

JOÃO CARLOS FERNANDES BARREIRA

MÚTIPLAS SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS
ELÍPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

B271m Barreira, João Carlos Fernandes, 1995-
2020 Múltiplas soluções para uma classe de problemas elípticos /
 João Carlos Fernandes Barreira. – Viçosa, MG, 2020.
 90f. ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.75-76.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Categoria de
Lusternik-Schnirelman. I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 514.21

JOÃO CARLOS FERNANDES BARREIRA

MÚLTIPLAS SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS
ELÍPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 20 de fevereiro de 2020.

Assentimento:



João Carlos Fernandes Barreira

Autor



Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão

Orientadora

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Walter e Marisa e a minha avó Nedina.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar saúde, sabedoria, confiança e força para sempre continuar e concluir meus objetivos.

A minha família, por sempre estarem presentes, por me apoiarem em todas as fases, por me ajudarem a superar as dificuldades, pelas conversas, pelo carinho e amor de sempre, o meu muito obrigado! Também a minha namorada Yasmin, por estar comigo desde o início, pelo companherismo de sempre, por fazer dos dias difíceis dias mais leves.

A professora Jéssyca pela orientação, paciência, dedicação, pelos ensinamentos que foram de muita importância para minha formação e elaboração deste trabalho, levarei estes comigo. Agradeço também a banca examinadora, por avaliarem e ajudarem no enriquecimento deste trabalho. Obrigado!

Aos professores, funcionários e colegas do DMA-UFV, em especial aos amigos Ray e Maiara, por me ajudarem desde do início e por fazerem o ambiente de estudos um lugar produtivo e descontraído. A UFV, por me proporcionar a realização de um sonho.

Aos meus amigos, praticamente irmãos, em que mesmo com a distância não deixaram de me apoiar, de estarem comigo. Que nossas amizades durem pela eternidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

O coração do homem planeja o seu caminho, mas é o Senhor que firma seus passos.

Provérbio 16:9

Resumo

BARREIRA, João Carlos Fernandes M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2020. **Múltiplas soluções para uma classe de problemas elípticos.** Orientadora: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.

Nesta dissertação estudamos a existência e a multiplicidade de soluções não triviais para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\mu)$$

em que Ω é um domínio limitado suave de \mathbb{R}^N , $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, e μ um parâmetro positivo. Seguindo Azorero & Alonso [13], [14] e Alves & Ding [1], mostraremos a existência de, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais para o problema (P_μ) .

Palavras-chave: Métodos Variacionais. Crescimento Crítico. Categoria de Lusternik-Schnirelman.

Abstract

BARREIRA, João Carlos Fernandes M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February of 2020. **Multiple solutions for a class of elliptical problems.** Adviser: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.

In this dissertation we study the existence and multiplicity of nontrivial solutions for the critical elliptical problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\mu)$$

where Ω is a bounded and smooth domain of \mathbb{R}^N , $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ is Sobolev's the critical exponent and μ a positive parameter. Following Azorero & Alonso [13], [14] and Alves & Ding [1], we show the existence of, at least, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ nontrivial solutions for the problem (P_μ) .

Keywords: Variational Methods. Critical Growth. Lusternik-Schnirelman Category.

Lista de Símbolos

\mathbb{R}^N	Espaço euclidiano N -dimensional;
$\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$	Espaço de medidas em \mathbb{R}^N ;
Ω	Domínio limitado e suave de \mathbb{R}^N ;
$\bar{\Omega}$	Fecho de Ω ;
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto Ω ;
$\text{med}(\Omega)$	Medida do conjunto Ω ;
$B(x, r)$	Bola aberta de centro em x e raio r ;
B_r	Bola aberta de centro em 0 e raio r ;
$\text{cat}_X(A)$	Categoria de A em X ;
$\text{cat}_{X,Y}(A)$	Categoria de A em X relativa a Y ;
$L^p(\Omega)$	Funções mensuráveis cuja potência de p , $ \cdot ^p$, são integráveis no sentido de Lebesgue em Ω ;
$ \cdot _r$	Norma no espaço L^r ;
$ \cdot _\infty$	Norma no espaço L^∞ ;
$W^{1,p}(\Omega)$	Espaço das funções em $L^p(\Omega)$ com derivadas parciais em $L^p(\Omega)$;
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto;
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$;
$\ \cdot\ $	Norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$;
$p^* = pN/(N - p)$	Expoente crítico de Sobolev, $N \geq 3$;
$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$	Espaço das funções em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ com derivadas parciais em $L^p(\mathbb{R}^N)$;
$\ \cdot\ _*$	Norma no espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;
$o_n(1)$	Ordem pequena;
$O(\varepsilon)$	Ordem grande;
X'	Dual do espaço X ;
$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \ u\ _{p^*} = 1}} \nabla u _p^p$	Constante ótima de Sobolev;
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Gradiente de u ;
$\Delta_p u = \text{div}(\nabla u ^{p-2} \nabla u)$	Operador p -Laplaciano de u ;
$\text{supp } u$	Suporte de u ;
u^+, u^-	Parte positiva de u , parte negativa de u , respectivamente.

Sumário

Introdução	10
1 A constante de Sobolev S	12
2 Existência de solução para (P_μ)	22
2.1 Resultados Importantes	22
2.2 Demonstração do Teorema principal	36
3 Categoria de Lusternik-Schnirelman	37
4 Multiplicidade de soluções para (P_μ)	45
4.1 Preliminares	45
4.2 Teoremas Minimax	55
4.3 Lemas Técnicos	61
4.4 Demonstração do Teorema principal	70
Referências Bibliográficas	75
A Espaços de Sobolev	77
B Resultados de teoria da Medida	81
C Resultados utilizados na dissertação	83

Introdução

Nesta dissertação estudamos a existência e a multiplicidade de soluções não triviais para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\mu)$$

em que Ω é um domínio limitado suave de \mathbb{R}^N , $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, e μ um parâmetro positivo.

A dificuldade em mostrar a existência de solução não trivial para esse problema crítico deve-se a falta de compacidade da imersão de Sobolev de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$, e com isso, em geral, o funcional energia associado a tal problema elíptico não satisfaz a condição de Palais-Smale (ou condição PS). Além disso, tal espaço, para $p \neq 2$, não possui a norma usual proveniente de um produto interno. Associaremos a multiplicidade de soluções de (P_μ) à topologia do domínio Ω , mais precisamente, usando a categoria de Lusternik-Schnirelman.

O Capítulo 1 foi dedicado ao estudo da constante de Sobolev

$$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ |u|_{p^*} = 1}} |\nabla u|_p^p > 0,$$

que será utilizada ao longo dos próximos capítulos da dissertação. Neste, vimos também as consequências de um Lema de Concentração e Compacidade, Lema 1.1, que caracteriza a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, e a existência de $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u|_{p^*} = 1 \quad \text{e} \quad |\nabla u|_p^p = S,$$

ou seja, que a constante de Sobolev é atingida. O Lema 1.2 apresentado nesse capítulo será útil na demonstração de resultados do próximo capítulo.

No Capítulo 2, estudamos a existência de solução para o problema (P_μ) seguindo [13]

e [14]. Trabalhando com o funcional associado ao problema (P_μ) , dado por

$$I_\mu(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} (u^+)^q dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} (u^+)^{p^*} dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

e usando o Teorema do Passo da Montanha, Teorema 2.3, provamos o resultado principal deste capítulo que segue devido a [13] e é dado da seguinte forma:

Teorema 0.1. *Se Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^N , $p^2 \leq N$ e $p < q < p^*$, então para cada $\mu > 0$ o problema (P_μ) possui solução não trivial.*

O Capítulo 3 foi voltado para definições e resultados da teoria de categoria, seguindo Lusternik-Schnirelman [19], os quais serão utilizados no capítulo seguinte.

No Capítulo 4, estudamos a multiplicidade de soluções para o problema (P_μ) , com o mesmo funcional I_μ do Capítulo 2, juntamente com a variedade de Nehari associada a este funcional,

$$\mathcal{N}_\mu = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I'_\mu(u)u = 0\}.$$

Segundo Alves & Ding [1], relacionamos a quantidade de pontos críticos do funcional I_μ , que são as soluções fracas para o problema (P_μ) , à topologia do domínio Ω , obtendo o resultado principal deste capítulo:

Teorema 0.2. *Seja Ω um domínio limitado suave de \mathbb{R}^N , $N \geq p^2$ e $2 \leq p < q < p^*$. Então existe $\mu^* > 0$ tal que, para cada $\mu \in (0, \mu^*)$, o problema (P_μ) possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

No Apêndice A, descrevemos uma introdução sobre os espaços de Sobolev, apresentando algumas definições e resultados.

O Apêndice B é formado por uma definição e três resultados que foram úteis para o enunciado dos Lemas 1.1 e 1.2.

Finalmente, no Apêndice C, enunciamos algumas definições e importantes resultados que foram utilizados ao longo da dissertação.

Capítulo 1

A constante de Sobolev S

Neste capítulo estudaremos a constante de Sobolev S , dada por

$$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ |u|_{p^*} = 1}} |\nabla u|_p^p > 0, \quad (1.1)$$

ou

$$S = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{|\nabla u|_p^p}{|u|_{p^*}^p}, \quad (1.2)$$

em que $N \geq p^2$, $p^* = \frac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e

$$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_* = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

De (1.2) obtemos a *desigualdade de Sobolev*

$$|u|_{p^*}^p \leq S^{-1} |\nabla u|_p^p, \quad \forall u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, o espaço $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)} = |\nabla u|_{p,\Omega}.$$

Pela desigualdade de Sobolev, $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)}$ são equivalentes em $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$. Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ temos a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, se $\text{med}(\Omega) < \infty$ então $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$ e o espaço $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para cada

$q \in [1, p^*]$ e compactamente se $q < p^*$. No caso de $\text{med}(\Omega) < \infty$, $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1, p^*]$ e esta imersão é compacta se $q < p^*$.

Veremos alguns resultados sobre S , dentre eles, que existe $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u|_{p^*} = 1 \text{ e } |\nabla u|_p^p = S,$$

ou seja, S é atingido em \mathbb{R}^N . Para tal, usaremos alguns resultados de Teoria da Medida (Apêndice B) e seguiremos [4], [17], [18] e [23].

As demonstrações dos próximos dois lemas podem ser encontradas em [17] e [18].

Lema 1.1 (Concentração e Compacidade). *Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad (1.3)$$

$$|\nabla(u_n - u)|^p \rightharpoonup \lambda \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \quad (1.4)$$

$$|u_n - u|^{p^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \quad (1.5)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \quad (1.6)$$

Defina

$$\lambda_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |\nabla u_n|^p dx,$$

$$\nu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |u_n|^{p^*} dx.$$

Então,

$$\|\nu\|^{p/p^*} \leq S^{-1} \|\lambda\|, \quad (1.7)$$

$$\nu_\infty^{p/p^*} \leq S^{-1} \lambda_\infty, \quad (1.8)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\nabla u_n|_p^p = |\nabla u|_p^p + \|\lambda\| + \lambda_\infty, \quad (1.9)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{p^*}^{p^*} = |u|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty. \quad (1.10)$$

Mais ainda, se $u = 0$ e $\|\nu\|^{p/p^*} = S^{-1} \|\lambda\|$, então λ e ν são medidas singulares e estão concentradas em um único ponto.

Lema 1.2. [14, Lema 2.2] *Seja (u_n) uma sequência fracamente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para u , tal que temos as seguintes convergências:*

$$(i) \quad |\nabla u_n|^p \rightharpoonup \lambda \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N);$$

$$(ii) \quad |u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

Então para um conjunto de índices J , no máximo enumerável, temos

$$\begin{aligned}\nu &= |u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu_j > 0, \\ \lambda &\geq |\nabla u|^p + \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{x_j}, \quad \lambda_j > 0, \\ \nu_j^{p/p^*} &\leq \frac{\lambda_j}{S},\end{aligned}$$

em que $x_j \in \bar{\Omega}$, S é a constante de Sobolev e δ_{x_j} é a massa de Dirac em x_j , definida por

$$\delta_{x_j}(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j \notin A, \\ 1, & \text{se } x_j \in A, \end{cases}$$

para todo A subconjunto de \mathbb{R}^N mensurável.

Agora, vamos estabelecer a seguinte notação. Dados $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, definimos

$$v^{y,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} v(\lambda x + y).$$

Note que $v^{y,\lambda}$ satisfaz

$$|\nabla v^{y,\lambda}|_p = |\nabla v|_p \text{ e } |v^{y,\lambda}|_{p^*} = |v|_{p^*}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}|\nabla v^{y,\lambda}|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\lambda^{\frac{N-p}{p}} v(\lambda x + y))|^p dx = \lambda^{N-p} \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda \nabla v(\lambda x + y)|^p dx \\ &= \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(\lambda x + y)|^p dx,\end{aligned}$$

usando mudança de variáveis,

$$|\nabla v^{y,\lambda}|_p^p = \lambda^N \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla v)(z)|^p dz = |\nabla v|_p^p;$$

e

$$\begin{aligned}|v^{y,\lambda}|_{p^*}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^{\frac{N-p}{p}} v(\lambda x + y)|^{p^*} dx = \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} |v(\lambda x + y)|^{p^*} dx = \lambda^N \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |v(z)|^{p^*} dz \\ &= |v|_{p^*}^{p^*}.\end{aligned}$$

Teorema 1.3. *Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência satisfazendo*

$$|u_n|_{p^*} = 1, \quad |\nabla u_n|_p^p \rightarrow S.$$

Então existe uma sequência $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ tal que $(u_n^{y_n, \lambda_n})$ admite uma subsequência convergente em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Em particular, existe um minimizante para S .

Demonstração. Defina as funções de concentração de Lévy,

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y, \lambda)} |u_n|^{p^*} dx, \quad \lambda > 0.$$

Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} Q_n(\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_n(\lambda) = 1.$$

Sendo Q_n contínua, existe $\lambda_n > 0$ tal que $Q_n(\lambda_n) = 1/2$. Mais ainda, existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$Q_n(\lambda_n) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y, \lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = \int_{B(y_n, \lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = \frac{1}{2},$$

pois

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{B(y, \lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = 0.$$

Definindo $v_n = u_n^{y_n, \lambda_n}$, temos

$$|v_n|_{p^*} = |u_n^{y_n, \lambda_n}|_{p^*} = |u_n|_{p^*} = 1, \quad \|v_n\|_*^p = |\nabla v_n|_p^p = |\nabla u_n^{y_n, \lambda_n}|_p^p = |\nabla u_n|_p^p \rightarrow S,$$

e

$$\frac{1}{2} = \int_{B(y_n, \lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = \int_{B(0,1)} |u_n^{y_n, \lambda_n}|^{p^*} dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*} dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^{p^*} dx \quad (1.11)$$

Como (v_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, podemos supor, passando a uma subsequência se necessário, que

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \text{ em } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla(v_n - v)|^p &\rightharpoonup \eta \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ |v_n - v|^{p^*} &\rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ v_n &\rightarrow v \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1 temos

$$S = \lim |\nabla v_n|_p^p = \limsup |\nabla v_n|_p^p = |\nabla v|_p^p + \|\eta\| + \eta_\infty \quad (1.12)$$

e

$$1 = \lim |v_n|_{p^*}^{p^*} = \limsup |v_n|_{p^*}^{p^*} = |v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty, \quad (1.13)$$

com

$$\begin{aligned} \eta_\infty &= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |\nabla v_n|^p dx, \\ \nu_\infty &= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |v_n|^{p^*} dx. \end{aligned}$$

Logo, de (1.7), (1.8), (1.12) e da desigualdade de Sobolev, obtemos

$$S \geq S[(|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*}],$$

e portanto, de (1.13), $|v|_{p^*}^{p^*}$, $\|\nu\|$ e ν_∞ devem ser iguais a 0 ou 1, pois

$$S \geq S[(|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*}] \Rightarrow 0 \leq (|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*} \leq 1.$$

Daí, supondo que $0 < |v|_{p^*}^{p^*} < 1$, como $p/p^* < 1$ temos

$$(|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} > |v|_{p^*}^{p^*}.$$

Analogamente, obtemos

$$\|\nu\|^{p/p^*} > \|\nu\| \quad \text{e} \quad \nu_\infty^{p/p^*} > \nu_\infty,$$

e conseqüentemente,

$$|v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty < (|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*} \leq 1,$$

o que contradiz (1.13).

Da igualdade (1.11), $\nu_\infty \leq \frac{1}{2}$. De fato, pelo Lema de Brezis-Lieb (Lema C.12) temos

$$\int_{B(0,1)} |v|^{p^*} dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{p^*} dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*} dx + o_n(1),$$

e definindo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ da forma

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(0, 1), \\ 0, & x \in B(0, 2)^c, \\ \phi(x) \in [0, 1], & \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

temos

$$\int_{B(0,1)} |v|^{p^*} \phi \, dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{p^*} \phi \, dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*} \, dx + o_n(1),$$

e como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^{p^*} \phi \, dx \geq \int_{B(0,1)} |v|^{p^*} \phi \, dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{p^*} \phi \, dx,$$

segue por (1.11),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^{p^*} \phi \, dx \geq \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*} \, dx + o_n(1) = \frac{1}{2} + o_n(1).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} \phi \, dx + \langle \nu, \phi \rangle \geq \frac{1}{2}.$$

Como $\|\phi\|_\infty = 1$ e $\langle \nu, \phi \rangle \leq \|\nu\| \|\phi\|$ então $\langle \nu, \phi \rangle \leq \|\nu\|$ e sendo $0 \leq \phi \leq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} \, dx + \|\nu\| \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} \phi \, dx + \langle \nu, \phi \rangle \geq \frac{1}{2},$$

isto é,

$$|v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| \geq \frac{1}{2}.$$

Logo, de (1.13)

$$1 = |v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty \geq \frac{1}{2} + \nu_\infty \Rightarrow \nu_\infty \leq \frac{1}{2},$$

donde podemos concluir que $\nu_\infty = 0$. Agora, observe que, se $\|\nu\| = 1$ teríamos $|v|_{p^*}^{p^*} = 0$ implicando em $v = 0$ e, de (1.12),

$$S = \|\eta\| + \eta_\infty \geq \|\eta\| \Rightarrow S^{-1}\|\eta\| \leq 1 = \|\nu\|^{p/p^*}.$$

Assim, $v = 0$ e de (1.7), $\|\nu\|^{p/p^*} = S^{-1}\|\eta\|$ implicando, pelo Lema 1.1, que a medida de ν está concentrada em um único ponto z . Note que, considerando $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(z, 1/2), \\ 0, & x \in B(z, 1)^c, \\ \varphi(x) \in [0, 1], & \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

temos

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} \, dx \geq \int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} \varphi \, dx \rightarrow \langle \nu, \varphi \rangle = \|\nu\| \varphi(z) = \|\nu\|. \quad (1.14)$$

Definindo agora $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(z, 1), \\ 0, & x \in B(z, 2)^c, \\ \psi(x) \in [0, 1], & \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

obtemos

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} dx = \int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} \psi dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} \psi dx \rightarrow \langle \nu, \psi \rangle = \|\nu\| \psi(z) = \|\nu\|. \quad (1.15)$$

De (1.14) e (1.15) concluimos que

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} dx \rightarrow \|\nu\|,$$

donde, por (1.11),

$$\frac{1}{2} = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^{p^*} dx \geq \int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} dx \rightarrow \|\nu\| = 1,$$

o que é um absurdo. Dessa forma, $\|\nu\| = 0$ e de (1.13) podemos concluir que

$$|v|_{p^*}^{p^*} = 1.$$

Pela desigualdade de Sobolev, $S \leq |\nabla v|_p^p$, e usando a Proposição C.21 temos

$$S = \lim |\nabla v_n|_p^p = \liminf |\nabla v_n|_p^p \geq |\nabla v|_p^p,$$

pois $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$S = \|v\|_*^p = |\nabla v|_p^p = \lim |\nabla v_n|_p^p = \lim \|v_n\|_*^p.$$

Portanto, como $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexo (Proposição C.15), concluimos, pela Proposição C.18, que $v_n \rightarrow v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Lema 1.4. $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [4]. ■

Proposição 1.5. *Seja $N \geq p^2$. A função*

$$U(x) = C_N (1 + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-N}{p}} \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad (1.16)$$

é um minimizante para S , isto é, $|U|_{p^*} = 1$ e $|\nabla U|_p^p = S$, em que $C_N = \left[N \left(\frac{N-p}{p-1} \right)^{p-1} \right]^{(N-p)/p^2}$.

Demonstração. Veja [2] e [23]. ■

Proposição 1.6. Para todo subconjunto aberto Ω de \mathbb{R}^N ,

$$S(\Omega) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \\ |u|_{p^*}=1}} |\nabla u|_p^p = S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ |u|_{p^*}=1}} |\nabla u|_p^p,$$

e $S(\Omega)$ nunca é atingido, exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Demonstração. De $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos $S \leq S(\Omega)$. Dados $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e Ω aberto de \mathbb{R}^N , mostraremos que existem $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$ tais que $u^{y,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, ou seja, $\text{supp } u^{y,\lambda} \subset \Omega$. Suponha inicialmente que $0 \in \Omega$. Escolhendo $y = 0$ obtemos

$$u^{0,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x),$$

em que $\lambda > 0$ será determinado. Note que se $x \in \text{supp } u^{0,\lambda}$ então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ com $x_n \rightarrow x$ e $u^{0,\lambda}(x_n) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x_n) \neq 0$ implicando $u(\lambda x_n) \neq 0$, ou seja, $\lambda x_n \in \text{supp } u$ donde $\lambda x \in \text{supp } u$ e conseqüentemente $x \in (1/\lambda) \text{supp } u$; portanto

$$\text{supp } u^{0,\lambda} \subset \frac{1}{\lambda} \text{supp } u.$$

Reciprocamente, se $x \in (1/\lambda) \text{supp } u$, isto é, se $\lambda x \in \text{supp } u$, então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $x_n \rightarrow \lambda x$ e $u(x_n) \neq 0$, ou seja, $x_n/\lambda \rightarrow x$ e $u^{0,\lambda}(x_n/\lambda) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x_n/\lambda) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(x_n) \neq 0$ o que implica $x_n/\lambda \in \text{supp } u^{0,\lambda}$ e conseqüentemente $x \in \text{supp } u^{0,\lambda}$; assim

$$\frac{1}{\lambda} \text{supp } u \subset \text{supp } u^{0,\lambda}.$$

Logo, $(1/\lambda) \text{supp } u = \text{supp } u^{0,\lambda}$ e para λ suficientemente grande podemos concluir que

$$\text{supp } u^{0,\lambda} = \frac{1}{\lambda} \text{supp } u \subset \Omega,$$

donde $u^{0,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Se $0 \notin \Omega$, fixe $y_0 \in \Omega$ arbitrário e considere a translação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto T(x) = x - y_0. \end{aligned}$$

Observe que, sendo T um difeomorfismo, temos $T(\Omega)$ um aberto com $0 \in T(\Omega)$. Pelo estudo anterior, existe λ suficientemente grande tal que

$$\text{supp } u^{0,\lambda} = \frac{1}{\lambda} \text{supp } u \subset T(\Omega).$$

Daí, se $x \in \text{supp } u^{-\lambda y_0,\lambda}$ então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ com $x_n \rightarrow x$ e $u^{-\lambda y_0,\lambda}(x_n) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x_n - \lambda y_0) \neq 0$, ou seja, $\lambda x - \lambda y_0 \in \text{supp } u$ donde $x - y_0 \in (1/\lambda) \text{supp } u \subset T(\Omega)$ e consequentemente $x = T^{-1}(x - y_0) \in \Omega$. Logo,

$$\text{supp } u^{-\lambda y_0,\lambda} \subset \Omega.$$

Fazendo $y = -\lambda y_0$, obtemos

$$\text{supp } u^{y,\lambda} \subset \Omega$$

donde $u^{y,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Com isso, considere $(u_n) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para S . Escolhendo $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tal que $v_n = u_n^{y_n \lambda_n} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ temos $|v_n|_{p^*} = 1$ e $S(\Omega) \leq |\nabla v_n|_p^p$, donde

$$S(\Omega) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla v_n|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla u_n|_p^p = S.$$

Portanto, $S(\Omega) = S$.

Suponha agora que $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ e que $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ seja um minimizante para $S(\Omega)$, então da inclusão $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e da igualdade $S(\Omega) = S$ concluímos que u também é um minimizante para S . Assumindo que $u \geq 0$ (o que é possível, pois $|u|_{p^*} = ||u|_{p^*}$ e $|\nabla u|_p^p = |\nabla |u||_p^p$), pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema C.23) existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx = \beta \int_{\Omega} |u|^{p^*-2} u v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega), \quad (1.17)$$

ou seja, u é solução fraca para o problema

$$-\Delta_p u = \beta u^{p^*-1}, \mathbb{R}^N.$$

Fazendo $v = u$ em (1.17), obtemos

$$S = \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \beta \int_{\Omega} |u|^{p^*} \, dx = \beta$$

e consequentemente u é solução fraca para o problema

$$-\Delta_p u = S u^{p^*-1}, \mathbb{R}^N.$$

Pelo Princípio do Máximo (Teorema C.28), $u > 0$ em \mathbb{R}^N , o que é um absurdo, pois $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, o que implica $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Logo, $S(\Omega)$ não é atingido quando $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.

■

Capítulo 2

Existência de solução para (P_μ)

Neste capítulo, seguindo [13] e [14] estudaremos a existência de solução para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\mu)$$

com Ω sendo um domínio limitado suave de \mathbb{R}^N , $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, em que $p^* = pN/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, e μ um parâmetro positivo. Em $W_0^{1,p}(\Omega)$ usaremos a norma usual $\|u\| = |\nabla u|_p$.

O resultado principal deste capítulo é dado pelo seguinte:

Teorema 2.1. *Se Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^N , $p^2 \leq N$ e $2 \leq p < q < p^*$, então para cada $\mu > 0$ o problema (P_μ) possui solução não trivial.*

2.1 Resultados Importantes

Nesta seção veremos alguns resultados que serão utilizados para a demonstração do Teorema principal deste capítulo.

Definição 2.2. *Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca para o problema (P_μ) se*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} |u|^{q-2} u v \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p^*-2} u v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$I_\mu : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional energia associado ao problema (P_μ) dado por

$$I_\mu(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega (u^+)^{p^*} dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.1)$$

O funcional I_μ é de classe $\mathcal{C}^2(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ (veja [10] e [11]), e para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$I'_\mu(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \mu \int_\Omega (u^+)^{q-2} u v dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*-2} u v dx. \quad (2.2)$$

Afirmamos que todo ponto crítico para o funcional I_μ é não negativo. De fato, se u é ponto crítico de I_μ , então $I'_\mu(u)v = 0$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em particular, fazendo $v = u^- = \max\{0, -u\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (Proposição C.6), obtemos

$$I'_\mu(u)u^- = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- dx - \mu \int_\Omega (u^+)^{q-2} u u^- dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*-2} u u^- dx = 0.$$

Observe que:

(i) $\mu \int_\Omega (u^+)^{q-2} u u^- dx = \mu \int_{[u>0]} (u^+)^{q-2} u u^- dx + \mu \int_{[u \leq 0]} (u^+)^{q-2} u u^- dx = 0$, pois $u^+ = 0$ em $[u \leq 0]$ e $u^- = 0$ em $[u > 0]$, uma vez que $u^+ = \max\{0, u\}$.

(ii) Seguindo da mesma forma que o item (i), obtemos

$$\int_\Omega (u^+)^{p^*-2} u u^- dx = 0.$$

(iii) $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- dx = \int_{[u>0]} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- dx + \int_{[u \leq 0]} -|\nabla u^-|^{p-2} \nabla u^- \nabla u^- dx$, visto que $\nabla u = \nabla(u^+ - u^-) = \nabla u^+ - \nabla u^- = -\nabla u^-$ em $[u \leq 0]$. E sendo $\nabla u^- = 0$ em $[u > 0]$, então

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- dx = - \int_{[u \leq 0]} |\nabla u^-|^{p-2} |\nabla u^-|^2 dx = - \int_{[u \leq 0]} |\nabla u^-|^p dx.$$

Logo, dos itens (i), (ii) e (iii),

$$- \int_{[u \leq 0]} |\nabla u^-|^p dx = I'_\mu(u)u^- = 0,$$

assim,

$$\|u^-\|^p = \|u^-\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p = \int_\Omega |\nabla u^-|^p dx = \int_{[u>0]} |\nabla u^-|^p dx + \int_{[u \leq 0]} |\nabla u^-|^p dx = 0,$$

donde $u^- = 0$ q.t.p. em Ω e, portanto, $u = u^+$ q.t.p. em Ω . Logo, de acordo com a

Definição 2.2, os pontos críticos do funcional I_μ são soluções fracas para o problema (P_μ) .

Teorema 2.3 (Teorema do Passo da Montanha). *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tais que $\|e\| > r$ e*

$$b = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e).$$

Defina

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$\varphi(u_n) \rightarrow c \text{ e } \varphi'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } X'.$$

O número c é conhecido como o nível do passo da montanha.

Demonstração. Tomando no Teorema C.26 $M = [0, 1]$, $M_0 = \{0, 1\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma_0\}$, $\gamma_0(0) = 0$ e $\gamma_0(1) = e$ temos, para $t \in M$, $\gamma \in \Gamma$, $\varepsilon \in (0, (c - a)/2)$ e $\delta > 0$,

$$\varphi(\gamma(t)) \leq \max_{t \in M} \varphi(\gamma(t))$$

implicando, pela definição de c , que

$$\varphi(\gamma(t)) \leq c < c + \varepsilon.$$

Portanto,

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon,$$

donde existe $u \in X$ verificando os itens (a), (b), (c) do Teorema C.26. Considerando então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/n$ existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$c - \frac{2}{n} \leq \varphi(u_n) \leq c + \frac{2}{n} \text{ e } \|\varphi'(u_n)\| \leq \frac{8}{\delta n},$$

e assim, fazendo $n \rightarrow \infty$,

$$\varphi(u_n) \rightarrow c \text{ e } \varphi'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } X',$$

como queríamos. ■

Definição 2.4. *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que (u_n) é uma sequência $(PS)_d$ com $d \in \mathbb{R}$ quando*

$$\varphi(u_n) \rightarrow d \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } \varphi'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } X'.$$

Corolário 2.5. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3, φ admite uma sequência $(PS)_c$ em X .*

Definição 2.6. *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. A função φ satisfaz a condição $(PS)_c$ quando toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$\varphi(u_n) \rightarrow c, \varphi'(u_n) \rightarrow 0$$

admite uma subsequência convergente em X .

Definição 2.7. *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que φ verifica a condição de Palais-Smale ou simplesmente, a condição (PS) , quando toda sequência $(PS)_d$ admite uma subsequência que converge forte em X .*

Definição 2.8. *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de φ se existe $u \in X$ tal que $\varphi(u) = c$ e $\varphi'(u) = 0$.*

Corolário 2.9. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3, se φ verifica a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de φ .*

Demonstração. Do Corolário 2.5, existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$\varphi(u_n) \rightarrow c \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } \varphi'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } X'. \quad (2.3)$$

Da condição $(PS)_c$ existe $u \in X$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } X.$$

Como $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ temos

$$\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u) \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } \varphi'(u_n) \rightarrow \varphi'(u) \text{ em } X'. \quad (2.4)$$

Logo, de (2.3), (2.4) e da unicidade do limite temos

$$\varphi(u) = c \text{ e } \varphi'(u) = 0,$$

mostrando que c é um valor crítico de φ . ■

Lema 2.10. *O funcional I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha.*

Demonstração. De (2.1), temos $I_\mu(0) = 0$. Além disso, como $p < q < p^*$ temos as imersões contínuas, ver Teorema C.8 e Teorema C.9, de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$, donde existem $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, tais que

$$|u|_{p^*} \leq \alpha_1 \|u\| \text{ e } |u|_q \leq \alpha_2 \|u\|.$$

Daí,

$$|u^+|_{p^*}^{p^*} \leq |u|_{p^*}^{p^*} \leq \alpha_1 \|u\|^{p^*} \text{ e } |u^+|_q^q \leq |u|_q^q \leq \alpha_2 \|u\|^q,$$

logo

$$I_\mu(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\mu}{q} |u^+|_q^q - \frac{1}{p^*} |u^+|_{p^*}^{p^*} \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\mu}{q} \alpha_2 \|u\|^q - \frac{1}{p^*} \alpha_1 \|u\|^{p^*}.$$

Escolhendo então $r > 0$ e considerando $\|u\| = r$ temos

$$I_\mu(u) \geq \frac{1}{p} r^p - \frac{\mu}{q} \alpha_2 r^q - \frac{1}{p^*} \alpha_1 r^{p^*} = r^p \left(\frac{1}{p} - \frac{\mu}{q} \alpha_2 r^{q-p} - \frac{1}{p^*} \alpha_1 r^{p^*-p} \right)$$

e para $r \approx 0$ temos

$$I_\mu(u) \geq \frac{1}{2p} r^p \text{ se } \|u\| = r.$$

Assim, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = r$ temos $I_\mu(u)$ limitado inferiormente, e pelo postulado de Dedekind, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$\rho = \inf_{\|u\|=r} I_\mu(u) \geq \frac{1}{2p} r^p > 0.$$

Agora, fixe $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, e observe que para $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} I_\mu(tu) &= \frac{t^p}{p} \|u\|^p - \frac{\mu t^q}{q} |u^+|_q^q - \frac{t^{p^*}}{p^*} |u^+|_{p^*}^{p^*} \\ &\leq \frac{t^p}{p} \|u\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*} |u^+|_{p^*}^{p^*} \longrightarrow -\infty, \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Logo, para $t_1 \approx +\infty$ temos $\|t_1 u\| > r$ e $I_\mu(t_1 u) < 0$. Tomando $e = t_1 u$ obtemos $e \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus B_r(0)$ com $I_\mu(e) < 0 = I_\mu(0)$ e, desta forma, I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha. ■

Visto que o funcional I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha, denotemos por

\tilde{c}_μ o nível do passo da montanha associado a este funcional, ou seja,

$$\tilde{c}_\mu = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tv) > 0. \quad (2.5)$$

(veja Observação C.27)

Lema 2.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $\mu > 0$ e $q > p$. Toda sequência $(PS)_c$ para I_μ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$ para I_μ , isto é,

$$I_\mu(u_n) \rightarrow c \text{ em } \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

e

$$I'_\mu(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega), \text{ em que } W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))', \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (2.7)$$

Observe que, de (2.6) e (2.7) temos, respectivamente,

$$I_\mu(u_n) = c + o_n(1) \text{ e } \|I'_\mu(u_n)\| \rightarrow 0,$$

e sendo

$$0 < \left| I'_\mu(u_n) \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right) \right| = \left| \frac{1}{\|u_n\|} I'_\mu(u_n)(u_n) \right| \leq \frac{1}{\|u_n\|} \|I'_\mu(u_n)\| \|u_n\| = \|I'_\mu(u_n)\|,$$

consequentemente, $o_n(1) = \frac{1}{\|u_n\|} I'_\mu(u_n)(u_n)$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\| &= I_\mu(u_n) - \frac{1}{q} I'_\mu(u_n)(u_n) \\ &= \frac{1}{p} \|u_n\|^p - \frac{\mu}{q} |u_n^+|_q^q - \frac{1}{p^*} |u_n^+|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{q} \|u_n\|^p + \frac{\mu}{q} |u_n^+|_q^q + \frac{1}{q} |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p, \end{aligned}$$

donde $(\|u_n\|)$ é limitada em \mathbb{R} e (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pois, caso contrário, a menos de uma subsequência, teríamos

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \leq \frac{c + o_n(1)}{\|u_n\|^p} + \frac{o_n(1)}{\|u_n\|^{p-1}} \rightarrow 0,$$

o que seria um absurdo. Além disso, sem perda de generalidade, podemos supor $u_n \geq 0$,

para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que

$$I'_\mu(u_n)(u_n^-) = \|u_n^-\|^p \rightarrow 0.$$

■

Lema 2.12. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $\mu > 0$ e $q > p$. Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_μ , então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Mais ainda, se $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p. em Ω então u é solução fraca para o problema (P_μ) .*

Demonstração. Do Lema 2.11 temos (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, donde existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, uma vez que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo. Mostremos agora que, se $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p. em Ω então u é solução fraca para (P_μ) . Note que, da imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$ temos $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\Omega)$ donde, usando o Lema C.11, $|u_n|^{p^*-2}u_n \rightharpoonup |u|^{p^*-2}u$ em $L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega)$, ou seja,

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p^*-2}u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^{p^*-2}u \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in L^{p^*}(\Omega),$$

em particular,

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p^*-2}u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^{p^*-2}u \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.8)$$

Seguindo de forma análoga, mostra-se que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{q-2}u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^{q-2}u \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.9)$$

A sequência (u_n) ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ implica (∇u_n) limitada em $L^p(\Omega)$ e de $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p. em Ω temos, pelo Lema C.11, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. Logo, novamente usando o Lema C.11, $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, isto é,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in L^p(\Omega)$$

e conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (2.10)$$

já que $\nabla v \in L^p(\Omega)$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por fim, como visto no Lema 2.11, podemos

supor, $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e por (u_n) ser uma seqüência $(PS)_c$ para I_μ , temos

$$I'_\mu(u_n)v = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v \, dx - \mu \int_\Omega (u_n)^{q-2} u_n v \, dx - \int_\Omega (u_n)^{p^*-2} u_n v \, dx = o_n(1),$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e fazendo $n \rightarrow \infty$ concluimos por (2.8), (2.9) e (2.10) que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx - \mu \int_\Omega (u)^{q-2} uv \, dx - \int_\Omega (u)^{p^*-2} uv \, dx = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja, u é solução fraca para o problema (P_μ) . ■

Lema 2.13. *Seja $N \geq p^2$. Então I_μ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, S^{N/p}/N)$. Além disso, $\tilde{c}_\mu \in (0, S^{N/p}/N)$ para $\mu > 0$ e $q > p$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma seqüência $(PS)_c$ para I_μ então, do Lema 2.11, podemos supor $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos (u_n) uma seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, portanto, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, se tomarmos a subseqüência apropriada, se necessário, pelo Lema 1.2 podemos assumir os casos

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u \text{ em } L^r(\Omega), \quad 1 < r < p^*, \\ u_n &\rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega, \\ |\nabla u_n|^p &\rightharpoonup \lambda \geq |\nabla u|^p + \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{x_j}, \\ |u_n|^{p^*} &\rightharpoonup \nu = |u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}. \end{aligned}$$

Tome $x_k \in \overline{\Omega}$ para algum $k \in J$, e dado $\varepsilon > 0$ considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\varphi \equiv 1 \text{ em } B(x_k, \varepsilon), \quad \varphi \equiv 0 \text{ em } B(x_k, 2\varepsilon)^c \text{ e } |\nabla \varphi| \leq \frac{2}{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

A seqüência (φu_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ donde $I'_\mu(u_n)(\varphi u_n)$ converge para 0 e, consequentemente,

$$\begin{aligned} I'_\mu(u_n)(\varphi u_n) &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla(\varphi u_n) \, dx - \mu \int_\Omega (u_n)^{q-2} (u_n) \cdot (\varphi u_n) \, dx + \\ &\quad - \int_\Omega (u_n)^{p^*-2} (u_n) \cdot (\varphi u_n) \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \varphi |\nabla u_n|^p \, dx - \mu \int_\Omega (u_n)^q \varphi \, dx + \\ &\quad - \int_\Omega (u_n)^{p^*} \varphi \, dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \varphi |\nabla u_n|^p \, dx - \mu \int_{\Omega} (u_n)^q \varphi \, dx - \int_{\Omega} (u_n)^{p^*} \varphi \, dx \right] = 0.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.19) e pelas conclusões do Lema 1.2 temos a existência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \varphi |\nabla u_n|^p \, dx - \mu \int_{\Omega} (u_n)^q \varphi \, dx - \int_{\Omega} (u_n)^{p^*} \varphi \, dx \right) = \int_{\Omega} \varphi \, d\lambda - \mu \int_{\Omega} \varphi u^q \, dx - \int_{\Omega} \varphi \, d\nu,$$

portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi \, d\nu + \mu \int_{\Omega} \varphi u^q \, dx - \int_{\Omega} \varphi \, d\lambda. \quad (2.12)$$

Dito isso, sendo

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \right|,$$

usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Hölder (Teorema C.20) e de (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \right| &\leq \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2} |u_n| |\nabla u_n \cdot \nabla \varphi| \, dx \\ &\leq \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2} |u_n| |\nabla u_n| |\nabla \varphi| \, dx \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-1} |u_n| \, dx \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} |\nabla u_n|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)}^{p-1} |u_n|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)} \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} M |u_n|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)}, \end{aligned}$$

uma vez que $|\nabla u_n|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)} = \|u_n\| \leq M$, já que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como o limite dos extremos da desigualdade anterior existem, então

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\varepsilon} M |u_n|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)} = \frac{2}{\varepsilon} M |u|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)}.$$

Agora, note que, usando novamente a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |u|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)} &= \left(\int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |u|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_{B(x_k, 2\varepsilon)} 1^N \, dx \right)^{1/N} \left(\int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |u|^{p^*} \, dx \right)^{1/p^*} \\ &\leq [(2\varepsilon)^N w_N]^{1/N} |u|_{p^*, B(x_k, 2\varepsilon)}, \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{N} = \frac{1}{p}$ e com w_N denotando o volume da bola unitária em \mathbb{R}^N . Daí,

$$\frac{2}{\varepsilon} M |u|_{p, B(x_k, 2\varepsilon)} \leq \frac{2}{\varepsilon} M (2\varepsilon) w_N^{1/N} |u|_{p^*, B(x_k, 2\varepsilon)} = C |u|_{p^*, B(x_k, 2\varepsilon)},$$

com $C = 4Mw_N^{1/N}$. Assim,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \leq C |u|_{p^*, B(x_k, 2\varepsilon)} = C \left(\int_{B(x_k, 2\varepsilon)} |u|^{p^*} \, dx \right)^{1/p^*} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.13)$$

Por (2.12), (2.13) e pelo Lema 1.2 obtemos,

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{B(x_k, 2\varepsilon)} \varphi \, d\nu + \mu \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} u^q \varphi \, dx - \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} \varphi \, d\lambda \right] \leq \nu_k - \lambda_k,$$

donde $\nu_k \geq \lambda_k$. Pelo Lema 1.2, $\nu_k^{p/p^*} \leq \lambda_k/S$, donde $\nu_k \geq \lambda_k \geq S\nu_k^{p/p^*}$ e assim $\nu_k = 0$ ou $\nu_k \geq S^{N/p}$. Suponha que exista $k_0 \in J$ com $\nu_{k_0} \neq 0$, isto é, $\nu_{k_0} \geq S^{N/p}$ então

$$\begin{aligned} c = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\mu}(u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_{\mu}(u_n) - \frac{1}{p} I'_{\mu}(u_n)(u_n) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mu \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} (u_n)^q \, dx + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\Omega} (u_n)^{p^*} \, dx \right] \\ &= \mu \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) |u|_q^q + \frac{1}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{p^*}^{p^*}. \end{aligned}$$

Fixando $\psi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $\bar{\Omega}$ e $\psi \equiv 0$ fora de uma vizinhança de $\bar{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n)^{p^*} \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n)^{p^*} \psi \, dx = \int_{\Omega} u^{p^*} \psi \, dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{k \in J} \nu_k \delta_{x_k} \right) \psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} u^{p^*} \, dx + \sum_{k \in J} \nu_k. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Assim,

$$\begin{aligned} c = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\mu}(u_n) &= \mu \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} u^q \, dx + \frac{1}{N} \int_{\Omega} u^{p^*} \, dx + \frac{1}{N} \sum_{k \in J} \nu_k \\ &\geq \mu \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} u^q \, dx + \frac{1}{N} \int_{\Omega} u^{p^*} \, dx + \frac{1}{N} S^{N/p} \\ &\geq \frac{1}{N} S^{N/p}, \end{aligned}$$

pois $\nu_{k_0} \geq S^{N/p}$, o que contradiz o fato de $c \in (0, S^{N/p}/N)$. Logo, $\nu_k = 0$ para todo $k \in J$

e assim, por (2.14),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n)^{p^*} dx = \int_{\Omega} u^{p^*} dx.$$

Por $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e pela imersão contínua temos $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\Omega)$, daí, juntamente com o fato de $|u_n|_{p^*}^{p^*} \rightarrow |u|_{p^*}^{p^*}$ podemos concluir, usando o Teorema C.17 e a Proposição C.18, que $u_n \rightarrow u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Agora, demonstremos que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ concluímos que (∇u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ e seguindo as ideias de [17] e [22] obtemos $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p. em Ω , logo, pelo Lema de Brezis-Lieb (Lema C.12),

$$|\nabla u_n|_p^p = |\nabla u_n - \nabla u|_p^p + |\nabla u|_p^p + o_n(1). \quad (2.15)$$

Tomando $v_n = u_n - u$ temos, de (2.15),

$$|\nabla u_n|_p^p = |\nabla v_n|_p^p + |\nabla u|_p^p + o_n(1). \quad (2.16)$$

Observe que, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $I'_\mu(u_n) \rightarrow 0$ logo, pela imersão compacta de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ mais a convergência $|u_n|_{p^*}^{p^*} \rightarrow |u|_{p^*}^{p^*}$ e a equação (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} o_n(1) = I'_\mu(u_n)(u_n) &= \|u_n\|^p - \mu |u_n|_q^q - |u_n|_{p^*}^{p^*} = |\nabla u_n|_p^p - \mu |u_n|_q^q - |u_n|_{p^*}^{p^*} \\ &= |\nabla v_n|_p^p + |\nabla u|_p^p - \mu |u_n|_q^q - |u_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\ &= |\nabla v_n|_p^p + \|u\|^p - \mu |u|_q^q - |u|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\ &= |\nabla v_n|_p^p + I'_\mu(u)(u) + o_n(1), \end{aligned} \quad (2.17)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Lema 2.12 u é solução fraca para o problema (P_μ) donde, em particular, $I'_\mu(u)(u) = 0$ e assim, de (2.17),

$$o_n(1) = |\nabla v_n|_p^p + o_n(1),$$

implicando que $|\nabla v_n|_p^p \rightarrow 0$. Logo, de (2.16), $|\nabla u_n|_p^p \rightarrow |\nabla u|_p^p$ e, conseqüentemente, $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Mostremos agora que o nível do passo da montanha \tilde{c}_μ pertence ao intervalo $(0, S^{N/p}/N)$. Para $\varepsilon > 0$, considere a função

$$U_\varepsilon(x) = (\varepsilon + |x - x_0|^{p/(p-1)})^{(p-N)/p}, \quad (2.18)$$

em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, em que U é dada por (1.16). Podemos assumir que $0 \in \Omega$, e considerar $x_0 = 0$ em (2.18). Seja agora $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem e $\text{supp } \phi \subset \Omega$. Defina $u_\varepsilon(x) = \phi(x)U_\varepsilon(x)$ e

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|_{p^*}}.$$

Daí, obtemos as seguintes estimativas (ver [7] e [13]):

$$|\nabla v_\varepsilon|_p^p = S + O(\varepsilon^{(N-p)/p}), \quad (2.19)$$

$$c_1 \varepsilon^{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]} \leq |v_\varepsilon|_q^q \leq c_2 \varepsilon^{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]}, \quad (2.20)$$

donde

$$|v_\varepsilon|_q^q \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.21)$$

Mostremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\max_{t \geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/p}}{N},$$

pois com isso teremos

$$\tilde{c}_\mu = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tv) \leq \max_{t \geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/p}}{N}.$$

Considere as funções de $[0, +\infty)$ em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} g(t) = I_\mu(tv_\varepsilon) &= \frac{t^p}{p} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - \mu \frac{t^q}{q} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int_\Omega v_\varepsilon^{p^*} dx \\ &= \frac{t^p}{p} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - \mu \frac{t^q}{q} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}, \end{aligned}$$

e

$$\bar{g}(t) = \frac{t^p}{p} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}.$$

Observe que

$$g(t) \rightarrow -\infty \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

então $\max_{t \geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon)$ é atingido para algum $t_\varepsilon > 0$, e dessa forma

$$\begin{aligned} 0 = g'(t_\varepsilon) &= t_\varepsilon^{p-1} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - \mu t_\varepsilon^{q-1} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx - t_\varepsilon^{p^*-1} \\ &= t_\varepsilon^{p-1} \left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx - \mu t_\varepsilon^{q-p} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx - t_\varepsilon^{p^*-p} \right), \end{aligned}$$

portanto

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx = \mu t_\varepsilon^{q-p} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx + t_\varepsilon^{p^*-p} \geq t_\varepsilon^{p^*-p},$$

isto é,

$$t_\varepsilon \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{1/p^*-p}. \quad (2.22)$$

Esta desigualdade implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx &= t_\varepsilon^{p^*-p} + \mu t_\varepsilon^{q-p} \int_{\Omega} v_\varepsilon^q dx \leq t_\varepsilon^{p^*-p} + \mu \left(\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{\frac{q-p}{p^*-p}} \int_{\Omega} v_\varepsilon^q dx \\ &= t_\varepsilon^{p^*-p} + \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{p(q-p)}{p^*-p}} |v_\varepsilon|_q^q, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} t_\varepsilon^{p^*-p} &\geq \|v_\varepsilon\|^p - \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{p(q-p)}{p^*-p}} |v_\varepsilon|_q^q \\ &= \|v_\varepsilon\|^p [1 - \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{p(q-p)}{p^*-p}-p} |v_\varepsilon|_q^q]. \end{aligned}$$

De (2.19) e (2.21) podemos escolher ε suficientemente pequeno de modo que

$$t_\varepsilon^{p^*-p} \geq \frac{S}{2}. \quad (2.23)$$

De forma análoga ao estudo da função g , podemos observar que a função \bar{g} atinge máximo e com isso existe $t > 0$ tal que $\bar{g}'(t) = 0$ implicando que

$$t = \left(\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{\frac{1}{p^*-p}},$$

e que \bar{g} é crescente no intervalo $[0, (\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx)^{\frac{1}{p^*-p}}]$. Logo, por (2.22),

$$\begin{aligned} g(t_\varepsilon) &= \bar{g}(t_\varepsilon) - \mu \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_{\Omega} v_\varepsilon^q dx \\ &\leq \bar{g} \left(\left(\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{\frac{1}{p^*-p}} \right) - \mu \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_{\Omega} v_\varepsilon^q dx. \end{aligned}$$

Note que, usando (2.19),

$$\begin{aligned} \bar{g} \left(\left(\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{\frac{1}{p^*-p}} \right) &= \frac{1}{p} \left(\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{\frac{p}{p^*-p}} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{1}{p^*} \left(\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &= \frac{1}{p} (\|v_\varepsilon\|^p)^{\frac{p}{p^*-p}} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{1}{p^*} (\|v_\varepsilon\|^p)^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &= \frac{1}{p} \|v_\varepsilon\|^{N-p} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{1}{p^*} \|v_\varepsilon\|^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{p} \|v_\varepsilon\|^N - \frac{1}{p^*} \|v_\varepsilon\|^N = \frac{1}{N} \|v_\varepsilon\|^N = \frac{1}{N} (\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p} = \frac{1}{N} [S + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p} \\
 &= \frac{1}{N} \left[S \left(1 + \frac{O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})}{S} \right) \right]^{N/p} = \frac{1}{N} S^{N/p} [1 + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p}.
 \end{aligned}$$

Assim, de (2.23)

$$g(t_\varepsilon) \leq \frac{1}{N} S^{N/p} [1 + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p} - \frac{\mu}{q} \left(\frac{S}{2} \right)^{\frac{q}{p^*-p}} \int_{\Omega} v_\varepsilon^q dx.$$

Escrevendo $f(t) = (1+t)^{N/p}$, do Teorema no Valor Médio, obtemos

$$[1 + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p} = \frac{N}{p} (1+\theta)^{\frac{N}{p}-1} O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + 1 = O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + 1, \quad \theta \in (0, O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})),$$

donde

$$\begin{aligned}
 g(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N} S^{N/p} + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) - \frac{\mu}{q} \left(\frac{S}{2} \right)^{\frac{q}{p^*-p}} \int_{\Omega} v_\varepsilon^q dx \\
 &\leq \frac{1}{N} S^{N/p} + c_3 \varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \frac{\mu}{q} \left(\frac{S}{2} \right)^{\frac{q}{p^*-p}} \int_{\Omega} v_\varepsilon^q dx.
 \end{aligned}$$

Logo, de (2.20) obtemos

$$\begin{aligned}
 g(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N} S^{N/p} + c_3 \varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \frac{\mu}{q} \left(\frac{S}{2} \right)^{\frac{q}{p^*-p}} c_1 \varepsilon^{\{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]\}} \\
 &\leq \frac{1}{N} S^{N/p} + c_3 \varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \mu c_4 \varepsilon^{\{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]\}},
 \end{aligned}$$

sendo $N \geq p^2$ então

$$\frac{N-p}{p} > \frac{p-1}{p} \left(N - \frac{q(N-p)}{p} \right).$$

De fato, caso contrário, por $p < q$ teríamos

$$\frac{N-p}{p} \leq \frac{p-1}{p} \left(N - \frac{q(N-p)}{p} \right) < \frac{p-1}{p} (N - (N-p)) = \frac{(p-1)}{p} p,$$

donde $N < p^2$, o que é uma contradição. Assim, para $\varepsilon \approx 0$ temos

$$c_3 \varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \mu c_4 \varepsilon^{\{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]\}} < 0.$$

Portanto,

$$\max_{t \geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) = \max_{t \geq 0} g(t) = g(t_\varepsilon) < \frac{S^{N/p}}{N},$$

e temos o resultado desejado. ■

2.2 Demonstração do Teorema principal

Demonstração do Teorema 2.1.

Pelo Lema 2.10, o funcional I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha, então existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_\mu(u_n) \rightarrow \tilde{c}_\mu \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } I'_\mu(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'.$$

Além disso, o Lema 2.13 nos garante a existência de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dessa convergência e da continuidade dos funcionais I_μ e I'_μ temos

$$I_\mu(u_n) \rightarrow I_\mu(u) \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } I'_\mu(u_n) \rightarrow I'_\mu(u) \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega),$$

implicando, pela unicidade do limite,

$$I_\mu(u) = \tilde{c}_\mu \text{ e } I'_\mu(u) = 0.$$

Portanto, u é um ponto crítico do funcional I_μ e, conseqüentemente, uma solução não trivial para o problema (P_μ) , visto que $\tilde{c}_\mu > 0$. ■

Capítulo 3

Categoria de Lusternik-Schnirelman

Neste capítulo apresentaremos definições e provaremos alguns resultados sobre a teoria de categoria, ferramenta essencial deste trabalho. A definição de categoria a seguir foi dada por Lusternik-Schnirelman (veja [19]).

Definição 3.1. *Um subconjunto fechado A é contrátil em um espaço topológico X se existem uma aplicação $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ contínua e $w \in X$ tais que*

$$h(0, u) = u, \quad h(1, u) = w, \quad \forall u \in A.$$

Proposição 3.2. [16, Corolário, p.12] *Seja X um espaço topológico. Se X é contrátil em X , então X é conexo por caminhos.*

Definição 3.3. *Sejam A, B e Y subconjuntos fechados de um espaço topológico X . Dizemos que A é deformado em B preservando Y , e denotamos por $A \prec_Y B$ em X , se $Y \subset A \cap B$ e se existe $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ contínua tal que*

(a) $h(0, u) = u, \quad h(1, u) \in B, \quad \forall u \in A;$

(b) $h(t, Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0, 1].$

Definição 3.4. *Sejam $Y \subset A$ subconjuntos fechados de um espaço topológico X . A categoria de A em X relativa a Y é o menor inteiro n tal que existem $n + 1$ subconjuntos fechados A_0, A_1, \dots, A_n em X satisfazendo:*

(a) $A = \bigcup_{j=0}^n A_j;$

(b) A_1, \dots, A_n são contráteis em X ;

(c) $A_0 \prec_Y Y$ em X .

A categoria de A em X relativa a Y é denotada por $\text{cat}_{X,Y}(A)$.

Definição 3.5. *Seja A um subconjunto fechado de um espaço topológico X . A categoria de A em X é o menor inteiro n tal que existem n subconjuntos A_1, \dots, A_n fechados e contráteis em X tais que $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Usamos a notação $\text{cat}_X(A)$.*

Observe que

$$\text{cat}_X(A) = \text{cat}_{X,\emptyset}(A),$$

e

$$\text{cat}_X(A) = +\infty, \text{ se } A \text{ não admite cobertura finita.}$$

Exemplo 3.6. (a) *Se B uma bola fechada do \mathbb{R}^N , então $\text{cat}_B(B) = \text{cat}_{\mathbb{R}^N}(B) = 1$;*

(b) *Se A um anel em \mathbb{R}^2 , então $\text{cat}_A(A) = 2$;*

(c) *Se \mathbb{T}^2 o toro em \mathbb{R}^3 , então $\text{cat}_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{T}^2) = 3$.*

Proposição 3.7. *Seja A um subconjunto finito e não vazio de um espaço topológico X . Se $\text{cat}_X(A) = n$ então A possui, pelo menos, n elementos.*

Demonstração. Se $\text{cat}_X(A) = 2$ então A não é unitário, pois a categoria de um conjunto unitário em X é igual a 1. Com isso, A possui, pelo menos, 2 elementos.

Suponha, por indução, que a proposição seja verdadeira para o inteiro n . Provaremos que o resultado é válido para $n + 1$. Se $\text{cat}_X(A) = n + 1$ então

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1},$$

em que $A_j, j = 1, \dots, n, n + 1$ são fechados e contráteis em X . Considere $Z = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, e como $A = Z \cup A_{n+1}$ temos $\text{cat}_X(Z) = n$, pois caso contrário teríamos uma contradição em $\text{cat}_X(A) = n + 1$. Logo, por hipótese, Z possui, pelo menos, n elementos. Agora, se $A_{n+1} \subset Z$ temos $Z = Z \cup A_{n+1} = A$ e assim $\text{cat}_X(A) = n$, o que também é uma contradição. Portanto, existe $y \in A_{n+1}$ tal que $y \notin Z$ onde A possui, pelo menos, $n + 1$ elementos. Dessa forma, o resultado é válido para $n + 1$ e, conseqüentemente, temos o desejado. ■

Lema 3.8. *Sejam A, B, C e Y subconjuntos fechados de X tais que $Y \subset A \cap B \cap C$. Se $A \prec_Y B$ e $B \prec_Y C$ em X , então $A \prec_Y C$ em X .*

Demonstração. Por hipótese, existem as deformações

$h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ contínua tal que

$$\begin{aligned} h(0, u) &= u, h(1, u) \in B, \forall u \in A; \\ h(t, Y) &\subset Y, \forall t \in [0, 1], \end{aligned}$$

e $g : [0, 1] \times B \rightarrow X$ contínua tal que

$$\begin{aligned} g(0, u) &= u, g(1, u) \in C, \forall u \in B; \\ g(t, Y) &\subset Y, \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Com isso, considere a deformação $f : [0, 1] \times A \rightarrow X$ dada por

$$f(t, u) = \begin{cases} h(2t, u), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in A, \\ g(2t - 1, h(1, u)), & \frac{1}{2} < t \leq 1, u \in A. \end{cases}$$

Observe que f é contínua, uma vez que os limites laterais quando t tende a $1/2$ são iguais à $h(1, u)$, e que

$$\begin{aligned} f(0, u) &= h(0, u) = u, \forall u \in A; \\ f(1, u) &= g(2 \cdot 1 - 1, h(1, u)) = g(1, h(1, u)) \in C, \forall u \in A, \text{ pois } h(1, u) \in B. \end{aligned}$$

Para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $u \in Y$,

$$f(t, u) = h(2t, u) \in Y,$$

e para $\frac{1}{2} < t \leq 1$ e $u \in Y$,

$$f(t, u) = g(2t - 1, h(1, u)) \in Y, \text{ pois } h(1, u) \in Y \text{ uma vez que } u \in Y.$$

Portanto $f(t, Y) \subset Y$, para todo $t \in [0, 1]$, provando assim que $A \prec_Y C$ em X . ■

Proposição 3.9. *Sejam A, B, Y subconjuntos fechados de X tais que $Y \subset A$. A categoria relativa satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) *Normalização:* $cat_{X,Y}(Y) = 0$;
- (b) *Subaditividade:* $cat_{X,Y}(A \cup B) \leq cat_{X,Y}(A) + cat_X(B)$;
- (c) *Monotonicidade:* $A \prec_Y B \Rightarrow cat_{X,Y}(A) \leq cat_{X,Y}(B)$.

Demonstração.

(a) Considerando $A_0 = Y$, temos $A_0 \prec_Y Y$ em X , pois $Y \subset A_0 \cap Y$,

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times A_0 &\longrightarrow X \\ (t, u) &\longmapsto h(t, u) = u \end{aligned}$$

é contínua e satisfaz

$$h(0, u) = u, \quad h(1, u) \in Y, \quad \forall u \in A_0; \quad \text{e } h(t, Y) \subset Y \quad \forall t \in [0, 1].$$

Logo, $\text{cat}_{X,Y}(Y) = 0$.

(b) Suponha $\text{cat}_{X,Y}(A) = n$ e $\text{cat}_X(B) = m$, ou seja, existem A_0, A_1, \dots, A_n subconjuntos fechados em X tais que

$$A = \bigcup_{j=0}^n A_j, \quad A_1, \dots, A_n \text{ são contráteis em } X, \quad A_0 \prec_Y Y \text{ em } X,$$

e existem também B_1, \dots, B_m fechados e contráteis em X tais que

$$B = \bigcup_{k=1}^m B_k.$$

Assim,

$$A \cup B = A_0 \cup [A_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_m],$$

em que $n + m$ é uma cota superior para a quantidade de elementos na união entre colchetes de conjuntos contráteis em X , e como $A_0 \prec_Y Y$ concluímos que $\text{cat}_{X,Y}(A \cup B) \leq n + m = \text{cat}_{X,Y}(A) + \text{cat}_X(B)$.

(c) Suponha $A \prec_Y B$ pela deformação h , isto é, $Y \subset A \cap B$ e $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ é contínua satisfazendo

$$h(0, u) = u, \quad h(1, u) \in B, \quad \forall u \in A \text{ e } h(t, Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Se $\text{cat}_{X,Y}(B) = \infty$, o resultado é imediato. Agora, se $\text{cat}_{X,Y}(B) = n$, seja (B_0, B_1, \dots, B_n) a cobertura fechada de B correspondente. Defina

$$A_j = \{u \in A : h(1, u) \in B_j\}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Com isso, temos:

(i) $A = \bigcup_{j=0}^n A_j$. De fato, que $A_j \subset A$ é imediato. Por outro lado, dado $u \in A$ temos $h(1, u) \in B$, e sabendo que (B_0, B_1, \dots, B_n) é uma cobertura fechada de B obtemos

$B = \bigcup_{j=0}^n B_j$. Daí, $h(1, u) \in B_j$ para algum $j = 0, 1, 2, \dots, n$, e assim $u \in A_j$. Portanto, $A \subset A_j$ para algum $j = 0, 1, 2, \dots, n$ e, conseqüentemente, temos a igualdade desejada.

- (ii) Afirmamos que $A_0 \prec_Y B_0$. De fato, a cobertura (B_0, B_1, \dots, B_n) satisfaz $B_0 \prec_Y Y$ em X , o que nos dá que $Y \subset B_0$. Note que, $Y \subset B_0$ implica, pela definição de A_j e por $Y \subset A$, que $Y \subset A_0$, pois

$$u \in Y \Rightarrow h(1, u) \in Y \subset B_0 \Rightarrow u \in A_0.$$

Portanto, $Y \subset A_0 \cap B_0$. Agora, definindo

$$\begin{aligned} h_0 : [0, 1] \times A_0 &\longrightarrow X \\ (t, u) &\longmapsto h_0(t, u) = h(t, u) \end{aligned}$$

obtemos, h_0 contínua;

$$\begin{aligned} h_0(0, u) = h(0, u) = u, \quad h_0(1, u) = h(1, u) \in B_0, \quad \forall u \in A_0; \\ h_0(t, Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0, 1], \end{aligned}$$

justificando assim a afirmação. Logo, de $B_0 \prec_Y Y$, segue do Lema 3.8 que $A_0 \prec_Y Y$.

- (iii) $A_j \prec_{\emptyset} B_j$, $j = 1, \dots, n$. De fato, defina

$$\begin{aligned} h_j : [0, 1] \times A_j &\longrightarrow X \\ (t, u) &\longmapsto h_j(t, u) = h(t, u). \end{aligned}$$

Sendo B_j contrátil, considere $g_j : [0, 1] \times B_j \rightarrow X$ a respectiva deformação e também $f_j : [0, 1] \times A_j \rightarrow X$ dada por

$$f_j(t, u) = \begin{cases} h_j(2t, u), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad u \in A_j, \\ g_j(2t - 1, h_j(1, u)), & \frac{1}{2} < t \leq 1, \quad u \in A_j. \end{cases}$$

Observe que f_j é contínua, uma vez que seus limites laterais com t tendendo a $1/2$ coincidem. Além disso, essas funções implicam que os conjuntos A_j são contráteis em X , pois

$$f_j(0, u) = h_j(0, u) = h(0, u) = u, \quad \forall u \in A_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

e dados $u, v \in A_j$, $j = 1, \dots, n$, temos:

$$f_j(1, u) = g_j(1, h_j(1, u)) = g_j(1, h(1, u)),$$

$$f_j(1, v) = g_j(1, h_j(1, v)) = g_j(1, h(1, v)),$$

como cada B_j é contrátil, então $g_j(1, h(1, u)) = g_j(1, h(1, v))$. Daí, $f_j(1, u) = f_j(1, v)$, para todo $u, v \in A_j, j = 1, \dots, n$. Portanto, cada A_j com $j = 1, \dots, n$ é contrátil em X . Finalmente, definindo a função

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto f(u) = h(1, u), \end{aligned}$$

obtemos que a mesma é contínua e que $A_j = f^{-1}(B_j)$, donde cada $A_j, j = 0, \dots, n$ é fechado em X . Logo, dos itens (i), (ii) e (iii), concluímos que $\text{cat}_{X,Y}(A) \leq n = \text{cat}_{X,Y}(B)$. ■

Proposição 3.10. [25, Proposição 5.7] *Seja $\phi_{X,Y}$ uma função definida na classe de subconjuntos fechados de X que contém Y . Se $\phi_{X,Y}$ satisfaz as propriedades (a), (b), (c) da Proposição 3.9, então $\phi_{X,Y} \leq \text{cat}_{X,Y}$.*

Podemos concluir da proposição anterior que, dentre as funções que satisfazem as três propriedades da Proposição 3.9, a $\text{cat}_{X,Y}$ é a que possui maior valor e, portanto, será a melhor função para buscarmos a multiplicidade de soluções, como veremos no Capítulo 4.

Definição 3.11. *Um espaço métrico X é um extensor absoluto de vizinhança (EAV), se para todo espaço métrico E , para todo subconjunto fechado F de E e toda aplicação contínua $f : F \rightarrow X$, existe uma extensão contínua de f definida em uma vizinhança de F em E .*

Definição 3.12. *Um espaço topológico X é normal se para todo par de conjuntos disjuntos fechados A e B de X existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.*

Observação 3.13. *Todo espaço métrico X é normal. De fato, dados A e B fechados e disjuntos em X basta considerar a função de Urysohn $f : X \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$f(x) = \frac{\text{dist}(x, A)}{\text{dist}(x, A) + \text{dist}(x, B)}.$$

Proposição 3.14. *Seja A um subconjunto fechado de um EAV X . Então existe uma vizinhança fechada B de A em X tal que $\text{cat}_X(B) = \text{cat}_X(A)$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\text{cat}_X(A) = 1$, ou seja, que A é fechado e contrátil, e considere $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ a deformação correspondente. O conjunto

$$N = ([0, 1] \times A) \cup (\{0, 1\} \times X)$$

é fechado em $M = [0, 1] \times X$. A aplicação $f : N \rightarrow X$ dada por

$$f(t, u) = \begin{cases} h(t, u), & t \in [0, 1], u \in A, \\ u, & t = 0, u \in X, \\ h(1, u_0), & t = 1, u \in X, \end{cases}$$

onde $u_0 \in A$ é fixo, é contínua. Por hipótese, X é um EAV donde existe uma extensão contínua g de f definida em uma vizinhança U de N em M . Como M é um espaço métrico, segue da Observação 3.13 que o mesmo é normal. Logo, podemos supor U fechado. De fato, sendo N e U^c fechados disjuntos de M , existe $\tilde{f} : M \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $\tilde{f}(N) = \{0\}$ e $\tilde{f}(U^c) = \{1\}$; considerando então $\tilde{U} = \{x \in M : \tilde{f}(x) \leq \frac{1}{2}\}$, temos \tilde{U} fechado com $N \subset \tilde{U} \subset U$, pois

$$x \in N \Rightarrow \tilde{f}(x) = 0 < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \tilde{U} \Rightarrow N \subset \tilde{U}$$

e

$$x \in U^c \Rightarrow \tilde{f}(x) = 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \tilde{U}^c \Rightarrow U^c \subset \tilde{U}^c \Rightarrow \tilde{U} \subset U.$$

Além disso, de $([0, 1] \times A) \subset N \subset U$, temos $([0, 1] \times A) \cap \partial U = \emptyset$. Considerando a projeção

$$\begin{aligned} \pi : [0, 1] \times X &\longrightarrow X \\ (t, u) &\longmapsto \pi(t, u) = u, \end{aligned}$$

afirmamos que $\pi(\partial U) \cap A = \emptyset$. Com efeito, suponha por absurdo que exista $v \in \pi(\partial U) \cap A$, então existe $(t, v) \in [0, 1] \times \partial U$ tal que $\pi(t, v) = v$, mas como $v \in A$ e $t \in [0, 1]$ temos um absurdo, pois $([0, 1] \times A) \cap \partial U = \emptyset$. Assim, fazendo $B = \pi(U) \setminus \text{int}(\pi(\partial U))$ temos B fechado, $A \subset B$ e $([0, 1] \times B) \subset U$. Com isso, B é contrátil em X , visto que $g : U \rightarrow X$ é contínua e como $([0, 1] \times B) \subset U$ tome

$$\phi = g|_{[0,1] \times B} : [0, 1] \times B \rightarrow X,$$

que é contínua e, se $u \in B$ então $u \in A$ ou $u \in (B \setminus A)$. Se $u \in A$, então $(0, u), (1, u) \in N$ e

$$\phi(0, u) = g(0, u) = f(0, u) = u;$$

$$\phi(1, u) = g(1, u) = f(1, u) = h(1, u_0),$$

e se $u \in (B \setminus A)$, então $u \in X$ de modo que $(0, u), (1, u) \in N$, assim

$$\phi(0, u) = g(0, u) = f(0, u) = u,$$

e

$$\phi(1, u) = g(1, u) = f(1, u) = h(1, u_0).$$

Em vista disso,

$$\phi(0, u) = u \text{ e } \phi(1, u) = h(1, u_0), \quad \forall u \in B,$$

logo B é contrátil, donde

$$\text{cat}_X(B) = 1 = \text{cat}_X(A).$$

Se $\text{cat}_X(A) = n$, então $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, em que cada A_i é fechado e contrátil, isto é, $\text{cat}_X(A_i) = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Como visto anteriormente, existe B_i vizinhança fechada de A_i tal que $\text{cat}_X(B_i) = \text{cat}_X(A_i)$. Definindo $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, temos B vizinhança fechada de A com cada B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, contrátil, donde

$$\text{cat}_X(B) \leq n = \text{cat}_X(A). \quad (3.1)$$

Por outro lado, $A \subset B$ implica $A \prec_{\emptyset} B$. De fato, tomando

$$\begin{aligned} \psi : [0, 1] \times A &\longrightarrow X \\ (t, u) &\longmapsto \psi(t, u) = u, \end{aligned}$$

temos ψ contínua e,

$$\psi(0, u) = u, \quad \psi(1, u) = u \in B, \quad \forall u \in A.$$

Logo, do item (c) da Proposição 3.9,

$$\text{cat}_X(A) = \text{cat}_{X, \emptyset}(A) \leq \text{cat}_{X, \emptyset}(B) = \text{cat}_X(B). \quad (3.2)$$

Pelas desigualdades (3.1) e (3.2) obtemos

$$\text{cat}_X(A) = \text{cat}_X(B).$$

■

Capítulo 4

Multiplicidade de soluções para (P_μ)

Neste capítulo, seguindo [1] estudaremos a multiplicidade de soluções para o problema elíptico crítico (P_μ) , enunciado no Capítulo 2, fazendo uso da teoria de categoria desenvolvida no Capítulo 3.

O resultado principal deste capítulo é dado pelo seguinte:

Teorema 4.1. *Seja Ω um domínio limitado suave de \mathbb{R}^N , $N \geq p^2$ e $2 \leq p < q < p^*$. Então existe $\mu^* > 0$ tal que, para cada $\mu \in (0, \mu^*)$, o problema (P_μ) possui, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

4.1 Preliminares

Considere a variedade de Nehari associada ao funcional I_μ ,

$$\mathcal{N}_\mu = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I'_\mu(u)u = 0\}.$$

Proposição 4.2. *O número $c_\mu = \inf\{I_\mu(u) : u \in \mathcal{N}_\mu\}$ está bem definido.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $I_\mu(u)$ é limitado inferiormente na variedade \mathcal{N}_μ . Dado $u \in \mathcal{N}_\mu$ temos $u \neq 0$ e

$$I'_\mu(u)u = \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \mu \int_\Omega (u^+)^q dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*} dx = 0,$$

ou seja,

$$\|u\|^p = \mu |u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\mu}{q}|u^+|_q^q - \frac{1}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{p}\left(\mu|u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}\right) - \frac{\mu}{q}|u^+|_q^q - \frac{1}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \mu|u^+|_q^q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + |u^+|_{p^*}^{p^*}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right), \end{aligned}$$

e sendo $2 \leq p < q < p^*$ temos $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$ e $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) > 0$, assim $I_\mu(u) > 0$. Portanto, 0 é cota inferior para o conjunto $\{I_\mu(u) : u \in \mathcal{N}_\mu\}$ donde c_μ está bem definido. ■

Lema 4.3. Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ existe único $t_u \in (0, +\infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\mu$ e

$$\max_{t \geq 0} I_\mu(tu) = I_\mu(t_u u).$$

Demonstração. Dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, defina

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = I_\mu(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|^p - \frac{\mu t^q}{q}|u^+|_q^q - \frac{t^{p^*}}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*}. \end{aligned}$$

A função f admite um ponto de máximo, ou seja, existe $t_u \in (0, \infty)$ tal que

$$\max_{t \geq 0} I_\mu(tu) = I_\mu(t_u u).$$

Observe que $t_u u \in \mathcal{N}_\mu$, pois $t_u u \neq 0$ e pelo fato de I_μ , em particular, pertencer a $\mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ temos

$$f'(t_u) = 0 \Leftrightarrow I'_\mu(t_u u)u = 0 \Leftrightarrow t_u I'_\mu(t_u u)u = 0 \Leftrightarrow I'_\mu(t_u u)(t_u u) = 0.$$

Agora, t_u é único pois

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^{p-1}\|u\|^p - \mu t^{q-1}|u^+|_q^q - t^{p^*-1}|u^+|_{p^*}^{p^*} = 0 \Leftrightarrow \|u\|^p = \mu t^{q-p}|u^+|_q^q + t^{p^*-p}|u^+|_{p^*}^{p^*},$$

assim, se existissem t_1 e t_2 distintos tais que $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$, teríamos

$$\|u\|^p = \mu t_1^{q-p}|u^+|_q^q + t_1^{p^*-p}|u^+|_{p^*}^{p^*} \quad \text{e} \quad \|u\|^p = \mu t_2^{q-p}|u^+|_q^q + t_2^{p^*-p}|u^+|_{p^*}^{p^*},$$

que seria um absurdo. Logo, f possui único ponto de máximo e assim t_u é único. ■

Corolário 4.4. *Se $u \in \mathcal{N}_\mu$ então*

$$I_\mu(u) = \max_{t \geq 0} I_\mu(tu).$$

Lema 4.5. *Se $N \geq p^2$ e $p < q < p^*$, temos $c_\mu = \tilde{c}_\mu$ para $\mu > 0$, em que \tilde{c}_μ é o nível do passo da montanha de I_μ dado em (2.5).*

Demonstração. Do Teorema do Passo da Montanha, Teorema 2.3, existe $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_\mu(u_n) \rightarrow \tilde{c}_\mu \text{ e } I'_\mu(u_n) \rightarrow 0.$$

E, do Lema 2.13, I_μ satisfaz a condição $(PS)_{\tilde{c}_\mu}$, daí existe $u_\mu \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$u_n \rightarrow u_\mu \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pela continuidade de I_μ e I'_μ obtemos

$$I_\mu(u_n) \rightarrow I_\mu(u_\mu) \text{ e } I'_\mu(u_n) \rightarrow I'_\mu(u_\mu),$$

respectivamente, implicando, pela unicidade do limite, que

$$I_\mu(u_\mu) = \tilde{c}_\mu \text{ e } I'_\mu(u_\mu) = 0.$$

Agora, observando que $I_\mu(0) = 0$ e $\tilde{c}_\mu > 0$, temos $u_\mu \neq 0$ e assim $u_\mu \in \mathcal{N}_\mu$. Como $u_\mu \in \mathcal{N}_\mu$ e $I_\mu(u_\mu) = \tilde{c}_\mu$, então

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) \leq I_\mu(u_\mu) = \tilde{c}_\mu. \quad (4.1)$$

Por outro lado, dado $v \in \mathcal{N}_\mu$ temos, pelo Corolário 4.4,

$$I_\mu(v) = \max_{t \geq 0} I_\mu(tv) \geq \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tu) = \tilde{c}_\mu,$$

ou seja, \tilde{c}_μ é uma cota inferior para o conjunto $\{I_\mu(u) : u \in \mathcal{N}_\mu\}$ e como c_μ é a maior das cotas inferiores deste conjunto, segue

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) \geq \tilde{c}_\mu. \quad (4.2)$$

Logo, de (4.1) e (4.2) concluímos que

$$c_\mu = \tilde{c}_\mu. \quad \blacksquare$$

Lema 4.6. *Se $\mu_2 \leq \mu_1$ então $c_{\mu_1} \leq c_{\mu_2}$, isto é, c_μ é não-crescente em μ .*

Demonstração. O funcional I_μ nos dá que, se $\mu_2 \leq \mu_1$ então para quaisquer $t \in [0, \infty)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ temos

$$I_{\mu_1}(tu) \leq I_{\mu_2}(tu),$$

logo

$$\max_{t \geq 0} I_{\mu_2}(tu) \geq \max_{t \geq 0} I_{\mu_1}(tu) \geq \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_{\mu_1}(tu) = \tilde{c}_{\mu_1},$$

e pelo Lema 4.5 obtemos

$$c_{\mu_2} = \tilde{c}_{\mu_2} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_{\mu_2}(tu) \geq \tilde{c}_{\mu_1} = c_{\mu_1},$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 4.7. *O funcional*

$$I_0(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} (u^+)^{p^*} dx,$$

satisfaz a geometria do passo da montanha.

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 2.10. ■

Proposição 4.8. *Para qualquer $\Lambda > 0$ existe $\rho = \rho(\Lambda)$, relacionado a geometria do passo da montanha, tal que*

$$0 < \rho \leq c_\mu \leq c_0, \quad \forall \mu \in [0, \Lambda],$$

em que c_0 é o nível do passo da montanha associado ao funcional I_0 .

Demonstração. Dado $t \in [0, \infty)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, como $\mu > 0$ temos

$$I_\mu(tu) \leq I_0(tu),$$

donde

$$\max_{t \geq 0} I_0(tu) \geq \max_{t \geq 0} I_\mu(tu) \geq \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tu) = \tilde{c}_\mu,$$

ou seja, \tilde{c}_μ é uma cota inferior para o conjunto $\{\max_{t \geq 0} I_0(tu) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}$. Usando o Lema 4.5 e a definição de ínfimo, temos

$$c_0 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_0(tu) \geq \tilde{c}_\mu = c_\mu. \quad (4.3)$$

Agora, se $\mu \in [0, \Lambda]$, então $\mu \leq \Lambda$ e, pelo Lema 4.6,

$$c_\Lambda \leq c_\mu. \quad (4.4)$$

Como I_Λ satisfaz a geometria do passo da montanha, sejam $\rho > 0$ e $r > 0$ tais que

$$\rho = \inf_{\|u\|=r} I_\Lambda(u),$$

logo, $I_\Lambda(u) \geq \rho$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = r$. Observe que ρ é cota inferior para o conjunto $\{\max_{t \geq 0} I_\Lambda(tu) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}$. De fato, dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, existe $t_0 > 0$ em \mathbb{R} tal que $\|t_0 u\| = r$, daí

$$I_\Lambda(t_0 u) \geq \rho,$$

então

$$\max_{t \geq 0} I_\Lambda(tu) \geq I_\Lambda(t_0 u) \geq \rho.$$

Portanto, novamente pelo Lema 4.5,

$$c_\Lambda = \tilde{c}_\Lambda = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\Lambda(tu) \geq \rho. \quad (4.5)$$

Por (4.3), (4.4) e (4.5) obtemos

$$0 < \rho \leq c_\Lambda \leq c_\mu \leq c_0.$$

■

Apresentemos agora as seguintes funções. Dado $r > 0$, seja $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função não negativa que satisfaça $\text{supp } \psi \subset B_r(0)$ e $\psi \equiv 1$ em $B_{r/2}(0)$. Para $\varepsilon > 0$ seja

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C_N \psi(x) \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}}{[\varepsilon^{p/(p-1)} + |x|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}},$$

com

$$C_N = \left[N \left(\frac{N-p}{p-1} \right)^{p-1} \right]^{(N-p)/p^2}.$$

Segundo [14] ou [21] temos as seguintes estimativas:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^p dx = S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{p^*} dx = S^{N/p} + O(\varepsilon^{N/(p-1)}).$$

Seja

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|_{p^*}}, \quad (4.6)$$

então v_ε é radial, não negativa e satisfaz

$$\|v_\varepsilon\|^p \leq S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}). \quad (4.7)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|^p &= \frac{\|u_\varepsilon\|^p}{|u_\varepsilon|_{p^*}^p} = \frac{S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[S^{N/p} + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} = \frac{S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{\left[S^{N/p} \left(1 + \frac{O(\varepsilon^{N/(p-1)})}{S^{N/p}} \right) \right]^{p/p^*}} \\ &= \frac{S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{S^{(N-p)/p} [1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} \\ &= \frac{S^{N/p}}{S^{(N-p)/p} [1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} + \frac{O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{S^{(N-p)/p} [1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} \\ &= \frac{S}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} + \frac{O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} \\ &= \frac{S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}}, \end{aligned}$$

e fazendo $f(t) = (1+t)^{-p/p^*}$ obtemos, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} f(O(\varepsilon^{N/(p-1)})) &= \frac{1}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} = 1 - \frac{p}{p^*} (1 + \theta)^{(-p/p^*)-1} O(\varepsilon^{N/(p-1)}) \\ &= 1 - O(\varepsilon^{N/(p-1)}), \quad \theta \in (0, O(\varepsilon^{N/(p-1)})). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|^p &= \frac{S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} = [S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})][1 - O(\varepsilon^{N/(p-1)})] \\ &= S - O(\varepsilon^{N/(p-1)}) + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}) - O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})O(\varepsilon^{N/(p-1)}) \\ &\leq S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}). \end{aligned}$$

Lema 4.9. $c_0 = \frac{S^{N/p}}{N}$.

Demonstração. Seja v_ε definida em (4.6). Sendo $|v_\varepsilon|_{p^*} = 1$ obtemos, pelas

desigualdades $S \leq \|v_\varepsilon\|^p$ e (4.7), que

$$\|v_\varepsilon\|^p \rightarrow S, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Defina

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = I_0(tv_\varepsilon) = \frac{t^p}{p} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*} |v_\varepsilon|_{p^*}^{p^*}, \end{aligned}$$

e note que g assume máximo, donde existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$g'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon^{p-1} \|v_\varepsilon\|^p - t_\varepsilon^{p^*-1} |v_\varepsilon|_{p^*}^{p^*} = I'_0(t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon = 0.$$

Daí,

$$t_\varepsilon^{p-1} (\|v_\varepsilon\|^p - t_\varepsilon^{p^*-p}) = 0 \Rightarrow t_\varepsilon^{p^*-p} = \|v_\varepsilon\|^p \Rightarrow t_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|^{p/(p^*-p)},$$

logo,

$$\frac{1}{N} t_\varepsilon^{p^*} = \frac{1}{N} (\|v_\varepsilon\|^{p/(p^*-p)})^{p^*} = \frac{1}{N} \|v_\varepsilon\|^{pp^*/(p^*-p)} = \frac{1}{N} (\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p}$$

e com isso,

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_0(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_0(tv_\varepsilon) = I_0(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \frac{t_\varepsilon^p}{p} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{t_\varepsilon^{p^*}}{p^*} |v_\varepsilon|_{p^*}^{p^*} \\ &= \frac{t_\varepsilon^{p+(p^*-p)}}{p} - \frac{t_\varepsilon^{p^*}}{p^*} = \frac{1}{N} t_\varepsilon^{p^*} = \frac{1}{N} (\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p}. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, de (4.8), obtemos

$$\frac{1}{N} (\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p} \rightarrow \frac{1}{N} S^{N/p},$$

ou seja, tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos

$$c_0 \leq \frac{1}{N} S^{N/p}. \quad (4.9)$$

Por outro lado, pela Proposição 4.7, o funcional I_0 satisfaz a geometria do passo da montanha, logo existe $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ verificando

$$I_0(u_n) \rightarrow c_0 \text{ e } I'_0(u_n) \rightarrow 0.$$

Afirmamos que a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, para n suficientemente

grande, temos

$$I_0(u_n) \leq c_0 + 1,$$

e como

$$-\frac{1}{p^*} I'_0(u_n)(u_n) \leq \left| -\frac{1}{p^*} I'_0(u_n)(u_n) \right| \leq \frac{1}{p^*} \|I'_0(u_n)\| \|u_n\|$$

e $\|I'_0(u_n)\| \rightarrow 0$, para n suficientemente grande, temos $\frac{1}{p^*} \|I'_0(u)\| \ll 1$ donde

$$-\frac{1}{p^*} I'_0(u_n)(u_n) \leq \|u_n\|.$$

Logo, para n suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} c_0 + 1 + \|u_n\| &\geq I_0(u_n) - \frac{1}{p^*} I'_0(u_n)(u_n) = \frac{1}{p} \|u_n\|^p - \frac{1}{p^*} |u_n^+|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{p^*} \|u_n\|^p + \frac{1}{p^*} |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pois, caso contrário, a menos de uma subsequência, teríamos $\|u_n\| \rightarrow \infty$ e daí

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \leq \frac{c_0 + 1}{\|u_n\|^p} + \frac{1}{\|u_n\|^{p-1}} \rightarrow 0,$$

o que seria um absurdo. Desse modo, a menos de uma subsequência, podemos assumir $\|u_n\|^p \rightarrow l$ para algum $l \in (0, +\infty)$, visto que, de

$$\|u_n^-\|^p = I'_0(u_n)(u_n^-) \rightarrow 0$$

podemos assumir $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e ainda, se tivéssemos $\|u_n\|^p \rightarrow 0$ então pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ teríamos a existência de $\alpha_1 > 0$ tal que

$$|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \leq |u_n|_{p^*}^{p^*} \leq \alpha_1 \|u_n\|^{p^*} = \alpha_1 (\|u_n\|^p)^{p^*/p} \rightarrow 0 \Rightarrow |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \rightarrow 0,$$

donde,

$$I_0(u_n) = \frac{1}{p} \|u_n\|^p + \frac{1}{p^*} |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \rightarrow 0,$$

nos dando um absurdo, já que $c_0 > 0$. Logo, de

$$I'_0(u_n)u_n = \|u_n\|^p - |u_n|_{p^*}^{p^*} \rightarrow 0 \text{ e } \|u_n\|^p \rightarrow l \text{ com } l > 0,$$

obtemos

$$|u_n|_{p^*}^{p^*} \rightarrow l. \quad (4.10)$$

Considerando $v_n = \frac{u_n}{|u_n|_{p^*}}$, temos $|v_n|_{p^*} = 1$ e

$$S \leq \|v_n\|^p = \frac{\|u_n\|^p}{|u_n|_{p^*}^p} \rightarrow l^{p/N},$$

isto é,

$$S \leq l^{p/N}. \quad (4.11)$$

Agora, sabemos que

$$I_0(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p^*}^{p^*} \rightarrow c_0$$

mas, de (4.10), temos

$$\frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p^*}^{p^*} \rightarrow \frac{l}{p} - \frac{l}{p^*} = \frac{l}{N},$$

e assim $l = c_0 N$, donde concluimos por (4.11) que

$$(Nc_0)^{p/N} \geq S \Rightarrow c_0 \geq \frac{S^{N/p}}{N}. \quad (4.12)$$

Portanto, das desigualdades (4.9) e (4.12) obtemos

$$c_0 = \frac{S^{N/p}}{N}.$$

■

Observação 4.10. a) Se G é um domínio limitado de \mathbb{R}^N , o nível do passo da montanha relacionado aos funcionais

$$I_{0,G}(u) = \frac{1}{p} \int_G |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p^*} \int_G (u^+)^{p^*} dx$$

e

$$\tilde{I}_{0,G}(u) = \frac{1}{p} \int_G |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p^*} \int_G |u|^{p^*} dx$$

é $\frac{S^{N/p}}{N}$, isto é, o nível do passo da montanha de $I_{0,G}$ independe do domínio G .

b) Vimos na demonstração do Lema 2.11 que podemos assumir que todas as seqüências de Palais-Smale de I_μ são não negativas.

Lema 4.11. *Se $\mu_n \rightarrow 0$, então $c_{\mu_n} \rightarrow c_0$.*

Demonstração. Sabemos que

$$c_{\mu_n} \leq c_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $c_{\mu_n} = c_0$, o resultado segue. Para n suficientemente grande, $c_{\mu_n} < c_0$, então pelos Lemas 2.13 e 4.9 I_{μ} satisfaz a condição $(PS)_{c_{\mu_n}}$. Logo, pelo Lema 4.5, para cada n natural, existe uma seqüência $(u_k) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \geq 0$,

$$I_{\mu_n}(u_k) \rightarrow c_{\mu_n} \quad \text{e} \quad I'_{\mu_n}(u_k) \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty.$$

Além disso, a menos de uma subsequência, para cada n existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u_n$, quando $k \rightarrow +\infty$, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, daí,

$$I_{\mu_n}(u_k) \rightarrow I_{\mu_n}(u_n) \quad \text{e} \quad I'_{\mu_n}(u_k) \rightarrow I'_{\mu_n}(u_n), \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty.$$

Portanto, a seqüência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que $u_n \geq 0$ e satisfaz

$$I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n} \quad \text{e} \quad I'_{\mu_n}(u_n) = 0$$

e, adaptando a demonstração do Lema 4.3, existe $(t_n) \subset (0, +\infty)$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{N}_0 = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I'_0(u)u = 0\}$ e I_0 atinge máximo em $t_n u_n$. Note que,

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_0(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_0(tu_n) = I_0(t_n u_n) = I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n}{q} \int_{\Omega} [(t_n u_n)^+]^q dx \\ &= I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n t_n^q}{q} \int_{\Omega} (u_n)^q dx = I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n t_n^q}{q} |u_n|_q^q. \end{aligned}$$

Como $I'_{\mu_n}(u_n) = 0$ então $I'_{\mu_n}(u_n)u_n = 0$ e, conseqüentemente, $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo

$$I_{\mu_n}(t_n u_n) \leq \max_{t \geq 0} I_{\mu_n}(tu_n) = I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n},$$

e com isso,

$$c_0 \leq c_{\mu_n} + \frac{\mu_n t_n^q}{q} |u_n|_q^q. \quad (4.13)$$

A seqüência (t_n) é limitada. De fato, suponha por contradição que, a menos de uma subsequência, $t_n \rightarrow \infty$. Sendo $c_{\mu_n} \leq c_0$ então (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pois,

$$\begin{aligned}
 c_{\mu_n} &= I_{\mu_n}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\mu_n}(u_n) u_n \\
 &= \frac{1}{p} \|u_n\|^p - \frac{\mu_n}{q} |u_n^+|_q^q - \frac{1}{p^*} |u_n^+|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{q} \|u_n\|^p + \frac{\mu_n}{q} |u_n^+|_q^q + \frac{1}{q} |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \\
 &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \leq c_0.
 \end{aligned}$$

E, como $t_n u_n \in \mathcal{N}_0$ temos $\max_{t \geq 0} I_0(tu_n) = I_0(t_n u_n)$, ou seja,

$$\left. \frac{d}{dt} I_0(tu_n) \right|_{t=t_n} = 0 \Rightarrow \|u_n\|^p = t_n^{p^*-p} |u_n|_{p^*}^{p^*},$$

donde $|u_n|_{p^*}^{p^*} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Daí, pela desigualdade de interpolação (Proposição A.8), $|u_n|_q^q \rightarrow 0$. Além disso, de $I'_{\mu_n}(u_n) u_n = 0$, obtemos

$$\|u_n\|^p = \mu_n |u_n|_q^q + |u_n|_{p^*}^{p^*},$$

implicando que $\|u_n\|^p \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, da igualdade

$$c_{\mu_n} = I_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{p} \|u_n\|^p - \frac{\mu_n}{q} |u_n|_q^q - \frac{1}{p^*} |u_n|_{p^*}^{p^*}$$

temos $c_{\mu_n} \rightarrow 0$, o que é um absurdo pois, sendo (μ_n) decrescente, $\mu_n < \mu_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$0 < c_{\mu_1} \leq c_{\mu_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, (t_n) é limitada e por (4.13),

$$c_0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(c_{\mu_n} + \frac{\mu_n t_n^q}{q} |u_n|_q^q \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_{\mu_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\mu_n} \leq c_0,$$

e concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{\mu_n} = c_0$. ■

4.2 Teoremas Minimax

Nesta seção considere o funcional $J_\mu \in \mathcal{C}^2(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ dado por

$$J_\mu(u) = \|u\|^p - \mu \int_{\Omega} (u^+)^q dx - \int_{\Omega} (u^+)^{p^*} dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.14)$$

Considere também Y um subconjunto fechado de $I_\mu^d = \{u \in \mathcal{N}_\mu : I_\mu(u) \leq d\}$ com $d \in \mathbb{R}$ fixo, em que I_μ é o funcional energia associado ao problema (P_μ) e, para cada $j \geq 1$, defina

$$\mathcal{A}_j = \{A : A \subset I_\mu^d, A \text{ é fechado, } Y \subset A, \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(A) \geq j\},$$

e

$$c_j = \inf_{A \in \mathcal{A}_j} \sup_{u \in A} I_\mu(u).$$

Observação 4.12. *O número c_j está bem definido para todo $j \geq 1$. Com efeito,*

$$I_\mu(u) \leq d, \forall u \in A \Rightarrow \sup_{u \in A} I_\mu(u) \leq d,$$

e

$$\sup_{u \in A} I_\mu(u) \geq \sup_{u \in Y} I_\mu(u), \forall A \in \mathcal{A}_j,$$

donde

$$c_j = \inf_{A \in \mathcal{A}_j} \sup_{u \in A} I_\mu(u) \geq \sup_{u \in Y} I_\mu(u).$$

Observação 4.13. *Se $\text{cat}_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^d) \geq n$ então $\sup_Y I_\mu \leq c_1 \leq \dots \leq c_n \leq d$, para todo $n \geq 1$.*

De fato, $\text{cat}_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^d) \geq n$ implica $I_\mu^d \in \mathcal{A}_n$ e daí,

$$\sup_Y I_\mu \leq c_n = \inf_{A \in \mathcal{A}_n} \sup_{u \in I_\mu^d} I_\mu(u) \leq \sup_{u \in I_\mu^d} I_\mu(u) \leq d.$$

E sendo $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{A}_1$ temos

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n,$$

donde segue a afirmação.

Observação 4.14. *Seja $P_\mu = J_\mu + 1$. Note que $\mathcal{N}_\mu = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : P_\mu(u) = 1\}$, pois $I'_\mu(u)u = J'_\mu(u)u = 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$. Mais ainda, $P'_\mu(u) = J'_\mu(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$. De fato, se $u \in \mathcal{N}_\mu$ então*

$$0 = I'_\mu(u)u = J'_\mu(u)u = \|u\|^p - \mu|u^+|_q^q - |u^+|_{p^*}^{p^*},$$

portanto,

$$\|u\|^p = \mu|u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}.$$

De

$$J'_\mu(u)u = p\|u\|^p - q\mu|u^+|_q^q - p^*|u^+|_{p^*}^{p^*},$$

obtemos

$$\begin{aligned} J'_\mu(u)u &= p(\mu|u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}) - q\mu|u^+|_q^q - p^*|u^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \mu(p - q)|u^+|_q^q + (p - p^*)|u^+|_{p^*}^{p^*} < 0, \end{aligned}$$

donde temos o desejado.

Teorema 4.15. *Se*

$$a = \sup_Y I_\mu < c = c_k = \dots = c_{k+m} \leq d,$$

então para todos $\varepsilon \in (0, (c - a)/2)$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ e $B \subset I_\mu^d$ fechado tais que

$$\sup_A I_\mu \leq c + \varepsilon, \quad \text{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq m,$$

existe $u \in \mathcal{N}_\mu$ tal que

$$(a) \quad c - 2\varepsilon \leq I_\mu(u) \leq c + 2\varepsilon;$$

$$(b) \quad \text{dist}(u, A \setminus \text{int}(B)) \leq 2\delta;$$

$$(c) \quad \|I'_\mu(u)\|_* \leq \frac{8\varepsilon}{\delta},$$

em que a norma do item (c) é a norma da derivada da restrição do funcional I_μ a \mathcal{N}_μ , (ver Definição C.22).

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem $\varepsilon \in (0, (c - a)/2)$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ e $B \subset I_\mu^d$ fechado tais que

$$\sup_A I_\mu \leq c + \varepsilon, \quad \text{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq m$$

tais que, para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$ com $c - 2\varepsilon \leq I_\mu(u) \leq c + 2\varepsilon$ e $\text{dist}(u, A \setminus \text{int}(B)) \leq 2\delta$, temos $\|I'_\mu(u)\|_* > 8\varepsilon/\delta$. Por simplicidade, façamos $S = A \setminus \text{int}(B)$. Daí, podemos escrever

$$\forall u \in I_\mu^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \text{ temos } \|I'_\mu(u)\|_* > \frac{8\varepsilon}{\delta},$$

com

$$S_{2\delta} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \text{dist}(u, S) \leq 2\delta\}.$$

Temos $S \subset \mathcal{N}_\mu$, pois

$$u \in S \Rightarrow u \in A \text{ e como } A \in \mathcal{A}_{k+m} \Rightarrow A \subset I_\mu^d \subset \mathcal{N}_\mu \Rightarrow u \in \mathcal{N}_\mu.$$

Logo, pelo Lema C.24, existe $\eta \in C([0, 1] \times \mathcal{N}_\mu, \mathcal{N}_\mu)$ tal que $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$ ou se $u \notin I_\mu^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, para todo $t \in [0, 1]$, e também $\eta(1, I_\mu^{c+\varepsilon} \cap S) \subset I_\mu^{c-\varepsilon}$. Dito isso, observe que:

(i) $Y \subset I_\mu^{c-\varepsilon}$:

$$u \in Y \Rightarrow I_\mu(u) \leq c - 2\varepsilon, \text{ pois } \sup_Y I_\mu = a < c - 2\varepsilon \Rightarrow I_\mu(u) \leq c - \varepsilon \Rightarrow u \in I_\mu^{c-\varepsilon}.$$

(ii) $Y \subset S = A \setminus \text{int}(B)$:

$Y \subset A$, pois $A \in \mathcal{A}_{k+m}$. Se $Y \cap \text{int}(B) = \emptyset$, segue o desejado. Caso contrário, tome $\tilde{B} = (B \setminus Y_\alpha)$ em que $\alpha > 0$ suficientemente pequeno e $Y_\alpha = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \text{dist}(u, Y) < \alpha\}$. O conjunto \tilde{B} é fechado, está contido em I_μ^d e $\text{cat}_{I_\mu^d}(\tilde{B}) \leq m$, pois, pela Proposição 3.9, item (c),

$$\tilde{B} \subset B \Rightarrow \tilde{B} \prec_\emptyset B \Rightarrow \text{cat}_{I_\mu^d}(\tilde{B}) \leq \text{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq m.$$

Mostremos que $Y \cap \text{int}(\tilde{B}) = \emptyset$. Note que, $Y \subset Y_\alpha \subset \overline{Y_\alpha}$ e como

$$(\text{int}(\tilde{B}))^c = \overline{(\tilde{B})^c} = \overline{(B \setminus Y_\alpha)^c} = \overline{(B \cap Y_\alpha^c)^c} = \overline{B^c \cup Y_\alpha} = \overline{B^c} \cup \overline{Y_\alpha},$$

então $Y \subset (\overline{B^c} \cup \overline{Y_\alpha}) = (\text{int}(\tilde{B}))^c$, implicando que $Y \cap \text{int}(\tilde{B}) = \emptyset$, como queríamos. De (i) e (ii) concluímos que $Y \subset S \cap I_\mu^{c-\varepsilon}$.

(iii) $I_\mu^{c+\varepsilon} \cap S = S$:

Se $u \in S$ então $u \in A$, daí $I_\mu(u) \leq c + \varepsilon$, pois $\sup_A I_\mu \leq c + \varepsilon$, implicando $u \in I_\mu^{c+\varepsilon}$, ou seja, $S \subset I_\mu^{c+\varepsilon}$ e assim $S = S \cap I_\mu^{c+\varepsilon}$.

(iv) $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$, em particular, $\eta(0, u) = u$, para todo $u \in S$.

(v) $u \in S = S \cap I_\mu^{c+\varepsilon} \Rightarrow \eta(1, u) \in I_\mu^{c-\varepsilon}$.

(vi) $\eta(t, Y) \subset Y, \forall t \in [0, 1]$:

Com efeito, se $u \in Y$ então $I_\mu(u) < c - 2\varepsilon$, daí, $u \notin I_\mu^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$, e assim, $u \notin I_\mu^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ donde $\eta(t, u) = u$ para todo $t \in [0, 1]$. Portanto,

$$\eta(t, Y) \subset Y, \forall t \in [0, 1].$$

Definindo $\tau = \eta|_{[0,1] \times S} : [0, 1] \times S \rightarrow \mathcal{N}_\mu$, concluímos que $A \setminus \text{int}(B) = S \prec_Y I_\mu^{c-\varepsilon}$. Deste modo, usando os itens (b) e (c) da Proposição 3.9, obtemos

$$A \in \mathcal{A}_{k+m} \Rightarrow k + m \leq \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(A) = \text{cat}_{I_\mu^d, Y}([(A \setminus \text{int}(B)) \cup (A \cap B)])$$

$$\begin{aligned} &\leq \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(A \setminus \text{int}(B)) + \text{cat}_{I_\mu^d}(A \cap B) \\ &\leq \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(A \setminus \text{int}(B)) + \text{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^{c-\varepsilon}) + m, \end{aligned}$$

e portanto, $\text{cat}_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^{c-\varepsilon}) \geq k$. Sendo $Y \subset I_\mu^{c-\varepsilon} \subset I_\mu^d$ e $I_\mu^{c-\varepsilon}$ é fechado, então $I_\mu^{c-\varepsilon} \in \mathcal{A}_k$, e assim

$$c = c_k = \inf_{A \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in A} I_\mu(u) \leq \sup_{u \in I_\mu^{c-\varepsilon}} I_\mu(u) \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo. Logo, o Teorema fica provado. \blacksquare

Definição 4.16. A função $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ se toda sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que

$$I_\mu(u_n) \rightarrow c, \quad \|I'_\mu(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

admite uma subsequência convergente em \mathcal{N}_μ .

Teorema 4.17. Sob a hipótese

$$a = \sup_Y I_\mu < c = c_k = \dots = c_{k+m} \leq d,$$

se $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, então $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq m + 1$, em que $K_c = \{u \in \mathcal{N}_\mu : I_\mu(u) = c \text{ e } \|I'_\mu(u)\|_* = 0\}$.

Demonstração. Suponha que $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \leq m$. Pela Proposição 3.14, existe uma vizinhança fechada B de K_c em I_μ^d tal que $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) = \text{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq m$. Pelo Teorema 4.15, existe $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que

$$I_\mu(u_n) \rightarrow c, \quad \text{dist}(u_n, A_n \setminus \text{int}(B)) \rightarrow 0 \text{ e } \|I'_\mu(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

em que $A_n \in \mathcal{A}_{k+m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, existe $u \in \mathcal{N}_\mu$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n \rightarrow u$ em \mathcal{N}_μ . Em particular, $I_\mu \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ então

$$I_\mu(u_n) \rightarrow I_\mu(u), \quad \|I'_\mu(u_n)\|_* \rightarrow \|I'_\mu(u)\|_* \text{ em } \mathbb{R}.$$

Da unicidade do limite, $I_\mu(u) = c$ e $\|I'_\mu(u)\|_* = 0$ implicando que $u \in K_c$. Além disso,

$$A_n \subset I_\mu^d \Rightarrow A_n \setminus \text{int}(B) \subset I_\mu^d \setminus \text{int}(B)$$

daí,

$$\text{dist}(u_n, A_n \setminus \text{int}(B)) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{dist}(u_n, I_\mu^d \setminus \text{int}(B)) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{dist}(u, I_\mu^d \setminus \text{int}(B)) = 0$$

e, sendo $(I_\mu^d \setminus \text{int}(B))$ fechado, temos $u \in (I_\mu^d \setminus \text{int}(B))$. Logo, $u \in K_c$ e $u \in (I_\mu^d \setminus \text{int}(B))$ implicando que $u \in K_c$ e $u \notin \text{int}(B)$, o que é um absurdo, pois $K_c \subset \text{int}(B)$. Portanto, $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq m + 1$, como queríamos. ■

Teorema 4.18. *Se $\sup_Y I_\mu < c_1$ e $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [c_1, d]$, então $I_\mu^{-1}([c_1, d])$ contém, pelo menos, $\text{cat}_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^d)$ pontos críticos de $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$. (ver item (c), Definição C.22).*

Demonstração. Se $\text{cat}_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^d) = n$, pela Observação 4.13, obtemos

$$\sup_Y I_\mu < c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq d.$$

Pelo Teorema 4.17, $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq m + 1 = n - 1 + 1 = n$. Se $c \in [c_1, d]$, então $K_c \subset I_\mu^{-1}([c_1, d])$, daí, $K_c \prec_\emptyset I_\mu^{-1}([c_1, d])$ e com isso

$$\text{cat}_{I_\mu^d}(I_\mu^{-1}([c_1, d])) \geq \text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq n = \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^d).$$

Se K_c é infinito, então $I_\mu^{-1}([c_1, d])$ contém infinitos pontos críticos. E, se K_c é finito e $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq n$ então, pela Proposição 3.7, K_c possui, pelo menos, n pontos críticos. Logo, de $K_c \subset I_\mu^{-1}([c_1, d])$ concluímos que $I_\mu^{-1}([c_1, d])$ contém, no mínimo, n pontos críticos de $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$. ■

Teorema 4.19. *Se $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \in [\inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu, d]$, então $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$ tem um mínimo e I_μ^d possui, pelo menos, $\text{cat}_{I_\mu^d}(I_\mu^d)$ pontos críticos de $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$.*

Demonstração. Mostremos que $c_1 = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu$. Fazendo $Y = \emptyset$, observe que

$$\mathcal{A}_1 = \{A : A \subset I_\mu^d, A \text{ é fechado, } \text{cat}_{I_\mu^d}(A) \geq 1\} = \{A : A \subset I_\mu^d, A \text{ é fechado e não vazio}\}.$$

Note que, dado $u \in I_\mu^d$ temos $I_\mu(u) \geq c_1$ pois, fazendo $A = \{u\}$ então $A \subset I_\mu^d$ e

$$c_1 = \inf_{A \in \mathcal{A}_1} \sup_{u \in A} I_\mu(u) \leq \sup_{v \in \{u\}} I_\mu(v) = I_\mu(u).$$

Logo, $\alpha := \inf_{I_\mu^d} I_\mu \geq c_1$. Por outro lado, tomando $(u_n) \subset I_\mu^d$ tal que $I_\mu(u_n) \rightarrow c_1$ temos

$$c_1 \geq \inf_{u \in \{u_n\}} I_\mu(u) \geq \inf_{I_\mu^d} I_\mu = \alpha,$$

e portanto, $c_1 = \alpha$. Escreva agora, $\beta = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu$. Como $I_\mu^d \subset \mathcal{N}_\mu$ então $\beta \leq \alpha$ e também $d \geq c_1 = \alpha \geq \beta$ implica que $\beta \leq d$. Observe que, se $\beta = d$ então

$$\alpha = \inf_{I_\mu^d} I_\mu \leq \sup_{I_\mu^d} I_\mu \leq d = \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta.$$

Se $\beta < d$, seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que $I_\mu(u_n) \rightarrow \beta$. Para n suficientemente grande, $I_\mu(u_n) \leq d$, ou seja, $(u_n) \subset I_\mu^d$ e assim, para n suficientemente grande,

$$\beta = \inf_{u \in \{u_n\}} I_\mu(u) \geq \inf_{I_\mu^d} I_\mu = \alpha.$$

Desta forma, em ambos os casos, temos $\beta \geq \alpha$ donde $\beta = \alpha$. Com isso, concluímos que

$$c_1 = \alpha = \beta = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu.$$

Como $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [\inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu, d] = [c_1, d]$ então, pelo Teorema 4.18, $I_\mu^{-1}([c_1, d]) = I_\mu^{-1}((-\infty, d]) = I_\mu^d$ contém, pelo menos, $\text{cat}_{I_\mu^d, \emptyset}(I_\mu^d) = \text{cat}_{I_\mu^d}(I_\mu^d)$ pontos críticos de $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$. E, pelo Teorema 4.17, como $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_{c_1}$ temos $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_{c_1}) \geq 1$, ou seja, existe $u \in K_{c_1}$ tal que $I_\mu(u) = c_1 = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu$ e $\|I'_\mu(u)\|_* = 0$, donde u é ponto de mínimo de $I_\mu|_{\mathcal{N}_\mu}$. ■

4.3 Lemas Técnicos

Nesta seção, exibiremos e provaremos lemas cruciais para a prova do Teorema principal, enunciado no início deste capítulo.

Lema 4.20. *Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de funções não negativas tal que $|u_n|_{p^*} = 1$ e $\|u_n\|^p \rightarrow S$. Então existe uma sequência $(y_n, \lambda_n) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tal que*

$$v_n(x) = \lambda_n^{(N-p)/p} u_n(\lambda_n x + y_n)$$

admite uma subsequência convergente, denotada novamente por (v_n) , tal que $v_n \rightarrow v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $v(x) > 0$ em \mathbb{R}^N . Além disso,

$$\lambda_n \rightarrow 0 \text{ e } y_n \rightarrow y \in \bar{\Omega}.$$

Demonstração. Como $W_0^{1,p}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, a demonstração da primeira parte segue de forma análoga à demonstração do Teorema 1.3. Mostremos

a segunda parte. Suponha, por contradição, que $\lambda_n \rightarrow \infty$. Escrevendo $\Omega_n = \frac{(\Omega - y_n)}{\lambda_n}$, note que

$$\int_{\Omega_n} |v_n|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^{(N-p)/p} u_n(\lambda_n x + y_n)|^p dx = \lambda_n^{N-p} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(\lambda_n x + y_n)|^p dx.$$

Usando mudança de variáveis, obtemos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = \frac{\lambda_n^{N-p}}{\lambda_n^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(z)|^p dz = \frac{1}{\lambda_n^p} |u_n|_p^p \leq \frac{M}{\lambda_n^p} \rightarrow 0,$$

pois (u_n) é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$. A menos de uma subsequência, $v_n \rightarrow v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ então da Proposição C.21 obtemos

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \geq 0,$$

implicando que $v = 0$, o que nos dá um absurdo, visto que $|v_n|_{p^*} = 1$, $v_n \rightarrow v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e pela imersão de Sobolev, $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$|v_n|_{p^*} \rightarrow |v|_{p^*}.$$

Logo, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \geq 0$. Agora, se, a menos de uma subsequência, $|y_n| \rightarrow \infty$ então

$$|\lambda_n x + y_n| \geq |y_n| - \lambda_n |x| \rightarrow \infty \quad \forall x \in \Omega,$$

donde, para n suficientemente grande, $u_n(\lambda_n x - y_n) = 0$ implicando que $|u_n|_{p^*} = 0$, o que é um absurdo, assim $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}^N$. Suponha agora que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 > 0$, daí,

$$\Omega_n = \frac{\Omega - y_n}{\lambda_n} \rightarrow \frac{\Omega - y}{\lambda_0} = \tilde{\Omega} \neq \mathbb{R}^N.$$

Com isso, $|v|_{p^*, \tilde{\Omega}} = 1$ e $\|v\|^p = S$, ou seja, v assume a melhor constante de Sobolev em $\tilde{\Omega}$, o que, pela Proposição 1.6, não é possível. Portanto, $\lambda_n \rightarrow 0$. Supondo que $y \notin \bar{\Omega}$, como

$$\lambda_n x + y_n \rightarrow y, \quad \forall x \in \Omega,$$

para n suficientemente grande $\lambda_n x + y_n \notin \bar{\Omega}$, donde $u_n(\lambda_n x + y_n) = 0$ e daí $|u_n|_{p^*} = 0$, o que é um absurdo. Desta maneira, $y \in \bar{\Omega}$, como queríamos demonstrar. ■

Desde que Ω é um domínio limitado e suave de \mathbb{R}^N , podemos escolher $r > 0$

suficientemente pequeno tal que

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \Omega) \leq r\}$$

e

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a Ω (ver Definição C.2) e, sem perda de generalidade, podemos assumir $B_r = B(0, r) \subset \Omega$.

Seja agora

$$W_{0,rad}^{1,p}(B_r) = \{u \in W_0^{1,p}(B_r) : u \text{ é radial}\}$$

e defina

$$m(\mu) = \inf\{I_{\mu,B_r}(u) : u \in \mathcal{N}_{\mu,B_r}\}$$

em que

$$I_{\mu,B_r}(u) = \frac{1}{p} \int_{B_r} |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} (u^+)^q dx - \frac{1}{p^*} \int_{B_r} (u^+)^{p^*} dx$$

e

$$\mathcal{N}_{\mu,B_r} = \{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B_r) \setminus \{0\} : I'_{\mu,B_r}(u)u = 0\}.$$

Como na Proposição 4.2, o número $m(\mu)$ está bem definido. Além disso, $m(\mu)$ é não crescente em μ . Denote por $\tilde{m}(\mu)$ o nível do passo da montanha associado ao funcional I_{μ,B_r} em $W_{0,rad}^{1,p}(B_r)$. Note que, $\tilde{m}(\mu) > 0$ para todo $\mu \geq 0$.

Lema 4.21. *Suponha $N \geq p^2$ e $p < q < p^*$. Temos:*

- (a) I_{μ,B_r} satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, S^{N/p}/N)$ em $W_{0,rad}^{1,p}(B_r)$. Mais ainda, $\tilde{m}(\mu) \in (0, S^{N/p}/N)$ para $\mu > 0$;
- (b) $m(\mu) = \tilde{m}(\mu)$;
- (c) $m(\mu) \rightarrow S^{N/p}/N$ quando $\mu \rightarrow 0$.

Demonstração. Seguindo de forma análoga as demonstrações dos Lemas 2.13, 4.5 e 4.11 temos, respectivamente, os itens (a), (b) e (c). ■

Defina agora a aplicação

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{N}_\mu &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ u &\longmapsto \beta(u) = \frac{1}{S^{N/p}} \int_{\Omega} (u^+)^{p^*} x dx, \end{aligned} \tag{4.15}$$

e o conjunto

$$I_\mu^{m(\mu)} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : I_\mu(u) \leq m(\mu)\}.$$

Observe que a aplicação β é contínua. De fato, como

$$\beta(u) = \left(\frac{1}{S^{N/p}} \int_{\Omega} (u^+)^{p^*} x_i dx \right)_{i=1}^N = (\beta_i(u))_{i=1}^N,$$

basta mostrarmos que β_i é contínua para cada $i = 1, \dots, N$. Seja $u_n \rightarrow u$ em \mathcal{N}_{μ} , note que, para $i = 1, \dots, N$, temos

$$\begin{aligned} |\beta_i(u_n) - \beta_i(u)| &= \frac{1}{S^{N/p}} \left| \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} x_i dx - \int_{\Omega} (u^+)^{p^*} x_i dx \right| \\ &= \frac{1}{S^{N/p}} \left| \int_{\Omega} [(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}] x_i dx \right| \\ &\leq \frac{1}{S^{N/p}} \int_{\Omega} |(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}| |x_i| dx \leq \frac{\text{diam}(\Omega)}{S^{N/p}} \int_{\Omega} |(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}| dx, \end{aligned}$$

pois $0 \in \Omega$. Como $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pela imersão de Sobolev, $u_n \rightarrow u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Logo, $u_n^+ \rightarrow u^+$ em $L^{p^*}(\Omega)$ implicando $(u_n^+)^{p^*} \rightarrow (u^+)^{p^*}$ em $L^1(\Omega)$ e, conseqüentemente $(u_n^+)^{p^*}$ é limitada em $L^1(\Omega)$. Além disso, a menos de uma subseqüência, $(u_n^+)^{p^*} \rightarrow (u^+)^{p^*}$ q.t.p. em Ω . Daí, aplicando o Lema C.12, obtemos $|(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}|_1 \rightarrow 0$ donde

$$|\beta_i(u_n) - \beta_i(u)| \leq \frac{\text{diam}(\Omega)}{S^{N/p}} |(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}|_1 \rightarrow 0,$$

e assim β é contínua.

Lema 4.22. *Existe $\mu^* > 0$ tal que, se $\mu \in (0, \mu^*)$ e $u \in \mathcal{N}_{\mu} \cap I_{\mu}^{m(\mu)}$, então $\beta(u) \in \Omega_r^+$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que para todo $\mu > 0$, existem $\bar{\mu} \in (0, \mu)$ e $\bar{u} \in \mathcal{N}_{\bar{\mu}} \cap I_{\bar{\mu}}^{m(\bar{\mu})}$ tal que $\beta(\bar{u}) \notin \Omega_r^+$. Em termos de seqüência, existem $\mu_n \rightarrow 0$, $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n} \cap I_{\mu_n}^{m(\mu_n)}$ tal que $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$. Veja que

$$\begin{aligned} c_{\mu_n} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu_n}} I_{\mu_n}(u) &\leq I_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx - \frac{\mu_n}{q} \int_{\Omega} (u_n^+)^q dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} dx \\ &\leq m(\mu_n), \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$0 = I'_{\mu_n}(u_n)u_n = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx - \mu_n \int_{\Omega} (u_n^+)^q dx - \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} dx. \quad (4.17)$$

Note que, do item (c) do Lema 4.21, temos $m(\mu_n) \rightarrow S^{N/p}/N$. E, sendo (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois

$$m(\mu_n) \geq I_{\mu_n}(u) - \frac{1}{q} I'_{\mu_n}(u_n)u_n = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} dx$$

$$\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p,$$

então pela imersão de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, temos (u_n) limitada em $L^q(\Omega)$, e portanto, $\mu_n |u_n^+|^q \rightarrow 0$. Além disso, de $c_0 = S^{N/p}/N$ (Lema 4.9) e $c_{\mu_n} \rightarrow c_0$ quando $\mu_n \rightarrow 0$ (Lema 4.11), obtemos

$$c_{\mu_n} \rightarrow \frac{S^{N/p}}{N},$$

portanto, de (4.16),

$$\frac{S^{N/p}}{N} + o_n(1) \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} dx \leq \frac{S^{N/p}}{N} + o_n(1), \quad (4.18)$$

e, por (4.17),

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} dx = o_n(1). \quad (4.19)$$

De (4.18) e (4.19), a sequência $w_n = \frac{u_n}{|u_n^+|_{p^*}}$ verifica

$$|w_n^+|_{p^*} = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |\nabla w_n|^p dx \rightarrow S.$$

De fato, por (4.19)

$$\|u_n\|^p - |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

e sendo (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ então $\|u_n\|^p$ é limitada em \mathbb{R} , daí, a menos de uma subsequência, $\|u_n\|^p \rightarrow l$ para $l \in \mathbb{R}$. Assim, de (4.20),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} dx = l$$

e, por (4.18),

$$\frac{S^{N/p}}{N} \leq \frac{l}{p} - \frac{l}{p^*} \leq \frac{S^{N/p}}{N} \Rightarrow \frac{l}{N} = \frac{S^{N/p}}{N} \Rightarrow l = S^{N/p}$$

e com isso,

$$\int_{\Omega} |\nabla w_n|^p dx = \|w_n\|^p = \frac{\|u_n\|^p}{|u_n^+|_{p^*}^p} = \frac{\|u_n\|^p}{(|u_n^+|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*}} \rightarrow \frac{S^{N/p}}{(S^{N/p})^{p/p^*}} = S.$$

Dessa forma, a sequência $\tilde{w}_n = w_n^+$ satisfaz

$$|\tilde{w}_n|_{p^*} = 1 \quad \text{e} \quad \|\tilde{w}_n\|^p = \int_{\Omega} |\nabla \tilde{w}_n|^p dx \rightarrow S,$$

já que

$$S \leq \|\tilde{w}_n\|^p = \|w_n^+\|^p \leq \|w_n\|^p \rightarrow S.$$

Portanto, do Lema 4.20, existe $(\lambda_n, y_n) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ tal que a sequência $v_n(x) = \lambda_n^{(N-p)/p} \tilde{w}_n(\lambda_n x + y_n)$ admite uma subsequência que converge forte para v em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

De

$$\beta(u_n) = \frac{1}{S^{N/p}} \int_{\Omega} (u_n^+)^{p^*} x \, dx = \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}} \int_{\Omega} (\tilde{w}_n)^{p^*}(x) x \, dx,$$

e fixando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\varphi(x) = x$, para todo $x \in \bar{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned} \beta(u_n) &= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}} \int_{\Omega} (\tilde{w}_n)^{p^*}(z) z \, dz = \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}} \int_{\Omega} (\tilde{w}_n)^{p^*}(z) \varphi(z) \, dz \\ &= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}} \int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{w}_n)^{p^*}(z) \varphi(z) \, dz \\ &= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}} \int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{w}_n)^{p^*}(\lambda_n x + y_n) \varphi(\lambda_n x + y_n) \lambda_n^N \, dx \\ &= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}} \int_{\mathbb{R}^N} (v_n)^{p^*}(x) \varphi(\lambda_n x + y_n) \, dx. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observe que $|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \rightarrow S^{N/p}$ e sendo $|v_n|_{p^*} = |\tilde{w}_n|_{p^*} = 1$ com $|v_n|_{p^*} \rightarrow |v|_{p^*}$ então $|v|_{p^*} = 1$. Daí, aplicando o Lema 4.20, $\lambda_n \rightarrow 0$ e $y_n \rightarrow y$ em $\bar{\Omega}$. Além disso, pela continuidade de φ , temos

$$\varphi(\lambda_n x + y_n) \rightarrow \varphi(y) = y \in \bar{\Omega}.$$

Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.19),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(u_n) = \frac{S^{N/p}}{S^{N/p}} \int_{\Omega} \lim (v_n)^{p^*}(x) \varphi(\lambda_n x + y_n) dx = \int_{\Omega} v^{p^*}(x) \varphi(y) dx = y \int_{\Omega} v^{p^*}(x) dx = y,$$

ou seja, para n suficientemente grande temos $\beta(u_n) \in \Omega_r^+$, o que é uma contradição. Assim, o lema fica provado. ■

Agora, pelo Lema 4.21, existe $v_\mu \in \mathcal{N}_{\mu, B_r}$ tal que

$$I_{\mu, B_r}(v_\mu) = \tilde{m}(\mu) = m(\mu),$$

e v_μ é não negativa, pois

$$I'_{\mu, B_r}(v_\mu) = 0 \Rightarrow I'_{\mu, B_r}(v_\mu) v_\mu^- = \|v_\mu^-\|^p = 0.$$

Defina então a aplicação $\gamma : \Omega_r^- \rightarrow I_\mu^{m(\mu)}$ por

$$\begin{aligned} \gamma(y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \gamma(y)(x) = \begin{cases} v_\mu(x-y), & x \in B(y,r) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Veja que, para cada $y \in \Omega_r^-$ temos $\gamma(y) \in I_\mu^{m(\mu)}$. De fato,

$$\begin{aligned} I_\mu(\gamma(y)) &= \frac{1}{p} \|\gamma(y)\|^p - \frac{\mu}{q} |\gamma(y)|_q^q - \frac{1}{p^*} |\gamma(y)|_{p^*}^{p^*} \\ &= \frac{1}{p} \int_{B(y,r)} |\nabla(v_\mu(x-y))|^p dx + \frac{1}{p} \int_{B(y,r)^c} |\nabla(v_\mu(x-y))|^p dx \\ &\quad - \frac{\mu}{q} \int_{B(y,r)} v_\mu(x-y)^q dx - \frac{\mu}{q} \int_{B(y,r)^c} v_\mu(x-y)^q dx \\ &\quad - \frac{1}{p^*} \int_{B(y,r)} v_\mu(x-y)^{p^*} dx - \frac{1}{p^*} \int_{B(y,r)^c} v_\mu(x-y)^{p^*} dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{B_r} |\nabla v_\mu(z)|^p dz - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} v_\mu(z)^q dz - \frac{1}{p^*} \int_{B_r} v_\mu(z)^{p^*} dz \\ &= I_{\mu, B_r}(v_\mu) = m(\mu), \end{aligned}$$

em que $B(y,r)^c = \Omega \setminus B(y,r)$. Mais ainda, $\gamma(y) \in \mathcal{N}_\mu$ pois para $\gamma(y) \neq 0$, seguindo de modo análogo ao raciocínio anterior, obtemos

$$\begin{aligned} I'_\mu(\gamma(y))\gamma(y) &= \|\gamma(y)\|^p - \mu |\gamma(y)|_q^q - |\gamma(y)|_{p^*}^{p^*} \\ &= \int_{B_r} |\nabla v_\mu(z)|^p dz - \mu \int_{B_r} v_\mu(z)^q dz - \int_{B_r} v_\mu(z)^{p^*} dz \\ &= I'_{\mu, B_r}(v_\mu)v_\mu = 0. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $y \in \Omega_r^-$, a composta $(\beta \circ \gamma)(y)$ está bem definida e

$$\begin{aligned} (\beta \circ \gamma)(y) &= \frac{1}{S^{N/p}} \int_{\Omega} x v_\mu(x-y)^{p^*} dx = \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B(y,r)} x v_\mu(x-y)^{p^*} dx \\ &= \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B_r} (z+y) v_\mu(z)^{p^*} dz \\ &= \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B_r} z v_\mu(z)^{p^*} dz + \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B_r} y v_\mu(z)^{p^*} dz, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\beta \circ \gamma)(y) = \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B_r} y v_\mu(z)^{p^*} dz = \alpha(\mu)y, \quad (4.23)$$

pois v_μ é radial, com

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B_r} v_\mu(z)^{p^*} dz.$$

Note agora que a aplicação γ é contínua. Com efeito, seja $y_n \rightarrow y$ em Ω_r^- e usando a norma $|\cdot|_{**}$ de \mathbb{R}^N , dada por $|x|_{**} = (|x_1|^p + \dots + |x_N|^p)^{1/p}$ para $x \in \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$, a qual é equivalente a norma usual de \mathbb{R}^N , obtemos

$$\begin{aligned} \|\gamma(y_n) - \gamma(y)\|^p &= \int_{\Omega} |\nabla(\gamma(y_n) - \gamma(y))|_{**}^p dx = \int_{\Omega} |\nabla(v_\mu(x - y_n) - v_\mu(x - y))|_{**}^p dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{i=1}^N |\partial_i(v_\mu(x - y_n) - v_\mu(x - y))|^p dx \right)^{1/p} \right]^p \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\partial_i(v_\mu(x - y_n) - v_\mu(x - y))|^p dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\partial_i(v_\mu(x - y_n)) - \partial_i(v_\mu(x - y))|^p dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\partial_i(v_\mu(x - y_n)) - \partial_i(v_\mu(x - y))|^p dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |T_{y_n}(\partial_i v_\mu)(x) - T_y(\partial_i v_\mu)(x)|^p dx \\ &= \sum_{i=1}^N |T_{y_n}(\partial_i v_\mu)(x) - T_y(\partial_i v_\mu)(x)|_p^p \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois, fixado $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \\ y &\longmapsto T_y f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \longmapsto T_y f(x) = f(x - y), \end{aligned}$$

é contínua (Proposição A.9), implicando que γ é contínua.

Lema 4.23. *Se $\mu \rightarrow 0$, então $\alpha(\mu) \rightarrow 1$.*

Demonstração. Observe que,

$$m(\mu) = I_{\mu, B_r}(v_\mu) = \frac{1}{p} \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} v_\mu^q dx - \frac{1}{p^*} \int_{B_r} v_\mu^{p^*} dx < \frac{S^{N/p}}{N} \quad (4.24)$$

e

$$\frac{1}{q} I'_{\mu, B_r}(v_\mu) v_\mu = \frac{1}{q} \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} v_\mu^q dx - \frac{1}{q} \int_{B_r} v_\mu^{p^*} dx = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} I_{\mu, B_r}(v_\mu) - \frac{1}{q} I'_{\mu, B_r}(v_\mu) v_\mu &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{B_r} v_\mu^{p^*} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p dx, \end{aligned}$$

donde

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p dx < \frac{S^{N/p}}{N},$$

mostrando que a sequência (v_μ) é limitada em $W_{0, rad}^{1,p}(B_r)$ e, portanto, $\|v_\mu\|^p$ é limitada em \mathbb{R} . Logo, a menos de uma subsequência, podemos supor que $\|v_\mu\|^p \rightarrow l$, para $l \in \mathbb{R}$. De

$$\|v_\mu\|^p - \mu |v_\mu|_q^q - |v_\mu|_{p^*}^{p^*} = 0 \quad \text{e} \quad \mu \rightarrow 0,$$

temos $|v_\mu|_{p^*}^{p^*} \rightarrow l$. De (4.24) e do item (c) do Lema 4.21, obtemos $l = S^{N/p}$, ou seja, $|v_\mu|_{p^*}^{p^*} \rightarrow S^{N/p}$ e assim

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B_r} v_\mu^{p^*} dx = \frac{1}{S^{N/p}} |v_\mu|_{p^*}^{p^*} \rightarrow \frac{S^{N/p}}{S^{N/p}} = 1, \quad \text{quando} \quad \mu \rightarrow 0,$$

como queríamos. ■

Pelo Lema 4.23, para μ suficientemente pequeno, fica bem definido a aplicação

$$\begin{aligned} H_\mu : [0, 1] \times (\mathcal{N}_\mu \cap I_\mu^{m(\mu)}) &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, u) &\longmapsto H_\mu(t, u) = \left(t + \frac{1-t}{\alpha(\mu)} \right) \beta(u). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Lema 4.24. *Existe $\mu^* > 0$ tal que se $\mu \in (0, \mu^*)$ então*

$$H_\mu([0, 1] \times (\mathcal{N}_\mu \cap I_\mu^{m(\mu)})) \subset \Omega_r^+.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem $t_n \in [0, 1]$, $\mu_n \rightarrow 0$ e $u_n \in (\mathcal{N}_{\mu_n} \cap I_{\mu_n}^{m(\mu_n)})$, tais que $H_{\mu_n}(t_n, u_n) \notin \Omega_r^+$. Sem perda de generalidade, podemos supor $t_n \rightarrow t_0 \in [0, 1]$. Pelo Lema 4.23 e como visto na demonstração do Lema 4.22, temos

$$\alpha(\mu_n) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \beta(u_n) \rightarrow y \in \bar{\Omega},$$

portanto,

$$H_{\mu_n}(t_n, u_n) = \left(t_n + \frac{1-t_n}{\alpha(\mu_n)} \right) \beta(u_n) \rightarrow y \in \bar{\Omega},$$

consequentemente, para n suficientemente grande, $H_{\mu_n}(t_n, u_n) \in \Omega_r^+$, o que é uma contradição. Assim, o lema fica provado. ■

4.4 Demonstração do Teorema principal

Provemos alguns lemas antes.

Lema 4.25. *Se u_μ é um ponto crítico de I_μ em \mathcal{N}_μ , isto é, $I'_\mu(u_\mu)v = 0$ para todo $v \in \mathcal{N}_\mu$, então o mesmo é um ponto crítico de I_μ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Se $u_\mu \in \mathcal{N}_\mu$ então $I'_\mu(u_\mu)u_\mu = 0$. Por outro lado, pelo Teorema C.23, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\mu(u_\mu) = \theta J'_\mu(u_\mu), \quad (4.26)$$

em que J_μ é o funcional dado em (4.14). A Observação 4.14 nos diz que

$$\begin{aligned} J'_\mu(u_\mu)u_\mu &= p(\mu|u_\mu^+|_q^q + |u_\mu^+|_{p^*}^{p^*}) - q\mu|u_\mu^+|_q^q - p^*|u_\mu^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \mu(p - q)|u_\mu^+|_q^q + (p - p^*)|u_\mu^+|_{p^*}^{p^*} < 0. \end{aligned}$$

De (4.26),

$$0 = I'_\mu(u_\mu)u_\mu = \theta J'_\mu(u_\mu)u_\mu$$

e portanto, $\theta = 0$, consequentemente, $I'_\mu(u_\mu) = 0$, ou seja, $I'_\mu(u_\mu)v = 0$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, mostrando que u_μ é ponto crítico de I_μ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

A seguir, denotaremos por $I_{\mathcal{N}_\mu}$ a restrição de I_μ em \mathcal{N}_μ .

Lema 4.26. *Toda sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que $I_\mu(u_n) = I_{\mathcal{N}_\mu}(u_n) \rightarrow c < S^{N/p}/N$ e $I'_{\mathcal{N}_\mu}(u_n) \rightarrow 0$ admite uma subsequência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para $\mu > 0$ e $p < q < p^*$.*

Demonstração. Tomando o funcional J_μ como na demonstração do Lema 4.25 então, pelo Teorema C.23, dado $u \in \mathcal{N}_\mu$, temos

$$\|I'_{\mathcal{N}_\mu}(u)\|_* = \min_{\theta \in \mathbb{R}} \|I'_\mu(u) - \theta J'_\mu(u)\|.$$

Logo, por hipótese, existe $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\|I'_{\mathcal{N}_\mu}(u_n)\|_* = \|I'_\mu(u_n) - \theta_n J'_\mu(u_n)\| \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$I'_\mu(u_n) = \theta_n J'_\mu(u_n) + o_n(1). \quad (4.27)$$

Na Observação 4.14, vimos que $J'_\mu(u)u < 0$, para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$. Temos (u_n) limitada, pois

$$c + o_n(1) = I_\mu(u_n) - \frac{1}{q} I'_\mu(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p.$$

Suponha então $J'_\mu(u_n)u_n \rightarrow 0$. Da igualdade

$$0 = I'_\mu(u_n)u_n = \|u_n\|^p - \mu |u_n^+|_q^q - |u_n^+|_{p^*}^{p^*}$$

temos

$$\|u_n\|^p = \mu |u_n^+|_q^q + |u_n^+|_{p^*}^{p^*},$$

e assim,

$$J'_\mu(u_n)u_n = p\|u_n\|^p - q\mu |u_n^+|_q^q - p^* |u_n^+|_{p^*}^{p^*} = \mu(p - q)|u_n^+|_q^q + (p - p^*)|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$|u_n^+|_q^q \rightarrow 0, \quad |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \rightarrow 0,$$

e, conseqüentemente, $\|u_n\|^p \rightarrow 0$, implicando que $\|u_n\| \rightarrow 0$. Além disso, da igualdade $\|u_n\|^p = \mu |u_n^+|_q^q + |u_n^+|_{p^*}^{p^*}$ e das imersões de Sobolev, obtemos

$$\|u_n\|^p \leq \mu |u_n^+|_q^q + |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \leq \mu c_1 \|u_n\|^q + c_2 \|u_n\|^{p^*} \leq c_3 (\mu \|u_n\|^q + \|u_n\|^{p^*}),$$

sendo $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$, e com isso,

$$1 \leq c_3 (\mu \|u_n\|^{q-p} + \|u_n\|^{p^*-p}) \rightarrow 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, podemos assumir que $J'_\mu(u_n)u_n \rightarrow l < 0$. De (4.27), temos

$$0 = I'_\mu(u_n)u_n = \theta_n J'_\mu(u_n)u_n + o_n(1),$$

donde $\theta_n \rightarrow 0$, e portanto, $I'_\mu(u_n) \rightarrow 0$. Logo,

$$I_\mu(u_n) \rightarrow c < S^{N/p}/N \quad \text{e} \quad I'_\mu(u_n) \rightarrow 0,$$

e aplicando o Lema 2.13, $I_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ e assim $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ admite uma subsequência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Lema 4.27. *Se $N \geq p^2$ e $\mu \in (0, \mu^*)$ (μ^* dado pelo Lema 4.24) então*

$$\text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}) \geq \text{cat}_\Omega(\Omega).$$

Demonstração. Se $\text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}) = \infty$, o resultado segue. Suponha que

$$\text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}) = n,$$

isto é,

$$I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

com $A_j, j = 1, \dots, n$ subconjuntos fechados e contráteis em $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$, ou seja, existem $h_j : [0, 1] \times A_j \rightarrow I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contínuas tais que

$$h_j(0, u) = u, \quad h_j(1, u) = w_j, \quad \forall u \in A_j,$$

onde $w_j \in I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ é fixo, para cada $j = 1, \dots, n$. Considere $B_j = \gamma^{-1}(A_j), j = 1, \dots, n$, onde γ é dada em (4.22). Como vimos na Seção 4.3, a aplicação γ é contínua, donde os conjuntos B_j são fechados e satisfazem

$$\Omega_r^- = B_1 \cup \dots \cup B_n.$$

Defina agora a deformação

$$\begin{aligned} g_j : [0, 1] \times B_j &\longrightarrow \Omega_r^+ \\ (t, y) &\longmapsto g_j(t, y) = H_\mu(t, h_j(t, \gamma(y))), \end{aligned}$$

onde H_μ é a aplicação dada em (4.25), para $\mu \in (0, \mu^*)$ (o Lema 4.24 garante que a função g_j está bem definida). Como também visto na Seção 4.3, a aplicação β , dada em (4.15), é contínua, donde a aplicação H_μ é contínua e, conseqüentemente, g_j é contínua para todo $j = 1, \dots, n$. Agora, dado $y \in B_j$ temos, usando (4.23),

$$\begin{aligned} g_j(0, y) &= H_\mu(0, h_j(0, \gamma(y))) = H_\mu(0, \gamma(y)) = \left(0 + \frac{1-0}{\alpha(\mu)}\right) \beta(\gamma(y)) \\ &= \frac{\beta(\gamma(y))}{\alpha(\mu)} = \frac{\alpha(\mu)y}{\alpha(\mu)} = y, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_j(1, y) &= H_\mu(1, h_j(1, \gamma(y))) = H_\mu(1, w_j) = \left(1 + \frac{1-1}{\alpha(\mu)}\right) \beta(w_j) \\ &= \beta(w_j) \in \Omega_r^+. \end{aligned}$$

Assim, os conjuntos B_j são contráteis em Ω_r^+ donde

$$\text{cat}_\Omega(\Omega) = \text{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = \text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}).$$

■

Demonstração do Teorema 4.1.

Pelos Lemas 2.13 e 4.21, sabemos que

$$c_\mu, m(\mu) < \frac{S^{N/p}}{N},$$

para $\mu > 0$ se $p^* > q > p$. Além disso, pelo Lema 4.26, $I_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, S^{N/p}/N)$, e para todo $u \in I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ temos

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) \leq I_\mu(u) \leq m(\mu).$$

Logo, pelo Teorema 4.19, concluímos que $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)})$ pontos críticos de $I_{\mathcal{N}_\mu}$ e, pelo Lema 4.27, para $\mu \in (0, \mu^*)$, $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos da restrição de I_μ em \mathcal{N}_μ . Agora, pelo Lema 4.25, como todo ponto crítico de $I_{\mathcal{N}_\mu}$ é ponto crítico de I_μ , então I_μ contém, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos. Como tais pontos críticos estão em \mathcal{N}_μ , os mesmos são não nulos e são soluções para o problema (P_μ) . Dessa forma, (P_μ) possui, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.

■

Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos essencialmente a multiplicidade de soluções positivas para o problema elíptico crítico (P_μ) . Garantimos no Capítulo 2 a existência de solução não trivial para cada $\mu > 0$ e posteriormente, no Capítulo 4, vimos que para μ positivo e suficientemente pequeno o problema em questão possui, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções positivas.

Uma perspectiva futura é investigar outras ferramentas que possam assegurar a multiplicidade de soluções no estudo de problemas elípticos, a fim de verificar se é possível ampliar a quantidade de soluções positivas quando comparado, por exemplo, com a teoria de categoria utilizada neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, C. O.; DING, Y. H. *Multiplicity of Positive Solutions to a p -Laplacian Equation Involving Critical Nonlinearity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 279 (2003), 508-521.
- [2] AUBIN, Th., *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*. J. Diff. Geom. 11 (1976) 573-598.
- [3] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, Inc., New York, 1995.
- [4] BEN-NAOUM, A. K.; TROESTLER, C.; WILLEM, M. *Extrema Problems With Critical Sobolev Exponents on Unbounded Domains*. Nonlinear Analysis, TMA 26 (1996), 823-833.
- [5] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. 2ª edição, SBM, Coleção de Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2015.
- [6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer N. Y.: Universitext, 2010.
- [7] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.
- [8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *Introdução à teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Universidade Estadual de Maringá, DMA, 2011.
- [9] CAZENAVE, T. *An Introduction to Semilinear Elliptic Equations*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2018.
- [10] CINGOLANI, S.; VANNELLA, G. *Multiple positive solutions for a critical quasilinear equation via Morse theory*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26(2009), 397-413.
- [11] CINGOLANI, S.; VANNELLA, G. *The Brezis-Nirenberg type problem for the p -Laplacian ($1 < p < 2$): Multiple positive solutions*. Journal of Differential Equations 266(8), 2019, 4510-4532.
- [12] CLARKSON, JAMES A. *Uniformly convex spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

-
- [13] GARCIA AZORERO, J.; PERAL ALONSO, I. *Existence and Non-uniqueness for the p -Laplacian: Nonlinear Eigenvalues*. *Comm. Partial Differential Equations* 12,(1987) 1389-1430.
- [14] GARCIA AZORERO, J.; PERAL ALONSO, I. *Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent with a Nonsymmetric Term*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 323 (1991), 877-895.
- [15] KAVIAN, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. Springer, Heidelberg, 1993.
- [16] LIMA, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Rio de Janeiro. IMPA, 2006.
- [17] LIONS, P. L. *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 1*. *Rev. Mat. Iberoamericana*, Vol. 1, N.º 1, (1985), 145-201.
- [18] LIONS, P. L. *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 2*. *Rev. Mat. Iberoamericana*, Vol. 1, N.º 2, (1985), 45-121.
- [19] LUSTERNIK, L.; SCHNIRELMAN, L. *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934.
- [20] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos problemas Elípticos não Homogêneos)*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
- [21] MELO, J. L. F. *Sobre a multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos de quarta-ordem via categoria de Lusternik- Schnirelman*. Tese de Doutorado, ICMC-USP, São Carlos-SP, 2014.
- [22] SILVA, E. A. de B.; SOARES, S. H. M. *Quasilinear Dirichlet problems in \mathbb{R}^N with critical growth*. *Nonlinear Analysis* 43 (2001), 1-20.
- [23] TALENTI, G. *Best Constant in Sobolev Inequality*. *Ann. Mat.* 110 (1976), 353-372.
- [24] WILLEM, M. *Analyse Harmonique Réelle*. Hermann, Paris, 1995.
- [25] WILLEM, M. *Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, 1996.

Apêndice A

Espaços de Sobolev

Apresentaremos uma introdução sobre Espaços de Sobolev e alguns resultados importantes.

Por Ω representa-se um subconjunto aberto do \mathbb{R}^N e por $\partial\Omega$ sua fronteira. Será fixada em Ω a medida de Lebesgue dx .

Definição A.1. *Sejam u uma função numérica definida em Ω , u mensurável, e $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em (\mathcal{O}_i) . Considerando o subconjunto aberto $\mathcal{O} = \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, temos $u = 0$ quase sempre em \mathcal{O} . Como consequência deste fato, o suporte de u , o qual é denotado por $\text{supp } u$, é definido como sendo o subconjunto fechado de Ω ,*

$$\text{supp } u = \Omega \setminus \mathcal{O}.$$

Observe que se u é contínua em Ω então

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Se este conjunto for compacto, dizemos que u possui suporte compacto.

Definição A.2. *Representamos por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas em Ω , com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções teste em Ω .*

Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, define-se $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$. Por D^α denota-se o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

e para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ define $D^0 u = u$ para toda função u . Por D_i , para $i = 1, 2, \dots, N$, representa-se a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Definição A.3. Diz-se que uma sequência (φ_n) de funções de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- (a) Os suportes de todas as funções teste (φ_n) , da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K ;
- (b) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(D^\alpha \varphi_n)$ converge para zero uniformemente em K .

Se $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sequência (φ_n) de elementos de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $(\varphi_n - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima. O espaço vetorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções teste em Ω .

Definição A.4. Representamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das funções mensuráveis em Ω , cuja potência p , $|u|^p$, é integrável no sentido de Lebesgue em Ω , equipado com a norma

$$|u|_p = |u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definição A.5. Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das funções numérica u , mensuráveis em Ω que são essencialmente limitadas em Ω , equipado com a norma

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \operatorname{ess}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Definição A.6. Denota-se por $L_{loc}^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço localmente convexo das funções numéricas $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω .

Sejam (u_n) uma sequência em $L_{loc}^p(\Omega)$ e $u \in L_{loc}^p(\Omega)$. Dizemos que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{loc}^p(\Omega)$$

se para cada compacto K de Ω tem-se

$$\rho_K(u_n - u) = \left(\int_K |u_n(x) - u(x)|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0.$$

Notemos que $L_{loc}^p(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^1(\Omega)$ com \hookrightarrow denotando a injeção contínua. Além disso, prova-se que $L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Proposição A.7. [20, Corolário 1] $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Proposição A.8 (Desigualdade de Interpolação). [20, Proposição 1.2.1] Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e tem-se a desigualdade

$$|u|_r \leq |u|_p^\theta |u|_q^{1-\theta},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Proposição A.9. [20, Proposição 1.2.2] Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Então a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \\ y &\longmapsto T_y u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto T_y u(x) = u(x - y), \end{aligned}$$

é contínua.

Definição A.10. Sejam $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Dizemos que u tem derivada fraca de ordem α , se existe $v_\alpha \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \int_{\Omega} v_\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Denotamos, $D^\alpha u = v_\alpha$.

Definição A.11. O espaço de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada fraca de u . Ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u = v_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ para } |\alpha| \leq m\}$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{m,\infty} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\text{ess } x \in \Omega} |D^\alpha u|. \end{aligned}$$

Por equivalência, para $1 \leq p < \infty$ a norma de $W^{p,m}(\Omega)$ também pode ser dada por

$$\|u\|_{m,p} = |u|_p + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_p.$$

Proposição A.12. [20, Proposição 2.2.1] O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Teorema A.13. [8, Teorema 2.14] Se $1 < p < +\infty$ então $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.

Definição A.14. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Proposição A.15. [8, Proposição 2.6] Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, então o complementar de Ω em \mathbb{R}^N possui medida de Lebesgue igual a zero.

Proposição A.16. [20, Proposição 2.2.4] Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e possui suporte compacto, então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

Definição A.17. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. O espaço $W^{-m,q}(\Omega)$ é o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Quando se diz que T pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$, significa dizer que T , definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esta extensão contínua é ainda representada por T . Para uma caracterização das funções de $W^{-m,q}(\Omega)$ veja o Lema 2.2.1 de [20].

Dito isso, quando $m = 1$, $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções u em $L^p(\Omega)$ tais que $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ pertence a $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, N \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{1,p} = |u|_p + |\nabla u|_p;$$

e

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)},$$

equipado com a norma usual

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \right)^{1/p}.$$

Em virtude da Desigualdade de Poincaré, Teorema C.10, as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são equivalentes.

Apêndice B

Resultados de teoria da Medida

Enunciaremos uma definição e três resultados que foram usados nos Lemas 1.1 e 1.2.

Definição B.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N e defina*

$$\mathcal{K}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : \text{supp } u \subset\subset \Omega\}$$

e

$$\mathcal{BC}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{C}(\Omega) : \|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}.$$

O espaço $\mathcal{C}_0(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{K}(\Omega)$ em $\mathcal{BC}(\Omega)$ com respeito a norma uniforme. Uma medida finita em Ω é um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(\Omega)$. A norma de uma medida finita μ é dada por

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{u \in \mathcal{C}_0(\Omega) \\ \|u\|_\infty = 1}} |\langle \mu, u \rangle|.$$

Denotemos por $\mathcal{M}(\Omega)$ (respectivamente, $\mathcal{M}^+(\Omega)$) o espaço de medidas finitas (respectivamente, espaço de medidas finitas positivas, isto é, as medidas μ tais que $\langle \mu, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ com $u \geq 0$) em Ω . Uma sequência (μ_n) converge fraco para μ em $\mathcal{M}(\Omega)$, e escrevemos

$$\mu_n \rightharpoonup \mu,$$

se

$$\langle \mu_n, u \rangle \rightarrow \langle \mu, u \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega),$$

isto é,

$$\int_{\Omega} u d\mu_n \rightarrow \int_{\Omega} u d\mu, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Teorema B.2. [24, Teorema 10.8] *Toda sequência limitada de medidas finitas em Ω admite uma subsequência fracamente convergente.*

Proposição B.3. [24, Proposição 10.9] Se $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, então

$$\|\mu\| = \langle \mu, 1 \rangle = \sup_{\substack{u \in \mathcal{BC}(\Omega) \\ \|u\|_\infty = 1}} \langle \mu, u \rangle.$$

Proposição B.4. [24, Proposição 10.11] Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ então (μ_n) é limitada e

$$\|\mu\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\|.$$

Apêndice C

Resultados utilizados na dissertação

Apresentaremos definições, teoria e resultados importantes que foram utilizados ao longo desta dissertação.

Definição C.1. *Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas quando existe uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se então uma homotopia entre f e g .*

Definição C.2. *Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ chama-se uma equivalência homotópica quando existe $g : Y \rightarrow X$ contínua tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Diz-se então que g é um inverso homotópico de f e que os espaços topológicos X e Y têm o mesmo tipo de homotopia.*

Definição C.3. (a) (Notação *O grande de Landau*) Escrevemos

$$f = O(g) \text{ quando } x \rightarrow x_0,$$

se existe uma constante C tal que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

para todo x suficientemente próximo de x_0 .

(b) (Notação de *o pequeno de Landau*) Escremos

$$f = o(g) \text{ quando } x \rightarrow x_0,$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Definição C.4. Dados X e Y espaços vetoriais normados, diremos que $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso continuamente em $(Y, \|\cdot\|_Y)$, e denotamos $(X, \|\cdot\|_X) \xrightarrow{\text{cont.}} (Y, \|\cdot\|_Y)$, quando:

(a) X é subespaço vetorial de Y ;

(b) A identidade $\text{id}:(X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ é um operador contínuo.

Definição C.5. Dados X e Y espaços vetoriais normados, diremos que $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso compactamente em $(Y, \|\cdot\|_Y)$, e denotamos $(X, \|\cdot\|_X) \xrightarrow{\text{comp.}} (Y, \|\cdot\|_Y)$, quando:

(a) X é subespaço vetorial de Y ;

(b) A identidade $\text{id}:(X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ é um operador compacto.

Proposição C.6. [9, Proposição 5.3.3 e Observação 5.3.4] Considere $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \max\{0, -u\}$ e suponha $1 \leq p \leq \infty$.

(i) Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então u^+ e u^- pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$. Mais ainda,

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u \geq 0 \\ 0, & \text{se } u \leq 0 \end{cases}, \quad \nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u, & \text{se } u < 0 \\ 0, & \text{se } u \geq 0 \end{cases}, \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

(ii) Se $p < \infty$, então as aplicações $u \mapsto u^+$ e $u \mapsto u^-$ pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$ e são contínuas em $W^{1,p}(\Omega)$.

(iii) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então u^+ e u^- pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema C.7 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). [6, Teorema 9.9] Seja $1 \leq p < N$. Então $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, com $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, e existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de p e N , tal que

$$|u|_{p^*} \leq C |\nabla u|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Teorema C.8. [6, Corolário 9.14] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe \mathcal{C}^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Temos as seguintes imersões contínuas

(a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, p^*]$ com $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, se $p < N$;

(b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty)$, se $p = N$;

(c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, se $p > N$.

Teorema C.9 (Rellich-Kondrachov). [6, Teorema 9.16] Seja Ω um subconjunto limitado do \mathbb{R}^N e $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 . Então as seguintes imersões são compactas:

(a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ se $p < N$;

(b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty)$, se $p = N$;

(c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, se $p > N$.

Em particular, a imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ é compacta para todo p .

Teorema C.10 (Desigualde de Poincaré). [6, Corolário 9.19] Suponha que $1 \leq p < \infty$ e Ω um subconjunto limitado do \mathbb{R}^N . Então existe uma constante C (dependente de Ω e p) tal que

$$|u|_p \leq C|\nabla u|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lema C.11. [15, Lema 4.8] Sejam Ω um subconjunto de \mathbb{R}^N e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Se

(a) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em Ω ,

então,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Lema C.12 (Brezis-Lieb). [25, Lema 1.32] Sejam Ω um subconjunto de \mathbb{R}^N e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Se

(a) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em Ω ,

então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Definição C.13. Um espaço de Banach $(E, \|\cdot\|)$ é dito uniformemente convexo se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in E, \quad \|x\| \leq 1, \quad \|y\| \leq 1 \text{ e } \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Teorema C.14 (Desigualdade de Clarkson). [12, Teorema 2] Se $p \in [2, +\infty)$, então

$$\left| \frac{f + g}{2} \right|_p^p + \left| \frac{f - g}{2} \right|_p^p \leq \frac{1}{2}(|f|_p^p + |g|_p^p), \quad \forall f, g \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Proposição C.15. *O espaço $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_*)$ é uniformemente convexo, em que*

$$\|u\|_* = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|u\|_* \leq 1$, $\|v\|_* \leq 1$ e $\|u - v\|_* > \varepsilon$. Pelo Teorema C.14, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_*^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_*^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \frac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^p + \left| \frac{\nabla u - \nabla v}{2} \right|^p \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|u\|_*^p + \|v\|_*^p) \leq 1. \end{aligned}$$

Daí,

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_*^p \leq 1 - \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_*^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p.$$

Logo,

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_* < \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} = 1 - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} \right],$$

e tomando $\delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} > 0$, temos o resultado. ■

Teorema C.16 (Milman–Pettis). [6, Teorema 3.31] *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Teorema C.17. [6, Teorema 4.10, Passo 2] *O espaço L^p é uniformemente convexo, e portanto, reflexivo para $2 \leq p < \infty$.*

Proposição C.18. [6, Proposição 3.32] *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach uniformemente convexo e seja (x_n) uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup x$ em E e $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Então $x_n \rightarrow x$ em E .*

Teorema C.19 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). [3, Teorema 5.6] *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X tal que (f_n) converge q.t.p. em X para uma função mensurável f . Se existe uma função não negativa g integrável em X tal que*

$$|f_n| \leq g \text{ q.t.p. em } X \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Teorema C.20 (Desigualdade de Hölder). [3, Teorema 6.9] Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in L^q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ e

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

Proposição C.21. [5, Proposição 6.2.5, item (a)] Sejam E um espaço vetorial normado e uma sequência $(x_n) \subset E$, então

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E \Rightarrow (\|x_n\|)_{n=1}^\infty \text{ é limitada e } \|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

Consideremos X um espaço de Banach, $\psi \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$, $V = \{v \in X : \psi(v) = 1\}$, e suponha que para todo $v \in V$ tenhamos $\psi'(v) \neq 0$.

Definição C.22. (a) O espaço tangente de V no ponto v é dado por

$$T_v V = \{y \in X : \langle \psi'(v), y \rangle = 0\}.$$

(b) Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $v \in V$. A norma da derivada da restrição de φ a V em v é definida por

$$\|\varphi'(v)\|_* = \sup_{\substack{y \in T_v V \\ \|y\|=1}} \langle \varphi'(v), y \rangle.$$

(c) O ponto v é um ponto crítico da restrição de φ a V se a restrição de $\varphi'(v)$ a $T_v V$ é igual a zero, isto é, se $\|\varphi'(v)\|_* = 0$.

Teorema C.23 (Multiplicadores de Lagrange). [25, Proposição 5.12] Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $u \in V$ então

$$\|\varphi'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\|.$$

Em particular, u é ponto crítico de $\varphi|_V$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi'(u) = \lambda \psi'(u).$$

A seguir, enunciaremos dois lemas de deformação. O Lema C.24 trata-se de um lema de deformação para variedades e o Lema C.25 é aplicado em espaços de Banach.

Lema C.24. [25, Lema 5.15] Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset V$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$(\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon] \cap S_{2\delta})) : \|\varphi'(u)\|_* \geq 8\varepsilon/\delta. \quad (\text{C.1})$$

Então existe $\eta \in \mathcal{C}([0, 1] \times V, V)$ tal que

(a) $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ ou se $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

(b) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$;

(c) $\varphi(\eta(\cdot, u))$ é não crescente, $\forall u \in V$.

Lema C.25 (Lema de Deformação). [25, Lema 2.3] Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$(\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon] \cap S_{2\delta})) : \|\varphi'(u)\|_* \geq 8\varepsilon/\delta, \quad (\text{C.2})$$

com

$$S_{2\delta} = \{u \in X : \text{dist}(u, S) \leq 2\delta\}.$$

Então existe $\eta \in \mathcal{C}([0, 1] \times X, X)$ tal que

(i) $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ ou se $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

(ii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$;

(iii) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo de X , $\forall t \in [0, 1]$;

(iv) $\|\eta(t, u) - u\| \leq \delta$, $\forall u \in X$, $\forall t \in [0, 1]$;

(v) $\varphi(\eta(\cdot, u))$ é não crescente, $\forall u \in X$;

(vi) $\varphi(\eta(t, u)) < c$, $\forall u \in \varphi^c \cap S_\delta$, $\forall t \in [0, 1]$.

Teorema C.26. Sejam X um espaço de Banach, M_0 um subespaço fechado de um espaço métrico M e $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Defina

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz

$$\infty > c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a = \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)) \quad (\text{C.3})$$

então, para cada $\varepsilon \in (0, (c - a)/2)$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon, \quad (\text{C.4})$$

existe $u \in X$ verificando

(a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

(b) $\text{dist}(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$;

(c) $\|\varphi'(u)\| \leq 8\varepsilon/\delta$.

Demonstração. Suponha que o teorema seja falso, isto é, existem $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon, \quad (\text{C.5})$$

e para todo $u \in X$ satisfazendo os itens (a) e (b), temos

$$\|\varphi'(u)\| > 8\varepsilon/\delta.$$

Aplicaremos o Lema da Deformação (Lema C.25) fazendo $S = \gamma(M)$. Note que ε satisfaz $a < c - 2\varepsilon$. Como $\gamma \in \Gamma$ então $\gamma_0 = \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0$ e daí, para todo $u \in M_0$, $\gamma_0(u) \in \Gamma_0$ e $\gamma_0(u) \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$, pois $\varphi(\gamma_0(u)) \leq a < c - 2\varepsilon$. Defina então $\beta : M \rightarrow X$ por $\beta(u) = \eta(1, \gamma(u))$, e assim, pelo item (i) do Lema C.25,

$$\beta(u) = \eta(1, \gamma_0(u)) = \gamma_0(u), \quad \forall u \in M_0,$$

mostrando que $\beta \in \Gamma$. De (C.5) temos $\varphi(\gamma(u)) \leq c + \varepsilon$ para todo $u \in M$, implicando que $\gamma(u) \in \varphi^{c+\varepsilon}$, para todo $u \in M$. Logo, do item (ii) do Lema C.25,

$$\eta(1, \gamma(u)) \in \varphi^{c-\varepsilon}, \quad \forall u \in M,$$

ou seja,

$$\varphi(\eta(1, \gamma(u))) \leq c - \varepsilon, \quad \forall u \in M.$$

Com isso,

$$c \leq \sup_{u \in M} \varphi(\beta(u)) = \sup_{u \in M} \varphi(\eta(1, \gamma(u))) \leq c - \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Portanto, o teorema é verdadeiro. ■

Observação C.27. *Os números*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad \tilde{c}_\mu = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tv)$$

são iguais, em que Γ é o conjunto definido no Teorema 2.3 e I_μ , dado em 2.1, o funcional energia associado ao problema (P_μ) .

Demonstração. Sejam $r > 0$ e $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dados pelo Lema 2.10, ou seja, $\|e\| > r$ e $I_\mu(e) < I_\mu(0) = 0$. Definindo $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ por $\gamma_0(t) = te$, obtemos $\gamma_0(0) = 0$ e $\gamma_0(1) = e$ donde $\gamma_0 \in \Gamma$. Logo,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma_0(t)) \leq \max_{t \geq 0} I_\mu(\gamma_0(t)) = \max_{t \geq 0} I_\mu(te) = \max_{t \geq 0} I_\mu(tu),$$

em que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, ou seja, c é uma cota inferior para o conjunto $\{\max_{t \geq 0} I_\mu(tu) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}$ e portanto

$$c \leq \tilde{c}_\mu. \quad (C.6)$$

Por outro lado, novamente pelo Lema 2.10, existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_\mu(u_n) \rightarrow c \text{ e } I'_\mu(u_n) \rightarrow 0.$$

Além disso, pela desigualdade (C.6) e pelo Lema 2.13 obtemos $c \leq \tilde{c}_\mu < S^{N/p}/N$ e, conseqüentemente, I_μ satisfaz a condição $(PS)_c$. Portanto, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, donde

$$I_\mu(u_n) \rightarrow I_\mu(u) \text{ e } I'_\mu(u_n) \rightarrow I'_\mu(u).$$

Pela unicidade do limite, $I_\mu(u) = c$ e $I'_\mu(u) = 0$, isto é, u é um ponto crítico para o funcional I_μ e $u \in \mathcal{N}_\mu$, já que $c > 0$. Com isso, e pelo Lema 4.5, temos

$$c = I_\mu(u) \geq c_\mu = \tilde{c}_\mu. \quad (C.7)$$

Por (C.6) e (C.7) concluímos que $c = \tilde{c}_\mu$. ■

O próximo teorema pode ser visto em [15].

Teorema C.28 (Princípio do Máximo). *Se u é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), \\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

com $f \geq 0$, então $u \geq 0$; e se u atinge mínimo, então $u \equiv 0$.