mathbb{H}^2$ um ponto que não é fixo por qualquer elemento γ de $\mathbb{G}$ a não ser a identidade. A existência de tal ponto é garantida pelo Lema 2.2.9, já que o conjunto de pontos fixos por elementos de $\mathbb{G}$ é discreto. Assumindo que $\mathbb{G}$ seja não discreto, temos que existe uma seqüência $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos de $\mathbb{G}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = Id$. Temos assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(z) = z$. Como $\gamma_n(z) \neq z$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos uma seqüência de pontos distintos de z convergindo para z , contradizendo a hipótese de $\mathbb{G}$ agir de maneira propriamente descontínua. ■

Corolário 2.2.11. *Seja $\mathbb{G}$ um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. O grupo $\mathbb{G}$ age de forma propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$ se, e somente se, para todo $z \in \mathbb{H}^2$ a $\mathbb{G}$ -órbita $\mathbb{G}(z)$ for um subconjunto discreto de $\mathbb{H}^2$.*

Demonstração:

Suponha que a ação de $\mathbb{G}$ é propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$, então cada $\mathbb{G}$ -órbita é uma família de pontos localmente finita e, portanto, um conjunto discreto de $\mathbb{H}^2$. Reciprocamente, suponha que $\mathbb{G}$ não age de maneira propriamente descontínua em

$\mathbb{H}^2$, portanto, pelo *Teorema 2.2.10*, $\mathbb{G}$ não é discreto. Repetindo o argumento na demonstração do *Teorema*, podemos construir uma seqüência $(\gamma_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos distintos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(z) = z$, daí a $\mathbb{G}$ -órbita do ponto z não é discreta. ■

Um estudo complementar dos grupos Fuchsianos está no Apêndice A. Nesse apêndice, comentamos sobre os **grupos Fuchsianos abelianos** e os **grupos elementares** tendo como referências os textos [11] e [12].

2.3 Domínio Fundamental

Agora estudaremos a ação do grupo de isometrias no plano hiperbólico com uma visão um pouco mais geométrica, ou seja, a ação desse grupo em um subconjunto do plano hiperbólico no qual a imagem desse subconjunto através dos elementos do grupo de isometrias devem satisfazer algumas propriedades. Vamos agora estudar a ação de um grupo de homeomorfismos em um determinado conjunto. Começaremos com a definição de domínio fundamental.

Definição 2.3.1. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano, um **domínio fundamental** $\mathcal{D}$ de $\mathbb{G}$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{H}^2$ tal que,*

- (i) $\bigcup_{\gamma \in \mathbb{G}} \gamma(\mathcal{D}) = \mathbb{H}^2$;
- (ii) *As imagens $\gamma(\text{int}(\mathcal{D}))$ ² são disjuntas aos pares, isto é,*

$$\gamma_1(\text{int}(\mathcal{D})) \cap \gamma_2(\text{int}(\mathcal{D})) = \emptyset, \quad \text{se } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{G}, \text{ com } \gamma_1 \neq \gamma_2$$

.

Definição 2.3.2. *Sejam $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D}$ um domínio fundamental de $\mathbb{G}$. Dizemos que uma família $\{\gamma(\mathcal{D}) \mid \gamma \in \mathbb{G}\}$ é um **ladrilhamento** (ou uma tesselação) de $\mathbb{H}^2$.*

Definição 2.3.3. *Um domínio fundamental $\mathcal{D}$ de grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$ é dito **localmente finito** se, e somente se, todo subconjunto compacto de $\mathbb{H}^2$ intersecta apenas um número finito de imagens $\gamma(\mathcal{D})$, onde $\gamma \in \mathbb{G}$. Ou seja, se, e somente se, o ladrilhamento $\{\gamma(\mathcal{D}) \mid \gamma \in \mathbb{G}\}$ for localmente finito.*

Definição 2.3.4. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano. Dizemos que $\mathcal{P}$ é um **polígono convexo fundamental** de $\mathbb{G}$ se, e só se, $\mathcal{P}$ for convexo e um domínio fundamental localmente finito em $\mathbb{G}$.*

Exemplo 2.3.5. *Seja $\mathbb{G} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ o grupo cíclico gerado por $\gamma(z) = z + 1$, ou seja, $\mathbb{G} = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n, n \in \mathbb{Z}\}$. Este grupo é um grupo Fuchsiano. Considere*

²Estamos denotando o interior de um conjunto (ou subconjunto) X por $\text{int}(X)$.

$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$, claramente $\mathcal{D}$ é um conjunto fechado. Observe que se $\operatorname{Re}(z) = a$, então $\operatorname{Re}(\gamma_n(z)) = n + a$ e

$$\gamma_n(\operatorname{int}(\mathcal{D})) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid n < \operatorname{Re}(z) < n+1\} \text{ e } \gamma_n(\mathcal{D}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid n \leq \operatorname{Re}(z) \leq n+1\}.$$

Assim, temos:

(i) $\bigcup_{\gamma \in \mathbb{G}} \gamma(\mathcal{D}) = \mathbb{H}^2$;

(ii) É fácil ver que se $\gamma_n(\operatorname{int}(\mathcal{D}))$ e $\gamma_m(\operatorname{int}(\mathcal{D}))$ se intersectam, então $n = m$.

Portanto, $\mathcal{D}$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}$. Veja a Figura 2.1.

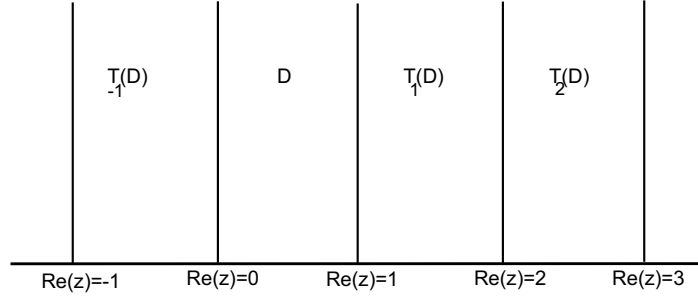


Figura 2.1: Domínio fundamental de uma tesselação por $\mathbb{G} = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n\}$.

Domínios fundamentais não são necessariamente únicos, ou seja, um dado grupo Fuchsiano pode ter diferentes domínios fundamentais. Por exemplo, a Figura 2.2 apresenta um exemplo de um domínio fundamental diferente para o grupo Fuchsiano $\mathbb{G} = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n, n \in \mathbb{Z}\}$.

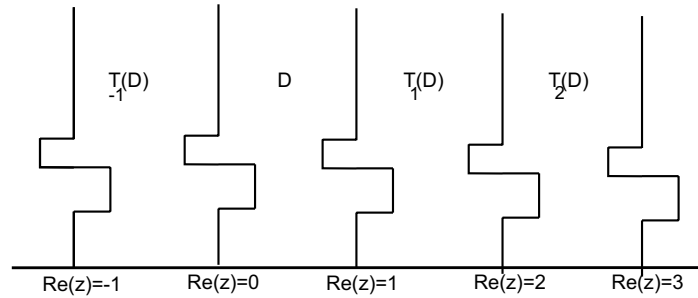


Figura 2.2: Outro domínio fundamental de uma tesselação por $\mathbb{G} = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n\}$

No entanto, temos o seguinte resultado que afirma que dois domínios fundamentais de um mesmo grupo Fuchsiano têm a mesma área, ou seja, o resultado se refere à invariância da área.

Teorema 2.3.6. *Sejam $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ dois domínios fundamentais de um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$, com $\operatorname{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) < \infty$. Se as áreas das fronteiras são nulas, isto é, $\operatorname{Área}_{\mathbb{H}^2}(\partial \mathcal{D}_1) = \operatorname{Área}_{\mathbb{H}^2}(\partial \mathcal{D}_2) = 0$, então $\operatorname{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) = \operatorname{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_2)$.*

Demonstração:

Veja que, como $\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\partial\mathcal{D}_i) = 0$, então $\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_i) = \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\text{int}(\mathcal{D}_i))$, para $i = 1, 2$. Além disso,

$$\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_1 \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \mathbb{G}} \gamma(\text{int}(\mathcal{D}_2)) \right) = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{G}} \left(\mathcal{D}_1 \cap \gamma(\text{int}(\mathcal{D}_2)) \right).$$

Como $\text{int}(\mathcal{D}_2)$ é o interior de um domínio fundamental, então os conjuntos $\mathcal{D}_1$ e $\gamma(\text{int}(\mathcal{D}_2))$ são disjuntos. Assim, usando os seguintes fatos:

- (I) a área da união de conjuntos disjuntos é a soma das áreas dos conjuntos;
- (II) transformações Möbius preservam a área;

temos,

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) &\geq \sum_{\gamma \in \mathbb{G}} \text{Área}_{\mathbb{H}^2} \left(\mathcal{D}_1 \cap \gamma(\text{int}(\mathcal{D}_2)) \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{G}} \text{Área}_{\mathbb{H}^2} \left(\gamma^{-1}(\mathcal{D}_1) \cap \text{int}(\mathcal{D}_2) \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{G}} \text{Área}_{\mathbb{H}^2} \left(\gamma(\mathcal{D}_1) \cap \text{int}(\mathcal{D}_2) \right) \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{D}_1$ um domínio fundamental, temos

$$\bigcup_{\gamma \in \mathbb{G}} \gamma(\mathcal{D}_1) = \mathbb{H}^2$$

de modo que

$$\bigcup_{\gamma \in \mathbb{G}} \left(\gamma(\mathcal{D}_1) \cap \text{int}(\mathcal{D}_2) \right) = \text{int}(\mathcal{D}_2)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{G}} \text{Área}_{\mathbb{H}^2} \left(\gamma(\mathcal{D}_1) \cap \text{int}(\mathcal{D}_2) \right) &\geq \text{Área}_{\mathbb{H}^2} \left(\bigcup_{\gamma \in \mathbb{G}} \left(\gamma(\mathcal{D}_1) \cap \text{int}(\mathcal{D}_2) \right) \right) \\ &\geq \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\text{int}(\mathcal{D}_2)). \end{aligned}$$

Logo, $\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) \geq \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_2)$.

Invertendo $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ no raciocínio acima, obtemos a desigualdade reversa

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_2) \geq \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1).$$

Portanto, $\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) = \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_2)$. ■

Seja $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano. Se $\mathbb{G}'$ for um subgrupo de $\mathbb{G}$, então $\mathbb{G}'$ é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ e assim um grupo Fuchsiano. A seguir temos propriedades que relacionam os domínios fundamentais de $\mathbb{G}'$ e $\mathbb{G}$.

Teorema 2.3.7. *Sejam $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e $\mathbb{G}'$ é um subgrupo de $\mathbb{G}$ de índice finito n e $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{G}$ tais que,*

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}'\gamma_1 \bigcup \mathbb{G}'\gamma_2 \bigcup \dots \bigcup \mathbb{G}'\gamma_n.$$

Considere a decomposição de $\mathbb{G}$ em $\mathbb{G}'$ -classes laterais. Se $\mathcal{D}$ um domínio fundamental de $\mathbb{G}$, então:

- (i) $\mathcal{D}' = \gamma_1(\mathcal{D}) \cup \gamma_2(\mathcal{D}) \cup \dots \cup \gamma_n(\mathcal{D})$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}'$;
- (ii) Se $\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\partial\mathcal{D}) = 0$ e $\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D})$ for finita, então $\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}') = n\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D})$.

Demonstração:

(i) Seja $z \in \mathbb{H}^2$, como $\mathcal{D}$ é domínio fundamental de $\mathbb{G}$, existem $w \in \mathcal{D}$ e $\gamma \in \mathbb{G}$ tais que $\gamma(w) = z$. Mas $\gamma = \gamma'\gamma_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ e alguma $\gamma' \in \mathbb{G}'$. Logo

$$x = \gamma'\gamma_i(w) = \gamma'(\gamma_i(w)),$$

onde $\gamma' \in \mathbb{G}'$ e $\gamma_i(w) \in \mathcal{D}'$, ou seja, $\bigcup_{\gamma' \in \mathbb{G}'} \gamma'(\mathcal{D}') = \mathbb{H}^2$. Além disso temos que $\mathcal{D}'$ é fechado e não vazio, pois é uma união finita de conjuntos fechados com interiores não vazios.

Agora suponha que $z \in \text{int}(\mathcal{D}')$ e $w = \gamma'(z) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Devemos provar que $\gamma' = Id$. Portanto, seja $\epsilon > 0$ tal que $B(z, \epsilon) \subseteq \text{int}(\mathcal{D}')$. Sejam $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ tais que, $B(z, \epsilon) \cap \gamma_{i_j}(\text{int}(\mathcal{D}')) \neq \emptyset$, para $j = 1, \dots, k$. Como $w = \gamma'(z)$ é ponto de $\text{int}(\mathcal{D}')$, existe $\ell \in \{1, \dots, n\}$ tal que,

$$\gamma'(B(z, \epsilon)) \bigcup \gamma_\ell(\text{int}(\mathcal{D}')) = B(\gamma'(z), \epsilon) \bigcap \gamma_\ell(\text{int}(\mathcal{D})) \neq \emptyset.$$

Conseqüentemente, temos que a bola $B(z, \epsilon)$ tem interseção não vazia com

$$\gamma'^{-1}\gamma_\ell(\text{int}(\mathcal{D}'))$$

de modo que $\gamma'^{-1}\gamma_\ell$, para algum $j = 1, \dots, k$. Mas

$$\mathbb{G}'\gamma_{i_j} = \mathbb{G}'\gamma'^{-1}\gamma_\ell = \mathbb{G}'\gamma_\ell,$$

pois, $\gamma'^{-1} \in \mathbb{G}'$, de modo que $\gamma_{i_j} = \gamma_\ell$ e conseqüentemente $\gamma'^{-1}\gamma_\ell = \gamma_{i_j} = \gamma_\ell$ se, e somente se, $\gamma'^{-1} = \gamma' = Id$. Assim, obtemos que o interior de $\mathcal{D}'$ contém apenas um ponto de cada órbita, ou seja, as imagens $\gamma(\text{int}(\mathcal{D}'))$ são disjuntas aos pares. Portanto, $\mathcal{D}'$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}'$.

(ii) Veja que pelo item (i) acima, temos

$$\mathcal{D}'' = \gamma_1(\mathcal{D}) \bigcup \dots \bigcup \gamma_n(\mathcal{D})$$

é um domínio fundamental de $\mathbb{G}'$. Ainda,

$$\gamma_i(\mathcal{D}) \bigcap \gamma_j(\mathcal{D}) \subseteq \gamma_i(\partial\mathcal{D}) \bigcap \gamma_j(\partial\mathcal{D})$$

de modo que,

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\gamma_i(\mathcal{D})) \bigcap \gamma_j(\mathcal{D})) \leq \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\gamma_i(\partial\mathcal{D}) \bigcap \gamma_j(\partial\mathcal{D})) \leq \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\partial\mathcal{D}) = 0.$$

Assim, temos

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}'') = \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\gamma_1(\mathcal{D}) \cup \dots \cup \gamma_n(\mathcal{D})) = \sum_{i=1}^n \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\gamma_i(\mathcal{D})) = n \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}).$$

Finalmente o Teorema 2.3.6 nos garante que

$$\text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}') = \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}'') = n \text{Área}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}).$$

■

2.3.1 Domínios de Dirichlet

Nesta seção construiremos famílias de domínios com propriedades bastante fortes e úteis. Sejam $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ tais que $\gamma(p) \neq p$, para todo $\gamma \in \mathbb{G}$. O Lema 2.2.9 garante a existência de tal ponto.

Definição 2.3.8. Chamamos de **domínio de Dirichlet** centrado em um ponto $p \in \mathbb{H}^2$ ao conjunto

$$\mathcal{D}_p(\mathbb{G}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, \gamma(p)), \text{ para toda } \gamma \in \mathbb{G}\}.$$

Observação 2.3.9. Consideramos a órbita $\mathbb{G}(p)$ e escolhemos os pontos $z \in \mathbb{H}^2$ que estão mais próximos de p do que qualquer outro ponto da órbita $\mathbb{G}(p)$. Como $d(z, \gamma(p)) = d(\gamma^{-1}(z), p)$, podemos considerar em cada órbita $\mathbb{G}(z)$ os pontos (pode haver mais de um) mais próximos de p , ou seja,

$$\mathcal{D}_p(\mathbb{G}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(\gamma(z), p), \text{ para toda } \gamma \in \mathbb{G}\}.$$

Veremos que domínios de Dirichlet são domínios fundamentais, mas antes consideremos a seguinte definição:

Definição 2.3.10. Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ pontos distintos. Chamamos de **bissetor perpendicular** dos pontos p e q ao conjunto $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) = d(z, q)\}$.

Lema 2.3.11. O bissetor perpendicular de dois pontos p e q é a geodésica passando pelo ponto médio do segmento $\overline{pq}$ e ortogonal a este (veja a Figura 2.3).

Demonstração:

Provaremos que dado $z \in \mathbb{H}^2$ com $d(z, p) = d(z, q)$, z pertencente à geodésica ortogonal ao segmento $\overline{pq}$ pelo seu ponto médio. Pela Observação 1.2.9, podemos assumir que $p = i$ e $q = ir^2$. Usando a fórmula de distância, temos

$$d(z, p) = d(z, q) \Leftrightarrow \frac{|z - p|^2}{\text{Im}(z)} = \frac{|z - q|^2}{r^2 \text{Im}(z)}.$$

Agora,

$$\frac{|z - p|^2}{Im(z)} = \frac{Re(z) + (Im(z) - 1)^2}{Im(z)} = \frac{Re^2(z) + (Im(z) - r)^2}{r^2 Im(z)} = \frac{|z - q|^2}{r^2 Im(z)}$$

se, e somente se,

$$|z|^2 = Re^2(z) + Im^2(z) = r^2,$$

ou seja, se $|z| = r$. Note que $|z| = r$ é exatamente a equação da geodésica ortogonal ao segmento $\overline{pq}$ pelo seu ponto médio. ■

Denotando o bissetor perpendicular de p e $\gamma(p)$ por (veja a Figura 2.3)

$$L_p(\gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) = d(z, \gamma(p))\},$$

temos que este conjunto é a fronteira topológica de

$$H_p(\gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, \gamma(p))\}.$$

Assim, temos

$$\mathcal{D}(p)(\gamma) = \bigcap_{id \neq \gamma \in \mathbb{G}} H_p(\gamma).$$

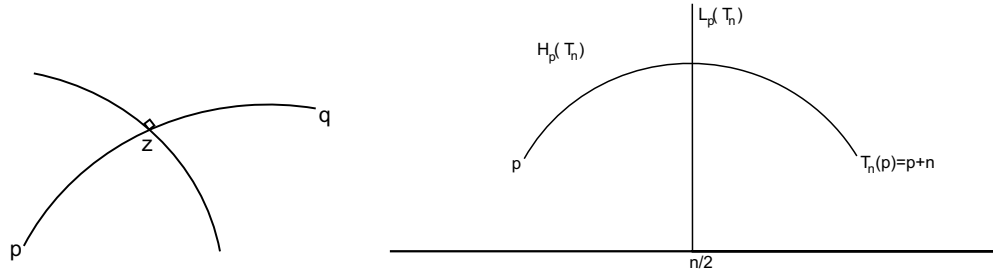


Figura 2.3: Bissetor perpendicular de $\overline{pq}$ e de $\overline{pT_n(p)}$.

Teorema 2.3.12. *Sejam $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ um domínio de Dirichlet centrado em $p \in \mathbb{H}^2$. Então $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ é um domínio fundamental da ação de $\mathbb{G}$.*

Demonstração:

Dado $z \in \mathbb{H}^2$, a órbita $\mathbb{G}(z)$ é discreta, logo existe $z_0 \in \mathbb{G}(z)$ mais próximo de p . Então temos que $d(z_0, p) \leq d(\gamma(z_0), p)$, para todo $\gamma \in \mathbb{G}$. Assim, $z_0 \in \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ e obtemos que o domínio de Dirichlet contém ao menos um representante de cada órbita. O domínio $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ possui interior não vazio. De fato, seja

$$\epsilon = \min_{\gamma \in \mathbb{G}} \{d(p, \gamma(p))\}, \text{ então a bola } B(p, \epsilon/2) \subset \mathcal{D}_p(\mathbb{G}).$$

Mostraremos que dois pontos interiores de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ não pertencem à mesma órbita. Se $d(z, p) = d(\gamma(z), p)$ para algum $Id \neq \gamma \in \mathbb{G}$, então $d(z, p) = d(z, \gamma^{-1}(p))$, de modo que $z \in L_p(\gamma^{-1})$. Temos então que, caso z pertença a $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$, z pertence à sua fronteira, não sendo, portanto, ponto interior. ■

Corolário 2.3.13. *Todo domínio de Dirichlet de um grupo Fuchsiano é geometricamente convexo, ou seja, dados $z_1, z_2 \in \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$, o segmento $\overline{z_1 z_2} \subset \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$.*

Demonstração:

Como a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, então basta mostrar que $H_p(\gamma)$ é convexo. ■

Veremos a seguir uma série de resultados que mostram como um domínio de Dirichlet pode ser útil na compreensão da estrutura de um grupo Fuchsiano.

Teorema 2.3.14. *Seja $\mathbb{G}$ grupo Fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ um domínio de Dirichlet. Então, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ é localmente finito.*

Demonstração:

Sejam $q \in \mathbb{H}^2$, K uma vizinhança compacta de q e $r = \sup_{z \in K} \{d(p, z)\}$. Como K é compacto, temos $r < \infty$. Suponha que exista uma seqüência $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos de $\mathbb{G}$ tal que $K \cap \gamma_n(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, existe uma seqüência $z_n \in \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ tal que $w_n = \gamma_n(z_n) \in K \cap \gamma_n(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} d(p, \gamma_n(z_n)) &\leq d(p, w_n) + d(w_n, \gamma_n(p)) \\ &\leq d(p, w_n) + d(z_n, p) \\ &\leq d(p, w_n) + d(w_n, p) \\ &= 2r \end{aligned}$$

e como p não é fixo por qualquer elemento de $\mathbb{G}$, a seqüência $\gamma_n(p)$ é uma seqüência de pontos distintos contidos na bola fechada de centro p e raio $2r$, contradizendo a hipótese de as órbitas de $\mathbb{G}$ serem discretas. Logo o ladrilhamento $\{\gamma(\mathcal{D}) \mid \gamma \in \mathbb{G}\}$ é localmente finito e, portanto, $\mathcal{D}$ é localmente finito. ■

Teorema 2.3.15. *Dado $z \in \partial(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$, existe $Id \neq \gamma \in \mathbb{G}$ tal que $\gamma(z) \in \partial(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$.*

Demonstração:

De fato, como $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ é localmente finito, dado $z \in \mathbb{H}^2$ existe uma bola $B(z, \epsilon)$ e elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{G}$ distintos tais que

$$z \in \gamma_1(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \cap \dots \cap \gamma_n(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \quad (2.1)$$

$$B(z, \epsilon) \subset \gamma_1(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \cup \dots \cup \gamma_n(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})). \quad (2.2)$$

Veja que a condição 2.2 nos garante que a seqüência $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ é maximal satisfazendo a condição 2.1, ou seja, se $\gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \cap B(z, \epsilon) \neq \emptyset$ então $\gamma = \gamma_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Mas para $z \in \partial(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$, quando tomamos $\gamma_1 = Id$, temos $n \geq 2$, pois do contrário teríamos $z \in B(z, \epsilon) \subset \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$, contradizendo a hipótese de z ser ponto da fronteira de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$. ■

Note que a fronteira de um domínio de Dirichlet é formado pela união de geodésicas, raios geodésicos ou segmentos geodésicos, sendo assim, podemos apresentar a seguinte definição.

Definição 2.3.16. *Sejas $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ um domínio de Dirichlet de $\mathbb{G}$. Chamaremos de **aresta ordinária** (ou simplesmente aresta) toda geodésica da forma $\mathcal{D} \cap g(\mathcal{D})$ de comprimento positivo, onde $g \in \mathbb{G}$. Diremos que um ponto da fronteira de $\mathcal{D}$ é um **vértice ordinário** (ou simplesmente vértice) se este for a intersecção de duas arestas ordinárias distintas de $\mathcal{D}$, ou seja, um ponto da forma $\mathcal{D} \cap g(\mathcal{D}) \cap h(\mathcal{D})$, para elementos distintos id , g e h de $\mathbb{G}$.*

Definição 2.3.17. *Se w for um ponto fixo por elemento elíptico γ de ordem 2, podemos ter w contido no interior de uma aresta ordinária L . Quando for este o caso, temos que as duas componentes conexas de $L \setminus \{w\}$ são comutadas por γ . Chamaremos cada uma dessas componentes de **aresta singular** e ao ponto w de **vértice singular**. Temos então que um vértice singular divide uma aresta ordinária em duas arestas singulares.*

Teorema 2.3.18. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{V}$ uma aresta e um vértice de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$, respectivamente. Então:*

- (i) *Existe $Id \neq \gamma \in \mathbb{G}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$;*
- (ii) *$\mathcal{V}$ é vértice ordinário se, e somente se, existem elementos distintos $Id \neq \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{G}$ tais que, $\mathcal{V} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma_1(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \cap \gamma_2(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$.*

Demonstração:

(i) Seja z um ponto da aresta $\mathcal{A}$ que não seja um vértice. Pelo Teorema 2.3.15, existe $\gamma \in \mathbb{G}$ tal que $w = \gamma^{-1}(z) \in \partial\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$. Então temos $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$.

(ii) Consideremos $\mathcal{V}$ um vértice de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ e sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ arestas de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ tais que $\mathcal{V} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Agora, sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{G}$ tais que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma_i(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$, com $i = 1, 2$. Então, temos

$$\mathcal{V} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma_1(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \cap \gamma_2(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})).$$

Além disso, temos que $\gamma_1 = \gamma_2$ se, e somente se, $\mathcal{V}$ for ponto interior da aresta ordinária, ou seja, se e somente se $\mathcal{V}$ for vértice singular. ■

Chamaremos dois pontos de $\mathbb{H}^2$ de **congruentes** se eles pertencerem a mesma $\mathbb{G}$ -órbita. E esta relação é uma relação de equivalência. A partir da definição de domínio fundamental, dois pontos congruentes de um domínio fundamental devem estar contidos em sua fronteira. De fato, sendo z e w congruentes, então eles pertencem à mesma órbita, ou seja, existem $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{G}$ tais que, $z = \gamma_1(z_0)$ e $w = \gamma_2(z_0)$, para algum $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e assim, $z_0 = \gamma_1^{-1}(z) = \gamma_2^{-1}(w)$. Logo z , w pertencem a uma

aresta de um domínio fundamental. A relação de congruência tanto no conjunto dos vértices quanto no conjunto das arestas de um domínio de Dirichlet também define uma relação de equivalência. Desta forma, agora vamos estudar as classes de equivalência de arestas de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$.

Teorema 2.3.19. *Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ contém exatamente dois elementos.*

Demonstração:

Seja $\gamma \in \mathbb{G}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))$, conforme visto no Teorema 2.3.18. Então temos que $\gamma^{-1}(\mathcal{A})$ é uma aresta de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$, logo existe ao menos uma aresta equivalente e distinta a $\mathcal{A}$.

Dado uma aresta $\mathcal{A}_i$ na classe de equivalência de $\mathcal{A}$ temos que existe $\gamma_i \in \mathbb{G}$ tal que,

$$\mathcal{A}_i = \gamma_i(\mathcal{A}) \subseteq \gamma_i(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}))).$$

Assim, se tivermos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ na mesma classe de equivalência de $\mathcal{A}$ teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\subseteq \left(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma_1^{-1}\gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \right) \cap \left(\mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma_2^{-1}\gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \right) \\ &= \mathcal{D}_p(\mathbb{G}) \cap \gamma_1^{-1}\gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})) \cap \gamma_2^{-1}\gamma(\mathcal{D}_p(\mathbb{G})). \end{aligned}$$

Mas, se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ o Teorema 2.3.18 nos garante que $\mathcal{A}$ é um vértice de $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$. Logo $\gamma_1 = \gamma_2$, e assim temos que a classe de equivalência de uma aresta possui no máximo dois elementos. ■

Assim, dada uma aresta $\mathcal{A}_1$ em $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ existe uma única outra aresta $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_1$ em $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ e um único elemento $\gamma \in \mathbb{G}$ tal que $\gamma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$. Dizemos neste caso que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ é um par de **arestas congruentes** e que γ relaciona o par ou que γ **emparelha as arestas**. Além disso, γ relaciona as arestas, então γ^{-1} também as relaciona. E assim, se $\mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ possui um número finito de arestas, este é um número par.

Teorema 2.3.20. *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ um domínio de Dirichlet de $\mathbb{G}$. Considere o conjunto $\{\gamma_i \mid i \in I\}$ de elementos de $\mathbb{G}$ que relacionam arestas distintas de $\mathcal{D}$. Então $\{\gamma_i \mid i \in I\}$ é um conjunto de geradores de $\mathbb{G}$.*

Demonstração:

Seja $\Lambda = \langle \gamma_i \rangle$ o conjunto gerado pelos elementos de $\mathbb{G}$ que relacionam arestas de $\mathcal{D}$. Definamos

$$X = \bigcup_{\phi \in \Lambda} \phi(\mathcal{D}) \quad \text{e} \quad Y = \bigcup_{\phi \in \mathbb{G} \setminus \Lambda} \phi(\mathcal{D}).$$

É evidente que $X \cup Y = \mathbb{H}^2$ e $X \neq \emptyset$. Como $\mathbb{H}^2$ é conexo, se demonstrarmos que X e Y são fechados, teremos que $X \cap Y = \emptyset$ que é equivalente a termos $Y = \emptyset$, ou seja, $\Lambda = G$.

Seja $Z = \bigcup_{i \in I} \phi_i(\mathcal{D})$ e consideraremos uma seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Z , convergindo para algum ponto z_0 . Como $\mathcal{D}$ é domínio fundamental, existe $\gamma \in \mathbb{G}$ tal que $z_0 \in \gamma(\mathcal{D})$. Mas como o ladrilhamento por $\mathcal{D}$ é localmente finito, em particular, existe uma vizinhança de z_0 que intercepta apenas um número finito de elementos da família $\{\phi_i \mid i \in I\}$. Logo algum desses elementos, digamos $\phi_k(\mathcal{D})$, contém uma subseqüência de z_n convergindo para z_0 . Mas $\phi_k(\mathcal{D})$ é fechado, logo $z_0 \in \phi_k(\mathcal{D}) \subseteq Z$. Como tomamos Z sendo união arbitrária de ladrilhos, temos que, em particular, X e Y são fechados e conseqüentemente $\Lambda \neq \mathbb{G}$ se, e somente se, $X \cap Y \neq \emptyset$.

Considere agora $\gamma \in \Lambda$ e $\phi_1 \in \mathbb{G}$ tais que $\gamma(\mathcal{D})$ e $\phi_1(\mathcal{D})$ tenham uma aresta em comum. Assim $\gamma^{-1}\phi_1(\mathcal{D})$ terá aresta em comum com $\mathcal{D}$, de modo que $\gamma^{-1}\phi_1(\mathcal{D}) = \gamma_j(\mathcal{D})$, para algum γ_j gerador de Λ . Mas como $\phi_1 = \gamma\gamma_j$, temos $\phi_1 \in \Lambda$, pois ambos γ e γ_j pertencem a Λ . Suponha que, para $\phi_2 \in \mathbb{G}$, $\gamma(\mathcal{D})$ e $\phi_2(\mathcal{D})$ tenham um vértice em comum. Então $\gamma^{-1}\phi_2(\mathcal{D})$ tem um vértice em comum com $\mathcal{D}$, digamos $v_1 = \gamma^{-1}\phi_2(v)$. Mas o ladrilhamento $\{\phi(\mathcal{D}) \mid \phi \in \mathbb{G}\}$ é localmente finito, logo existe apenas um número finito de arestas que tem v_1 como vértice e temos que $\mathcal{D}$ e $\gamma^{-1}\phi_2(\mathcal{D})$ podem ser conectadas por uma seqüência finita de ladrilhos, cada um possuindo uma aresta em comum com o anterior. Logo, aplicando o mesmo raciocínio feito anteriormente para este número finito de ladrilhos, obtemos $\phi_2 \in \mathbb{G}$.

Consequentemente, apenas as imagens de $\mathcal{D}$ por Λ podem interceptar X , ou seja, $X \cap Y = \emptyset$. Mas conforme mencionamos anteriormente, a convexidade de $\mathbb{H}^2$ garante que $\mathbb{G} = \Lambda$ é equivalente a termos $X \cap Y = \emptyset$ e, conseqüentemente, $\Lambda = \langle \gamma_i \rangle = \mathbb{G}$. ■

Definição 2.3.21. *Sejas $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ um domínio de Dirichlet de $\mathbb{G}$. Definimos um **ciclo de vértices** (chamaremos simplesmente de ciclo) como sendo uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, como sendo um conjunto da forma*

$$\{\gamma(z) \mid \gamma \in \mathbb{G}, z \text{ e } \gamma(z) \text{ são vértices de } \mathcal{D}\}. \quad (2.3)$$

O ponto ∞ pode ser considerado como um vértice em alguns domínios, mas não nos preocuparemos com este fato. O próximo resultado relaciona a soma dos ângulos internos de um ciclo com a ordem³ do estabilizador do vértice.

Teorema 2.3.22. *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ um domínio de Dirichlet de $\mathbb{G}$. Sejam $v_1, \dots, v_r$ vértices de um ciclo e $\theta_1, \dots, \theta_r$ os ângulos internos dos respectivos vértices. Então, se denotarmos por m a ordem do estabilizador em $\mathbb{G}$ de um dos vértices do ciclo, temos que $\theta_1 + \dots + \theta_r = 2\pi/m$.*

Demonstração:

³A ordem de subgrupo (ou grupo) é dado pela cardinalidade do subgrupo (ou grupo).

Observar que os estabilizadores dos vértices são conjugados, ou seja, se $\gamma(v_i) = v_j$, então $\mathbb{G}_{v_j} = \gamma^{-1}\mathbb{G}_{v_i}\gamma$, de modo que os estabilizadores em G de qualquer um dos vértices de um ciclo tem sempre a mesma ordem. Denotemos por $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ e seja

$$\mathbb{G}_{v_1} = \{Id, \phi, \phi^2, \dots, \phi^{m-1}\}$$

o estabilizador de v_1 . Então, para todo $0 \leq t \leq m-1$, $\phi^t(\mathcal{D})$ é um domínio fundamental que tem v_1 como vértice com ângulo θ_1 . Dado um vértice v_i no ciclo, existe $\gamma_i \in \mathbb{G}$ tal que $\gamma_i(v_i) = v_1$. Assim, a classe lateral

$$\mathbb{G}_{v_1}\gamma_i = \{\gamma_i, \phi\gamma_i, \phi^2\gamma_i, \dots, \phi^{m-1}\gamma_i\}$$

é o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{G}$ que levam v_i em v_1 . Obtemos assim que

$$\{\phi^t\gamma_i(\mathcal{D}) \mid 0 \leq t \leq m-1\}$$

também é uma família de m imagens de $\mathcal{D}$ que tem v_1 como vértice com ângulo θ_i .

Agora, como $\mathcal{D}$ é um domínio fundamental, o ladrilhamento $\{\gamma(\mathcal{D}) \mid \gamma \in \mathbb{G}\}$ cobre toda uma vizinhança de v_1 e se $v_1 \in \gamma(\mathcal{D})$, então v_1 é um vértice de $\gamma(\mathcal{D})$. Assim, se demonstrarmos que todo elemento $\gamma \in \mathbb{G}$ tal que $v_1 \in \gamma(\mathcal{D})$ é da forma $\phi^t\gamma_i$, com $t \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ e $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ são únicos, teremos demonstrado que $m\theta_1 + m\theta_2 + \dots + m\theta_r = 2\pi$.

Seja $\gamma \in \mathbb{G}$ tal que $v_1 \in \gamma(\mathcal{D})$. Então $\gamma^{-1}(v_1) \in \mathcal{D}$, de modo que $\gamma^{-1}(v_1) = v_i$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ e, portanto, $\gamma = \phi^t\gamma_i$ para algum $t \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Além disso, $\phi^t\gamma_i(\mathcal{D}) = \phi^s\gamma_\ell(\mathcal{D})$ se, e somente se, $\phi^t\gamma_i = \phi^s\gamma_\ell$, de modo que $\phi^t = \phi^s$ e $\gamma_i = \gamma_\ell$.

Logo obtemos $m\theta_1 + m\theta_2 + \dots + m\theta_r = 2\pi$, ou seja, $\theta_1, \dots, \theta_r = 2\pi/m$. ■

Observação 2.3.23. *Agora já sabemos que as isometrias que emparelham as arestas de um domínio de Dirichlet de um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$ forma um conjunto gerador deste grupo. Em particular, se um domínio de Dirichlet tiver um número finito de arestas, então o grupo $\mathbb{G}$ será finitamente gerado.*

2.4 Superfície Compacta $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$

Nessa seção, verificaremos quais são as condições para que o quociente $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$ seja uma superfície compacta.

Para isso apresentamos a seguinte definição.

Definição 2.4.1. *Um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$ é dito **co-compacto** se o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$ for compacto.*

Utilizamos os seguintes resultados demonstrados em [11] página 126:

Teorema 2.4.2. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e suponha que $\mathbb{G}$ possua um domínio fundamental convexo não compacto. Então $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$ não é compacto.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{D}$ um domínio fundamental convexo não compacto. Como $\mathcal{D}$ é fechado e não compacto, existe sequência ilimitada $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de $\mathcal{D}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que z_n converge para um ponto $z_0 \in \partial\mathbb{H}^2$. Dado $p \in \text{int}(\mathcal{D})$, a sequência dos segmentos geodésicos ligando p à z_n converge para um raio geodésico r ligando p à z_0 . Como $\mathcal{D}$ é convexo e p é ponto interior de $\mathcal{D}$, temos que r está contido no interior de $\mathcal{D}$. Logo, se tomarmos uma cobertura de r que não possua subcobertura finita por abertos suficientemente pequenos, estes se projetarão homeomorficamente sobre sua imagem, e obteremos que $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$ não é compacto ■

Corolário 2.4.3. *Um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$ é co-compacto se, e somente se, todo domínio fundamental de $\mathbb{G}$ for compacto.*

Teorema 2.4.4. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano co-compacto. Então $\mathbb{G}$ não possui elementos parabólicos.*

Teorema 2.4.5. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\mathbb{G})$ um domínio de Dirichlet não compacto mas com área finita. Então:*

- (i) *Cada ponto $z \in \partial\mathcal{D}$ é ponto fixo de algum elemento parabólico $\gamma \in \mathbb{G}$;*
- (ii) *Se $w \in \partial\mathbb{H}^2$ for ponto fixo por algum elemento parabólico de $\mathbb{G}$, existe $\sigma \in \mathbb{G}$ tal que $\sigma(w) \in \partial\mathcal{D}$.*

Corolário 2.4.6. *Um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$ é co-compacto se, e somente se, não possui elemento parabólico e $\text{Área}(\mathbb{H}^2/\mathbb{G}) < \infty$.*

Demonstração:

Se $\mathbb{G}$ for co-compacto, então $\text{Área}(\mathbb{H}^2/\mathbb{G}) < \infty$ e pelo Teorema 2.4.4 $\mathbb{G}$ não possui elementos parabólicos. Agora, se $\text{Área}(\mathbb{H}^2/\mathbb{G}) < \infty$ e $\mathbb{G}$ não possui elementos parabólicos, então o Teorema 2.4.5 nos garante que qualquer domínio de Dirichlet $\mathcal{D}$ de $\mathbb{G}$ não possui pontos ideais. Além disso, como $\mathcal{D}$ é convexo, temos que $\mathcal{D}$ é limitado, então pelo Corolário 2.4.3 temos $\mathbb{G}$ co-compacto. ■

Uma consequência destes resultados é que o quociente $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$ será uma superfície compacta se, e somente se, o grupo $\mathbb{G}$ não tiver elementos parabólicos e a área da superfície for finita (ou seja, $\mathcal{D}$ deve ser convexo e limitado).

2.5 Calculando o Gênero de uma Superfície Compacta Orientável

Nesta seção apresentaremos um método para calculando o gênero de uma superfície compacta orientável X . Esse método fará uso do número de vértice, arestas e face de uma triangulação da superfície X . Mas antes de apresentarmos esse método, apresentaremos a definição de gênero de uma superfície compacta orientável.

Definição 2.5.1. *O **gênero** de uma superfície compacta é o número máximo de círculos que podem ser traçadas na superfície, sem a dividir em duas regiões distintas, ou seja, uma superfície compacta que possui g “buracos”, tem gênero g (veja a Figura 2.4).*



Figura 2.4: Superfícies com Gênero 0, 1 e 2 respectivamente.

Depois de feita a exposição da definição de gênero de uma superfície compacta, perguntamos:

“Como calcular o gênero de uma superfície compacta orientável X ?”

Para responder essa pergunta, utilizaremos a **característica de Euler** de uma superfície compacta X denotada por $\chi(X)$ (veja referência [16] Capítulo 1), que é dada por

$$\chi(X) = V - A + F \quad (2.4)$$

onde A é o número de arestas, V é o número vértices e F é o número de faces de uma triangulação da superfície X . Sabemos ainda que, sendo X uma superfície compacta orientável, então $\chi(X) = 2 - 2g$, onde g é o gênero de X (veja texto [16] Capítulo 1). Portanto, temos

$$2 - 2g = V - A + F. \quad (2.5)$$

Assim, obtemos uma expressão para calcular o gênero de uma superfície compacta orientável.

Capítulo 3

Teorema de Poincaré para Polígonos

Sabemos que qualquer grupo fuchsiano $\mathbb{G}$ agindo sobre um disco unitário Δ possui um domínio fundamental $\mathcal{D}$, em particular, possui um polígono fundamental convexo $\mathcal{P}$. E existe uma coleção de emparelhamentos g_s de arestas do polígono $\mathcal{P}$ que geram $\mathbb{G}$.

Agora vamos estudar um processo que é o inverso do processo acima, ou seja, começamos com um polígono convexo hiperbólico e um conjunto de transformações de emparelhamentos de arestas e daí perguntamos:

“Quando é que este emparelhamento gera um grupo Fuchsiano?”

O teorema de Poincaré responde essa pergunta e ainda fornece um método de construção dos grupos fuchsianos. Para este estudo, nos baseamos no texto [3].

O que iremos fazer na próxima seção também se aplica ao plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, ao plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ e ao plano esférico S^2 . Assim, para ter uma situação genérica, tomaremos um espaço métrico X , onde $X = \mathbb{H}^2$, $\mathbb{R}^2$ ou S^2 . É claro que estamos interessados no caso em que $X = \mathbb{H}^2$.

3.1 Teorema de Poincaré para Polígonos

Para enunciar o Teorema de Poincaré e assim fornecer um método de construção dos grupos fuchsianos, iremos introduzir condições tais que, para um polígono $\mathcal{P}$ com emparelhamento ϕ em X satisfazendo tais condições, tenhamos um grupo discreto $\mathbb{G}$ em $Isom(X)$ gerado pelas isometrias de ϕ com $\mathcal{P}$ sendo um domínio fundamental de $\mathbb{G}$.

Considere as seguintes condições:

Condição (C_1) - Seja $\mathcal{P}$ um conjunto fechado conexo com interior não-vazio de um espaço métrico X tal que $\partial\mathcal{P} = \mathcal{P} \setminus \text{int}(\mathcal{P})$ seja a união de geodésicas (ou segmentos ou raios geodésicos) que chamaremos de arestas de $\mathcal{P}$, ou seja,

$$\partial\mathcal{P} = \bigcup_{s \in \mathcal{A}} s$$

onde $\mathcal{A} = \{s \mid s \text{ é uma aresta de } \mathcal{P}\}$ é o conjunto formado por todas as arestas de $\mathcal{P}$.

Condição (C_2) - Suponha que exista um emparelhamento de arestas $\Phi = \{g_s \mid s \in \mathcal{A}\}$ em $\mathcal{P}$ de modo que cada aresta s está associada a uma aresta s' por uma isometria g_s de $\text{Isom}(X)$ é tal que $g_s(s) = s'$ e $g_{s'} = g_s^{-1}$.

Seja $\mathbb{G}$ um grupo gerado pelas isometrias g_s , com $s \in \mathcal{A}$. Agora vamos buscar condições sobre $\mathcal{P}$ que garantam que $\mathbb{G}$ seja um grupo discreto com um domínio fundamental. Sendo assim, considere o produto cartesiano $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$. Podemos pensar em $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$ como uma coleção de cópias disjuntas

$$(g, \mathcal{P}) = \{(g, x) \mid x \in \mathcal{P}\}$$

de $\mathcal{P}$ indexadas por $\mathbb{G}$ e (g, x) como o ponto $g(x)$ visto de dentro de $g(\mathcal{P})$. Observe-mos que para $h \in \mathbb{G}$, a aplicação

$$hg_s h^{-1}$$

pode ser vista como uma aplicação da aresta $h(s) \in h(\mathcal{P})$ para

- (1) A aresta $h(g_s(s))$ de $h(\mathcal{P})$;
- (2) A aresta $(hg_s)(s)$ de $(hg_s)(\mathcal{P})$, onde hg_s é uma composição.

Escrevendo $g = hg_s$, queremos identificar (g, s) com $(h, g_s(s))$. Essa identificação define a relação $\sim$ sobre $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$ dada por

$$(g, x) \sim (h, y)$$

se, e somente se,

- (i) $g = h$, $x = y$ ou;
- (ii) $x \in s$, $y = g_s(x)$, $g = hg_s$.

Esta relação é reflexiva e simétrica, mas não é transitiva. De fato, dados $g, h, f \in \mathbb{G}$ e $x, y, z \in \mathcal{P}$ temos,

- 1) $(g, x) \sim (g, x)$, pois $g = g$ e $x = x$, logo $\sim$ é reflexiva;
- 2) $(g, x) \sim (h, y) \Leftrightarrow g = h$, $x = y$ ou $x \in s$, $y = g_s(x)$, $g = hg_s$. Assim, se $g = h$ e $x = y$, então $(h, y) \sim (g, x)$ ou

se $x \in s$, $y = g_s(x)$, $g = hg_s$, temos $y \in g_s(s) = s'$, $x = g_s^{-1}(y) = g_{s'}(y)$ e $h = gg_s^{-1} = gg_{s'}$, e então $(h, y) \sim (g, x)$. Logo $\sim$ é simétrica;

3) Mostraremos, por absurdo, que $\sim$ não é transitiva. Assim, sejam g , h e f dois a dois distintos e y , x e z também dois a dois distintos. Suponha que

$$(g, x) \sim (h, y) \text{ e } (h, y) \sim (f, z) \Rightarrow (g, x) \sim (f, z).$$

Observe que

$$(g, x) \sim (f, z) \Rightarrow g = f \text{ e } x = z \text{ ou } x \in s, z = g_s(x), g = fg_s.$$

Se $g = f$ e $x = z$, temos um absurdo. Se $x \in s$, $z = g_s(x)$, $g = fg_s$, do fato de

$$(g, x) \sim (h, y) \Rightarrow g = h, x = y \text{ ou } x \in s, y = g_s(x), g = hg_s$$

teremos $z = y$ e $h = f$, o que também é um absurdo. Portanto, $\sim$ não é uma relação de equivalência.

Agora vamos estender a relação $\sim$ para uma relação de equivalência $*$ em $(\mathbb{G} \times \mathcal{P})$ definida por

$$(g, x) * (h, y)$$

se, e somente se, tivermos uma seqüência finita de elementos (g_i, x_i) , $i = 1, \dots, n$ satisfazendo

$$(g, x) = (g_1, x_1) \sim (g_2, x_2) \sim \dots \sim (g_n, x_n) = (h, y)$$

(Esta seqüência finita é um ciclo de vértices, conforme definido no Capítulo 2, página 35.)

Para verificar que $*$ é uma relação de equivalência, temos que mostrar que essa relação é transitiva já que a reflexividade e a simetria são herdadas de $\sim$. Para isto, sejam $g, h, f \in \mathbb{G}$ e $x, y, z \in \mathcal{P}$ tais que

$$(g, x) * (h, y) \text{ e } (h, y) * (f, z).$$

Queremos mostrar que $(g, x) * (f, z)$. Veja que

$$(g, x) * (h, y) \Rightarrow \exists (g_i, x_i), i = 1, \dots, n \text{ tais que } (g, x) = (g_1, x_1) \sim \dots \sim (g_n, x_n) = (h, y)$$

e se

$$(h, y) * (f, z) \Rightarrow \exists (h_j, y_j), j = 1, \dots, m \text{ tais que } (h, y) = (h_1, y_1) \sim \dots \sim (h_m, y_m) = (f, z)$$

daí,

$$(g, x) = (g_1, x_1) \sim \dots \sim (g_n, x_n) = (h, y) = (h_1, y_1) \sim \dots \sim (h_m, y_m) = (f, z)$$

logo $(g, x) * (f, z)$ como queríamos.

A classe de equivalência contendo (g, x) será denotada por $\langle g, x \rangle$ e o conjunto das classes de equivalência (espaço quociente) será denotado por X^* . Notemos que, se

$$\langle g, x \rangle = \langle h, y \rangle \quad \text{então} \quad g(x) = h(y) \quad (3.1)$$

$$\langle fg, x \rangle = \langle fh, y \rangle \quad (3.2)$$

$$\text{se } x \in \text{int}(\mathcal{P}) \text{ então } g = h \text{ e } x = y. \quad (3.3)$$

Cada f em $\mathbb{G}$ induz uma aplicação $f^* : X^* \rightarrow X^*$ dada por

$$f^*(\langle g, x \rangle) = \langle fg, x \rangle.$$

f^* está bem definida, pois, para $g \in \mathbb{G}$, se tivermos

$$f^*(\langle g, x \rangle) = \langle f, z \rangle \text{ e } f^*(\langle g, x \rangle) = \langle h, y \rangle$$

pelas igualdades 3.1 e 3.3 acima, temos $f(x) = h(y)$ e se $x \in \text{int}(\mathcal{P})$ temos $f = h$ e $z = y$. Assim enunciamos o seguinte resultado.

Lema 3.1.1. *Para cada $f \in \mathbb{G}$, temos:*

$$(i) (f^{-1})^* = (f^*)^{-1};$$

$$(ii) (fh)^* = f^*h^*.$$

Demonstração: Como $f \in \mathbb{G}$, então f é uma bijeção. Assim, para $g \in \mathbb{G}$ e $x \in \mathcal{P}$ temos:

$$(i) (f^{-1})^*(\langle g, x \rangle) = \langle f^{-1}g, x \rangle = \langle (g^{-1}f)^{-1}, x \rangle. \text{ Aplicando } f^* \text{ temos}$$

$$f^*((f^{-1})^*(\langle g, x \rangle)) = f^*(\langle f^{-1}g, x \rangle) = \langle f(f^{-1}g), x \rangle = \langle g, x \rangle.$$

Analogamente, $(f^{-1})^*(f^*(\langle g, x \rangle)) = \langle g, x \rangle$. Logo $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

$$(ii) (fh)^*(\langle g, x \rangle) = \langle (fh)g, x \rangle = f^*(\langle hg, x \rangle) = f^*h^*(\langle g, x \rangle).$$

Portanto, $(fh)^* = f^*h^*$.

■

Considere $\mathbb{G}^*$ o conjunto de todas as aplicações $f^* : X^* \rightarrow X^*$. Pelo item (i) do Lema 3.1.1, temos que $\mathbb{G}^*$ é um grupo de bijeções de X^* em X^* .

Lema 3.1.2. *Considere a aplicação*

$$F : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}^* \text{ dada por } F(f) = f^*.$$

A aplicação F é um homomorfismo de $\mathbb{G}$ em $\mathbb{G}^*$. Além disso, F é um homomorfismo de grupo bijetor, ou seja, F um isomorfismo de grupo.

Demonstração: Pelo item (ii) do Lema 3.1.1, temos que $F(fh) = (fh)^* = f^*h^*$, para todo $f, g \in \mathbb{G}$, logo F é um homomorfismo de grupo. Além disso, dado $h^* \in \mathbb{G}^*$, temos $h^*(\langle g, x \rangle) = \langle hg, x \rangle$ para cada $g \in \mathbb{G}$ e $x \in X$, em particular, $h^*(\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle) = \langle h, x \rangle$, daí existe $h \in \mathbb{G}$ tal que $F(h) = h^*$. Assim, F é sobrejetiva.

Agora, sejam $f, g \in \mathbb{G}$ tais que $F(f) = F(h)$, ou seja, $f^* = h^*$. Então, para algum $x \in \text{int}(\mathcal{P})$, temos

$$\langle f, x \rangle = f^*(\langle \text{id}_{\mathbb{G}}, x \rangle) = h^*(\langle \text{id}_{\mathbb{G}}, x \rangle) = \langle h, x \rangle,$$

onde $\text{id}_{\mathbb{G}}$ é a identidade em $\mathbb{G}$. Assim, pelo item 3.3 temos $f = h$.

Logo, F é injetiva e assim uma bijeção.

■

Agora definimos $\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \langle \text{id}_{\mathbb{G}}, x \rangle \mid x \in \mathcal{P} \}$, onde $\text{id}_{\mathbb{G}}$ é a identidade de $\mathbb{G}$, e similarmente definimos $\langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle$. Note que a ação de $\mathbb{G}^*$ em $\langle \mathcal{P} \rangle$ ladrilha X^* , pois como $g^* \in \mathbb{G}^*$ é uma bijeção, em particular, uma sobrejeção temos

$$g^* \langle \mathcal{P} \rangle = g^*(\langle \text{id}_{\mathbb{G}}, \mathcal{P} \rangle) = \langle g, \mathcal{P} \rangle.$$

Assim,

$$\bigcup_{g^* \in \mathbb{G}^*} g^* \langle \mathcal{P} \rangle = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} \langle g, \mathcal{P} \rangle = X^* \quad (3.4)$$

e

$$\text{se } g^* \neq h^*, \text{ então } g^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle \cap h^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle = \emptyset, \quad (3.5)$$

pois

$$g^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle \cap h^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x, y \in \text{int}(\mathcal{P})$$

tais que

$$\langle g, x \rangle = \langle h, y \rangle \Leftrightarrow g = h, y = x.$$

Como F é uma bijeção, em particular F é injetiva, então teríamos, $g^* = F(g) = F(h) = h^*$ o que seria absurdo.

Veja agora que 3.1 garante a existência de uma aplicação

$$\alpha : X^* \rightarrow X \text{ dada por } \alpha(\langle g, x \rangle) = g(x)$$

e temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.3. *Seja $\alpha : X^* \rightarrow X$ uma aplicação dada por $\alpha(\langle g, x \rangle) = g(x)$. Então,*

- (i) *Se α for sobrejetiva, então $\bigcup_{g \in \mathbb{G}} g(\mathcal{P}) = X$;*
- (ii) *Se α for injetiva, então para g e h elementos distintos de $\mathbb{G}$ temos*

$$g(\text{int}(\mathcal{P})) \cap h(\text{int}(\mathcal{P})) = \emptyset.$$

Demonstração: Nessa demonstração usaremos os itens 3.4 e 3.5 acima.

(i) Pelo item 3.4, temos

$$\bigcup_{g^* \in \mathbb{G}^*} g^* \langle \mathcal{P} \rangle = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} \langle g, \mathcal{P} \rangle = X^*.$$

Aplicando α e usando a hipótese de α ser sobrejetiva temos,

$$\bigcup_{g \in \mathbb{G}} g(\mathcal{P}) = \bigcup_{g^* \in \mathbb{G}^*} \alpha(g^* \langle \mathcal{P} \rangle) = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} \alpha(\langle g, \mathcal{P} \rangle) = \alpha \left(\bigcup_{g \in \mathbb{G}} \langle g, \mathcal{P} \rangle \right) = \alpha(X^*) = X.$$

(ii) Pelo item 3.5 temos que

$$\text{se } g^* \neq h^*, \text{ então } g^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle \cap h^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle = \emptyset.$$

Se α for injetiva, então para $g^* \neq h^*$ em $\mathbb{G}^*$ temos $g = \alpha(g^*) \neq \alpha(h^*) = h$ em $\mathbb{G}$ e assim,

$$g^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle \cap h^* \langle \text{int}(\mathcal{P}) \rangle = \emptyset \Leftrightarrow \langle g, \mathcal{P} \rangle \cap \langle h, \mathcal{P} \rangle = \emptyset.$$

Daí

$$g(\mathcal{P}) \cap h(\mathcal{P}) = \alpha(\langle g, \mathcal{P} \rangle) \cap \alpha(\langle h, \mathcal{P} \rangle) = \alpha \left(\langle g, \mathcal{P} \rangle \cap \langle h, \mathcal{P} \rangle \right) = \emptyset.$$

■

Observação 3.1.4. *A proposição acima nos dá uma situação similar à existência de um domínio fundamental, ou seja, se $\mathbb{G}$ for um grupo discreto, a proposição acima nos garante que $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental desde que α seja bijetora.*

Para analisar a aplicação α e assim usar a Proposição 3.1.3 introduziremos as seguintes aplicações:

$$\beta : \mathbb{G} \times \mathcal{P} \rightarrow X^* \text{ dada por } \beta(g, x) = \langle g, x \rangle,$$

e

$$\gamma : \mathbb{G} \times \mathcal{P} \rightarrow X \text{ dada por } \gamma(g, x) = g(x).$$

Veja que

$$\gamma = \alpha\beta. \tag{3.6}$$

Assim o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times \mathcal{P} & \xrightarrow{\beta} & X^* \\ & \searrow \gamma & \swarrow \alpha \\ & X & \end{array}$$

Consideraremos em $\mathbb{G}$ a *topologia discreta*, em $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$ a *topologia produto* e em X^* a *topologia quociente* induzida por β , que é uma aplicação sobrejetiva. De fato, dado $\langle g, x \rangle \in X^*$, $\exists (g, x) \in \mathbb{G} \times \mathcal{P}$ tal que $(g, x) = \langle g, x \rangle$.

Lema 3.1.5. *As aplicações α , β e γ , definidas acima, são contínuas.*

Demonstração: A aplicação β é contínua (e aberta), pois β induz a topologia quociente de X^* . Veja que γ também é uma aplicação contínua, pois, para algum aberto A em X , temos

$$\gamma^{-1}(A) = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} \{g\} \times (g^{-1}(A) \cap \text{int}(\mathcal{P}))$$

é um aberto de $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$, pois cada $\{g\} \times (g^{-1}(A) \cap \text{int}(\mathcal{P}))$ é aberto. Consequentemente, α é contínua. De fato, seja $A \in X$ um aberto, então

$$\gamma^{-1}(A) = (\alpha\beta)^{-1}(A) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(A)).$$

Como $\gamma^{-1}(A)$ é aberto e β é contínua e aberta, segue que $\alpha^{-1}(A)$ é um aberto de $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$. ■

Veja que cada f em $\mathbb{G}$ induz uma aplicação $\tilde{f} : \mathbb{G} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{G} \times \mathcal{P}$ dada por $\tilde{f}(g, x) = (fg, x)$. É fácil ver que a inversa de $\tilde{f}$ é dada por $\tilde{f}^{-1}(h, y) = (f^{-1}h, y)$. Como isso, enunciamos o seguinte resultado.

Lema 3.1.6. *A aplicação $\tilde{f} : \mathbb{G} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{G} \times \mathcal{P}$ dada por $\tilde{f}(g, x) = (fg, x)$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: Para verificar isso, mostraremos que

1º) $\tilde{f}$ é um bijeção:

De fato, dado $(h, y) \in \mathbb{G} \times \mathcal{P}$, tome $g = f^{-1}h$ e assim

$$\tilde{f}(g, y) = (fg, y) = (f(f^{-1}h), y) = (h, y),$$

logo $\tilde{f}$ é sobrejetiva. Agora, para $(h, y), (g, x) \in \mathbb{G} \times \mathcal{P}$, se $\tilde{f}(h, y) = \tilde{f}(g, x)$, então

$$(fh, y) = (fg, x) \Leftrightarrow fh = fg \text{ e } y = x \Leftrightarrow h = g \text{ e } y = x,$$

provando que $\tilde{f}$ é injetiva e, portanto, uma bijeção.

2º) $\tilde{f}$ e $\tilde{f}^{-1}$ são contínuas:

Todo aberto de $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$ pode ser escrito na forma $\bigcup_{g \in \mathbb{G}} \{g\} \times (V \cap \text{int}(\mathcal{P}))$, onde V é um aberto de X . Então

$$\tilde{f}^{-1} \left(\bigcup_{g \in \mathbb{G}} \{g\} \times (V \cap \text{int}(\mathcal{P})) \right) = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} \{f^{-1}g\} \times (V \cap \text{int}(\mathcal{P}))$$

e

$$(\tilde{f}^{-1})^{-1} \left(\bigcup_{g \in \mathbb{G}} \{g\} \times (V \cap \text{int}(\mathcal{P})) \right) = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} \{fg\} \times (V \cap \text{int}(\mathcal{P}))$$

são abertos em $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$ e assim $\tilde{f}$ e $\tilde{f}^{-1}$ são contínuas.

Portanto, $\tilde{f}$ é um homeomorfismo. ■

Denotamos por $\tilde{\mathbb{G}}$ o grupo formado por todas as aplicações $\tilde{f} : \mathbb{G} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{G} \times \mathcal{P}$. Afirmamos que $\tilde{\mathbb{G}}$ é isomorfo à $\mathbb{G}$. Para verificar isso, basta tomar a aplicação $\tilde{F} : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ dada por $\tilde{F}(f) = \tilde{f}$. É fácil ver que $\tilde{F}$ é uma bijeção e, além disso, $\tilde{F}$ é um homomorfismo de grupo. De fato, dados $f, g, h \in \mathbb{G}$ e $x \in \mathcal{P}$ temos

$$\tilde{F}(fg) = \widetilde{(fg)} \text{ e } \widetilde{(fg)}(h, x) = ((fg)h, y) = \tilde{f}(gh, x) = \tilde{f}\tilde{g}(h, x).$$

Veja que pelos diagramas abaixo, temos as seguintes composições:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times \mathcal{P} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{G} \times \mathcal{P}^* \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ X^* & \xrightarrow{f^*} & X^* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times \mathcal{P} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{G} \times \mathcal{P} \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times \mathcal{P} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{G} \times \mathcal{P} \\ f^* \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ X^* & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

$$\beta\tilde{f} = f^*\beta, \quad \gamma\tilde{f} = f\gamma \quad \text{assim,} \quad \alpha f^*\beta = \gamma\tilde{f} = f\gamma. \quad (3.7)$$

Então, se A for um subconjunto aberto de X^* , temos

$$(\beta^{-1}(f^*)^{-1})(A) = (f^*\beta)^{-1}(A) = (\beta\tilde{f})^{-1}(A) = \tilde{f}^{-1}(\beta^{-1}(A))$$

que é um aberto de $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$, pois β é uma aplicação contínua e aberta, e além disso, $\tilde{f}$ é um homeomorfismo. Assim, deduzimos que $(f^*)^{-1}(A)$ é aberto em X^* , ou seja, f^* é contínua. Pelo Lema 3.1.1, temos $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, então $(f^*)^{-1}$ é contínua, e assim f^* é um homeomorfismo de X^* em X^* .

Para usarmos a Proposição 3.1.3 como descrito na Observação 3.1.4, α tem que ser uma bijeção. Mas para termos α sobrejetiva, devemos ter uma condição que para, cada ponto $x \in \partial\mathcal{P}$, exista um ladrilhamento para alguma vizinhança de x (isto é, alguma vizinhança que seja coberta por imagens de $\mathcal{P}$). Esta condição deve expressar o fato que a geometria deste ladrilhamento seja coerente com a relação de equivalência $*$ (isto é, a cobertura seja consistente com a relação de equivalência $*$). A fim de expressar essa condição suponha

$$\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\},$$

então, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$(g_j, x_j) \text{ será igual à } (id_{\mathbb{G}}, x) \text{ e } g_1(x_1) = \dots = g_n(x_n) = id_{\mathbb{G}}(x) = x.$$

Se x for um ponto interior de alguma aresta s de $\mathcal{P}$, podemos constatar que a classe de equivalência $\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle$ contem apenas os elementos $(id_{\mathbb{G}}, x)$ e $(g_s^{-1}, g_s(x))$ e que $\mathcal{P} \cup g_s^{-1}(\mathcal{P})$ contém uma vizinhança de x .

Para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, seja $N_j = \{y \in \mathcal{P} \mid d(y, x_j) < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$ (N_j é uma bola aberta em $\mathcal{P}$ com centro x_j e raios ϵ). Então o conjunto $g_j(N_j)$ é um subconjunto de $g_j(\mathcal{P})$. Como cada g_j é uma isometria, temos

$$g_j(N_j) \subset \{y \in X \mid d(y, x) < \epsilon\} = B(x, \epsilon).$$

Queremos impor uma condição que, para todo ϵ suficientemente pequeno, o conjunto $g_j(N_j)$ ladrilha (cobre) $B(x, \epsilon)$. Assim assumimos a seguinte condição:

Condição (C_3) - Cada ponto $x \in \mathcal{P}$ tem uma classe de equivalência finita

$$\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}$$

e para todo ϵ suficientemente pequeno $\bigcup_{j=1}^n g_j(N_j) = B(x, \epsilon)$.

De fato, como para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $g_j(N_j) \subset B(x, \epsilon)$, então a união também está contida em $B(x, \epsilon)$. Suponha que $B(x, \epsilon)$ não está contido em $\bigcup_{j=1}^n g_j(N_j)$, então existe $y \in B(x, \epsilon)$ tal que y não está em $g_j(N_j)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, assim existe $z \in X$ tal que z não pertence a N_j , e ainda $g_j(z) = y$. Assim

$$d(y, x) = d(g_j(z), g_j(x_j)) = d(z, x_j) > \epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

o que é um absurdo.

Observação 3.1.7. Para cada $w \in B(x, \epsilon)$, o conjunto de pontos em $\bigcup(g_j, N_j)$ que são levados por γ para o ponto w formam uma classe de equivalência.

Observar que o resultado que estamos buscando pode ser expresso ao dizer que o conjunto dos pontos em $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$ nos quais são aplicados por γ , para algum $w \in X$ é uma classe de equivalência (assim α é uma bijeção). Assim, C_3 aparece como a versão local do resultado global desejado. Além disso, observamos que, como $\langle f, x \rangle$ é a imagem de $\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle$ por f^* , então cada classe de equivalência é finita. Sendo assim, considere os seguintes conjuntos:

$$W = \bigcup_{j=1}^n (g_j, N_j) \text{ e } V = \beta(W).$$

Pela condição C_3 e do fato de γ ser sobrejetiva, temos que

$$\gamma(W) = \gamma\left(\bigcup_{j=1}^n (g_j, N_j)\right) = \bigcup_{j=1}^n (\gamma(g_j, N_j)) = \bigcup_{j=1}^n g_j(N_j) = B(x, \epsilon).$$

Como W é uma união de abertos de $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$ (ou melhor, uma união de classes de equivalências em $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$), então W é aberto em $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$. Daí,

$$\beta^{-1}(V) = \beta^{-1}(\beta(W)) = W,$$

então V é um aberto em X^* . Com isso, anunciamos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.8. *O conjunto $\mathbf{B} = \{f^*(V) \mid f^* \in \mathbb{G}^* \text{ e } V \subset X^*\}$ é uma base para a topologia de X^* .*

Demonstração: É fácil de ver que $\mathbf{B} \subset X^*$ já que cada $f^*(V) \subset X^*$, além disso, como f^* é um homeomorfismo e V é um aberto em X^* , então $f^*(V) = (f^{*-1})^{-1}(V)$ é um aberto em X^* . Seja A um aberto de X^* , mostraremos que

$$A = \bigcup_{f^*(V) \in \mathbf{B}} f^*(V).$$

Sendo assim, suponha que $\langle f, x \rangle \in A$. Por C_3 temos que

$$\langle f, x \rangle = f^*(\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle) = \{(fg_1, x_1), \dots, (fg_n, x_n)\}$$

com $(fg_j)(x_j) = x$ para todo $j = 1, \dots, n$. Sendo β contínua, então

$$\beta^{-1}(A) = \bigcup_{h \in \mathbb{G}} (h, A_h)$$

é um aberto de $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$. Como $(fg_j, x_j) \in \beta^{-1}(A)$, então $x_j \in A_h$, daí $A_h \neq \emptyset$ é um aberto de $\mathcal{P}$, e $h = fg_j$.

Agora, tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que C_3 se aplica e $N_j \subset A_h$, para algum $h = fg_j$ ($j \in \{1, \dots, n\}$). Isso é possível já que A_h é um aberto não vazio de $\mathcal{P}$. Sendo assim, aplicamos $\tilde{f}$ em $W = \bigcup_{j=1}^n (g_j, N_j)$, obtemos o seguinte:

$$\tilde{f}(W) = \tilde{f}\left(\bigcup_{j=1}^n (g_j, N_j)\right) = \bigcup_{j=1}^n \tilde{f}(g_j, N_j) = \bigcup_{j=1}^n (fg_j, N_j) \subset \beta^{-1}(A).$$

Aplicando β na igualdade acima temos,

$$(\beta\tilde{f})(W) = (f^*\beta)(W) = f^*(\beta(W)) = f^*(V) \subset A.$$

então concluímos que

$$\bigcup_{f^*(V) \in \mathbf{B}} f^*(V) \subset A.$$

Agora, como $(id_{\mathbb{G}}, x) \in W$ temos que $\beta(id_{\mathbb{G}}, x) = \langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle \in \beta(W)$, então para dada $\langle f, x \rangle \in A$ temos,

$$\langle f, x \rangle = f^* \langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle \in f^*(\beta(W)) = f^*(V), \text{ então } A \subset \bigcup_{f^*(V) \in \mathbf{B}} f^*(V).$$

Portanto,

$$A = \bigcup_{f^*(V) \in \mathbf{B}} f^*(V).$$

■

Agora vamos anunciar dois resultados, o primeiro é sobre a aplicação α e o outro mostra que X^* é um espaço Hausdorff conexo.

Proposição 3.1.9. *A aplicação α é um homeomorfismo local.*

Demonstração: Pela composições explicitadas em 3.7, para todo aberto $f^*(V)$ em X^* , temos

$$\begin{aligned}\alpha(f^*(V)) &= (\alpha f^*)(\beta(W)) = (\alpha f^* \beta)(W) = (f\gamma)(W) = (\gamma \tilde{f})(w) \\ &= \gamma \left(\tilde{f} \left(\bigcup_{j=1}^n (g_j, N_j) \right) \right) = \gamma \left(\bigcup_{j=1}^n (f g_j, N_j) \right) = \bigcup_{j=1}^n \gamma(f g_j, N_j) \\ &= \bigcup_{j=1}^n f g_j(N_j) = B(f g_j(x_j), \epsilon) \\ &= B(f(x), \epsilon).\end{aligned}$$

Assim, $\alpha(f^*(V))$ é um aberto em X , e consequentemente α é uma aplicação aberta. Além disso, se $u, v \in f^*(V)$ e $\alpha(u) = \alpha(v)$, escolhemos pontos $u', v' \in \tilde{f}(W) \subset \mathbb{G} \times \mathcal{P}$ tais que, $\beta(u') = u$ e $\beta(v') = v$. Então,

$$\gamma(u') = (\alpha\beta)(u') = \alpha(\beta(u')) = \alpha(u) = \alpha(v) = \alpha(\beta(v')) = \gamma(v').$$

Pela Observação 3.1.7 temos que u' e v' estão na mesma classe de equivalência, logo

$$u = \beta(u') = \beta(v') = v,$$

e assim temos que α é injetiva. Além disso, dado $z = g(x) \in X$ existe $\langle g, x \rangle \in X^*$ tal que, $\alpha(\langle g, x \rangle) = g(x)$, ou seja, α é sobrejetiva. Portanto, α é uma bijeção. E veja que, $(\alpha^{-1}(f^*(V)))^{-1} = \alpha(f^*(V)) = \alpha((f^*\beta)(W)) = (\alpha f^* \beta)(W) = (f\gamma)(W)$ e um aberto em X , isto é, α^{-1} é contínua. Assim concluímos que α é um homeomorfismo local. ■

Proposição 3.1.10. *Se $\mathcal{P}$ satisfaz a condição (C_3) , então X^* será um espaço Hausdorff conexo.*

Demonstração: Sejam $\langle f, x \rangle = \{(f_1, x_1), \dots, (f_n, x_n)\}$ e $\langle g, y \rangle = \{(g_1, y_1), \dots, (g_m, y_m)\}$ duas classes de equivalência distintas em X^* . Tome o conjunto N_i correspondente à $\langle id_G, x \rangle$ e M_j correspondente $\langle id_G, y \rangle$ como em (C_3) , de modo que os conjuntos

$$C = \bigcup_{i=1}^n (f_i, N_i) \quad \text{e} \quad D = \bigcup_{j=1}^m (g_j, M_j) \quad (3.8)$$

sejam abertos e disjuntos em $\mathbb{G} \times \mathcal{P}$. Veja que se $f_i \neq g_j$ então (f_i, N_i) e (g_j, M_j) são disjuntos, e se $f_i = g_j$ devemos ter $x_i \neq y_j$ para que (f_i, N_i) , (g_j, M_j) sejam disjuntos.

Sendo β uma aplicação aberta (β é a aplicação que induz a topologia quociente em X^*) temos que $\beta(C)$ e $\beta(D)$ são abertos em X^* tais que,

$$\langle f, x \rangle \in \beta(C), \quad \langle g, y \rangle \in \beta(D) \quad \text{e} \quad \beta(C) \cap \beta(D) = \emptyset.$$

Logo, X^* é um espaço Hausdorff.

Para mostrar que X^* é conexo, podemos pensar em cada $(g, \mathcal{P})$ como $\{g\} \times \mathcal{P}$, onde cada $g \in \mathbb{G}$. Como $\{g\}$ e $\mathcal{P}$ são conexos, então $\{g\} \times \mathcal{P}$ é conexo. Sendo β contínua, temos que $\beta(g, \mathcal{P}) = \langle g, \mathcal{P} \rangle$ conexo em X^* . E como $\langle g, \mathcal{P} \rangle \cap \langle gg_s, \mathcal{P} \rangle \neq \emptyset$ (basta lembrar da relação $\sim$) e $\langle g, \mathcal{P} \rangle, \langle gg_s, \mathcal{P} \rangle$ são conexos, então $\langle g, \mathcal{P} \rangle \cup \langle gg_s, \mathcal{P} \rangle \neq \emptyset$ é conexo. Portanto,

$$X^* = \bigcup_{g \in \mathbb{G}} \langle g, \mathcal{P} \rangle$$

é conexo. Lembrando que $\mathbb{G}$ é gerado pelas g_s , onde s são as arestas de $\mathcal{P}$. ■

Sendo (X, d) o plano hiperbólico com a métrica hiperbólica (o argumento funcionará igualmente no plano euclidiano ou no plano esférico) de modo que $\mathcal{P}$ seja um polígono hiperbólico e que Φ seja o conjunto de todas as isometrias de um emparelhamento de arestas, o nosso objetivo é concluir que $\mathbb{G}$ é discreto e que $\mathcal{P}$ é um polígono fundamental de $\mathbb{G}$.

Como em X a noção de ângulo é bem definida, a condição (C_3) pode ser reescrita em uma forma mais simples:

Se $x \in \text{int}(\mathcal{P})$, tome $\epsilon > 0$ de tal forma que o disco aberto N de centro x e raio ϵ encontra-se em $\text{int}(\mathcal{P})$. Para todo $y \in N$, onde $y \neq x$, a classe de equivalência $\langle id_{\mathbb{G}}, y \rangle$ contém apenas $(id_{\mathbb{G}}, y)$ e (C_3) assegura, trivialmente, a escolha de x . E se x for ponto interior de uma aresta s de $\mathcal{P}$, então x está sobre uma única aresta de $\mathcal{P}$ e isso conduz imediatamente para o fato que $\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle$ contém precisamente $(id_{\mathbb{G}}, y)$ e $(g_s^{-1}, g_s x)$ que é assegurado por (C_3) . De fato, se $y \in \text{int}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$, então $\langle id_{\mathbb{G}}, y \rangle = \{(g_1, y_1), \dots, (g_n, y_n)\}$, assim para $i = 1, \dots, n$

$$\langle id_{\mathbb{G}}, y \rangle * \langle g_i, y_i \rangle \Leftrightarrow (id_{\mathbb{G}}, y) = (g_1, y_1) \sim \dots \sim (g_n, y_n) = (g_i, y_i),$$

como para algum $j = 1, \dots, n$, $(id_{\mathbb{G}}, y) = (g_j, y_j)$ temos que $(id_{\mathbb{G}}, y) \sim (g_i, y_i)$ se, e somente se, $id_{\mathbb{G}} = g_i$ e $y = y_i$ já que y não pertence à nenhuma aresta s de $\mathcal{P}$. Se x pertence a uma aresta s de $\mathcal{P}$, temos que $\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}$ e para algum $j = 1, \dots, n$ $(id_{\mathbb{G}}, x) = (g_j, x_j)$ e para $r \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\langle id_{\mathbb{G}}, y \rangle * \langle g_r, y_r \rangle \Leftrightarrow (id_{\mathbb{G}}, y) = (g_1, y_1) \sim \dots \sim (g_r, y_r) \sim \dots (g_n, y_n) = (g_r, y_r),$$

e assim

$$(id_{\mathbb{G}}, x) \sim (g_r, y_r) \Leftrightarrow \begin{cases} id_{\mathbb{G}} = g_r & \text{e } x = x_r \\ x \in s, x_r = g_s(x), id_{\mathbb{G}} = g_r g_s, & \text{dai } , x_r = g_s(x), g_r = g_s^{-1} \end{cases}$$

Portanto, $\langle id_{\mathbb{G}}, x \rangle = \{(id_{\mathbb{G}}, x), (g_s^{-1}, g_s(x))\}$ onde $x \in s$

Agora a condição (C_3) pode ser reescrita apenas em termos dos vértices de $\mathcal{P}$:

Condição C'_3 - Para cada vértice $x \in \mathcal{P}$, existem vértices $x_0(= x), x_1, \dots, x_n$ em $\mathcal{P}$ e elementos $f_0(= id_{\mathbb{G}}), f_1, \dots, f_n$ de $\mathbb{G}$ tais que, para cada $j = 1, \dots, n$ os conjuntos $f_j(N_j)$ não se sobrepõem e cuja união $\bigcup f_j(N_j) = B(x, \epsilon)$.

Como a noção de ângulo em $X(= \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$ ou $S^2)$ está bem definida, a condição C'_3 é equivalente a seguinte condição:

Condição C''_3 - Para cada vértice $x \in \mathcal{P}$, existem vértices $x_0(= x), x_1, \dots, x_n$ em $\mathcal{P}$ e elementos $f_0(= id_{\mathbb{G}}), f_1, \dots, f_n$ de $\mathbb{G}$ tais que $f_j(x_j) = x$. Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ os ângulos internos nos respectivos vértices. Se denotarmos a ordem de $\mathbb{G}_x$, estabilizador de x , por m então, $\theta_1 + \dots + \theta_n = 2\pi/m$.

Como $X(= \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$ ou $S^2)$ é simplesmente conexo ¹, e sendo X^* conexo, então temos que α será uma bijeção. E assim, se $\mathbb{G}$ for discreto, pelo Proposição 3.1.3, temos que $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}$. Para mostrar que $\mathbb{G}$ é discreto usaremos o Teorema 2.1.8. Ou seja, para mostrar que $\mathbb{G}$ é discreto temos que mostrar que as órbitas de $\mathbb{G}$ são discretas e os estabilizadores são finitos. Como $\mathcal{P}$ contém representantes de todas as órbitas de $\mathbb{G}$ (veja o item (i) da Proposição 3.1.3), então basta verificar nos pontos de $\mathcal{P}$. Sendo assim, se $x \in int(\mathcal{P})$ então por C_3 , $\mathbb{G}_x = \{id\}$ (estabilizador de x) e $\mathbb{G}(x)$ será discreto. Agora, seja $x \in \partial\mathcal{P}$. Se x for um ponto interior de uma aresta s de $\mathcal{P}$, seja $g_{s'}(s') = s$ um emparelhamento de arestas de $\mathcal{P}$, então por C_3 , $\mathcal{P} \cup g_{s'}(\mathcal{P})$ contém uma vizinhança aberta de x e assim $\mathcal{P} \cap g_s(\mathcal{P} \cup g_{s'}(\mathcal{P})) \neq \emptyset$, portanto $\mathbb{G}(x)$ será discreto e $\mathbb{G}_x$ contém finitos elementos. Se x for um vértice de $\mathcal{P}$ então por C'_3 , $\bigcup f_j(N_j) = B(x, \epsilon)$, e assim x possui uma vizinhança que será coberta por um número finito de imagens de $\mathcal{P}$ de elementos de $\mathbb{G}$, logo $\mathbb{G}_x$ contém finitos elementos e $\mathbb{G}(x)$ é discreto. E assim concluímos que $\mathbb{G}$ é discreto e $\mathcal{P}$ será um domínio fundamental de $\mathbb{G}$.

Definição 3.1.11. *Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento quando cada ponto de $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma reunião de abertos U_{α} , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V . O espaço $\tilde{X}$ é chamado de espaço de recobrimento de X .*

Para garantir que cada curva em X possa ser levado para uma curva em X^* (ou seja, cada ponto possa ser reenviado continuamente uniforme para $\mathcal{P}$ pelo menos, uma distância ϵ) e a aplicação $\alpha : X^* \rightarrow X$ seja uma aplicação de recobrimento,

¹No texto [15] Capítulo 2, temos que um espaço X é simplesmente conexo se, e somente se, duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : S^1 \rightarrow X$ são homotópicas. (Veja definição de aplicações homotópicas em [15] Capítulo 1)

exigimos a seguinte condição:

Condição C_4 - O ϵ em C_3 pode ser escolhido independentemente de $x \in \mathcal{P}$.

A condição C_4 é satisfeita se o polígono $\mathcal{P}$ tiver um número finito de arestas e vértices, para isso basta tomar ϵ como sendo o menor dos comprimentos das arestas de $\mathcal{P}$.

E assim temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.12 (Teorema de Poincaré). *Seja $\mathcal{P}$ um polígono com emparelhamento ϕ em X satisfazendo C'_3 e C_4 . Então o grupo $\mathbb{G}$ gerado pelas isometrias de ϕ é um grupo discreto em $\text{Isom}(X)$ e $\mathcal{P}$ é um polígono fundamental de $\mathbb{G}$ (onde $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2, S^2$).*

No Apêndice B deste texto, apresentamos uma outra maneira mais intuitiva e topológica de se demonstrar o **Teorema de Poincaré**.

Agora, apresentaremos uma exemplo, no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, onde aplicaremos o Teorema de Poincaré.

Exemplo 3.1.13. *Seja D um quadrilátero, em particular, um quadrado com arestas de tamanho r . Considere o emparelhamento de arestas descrito na Figura 3.1. Consideraremos a orientação de v_1 para v_2 , de v_1 para v_4 , de v_2 para v_3 e de v_4*

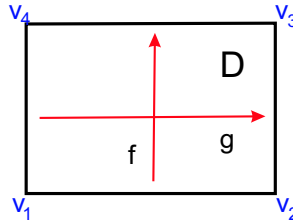


Figura 3.1: Quadrado com arestas de tamanho r .

para v_3 . Assim, partindo de v_1 , temos o seguinte ciclo de vértices:

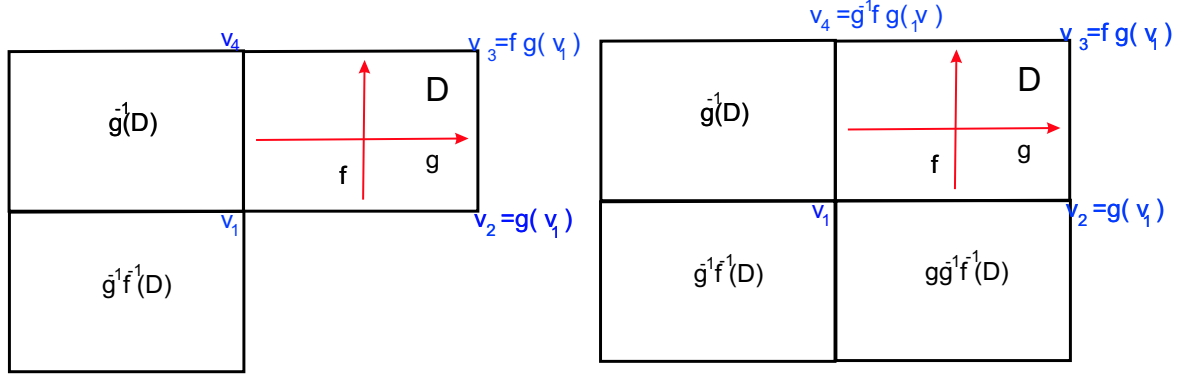
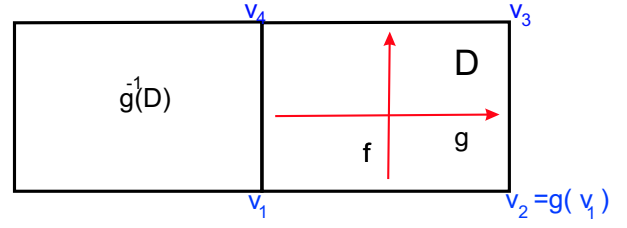
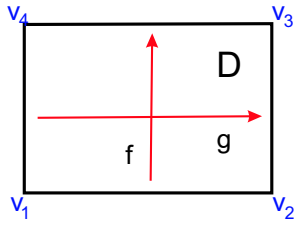
$$\{v_1, g(v_1) = v_2, fg(v_1) = v_3, g^{-1}fg(v_1) = v_4\},$$

ou seja, $v_1 = g^{-1}(v_2) = g^{-1}f^{-1}(v_3) = g^{-1}f^{-1}g(v_4)$, veja as figuras abaixo.

Pela condição C_4 , podemos tomar $\epsilon = r$, e assim obtemos $N_{v_i} = \{y \in D \mid d(y, v_i) < r\}$, para $i = 1, 2, 3, 4$, tais que N_{v_1} , $g^{-1}(N_{v_2})$, $g^{-1}f^{-1}(N_{v_3})$, $g^{-1}f^{-1}g(N_{v_4})$ não se sobrepõem e

$$N_{v_1} \bigcup g^{-1}(N_{v_2}) \bigcup g^{-1}f^{-1}(N_{v_3}) \bigcup g^{-1}f^{-1}g(N_{v_4}) = B(v_1, r).$$

Para os outros vértices, o raciocínio é análogo. Assim, as condições C'_3 e C_4 são satisfeitas, portanto, o Teorema de Poincaré (Teorema 3.1.12) nos garante que o



emparelhamento de arestas $\Phi = \{f, g\}$ gera um grupo $\mathbb{G}$ discreto em $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ e D é um domínio fundamental de $\mathbb{G}$.

Capítulo 4

Emparelhamentos Construídos

O principal objetivo do problema de Empacotamento de Esferas é a busca pela maior densidade possível de empacotamento. Em [23, página 241], Toth apresentou o limitante máximo para esta densidade no plano hiperbólico. Segundo ele, a densidade de empacotamento é limitada superiormente por $\frac{3}{\pi}$.

Em [5, Cáp. 4 teorema 4.1.1] foram feitos estudos assintóticos para reticulados do tipo $\{p, q\}$. Demonstraram que assintoticamente¹, a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$. Porém, temos que $\frac{3}{\pi}$ é atingido por empacotamentos de horobolas $\{\infty, 3\}$.

Assim, quando consideramos um reticulado da forma $\{p, q\}$, temos um empacotamento de esferas associado. A busca por empacotamentos reticulados ótimos, no sentido da maior densidade possível, está ligada à busca de códigos ótimos, pois maior densidade de empacotamento implica em menor probabilidade de erro.

A relevância dos resultados que apresentaremos neste Capítulo para empacotamento de esferas, está no fato que reticulados hiperbólicos do tipo $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$ fornecem empacotamentos com densidades próximas ao empacotamento ótimo em relação a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Daí, nosso interesse em explorar os emparelhamentos de arestas de polígonos, em particular os polígonos com $12\eta - 8$ e $12\mu - 12$ arestas (seções 4.2 e 4.3). Iniciamos definindo emparelhamento de arestas.

4.1 Emparelhamento de arestas de um polígono

Seja $\mathcal{P}$ um polígono e considere $\mathcal{A}$ o conjunto de arestas de $\mathcal{P}$. Um emparelhamento de arestas de $\mathcal{P}$ é definido da seguinte forma.

¹Assintoticidade no sentido de p e q tenderem a infinito, onde p e q determinam um ladrilhamento $\{p, q\}$.

Definição 4.1.1. Um emparelhamento de arestas de P é um conjunto $\Phi = \{T_\tau | \tau \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$:

- 1) existe aresta $\tau' \in \mathcal{A}$ com $T_\tau(\tau') = \tau$;
- 2) as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$ satisfazem a relação $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$;
- 3) se τ for aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.

O emparelhamento Φ de um polígono $\mathcal{P}$ gera um grupo $\mathbb{G}_{\mathcal{P}}$. Com este grupo podemos obter superfícies de Riemann R de um dado gênero g através do quociente de $\mathbb{H}^2$ por $\mathbb{G}_{\mathcal{P}}$, denotado por $\frac{\mathbb{H}^2}{\mathbb{G}_{\mathcal{P}}}$. É conhecido que o número N de arestas de arestas do polígono $\mathcal{P}$ está entre $4g$ e $12g - 6$, [3].

Os emparelhamentos para polígonos com $4g$ arestas foram bem explorados na literatura [5], [9], [10], [13] e [25]. Já os polígonos com $12g - 6$ arestas foram explorados, os oito possíveis emparelhamentos para este, nos trabalhos [6],[7] e [8].

Recordamos que o Teorema de Poincaré nos garante que um emparelhamento de arestas Φ gera um grupo fuchsiano $\mathbb{G}$, que nos conduz a uma superfície compacta $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$ cujo gênero pode ser obtido por:

$$V - A + F = 2 - 2g \quad (4.1)$$

como descrito no Capítulo 2, Seção 2.5.

Neste Capítulo nós apresentamos os dois emparelhamentos generalizados que construímos. Estes estão relacionados às tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 8, 4\}$ (seções 4.2 e 4.3).

4.2 Emparelhamentos Generalizados $\{12\eta - 8, 4\}$

Seja $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ um polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, com $12\eta - 8$ arestas e com ângulos internos medindo $\pi/2$, onde η é ímpar e $\eta \geq 3$. Este polígono é possível de ser construído, além disso ele é convexo, pois se somarmos todos os seus ângulos internos, temos

$$(12\eta - 8) \cdot \frac{\pi}{2} = (6\eta - 4)\pi < (12\eta - 10)\pi = [(12\eta - 8) - 2]\pi.$$

Assim, o Teorema 1.5.4 nos garante que $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ existe. Ainda, como todos os ângulos internos de $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ são iguais $\pi/2$ e $0 < \pi/2 < \pi$, então pelo Teorema 1.5.3 $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ é convexo.

Para emparelharmos as arestas de $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ geramos a seguinte regra que denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$:

Sejam $n = 12\eta - 8$ (número de arestas) e $c = (12\eta - 8)/4$ (número de ciclos,

com 4 vértices, a ser obtido). Então, para $1 \leq i \leq c-1$ e $j = 1, 2$, definimos as seguintes identificações de arestas:

$$\gamma_{a_{n-2}}(a_{n-2}) = a_n \text{ e } \gamma_{a_c}(a_c) = a_{n-1}; \quad (4.2)$$

$$\gamma_{a_i}(a_i) = a_{(n-2)-3i}; \quad (4.3)$$

$$\text{se } i \text{ for ímpar, então } \gamma_{a_{(n-2)-3i-j}}(a_{(n-2)-3i-j}) = a_{(n-2)-3(i-1)-j}. \quad (4.4)$$

Logo a regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$ nos dá um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, que denotaremos por $\Phi_{12\eta-8}$. E assim, enunciamos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1. *Sejam $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$, como descrito no início desta seção, e $\Phi_{12\eta-8}$ o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$. Então, $\Phi_{12\eta-8}$ gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{12\eta-8}$ tal que $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\eta-8}$ é uma superfície compacta orientável de gênero igual a $g = (3\eta - 1)/2$.*

Demonstração:

Veja que o emparelhamento $\Phi_{12\eta-8}$ formado pelas identificações das arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, dadas pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$, nos dá $c = (12\eta-8)/4$ ciclos de vértices. Por recorrência e observando o emparelhamento $\Phi_{12\eta-8}$, temos que os ciclos são dados pela seguinte regra:

Para $1 \leq i \leq c-1$, temos:

$$\text{se } i \text{ for ímpar, então } C_{v_i} = \{v_i, v_{n-1-3i}, v_{n-3(i+1)}, v_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.5)$$

$$\text{se } i \text{ for par, então } C_{v_i} = \{v_i, v_{n-1-3i}, v_{n-3(i-1)}, v_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.6)$$

$$\text{e } C_{v_c} = \{v_c, v_{c+1}, v_{n-1}, v_n\}. \quad (4.7)$$

Note que todos os ciclos são homogêneos com 4 vértices. Como cada vértice possui ângulo medindo $\pi/2$, assim a soma de todos os ângulos de cada ciclo será igual a 2π .

Do fato que estamos usando apenas isometrias hiperbólicas e que $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ possui finitas arestas, temos que as condições C_3'' e C_4 do Teorema de Poincaré (Teorema 3.1.12) são satisfeitas, e assim o Teorema de Poincaré nos garante que $\Phi_{12\eta-8}$ gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{12\eta-8}$ e $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}_{12\eta-8}$. Além disso, como não estamos usando isometrias parabólicas e $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ é um polígono com área finita (convexo e fechado) sem vértices ideais, então $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\eta-8}$ é uma superfície compacta orientável.

Para calcular o gênero da superfície $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\eta-8}$, usaremos a expressão 4.1 e assim temos

$$\frac{12\eta-8}{4} - \frac{12\eta-8}{2} + 1 = 2 - 2g, \text{ logo } g = \frac{3\eta-1}{2}. \quad (4.8)$$

Portanto, o emparelhamento $\Phi_{12\eta-8}$ nos dá uma superfície compacta orientável $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\eta-8}$ de gênero $g = (3\eta - 1)/2$. ■

Agora, construiremos exemplos de emparelhamentos para polígonos de 28 arestas (quando $\eta = 3$) e polígonos de 52 arestas (quando $\eta = 5$).

Exemplo 4.2.2 ($\eta = 3$). *Seja $\mathcal{P}_{28}$ um polígono hiperbólico em $\mathbb{D}^2$ com arestas, $a_1, a_2, \dots, a_{28}$, e vértices $v_1, v_2, \dots, v_{28}$. Como $n = 28$ e $c = 7$, usando a regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$, temos os seguintes pares de arestas emparelhadas:*

$$\{a_1, a_{23}\}, \{a_2, a_{20}\}, \{a_3, a_{17}\}, \{a_4, a_{14}\}, \{a_5, a_{11}\}, \{a_6, a_8\}, \{a_7, a_{27}\}, \{a_9, a_{12}\},$$

$$\{a_{10}, a_{13}\}, \{a_{15}, a_{18}\}, \{a_{16}, a_{19}\}, \{a_{21}, a_{24}\}, \{a_{22}, a_{25}\}, \{a_{26}, a_{28}\}.$$

Ou seja, pela regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$, temos

$$\gamma_{a_1}(a_1) = a_{23}, \gamma_{a_2}(a_2) = a_{20}, \gamma_{a_3}(a_3) = a_{17}, \gamma_{a_4}(a_4) = a_{14}, \gamma_{a_5}(a_5) = a_{11}, \gamma_{a_6}(a_6) = a_8,$$

$$\gamma_{a_7}(a_7) = a_{27}, \gamma_{a_9}(a_9) = a_{12}, \gamma_{a_{10}}(a_{10}) = a_{13}, \gamma_{a_{15}}(a_{15}) = a_{18}, \gamma_{a_{16}}(a_{16}) = a_{19},$$

$$\gamma_{a_{21}}(a_{21}) = a_{14}, \gamma_{a_{22}}(a_{22}) = a_{25}, \gamma_{a_{26}}(a_{26}) = a_{28}.$$

Veja a Figura 4.1.

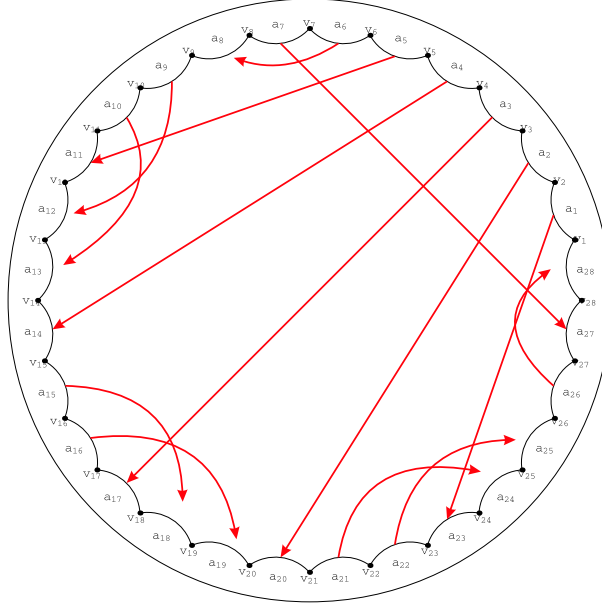


Figura 4.1: Polígono hiperbólico de 28 arestas com o emparelhamento Φ_{28} .

Logo obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{28} = \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}, \gamma_{a_3}, \gamma_{a_4}, \gamma_{a_5}, \gamma_{a_6}, \gamma_{a_7}, \gamma_{a_9}, \gamma_{a_{12}}, \gamma_{a_{10}}, \gamma_{a_{15}}, \gamma_{a_{16}}, \gamma_{a_{21}}, \gamma_{a_{22}}, \gamma_{a_{26}}\},$$

que nos dá 7 ciclos com 4 vértices cada, a saber:

$$C_{v_1} = \{v_1, v_{24}, v_{22}, v_{26}\}; \quad C_{v_2} = \{v_2, v_{23}, v_{25}, v_{21}\}; \quad C_{v_3} = \{v_3, v_{18}, v_{16}, v_{20}\};$$

$$C_{v_4} = \{v_4, v_{17}, v_{19}, v_{15}\};$$

$$C_{v_5} = \{v_5, v_{12}, v_{10}, v_{14}\}; C_{v_6} = \{v_6, v_{11}, v_{13}, v_9\}; C_{v_7} = \{v_7, v_8, v_{27}, v_{28}\}.$$

Portanto, pelo Teorema 4.2.1, o emparelhamento Φ_{28} gera uma superfície compacta orientável, além disso, como $\eta = 3$ então, pela expressão 4.8, temos

$$g = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2}, \quad \text{ou seja, } g = 4.$$

é o gênero da superfície obtida.

Exemplo 4.2.3 ($\eta = 5$). Considere $\mathcal{P}_{52}$ um polígono hiperbólico em $\mathbb{D}^2$ de arestas, $a_1, a_2, \dots, a_{52}$, e vértices $v_1, v_2, \dots, v_{52}$. Sendo $n = 52$ e $c = 13$, temos os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\begin{aligned} &\{a_1, a_{47}\}, \{a_2, a_{44}\}, \{a_3, a_{41}\}, \{a_4, a_{38}\}, \{a_5, a_{35}\}, \{a_6, a_{32}\}, \{a_7, a_{29}\}, \{a_8, a_{26}\}, \{a_9, a_{23}\}, \\ &\{a_{10}, a_{20}\}, \{a_{11}, a_{17}\}, \{a_{12}, a_{14}\}, \{a_{15}, a_{18}\}, \{a_{16}, a_{19}\}, \{a_{21}, a_{24}\}, \{a_{22}, a_{25}\}, \\ &\{a_{27}, a_{30}\}, \{a_{28}, a_{31}\}, \{a_{33}, a_{36}\}, \{a_{34}, a_{37}\}, \{a_{39}, a_{42}\}, \{a_{40}, a_{43}\}, \{a_{45}, a_{48}\}, \\ &\{a_{46}, a_{49}\}, \{a_{50}, a_{52}\}, \{a_{13}, a_{51}\}. \end{aligned}$$

Ou seja, pela regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{a_1}(a_1) &= a_{47}, \gamma_{a_2}(a_2) = a_{44}, \gamma_{a_3}(a_3) = a_{41}, \gamma_{a_4}(a_4) = a_{38}, \gamma_{a_5}(a_5) = a_{35}, \gamma_{a_6}(a_6) = a_{32}, \\ \gamma_{a_7}(a_7) &= a_{29}, \gamma_{a_8}(a_8) = a_{26}, \gamma_{a_9}(a_9) = a_{23}, \gamma_{a_{10}}(a_{10}) = a_{20}, \gamma_{a_{11}}(a_{11}) = a_{17}, \gamma_{a_{12}}(a_{12}) = a_{14}, \\ \gamma_{a_{13}}(a_{13}) &= a_{51}, \gamma_{a_{15}}(a_{15}) = a_{18}, \gamma_{a_{16}}(a_{16}) = a_{19}, \gamma_{a_{21}}(a_{21}) = a_{24}, \gamma_{a_{22}}(a_{22}) = a_{25}, \\ \gamma_{a_{27}}(a_{27}) &= a_{30}, \gamma_{a_{28}}(a_{28}) = a_{31}, \gamma_{a_{33}}(a_{33}) = a_{36}, \gamma_{a_{34}}(a_{34}) = a_{37}, \gamma_{a_{39}}(a_{39}) = a_{42}, \\ \gamma_{a_{40}}(a_{40}) &= a_{43}, \gamma_{a_{45}}(a_{45}) = a_{48}, \gamma_{a_{46}}(a_{46}) = a_{49}, \gamma_{a_{50}}(a_{50}) = a_{52}. \end{aligned}$$

Veja a Figura 4.2.

Assim obtemos o emparelhamento Φ_{52} formados por todas as identificações das arestas do polígono $\mathcal{P}_{52}$, dadas pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$. Este emparelhamento nos dá 13 ciclos com 4 vértices cada, a saber:

$$\begin{aligned} C_{v_1} &= \{v_1, v_{48}, v_{46}, v_{50}\}; C_{v_2} = \{v_2, v_{47}, v_{49}, v_{45}\}; C_{v_3} = \{v_3, v_{44}, v_{40}, v_{42}\}; \\ C_{v_4} &= \{v_4, v_{41}, v_{43}, v_{39}\}; C_{v_5} = \{v_5, v_{36}, v_{34}, v_{38}\}; C_{v_6} = \{v_6, v_{35}, v_{37}, v_{33}\}; \\ C_{v_7} &= \{v_7, v_{32}, v_{28}, v_{30}\}; C_{v_8} = \{v_8, v_{29}, v_{31}, v_{27}\}; C_{v_9} = \{v_9, v_{24}, v_{22}, v_{26}\}; \\ C_{v_{10}} &= \{v_{10}, v_{21}, v_{25}, v_{23}\}; C_{v_{11}} = \{v_{11}, v_{18}, v_{16}, v_{20}\}; C_{v_{12}} = \{v_{12}, v_{15}, v_{19}, v_{17}\}; \\ C_{v_{13}} &= \{v_{13}, v_{52}, v_{51}, v_{14}\}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 4.2.1, o emparelhamento Φ_{52} gera uma superfície compacta orientável, além disso, como $\eta = 5$ então, pela expressão 4.8, temos

$$g = \frac{3 \cdot 5 - 1}{2}, \quad \text{assim } g = 7,$$

é o gênero da superfície obtida.

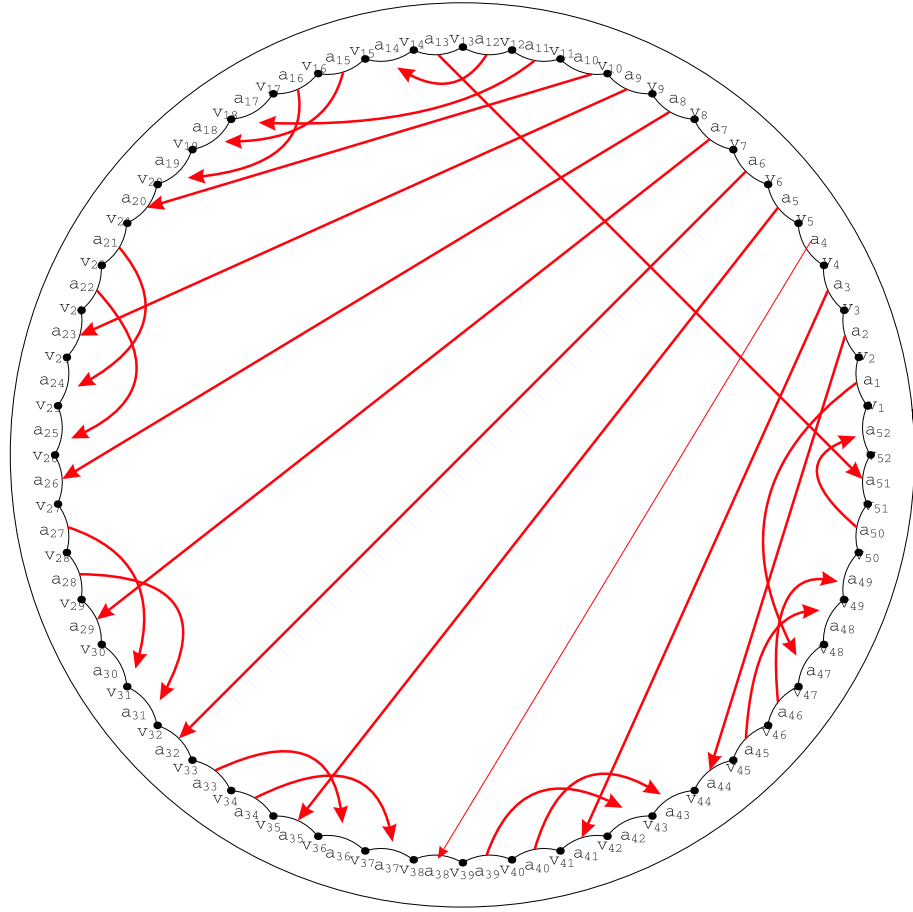


Figura 4.2: Polígono hiperbólico de 52 arestas com o emparelhamento Φ_{52} .

Na tabela abaixo temos o resumo dos resultados:

g	Arestas	Emparelhamento
4	28	Φ_{28}
7	52	Φ_{52}

4.3 Emparelhamentos Generalizados $\{12\mu - 12, 4\}$

Seja $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais $\pi/2$ e $12\mu - 12$ arestas, onde μ é par e $\mu \geq 2$. Este polígono é possível de ser construído, pois, somando todos os seus ângulos internos, temos

$$(12\mu - 12) \cdot \frac{\pi}{2} = (6\mu - 6)\pi < (12\mu - 14)\pi = [(12\mu - 12) - 2]\pi.$$

Assim, o Teorema 1.5.4 nos garante que $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ existe. Além disso como cada ângulo de $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ é igual a $\pi/2$ e $0 < \pi/2 < \pi$, então o Teorema 1.5.3 nos garante que $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ é um polígono convexo.

Para emparelharmos as arestas de $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ geramos a seguinte regra que denotamos por $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$:

Seja $n = 12\mu - 12$ e $c = (12\mu - 12)/4$ então, para $1 \leq i \leq c - 1$ e $j = 1, 2$, definimos a seguinte identificação de arestas:

$$\gamma_{a_{n-2}}(a_{n-2}) \mapsto a_n \text{ e } \gamma_{a_c}(a_c) \mapsto a_{n-1}; \quad (4.9)$$

$$\gamma_{a_i}(a_i) \mapsto a_{(n-2)-3i}; \quad (4.10)$$

$$\text{se } i \text{ for ímpar, então } \gamma_{a_{(n-2)-3i-j}}(a_{(n-2)-3i-j}) \mapsto a_{(n-2)-3(i-1)-j}. \quad (4.11)$$

Assim, a regra $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$ nos dá um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\mu-12}$, onde denotaremos por $\Phi_{12\mu-12}$. E assim, com o exposto acima enunciamos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.1. *Sejam $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$, como descrito no início desta seção, e $\Phi_{12\mu-12}$ o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\mu-12}$, obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$. Então $\Phi_{12\mu-12}$ gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{12\mu-12}$ tal que $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\mu-12}$ é uma superfície compacta orientável de gênero igual a $g = (3\mu - 2)/2$.*

Demonstração:

Veja que o emparelhamento $\Phi_{12\mu-12}$ formado pelas identificações das arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\mu-12}$, nos dá $c = (12\mu - 12)/4$ ciclos de vértices. Por recorrência e observando o emparelhamento $\Phi_{12\mu-12}$, temos que os ciclos são encontrados usando a seguinte regra:

Para $1 \leq i \leq c - 1$, temos:

$$\text{se } i \text{ for ímpar, então } C_{v_i} = \{v_i, v_{n-1-3i}, v_{n-3(i+1)}, v_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.12)$$

$$\text{se } i \text{ for par, então } C_{v_i} = \{v_i, v_{n-1-3i}, v_{n-3(i-1)}, v_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.13)$$

$$\text{e } C_{v_c} = \{v_c, v_{c+1}, v_{n-1}, v_n\}. \quad (4.14)$$

Logo, obtemos ciclos homogêneos, formados com 4 vértices. Como cada vértice possui ângulo interno igual a $\pi/2$, então a soma de todos os ângulos de cada ciclo é igual a 2π . Além disso, como estamos usando apenas isometrias hiperbólicas e $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ possui finitas arestas, então as condições C_3'' e C_4 do Teorema de Poincaré (Teorema 3.1.12) são satisfeitas. Assim, o Teorema de Poincaré nos garante que $\Phi_{12\mu-12}$ gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{12\mu-12}$ e $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}_{12\mu-12}$. Além disso, do fato que não estamos usando isometrias parabólicas e que $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ é um polígono com área finita (convexo e fechado) sem vértices ideais, então $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\mu-12}$ é uma superfície compacta orientável.

Para calcular o gênero da superfície $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\mu-12}$, usaremos a expressão 4.1 e assim temos

$$\frac{12\mu - 12}{4} - \frac{12\mu - 12}{2} + 1 = 2 - 2g, \quad \text{logo } g = \frac{3\mu - 2}{2}. \quad (4.15)$$

Portanto, o emparelhamento $\Phi_{12\mu-12}$ nos dá uma superfície compacta orientável $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{12\mu-12}$ de gênero $g = (3\mu - 2)/2$. ■

A seguir, construiremos exemplos de emparelhamentos para polígonos de 12 arestas (quando $\mu = 2$) e polígonos de 36 arestas (quando $\mu = 4$).

Exemplo 4.3.2 ($\mu = 2$). Seja $\mathcal{P}_{12}$ um polígono hiperbólico em $\mathbb{D}^2$ com arestas, $a_1, a_2, \dots, a_{12}$, e vértices $v_1, v_2, \dots, v_{12}$. Como $n = 12$ e $c = 3$, pela regra de emparelhamento dada acima, temos os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\{a_1, a_7\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_{11}\}, \{a_5, a_8\}, \{a_6, a_9\}, \{a_{10}, a_{12}\}.$$

Daí, a regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$ nos dá as seguintes identificações:

$$\gamma_{a_1}(a_1) = a_7, \gamma_{a_2}(a_2) = a_4, \gamma_{a_3}(a_3) = a_{11}, \gamma_{a_5}(a_5) = a_8, \gamma_{a_6}(a_6) = a_9, \gamma_{a_{10}}(a_{10}) = a_{12}.$$

Veja a Figura 4.3.

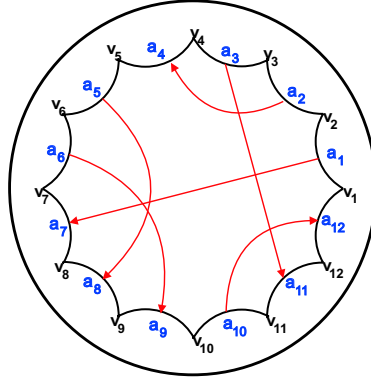


Figura 4.3: Polígono hiperbólico de 12 arestas com o emparelhamento Φ_{12} .

Logo obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{12} = \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}, \gamma_{a_3}, \gamma_{a_5}, \gamma_{a_6}, \gamma_{a_{10}}\},$$

que nos dá 3 ciclos com 4 vértices cada, a saber:

$$C_{v_1} = \{v_1, v_8, v_6, v_{10}\}; C_{v_2} = \{v_2, v_7, v_9, v_5\}; C_{v_3} = \{v_3, v_4, v_{11}, v_{12}\}.$$

Portanto, pelo Teorema 4.3.1, o emparelhamento Φ_{12} gera uma superfície compacta orientável e como $\mu = 2$ então, pela expressão 4.15, temos que o gênero da superfície obtida é

$$g = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2}, \text{ assim } g = 2.$$

Exemplo 4.3.3 ($\mu = 4$). Agora, seja $\mathcal{P}_{36}$ um polígono hiperbólico em $\mathbb{D}^2$ com arestas, $a_1, a_2, \dots, a_{36}$, e vértices $v_1, v_2, \dots, v_{36}$. Como $n = 36$ e $c = 9$, obtemos os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\{a_1, a_{31}\}, \{a_2, a_{28}\}, \{a_3, a_{25}\}, \{a_4, a_{22}\}, \{a_5, a_{19}\}, \{a_6, a_{16}\}, \{a_7, a_{13}\}, \{a_8, a_{10}\}, \{a_9, a_{35}\},$$

$$\{a_{11}, a_{14}\}, \{a_{12}, a_{15}\}, \{a_{17}, a_{20}\}, \{a_{18}, a_{21}\}, \{a_{23}, a_{26}\}, \{a_{24}, a_{27}\}, \{a_{29}, a_{32}\}, \\ \{a_{30}, a_{33}\}, \{a_{34}, a_{36}\}.$$

Ou seja, a regra de emparelhamento de arestas $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$ nos dá as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} \gamma_{a_1}(a_1) &= a_{31}, \gamma_{a_2}(a_2) = a_{28}, \gamma_{a_3}(a_3) = a_{25}, \gamma_{a_4}(a_4) = a_{22}, \gamma_{a_5}(a_5) = a_{19}, \\ \gamma_{a_6}(a_6) &= a_{16}, \gamma_{a_7}(a_7) = a_{13}, \gamma_{a_8}(a_8) = a_{10}, \gamma_{a_9}(a_9) = a_{35}, \gamma_{a_{11}}(a_{11}) = a_{14}, \\ \gamma_{a_{12}}(a_{12}) &= a_{15}, \gamma_{a_{17}}(a_{17}) = a_{20}, \gamma_{a_{18}}(a_{18}) = a_{21}, \gamma_{a_{23}}(a_{23}) = a_{26}, \\ \gamma_{a_{24}}(a_{24}) &= a_{27}, \gamma_{a_{29}}(a_{29}) = a_{32}, \gamma_{a_{30}}(a_{30}) = a_{33}, \gamma_{a_{34}}(a_{34}) = a_{36}. \end{aligned}$$

Veja a Figura 4.4.

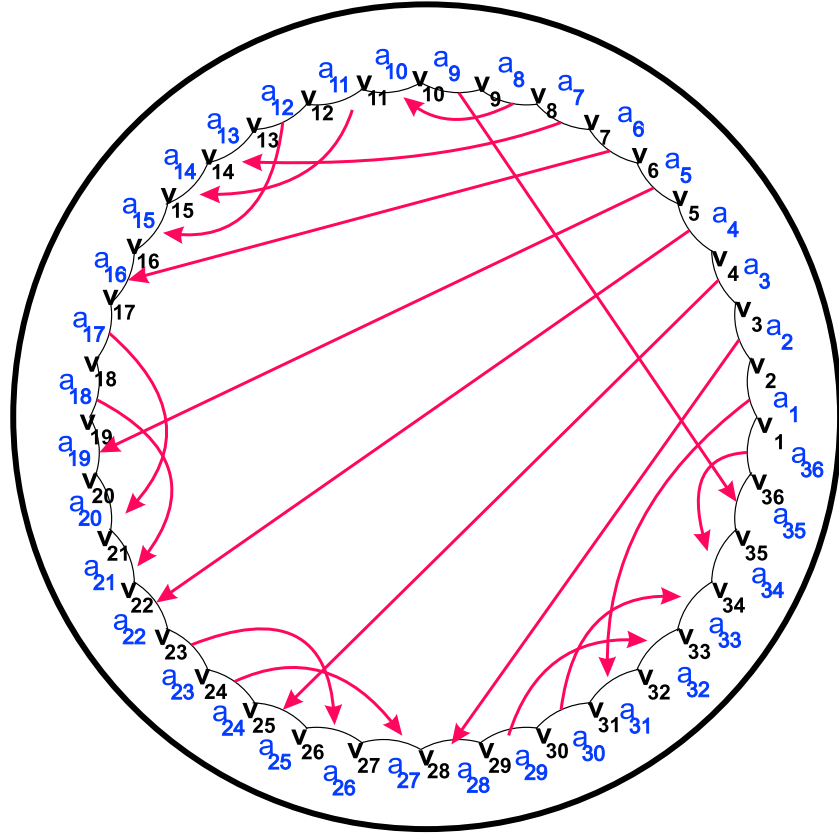


Figura 4.4: Polígono hiperbólico de 36 arestas com o emparelhamento Φ_{36} .

E assim, obtemos o emparelhamento Φ_{36} formado por todas as identificações das arestas do polígono $\mathcal{P}_{36}$, obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$. Este emparelhamento nos dá 9 ciclos com 4 vértices cada, a saber:

$$\begin{aligned} C_{v_1} &= \{v_1, v_{32}, v_{30}, v_{34}\}; \quad C_{v_2} = \{v_2, v_{31}, v_{33}, v_{29}\}; \quad C_{v_3} = \{v_3, v_{28}, v_{24}, v_{26}\}; \\ C_{v_4} &= \{v_4, v_{25}, v_{27}, v_{23}\}; \quad C_{v_5} = \{v_5, v_{22}, v_{18}, v_{20}\}; \quad C_{v_6} = \{v_6, v_{19}, v_{21}, v_{17}\}; \end{aligned}$$

$$C_{v_7} = \{v_7, v_{16}, v_{12}, v_{14}\}; C_{v_8} = \{v_8, v_{13}, v_{15}, v_{11}\}; C_{v_9} = \{v_9, v_{10}, v_{35}, v_{36}\};$$

Portanto, pelo Teorema 4.3.1, o emparelhamento Φ_{36} gera uma superfície compacta orientável, além disso, como $\mu = 4$ então, pela expressão 4.15, temos

$$g = \frac{3 \cdot 4 - 2}{2}, \quad \text{assim } g = 5.$$

é o gênero da superfície obtida.

Veja na tabela abaixo o resumo dos resultados:

g	Arestas	Emparelhamento
2	12	Φ_{12}
5	36	Φ_{36}

4.4 Empacotamento de Esferas

Um empacotamento de esfera no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ é uma família de bolas $\{B_i\}$, $B_i \subset \mathbb{H}^2$ de mesmo raio, disjuntas duas a duas. O principal objetivo nessa linha de estudo é obter a maior densidade possível de empacotamento, ou seja, queremos maximizar a proporção entre o volume das bolas e o volume total do recipiente que as contém. Alguns resultados a respeito de empacotamentos podem ser encontrados na obra de Lagrange [14].

Estamos interessados no empacotamento em $\mathbb{H}^2$. Sendo assim, considere o ladrilhamento do plano hiperbólico por polígonos regulares $\mathcal{P}$ de p arestas, com exatamente q polígonos encontrando-se em cada um dos vértices (ladrilhamento $\{p, q\}$). Tal ladrilhamento existe para quaisquer inteiros p, q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$.

Além disso, cada ladrilhamento determina um empacotamento de esfera. Para isto, basta considerarmos a maior circunferência inscrita C em cada um dos polígonos $\mathcal{P}$. Como os polígonos são isométricos, a densidade local está bem definida, e assim temos que a densidade de empacotamento de esferas, encontrada no texto [5] Capítulo 4, é dada por

$$ld_2(p, q) = \frac{vol_2(\text{circunferência inscrita})}{vol_2(\text{polígono})} = 2 \left(\frac{\cos(\pi/q) - \sin(\pi/p)}{\sin(\pi/p)} \right) \left(\frac{1}{p(1 - 2/q) - 2} \right)$$

A seguir calcularemos o valor da densidade de empacotamento de esferas para o ladrilhamento $\{12\eta - 8, 4\}$, onde verificamos que o valor é próximo do máximo $\frac{3}{\pi} = 0.95492965855137201461$.

η	Gênero	Densidade
3	4	0.885909
5	7	0.892603
7	10	0.895049
9	13	0.896317
11	16	0.897093
13	19	0.897617
15	22	0.897994
17	25	0.898279
19	28	0.898501
21	31	0.89868
23	34	0.898827
25	37	0.898949
27	40	0.899053

Agora calcularemos o valor da densidade de empacotamento de esferas para o ladrilhamento $\{12\mu - 12, 4\}$, onde verificamos que o valor também é próximo do máximo $\frac{3}{\pi} = 0.95492965855137201461$.

μ	Gênero	Densidade
2	2	0.866025
4	5	0.889143
6	8	0.893637
8	11	0.895553
10	14	0.896614
12	17	0.897289
14	20	0.897756
16	23	0.898098
18	26	0.898359
20	29	0.898565

4.5 Emparelhamentos de Arestas em Polígonos Hiperbólicos de 16 Arestas

Seja $\mathcal{P}_{16}^a$ um polígono hiperbólico em $\mathbb{D}^2$ com 16 arestas, $a_1, \dots, a_{16}$, e vértices $v_1, \dots, v_{16}$. Suponha que as arestas $\{a_1, a_8\}$, $\{a_2, a_{14}\}$, $\{a_3, a_6\}$, $\{a_4, a_{10}\}$, $\{a_5, a_{11}\}$, $\{a_7, a_{15}\}$, $\{a_9, a_{12}\}$, $\{a_{13}, a_{16}\}$ tenham o mesmo comprimento. Admitimos que cada um dos vértices $v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{15}$ possui ângulo interno

igual a $2\pi/3$ e cada um dos vértices v_3, v_7, v_{14}, v_{16} possui ângulo interno igual a $\pi/2$, como $0 < 2\pi/3 < \pi$ e $0 < \pi/2 < \pi$, então pelo Teorema 1.5.3, $\mathcal{P}_{16}^a$ é um polígono convexo. E se denotarmos o ângulo interno de v_i por θ_i , para $i = 1, \dots, 16$, temos

$$\theta_1 + \dots + \theta_{16} = 12 \cdot \frac{2\pi}{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 10\pi < 14\pi = (16 - 2)\pi.$$

Então, pelo Teorema 1.5.4, o polígono $\mathcal{P}_{16}^a$ é possível de ser construído.

Sendo assim, considere as seguintes identificações de arestas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8$ tais que,

$$\gamma_1(a_1) = a_8, \gamma_2(a_2) = a_{14}, \gamma_3(a_3) = a_6, \gamma_4(a_4) = a_{10}, \gamma_5(a_5) = a_{11}, \gamma_6(a_7) = a_{15},$$

$$\gamma_7(a_9) = a_{12}, \gamma_8(a_{13}) = a_{16},$$

como podemos ver na Figura 4.5.

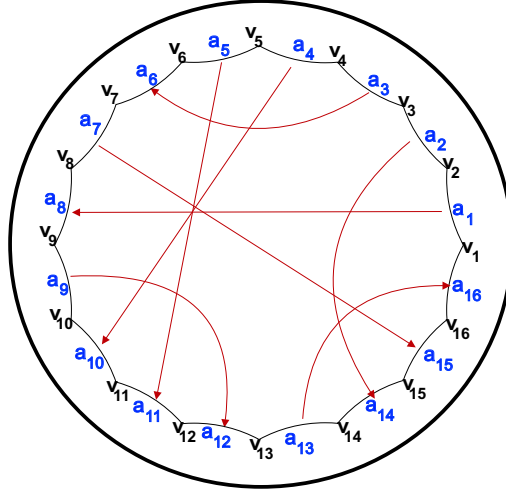


Figura 4.5: Polígono hiperbólico de 16 arestas com o emparelhamento Φ_{16}^a .

Logo obtemos o emparelhamento $\Phi_{16}^a = \{\gamma_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$.

Teorema 4.5.1. *Considere o polígono $\mathcal{P}_{16}^a$ como descrito acima. Seja Φ_{16}^a o emparelhamento do polígono $\mathcal{P}_{16}^a$ descrito na Figura 4.5. Então, Φ_{16}^a gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{16}^a$ tal que $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{16}^a$ é uma superfície compacta orientável de gênero 2.*

Demonstração:

Os ciclos de vértices correspondentes ao emparelhamento Φ_{16}^a no polígono $\mathcal{P}_{16}^a$, são:

$$C_{v_1} = \{v_1, v_9, v_{13}\}; \quad C_{v_2} = \{v_2, v_8, v_{15}\}; \quad C_{v_3} = \{v_3, v_{14}, v_{16}, v_7\}; \quad C_{v_4} = \{v_4, v_6, v_{11}\};$$

$$C_{v_5} = \{v_5, v_{10}, v_{12}\}.$$

Note que a soma dos seus ângulos em cada ciclo é igual a 2π . Além disso, $\mathcal{P}_{16}^a$ não possui vértices ideais e as isometrias que estamos usando são todas hiperbólicas,

então pelo Teorema de Poincaré (Teorema 3.1.12), temos que $\mathbb{G}_{16}^a$ é um grupo Fuchsiano e $\mathcal{P}_{16}^a$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}_{16}^a$. Ainda, do fato de não estarmos usando isometrias parabólicas e como $\mathcal{P}_{16}^a$ possui área finita (convexo e limitado) sem vértices ideais, então $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{16}^a$ é uma superfície compacta orientável.

Para calcular o gênero da superfície obtida, veja que $V = 5$ (quantidade de ciclos), $A = \frac{16}{2} = 8$ e $F = 1$, então pela equação (4.1), temos:

$$5 - 8 + 1 = 2 - 2g \text{ e daí } g = 2$$

Logo $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{16}^a$ é uma superfície compacta orientável de gênero 2. ■

Agora, seja $\mathcal{P}_{16}^b$ um outro polígono de 16 arestas em $\mathbb{D}^2$, com arestas $a_1, \dots, a_{16}$ e vértices $v_1, \dots, v_{16}$. Vamos supor que as arestas $\{a_1, a_{10}\}, \{a_2, a_6\}, \{a_3, a_9\}, \{a_4, a_{12}\}, \{a_5, a_{15}\}, \{a_7, a_{14}\}, \{a_8, a_{11}\}, \{a_{13}, a_{16}\}$ tenham o mesmo comprimento. Agora, suponha que cada um dos vértices, $v_1, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}$ possui ângulo interno igual a $2\pi/5$ e cada um dos vértices $v_2, v_3, v_6, v_7, v_{10}, v_{15}$ possui ângulo interno igual a $\pi/3$, assim pelo Teorema 1.5.3, $\mathcal{P}_{16}^b$ é um polígono convexo. Agora, se denotarmos o ângulo interno de v_i por θ_i , para $i = 1, \dots, 16$, temos

$$\theta_1 + \dots + \theta_{16} = 10 \cdot \frac{2\pi}{5} + 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 6\pi < 14\pi = (16 - 2)\pi.$$

Então, pelo Teorema 1.5.4, o polígono $\mathcal{P}_{16}^b$ é possível de ser construído.

Sendo assim, considere as seguintes isometrias $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_8$ tais que,

$$\sigma_1(a_1) = a_{10}, \sigma_2(a_2) = a_6, \sigma_3(a_3) = a_9, \sigma_4(a_4) = a_{12}, \sigma_5(a_5) = a_{15},$$

$$\sigma_6(a_7) = a_{14}, \sigma_7(a_8) = a_{11}, \sigma_8(a_{13}) = a_{16}.$$

Veja a Figura 4.6.

Daí, obtemos o emparelhamento $\Phi_{16}^b = \{\sigma_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$.

Teorema 4.5.2. *Considere o polígono $\mathcal{P}_{16}^b$ descrito anteriormente. Seja Φ_{16}^b o emparelhamento do polígono $\mathcal{P}_{16}^b$ descrito na Figura 4.5. Então, Φ_{16}^b gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{16}^b$ tal que $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{16}^b$ é uma superfície compacta orientável de gênero 3.*

Demonstração:

Note que os ciclos de vértices correspondentes ao emparelhamento Φ_{16}^b no polígono $\mathcal{P}_{16}^b$, são:

$$C_{v_1} = \{v_1, v_{11}, v_9, v_4, v_{13}\}; C_{v_2} = \{v_2, v_{10}, v_3, v_6, v_{15}, v_7\}; C_{v_5} = \{v_5, v_{12}, v_8, v_{14}, v_{16}\}.$$

Note também que a soma dos seus ângulos em cada ciclo é igual a 2π . Além disso, como $\mathcal{P}_{16}^b$ não possui vértices ideais e as isometrias que estamos usando são todas hiperbólicas, então pelo Teorema de Poincaré (Teorema 3.1.12), temos que $\mathbb{G}_{16}^b$ é

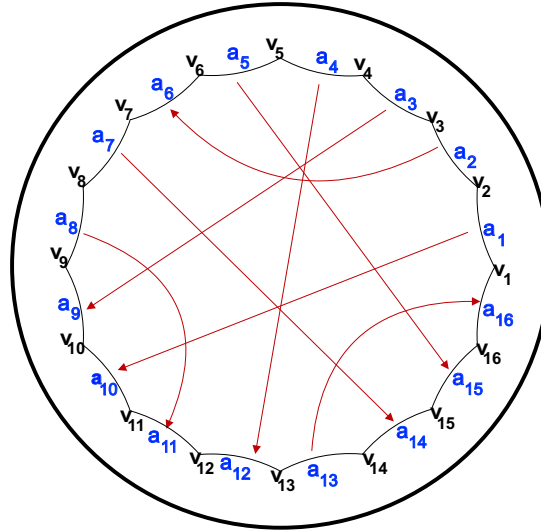


Figura 4.6: Polígono hiperbólico de 16 arestas com o emparelhamento Φ_{16}^b .

um grupo Fuchsiano e $\mathcal{P}_{16}^b$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}_{16}^b$. Como não estamos usando isometrias parabólicas e $\mathcal{P}_{16}^b$ possui área finita (convexo e limitado), então $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{16}^b$ é uma superfície compacta orientável.

Para calcular o gênero da superfície obtida, veja que $V = 3$, $A = \frac{16}{2} = 8$ e $F = 1$, então pela equação (4.1), temos:

$$3 - 8 + 1 = 2 - 2g \text{ e daí } g = 3$$

Logo $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{16}^b$ é uma superfície compacta orientável de gênero 3. ■

Também temos o conhecido emparelhamento Φ_{4g} associado ao ladrilhamento $\{4g, 4g\}$ dado por

$$\{\sigma_i, \sigma'_i\} \quad e \quad \{\tau_i, \tau'_i\}$$

onde $\sigma_i, \sigma'_i, \tau_i, \tau'_i$ são as arestas dos polígonos para $i \in \{1, 2, \dots, 4g\}$ e g é o gênero da superfície associada. Para o caso $g = 4$ temos um polígono com 16 arestas. Resumimos os resultados dessa seção na seguinte tabela:

g	Arestas	Emparelhamento
2	16	Φ_{16}^a
3	16	Φ_{16}^b
4	16	$\Phi_{4g}, \quad g = 4$

Além dos emparelhamentos acima, também fizemos os seguintes emparelhamentos para polígonos de 16 arestas:

- 1) Para os seguintes pares de arestas emparelhadas

$$\{a_1, a_8\}, \{a_2, a_{13}\}, \{a_3, a_{11}\}, \{a_4, a_{12}\}, \{a_5, a_{15}\}, \{a_6, a_{10}\}, \{a_7, a_{14}\}, \{a_9, a_{16}\}$$

temos os seguintes ciclos

$$C_{v_1} = \{v_1, v_9\}, C_{v_2} = \{v_2, v_8, v_{14}\}, C_{v_3} = \{v_3, v_{13}, v_4, v_{11}, v_6, v_{15}\},$$

$$C_{v_5} = \{v_7, v_{10}, v_{16}, v_5, v_{12}\}.$$

Obtemos assim, uma superfície de gênero $g = 3$.

2) Dos seguintes pares de arestas emparelhadas

$$\{a_1, a_5\}, \{a_2, a_{10}\}, \{a_3, a_{15}\}, \{a_4, a_{12}\}, \{a_6, a_{14}\}, \{a_7, a_{13}\}, \{a_8, a_{11}\}, \{a_9, a_{16}\}$$

temos os seguintes ciclos

$$C_{v_1} = \{v_1, v_6, v_{15}, v_4, v_{13}, v_8, v_{12}, v_5, v_2, v_{11}, v_9\}, C_{v_3} = \{v_3, v_{10}, v_{16}\},$$

$$C_{v_7} = \{v_7, v_{14}\},$$

gerando uma superfície de gênero $g = 3$.

3) Para os seguintes pares de arestas emparelhadas

$$\{a_1, a_8\}, \{a_2, a_7\}, \{a_3, a_6\}, \{a_4, a_{12}\}, \{a_5, a_{13}\}, \{a_9, a_{16}\}, \{a_{10}, a_{14}\}, \{a_{11}, a_{15}\},$$

temos os seguintes ciclos

$$C_{v_1} = \{v_1, v_9\}, C_{v_2} = \{v_2, v_8\}, C_{v_3} = \{v_3, v_7\}, C_{v_4} = \{v_4, v_6, v_{13}\},$$

$$C_{v_5} = \{v_5, v_{12}, v_{15}, v_{10}, v_{16}, v_{11}, v_{13}\}.$$

Assim, obtemos uma superfície de gênero $g = 2$.

3) Para os seguintes pares de arestas emparelhadas

$$\{a_1, a_8\}, \{a_2, a_8\}, \{a_3, a_6\}, \{a_4, a_{10}\}, \{a_5, a_{11}\}, \{a_7, a_{15}\}, \{a_9, a_{12}\}, \{a_{13}, a_{16}\},$$

temos os seguintes ciclos

$$C_{v_1} = \{v_1, v_9, v_{13}\}, C_{v_2} = \{v_2, v_8, v_{15}\}, C_{v_3} = \{v_3, v_{14}, v_{16}, v_7\}, C_{v_4} = \{v_4, v_6, v_{11}\},$$

$$C_{v_5} = \{v_5, v_{10}, v_{12}\},$$

gerando uma superfície de gênero $g = 2$.

Agora vamos construir emparelhamentos de arestas em polígonos hiperbólicos de 18 arestas.

4.6 Emparelhamentos de Arestas em Polígonos Hiperbólicos de 18 Arestas

Seja $\mathcal{P}_{18}^a$ um polígono com arestas $a_1, \dots, a_{18}$ e vértices $v_1, \dots, v_{18}$. suponha que as arestas $\{a_1, a_9\}, \{a_2, a_8\}, \{a_3, a_7\}, \{a_4, a_{11}\}, \{a_5, a_{12}\}, \{a_6, a_{16}\}, \{a_{18}, a_{10}\}, \{a_{13}, a_{15}\}, \{a_{14}, a_{17}\}$ tenham o mesmo comprimento. Admitiremos que cada um dos vértices $v_1, v_2, v_3, v_8, v_9, v_{10}$ possui ângulo interno igual a π e cada um dos vértices $v_4, v_{18}, v_5, v_6, v_7, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}$ possui ângulo interno igual a $\pi/6$, assim pelo Teorema 1.5.3, temos que $\mathcal{P}_{18}^a$ será um polígono convexo. Ainda, se denotarmos o ângulo interno de v_i por θ_i , para $i = 1, \dots, 18$, temos

$$\theta_1 + \dots + \theta_{18} = 6 \cdot \pi + 12 \cdot \frac{\pi}{6} = 8\pi < 16\pi = (18 - 2)\pi.$$

Assim, pelo Teorema 1.5.4, temos que o polígono $\mathcal{P}_{18}^a$ é possível de ser construído.

Considere as seguintes isometrias $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ tais que,

$$\lambda_1(a_1) = a_9, \lambda_2(a_2) = a_8, \lambda_3(a_3) = a_7, \lambda_4(a_4) = a_{11}, \lambda_5(a_5) = a_{12}, \lambda_6(a_6) = a_{16},$$

$$\lambda_7(a_{18}) = a_{10}, \lambda_8(a_{13}) = a_{15}, \lambda_9(a_{14}) = a_{17}.$$

Como podemos ver na Figura 4.7.

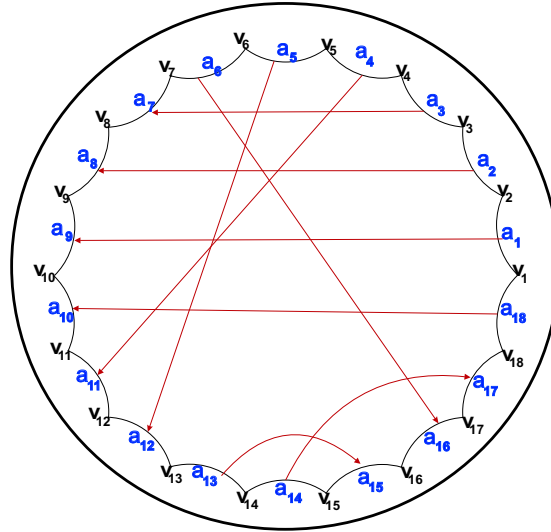


Figura 4.7: Polígono hiperbólico de 18 arestas com o emparelhamento Φ_{18}^a

Portanto, obtemos o emparelhamento $\Phi_{18}^a = \{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq 9\}$.

Teorema 4.6.1. *Considere o polígono $\mathcal{P}_{18}^a$ descrito anteriormente. Seja Φ_{18}^a o emparelhamento do polígono $\mathcal{P}_{18}^a$ descrito na Figura 4.7. Então, Φ_{18}^a gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{18}^a$ tal que $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{18}^a$ é uma superfície compacta orientável de gênero 3.*

Demonstração:

Veja que os ciclos de vértices correspondentes ao emparelhamento Φ_{18}^a no polígono $\mathcal{P}_{18}^a$, são:

$$\begin{aligned} C_{v_1} &= \{v_1, v_{10}\}; \quad C_{v_2} = \{v_2, v_9\}; \quad C_{v_3} = \{v_3, v_8\}; \\ C_{v_4} &= \{v_4, v_7, v_{16}, v_{13}, v_5, v_{11}, v_{18}, v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_6, v_{12}\}. \end{aligned}$$

Note que a soma dos seus ângulos em cada ciclo é igual a 2π . Além disso, $\mathcal{P}_{18}^a$ não possui vértices ideais e as isometrias são todas hiperbólicas, então pelo Teorema de Poincaré (Teorema 3.1.12), temos que $\mathbb{G}_{18}^a$ é um grupo Fuchsiano e, portanto, $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{18}^a$ é uma superfície compacta orientável.

Para calcular o gênero da superfície, veja que $V = 4$ (quantidade de ciclos), $A = \frac{16}{2} = 8$ e $F = 1$, então pela equação (4.1), temos:

$$4 - 8 + 1 = 2 - 2g \text{ e daí } g = 3$$

Logo $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{18}^a$ é uma superfície compacta orientável de gênero 3. ■

Agora, seja $\mathcal{P}_{18}^b$ um polígono regular com 18 arestas $a_1, \dots, a_{18}$ e vértices $v_1, \dots, v_{18}$ com ângulos internos iguais a $2\pi/9$. Assim, se denotarmos os ângulos internos de $\mathcal{P}_{18}^b$ por θ_i , para $i = 1, \dots, 18$, temos

$$\theta_1 + \dots + \theta_{18} = 18 \cdot \frac{2\pi}{9} = 4\pi < 16\pi = (18 - 2)\pi$$

Portanto, pelo Teorema 1.5.4, o polígono $\mathcal{P}_{18}^b$ é possível de ser construído. Como $0 < 2\pi/9 < \pi$, então pelo Teorema 1.5.3 $\mathcal{P}_{18}^b$ é um polígono convexo.

Em seguida, considere as seguintes isometrias $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_9$ tais que

$$\begin{aligned} \beta_1(a_1) &= a_{10}, \quad \beta_2(a_2) = a_{11}, \quad \beta_3(a_3) = a_{12}, \quad \beta_4(a_4) = a_{13}, \quad \beta_5(a_5) = a_{14}, \quad \beta_6(a_6) = a_{15}, \\ \beta_7(a_7) &= a_{16}, \quad \beta_8(a_8) = a_{17}, \quad \beta_9(a_9) = a_{18}. \end{aligned}$$

Veja a Figura 4.8.

Logo obtemos o emparelhamento $\Phi_{18}^b = \{\beta_i \mid 1 \leq i \leq 9\}$.

Teorema 4.6.2. *Considere o polígono $\mathcal{P}_{18}^b$ descrito acima. Seja Φ_{18}^b o emparelhamento do polígono $\mathcal{P}_{18}^b$ descrito na Figura 4.7. Então, Φ_{18}^b gera um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}_{18}^b$ tal que $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{18}^b$ é uma superfície compacta orientável de gênero 4.*

Demonstração:

Os ciclos de vértices correspondentes ao emparelhamento Φ_{18}^b no polígono $\mathcal{P}_{18}^b$, são:

$$C_{v_1} = \{v_1, v_{11}, v_3, v_{13}, v_5, v_{15}, v_7, v_{17}, v_9\}; \quad C_{v_2} = \{v_2, v_{12}, v_4, v_{14}, v_6, v_{16}, v_8, v_{18}, v_{10}\}.$$

Note que a soma dos seus ângulos em cada ciclo é igual a 2π . Além disso, $\mathcal{P}_{18}^b$ não possui vértices ideais e as isometrias são todas hiperbólicas, então pelo Teorema de

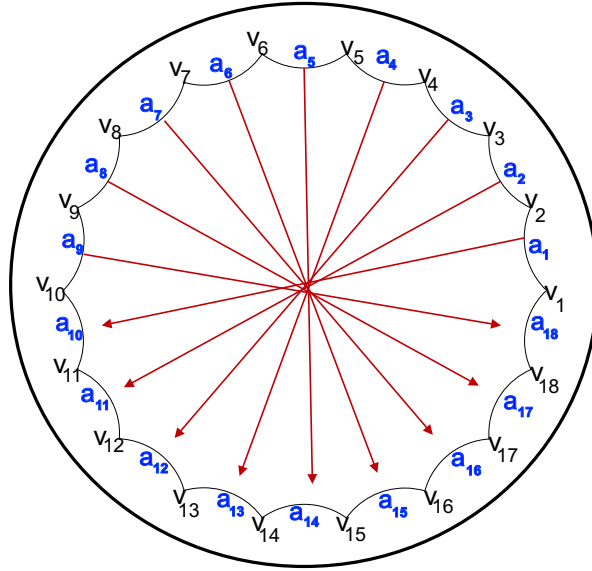


Figura 4.8: Polígono hiperbólico de 18 arestas com o emparelhamento Φ_{18}^b .

Poincaré (Teorema 3.1.12), $\mathbb{G}_{18}^b$ é um grupo Fuchsiano e $\mathcal{P}_{18}^b$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}_{18}^b$. Como $\mathcal{P}_{18}^b$ possui área finita (convexo e limitado) e não estamos usando isometrias parabólicas, então $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{18}^b$ é uma superfície compacta orientável.

Para calcular o gênero da superfície, veja que $V = 2$, $A = \frac{16}{2} = 8$ e $F = 1$, então pela equação (4.1), temos:

$$2 - 8 + 1 = 2 - 2g \text{ e daí } g = 4$$

Logo $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}_{18}^b$ é uma superfície compacta orientável de gênero 4. ■

Podemos construir um emparelhamento Φ_{18}^c para um polígono de 18 arestas dando gênero 2. Basta associarmos as arestas da seguinte forma:

$$\{a_1, a_{10}\}, \{a_2, a_{11}\}, \{a_6, a_{15}\}, \{a_3, a_{18}\}, \{a_4, a_7\}, \{a_8, a_{17}\}, \{a_{12}, a_9\}, \{a_{13}, a_{16}\}, \{a_5, a_{14}\},$$

Na tabela abaixo temos o resumo dos resultados:

g	Arestas	Emparelhamento
2	18	Φ_{18}^c
3	18	Φ_{18}^a
4	18	Φ_{18}^b

Apêndice A

Grupos Fuchsianos Abelianos e Grupo Elementar

Este apêndice é referente ao Capítulo 2, mais especificamente a Seção 2.2. O apêndice possui duas seções, na primeira apresentaremos os *grupos fuchsianos abelianos* e na segunda apresentaremos os *grupos elementares*, como um complemento da Seção 2.2. Como no Capítulo 2, este texto foi baseado nas referências [11] e [12].

A.1 Grupos Fuchsianos Abelianos

Dados um grupo G e g, h elementos de $\mathbb{G}$, o **comutador** de g e h , denotamos por $[g, h]$, é o elemento $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. O **centralizador** de g em G , denotado por $\mathcal{C}_G(g)$, definimos por

$$\mathcal{C}_G(g) = \{h \in G \mid [g, h] = e\},$$

onde e é o elemento neutro de G . Assim o **centralizador** de g em G é o conjunto dos elementos de G que comutam com g .

Observe que um subgrupo $H \subset G$ é **abeliano** se, e somente se, $H \subset \mathcal{C}_G(h)$, para todo h em H .

Lema A.1.1. *Sejam G um grupo agindo em um espaço X , $g \in G$ e F_g o subconjunto de pontos fixos de g . Se $h \in \mathcal{C}_G(g)$, então $h(F_g) \subset F_g$.*

Demonstração:

Seja $x \in F_g$, assim

$$h(x) = h(g(x)) = (hg)(x) = (gh)(x) = g(h(x)).$$

Logo, $h(x)$ é um ponto fixo de g , ou seja, $h(x) \in F_g$. ■

Assim, estudaremos os centralizadores dos elementos parabólicos, hiperbólicos e elípticos de $PSL(2, \mathbb{R})$. Notemos que, para quaisquer $g, h \in G$, temos

$$\mathcal{C}_G(hgh^{-1}) = h\mathcal{C}_G(g)h^{-1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{C}_G(hgh^{-1}) &\Leftrightarrow x(hgh^{-1})x^{-1} = hgh^{-1} \\ &\Leftrightarrow (h^{-1}xh)gh^{-1}x^{-1}h = g \\ &\Leftrightarrow (h^{-1}xh)g(h^{-1}xh)^{-1} = g \\ &\Leftrightarrow h^{-1}xh \in \mathcal{C}_G(g) \\ &\Leftrightarrow x \in h\mathcal{C}_G(g)h^{-1}. \end{aligned}$$

$$(hgh^{-1})(hkh^{-1}) = h(gk)h^{-1} \text{ e } h(gk)h^{-1} = h(kg)h^{-1} \Leftrightarrow k \in \mathcal{C}_G(g).$$

Como vimos no Capítulo 1 Seção, todo elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ é conjugado a alguma das transformações γ_k, γ_t ou γ_θ e assim, para estudarmos o centralizador de elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ basta estudarmos os centralizadores de γ_k, γ_t e γ_θ .

Consideremos o caso elíptico. Temos que $i \in \mathbb{H}^2$ é o único ponto fixo de γ_{θ_0} , onde γ_{θ_0} é determinada pela matriz

$$A_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Veja que, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a transformação γ_θ comuta com γ_{θ_0} . Como elas são as únicas que fixam o ponto i , então

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(\gamma_{\theta_0}) &= \{\gamma_\theta \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ &= \left\{ z \mapsto \frac{\cos(\theta_0)z + \sin(\theta_0)}{-\sin(\theta_0)z + \cos(\theta_0)} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \\ &= \{\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid F_\gamma = F_{\gamma_{\theta_0}}\}. \end{aligned}$$

Para o caso parabólico, consideremos $\gamma_{t_0}(z) = z + t_0$. Assim ∞ é o único ponto fixo de γ_{t_0} . Se γ e γ_{t_0} comutam, assim ∞ deve ser o ponto fixo para $\gamma(z) = az + b$. Mas,

$$\gamma \circ \gamma_{t_0}(z) = \gamma(z + t_0) = az + (at_0 + b) \text{ e } \gamma_{t_0} \circ \gamma(z) = az + (t_0 + b),$$

logo

$$\gamma \circ \gamma_{t_0}(z) = \gamma_{t_0} \circ \gamma(z) \Leftrightarrow a = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(\gamma_{t_0}) = \{\gamma_t \mid t \in \mathbb{R}\} &= \{z \mapsto z + t \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid F_\gamma = F_{\gamma_{t_0}}\}. \end{aligned}$$

E por fim, no caso hiperbólico, considere $\gamma_{k_0}(z) = e^{k_0}z$. Os pontos fixos de γ_{k_0} são 0 e ∞ . Como acabamos de ver no caso parabólico, se $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ fixa o ponto ∞ devemos ter que $\gamma(z) = az + b$. Mas quando tivermos 0 como ponto fixo, devemos ter $b = 0$. Se colocarmos $k = lna$, obtemos por verificação direta que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(\gamma_{k_0}) &= \{\gamma_k \mid k \in \mathbb{R}\} = \{z \mapsto z + e^k \mid k \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid F_\gamma = F_{\gamma_{k_0}}\}.\end{aligned}$$

E com isso, podemos enunciar as seguintes proposições:

Proposição A.1.2. *Dois elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ diferentes da identidade comutam se, e somente se, eles têm o mesmo conjunto de pontos fixos.*

Proposição A.1.3. *O centralizador de um elemento elíptico (respectivamente parabólico, hiperbólico) de $PSL(2, \mathbb{R})$ é o conjunto de todos os elementos elípticos (respectivamente parabólicos, hiperbólicos) que possuem o mesmo conjunto de pontos fixos, além, é claro da transformação identidade.*

O próximo resultado encontra-se demonstrado na referência [12] página 35.

Teorema A.1.4. *Seja G um grupo fuchsiano no qual todos os seus elementos, diferentes da identidade, possuem o mesmo conjunto de pontos fixos. Então G é cíclico.*

Teorema A.1.5. *Todo grupo fuchsiano abeliano é cíclico.*

Demonstração:

Pela Proposição A.1.2, temos dois elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ diferentes da identidade que comutam se, e somente se, eles têm o mesmo conjunto de pontos fixos. Então pelo Teorema A.1.4, temos que todo grupo fuchsiano abeliano é cíclico. ■

A.2 Grupos Elementares

Os exemplos mais simples e também mais importantes de grupos fuchsianos, são os grupos fuchsianos cíclicos, sejam gerados por elementos elípticos, parabólicos ou hiperbólicos. Como já sabemos, a um grupo fuchsiano cíclico podemos associar ao menos um ponto fixo por todos seus elementos, independente de ser ponto ordinário ou ideal. Em particular, a órbita de um ponto fixo é finita. Um grupo gerado por isometrias elípticas determina apenas órbitas finitas. Mas este não é o caso para grupos gerados por isometrias parabólicas ou hiperbólicas. Assim, podemos enunciar a seguinte definição.

Definição A.2.1. *Um subgrupo G em $PSL(2, \mathbb{R})$ é dito um **grupo elementar** se existe $z \in \overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ tal que a órbita $G(z)$ é finita.*

Os próximos resultados encontram-se demonstrado na referência [12] página 37 e 38.

Teorema A.2.2. *Seja $\mathbb{G}$ um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ contendo apenas elementos elípticos (além da identidade). Então todos os elementos de $\mathbb{G}$ possuem um ponto fixo e, portanto, $\mathbb{G}$ é grupo cíclico, abeliano e elementar.*

O próximo teorema descreveremos todos os grupos fuchsianos elementares.

Teorema A.2.3. *Todo grupo fuchsiano elementar $\mathbb{G}$ ou é cíclico ou é conjugado em $PSL(2, \mathbb{R})$ ao grupo gerado pelas transformações $z \mapsto e^k z$ ($k > 0$) e $z \mapsto -\frac{1}{z}$.*

Teorema A.2.4. *Seja $\mathbb{G}$ grupo não elementar. Então $\mathbb{G}$ possui elementos hiperbólicos.*

Demonstração:

Seja $\mathbb{G}$ grupo fuchsianos não elementar e suponha que $\mathbb{G}$ possua elementos hiperbólicos. Não pode ocorrer de todos os elementos de $\mathbb{G}$ serem elípticos, pois neste caso, pelo Teorema A.2.2, não poderíamos ter $\mathbb{G}$ ao mesmo tempo discreto e não elementar. Então, temos $\mathbb{G}$ deve possuir elementos parabólicos, fixando um ponto ideal, digamos ∞ . Assim, os elementos são forma $\gamma(z) = z + t$. Então, seja $\nu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ um elemento qualquer de $\mathbb{G}$ diferente da identidade. Assim, temos

$$\begin{aligned} \gamma^n \circ \nu(z) &= \gamma^n \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{az+b}{cz+d} + nt \\ &= \frac{(a+ntc)z + (b+ntb)}{cz+d}. \end{aligned}$$

Logo

$$Tr^2(\gamma^n \circ \nu(z)) = (a + d + ntc)^2.$$

Supondo que $\mathbb{G}$ não possui elementos hiperbólicos, então

$$(a + d + ntc)^2 \leq 4,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, que só é possível quando $c = 0$. Mas neste caso temos que $\nu(\infty) = \infty$, como ν foi tomado arbitrariamente em $\mathbb{G}$, temos que $\mathbb{G}$ é elementar, que é uma contradição. Portanto, $\mathbb{G}$ possui um elemento hiperbólico. ■

Apêndice B

Uma Nova Abordagem do Teorema de Poincaré

O nosso interesse em criar esse apêndice, está em apresentarmos uma outra maneira mais intuitiva e topológica de demonstrar o Teorema de Poincaré. Além disso, apresentamos uma seção sobre **ladrilhamento triangular** que explica o nosso interesse no plano hiperbólico. Para realizar este estudo, nos baseamos no texto [22].

B.1 Outra Forma de Demonstrar o Teorema de Poincaré

Seja X o Plano Esférico, ou o Plano Euclidiano, ou o Plano Hiperbólico. Para sermos capazes de exprimir condições para um polígono em X seja um domínio fundamental, subdividimos a fronteira de um polígono fundamental convexo $\mathcal{P}$ em um número finito de pontos, que chamaremos de vértices e os segmentos entre os vértices chamaremos de arestas, coincidindo com a aresta de um polígono adjacente de $\mathcal{P}$. Um polígono fundamental convexo $\mathcal{P}$ de um grupo Fuchsiano $\mathbb{G}$ pode ser dado pelas arestas nas quais coincidem com arestas de seus vizinhos, e se $\mathcal{P}$ for compacto, então o número de arestas deve ser finito, senão $\mathcal{P}$ terá infinitas vizinhanças e assim, $\mathbb{G}$ não seria um grupo descontínuo (veja a referência [22] Seção 5.8).

A seguir, enunciaremos condições geométricas para garantir que um polígono seja um domínio fundamental. Mas antes, enunciaremos um resultados essencial nessa nova abordagem. Uma versão deste resultado, pode ser encontrado no texto [22], Capítulo 2.

Teorema B.1.1 (Teorema de Killing-Hopf). : *Sejam $X = \mathbb{R}^2, S^2, \mathbb{H}^2$ e $\mathbb{G}$ um grupo*

descontínuo agindo sobre X . Então, toda superfície completa e conexa de X é da forma $X/\mathbb{G}$.

As condições geométricas para que um polígono seja um domínio fundamental são:

Condições de arestas e ângulos: se um polígono compacto $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental para um grupo $\mathbb{G}$ de isometrias preservando a orientação de X então:

- I) para cada aresta s em $\mathcal{P}$ existe apenas uma outra aresta s' em $\mathcal{P}$ tal que, $s' = g_s(s)$ onde $g_s \in \mathbb{G}$;
- II) se cada aresta s é identificada com uma aresta s' , então cada conjunto de vértices identificados (ciclos de vértices) de $\mathcal{P}$ tem a soma dos ângulos correspondentes aos seus vértices igual a $\frac{2\pi}{p}$, para algum $p \in \mathbb{Z}$, ou seja, é uma alíquota de 2π .

Demonstração: Demonstração na referência [22] página 170. ■

Seja g_i , $i = 1, \dots, n$ um emparelhamento de arestas de um polígono compacto $\mathcal{P}$ em X satisfazendo as condições de arestas e ângulos (lembrando que $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2, S^2$). Devemos mostrar que se $\mathbb{G}$ é um grupo gerado por $g_1, \dots, g_n$, então $\mathcal{P}$ será um domínio fundamental da ação de $\mathbb{G}$ em X . O problema é mostrar que X realmente gera um ladrilhamento por cópias de $\mathcal{P}$ por elementos de $\mathbb{G}$. Em vez disso, vamos construir um “ladrilhamento corretamente” da superfície $X_{\mathcal{P}}$, associando ladrilhos com elementos de $\mathbb{G}$ e conectá-los de acordo com a estrutura de $\mathbb{G}$. Quando o ladrilhamento de $X_{\mathcal{P}}$ é levado para X para cobrir $X_{\mathcal{P}}$ pelo *Teorema de Killing-Hopf*, descobrimos que o ladrilho $(g)\mathcal{P}$ associado formalmente com $g \in \mathbb{G}$ é realmente $g\mathcal{P}$. Daí, $\mathcal{P}$ é um polígono fundamental para $\mathbb{G}$.

Para construirmos $X_{\mathcal{P}}$, para cada $g \in \mathbb{G}$ tome uma cópia de $(g)\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ e uma isometria $(g) : \mathcal{P} \rightarrow (g)\mathcal{P}$. Denotamos as arestas de $(g)\mathcal{P}$ por s_i , e s'_i a imagem de s_i em $\mathcal{P}$. $X_{\mathcal{P}}$ é o espaço de identificação formado a partir destes polígonos pela identificação da aresta s'_i de $(g)\mathcal{P}$ com a aresta s_i de $(gg_i)\mathcal{P}$.

Isso garante, em particular, que $(gg_i)\mathcal{P}$ é adjacente à $(g)\mathcal{P}$, da mesma forma que $(g_i)\mathcal{P}$ é adjacente à $\mathcal{P}$ em X , para cada $g \in \mathbb{G}$.

Proposição B.1.2. $X_{\mathcal{P}}$ é uma superfície geometricamente completa.

Demonstração na referência [22] página 179.

Teorema B.1.3 (Teorema de Poincaré). *Seja $\mathcal{P}$ um polígono compacto satisfazendo a condições de arestas e ângulos, então $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental de um grupo $\mathbb{G}$ gerado por emparelhamento de arestas de $\mathcal{P}$.*

Demonstração:

Vamos construir a superfície $X_{\mathcal{P}}$ como descrito na referência [22] página 179. Uma vez que $X_{\mathcal{P}}$ é uma superfície geometricamente completa pela, Proposição B.1.2, segue, pelo Teorema de Killing-Holf que $X_{\mathcal{P}} = X/\pi_1(X_{\mathcal{P}})$ ¹, lembrando que $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2, S^2$.

Primeiramente, assumimos que $\pi_1(X_{\mathcal{P}}) = \{1\}$ (veremos mais tarde que este é sempre o caso). Então $X_{\mathcal{P}} = X$, e o ladrilhamento de $X_{\mathcal{P}}$ por polígonos $(g)\mathcal{P}$ é um ladrilhamento da superfície X contendo o polígono original $\mathcal{P}$, assim podemos tomar $(1)\mathcal{P}$ como sendo $\mathcal{P}$.

Afirmamos que $(g)\mathcal{P} = g\mathcal{P}$, para qualquer $g \in \mathbb{G}$. Isso será mostrado por indução sobre k , onde

$$g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}, \text{ com cada } \varepsilon_j = \pm 1, \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Para $k = 1$ é verdade. Pois, as vizinhanças $g_i^{\pm 1}\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ são as $(g_i^{\pm 1})\mathcal{P}$ por definição de $X_{\mathcal{P}}$. Agora, assumimos que $(g')\mathcal{P} = g'\mathcal{P}$ quando g' é um produto de $k \leq k-1$ geradores ou seus inversos. Pela definição de $X_{\mathcal{P}}$, temos

$$(g'g_i^{\pm 1})\mathcal{P} = g'(g_i^{\pm 1})\mathcal{P} = g'g_i^{\pm 1}, \text{ quando } g_i^{\pm 1}\mathcal{P} = \mathcal{P}.$$

E assim, a indução está completa.

Assim, se $\pi_1(X_{\mathcal{P}}) = \{1\}$, então os polígonos $(g)\mathcal{P}$ que ladrilham $X_{\mathcal{P}} = X$ são precisamente os polígonos $g\mathcal{P}$, para $g \in \mathbb{G}$. Logo $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental de $\mathbb{G}$.

Agora assumimos que $\pi_1(X_{\mathcal{P}}) = \{1\}$ e considere o ladrilhamento de X obtido por elevação do ladrilhamento de $X_{\mathcal{P}} = X/\pi_1(X_{\mathcal{P}})$. Queremos mostrar que somente um polígono de X encontra-se sobre cada polígono $(g)\mathcal{P}$ de $X_{\mathcal{P}}$, assim provamos que $\pi_1(X_{\mathcal{P}}) = \{1\}$. Esperamos que um e somente um polígono de X em $(g)\mathcal{P}$ que é $g\mathcal{P}$. Se $g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$, então a definição de $X_{\mathcal{P}}$ diz que atingimos $(g)\mathcal{P}$ a partir $(1)\mathcal{P}$ pela seqüência de arestas cruzadas correspondentes à $g_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, g_{i_k}^{\varepsilon_k}$. Atingimos $g\mathcal{P}$ a partir de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$ como acima, usando exatamente a mesma seqüência de cruzamentos, temos que qualquer caminho para $\mathcal{P}$ em $X_{\mathcal{P}}$ em X elevando para um caminho de $\mathcal{P}$ para $g\mathcal{P}$ em X . ■

B.2 Ladrilhamento Triangular

Um polígono simples satisfazendo as condições das arestas e dos ângulos são quadriláteros obtidos por duplicação triangular. Duplicação triangular com ângulos

¹ $\pi_1(X_{\mathcal{P}})$ é o grupo fundamental de $X_{\mathcal{P}}$

π/p , π/q , π/r dão um quadrilátero. O emparelhamento de arestas e as condições das arestas e dos ângulos são satisfeitos se p , q , r são inteiros.

O ladrilhamento baseado em quadriláteros, se existe, é da forma gerado por reflexões nas arestas dos triângulos. A questão de existência é estabelecida por argumentos que dependem do valor de

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, \quad \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Então todas as possibilidades são realizadas por famílias de ladrilhamentos de S^2 . Quando

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

então todas possibilidades são realizadas por famílias de ladrilhamentos de $\mathbb{R}^2$. Em cada um desses casos, as possibilidades são fáceis para examinar. Quando,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

existe infinitas possibilidades. De fato, todas essas possibilidades podem ser realizadas em $\mathbb{H}^2$, embora isso não seja obvio.

É usualmente chamar o triângulo com ângulos π/p , π/q , π/r por triângulo (p, q, r) , quando,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1.$$

O ladrilhamento dado por triângulos (p, q, r) são subdivisões dos poliedros regulares e dos ladrilhamento regular de $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, o ladrilhamento por triângulos $(2, 3, 4)$ resulta da divisão de cada triângulo equilátero do ladrilhamento icosaedral, no qual possui ângulos $2\pi/5$ em seis partes. Resumimos os resultados pelo seguinte:

p	q	r	Ladrilhamento de S^2
2	2	$n \geq 2$	Diedro
2	3	3	Tetraedro
2	3	4	Octaedro(ou cubo)
2	3	5	Icosaedro(ou dodecaedro)

p	q	r	Ladrilhamento de $\mathbb{R}^2$
3	3	3	Triângulo equilátero
2	4	4	Quadrado
2	3	6	Triângulo equilátero(ou hexaedro)

Todos os outros valores de $p, q, r \geq 2$ dão,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

desde que a soma dos ângulos é menos que π , assim o triângulo (p, q, r) deve ser hiperbólico. Prova todas essas possibilidades podem ser realizadas é, de fato, provar que um polígono arbitrário satisfazendo as condições de arestas e ângulos pode ser um domínio fundamental.

Agora, iremos apresentar exemplos de ladrilhamento por triângulos. Mas antes, iremos enunciar a definição de recobrimento universal.

Definição B.2.1. *Seja X um espaço topológico e $\tilde{X}$ um espaço de recobrimento de X . Um recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ com $\tilde{X}$ simplesmente conexo e localmente conexo por caminho chama-se **recobrimento universal**.*

Exemplo B.2.2. *O triângulo $(4, 4, 4)$.*

Dezesseis triângulos $(4, 4, 4)$ podem ser montados de modo a formar um octágono regular em $\mathbb{H}^2$, com ângulos $\pi/4$. Segue-se que se identificarmos as arestas do octágono de modo que crie um superfície S de gênero 2 com um vértice, então a soma dos ângulos será 2π e a superfície S será hiperbólica. Assim, podemos elevar o ladrilhamento de S por seu recobrimento universal, qual é $\mathbb{H}^2$, pelo *Teorema de Killing-Hopf*, dando obviamente um ladrilhamento simétrico de $\mathbb{H}^2$ por triângulos $(4, 4, 4)$.

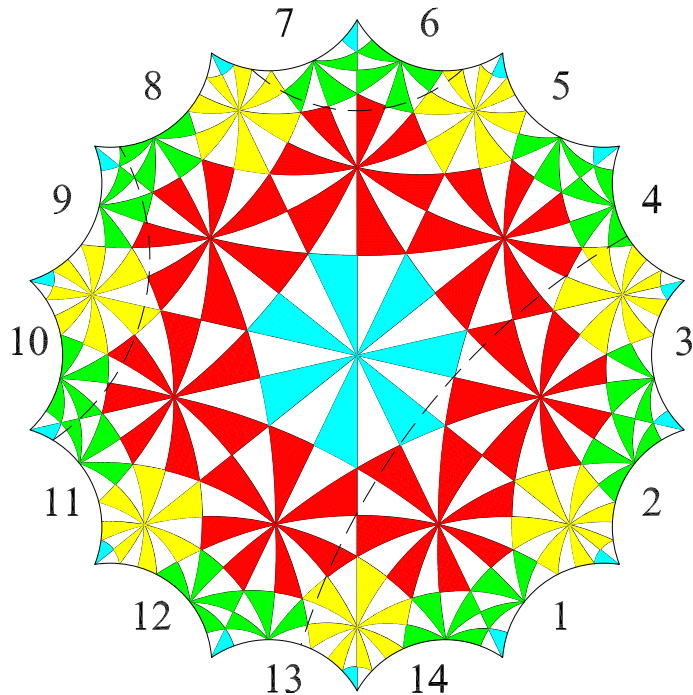


Figura B.1: Figura feita por Klein de um polígono regular de 14 arestas e ângulos medindo $\pi/7$, formado por 336 cópias do triângulo $(2, 3, 7)$.

Exemplo B.2.3. *O triângulo $(2, 3, 7)$.*

Klein fez um surpreendente descoberta que existe um polígono regular $\mathcal{P}$ com 14 arestas e com ângulos medindo $\pi/7$ formado por 336 cópias do triângulo $(2, 3, 7)$ (veja figura B.1). Se a aresta $2i + 1$ deste polígono regular $\mathcal{P}$ for identificado com a aresta $2i + 6 \pmod{4}$, o resultado gera uma superfície S de gênero 3 com 2 vértices. Os dois vértices de S correspondem ao conjunto de pares e ímpares vértices de $\mathcal{P}$, além disso, cada um deles tem soma dos ângulos é igual a 2π . Assim, temos novamente uma superfície hiperbólica S e obtemos o desejado ladrilhamento de $\mathbb{H}^2$ por elevação do ladrilhamento de S por seu recobrimento universal.

Sabemos agora que um ladrilhamento de $\mathbb{H}^2$ existe, podemos ver que são arestas simétricas, pois são geradas por reflexões nas arestas do triângulo $(2, 3, 7)$ (a simples aparência de regularidade no ladrilhamento não dever ser confiável).

Nesse dois exemplos usamos uma superfície compacta como um modelo para $\mathbb{H}^2$. Em vez de encher $\mathbb{H}^2$ de infinitos triângulos, enchemos uma superfície compacta com finitos triângulos, então usamos a cobertura de uma superfície compacta por $\mathbb{H}^2$ garantido pelo *Teorema de Killing-Hopf*. Contudo, podemos ter sorte em encontrar essa superfície compacta, realmente, um triângulo $(2, 3, 7)$ miraculosamente aparece e não está claro que esta abordagem vai sempre ser completada.

Antes de continuar com estes resultados para polígonos compactos, vale a pena olhar para o famoso ladrilhamento modular, cujos ladrilhos podem ser considerados como triângulos $(2, 3, \infty)$. Tomamos uma superfícies hiperbólica com vértices $i, w = (1 + \sqrt{3}i)/2$ e ∞ no semi-plano superior e dobramos por reflexões no eixo imaginário. Ao tomar 12 cópias do triângulos $(2, 3, \infty)$, podemos ter um domínio fundamental $\mathcal{D}$ de um grupo $\mathbb{G}_2$ gerado por $z \mapsto 2 + z$ e $z \mapsto z/(2z + 1)$. Sabemos como preencher $\mathbb{H}^2$ com cópias de $\mathcal{D}$, além disso, o mesmo processo também nos dá um ladrilhamento por triângulos $(2, 3, \infty)$. Novamente, o ladrilhamento é simétrico pois é gerado por reflexões dos lados do triângulo.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrade, A. A., & Carvalho, E. D., *New Family of Perfect Codes for 2×2 MIMO*, accept for publication on International Journal of Appiled Mathematics, 2010.
- [2] Albuquerque, Clarice Dias de. *Análise e Construção de Códigos Quânticos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais*. Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp Campinas, SP, 2009.
- [3] Beardon, Alan F. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] Carvalho, E. D. & Palazzo Jr, R. & Fire, M. *On the Construction and Labeling of Geometrically Uniform Signal Sets in $\mathbb{R}^2$ Matched to Additive Quotient Groups*. Journal of Applied Mathematics and Computing, v.27, p. 1-7, 2008.
- [5] Faria, Mercio Botelho. *Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos*. Dissertação de Mestrado, IMMC-Unicamp Campinas, SP, 2001.
- [6] Faria, M. B. & Palazzo, R. *Dois Casos de Emparelhamentos Generalizados Associados a Tesselação $\{12g - 6, 3\}$* . Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, UFMT, Cuibá-MT, setembro, 2009.
- [7] Faria, M. B. & Palazzo, R. *Emparelhamentos Generalizados Casos III e VI Associados a tesselação $\{12g - 6, 3\}$* , Anais do XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2009), Blumenau-SC, outubro, 2009.
- [8] Faria, M. B. & Palazzo, R. *Generalização de emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos relacionados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$* no XXVII Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado no IMPA, Rio de Janeiro, julho, 2009.
- [9] Firby, P. A & Gardiner, C.F. *Surface topology*, Ellis Horwood Limited, New York, 1991.
- [10] Fricke, Robert & Klein, Felix. *Vorlesugen über die theorie der automorphen funktionen*, Teubener, Leipzig, 1897.

- [11] Firer, Marcelo. *Grupos Fuchsianos*. UNICAMP, Notas de Aulas, 1999.
- [12] Katok, Svetiana. *Fuchsian Groups*. The University of Chicago and London, Lectures in Mathematics Seires, 1992.
- [13] Kinsey, L. Christine. *Topology of surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] Lagrange, J.L. *Recherches d'arithmetique*, Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. Belles Lettries Berlin, 1773.[Oeuvres, Vol. III (Gauthier-Villars, Paris, 1869)]
- [15] Lima, Elon Large. *Grupo Fundamental e Espaço de Recobrimento*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1993.
- [16] Massey, W.S *Introduccion a la Topologia Algebraica*. Editorial Reverte, 1972.
- [17] Munkres, James R. *Topology - A first course*. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [18] Poincaré, Henri. *Théorie Des Groupes Fuchsianos*. Paris, Acta Mathematica v.1, *First article in a legendary series exploiting half-plane model*, 1882.
- [19] Ramsay, A. & Richtmeyer, Robert D. *Introduction to Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [20] Rocha, Luiz Fernando Carvalho. *Introdução à geometria hiperbólica plana*. Impa, 1987.
- [21] Schwerdtfeger, Hans. *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications, New York, 1979.
- [22] Stillwell, John. *Geometry de Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [23] Tóth, L. Fejes. *Regular Figures*. International series of monographs on Pure and Applied Mathematics, Pergamon press LTDA, Oxford, vol. 48, 1964.
- [24] Vilches, Mauricio A. *Topologia Geral*. Departamento de Análise - IME - UERJ.
- [25] Weeks, Jeffrey R. *The shape of space*, Marcel Dekker, New York, 1985.
- [26] <http://www.maths.manchester.ac.uk/~cwalkden/hyperbolic-geometry>