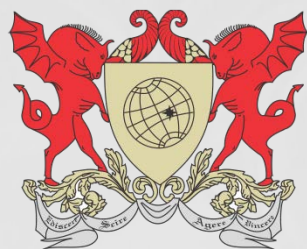


Cálculo Diferencial e Integral I

Rosane Soares Moreira Viana
Laerte Dias de Carvalho
Jaques Silveira Lopes

cead



Universidade Federal de Viçosa

Reitora

Nilda de Fátima Ferreira Soares

Vice-Reitor

Demétrius David da Silva

Conselho Editorial

Andréa Patrícia Gomes

João Batista Mota

José Benedito Pinho

José Luiz Braga

Tereza Angélica Bartolomeu



cead
Coordenadoria de
Educação Aberta e a Distância

Diretor

Frederico Vieira Passos

Prédio CEE, Avenida PH Rolfs s/n
Campus Universitário, 36570-000, Viçosa/MG

Telefone: (31) 3899-2858

Fax: (31) 3899-3352

Ficha catalográfica preparada pela seção de catalogação da Biblioteca Central da UFV

M838c
2012

Moreira, Rosane Soares, 1969-
Cálculo diferencial e integral I [recurso eletrônico] /
Rosane Soares Moreira, Jaques Silveira Lopes e Laerte
Dias de Carvalho. – Viçosa, MG : UFV/CEAD, 2012.
197p. : il. (algumas col.) ; 29cm. (Conhecimento, ISSN
2179-1732 ; n.5)

Livro eletrônico.
Bibliografia: p. 196.

1. Cálculo diferencial. I. Lopes, Jaques Silveira, 1975-.
II. Carvalho, Laerte Dias de, 1964-. III. Universidade Federal
de Viçosa. Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância.
IV. Título.

CDD 22. ed. 515.33

VIANA, Rosane; CARVALHO, Laerte e LOPES, Jaques - Cálculo Diferencial e Integral I. Viçosa, 2012

Layout: Pedro Eni Lourenço Rodrigues
Capa: Pedro Eni Lourenço Rodrigues
Gráficos e imagens: Rosane Soares Moreira Viana
Editoração Eletrônica: Pedro Eni Lourenço Rodrigues
Revisão Final: João Batista Mota

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1. REVISÃO DE FUNÇÃO	7
CAPÍTULO 2. LIMITES DE FUNÇÕES	14
2.1 NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE	14
2.2 DEFINIÇÃO DE LIMITE	19
2.3 PROPRIEDADES DOS LIMITES	23
TESTE O SEU CONHECIMENTO	25
2.4 LIMITES NO INFINITO E LIMITES INFINITOS	29
2.5 CÁLCULO DE LIMITES	37
TESTE O SEU CONHECIMENTO	41
2.6 LIMITES FUNDAMENTAIS	43
2.7 FUNÇÕES CONTÍNUAS	46
2.8 PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS	51
TESTE O SEU CONHECIMENTO	58
CAPÍTULO 3. DERIVADA	60
3.1 RETA TANGENTE A UMA CURVA	60
3.2 O CONCEITO DE DERIVADA	69
3.3 TÉCNICAS DE DERIVAÇÃO	77
TESTE O SEU CONHECIMENTO	87
3.4 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA	95
3.5 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR	100
3.6 DERIVADAS DE FUNÇÕES INVERSAS	104
3.7 TABELA GERAL DE DERIVADA	109
TESTE O SEU CONHECIMENTO	110
CAPÍTULO 4. APLICAÇÕES DA DERIVADA	113
4.1 TAXA DE VARIAÇÃO	113
4.2 TAXAS RELACIONADAS	119
TESTE O SEU CONHECIMENTO	125
4.3 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES	126
4.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS	131
4.5 CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO	139
4.6 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS	146
4.7 ESBOÇO DE GRÁFICOS	149
4.8 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	151
CAPÍTULO 5. INTEGRAÇÃO	154
5.1 INTEGRAL INDEFINIDA	154
5.2 PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA	157
5.3 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO (OU MUDANÇA DE VARIÁVEIS)	159
5.4 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO POR PARTES	162
TESTE O SEU CONHECIMENTO	167
5.5 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA.	168
5.6 INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS	171
5.7 SUBSTITUIÇÕES DIVERSAS	177
TESTE O SEU CONHECIMENTO	179

5.8	ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA	180
5.9	PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA	183
5.10	TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO	185
5.11	CÁLCULO DE ÁREAS	189
5.12	CÁLCULO DE VOLUMES	191
	TESTE O SEU CONHECIMENTO	193
	BIBLIOGRAFIA	195

PREFÁCIO

Esta obra intitulada CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I foi construída para ser a referência básica da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do Curso de Licenciatura em Matemática - Modalidade a Distância oferecido pela Universidade Federal de Viçosa. Entretanto, por conter, em detalhes, os principais tópicos da Teoria de Cálculo de funções de uma variável independente, além de algumas importantes aplicações, este texto pode ser utilizado nas disciplinas de Cálculo oferecidas para os demais Cursos de Graduação.

O trabalho de produzir um material deste tipo, cujo conteúdo abordado é muito extenso e bastante minucioso, exigiu grande dedicação da equipe de autores. E o fato da disciplina em tela ser oferecida para alunos que, na maioria das vezes, não tem a disposição uma boa biblioteca faz com que o material seja, em certa medida, suficiente para o aluno compreender os conceitos abordados.

O texto desenvolvido terá, aqui na UFV, o suporte e a complementação de outras mídias (como por exemplo: vídeo aulas e aulas narradas) disponibilizadas na plataforma de interação PVANet, que é um ambiente virtual de aprendizagem. Além do PVANet, a disciplina quando oferecida contará com todos os elementos que esta modalidade de ensino exige: tutores presenciais e a distância; coordenadores de pólos; professores coordenadores de disciplinas; coordenador de tutores; comissão coordenadora de curso etc.

Os gráficos que aparecem ao longo do texto foram construídos pela Professora Rosane, uma das autoras do livro, utilizando o software gratuito Geogebra. E a confecção de tantos gráficos custou muitas horas de trabalho e contou com a habilidade e paciência da autora.

De uma maneira um tanto quanto clássica, os assuntos estão divididos em capítulos e seções, partindo da importante revisão das noções básicas de funções e introduzindo, na sequência, os conceitos de Limite e Continuidade de funções. A Teoria de Derivadas, bem como suas aplicações, aparecem à frente da Teoria de Integrais, simplesmente por uma conveniência didática, pois a ordem aí não era fundamental. Algumas demonstrações são omitidas no decorrer do texto, isto pela complexidade de algumas delas, mas na maioria das vezes pelo fato de que o foco do livro é apresentar as técnicas e as aplicações do Cálculo.

CAPÍTULO 1. REVISÃO DE FUNÇÃO

Para o estudo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I estamos interessados no estudo de funções reais a uma variável. Faremos uma breve revisão do conceito de função real e sua representação gráfica. Você também deve estar familiarizado com os conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} e \mathbb{R} e noções gerais sobre intervalos, inequações e valor absoluto.

O conceito de função e as suas diversas representações permitem estabelecer conexões entre os diferentes ramos da Matemática e dela com outras ciências. O reconhecimento de variáveis em situações do cotidiano e o estabelecimento de relações entre elas permitem expressar leis matemáticas.

As funções aparecem em muitas situações em que o valor de uma variável pode depender do valor de uma outra variável. Neste contexto, quando uma grandeza y depende de uma grandeza x de modo que cada valor x determine exatamente um único valor y , então dizemos que y é **função de x** . Neste caso, chamamos x de **variável independente** e y de **variável dependente**.

Por exemplo:

A área A de uma circunferência depende de seu raio r . A regra, que relaciona r e a área A , é dada pela equação $A = \pi r^2$. Assim, a cada número r positivo corresponde exatamente um valor de A . Então dizemos que A é função de r .

Suponhamos que determinada mercadoria esteja sendo vendida a R\$1,50 o quilo. Então x quilos dessa mercadoria, custarão R\$1,50 x . Denotando por p o preço desses x quilos, então $p = 1,50x = \frac{3x}{2}$. Temos aqui duas grandezas, x e p , que estão relacionadas entre si. Dizemos que p é função de x porque a cada valor de x corresponde um valor de p .

Para modelar essas situações, são utilizadas funções do tipo $y = f(x)$, sendo x a variável independente e y a variável dependente.

Formalmente,

Definição 1: Sejam D e B subconjuntos de \mathbb{R} (conjunto dos números reais). Uma função real f é uma correspondência (regra ou lei) que, a cada elemento $x \in D$ associa exatamente um elemento $y \in B$.

Saiba Mais: O conceito de função pode ser estendido a outros conjuntos que não são, necessariamente, subconjuntos de \mathbb{R} . Para conhecer melhor as funções, consulte uma das referências listadas na Bibliografia (Veja, por exemplo, MEDEIROS, et. al., 2006).

Observação 1: Comumente utiliza-se o valor da função no ponto x (imagem de x) por $f(x)$ e a notação $f: D \rightarrow B$ para indicar a função com os conjuntos D e B relacionados. Ou ainda,

$$\begin{array}{l} f: D \rightarrow B \\ x \rightarrow y = f(x) \end{array}$$

- (i) O conjunto D , que também pode ser denotado por $Dom(f)$ ou $D(f)$, é o **domínio** da função f , isto é, o conjunto em que a função é definida.
- (ii) O conjunto B é o **contradomínio** da função f , isto é, conjunto em que a função toma valores.
- (iii) Dado $x \in D$, $y = f(x) \in B$ é o valor da função f no ponto x ou imagem de x por f .
- (iv) Simbolicamente, $f: D \rightarrow B$ é função $\Leftrightarrow \forall x \in D, \exists! y \in B; y = f(x)$

Definição 2: O conjunto de todos os valores assumidos por uma função f é chamado conjunto imagem de f , representado por $Im(f)$. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f: D \rightarrow B$ é o subconjunto de pontos $y \in B$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$Im(f) = \{ y \in B \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y \} = \{ f(x) ; x \in D \}$$

Observação 2: Para não confundir o conceito de uma função f e do valor da função $f(x)$ podemos pensar intuitivamente uma função como uma "máquina".

Quando inserimos um elemento x do domínio de f (matéria-prima disponível) na máquina (que faz papel da função f), a máquina produz o valor da função correspondente $f(x)$ (produto) conforme ilustra a figura abaixo.

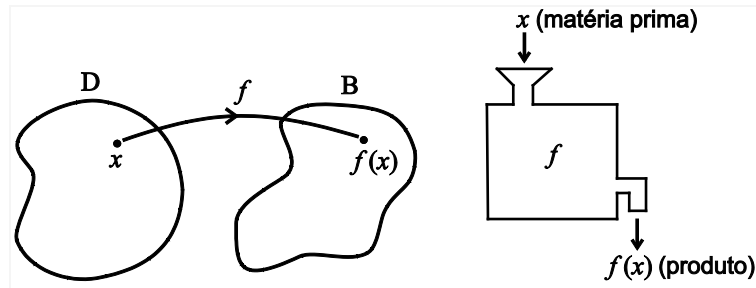


Figura 1: Representações esquemáticas da ideia de função

Assim, o mais correto é dizer “seja a função f ” em vez de “seja a função $f(x)$ ”, muito embora, frequentemente, prefira-se essa última maneira de falar.

Exemplo 1: Considere $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Neste caso, o domínio da função real f é $\mathbb{R} - \{2\}$, o contradomínio é \mathbb{R} e a lei de definição é $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Podemos reescrever $f(x)$, para $x \neq 2$, como $f(x) = x + 2$, pois $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Assim:

$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, \quad f(x-1) = x - 1 + 2 = x + 1, \quad f(t^2) = t^2 + 2$$

$$f(x+h) - f(x) = x + h + 2 - (x + 2) = h, \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Observação 3: Observe que uma função consta de três partes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \rightarrow f(x)$. É usual uma função ser dada pela sua expressão sem especificação do seu domínio. Neste caso, assumimos que o domínio é o maior subconjunto dos números reais para os quais a expressão faz sentido (assume um valor real), isto é, os números com os quais podemos efetuar as operações indicadas na referida expressão. Assim, o domínio de f , chamado **domínio natural** de f , é dado por

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, o contradomínio é \mathbb{R} .

Exemplo 2: Seja g a função definida por $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$.

Esta função não está definida para $x=1$ e $x=3$. Logo,

$$Dom(g) = \mathbb{R} - \{1,3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\}.$$

Exemplo 3: Considere a função $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Assim, o domínio de h são

todos os números reais que satisfazem a desigualdade $1-x^2 \geq 0$. Logo,

$$Dom(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ e } x \leq 1\} = [-1,1].$$

Exemplo 4: Desejamos construir uma caixa aberta a partir de uma folha retangular de papelão com 30cm de comprimento e 22cm de largura recortando quadrados idênticos (de x por x cm) de cada canto da folha e dobrando as abas resultantes. Assim, a expressão que fornece o volume V da caixa em função de x é dada por $V(x) = (30 - 2x)(22 - 2x)x$ cujo domínio é o intervalo fechado $[0,11]$, pois não podemos ter medida x e nem volume V negativo.

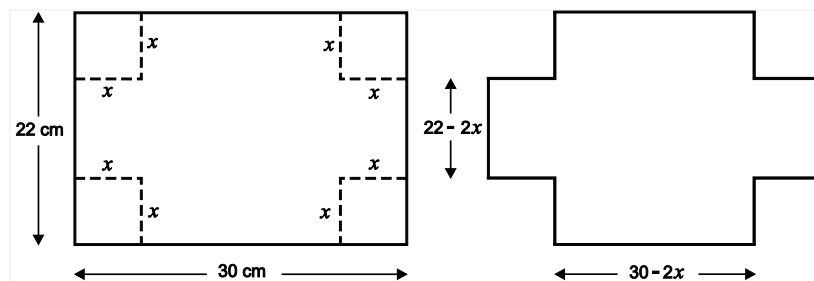


Figura 2: Esquemática do problema

Observação 4: As funções também podem ser definidas por expressões distintas em partes do seu domínio. Estas funções são denominadas **funções definidas por partes**.

Exemplo 5: O custo de uma corrida de táxi em determinada área metropolitana é tabelado da seguinte maneira: qualquer corrida inferior a 2km custa R\$3,75; após os 2km, o passageiro paga um adicional de R\$1,50 por km. Assim, para uma corrida de 5km o custo é $3,75 + 1,5(5 - 2)$, ou seja, R\$ 8,25.

De modo geral, se $f(x)$ é o custo total de uma corrida de taxi de x km, então o valor de $f(x)$ é:

$$f(x) = \begin{cases} 3,75 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 3,75 + 1,5(x - 2) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Definição 3: Seja $f : D \rightarrow B$ uma função. O gráfico de f , denotado por $\text{Graf}(f)$ é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de $D \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, onde $x \in \text{Dom}(f)$, isto é

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in D \times B \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}$$

Observação 5: Uma dada curva no plano xy representa o gráfico de uma função quando qualquer reta vertical tem, no máximo, um ponto de interseção com essa curva.

Observação 6: Através do gráfico de f também podemos determinar o domínio e a imagem de f . O domínio de f é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y , conforme ilustrado abaixo.

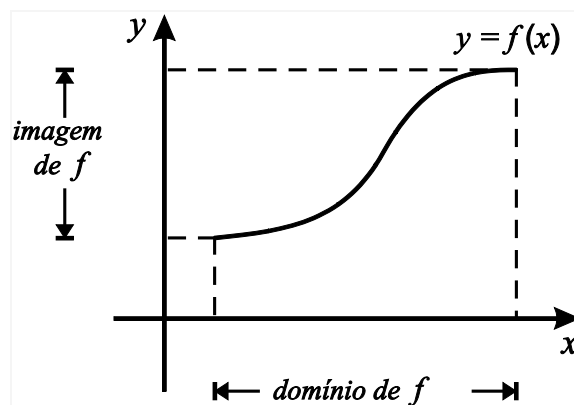


Figura 3: Representação do domínio e imagem de f

Exemplo 6: Considere a função f definida por $f(x) = 2x - 1$. O gráfico de f é esboçado na figura 4. Note que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

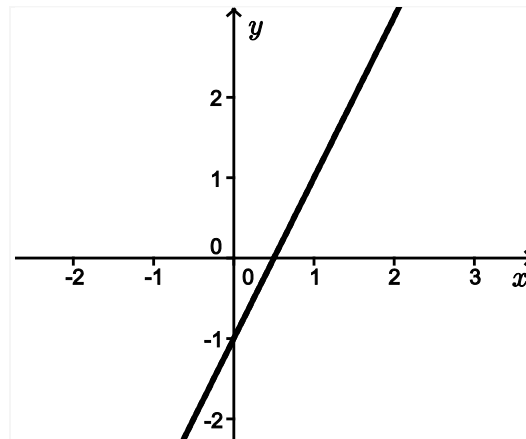


Figura 4: Gráfico da função $f(x) = 2x - 1$

Exemplo 7: Considere a função g definida por $g(t) = \sqrt{t+2}$. O gráfico de g é esboçado na figura 5. Note que $Dom(g) = [-2, +\infty)$ e $Im(g) = [0, +\infty)$

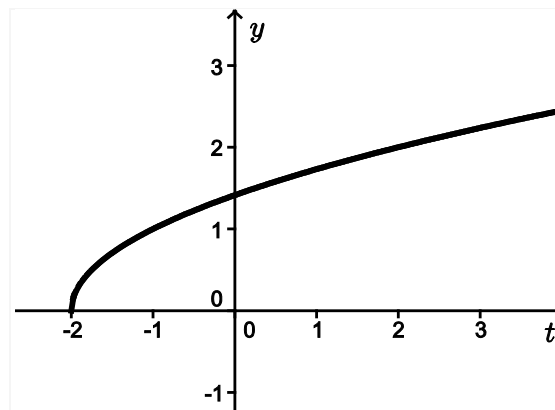


Figura 5: Gráfico da função $g(t) = \sqrt{t+2}$

Exemplo 8: Considere a função h definida por

$$h(t) = \begin{cases} t+4 & \text{se } t \leq 0 \\ t^2 - 4t + 4 & \text{se } 0 < t \leq 4 \\ -2t + 12 & \text{se } t > 4 \end{cases}$$

O gráfico de h é esboçado na figura 6. $Dom(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = (-\infty, 4]$.

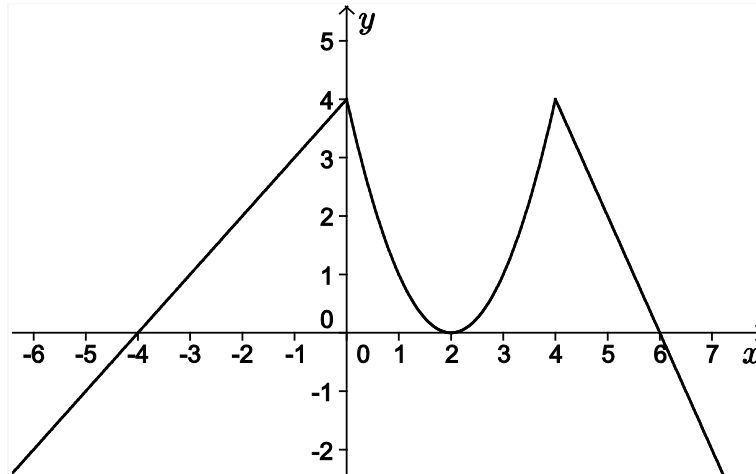


Figura 6: Gráfico da função h

Note que $Dom(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = (-\infty, 4]$.

CAPÍTULO 2. LIMITES DE FUNÇÕES

2.1 Noção Intuitiva de Limite

O conceito de limite é base fundamental de todos os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral. Portanto, será o ponto de partida para o estudo da teoria do cálculo.

Para iniciarmos nosso estudo sobre limites, vamos considerar alguns modelos ilustrativos.

Exemplo 1: Seja $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Observe que $f(x)$ existe para todo x , exceto $x = 2$. Investiguemos o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 2, porém excluindo o 2. Neste caso, dizemos que x tende a 2 e usaremos a notação $x \rightarrow 2$. Observemos que existem duas possibilidades para x se aproximar de 2:

- (i) x se aproxima de 2 por valores superiores a 2 e, neste caso, diremos que x tende para 2 pela direita (notação: $x \rightarrow 2^+$)

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,000001	...
$f(x)$	5	4,5	4,1	4,01	4,001	4,0001	4,00001	4,000001	...

- (ii) x se aproxima de 2 por valores inferiores a 2 e, neste caso, diremos que x tende para 2 pela esquerda (notação: $x \rightarrow 2^-$)

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999	...
$f(x)$	3	3,5	3,9	3,99	3,999	3,9999	3,99999	3,999999	...

Note que, em ambas as tabelas, à medida que x fica cada vez mais próximo de 2, tanto pela direita, quanto pela esquerda, os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximo de 4.

Por outro lado, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$ e se $x \neq 2$, temos que $x - 2 \neq 0$.

Logo, podemos cancelar o fator comum e reescrever $f(x) = x + 2$. Assim, o gráfico de $f(x)$ será a reta $y = x + 2$, com o ponto (2,4) excluído. Observando o gráfico de

$f(x)$, figura1, vemos que quanto mais próximo de 2 estiver x , mais próximo de 4 estará $f(x)$.

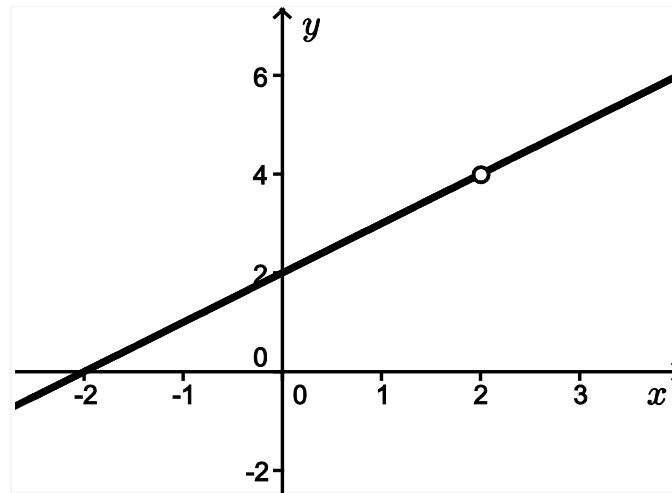


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Assim, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 4 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 2. Daí, dizemos que existe o limite de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

quando x tende a 2 e seu valor é 4. Simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

o qual deve ser lido como "o limite de $f(x)$ quando x tende a 2 é igual a 4".

O limite, portanto, estabelece qual o comportamento da função na vizinhança de um ponto, sem que este pertença necessariamente ao seu domínio.

Isto nos leva a seguinte ideia geral:

Definição informal de limite: Seja f uma função definida em todo um intervalo aberto contendo um número real a , exceto possivelmente no próprio a . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a existe e vale L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se à medida que x se aproxima de a por ambos os lados, com $x \neq a$, tem-se que $f(x)$ se aproxima de L .

A aproximação de a deve ser considerada por ambos os lados, ou seja, aproximar de a por valores maiores do que a e por valores menores do que a . Assim, se restringimos a aproximação por apenas um dos lados, podemos definir o limite lateral à esquerda e à direita.

Definição (limite lateral à direita): Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, c) . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, se à medida que x se aproxima de a , com $x > a$, tem-se que $f(x)$ se aproxima de L .

Analogamente, temos:

Definição (limite lateral à esquerda): Seja f uma função definida em um intervalo aberto (d, a) . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é M , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$, se à medida que x se aproxima de a , com $x < a$, tem-se que $f(x)$ se aproxima de M .

Observação 1: Quando o limite lateral à direita é igual ao limite lateral à esquerda, ou seja, $L = M$, dizemos que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Caso contrário, dizemos que não existe o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e escrevemos $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Nos exemplos a seguir podemos obter o limite diretamente fazendo uma observação do comportamento gráfico da função.

Exemplo 2: Para a função f definida por $f(x) = x^2 + 3$ cujo gráfico é esboçado na figura 2, podemos observar que $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3) = 3$.

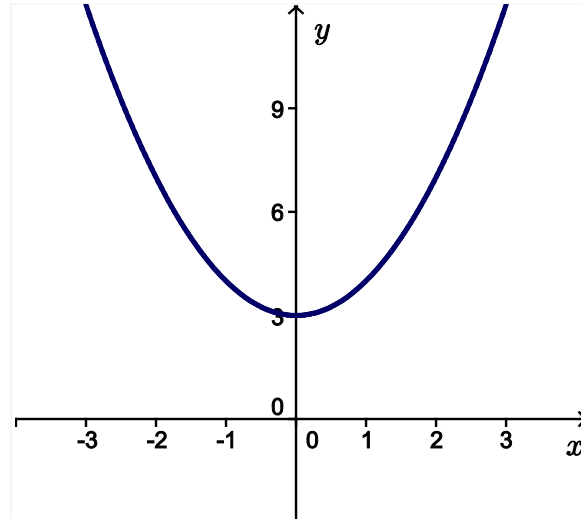


Figura 2: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 3$

Exemplo 3: Para a função g definida por $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 2 - x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

cujo gráfico é esboçado na figura 3, podemos observar que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x) = 2.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ e escrevemos $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

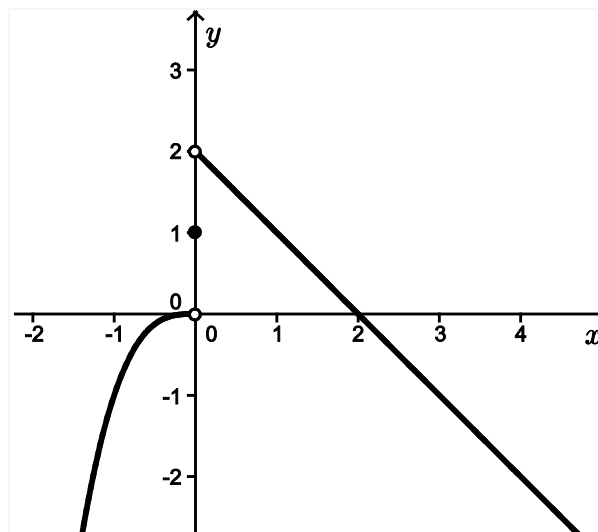


Figura 3: Gráfico da função g

Exemplo 4: Seja h a função definida por $h(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$.

Notemos que h não está definida para $x=2$. Além disso, para $x > 2$, $|x-2| = x-2$ e para $x < 2$, $|x-2| = -(x-2)$.

Assim, $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 2 \\ -1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ e seu gráfico está esboçado na figura 4.

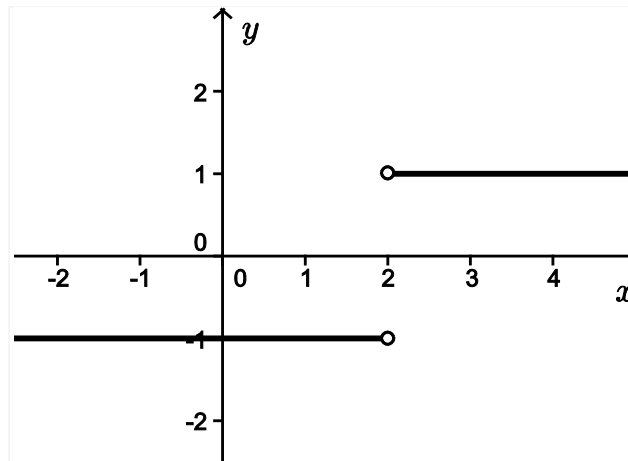


Figura 4: Gráfico da função h

A partir do gráfico podemos observar que,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1) = -1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1.$$

Como os limites laterais existem, mas são diferentes, concluímos que $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Notemos que a determinação de um limite a partir do gráfico da função exige o trabalho de esboçar tal gráfico, o que pode não ser muito simples sem a utilização de recursos computacionais ou técnicas mais sofisticadas de cálculo. Vejamos, por exemplo, o gráfico da função $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, esboçado na figura 5, gerado utilizando o software geométrico GeoGebra.

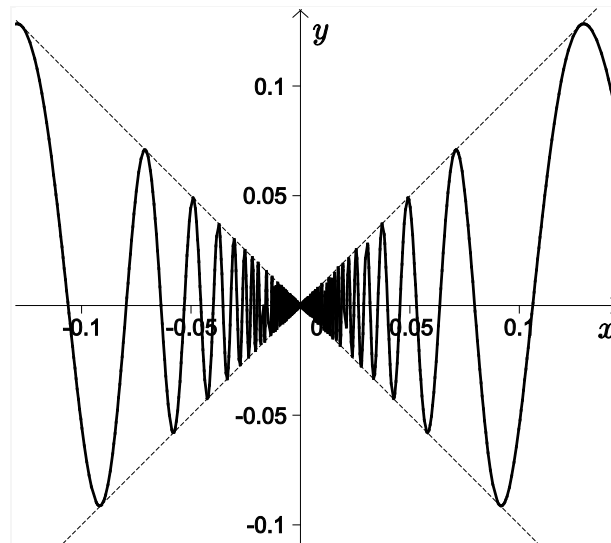


Figura 5: Gráfico da função $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Podemos observar no gráfico da função $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$, daí $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$. Mais adiante utilizaremos resultados teóricos para a determinação deste limite sem a utilização do recurso gráfico.

Observação 2: Uma abordagem teórica de limites não é o objetivo deste texto. Entretanto, uma definição formal será apresentada para que não exista uma lacuna entre o que foi exposto até aqui e as várias técnicas de cálculo de limites que veremos posteriormente.

2.2 Definição de Limite

Definição formal de limite: Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no próprio número a . O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L , escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se a seguinte afirmação for verdadeira: Dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, ou simbolicamente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

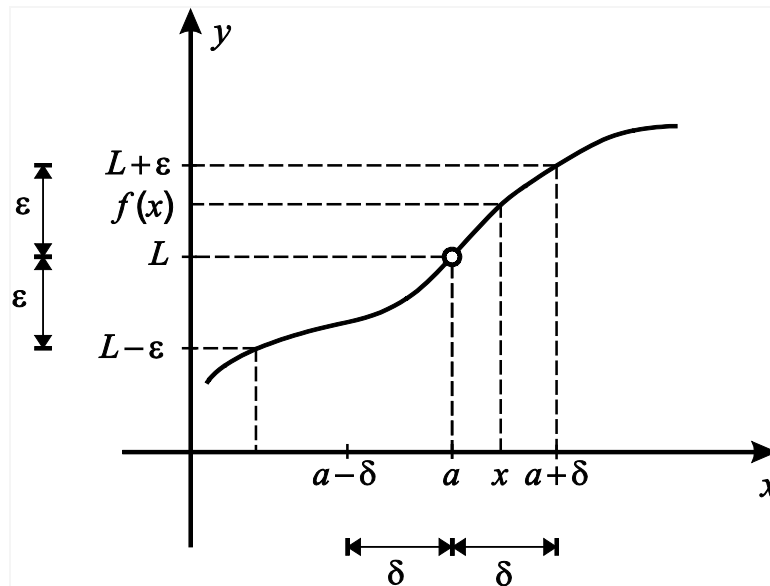


Figura 1: Ilustração gráfica da definição de limite

Observação 1: Notemos que a escolha de δ na definição acima geralmente deverá depender de ε e não poderá depender da variável x . Além disso, o valor de $\delta > 0$, dado um $\varepsilon > 0$, não é único. Na visualização da definição de limite, figura acima, o valor de δ foi escolhido como sendo o maior que irá garantir que se $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Exemplo 1: Para mostrar, por definição, que $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ devemos mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (3 - \delta, 3 + \delta)$, $x \neq 3$ (ou seja, $0 < |x - 3| < \delta$), então $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Assim, para um dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Essa escolha funciona, pois se $0 < |x - 3| < \delta$ então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2\delta = 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar.

Observação 2: Vejamos, por exemplo, tomando $\varepsilon = 0,01$ um número δ apropriado tal que para todo $x \in (3 - \delta, 3 + \delta)$, $x \neq 3$, implica que

$$|(2x - 1) - 5| < 0,01 \text{ é } \delta = \frac{\varepsilon}{2} = 0,005.$$

Notemos que 0,005 é o maior valor de δ que irá garantir que se $0 < |x-3| < \delta$ então $|(2x-1)-5| < 0,01$. Qualquer valor positivo menor que 0,005 também serviria como escolha do δ .

Veremos, nos exemplos a seguir, alguns limites que servirão de base para determinação de limites de expressões mais complexas.

Exemplo 2: Limite de uma função constante. Dado $k \in \mathbb{R}$ e f a função definida por $f(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k$. Para mostrar, por definição, que $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ devemos mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$ (ou seja, $0 < |x - a| < \delta$), então $|f(x) - k| < \varepsilon$. Assim, para um dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar qualquer $\delta > 0$. Essa escolha funciona, pois se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 3: Limite da função identidade. Seja f a função definida por $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$. Para mostrar, por definição, que $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ devemos mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$ (ou seja, $0 < |x - a| < \delta$), então $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$. Assim, para um dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \varepsilon$. Essa escolha funciona, pois se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$, como queríamos demonstrar.

Teorema (Unicidade do limite): Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, então $L = M$. Em outras palavras, se o limite existe, então ele é único.

Demonstração: Desejamos mostrar que $L = M$ sabendo-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Da definição formal de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, temos que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem os números $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \text{ e } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon.$$

Assim, tomando o número δ como sendo o menor valor entre os números δ_1 e δ_2 tem-se que $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$. Portanto, se $0 < |x-a| < \delta$ então

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \text{ e } 0 < |x-a| < \delta \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x)-M| < \varepsilon.$$

Daí, para o dado valor de $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então

$$\begin{aligned} 0 \leq |L-M| &= |L-f(x)+f(x)-M| \leq |L-f(x)| + |f(x)-M| \\ &= |f(x)-L| + |f(x)-M| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade do número positivo ε , podemos tomar ε tão pequeno quanto queiramos e, da desigualdade $0 \leq |L-M| < 2\varepsilon$, segue que

$$|L-M| = 0 \Rightarrow L-M = 0 \Rightarrow L = M,$$

como queríamos demonstrar.

2.3 Propriedades dos Limites

Teorema (Propriedades dos Limites): Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$.

P1 (LIMITE DA SOMA):

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M ;$$

P2 (LIMITE DA DIFERENÇA):

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M ;$$

P3 (LIMITE DE UMA CONSTANTE VEZES UMA FUNÇÃO): $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L$,
para qualquer $c \in \mathbb{R}$;

P4 (LIMITE DO PRODUTO):

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M ;$$

P5 (LIMITE DO QUOCIENTE):

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ desde que } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0 ;$$

P6 (LIMITE DA N-ÉSIMA POTÊNCIA):

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n, \text{ para qualquer inteiro positivo } n ;$$

P7 (LIMITE DA RAIZ N-ÉSIMA):

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ desde que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \geq 0 \text{ e } n \text{ é qualquer inteiro positivo ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0 \text{ e } n \text{ é qualquer inteiro positivo ímpar;}$$

Observação 1: As propriedades listadas acima podem ser demonstradas utilizando a definição formal de limite. Mas, no momento, o principal objetivo é a utilização destas propriedades para o cálculo de limites.

Observação 2: As propriedades de limites continuam válidas se substituirmos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$.

Exemplo 1: Se b_0, b_1 e a são números reais, então $\lim_{x \rightarrow a} (b_1 x + b_0) = b_1 a + b_0$, pois utilizando os limites básicos vistos nos exemplos 2 e 3 (seção 2.2) juntamente com as propriedades P1 e P3, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_1 x + b_0) = \lim_{x \rightarrow a} b_1 x + \lim_{x \rightarrow a} b_0 = b_1 \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} b_0 = b_1 a + b_0$$

Usando os mesmos argumentos, podemos mostrar que para números reais $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0$$

para todo $n \geq 2$. Segue então, que:

- se p é uma função polinomial do tipo $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, para todo $n \geq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.
- se f é uma função racional do tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sendo p, q funções polinomiais, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$.

Observação 3: Nos exemplos acima de limites com x tendendo a a , tivemos sempre a no domínio de f e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Quando isto ocorre, dizemos que f é contínua no ponto a . Falaremos mais adiante sobre estes tipos especiais de funções.

Exemplo 2: Para a função f definida por $f(x) = \sqrt{(5x+6)(x-1)}$ temos que

$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{(5x+6)(x-1)}$	Propriedade (P ₇)	$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (5x+6)(x-1)}$	Propriedade (P ₄)	$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (5x+6) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)}$
	Função Polinomial	$= \sqrt{(5 \cdot 2 + 6) \cdot (2 - 1)} = \sqrt{16} = 4$		

Exemplo 3: Para a função f definida por $f(x) = \frac{5x^3 - x}{(x+3)^2}$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - x}{x^2 + 3} \stackrel{\text{Propriedade (P}_5\text{)}}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (5x^3 - x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3)} \stackrel{\text{Função Polinomial}}{=} \frac{5 \cdot 1^3 - 1}{1^2 + 3} = 1$$

Teste o seu conhecimento

1. Indique, como no exemplo anterior, as propriedades utilizadas no cálculo do limite abaixo:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[4]{x+12} - x^{3/2}}{3 - \frac{8}{x}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \left(\sqrt[4]{x+12} - x^{3/2} \right)}{\lim_{x \rightarrow 4} \left(3 - \frac{8}{x} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[4]{x+12} - \lim_{x \rightarrow 4} x^{3/2}}{\lim_{x \rightarrow 4} 3 - \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8}{x}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow 4} (x+12)} - \left(\lim_{x \rightarrow 4} x \right)^{3/2}}{\lim_{x \rightarrow 4} 3 - \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 4} 8}{\lim_{x \rightarrow 4} x} \right)} = \frac{\sqrt[4]{16} - 4^{3/2}}{3 - \frac{8}{4}} = -6
 \end{aligned}$$

Observação 4: Vale ressaltar que a propriedade P_5 não é aplicável se o limite do denominador for zero. Entretanto, se o numerador e o denominador ambos aproximam-se de zero quando x aproxima-se de a , então o numerador e o denominador poderão ter um fator comum $x - a$ (neste caso, o limite poderá ser obtido cancelando-se primeiro os fatores comuns, conforme ilustram os exemplos 4 e 5) ou poderá ocorrer outras situações nas quais iremos abordar mais adiante.

Exemplo 4: Para achar $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^2 + 3x}$ não podemos utilizar a propriedade P_5 , pois o limite do denominador é zero. No entanto, o limite do numerador também é zero e daí eles compartilham um fator comum $x + 3$. Portanto o limite pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^2 + 3x} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2+1)}{x(x+3)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+1)}{x} \\ &\stackrel{P_5}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow -3} (x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow -3} x} = \frac{10}{-3} = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

(*) Desde que estamos apenas supondo que o valor de x esteja aproximando-se do valor -3 , x não é igual a -3 , ou seja, $x + 3 \neq 0$. Assim podemos utilizar a simplificação algébrica que não tem efeito no cálculo do limite, quando x se aproxima de -3 . Daí, posteriormente, podemos aplicar a propriedade P_5 .

Observação 5: No caso de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ é comum dizer que

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tem uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Nesta situação, nada se pode afirmar

de imediato sobre $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Dependendo das funções f e g o limite do quociente

$\frac{f(x)}{g(x)}$ pode assumir qualquer valor real ou não existir. No exemplo 4 verificamos que

o limite existiu e seu valor foi $-\frac{10}{3}$.

Exemplo 5: Para achar $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ não podemos utilizar a propriedade P_5 , pois o limite do denominador é zero. No entanto, o limite do numerador também é zero ou seja, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para analisarmos esta indeterminação vamos proceder da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 9} 1}{\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Exemplo 6 (Cálculo de um limite com mudança de variável): Para o caso $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ novamente temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para analisarmos esta indeterminação, façamos a mudança de variável $y = \sqrt[3]{x}$. Daí, temos $y^3 = x$ e quando x tende a 8, y tende a 2 (em símbolos: se $x \rightarrow 8$, então $y \rightarrow 2$). Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y - 2}{y^3 - 8} \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y - 2}{(y - 2)(y^2 + 2y + 4)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y^2 + 2y + 4} \stackrel{P_5}{=} \frac{\lim_{y \rightarrow 2} 1}{\lim_{y \rightarrow 2} (y^2 + 2y + 4)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Exemplo 7: Para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + h} - 2}{h}$ utilizamos a mudança de variável $y = \sqrt[3]{8 + h}$, conforme o exemplo 6, ou a mudança de variável $x = 8 + h$ (se $h \rightarrow 0$ então $x \rightarrow 8$). Daí,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + h} - 2}{h} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \frac{1}{12}$$

Outro resultado importante no cálculo de limites é o seguinte teorema:

Teorema do Confronto (ou Teorema do "Sanduíche"): Sejam f , g e h funções definidas em um intervalo aberto I contendo a , exceto possivelmente em $x=a$. Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

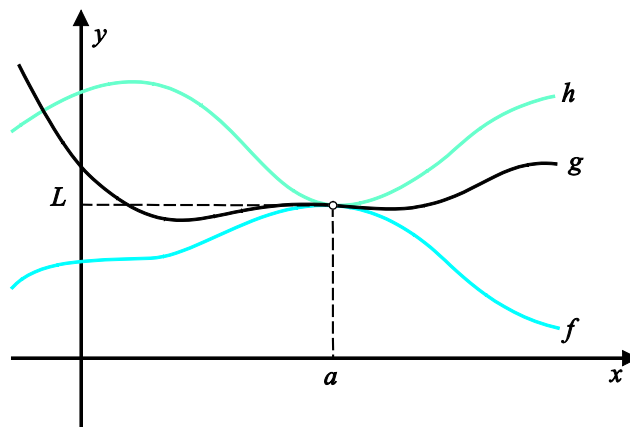


Figura: Ilustração gráfica do Teorema do Confronto

Observação 6: A ideia deste resultado é que podemos determinar o limite da função g bastando para isso conhecer os limites das funções f e h que delimitam g nas proximidades do ponto a .

Observação 7: O teorema do Confronto é também válido se substituirmos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^+$ e $x \rightarrow a^-$.

Exemplo 8: Seja a função g definida por $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Vimos, pelo gráfico de g , que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$. Uma alternativa para o cálculo deste limite, sem o conhecimento do gráfico de g , é utilizar o Teorema do Confronto, como segue:

Sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$ para todo $x \neq 0$. Assim,

- para $x > 0$ temos que $-x \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ segue, pelo Teorema do Confronto, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$.
- para $x < 0$ temos que $-x \geq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \geq x$ ou, equivalentemente, $x \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq -x$ para $x < 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$, segue, pelo Teorema do Confronto, que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$.

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$.

2.4 Limites no Infinito e Limites Infinitos

Até o momento estudamos os limites do tipo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ onde a e L representam números reais. Entretanto, podemos considerar outras situações: Vejamos os exemplos abaixo:

Exemplo 1: Considerando a função f definida por $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

Investiguemos o comportamento de $f(x)$, quando x cresce indefinidamente. Novamente vamos fazer o uso de uma tabela de valores:

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	...
$f(x)$	1,25	1,02	1,002	1,0002	1,00002	1,000002	...

Note que à medida que x cresce indefinidamente os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximo de 1.

Por outro lado, observando o gráfico de f abaixo, vemos que quanto maior o valor de x , mais próximo de 1 estará $f(x)$.

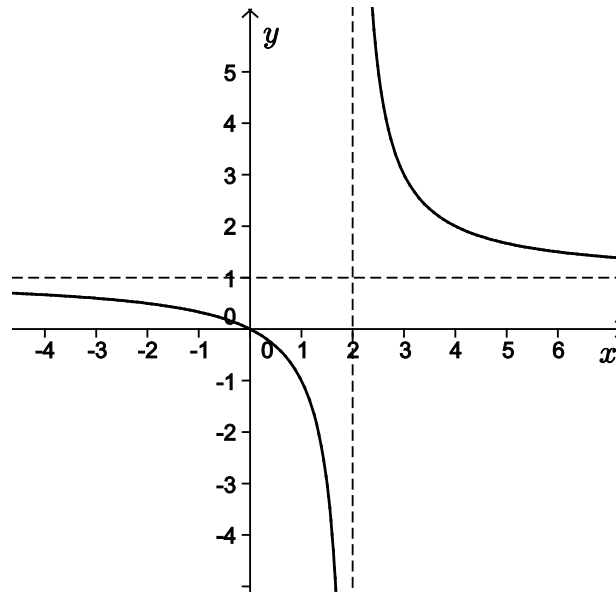


Figura1: Gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Assim, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos valores para x suficientemente grandes. Usaremos a notação $x \rightarrow +\infty$ para representar o crescimento indefinido de x . Daí, dizemos que existe o limite de $f(x) = \frac{x}{x-2}$ quando x tende a $+\infty$ e seu valor é 1. Simbolicamente, escrevemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = 1$ o qual deve ser lido como "o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é igual a 1".

Investiguemos agora o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 por valores superiores a 2 ($x \rightarrow 2^+$).

Novamente vamos fazer o uso de uma tabela de valores:

x	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	...
$f(x)$	5	21	201	2001	20001	200001	...

Note que à medida que x fica cada vez mais próximo de 2, por valores superiores a 2, os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente grande.

Por outro lado, observando o gráfico de f , figura 1, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 2, por valores superiores a 2. Para indicar este tipo de comportamento exibido usamos a notação $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$.

Analogamente, podemos investiguemos tanto o comportamento de $f(x)$, quando x decresce indefinidamente (notação: $x \rightarrow -\infty$) quanto o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 por valores inferiores a 2 ($x \rightarrow 2^-$). Para esta função f podemos ainda indicar estes comportamentos usando a notação:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty.$$

Observação 1: Convém ressaltar que o símbolo ∞ não é número real e, conseqüentemente, não podem ser manipulados usando regras de álgebra.

Por exemplo, não é correto escrever $(+\infty) - (+\infty) = 0$. Dizer que um determinado limite de uma função existe significa dizer que o valor do limite é um número real único. No caso acima,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$$

é simplesmente uma forma particular da não existência do limite. No entanto, escrever que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$$

é uma informação adicional que, além de dizer que o limite não existe, estamos informando que, se $x \rightarrow 2^+$ então os valores $f(x)$ ficam arbitrariamente grandes.

Pode suceder também que, quando x se torna muito grande $f(x)$ se torna muito grande, ou muito negativo. No primeiro caso, indica-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e, no segundo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Além desses, temos de considerar ainda $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Daremos a seguir as definições dos símbolos de diversos tipos de limites. Ao invés de procurar decorá-las, você deve intuí-las geometricamente. **Faça a ilustração gráfica de cada definição.**

Símbolo	Definição
---------	-----------

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon .$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon .$
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon .$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que } x > N \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon .$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N < 0, \text{ tal que } x < N \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon .$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$	$\forall M < 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < M$
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\forall M < 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < M$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{ tal que } x > N \Rightarrow f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\forall M < 0, \exists N > 0, \text{ tal que } x > N \Rightarrow f(x) < M$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall M > 0, \exists N < 0, \text{ tal que } x < N \Rightarrow f(x) > M$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall M < 0, \exists N < 0, \text{ tal que } x < N \Rightarrow f(x) < M$

Tabela: Definições formais dos casos de limites de funções

Observação 2: As propriedades de limites listadas na seção 2.3 continuam válidas se substituirmos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Observação 3: Para o cálculo de limites infinitos e limites no infinito utilizaremos o seguinte teorema, cuja demonstração segue das definições listadas acima.

Teorema: Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Observação 4: Vale ressaltar que podemos intuir os resultados do teorema acima observando o comportamento dos gráficos:

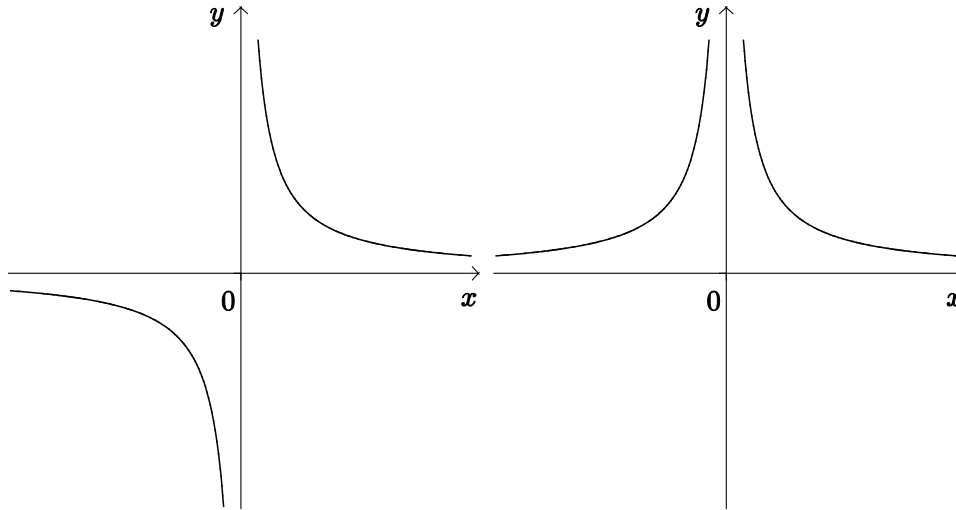


Figura 2: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^n}$, n ímpar Figura 3: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^n}$, n par

Exemplo 2: Para achar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - 2}{3x^4 - 10x + 1}$ fazemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - 2}{3x^4 - 10x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(7 - \frac{2}{x^4} \right)}{x^4 \left(3 - \frac{10}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{2}{x^4}}{3 - \frac{10}{x^3} + \frac{1}{x^4}} \stackrel{(*)}{=} \frac{7 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{7}{3}$$

(*) Do teorema anterior segue que $\frac{2}{x^4}$, $\frac{10}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ tendem a zero quando x se torna muito grande. Além disso, utilizamos também as propriedades de limites dadas na seção 2.3.

Exemplo 3: Para achar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - 2}{3x^4 - 10x}$, fazemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - 2}{3x^4 - 10x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(7 - \frac{2}{x^2}\right)}{x^4 \left(3 - \frac{10}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{7 - \frac{2}{x^2}}{3 - \frac{10}{x^3}} \stackrel{(*)}{=} 0 \cdot \frac{7}{3} = 0$$

(*) Do teorema anterior segue que $\frac{1}{x^2}$ e $\frac{10}{x^3}$ tendem a zero quando x se torna muito negativo. Além disso, utilizamos também as propriedades de limites dadas na seção 2.3.

Observação 5: O Teorema do Confronto é também válido se substituirmos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. Vejamos os exemplos.

Exemplo 4: Para achar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x}{x}$ não podemos utilizar a propriedade P_5 , pois o limite do denominador não é um número real ($\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$). Além disso, observe também que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen } x$, ou seja, $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen } x$ (Para se convencer deste fato, observe o comportamento do gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, quando x cresce indefinidamente).

Para resolver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x}{x}$ devemos utilizar o Teorema do Confronto. Vejamos, sabendo que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, segue que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$.

Exemplo 5: Para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ façamos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Agora vamos utilizar o Teorema do Confronto para resolver

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Vejamos, para $x > 0$ temos que

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} > 0, \forall x > 0.$$

Por outro lado,

$$\sqrt{x+1} > \sqrt{x}, \quad \forall x > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} > \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}, \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0.$$

Portanto, para todo $x > 0$, temos

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ segue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

Observação 6: Na prática, para calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

procedemos da seguinte maneira: Como $\sqrt{x+1}$ e \sqrt{x} crescem indefinidamente quando x cresce temos que $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ cresce indefinidamente, quando x cresce. Assim, quando x cresce,

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \text{ tende a zero, isto é, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

Observação 7: No caso de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ é comum dizer que

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ tem uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Nesta situação, nada se

pode afirmar de imediato sobre $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$. Dependendo quais são as funções

f e g o limite da diferença pode assumir qualquer valor real ou não existir. No exemplo 5 verificamos que o limite existiu e seu valor foi zero. Vejamos mais um exemplo do caso de indeterminação do tipo $\infty - \infty$ em que o valor do limite existe e não é igual a zero.

Exemplo 6: Para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)$ procedemos da seguinte

forma:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2} - x^2 \right) &\stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2} - x^2 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 - x^4}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.5 Cálculo de Limites

Em termos de cálculos de limites, as seguintes formas são consideradas indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Na resolução do cálculo de limite de expressões que envolvem essas formas de indeterminações é comum o uso de fatorações, simplificações, artifícios algébricos ou conhecimentos de limites especiais que possam eliminar as indeterminações e avaliar corretamente os limites estudados.

Para orientar o cálculo de limites no infinito daremos a seguir uma tabela sobre o procedimento a serem seguidos. Ao invés de procurar decorar as propriedades você deve utilizar a intuição, desde que não tenha um caso de indeterminação.

	$\lim_{x \rightarrow \#} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \#} g(x)$	$h(x)$	$\lim_{x \rightarrow \#} h(x)$
1	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) + g(x)$	$+\infty$
2	$-\infty$	$-\infty$	$f(x) + g(x)$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) - g(x)$	(?) indeterminação
4	$+\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+\infty$
5	$-\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$-\infty$
6	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$
7	$+\infty$	$-\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$
8	$+\infty$	$k > 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$
9	$+\infty$	$k < 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$
10	$\pm\infty$	0	$f(x) \cdot g(x)$	(?) indeterminação
11	k	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0
12	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	(?) indeterminação
13	$k > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$
14	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$
15	$k > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$
16	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$
17	0	0	$f(x)/g(x)$	(?) indeterminação

Tabela: Principais casos envolvendo limites infinitos e limites no infinito

Nesta tabela:

- o símbolo # pode ser substituído por a , a^+ , a^- , $+\infty$, $-\infty$.
- o símbolo 0^+ significa que o limite da função é zero, todavia se aproxima de zero por valores positivos para $x \rightarrow \#$.
- o símbolo 0^- significa que o limite da função é zero, todavia se aproxima de zero por valores negativos para $x \rightarrow \#$.

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 1: Para achar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 - 1}{3x^4 + 2x + 1}$ façamos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 - 1}{3x^4 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^6}\right)}{x^4 \left(3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^6}}{3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}} \stackrel{(*)}{=} +\infty$$

(*) Utilizamos a propriedade 8 do quadro acima, pois quando x se torna muito negativo, x^2 se

torna muito grande, e o quociente $\frac{1 - \frac{1}{x^6}}{3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}$ se aproxima de $\frac{1}{3} > 0$.

Exemplo 2: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty$ pois quando x tende a 2 pela esquerda, isto é, x

tende a 2 por valores menores que 2, o numerador tende a 2, que é positivo. O denominador, por sua vez, tende a 0, por valores negativos, pois $x - 2 < 0$ se $x < 2$.

Logo, $\frac{1}{x-2} < 0$ quando x está próximo de 2 pela esquerda e torna-se muito negativo à medida que x se aproxima de 2 pela esquerda.

Exemplo 3: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$, pois quando x tende a 2 pela direita, isto é, x

tende a 2 por valores maiores que 2, o numerador tende a 2, que é positivo. O

denominador, por sua vez, tende a 0, mantendo-se positivo. Daí, $\frac{x}{x-2} > 0$ e torna-

se arbitrariamente grande desde que x esteja suficientemente próximo de 2, mas mantendo-se maior que 2.

Exemplo 4: Para achar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{4 - x^2}$ analisamos os limites laterais,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(2-x)(2+x)} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{4-x^2} = -\infty.$$

Considerando que os limites laterais não foram representados pelo mesmo símbolo, escrevemos $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{4-x^2}$.

Observação: Nos cálculos de limites no infinito, quando

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \text{ escrevemos } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Analogamente, quando

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{escrevemos } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Convém ressaltar que, em ambos os casos, não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (lembre-se que a existência de um limite significa dizer que o valor do limite é um número real único). Escrever, por exemplo, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ é uma informação adicional que, apesar do limite não existir, estamos informando que os valores $f(x)$ crescem arbitrariamente independentes de como aproximamos de a .

Exemplo 5: Para achar $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Considerando que os limites laterais foram representados pelo mesmo símbolo, escrevemos $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$.

Exemplo 6: Para calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$ procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \cdot \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{5}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{5}{x}\right)}{(-x) \cdot \sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(2 + \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

(*) Como $x \rightarrow -\infty$ temos que $x < 0$. Assim, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. De forma análoga, quando $x \rightarrow +\infty$ temos que $x > 0$ e portanto $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Daí resulta que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}} = \sqrt{2}.$$

Teste o seu conhecimento

1. Faça o que se pede:

1.1. Um estudante afirma que se $0 < \delta \leq 1$ e $0 < |x + 2| < \delta$ implica $|x^2 + x - 2| < 5\delta$. Você concorda ou discorda? Justifique apresentando os cálculos.

1.2. Prove, usando a definição, que $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x) = 2$.

2. Prove, por definição, que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x} = -2$

3. Prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{5x-1} = 0$, mostrando que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número real $N > 0$,

tal que se $x > N$ então $\left| \frac{2}{5x-1} - 0 \right| < \varepsilon$.

4. Nos exercícios abaixo, calcule os limites:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{3x-1}$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{2x+3}$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{2}}{3x-4}$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+4)^3}{x+2}$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt[5]{\frac{x+4}{2x}}$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-1}$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-7x^2+16x-12}$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^4-16}{x}$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2(x^2-8)}+x}{x+4}$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}; a \neq 0$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}; a, b > 0$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x+8}$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-3x+5}{4x^5-2}$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2-7}}$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2-7}}$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right)$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right)$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x \right)$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+1} \right)$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$$

$$4.31. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3}$$

$$4.32. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3}$$

$$4.33. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{|x-2|}$$

$$4.34. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{|x-2|}$$

$$4.35. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)]$$

5. Calcule os limites, se existirem. Se não existir, justifique a sua não existência.

$$5.1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2x^2 + 6x + 4}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 2} \ln|x - 2|$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{-x} \cos x)$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^4 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$$

$$5.6. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow 4} f(x-4); \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow 0} g(x); \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

6. Encontre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para as seguintes funções:

$$6.1. f(x) = x^2$$

$$6.2. f(x) = x^3$$

$$6.3. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$6.4. f(x) = \sqrt{x}$$

7. Para cada uma das seguintes funções ache $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

$$7.1. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$7.2. f(x) = 3x^2 + 5x - 1$$

2.6 Limites Fundamentais

Existem determinados limites que são chamados *Limites Fundamentais* e que vamos utilizá-los para o cálculo de outros limites. São eles:

$$\text{LF1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \text{ (indeterminação do tipo } \frac{0}{0}\text{)}.$$

$$\text{LF2) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ (indeterminação do tipo } 1^\infty\text{), onde } e \text{ é o número irracional neperiano cujo valor aproximado é } 2,718281828459045\dots$$

$$\text{LF3) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ (indeterminação do tipo } 1^\infty\text{)}.$$

$$\text{LF4) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ (} a > 0, a \neq 1 \text{) (indeterminação do tipo } \frac{0}{0}\text{)}.$$

Saiba Mais: Para provar a veracidade do limite fundamental LF1 consulte uma das referências bibliográficas listadas abaixo. Quanto a LF2 e LF3 a demonstração é muito trabalhosa e utiliza conceito de séries.

Utilizando o software **GeoGebra** (encontra-se disponível em www.geogebra.org)

podemos esboçar os gráficos das funções $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ e $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e observar o

comportamento dessas funções para verificar os limites fundamentais LF1, LF2 e LF3.

O gráfico de $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, esboçado na figura 1, mostra que $f(x)$ se aproxima de 1, quando x se aproxima de zero.

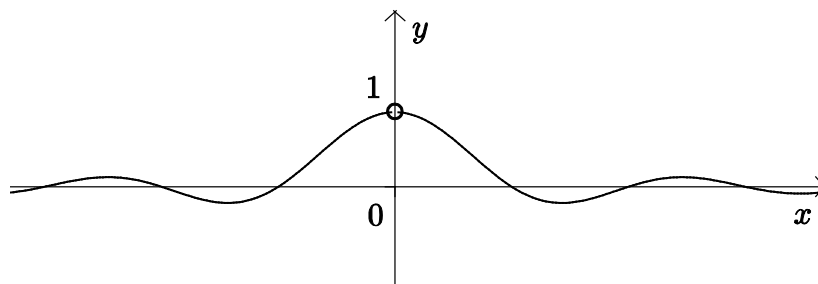


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

Já, o gráfico de $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, esboçado na figura 2, mostra que $g(x)$ tende para o número e quando x tende para (+) ou (-) infinito.

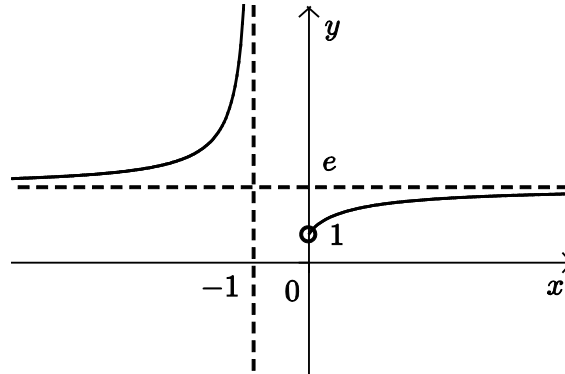


Figura 2: Gráfico da função $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Justificativa de LF4

Quanto a veracidade da afirmação $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$)

utilizamos a mudança de variável $y = a^x - 1$ e, nesse caso, $a^x = 1 + y$. Daí, $\log_a(a^x) = \log_a(1 + y)$, ou seja, $x \cdot \log_a a = \log_a(1 + y)$. Como $\log_a a = 1$ temos que $x = \log_a(1 + y)$. Assim, quando $x \rightarrow 0$ então $y \rightarrow 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right) \log_a(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1 + y)^{\frac{1}{y}}} \\ &= \frac{1}{\log_a \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]} \stackrel{\text{LF2}}{=} \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a \end{aligned}$$

Exemplo 1: Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x}$ fazemos a mudança de variável $u = 3x$.

Daí, temos $x = \frac{u}{3}$ e, quando x tende a zero, u tende a zero (em símbolos: se $x \rightarrow 0$, então $u \rightarrow 0$). Portanto, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{\frac{u}{3}} = \lim_{u \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\text{sen } u}{u} = 3 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} \stackrel{\text{LF1}}{=} 3 \cdot 1 = 3$$

Exemplo 2: Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{ax}$, sendo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ procedemos conforme o exemplo anterior. Fazemos a mudança de variável $u = ax$ e verificamos que se $x \rightarrow 0$, então $u \rightarrow 0$. Assim, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{ax} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} \stackrel{\text{LF1}}{=} 1$.

Exemplo 3: Para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ façamos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) \left(\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } h}{h} \cdot \frac{\text{sen } h}{\cos h + 1} \right) \stackrel{\text{LF1}}{=} (-1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Exemplo 4: Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ analisamos os limites laterais

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Em ambos os casos, fazemos a mudança de variável $u = \frac{1}{x}$ e utilizamos os limites fundamentais LF2 e LF3. Note que se $x \rightarrow 0^+$, então $u \rightarrow +\infty$ e, se $x \rightarrow 0^-$, então $u \rightarrow -\infty$. Daí,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u = e$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Exemplo 5: Para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$, sendo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, façamos $u = \frac{a}{x}$ e verificamos que se $x \rightarrow +\infty$, então $u \rightarrow 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow 0^+} (1+u)^{\frac{a}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[(1+u)^{\frac{1}{u}} \right]^a = \left[\lim_{u \rightarrow 0^+} (1+u)^{\frac{1}{u}} \right]^a \stackrel{\text{Exemplo 4}}{=} e^a$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

Exemplo 6: Para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sendo $f(x) = \text{sen } x$ fazemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \text{sen } h \cos x - \text{sen } x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (\cos h - 1) + \text{sen } h \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\text{sen } x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\text{sen } h}{h} \cdot \cos x \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \text{sen } x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \cos x$.

(*) Utilizamos as propriedades de limites, o limite fundamental LF1 e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Observação: Podemos mostrar que se $f(x) = \cos x$ então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\text{sen } x \text{ procedendo analogamente}$$

conforme o exemplo 6. Deixamos este fato como exercício.

Exemplo 7: Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ fazemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x \left[\frac{a^x}{b^x} - 1 \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} b^x \cdot \left[\frac{\left(\frac{a}{b} \right)^x - 1}{x} \right] = b^0 \cdot \ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \left(\frac{a}{b} \right)$.

2.7 Funções Contínuas

Na linguagem cotidiana, usamos a palavra contínuo para nos referirmos a uma situação que não se interrompe ou ininterrupta. Por exemplo, dizemos que o tempo é

contínuo. Também, é de senso comum que um objeto em movimento não pode, em um só instante, desaparecer de uma posição e reaparecer em outra. Desta forma, seu movimento descreve uma trajetória bem comportada, sem falhas ou buracos.

Antes de apresentarmos o conceito de continuidade, vamos analisar alguns gráficos de funções:

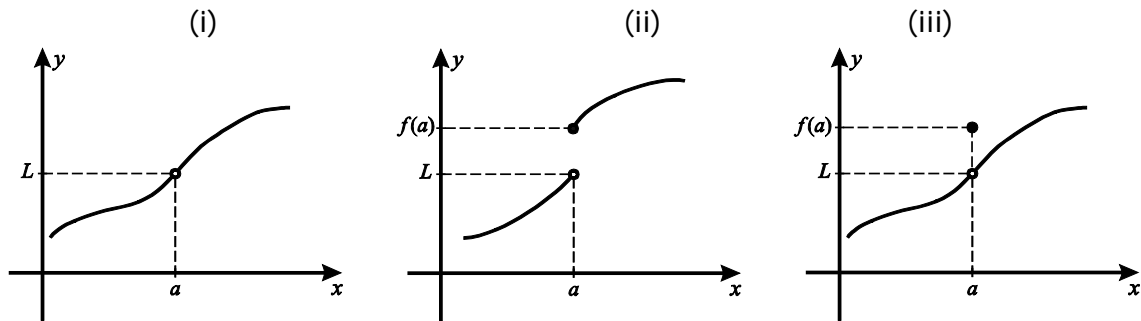


Figura 1: Ilustração gráfica de algumas funções

Observe que:

- em (i), $f(a)$ não está definida;
- em (ii), $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, mas $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou seja, $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- em (iii), existem $f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, mas $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Definição: Dizemos que uma função f é *contínua* em um número a se satisfaz as seguintes condições:

- existe $f(a)$ ou seja, a pertence ao domínio de f ;
- existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Se uma das três condições acima não for satisfeita dizemos que f é *descontínua* em a e o ponto a é chamado *ponto de descontinuidade* de f .

Observação 1: Ao utilizar a definição para mostrar que uma função f é contínua em um número basta verificar a condição (iii), porque com isto, as duas primeiras condições já ficam analisadas.

Observação 2: Note que se f é contínua em a então a propriedade (iii) nos diz que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$.

Observação 3: Nas ilustrações gráficas das funções listadas na figura 1 todas as funções são descontínuas em $x = a$.

Exemplo 1: A função f definida por $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é contínua em

$x = 1$. De fato, pela definição de função contínua, temos:

- (i) $f(1) = 0$, ou seja, 1 pertence ao domínio de f ;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$. Daí, como os limites laterais à esquerda e à direita são iguais, temos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$

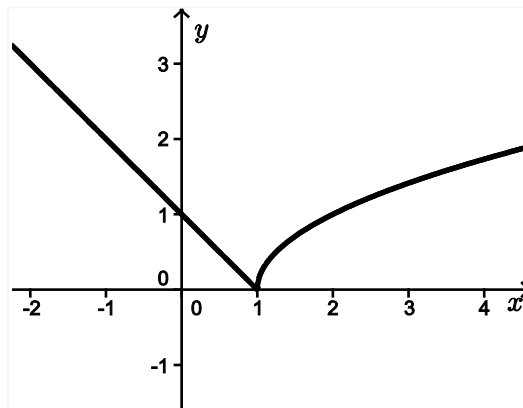


Figura 2: Gráfico da função f

Exemplo 2: Seja g a função definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 6 & \text{se } x = 2 \end{cases}$.

Note que g é descontínua em $x = 2$. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \text{ e } g(2) = 6$$

e desta forma $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \neq g(2)$, ou seja, a condição (iii) da definição de continuidade não é satisfeita.

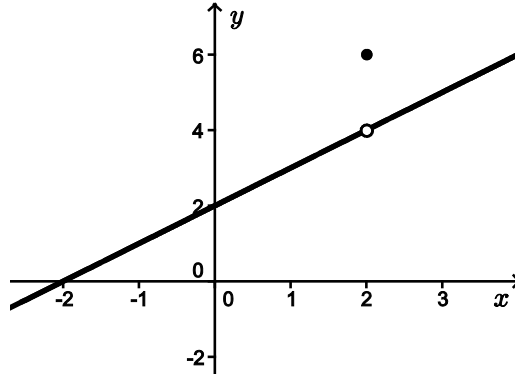


Figura 3: Gráfico da função g

Exemplo 3: Considere a função h definida por $h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{-x^2}{2} & \text{se } 0 < x \leq 2. \\ -\frac{x}{4} - \frac{3}{2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

Vamos mostrar que h é descontínua em $x=0$ e contínua em $x=2$.

(i) h é descontínua em $x=0$. Com efeito, analisando os limites laterais temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

Daí, concluímos que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, ou seja, a condição (ii) da definição de continuidade não é satisfeita.

(ii) h é contínua em $x=2$. De fato, de maneira análoga, é necessário analisarmos os limites laterais. Vejamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2}{2} = -2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{x}{4} - \frac{3}{2} \right) = -2$$

Daí, resulta que $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -2$ e como $h(2) = -2$ temos que $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2)$.

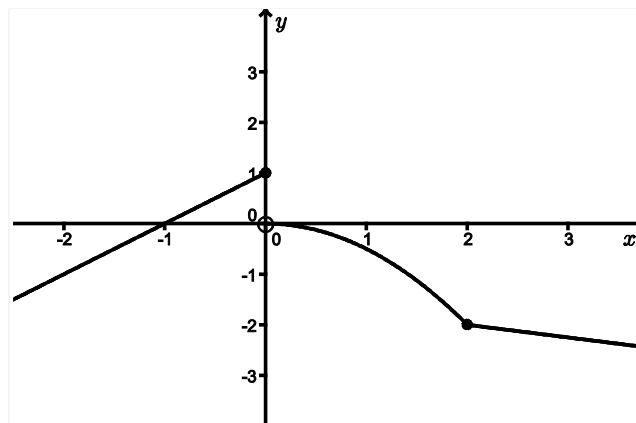


Figura 4: Gráfico da função h

Definição: Dizemos que:

- f é contínua à direita em $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
- f é contínua à esquerda em $b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$;
- f é contínua em um intervalo aberto (a,b) se for contínua em cada ponto de (a,b) ;
- f é contínua em um intervalo fechado aberto $[a,b]$ se for contínua em (a,b) , contínua à direita em a e à esquerda em b ;
- f é contínua se for contínua em cada ponto de seu domínio.

Observação: De forma análoga, podemos definir uma função contínua nos intervalos $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$. A figura abaixo ilustra o gráfico de funções definidas num intervalo fechado $[a,b]$.

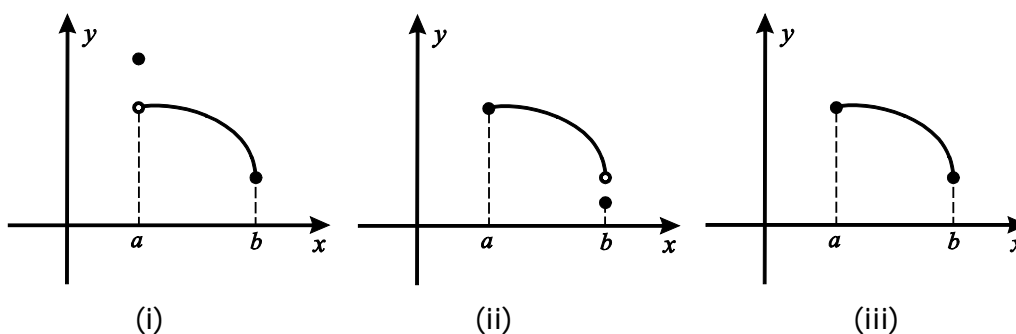


Figura 5: Ilustração gráfica de algumas funções definidas em $[a,b]$

- A função (i) é descontínua à direita em $x = a$ e contínua à esquerda em $x = b$;
- A função (ii) é contínua à direita em $x = a$ e descontínua à esquerda em $x = b$;
- A função (iii) é contínua à direita em $x = a$ e à esquerda em $x = b$.

Exemplo 4: Para mostrar que a função f definida por $f(x) = \sqrt{2x-6}$ é contínua devemos mostrar que f é contínua em cada ponto de seu domínio que é dado por $[3, +\infty)$, ou seja, necessitamos investigar a continuidade de f no intervalo aberto $(3, +\infty)$ e a continuidade à direita no extremo $x = 3$. De fato,

- f é contínua à direita em $x = 3$ pois $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{2x-6} = 0 = f(3)$.
- f é contínua em $(3, +\infty)$ pois para qualquer $c \in (3, +\infty)$ tem-se que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{2x-6} = \sqrt{2c-6} = f(c)$.

2.8 Propriedades das Funções Contínuas

Daremos a seguir alguns resultados de funções contínuas que seguem da definição e das propriedades de limite vistas anteriormente.

Teorema 1: Se as funções f e g são contínuas em um número a , então:

- $f + g$ é contínua em a ;
- $f - g$ é contínua em a ;
- $f \cdot g$ é contínua em a ;
- $\frac{f}{g}$ é contínua em a , desde que $g(a) \neq 0$.

Teorema 2:

- Toda função polinomial é contínuas para todo número real;
- Toda função racional é contínuas em todo o seu domínio;
- As funções trigonométricas são contínuas em todo o seu domínio.
- As funções exponencial e logarítmica são contínuas em todo o seu domínio.

O conhecimento de quais funções são contínuas nos capacita a calcular de maneira mais rápida alguns limites, como no exemplo a seguir:

Exemplo 1: Para calcular $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{6 - 2x}$

podemos observar que $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{6 - 2x}$ é uma função racional cujo domínio é $\mathbb{R} - \{3\}$. Do teorema 2 sabemos que f é contínua. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{6 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \frac{(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 3}{6 - 2(-1)} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2: Considere a função $f(x) = \begin{cases} 5x-3 & \text{se } x \leq 1 \\ kx^3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

sendo k uma constante real. Vejamos se é possível determinar um valor de k de modo que a função f seja contínua. Note que, para $x < 1$ temos que $f(x) = 5x - 3$ e portanto é contínua. Por outro lado, se $x > 1$ temos que $f(x) = kx^3$ e da mesma forma é contínua. Daí, para analisar a continuidade de f , basta analisar a continuidade em $x = 1$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x - 3) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} kx^3 = k$$

temos que para que exista $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ é suficiente que $k = 2$. Daí, f é contínua em $x = 1$ pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 = k$. Portanto, para que f seja contínua o valor de k deve ser igual a 2.

Teorema 3: Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ e f é contínua em b , então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b)$$

Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a) = b$ então $f \circ g$ é contínua em a , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

Exemplo 3: Para justificar que a função $h(x) = e^{\sin x}$ é contínua observamos que $h(x) = (f \circ g)(x)$, sendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sin x$. Como $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sin x$ são funções contínuas para todo número real segue, pelo teorema 3, que a composta $h = f \circ g$ é contínua.

Observação 1: O conhecimento do teorema 3 nos permite justificar, por exemplo, as seguintes propriedades de limites:

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$, para qualquer inteiro positivo n ;
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, desde que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ e n é qualquer inteiro positivo ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$ e n é qualquer inteiro positivo ímpar;
- $\lim_{x \rightarrow a} \ln[f(x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$, desde que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos[f(x)] = \cos \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$, desde que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}[f(x)] = \text{sen} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$, desde que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, desde que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Teorema 4: Seja f uma função contínua num intervalo I . Seja $J = \text{Im}(f)$. Se f admite uma função inversa $g = f^{-1}: J \rightarrow I$, então g é contínua em todos os pontos de J .

Observação 2: Com auxílio do teorema 4 podemos justificar a continuidade de várias funções inversas, como por exemplo, $y = \ln x$, $y = \arcsen x$, $y = \arccos x$, $y = \text{arctg } x$.

Teorema 5 (Teorema do Valor Intermediário - TVI): Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e se w é um número entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe ao menos um número c em $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.

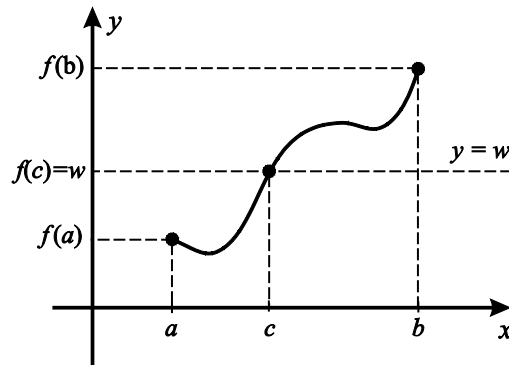


Figura 1: Ilustração gráfica do Teorema do Valor Intermediário

Observação 3: O teorema afirma que quando x varia de a até b a função contínua f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Graficamente, para qualquer número w entre $f(a)$ e $f(b)$, a reta $y = w$ intercepta o gráfico de f em pelo menos um ponto. Daí concluímos que o gráfico de funções contínuas podem ser traçados sem retirar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico.

Uma infinidade de problemas pode ser reduzida a encontrar raízes da equação $f(x) = 0$. Um procedimento para aproximação de raízes está baseado na seguinte consequência do Teorema do Valor Intermediário:

Teorema 6 (Teorema de Bolzano): Se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ (isto é, $f(a)$ e $f(b)$ são diferentes de zero e tem sinais opostos) então existe ao menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$, isto é, f tem um zero em $[a, b]$.

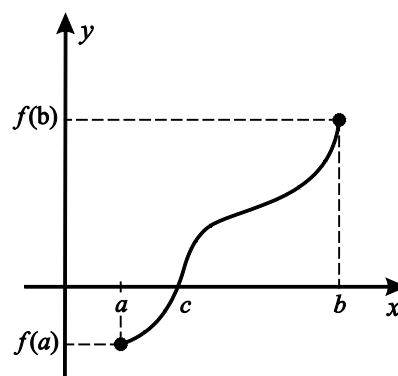


Figura 2: Ilustração gráfica do Teorema de Bolzano

Exemplo 4: Para mostrar que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tem um zero entre 1 e 2 observamos inicialmente que f é uma função polinomial e portanto contínua para todo número real, em particular, será contínua no intervalo $[1,2]$. Uma vez que $f(1) = -4 < 0$ e $f(2) = 17$ ($f(1) \cdot f(2) < 0$), o Teorema de Bolzano garante a existência de um número c entre 1 e 2 tal que

$$f(c) = c^5 + 2c^4 - 6c^3 + 2c - 3 = 0.$$

Note que, o Teorema de Bolzano não informa qual é o valor deste número c e nem garante a unicidade. No caso deste exemplo, podemos mostrar que também existe uma raiz entre -1 e 0 já que f é contínua no intervalo $[-1,0]$ e $f(-1) \cdot f(0) < 0$. O gráfico abaixo ilustra a localização das raízes às quais mostramos a sua existência.

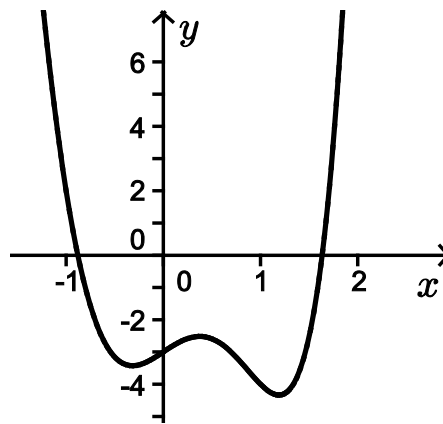


Figura 3: Gráfico da função $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$

Observação 4: Este exemplo ilustra um esquema para a localização de raízes reais de um polinômio. Utilizando um *método de aproximações sucessivas*, podemos aproximar cada zero do polinômio com qualquer grau de precisão bastando enquadrá-los em intervalos cada vez menores.

Uma forma equivalente do Teorema de Bolzano é a seguinte resultado:

Teorema de Bolzano (Forma equivalente): Se uma função f é contínua num intervalo fechado e não tem zeros neste intervalo, então ou $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ em todo intervalo.

Podemos utilizar este resultado para estudar o sinal de uma função f , isto é, encontrar, se existirem, os intervalos onde $f(x) < 0$, os intervalos onde $f(x) > 0$ e os pontos em que $f(x) = 0$, conforme veremos no próximo exemplo.

Exemplo 5: Para estudar o sinal da função f definida por

$$f(x) = \frac{6(-2+x)(1-3x+3x^2)}{(2-3x)^3}$$

observamos, inicialmente, que f é uma função racional, logo contínua em

$$D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}.$$

Assim, temos que f é descontínua somente em $x = \frac{2}{3}$.

Além disso, $x = 2$ é a única raiz de f . Portanto, f é contínua nos intervalos abertos $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ e $(2, +\infty)$. Analisemos o sinal de f no intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$. Como, neste intervalo, f é contínua e não tem zeros então, pela forma equivalente do Teorema de Bolzano, ou $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ em todo intervalo. Daí, basta analisar o sinal de f em um único ponto teste deste intervalo, como por exemplo, em $x = 0$. Assim, como $f(0) < 0$ tem-se que

$$f(x) < 0, \forall x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right).$$

Analogamente, concluímos que

$$f(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{2}{3}, 2\right) \text{ e } f(x) < 0, \forall x \in (2, +\infty)$$

já que, por exemplo, $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$. Para simplificar, é comum utilizarmos o diagrama abaixo para representar o sinal da função:

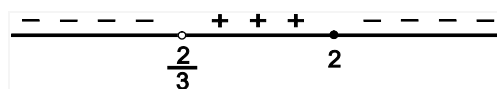


Figura 4: Diagrama do sinal da função $f(x) = \frac{6(-2+x)(1-3x+3x^2)}{(2-3x)^3}$

Exemplo 6: Vejamos os gráficos I e II da figura 5:

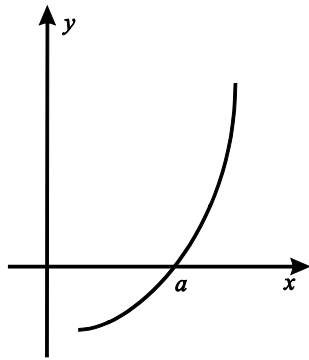


Figura 5: Gráfico I

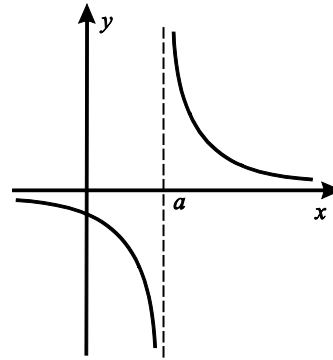


Gráfico II

Observe que, no gráfico I, a função muda de sinal em a que é um “zero” da função. Já no gráfico II, a função muda de sinal no ponto a que é um ponto de descontinuidade da função.

Podemos concluir que se uma função f muda de sinal em $x = a$, então ou $f(a) = 0$ ou f é descontínua em a . Isto é, *os únicos pontos em que uma função pode mudar de sinal são aqueles onde ela se anula ou onde é descontínua.*

Teste o seu conhecimento

Nos exercícios abaixo você deve justificar todas as respostas explicitando o raciocínio utilizado.

1. Utilizando os limites fundamentais, encontre os limites abaixo:

1.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

1.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$

1.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{7x}$

1.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$

1.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

2. Encontre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para as seguintes funções:

2.1. $f(x) = \cos x$

2.2. $f(x) = a^x$

2.3. $f(x) = \log_a x$

3. Encontre, quando existir, os pontos de descontinuidade de f e faça um esboço do gráfico de f em cada caso:

3.1. $f(x) = \frac{x}{|x| - 3}$

3.2. $f(x) = \frac{x+3}{|x^2+3x|}$

3.3. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \leq 4 \\ 7 + \frac{16}{x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

4. Determine o(s) valor(es) de k , caso exista(m) para que a função seja contínua.

4.1. $f(x) = \begin{cases} 7 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ kx^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

4.3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$

4.2. $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x+k & \text{se } x > 2 \end{cases}$

4.4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}^2(3x)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ kx & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

5. Determine, se possível, os valores das constantes a e b de modo que a função f abaixo seja contínua em $(-\infty, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + b & \text{se } x < 0 \\ 2a & \text{se } x = 0 \\ \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{3x+2}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

6. Seja $f(x) = \frac{|x|-1}{|x+1|} + 2$ uma função real de variável real.

6.1. Escreva f como uma função definida por partes;

6.2. Faça um esboço do gráfico de f ;

6.3. Encontre $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, se eles existirem. A função f é contínua em $x = -1$?

6.4. Encontre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, se eles existirem. A função f é contínua em $x = 0$?

7. Mostrar que $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - x$ tem uma raiz entre $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

8. Prove que $f(x) = -1$ tem pelo menos uma solução em $(-2, -1)$, sendo $f(x) = x^3 - x^2 + 4$.

9. Mostre que $f(x) = x^7 + x^6 - 4x + 4$ possui pelo menos uma raiz real.

10. Estude o sinal da função f definida por $f(x) = \frac{3(x^2 + 4)^5(1 - x^2)}{(4x - 2)^3}$.

CAPÍTULO 3. DERIVADA

3.1 Retas Tangente a uma Curva

O desenvolvimento do cálculo foi estimulado, em grande parte, por dois problemas geométricos:

Problema das Tangentes: Calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado P , veja figura 1.

Problema das Áreas: Calcular a área da região sob o gráfico de uma função de x_1 até x_2 , veja figura 2.

Tradicionalmente, a parte do cálculo que estuda o problema das tangentes é chamada de *cálculo diferencial* e a parte que estuda o problema das áreas é chamada de *cálculo integral*. Estes dois problemas estão relacionados através do conceito de limite.

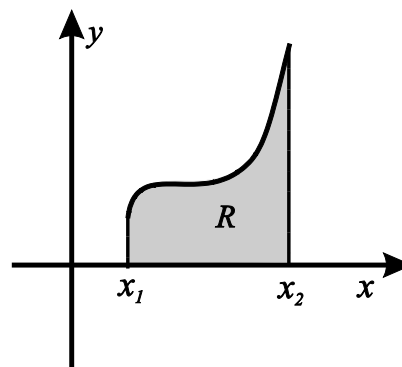
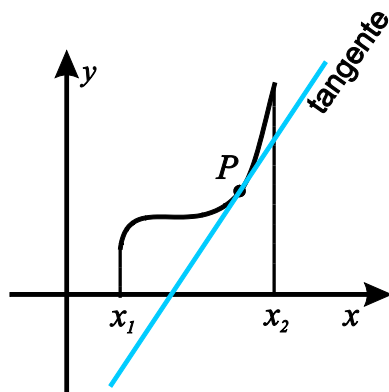


Figura 1: Retas tangente à curva no ponto P

Figura 2: Área da região limitada R .

A partir de agora estudaremos as idéias e as técnicas desenvolvidas para resolver esses problemas e as aplicações originadas deles.

Antes, porém, lembremos como determinar o coeficiente angular m (ou inclinação) da reta r que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Para isso, basta observar que a inclinação de uma reta é definida por $m = \operatorname{tg} \alpha$ e utilizar a definição de tangente de um ângulo α obtendo $m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, conforme ilustrado na

figura 3.

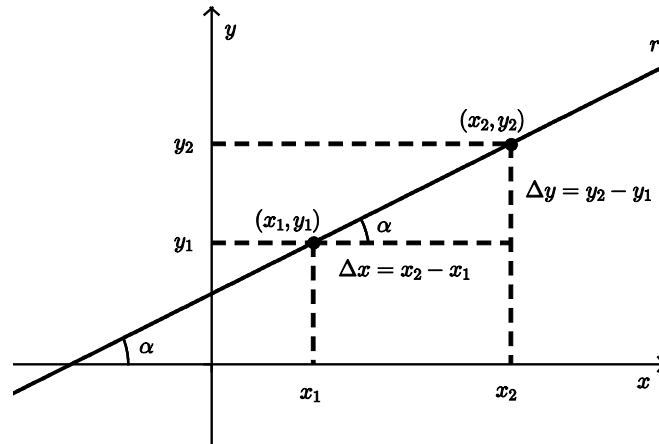


Figura 3: Inclinação de uma reta

Daí, obtemos uma equação da reta r dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ou} \quad y - y_2 = m(x - x_2).$$

Note que essas equações conduzem a uma única equação na forma reduzida que é dada por $y = mx + b$, sendo $b = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$.

Você Sabia? Na Roma Antiga, a origem da palavra *calculus* era uma pedra de pequena dimensão utilizada para contagem e jogo, e o verbo latino *calcularre* passou a significar "figurar", "computar", "calcular". Atualmente o cálculo é um sistema de métodos para resolver problemas quantitativos como, por exemplo, no cálculo de probabilidades, cálculo tensorial e cálculo das variações.

Passamos agora ao estudo do problema da reta tangente. Lembramos que, em uma circunferência, uma reta tangente seria aquela que intercepta a circunferência em apenas um ponto. Porém, para curvas em geral, essa definição pode falhar, pois como na figura 4, a reta que "supostamente" é tangente no ponto P intercepta a curva em mais de um ponto.

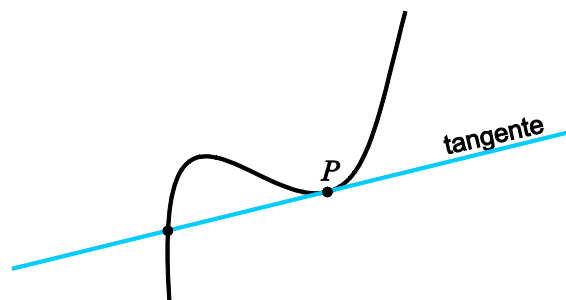


Figura 4 Reta tangente à curva no ponto P

Eis que Fermat, grande matemático do século XVII, generalizou o conceito de reta tangente à curvas quaisquer. Veja um exemplo ilustrando a técnica desenvolvida por Fermat.

Exemplo 1: Para encontrar a equação da reta tangente à cúbica $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ no ponto $P(1,2)$ devemos encontrar o coeficiente angular m desta reta a qual denotaremos de reta t . A dificuldade está em termos somente um ponto P , sobre a reta t , ao passo que para calcular o coeficiente angular são necessários dois pontos, como vimos anteriormente.

Para calcular uma aproximação de m escolhemos um ponto $Q(x, f(x))$, próximo a $P(1,2)$ sobre a cúbica e calculamos a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ .

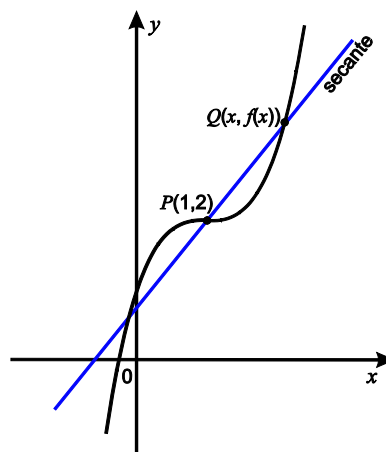


Figura 5: Reta secante à curva $f(x) = (x - 1)^3 + 2$

Daí, escolhendo $x \neq 1$, o coeficiente angular desta reta secante é, evidentemente:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^3 + 2 - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^3}{x - 1}.$$

As tabelas abaixo mostram os valores de m_{PQ} para alguns valores de x próximos de 1 (à direita e à esquerda).

x	m_{PQ}
0	1
0,5	0,25
0,9	0,01
0,99	0,0001
0,999	0,000001

x	m_{PQ}
2	1
1,5	0,25
1,1	0,01
1,01	0,0001
1,001	0,000001

Tabela: Análise do coeficiente angular da reta secante

Observe que, quanto mais próximo x estiver de 1 (à direita ou à esquerda), m_{PQ} estará próximo de zero. Note que, dizer que x tende a 1 equivale a dizer que o ponto variável Q se aproxima de P ao longo da curva. Isso sugere que a inclinação da reta tangente deve ser $m=0$. Assim, a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo:

$$\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m$$

ou, equivalentemente,

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0.$$

Daí, a equação da reta tangente é dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y - 2 = 0(x - 1) \Leftrightarrow y = 2$$

ou seja, a reta tangente à cúbica $f(x) = (x-1)^3 + 2$ no ponto $P(1,2)$ é a reta horizontal de equação $y = 2$.

A Figura 6 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q tende a P ao longo da cúbica, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente.

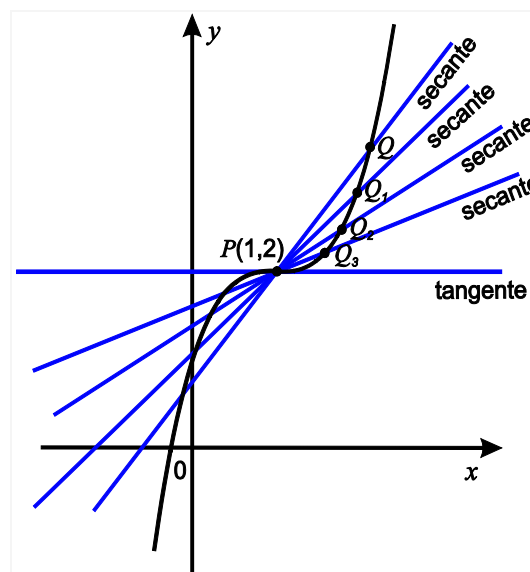


Figura 6: Retas secantes aproximando da tangente

Vamos generalizar agora o procedimento realizado no exemplo 1 para uma curva arbitrária c , dada pelo gráfico de uma função f , em um ponto fixo do gráfico. Para isso, vamos considerar sobre este gráfico dois pontos distintos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$, conforme a figura 7.

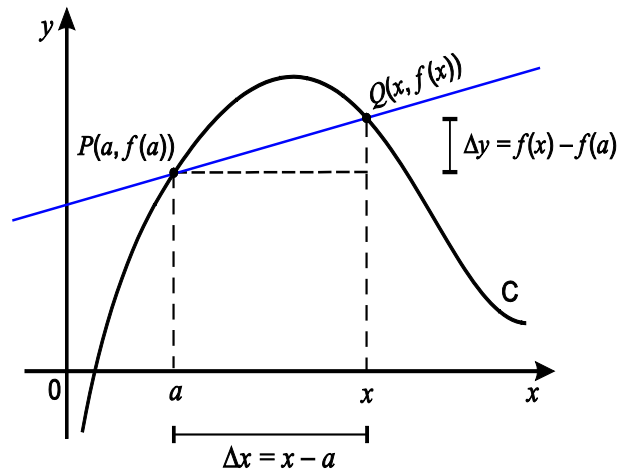


Figura 7: Reta secante à curva $y = f(x)$

Observação 1: O símbolo Δ (correspondente a letra "d" maiúscula do alfabeto grego denominado delta) quando escrito na frente de uma variável significa a diferença entre dois valores desta variável. Este artifício notacional é conveniente em todas as partes da Matemática e em outras ciências. Assim, a notação padrão para representar a variação de uma variável x é Δx (leia-se delta x), de modo que $\Delta x = x_2 - x_1$ representa a variação em x ao se passar do primeiro valor para o segundo. Um fato importante que devemos observar é que Δx não é o produto de um número Δ por um número x , mas um único número, que poderá ser positivo ou negativo, denominado variação de x ou incremento de x .

Consideramos agora a reta secante que passa pelos pontos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$. Observe que o coeficiente angular m_{PQ} dessa reta é

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Então, mantendo o ponto P fixo, fazemos o ponto Q aproximar-se de P , passando por sucessivas posições Q_1, Q_2, Q_3, \dots , ao longo da curva C . Logo, a secante PQ assumirá as posições PQ_1, PQ_2, PQ_3, \dots , aproximando visivelmente da tangente em P como sua posição limite, conforme a figura 8.

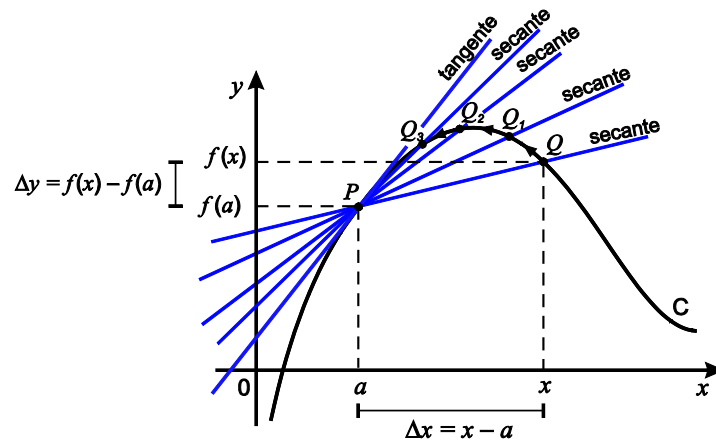


Figura 8: Reta secante aproximando da tangente (o ponto Q está à direita de P).

Intuitivamente, o coeficiente angular da secante se aproxima de um determinado valor m , à medida que o ponto Q se aproxima de P . O modo de aproximar-se Q de P consiste em fazer x se aproximar de a (ou, equivalentemente, $\Delta x = x - a$ se aproximar de zero). Observe que na figura 8 fizemos Q se aproximar de P pela direita o que equivale a tomar $\Delta x = x - a$ positivo. Note que, quando Q se aproxima de P pela esquerda $\Delta x = x - a$ é negativo e o coeficiente angular da secante também se aproxima do valor m . Isso acontecendo, definimos a *reta tangente* à curva C no ponto P como sendo aquela que passa por P e cujo coeficiente angular é m .

Considerando o conceito de limite podemos expressar mais adequadamente na forma

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Observação 2: Outra expressão para a inclinação da reta tangente é considerar a mudança de variável $\Delta x = x - a$. Assim, $x = a + \Delta x$ e, quando $x \rightarrow a$ temos que $\Delta x \rightarrow 0$. Daí, se o limite existe, temos:

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Com o intuito de simplificar a notação é comum utilizar a letra h no lugar de Δx e, neste caso, podemos escrever

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ (se o limite existir).}$$

Definição 1: Suponhamos que C é uma curva dada pelo gráfico de uma função f , contínua em um ponto a . Definimos a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$ como sendo:

A reta que passa por P com coeficiente angular (inclinação) dado por

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

desde que esse limite exista. Neste caso, a equação da reta tangente é dada por $y - f(a) = m(x - a)$ A reta vertical de equação $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \text{ (ou } -\infty) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \text{ (ou } -\infty)$$

Exemplo 2: Para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{4x-3}$ no ponto $P(3,3)$ devemos inicialmente observar que o ponto $P(3,3)$ pertence ao gráfico de f . Agora, vamos determinar o coeficiente angular da reta tangente, utilizando a definição 1. Daí,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4(3+h)-3} - \sqrt{9}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4h+9} - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4h+9} - 3)(\sqrt{4h+9} + 3)}{h(\sqrt{4h+9} + 3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h(\sqrt{4h+9} + 3)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4h+9} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva $f(x) = \sqrt{4x-3}$ no ponto $P(3,3)$ é dada por: $y - f(a) = m(x - a) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{2}{3}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$.

Exemplo 3: Para encontrar o coeficiente angular m da reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ num ponto arbitrário $P(a, a^2)$ procedemos segundo a definição 1.

Daí, $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a)(x-a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$ ou, se preferir, podemos determinar a inclinação da reta tangente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + \Delta x) = 2a
 \end{aligned}$$

Agora, sabendo-se que o coeficiente angular é $m = 2a$, podemos encontrar a equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ no ponto arbitrário $P(a, a^2)$ que é dada por

$$y - f(a) = m(x - a) \Leftrightarrow y - a^2 = 2a(x - a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2.$$

Em particular, se $a = 1$ então $m = 2 \cdot 1 = 2$ e a equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ é dada por $y = 2x - 1$. Note que, em qualquer outro ponto desta parábola, a tangente terá um coeficiente angular diferente. Por exemplo, no ponto $(3, 9)$, $m = 2 \cdot 3 = 6$ e a equação da reta tangente é dada por $y = 6x - 9$.

Observação 3: Você deve observar que a reta tangente e seu coeficiente angular são objetos diferentes.

Exemplo 4: Para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ no ponto $P(1, 0)$ observamos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

Daí, de acordo com a definição 1 (parte ii), podemos concluir que a reta tangente à curva $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ no ponto $P(1, 0)$ é a reta vertical de equação $x = 1$. A figura 9 ilustra a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{4x-3}$ no ponto $P(1, 0)$.

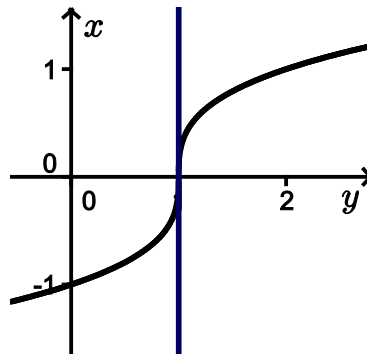


Figura 9: Reta tangente vertical ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ em $P(1,0)$

Observação 4: Lembramos que duas retas t e n são paralelas se $m_t = m_n$ e são perpendiculares, em um dado ponto, se $m_t \cdot m_n = -1$, sendo m_t e m_n os coeficientes angulares das retas t e n , respectivamente.

Definição 2: A *reta normal* a uma curva num ponto dado é a reta perpendicular à reta tangente à curva neste ponto. Neste caso, a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$ é dada por $y - f(a) = -\frac{1}{m}(x - a)$, sendo $m \neq 0$ o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$.

Exemplo 5: Para encontrar a equação da reta normal ao gráfico de $f(x) = \sqrt{4x-3}$ no ponto $P(3,3)$ basta utilizar o resultado do exemplo 2 e a definição

2. Daí, $m = \frac{2}{3}$ e a equação da reta normal é dada por

$$y - f(3) = -\frac{3}{2}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$$

Exemplo 6: Para encontrar a equação da reta tangente e normal à curva $f(x) = \frac{1}{x-3}$ no ponto $P(4,1)$ devemos inicialmente calcular o coeficiente angular m_t da reta tangente a essa curva neste ponto. Assim,

$$\begin{aligned}
 m_t &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4+h-3} - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+1} - 1 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (h+1)}{h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h(h+1)} = -1
 \end{aligned}$$

Por outro lado, o coeficiente angular da reta normal m_n é dado por

$$m_n = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Assim, as equações das retas tangente e normal são dadas, respectivamente, por:

$$y - 1 = -1(x - 4) \Leftrightarrow y = -x + 5$$

e

$$y - 1 = 1(x - 4) \Leftrightarrow y = x - 3$$

3.2 O conceito de Derivada

O limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ não é útil apenas para se obter o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f mas tem outras aplicações em uma grande variedade de situações. Um nome especial é dado a este limite. É chamado *derivada de f em a* e é representada por $f'(a)$ ou $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$. Isto nos conduz à seguinte definição:

Definição 1: Seja f uma função definida em a . Então, a derivada de f no ponto a , denotada por $f'(a)$ (lê-se: f linha de a), é dada por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

desde que este limite exista. Neste caso, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em a .

Resumo: Com esta definição e conforme vimos na seção anterior, temos que a derivada da função f no ponto $x=a$ representa geometricamente o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$, isto é,

$$m = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

desde que este limite exista. Neste caso, as equações das retas tangente e normal à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ podem ser reescritas, respectivamente, na forma:

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x - a) \\ &e \\ y - f(a) &= -\frac{1}{f'(a)}(x - a), \text{ desde que } f'(a) \neq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1: Para o caso do exemplo 3, seção 3.1, o resultado pode ser expresso da seguinte forma: Se $f(x) = x^2$ então $f'(a) = 2a$.

Quando a função f possui derivada em todos os pontos de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ podemos considerar a função derivada, conforme a definição que segue.

Definição 2: Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivada em todos os pontos do conjunto X . A derivada de f é a função $f' : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in X$ a derivada $f'(x)$, dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Além disso, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) se é derivável em cada ponto do seu domínio.

Observação 1: Se $y = f(x)$ podemos utilizar outros símbolos para denotar a derivada de f , a saber: $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = D_x y$.

Você Sabia? Se $y = f(x)$ a notação $\frac{dy}{dx}$ que representa a derivada de f foi criada por Leibniz (1646-1716), um dos inventores da derivada. Para explicar esta notação, Leibniz escreveu o quociente $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ na forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ sendo } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \text{ Assim, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Exemplo 2: Para o cálculo da derivada da função $f(x) = x^2$ procedemos como o exemplo 3, seção 3.1 apenas realizando o cálculo na variável x , conforme segue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Podemos também escrever: $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

Exemplo 3: Para determinar $f'(x)$ se $f(x) = \frac{1}{x}$ façamos,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Portanto, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.

Exemplo 4: Para determinar a derivada da função trigonométrica $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ definida por $f(x) = \sin x$, façamos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \stackrel{(*)}{=} \cos x$$

(*) Justificado no exemplo 6 da seção 3.6

Portanto, $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x}$.

Exemplo 5: Para determinar a derivada da função trigonométrica $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ definida por $f(x) = \cos x$, fazamos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \stackrel{(*)}{=} -\operatorname{sen} x$$

(*) Justificado na observação da seção 2.6

Portanto, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$.

Exemplo 6: Para determinar a derivada da função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), fazamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \stackrel{(*)}{=} a^x (\ln a) \end{aligned}$$

(*) Utilizamos que $\lim_{h \rightarrow 0} a^h = a^0 = 1$ e o limite fundamental LF4.

Portanto, $\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x (\ln a)}$.

Em particular, se $a = e$, sendo e o número irracional neperiano, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x (\ln e) = e^x}$$

Exemplo 7: A função modular $f(x) = |x|$ não é derivável em $a=0$ já que calculando os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

temos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Daí, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe e, portanto $f(x) = |x|$ não é derivável em $a = 0$. Note que $f(x) = |x|$ não admite reta tangente em $(0,0)$.

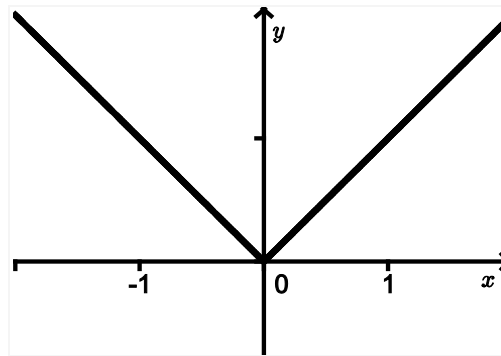


Figura 1: Gráfico de $f(x) = |x|$

Este exemplo nos motiva a seguinte definição:

Definição 3: Seja f uma função definida em a . Então, a *derivada à direita de f em a* , denotada por $f'_+(a)$, é dada por

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

caso este limite exista a *derivada à esquerda de f em a* , denotada por $f'_-(a)$, é

dada por $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, caso este limite exista.

Observação 2: Uma função é derivável (ou diferenciável) em a , quando as derivadas laterais (derivada à direita e à esquerda) existem e são iguais no ponto a , e neste caso, seu valor é o valor comum das derivadas laterais, isto é, $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$.

Observação 3: De forma análoga ao que foi visto para funções contínuas, podemos definir função derivável nos seguintes intervalos:

$$(a,b), [a,b], [a,b), (a,b], (-\infty,+\infty), [a,+\infty), (a,+\infty), (-\infty,b], (-\infty,b).$$

Exemplo 8: Para verificar que a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ não é derivável em $a = 0$ devemos calcular as derivadas laterais em $a = 0$. Vejamos:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

e

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 - x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 - 2}{x} = -\infty$$

Como a derivada lateral à direita não existe, temos que f não é derivável em $a = 0$. Note que, neste exemplo, f também é descontínua em $a = 0$.

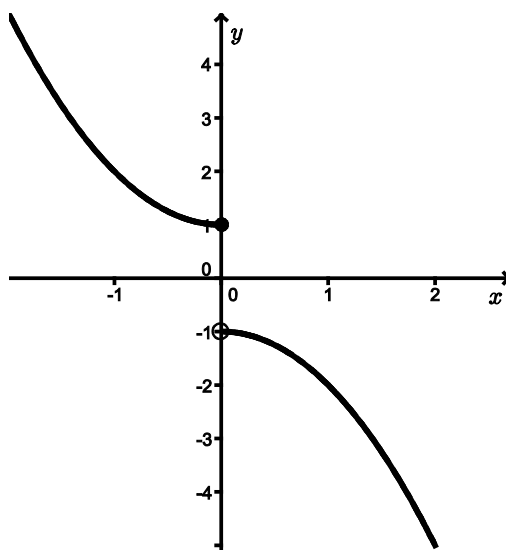


Figura 2: Gráfico de f

Exemplo 9: Para verificar que a função $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ x^{-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ não é derivável em $a = 1$ devemos calcular as derivadas laterais em $a = 1$. Vejamos:

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x-1) = 0$$

e

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$$

Como as derivadas laterais existem, mas são diferentes, então não existe $g'(1)$. Daí, g não é derivável em $a=1$. Note que, neste exemplo, g é contínua em $a=1$.

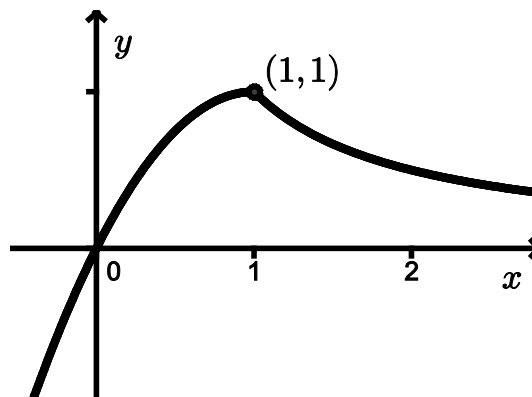


Figura 3: Gráfico de g

Observação 4: Nos exemplos 7 e 9 vimos que as funções f e g , definidas por

$$f(x) = |x| \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ x^{-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

não são deriváveis em $a=0$. Porém, essas funções são contínuas neste ponto. Isto mostra que uma função pode ser contínua em um ponto sem ser derivável neste ponto. Portanto, uma função ser contínua em um ponto não implica ser derivável neste ponto. A recíproca, entretanto, é verdadeira conforme o resultado a seguir:

Teorema 1: Se f for derivável em a então f será contínua em a .

Demonstração: Se f é derivável em a então $f'(a)$ existe, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é um número real e, portanto, $f(a)$ também existe. Como

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0, \text{ se } x \neq a,$$

$$\text{Então } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] + \lim_{x \rightarrow a} f(a) = 0 + f(a) = f(a),$$

ou seja, f é contínua em a .

Forma Equivalente do Teorema 1: Se f é descontínua em a então f não é derivável em a .

Exemplo 10: Outra forma de mostrarmos que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

não é derivável em $a=0$ é utilizar a Forma Equivalente do Teorema 1. Para isso, basta mostrar que esta função é descontínua em $a=0$. De fato, não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ já que } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ pois,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 - x^2) = -1.$$

Observação 5: A existência da derivada em um ponto implica a existência de uma reta tangente neste ponto. Porém, uma função pode não ter derivada em um ponto e admitir reta tangente neste ponto. Conforme vimos no exemplo 4, seção 3.1, a função $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ não é derivável em $a=1$ mas admite uma tangente vertical no ponto $P(1,0)$.

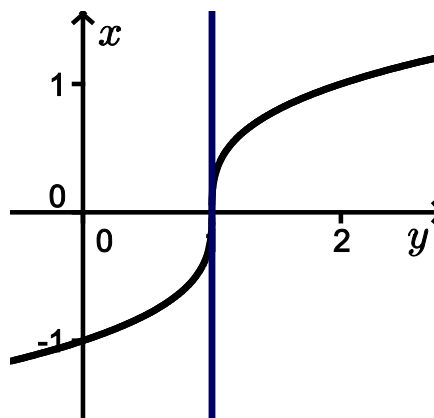


Figura 4: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ em $P(1,0)$

Resumo: Uma função f pode deixar de ser derivável em um número a por uma das seguintes razões:

- quando a função f for descontínua em a ;
- quando a função f for contínua em a e o gráfico de f tem uma reta tangente vertical no ponto $(a, f(a))$;
- quando a função f for contínua em a e o gráfico de f não tem uma reta tangente no ponto $x = a$.

3.3 Técnicas de Derivação

O cálculo de derivada utilizando a definição é bastante demorado e trabalhoso para a maioria das funções. Agora vamos desenvolver algumas regras formais que nos capacitaremos a derivar de forma mais rápida e eficiente a derivada de uma função. O processo utilizado para encontrar a derivada de uma função chama-se *derivação ou diferenciação*.

Regras de Derivação:

Derivada de uma constante: Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x , então $f'(x) = 0$, ou equivalentemente, $\frac{d}{dx}c = 0$. Em palavras, "a derivada de uma constante é igual a zero".

Para provar essa regra seguimos a definição de derivada e que $f(x) = c$ para todo x . Daí, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$

Derivada de uma potência: Se n é um inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$, ou equivalentemente, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$. Em palavras, "a derivada de x^n é obtida baixando o expoente n e tomando-o como um coeficiente de uma nova potência de x cujo expoente obtemos subtraindo 1 de n ".

Para provar essa regra seguimos a definição de derivada e usamos a Fórmula do Binômio de Newton que diz: Se n é um inteiro positivo então

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n .$$

Daí,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}h^3 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}h^3 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}h^2 + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Observação 1: Essa regra pode ser generalizada para potências reais, isto é, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^\alpha$ então $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Exemplo 1: Vejamos alguns casos particulares desta regra:

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

(provada também por definição na seção anterior)

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

(provada também por definição na seção anterior)

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemplo 2: Para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (3,9) lembramos que a derivada no ponto a , dada por $f'(a) = 2a$, fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Neste caso,

considerando que $a=3$, $f(a)=9$ e $f'(a)=6$ temos que a equação da tangente é dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - 9 = 6(x - 3) \Rightarrow y = 6x - 9.$$

Exemplo 3: Para encontrar a equação da reta normal n ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ que seja paralela à reta r de equação $x + y = 4$ observamos inicialmente que o coeficiente angular da reta normal, m_n , é igual a -1 , já que as retas r e n são paralelas e $m_r = -1$. Note que, neste exemplo, temos o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f , mas não temos o ponto do gráfico por onde ela passa. Para determinar este ponto, sendo

$$m_t = f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

o coeficiente angular da reta tangente t ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ e $m_t \cdot m_n = -1$ (já que as retas t e n são perpendiculares), temos que $\frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot (-1) = -1$. Assim,

$$a = \frac{1}{4} \text{ e } f(a) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}. \text{ Daí, } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

é o ponto do gráfico de f em que a reta normal deverá passar. Portanto, a equação da reta normal n é dada por

$$y - f(a) = m_n(x - a) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow y = -x + \frac{3}{4}.$$

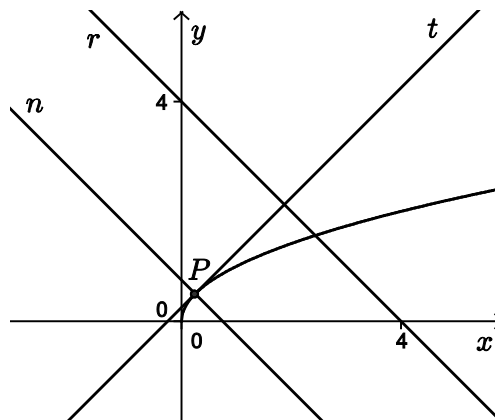


Figura 1: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ em $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Derivada do produto de uma constante por uma função: Sejam f uma função derivável e c uma constante.

Se $y = cf(x)$ então $y'(x) = cf'(x)$, ou equivalentemente, $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$.

Em palavras, "a derivada de uma constante por uma função é a constante pela derivada da função".

Para provar essa regra usaremos a definição de derivada. De fato,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x) \end{aligned}$$

Exemplo 4: Vejamos alguns exemplos:

- (i) $f(x) = 2x^5 \Rightarrow f'(x) = 10x^4$
- (ii) $f(x) = 3\text{sen } x \Rightarrow f'(x) = 3\text{cos } x$ (veja exemplo 4, seção 3.2)
- (iii) $f(x) = \frac{4^x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4^x \cdot \ln 4 = 4^x \ln 2$ (veja exemplo 6, seção 3.2)

Derivada de uma soma: Sejam f e g funções deriváveis. Se $y = f(x) + g(x)$, então, ou equivalentemente, $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$. Em palavras, "a derivada da soma é a soma das derivadas".

Para provar essa regra usaremos a definição de derivada. De fato,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Observação 2: Esta regra se aplica para um número finito de funções, isto é, o resultado pode ser aplicado diversas vezes e assim a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se estas existirem.

Exemplo 5: Vejamos alguns exemplos:

$$(i) f(x) = 3x^5 + 6x^3 + 2x^2 + 7x + 9 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 18x^2 + 4x + 7$$

$$(ii) f(x) = 2e^x + \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = 2e^x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Exemplo 6: Para achar o ponto da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, no qual a tangente é horizontal lembramos que retas horizontais têm coeficiente angular igual a zero. Desta forma, como $f'(x) = 2ax + b$ devemos ter $f'(x) = 2ax + b = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{2a}$. Note que este resultado está de acordo com o que foi visto no Ensino Médio que é denominado de abscissa do vértice da parábola e denotado por $x_v = -\frac{b}{2a}$. Como

$$\begin{aligned} y_v = f(x_v) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

o ponto da parábola no qual a tangente é horizontal é o vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemplo 7: Considere a parábola $f(x) = 2x^2 - 1$ e o ponto $A(4,13)$ não pertencente à parábola. Para encontrar uma equação de cada uma das retas que passa pelo ponto A, que sejam tangentes à parábola vamos inicialmente encontrar a equação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto arbitrário $(a, f(a))$. Sabemos que a equação desta reta é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, e como $f(a) = 2a^2 - 1$ e $f'(a) = 4a$, temos

$$y - (2a^2 - 1) = 4a(x - a) \Rightarrow y = 4ax - 2a^2 - 1$$

isto é, $y = 4ax - 2a^2 - 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^2 - 1$ em um ponto arbitrário $(a, f(a))$.

Agora, procuramos uma reta que seja tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ e que passe pelo ponto $A(4,13)$. Daí, o ponto $A(4,13)$ deverá satisfazer a equação da reta tangente, ou seja, $13 = 4a \cdot 4 - 2a^2 - 1$. Simplificando esta equação obtemos $a^2 - 8a + 7 = 0$ cujas raízes são $a = 1$ ou $a = 7$. Portanto,

- se $a = 1$ a equação da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto do gráfico $P_1(1, f(1))$ e pelo ponto $A(4,13)$, não pertencente ao gráfico, é dada por

$$y = 4ax - 2a^2 - 1 \Rightarrow y = 4x - 2 \cdot 1^2 - 1 \Rightarrow y = 4x - 3.$$

- se $a = 7$ a equação da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto do gráfico $P_2(7, f(7))$ e pelo ponto $A(4,13)$, é dada por

$$y = 4ax - 2a^2 - 1 \Rightarrow y = 4 \cdot 7 \cdot x - 2 \cdot 7^2 - 1 \Rightarrow y = 28x - 99$$

A figura 2 apresenta um esboço da parábola com as equações de cada uma das retas tangentes à parábola, passando pelo ponto $A(4,13)$.

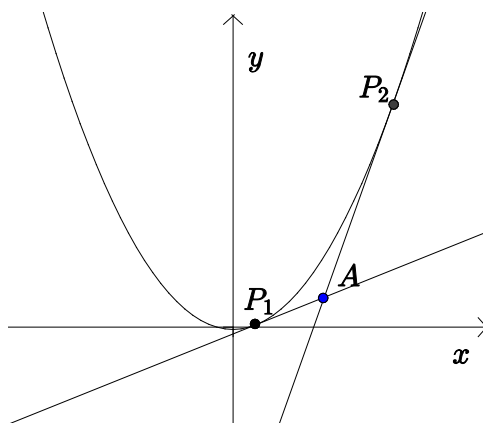


Figura 2: Retas tangentes ao gráfico de $f(x) = 2x^2 - 1$ que passa pelo ponto $A(4,13)$

Observação 3: Veremos a seguir que a regra do produto não é o produto das derivadas. De fato, para se convencer deste fato considere as funções f e g dadas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 4x + 1$. Então

$f(x) \cdot g(x) = (3x + 2)(4x + 1) = 12x^2 + 11x + 2$ e daí $[f(x) \cdot g(x)]' = 24x + 11$. Por outro lado, $f'(x) = 3$ e $g'(x) = 4$ e, desta forma, $f'(x) \cdot g'(x) = 12$. Portanto,

$$[f(x) \cdot g(x)]' \neq f'(x) \cdot g'(x).$$

Derivada do produto: Sejam f e g funções deriváveis. Se $y = f(x) \cdot g(x)$, então

$$y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \text{ ou equivalentemente,}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)].$$

Em palavras, "a derivada do produto é a derivada da primeira pela segunda, mais a primeira, pela derivada da segunda".

Para provar essa regra usaremos a definição de derivada. De fato,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x) + f(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\stackrel{(*)}{=} f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

(*) Utilizamos o fato que, sendo f derivável, então f é contínua. Daí,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0} (x+h)\right) = f(x)$$

Exemplo 8: Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} f(x) = (3x+2)(4x+1) &\Rightarrow f'(x) = (3x+2)'(4x+1) + (3x+2)(4x+1)' \\ &= 3(4x+1) + (3x+2)4 = 24x+11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = (2x^3 + 1)(3x^2 + x) &\Rightarrow f'(x) = 6x^2(3x^2 + x) + (2x^3 + 1)(6x + 1) \\ &= 30x^4 + 8x^3 + 6x + 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2^x \sin x \Rightarrow f'(x) = (2^x \ln 2) \sin x + 2^x \cos x = 2^x [(\ln 2) \sin x + \cos x]$$

Observação 4: Do mesmo modo que a derivada do produto não é igual ao produto das derivadas, a derivada do quociente não é igual ao quociente das derivadas.

Derivada do quociente: Sejam f e g funções deriváveis. Se

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ com } g(x) \neq 0, \text{ então } y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2},$$

$$\text{ou, equivalentemente, } \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{d}{dx} [f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Em palavras, "a derivada do quociente é o quociente entre a derivada da primeira pela segunda, menos a primeira, pela derivada da segunda e o quadrado da segunda".

Para provar essa regra usaremos a definição de derivada. De fato,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

(*) Utilizamos o fato que, sendo g derivável, então g é contínua. Daí,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g \left(\lim_{h \rightarrow 0} (x+h) \right) = g(x)$$

Exemplo 9: Vejamos alguns exemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Note que, neste caso, é mais conveniente considerar a função $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ e derivar utilizando a regra da potência.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2+x-x^2)' \cdot (x-1)^2 - (2+x-x^2) \cdot (x^2-2x+1)'}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(1-2x) \cdot (x-1)^2 - (2+x-x^2) \cdot (2x-2)}{(x-1)^4} \\ &= (x-1) \left[\frac{(1-2x) \cdot (x-1) - (2+x-x^2) \cdot 2}{(x-1)^4} \right] \\ &= \frac{(1-2x) \cdot (x-1) - (2+x-x^2) \cdot 2}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x-5}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Exemplo 10: Para derivar a função $f(x) = \frac{e^x(5x+3)}{\operatorname{sen} x}$ devemos utilizar as regras do quociente e do produto. Vejamos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x(5x+3))' \operatorname{sen} x - e^x(5x+3)(\operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{(e^x(5x+3) + 5e^x) \operatorname{sen} x - e^x(5x+3) \cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{e^x[(5x+8)\operatorname{sen} x - (5x+3)\cos x]}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

Exemplo 11 (Derivadas das funções trigonométricas): Vejamos as derivadas das outras funções trigonométricas:

- Se $y = \operatorname{tg} x$ então, usando o fato de que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e a regra do quociente, temos

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Portanto, $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$

- Se $y = \operatorname{cotg} x$ então, usando o fato de que $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ e a regra do quociente, obtemos

$$\boxed{(\cotg x)' = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

- Se $y = \sec x$ então, usando o fato de que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e a regra do quociente, obtemos

$$y' = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \operatorname{tg} x$$

Portanto, $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$

- Se $y = \operatorname{cosec} x$ então, usando o fato de que $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ e a regra do quociente, obtemos

$$\boxed{(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cotg x}$$

Teste o seu conhecimento

1. Ache os pontos da curva $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10$ nos quais a tangente é horizontal.
2. Encontre a equação da reta tangente à curva $f(x) = 2x^2 + 3$ que seja paralela à reta $8x - y + 3 = 0$.
3. Ache uma equação de cada reta tangente à curva $y = x^3 - 3x$ que é perpendicular à reta $2x + 18y - 9 = 0$.
4. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} tal que $f'(1) = 0$. O que este valor significa?
5. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} tal que $f'(x) > 0$, para todo x . O que este valor significa?

6. Mostre que $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ -x+4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em $x = 1$, mas não é derivável neste ponto.

Esboce o gráfico de g .

7. Achar os valores de a e b tais que f seja derivável no ponto $x = 1$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax & \text{se } x \leq 1 \\ bx^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

8. Seja $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$. Verifique se:

a) f é derivável em $x = 1$.

b) f é contínua em $x = 1$.

9. Seja $f(x) = \begin{cases} -1-x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Verifique se f é derivável em $x = 0$. Determine a função derivada f' e seu domínio.

10. Mostre, usando a definição de derivada, que:

a) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$

$$b) \frac{d}{dx}(\sqrt{3-x}) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

11. Derive as funções dadas:

$$a) f(x) = e^x \cos x + e^x \sec x$$

$$b) f(x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{tg} x$$

$$c) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + (x+1)\operatorname{tg} x}$$

12. Sabendo que $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (seno hiperbólico de x) e $\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosseno hiperbólico de x), mostre que:

$$a) \frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \operatorname{cosh} x.$$

$$b) \frac{d}{dx}(\operatorname{cosh} x) = \operatorname{senh} x.$$

13. Derive cada uma das seguintes funções de duas maneiras: derivando antes de multiplicar e multiplicando antes de derivar e verifique que as respostas coincidem:

$$a) f(x) = 3x^4(x^2 + 2x)$$

$$b) g(x) = (x+1)(x^2 - 2x - 3)$$

14. Derive as funções abaixo e as simplifique o tanto quanto for possível

$$a) f(x) = \frac{x + x^{-1}}{x - x^{-1}}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2}$$

15. Ache $\frac{dy}{dx}$ de duas maneiras distintas: dividindo e derivando (sem usar a regra do quociente) e depois usando a regra do quociente. Verifique que as respostas coincidem.

$$a) y = \frac{9 - x^3}{x^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{5-3x}{x^4}$$

16. Estenda a regra do produto para três funções mostrando que:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v \cdot w) = \frac{du}{dx} \cdot v \cdot w + u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot w + u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx}$$

17. Derive as funções:

$$\text{a) } f(x) = x^3 \cdot 2^x \cdot \text{tg } x$$

$$\text{b) } g(x) = \sqrt{x} \cdot \text{sen } x \cdot e^x$$

Vimos que, para derivar a função $y = (2x+1)^3$ podemos expandir o binômio e obter a função polinomial $y = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ cuja derivada é $y' = 24x^2 + 24x + 6$. Por outro lado, se a potência fosse maior, como por exemplo, $y = (2x+1)^{1037}$, o procedimento usado acima é inviável. Neste caso, podemos observar que a função $y = (2x+1)^{1037}$ é uma função composta. De fato, se tomarmos $f(x) = x^{1037}$ e $g(x) = 2x+1$ então podemos escrever $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. O resultado que enunciaremos a seguir é uma das mais importantes regras de derivação, denominada *Regra da Cadeia*, que nos possibilitará derivar uma função composta.

Derivada da função composta – Regra da Cadeia: Sejam f e g funções tais que se pode considerar a função composta $f \circ g$. Se g é derivável em x e f é derivável em $g(x)$ então $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Utilizando a notação de Leibniz podemos reescrever a Regra da Cadeia da seguinte forma:

Fazendo $u = g(x)$ temos que $y = f(u)$ e assim

$$g'(x) = \frac{du}{dx}, \quad f'(u) = f'(g(x)) = \frac{dy}{du} \quad \text{e} \quad (f \circ g)'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad \text{Daí,}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Em palavras, a derivada da composta $f \circ g$, tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é a derivada da função externa f calculada na função interna g vezes a derivada da função interna g .

$$\frac{d}{dx} \left[\underbrace{f}_{\text{função externa}} \left(\underbrace{g(x)}_{\text{calculada na função interna}} \right) \right] = \underbrace{f'}_{\text{derivada da função externa}} \left(\underbrace{g(x)}_{\text{calculada na função interna}} \right) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivada da função interna}}$$

A prova da Regra da Cadeia é um pouco mais técnica em relação às regras anteriores e por isso será omitida.

Observação 5: Cuidado com as notações $f'(g(x))$ e $[f(g(x))]' = \frac{d}{dx}[f(g(x))]$.

A notação $f'(g(x))$ é o valor que a derivada de f assume calculada em $g(x)$, enquanto $[f(g(x))]' = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Exemplo 12: Para derivar $y = (2x+1)^3$ tomamos $f(x) = x^3$ e $g(x) = 2x+1$. Daí, podemos escrever $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Como $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 2$ temos, pela regra da cadeia, que

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3[g(x)]^2 \cdot 2 = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$$

Note que o resultado está de acordo com a conclusão realizada na observação 4 pois $y' = 6(2x+1)^2 = 24x^2 + 24x + 6$.

Outra forma de derivar $y = (2x+1)^3$ é utilizar a regra da cadeia na notação de Leibniz. Desta forma, chamando $u = g(x) = 2x+1$, temos $y = u^3$. Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^3) \cdot \frac{d}{dx}(2x+1) = 3u^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2.$$

Exemplo 13: Para derivar $y = (2x+1)^{1037}$ procedemos de maneira análoga ao exemplo 12 fazendo $f(x) = x^{1037}$ e $g(x) = 2x+1$. Daí, $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Como $f'(x) = 1037x^{1036}$ e $g'(x) = 2$ temos, pela regra da cadeia, que

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1037(2x+1)^{1036} \cdot 2 = 2074(2x+1)^{1036}$$

Exemplo 14: Para derivar $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ podemos também proceder da seguinte forma: Escrevemos $u = g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ e $y = f(u) = \sin u$. Daí, utilizando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{2} \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \sin x\right) = -\sin x.$$

Como $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \sin x\cos\frac{\pi}{2} = \cos x$, acabamos de mostrar que $(\cos x)' = -\sin x$.

Consequências da Regra da Cadeia:

Se α é um número real qualquer e g é uma função derivável então

$$y = [g(x)]^\alpha \Rightarrow y' = \alpha [g(x)]^{\alpha-1} \cdot g'(x).$$

Alternativamente, se $u = g(x)$, então $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$

A justificativa deste resultado é imediata. De fato, se tomarmos $f(x) = x^\alpha$ e $u = g(x)$ então podemos escrever $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Como $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ então, pela regra da cadeia, segue que

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \alpha [g(x)]^{\alpha-1} \cdot g'(x).$$

Essa consequência é útil para calcular a derivada da potência de uma função. Na prática, podemos omitir a substituição $u = g(x)$, conforme o exemplo 16.

Exemplo 15: Para derivar $y = (2x+1)^{1037}$ podemos proceder alternativamente utilizando a consequência 1 da regra da cadeia com $u = g(x) = 2x+1$ e $\alpha = 1037$. Daí,

$$\begin{aligned} y' &= \alpha [g(x)]^{\alpha-1} \cdot g'(x) = 1037(2x+1)^{1037-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1) \\ &= 1037(2x+1)^{1036} \cdot 2 = 2074(2x+1)^{1036} \end{aligned}$$

Exemplo 16: Para derivar $y = \sqrt[3]{3x^2+6x+1}$ escrevemos $y = (3x^2+6x+1)^{\frac{1}{3}}$ e usamos a consequência 1 com $\alpha = \frac{1}{3}$ e $g(x) = 3x^2+6x+1$. Daí,

$$\begin{aligned} y' &= \alpha [g(x)]^{\alpha-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{3}(3x^2+6x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (6x+6) \\ &= 2(x+1)(3x^2+6x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2(x+1)}{\sqrt[3]{(3x^2+6x+1)^2}}. \end{aligned}$$

Algumas vezes, para derivar determinadas funções podemos ter à disposição mais de um método de derivação, como veremos no exemplo 17.

Exemplo 17: Para derivar $y = \frac{3}{(x^2 - 7x + 2)^4}$, podemos optar pelos seguintes

métodos de derivação:

Método 1: Aplicar a regra do quociente e depois a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3)' \cdot (x^2 - 7x + 2)^4 - 3 \cdot [(x^2 - 7x + 2)^4]'}{(x^2 - 7x + 2)^8} \\ &= \frac{0 - 3 \cdot 4 \cdot (x^2 - 7x + 2)^3 \cdot (2x - 7)}{(x^2 - 7x + 2)^8} \\ &= \frac{-12(2x - 7)}{(x^2 - 7x + 2)^5} \end{aligned}$$

Método 2: Aplicar a regra da derivada de uma constante por uma função e depois a regra da cadeia.

Inicialmente escrevemos

$$y = \frac{3}{(x^2 - 7x + 2)^4} = 3(x^2 - 7x + 2)^{-4}.$$

Daí,

$$y' = 3 \cdot [(x^2 - 7x + 2)^{-4}]' = -12[(x^2 - 7x + 2)^{-5}] \cdot (2x - 7) = \frac{-12(2x - 7)}{(x^2 - 7x + 2)^5}.$$

Agora, retornamos nas consequências da regra da cadeia:

Se g é uma função derivável, então $y = \text{sen}[g(x)] \Rightarrow y' = \cos[g(x)] \cdot g'(x)$.

Alternativamente, se $u = g(x)$, então $\boxed{(\text{sen } u)' = (\cos u) \cdot u'}$.

Exemplo 18: Para derivar $y = \text{sen} \sqrt{x}$ podemos proceder diretamente pela consequência da regra da cadeia sendo $g(x) = \sqrt{x}$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Daí,

$$y' = \cos[g(x)] \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}.$$

Similarmente, supondo $u = g(x)$ uma função derivável, podemos deduzir outras consequências da regra da cadeia, a saber:

- 1) $y = \cos u \Rightarrow y' = (-\operatorname{sen} u) \cdot u'$
- 2) $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = (\sec^2 u) \cdot u'$
- 3) $y = \sec u \Rightarrow y' = (\sec u \cdot \operatorname{tg} u) \cdot u'$
- 4) $y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = (-\operatorname{cossec}^2 u) \cdot u'$
- 5) $y = \operatorname{cossec} u \Rightarrow y' = (-\operatorname{cossec} u \cdot \operatorname{cotg} u) \cdot u'$
- 6) $y = a^u \quad (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = (a^u \cdot \ln a) \cdot u'$
- 7) $y = e^u \Rightarrow y' = (e^u) \cdot u'$

Observação 6: Em todas as consequências da regra da cadeia mencionadas acima aparecem um fator multiplicativo u' no final da regra de derivação. Além disso, quando $u = g(x) = x$ as regras de derivação se simplificam obtendo as derivadas das funções elementares vistas anteriormente. Assim, as consequências da regra da cadeia nos fornecem uma generalização das derivadas das funções elementares.

Observação 7: Outras consequências da regra da cadeia, semelhantes às vistas anteriormente, serão apresentadas em uma **Tabela Geral de Derivadas** que veremos posteriormente.

A regra da cadeia pode ser usada repetidamente, como veremos no exemplo 19 e exemplo 20 que seguem.

Exemplo 19: Para derivar $y = e^{\cos\sqrt{x}}$ utilizamos os seguintes passos:

- Façamos $u = \cos\sqrt{x}$ e utilizamos a consequência 9 da regra da cadeia para derivar $y = e^u$, em relação a x . Daí, $y' = e^u \cdot u' = e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (\cos\sqrt{x})'$.
- Façamos, agora, $v = \sqrt{x}$ e utilizamos a consequência 3 da regra da cadeia para derivar $\cos v$, em relação a x . Assim, $(\cos v)' = (-\operatorname{sen} v) v' = (-\operatorname{sen} \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Unindo os dois passos de derivação obtemos:

$$y' = e^u \cdot u' = e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (\cos\sqrt{x})' = e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (-\operatorname{sen}\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x} \cdot e^{\cos\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Observação 8: No caso do exemplo 19 fizemos duas substituições, a saber, $u = \cos \sqrt{x}$ e $v = \sqrt{x}$. Com um pouco de prática, podemos dispensar as substituições indicadas, tendo presente na memória, porém sem escrevê-las, e proceder, de forma direta, o processo de derivação. Desta forma, para derivar $y = e^{\cos \sqrt{x}}$ procedemos da seguinte forma:

$$y' = \frac{d}{dx} \left[e^{\cos \sqrt{x}} \right] = e^{\cos \sqrt{x}} \cdot (\cos \sqrt{x})' = e^{\cos \sqrt{x}} \cdot (-\operatorname{sen} \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x} \cdot e^{\cos \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Exemplo 20: Para derivar $y = \operatorname{tg}^5 x^3$ vamos utilizar as consequências 1 e 4 mantendo as devidas substituições na memória, sem escrevê-las, isto é,

$$\begin{aligned} y' &= \left[\operatorname{tg}^5 x^3 \right]' = \left[(\operatorname{tg} x^3)^5 \right]' = 5(\operatorname{tg} x^3)^4 \cdot (\operatorname{tg} x^3)' = 5(\operatorname{tg} x^3)^4 \cdot (\sec^2 x^3) \cdot (x^3)' \\ &= 5(\operatorname{tg} x^3)^4 \cdot (\sec^2 x^3) \cdot 3x^2 = 15 x^2 \cdot \operatorname{tg}^4 x^3 \cdot \sec^2 x^3 \end{aligned}$$

3.4 Derivação Implícita

As funções dadas até agora foram descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra como, por exemplo,

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad \text{ou} \quad y = x^3 \cos x \quad \text{ou} \quad y = f(x)$$

que expressa y em termos da variável x , denominada forma explícita de uma função. Vimos também regras para derivar funções definidas nesta forma. Entretanto, muitas funções não são expressas na forma explícita e sim através de uma equação que envolve as variáveis x e y , tais como

$$x^2 + y^2 - 16 = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 + y^3 = 6xy \quad \text{ou} \quad f(x, y) = 0.$$

Nesse caso, a variável y é definida implicitamente como função de x . Em geral, se uma função for dada sob a forma $y = f(x)$, então, dizemos que f está na forma explícita. Porém, se uma função f for expressa por uma equação da forma $F(x, y) = 0$ dizemos que está na forma implícita ou que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$. Neste caso, substituindo y por $f(x)$ tem-se uma identidade.

Exemplo 1: A equação $x^2 + y^2 = 16$ define implicitamente a função $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$, pois substituindo $y = -\sqrt{16 - x^2}$ na equação $x^2 + y^2 = 16$, obtemos a identidade

$$x^2 + \left[-\sqrt{16 - x^2}\right]^2 = x^2 + 16 - x^2 = 16.$$

Neste caso é possível resolver a equação $x^2 + y^2 = 16$ isolando y como uma (ou até mais de uma) função explícita de x . Por exemplo, podemos resolver esta equação escrevendo $y = \sqrt{16 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{16 - x^2}$ que são duas funções explícitas de x que satisfazem a equação dada. Assim, se $y = \sqrt{16 - x^2}$ temos, pela consequência 1 da regra da cadeia, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$ ou, equivalentemente,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Note que, se escolhermos a função $y = -\sqrt{16 - x^2}$ (forma explícita) temos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{-\sqrt{16 - x^2}} \text{ ou, equivalentemente, } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Devemos observar que existem várias outras funções na forma explícita que satisfazem também a equação $x^2 + y^2 = 16$, por exemplo, a função h , definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{16 - x^2} & \text{se } 0 < x \leq 4 \end{cases}.$$

e sua derivada também é dada por $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ sendo $y = h(x)$.

No entanto, nem sempre é fácil encontrar, quando existir, a forma explícita de uma função definida implicitamente por uma equação. Por exemplo, se fosse para explicitar y como uma função de x em $x^3 + y^3 = 18xy$, a tarefa seria bem complicada. Com o uso do software **GeoGebra** podemos traçar a curva descrita por esta equação $x^3 + y^3 = 18xy$. Esta curva é denominada Fólio de Descartes, veja figura 1.

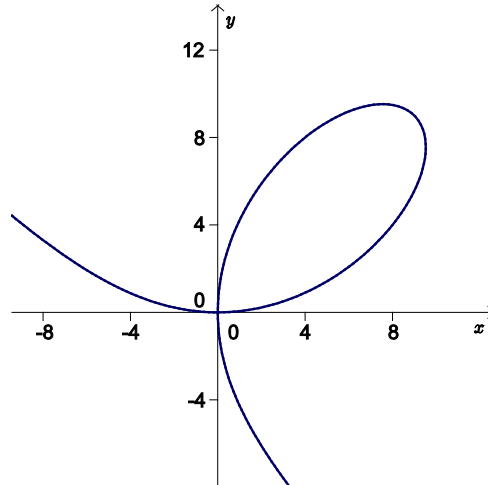


Figura 1: Gráfico da curva $x^3 + y^3 = 18xy$

Observe no gráfico da curva $x^3 + y^3 = 18xy$ que existem funções $y = f(x)$ que satisfazem a equação dada.

Assim, para o cálculo de derivadas de funções implícitas vamos utilizar um método conhecido como *derivação implícita* que descrevemos a seguir:

Método de derivação implícita: Dada uma equação $F(x, y) = 0$ na qual se estabelece y implicitamente como função derivável de x , calcula-se $y' = \frac{dy}{dx}$ do seguinte modo:

Passo 1: Derive ambos os membros da equação em relação a x . Tenha em mente que y é encarado como uma função de x e, portanto, ao derivar, você deverá utilizar as regras de derivação (regra da soma, produto, quociente, regra da cadeia, etc.).

Passo 2: O resultado do passo 1 será uma equação nas variáveis x , y e y' . Escreva todos os termos que envolvem $y' = \frac{dy}{dx}$ no 1º membro desta equação e os outros termos no 2º membro.

Passo 3: Coloque $y' = \frac{dy}{dx}$ em evidência e explicita $y' = \frac{dy}{dx}$ em função de x e y .

Vimos no exemplo 1 que ao passarmos da forma implícita para a forma explícita podemos calcular a derivada. Vamos mostrar no exemplo 2 que, utilizando o método

de derivação implícita descrito acima, podemos também calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ sem necessidades de passar para a representação explícita.

Exemplo 2: Considere a equação $x^2 + y^2 = 16$. Vamos calcular, por derivação implícita, $y' = \frac{dy}{dx}$ admitindo que y define implicitamente uma função derivável de x . Seguindo os passos do método descrito acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^2 + y^2] &= \frac{d}{dx}[16] \Rightarrow \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2] = 0 \Rightarrow 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

que corresponde a derivada de cada função f , definida por $y = f(x)$ que satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 16$ (compare com o exemplo 1). Observe que a derivada está expressa em termos de y , mas isto não é uma desvantagem porque, na maioria dos problemas, estamos interessados em calcular y' apenas em alguns pontos.

Observação: Observe que, para calcular a derivada de y^n , em relação a x , admitindo y uma função derivável de x , usamos a regra da cadeia para obter $\frac{d}{dx}[y^n] = n \cdot y^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx}$. No exemplo 2 utilizamos este resultado com $n = 2$.

Exemplo 3: Suponhamos que a relação $x^3 + y^3 = 18xy$ define uma função $y = f(x)$ e que essa função é derivável em um determinado intervalo. Para determinar $y' = \frac{dy}{dx}$ em termos de x e y derivamos em relação a x , com o auxílio da regra da cadeia e regra do produto, ambos os lados da equação $x^3 + y^3 = 18xy$ e isolamos $y' = \frac{dy}{dx}$ em função de x e y . Vejamos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^3 + y^3] &= \frac{d}{dx}[18xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 18y + 18xy' \\ &\Rightarrow 3y^2 \cdot y' - 18xy' = 18y - 3x^2 \\ &\Rightarrow (3y^2 - 18x)y' = 18y - 3x^2 \\ &\Rightarrow y' = \frac{18y - 3x^2}{3y^2 - 18x}. \end{aligned}$$

Assim, conseguimos calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ sem a necessidade de explicitar y como uma função de x .

Exemplo 4: Para encontrar a equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 18xy$

no ponto $P(4,8)$ podemos utilizar que $y' = \frac{18y - 3x^2}{3y^2 - 18x}$, conforme vimos no exemplo

3. Daí, $y'(4) = \frac{18 \cdot 8 - 3 \cdot 4^2}{3 \cdot 8^2 - 18 \cdot 4} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$ que é o coeficiente angular da reta tangente

ao Fólio de Descartes em $P(4,8)$. Portanto, a equação da reta tangente é dada por

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - 8 = \frac{4}{5}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{24}{5}.$$

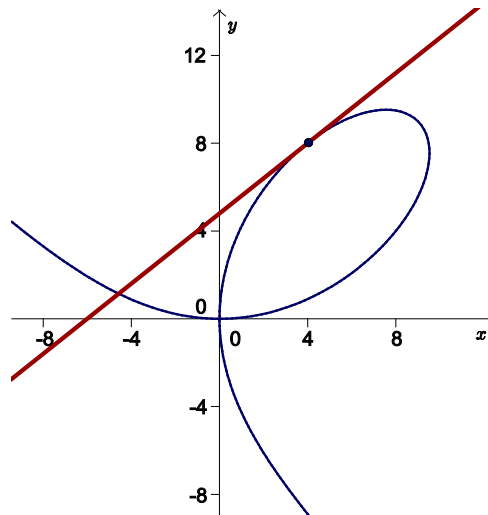


Figura 2: Tangente à curva $x^3 + y^3 = 18xy$ em $P(4,8)$.

Exemplo 5: Suponhamos que a equação $3y^4 - x^2 \sin y = 4 - 4x$ define uma função $y = f(x)$ derivável em um determinado intervalo. Para encontrar a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico da equação dada no ponto $(1,0)$

utilizaremos o método de derivação implícita. Assim, para determinar $y' = \frac{dy}{dx}$ em termos de x e y derivamos em relação a x , com o auxílio da regra da cadeia e regra do produto, ambos os lados da equação dada e isolamos $y' = \frac{dy}{dx}$ em função de x e y . Vejamos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[3y^4 - x^2 \operatorname{sen} y] &= \frac{d}{dx}[4 - 4x] \Rightarrow 12y^3 \cdot y' - (2x \cdot \operatorname{sen} y + x^2 \cdot \cos y \cdot y') = -4 \\ \Rightarrow (12y^3 - x^2 \cdot \cos y)y' &= 2x \cdot \operatorname{sen} y - 4 \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot \operatorname{sen} y - 4}{12y^3 - x^2 \cdot \cos y} \end{aligned}$$

Daí, o coeficiente angular da reta tangente à curva dada no ponto $(1,0)$ é $y'(1) = 4$. Logo, a equação da reta tangente é dada por $y - 0 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 4$.

Já o coeficiente angular da reta normal à curva dada no ponto $(1,0)$ vale $-\frac{1}{4}$ e, portanto, a equação da reta normal é dada por $y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

3.5 Derivadas de Ordem Superior

Se f é uma função derivável, então f' também é uma função que pode ter sua própria derivada. Se f' for derivável, a derivada de f' é denominada *derivada segunda de f* , e representada pelo símbolo f'' . Daí,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \stackrel{\text{notação}}{=} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

De modo análogo, podemos definir a derivada de f'' , denominada *derivada terceira de f* , representada por f''' .

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}[f''(x)] \quad \text{ou} \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \stackrel{\text{notação}}{=} \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Continuando o processo, obtemos *derivadas de ordem superior de f* . A derivada de ordem n ou *enésima derivada de f* , representada por $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$, é obtida derivando a derivada de ordem $n-1$, ou seja,

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right), \text{ para } n \geq 1.$$

sendo $y^{(0)} = \frac{d^0 y}{dx^0} = y$, ou seja, a derivada de ordem zero de uma função é a própria função. Existem várias formas de representar derivadas de ordem superior, como vemos a tabela a seguir.

Notações para Derivadas de Ordem Superior

Derivada primeira	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$	$D_x[y]$
Derivada segunda	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$	$D_x^2[y]$
Derivada terceira	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$	$D_x^3[y]$
Derivada quarta	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$	$D_x^4[y]$
Derivada enésima	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^n y}{dx^n}$	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$	$D_x^n[y]$

Exemplo 1: Dado que $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x$ vamos determinar $f^{(n)}(x)$, para todo, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 9x^2 - 12x + 1,$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = 18x - 12,$$

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = 18,$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 4$$

Exemplo 2: Seja $f(x) = \frac{1}{3x+1} = (3x+1)^{-1}$. Vamos encontrar f' , f'' e f''' .

Vejamos:

$$f'(x) = -1(3x+1)^{-2} \cdot 3 = \frac{-3}{(3x+1)^2},$$

$$f''(x) = (-3) \cdot (-2) \cdot (3x+1)^{-3} \cdot 3 = 18(3x+1)^{-3} = \frac{18}{(3x+1)^3},$$

$$f'''(x) = 18 \cdot (-3) \cdot (3x+1)^{-4} \cdot 3 = -162(3x+1)^{-4} = \frac{-162}{(3x+1)^4}$$

Exemplo 3: Dado que $f(x) = \text{sen } x$ vamos determinar

$f^{(n)}(x)$, para todo, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Vejamos:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) = \text{sen } x \\ f^{(1)}(x) &= f'(x) = \text{cos } x \\ f^{(2)}(x) &= f''(x) = -\text{sen } x \\ f^{(3)}(x) &= f'''(x) = -\text{cos } x \end{aligned} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{sen } x & ; \quad n = 0, 4, 8, \dots \\ \text{cos } x & ; \quad n = 1, 5, 9, \dots \\ -\text{sen } x & ; \quad n = 2, 6, 10, \dots \\ -\text{cos } x & ; \quad n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

ou, equivalentemente, $f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Para encontrar f' e f'' procedemos da seguinte forma:

- para $x < 1$, $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$;
- para $x > 1$, $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$;
- para $x = 1$ temos que aplicar a definição. Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ pois,

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

e

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0$$

decorre que não existe $f'(1)$.

Portanto, a função f' é definida por $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

De forma análoga, para determinar f'' procedemos da seguinte forma:

- para $x < 1$, $f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$;

- para $x > 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 0$;
- para $x = 1$ temos que não existe $f''(1)$ pois f não é derivável em $x = 1$.

Portanto, a função f'' é definida por $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Exemplo 5: Considere a equação $x^4 + 3y^4 = 16$. Vamos calcular, por derivação implícita, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ admitindo que y define implicitamente uma função duas vezes derivável de x . Vejamos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^4 + 3y^4] &= \frac{d}{dx}[16] \Rightarrow 4x^3 + 12y^3 \cdot y' = 0 \\ \Rightarrow y' &= \frac{-4x^3}{12y^3} = \frac{-x^3}{3y^3} \end{aligned}$$

Assim, conseguimos calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ expressa em termos de x e y . Agora, repetimos o método de derivação implícita na nova equação $y' = \frac{-x^3}{3y^3}$. Observe que, inicialmente, para o cálculo da derivada do quociente $\frac{-x^3}{3y^3}$, aplicamos a regra do quociente e, para a potência y^3 , a regra da cadeia. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[y'] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{-x^3}{3y^3}\right] \Rightarrow y'' = \frac{(-3x^2) \cdot (3y^3) - (-x^3) \cdot 9y^2 \cdot y'}{(3y^3)^2} \\ \Rightarrow y'' &= \frac{-9x^2y^3 + 9x^3y^2y'}{9y^6} = \frac{-x^2}{y^3} + \frac{x^3y'}{y^4} \\ \Rightarrow y'' &\stackrel{(*)}{=} \frac{-x^2}{y^3} + \frac{x^3}{y^4} \cdot \left(\frac{-x^3}{3y^3}\right) = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{x^6}{3y^7} = -x^2 \left[\frac{3y^4 + x^4}{3y^7}\right] \end{aligned}$$

Portanto, $y'' = -x^2 \left[\frac{3y^4 + x^4}{3y^7}\right]$ é a derivada segunda expressa em termos de x e y .

(*) Utilizamos a relação já encontrada para a derivada primeira expressa em termos de

$$x \text{ e } y \text{ que vale } y' = \frac{-x^3}{3y^3}.$$

3.6 Derivadas de Funções Inversas

Nas seções 3.2 e 3.3, aprendemos como derivar a função exponencial e as funções trigonométricas. Agora, aprenderemos uma regra para derivar a inversa de uma função derivável e aplicaremos tal regra para encontrar a derivada da função logarítmica (inversa da função exponencial), bem como as derivadas das funções trigonométricas inversas.

Teorema 1 (Regra da derivada da função inversa): Seja f uma função definida em um intervalo aberto I . Suponhamos que f admite uma função inversa g , isto é, $y = f(x)$ se, e somente se, $x = g(y)$. Se f é derivável em I e $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, então $g = f^{-1}$ é derivável e vale

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}, \text{ ou equivalentemente, } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demonstração: Considerando que g é a inversa de f (isto é, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$) temos, derivando implicitamente em relação a x , a equação

$$x = g(y), \quad \frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}[g(y)] \Leftrightarrow 1 = g'(y) \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow g'(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Como $y = f(x)$ e $x = g(y)$ então $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, $\frac{dx}{dy} = g'(y)$ e $f'(x) = f'(g(y))$. Daí,

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}} \text{ ou, equivalentemente, } \boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}}.$$

Exemplo 1: Se f é a função definida por $y = f(x) = 8x^3$, sabemos que sua inversa é a função $g = f^{-1}$ definida por $x = g(y) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$. Como $f'(x) = 24x^2 \neq 0$ para todo $x \neq 0$ temos que, se tomarmos I sendo um intervalo aberto que não contenha a origem, como por exemplo $I = (0, +\infty)$, a derivada de $g = f^{-1}$ é

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{24[g(y)]^2} = \frac{1}{24\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}\right]^2} = \frac{1}{6}y^{-2/3}, \quad \forall y \in I$$

Observação 1: A letra do alfabeto utilizada para representar a variável de uma função não é relevante. No exemplo 1, é comum dizermos que a inversa da função $f(x) = 8x^3$ é a função $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ cuja derivada é dada por $g'(x) = \frac{1}{6}x^{-2/3}$, $\forall x \in I$, onde usamos como variável, a letra x no lugar de y .

Teorema 2 (Derivada da função logarítmica): Se $y = \log_a x$, ($a > 0$ e $a \neq 1$), então

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Demonstração: Sabemos que se $y = \log_a x$ então $a^y = x$. Derivando implicitamente em relação a x a equação $a^y = x$ e utilizando a consequência 8 da regra da cadeia temos $\frac{d}{dx}[a^y] = \frac{d}{dx}[x] \Rightarrow a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Em particular se $a = e$ temos a função $y = \log_e x = \ln x$ e a derivada será $y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$.

Teorema 3 (Derivada da função inversa do seno): Se $y = \arcsen x$, então

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração: Sabemos que a função inversa da função seno é definida por $y = \arcsen x \Leftrightarrow \sen y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Derivando implicitamente em relação a x a equação $\sen y = x$ obtemos

$$\frac{d}{dx}[\sen y] = \frac{d}{dx}[x] \Leftrightarrow (\cos y) y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Precisamos, agora, escrever $\cos y$ em função de x . Para isso, usaremos a relação trigonométrica $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ que resulta $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Uma vez que $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ temos que $\cos y \geq 0$. Daí, $\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y}$ e como $\sin y = x$, então $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\text{Portanto, } y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ ou seja, } \frac{d}{dx}(\arcsen x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Teorema 4 (Derivada da função inversa do cosseno): Se $y = \arccos x$, então

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração: Sabemos que a função inversa da função cosseno é definida por $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ e $0 \leq y \leq \pi$.

Derivando implicitamente em relação a x a equação $\cos y = x$ obtemos

$$\frac{d}{dx}[\cos y] = \frac{d}{dx}[x] \Leftrightarrow (-\sin y)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin y}.$$

Uma vez que $0 \leq y \leq \pi$ temos que $\sin y \geq 0$. Daí,

$$\sin y = +\sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{Portanto, } y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ou seja, } \frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Teorema 5 (Derivada da função inversa da tangente): Se $y = \arctg x$, então

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demonstração: Sabemos que a função inversa da função tangente é definida por $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Derivando implicitamente em relação a x a equação $\operatorname{tg} y = x$ obtemos

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} y] = \frac{d}{dx}[x] \Leftrightarrow (\sec^2 y) y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Uma vez que $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$ e $\operatorname{tg} y = x$, segue que

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ ou seja, } \frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Observação 2: De forma análoga, podemos derivar a função inversa da secante, cossecante e cotangente.

Supondo $u = g(x)$ uma função derivável, podemos deduzir também outras consequências da regra da cadeia relacionadas com as funções inversas, a saber:

- (1) $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot u'$
- (2) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
- (3) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccos} u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
- (4) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arctg} u] = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Exemplo 2: Para derivar $y = \operatorname{arcsen} x^3$ aplicamos a regra

$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, juntamente com a regra do quociente. Daí,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} x^3] = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Exemplo 3: Para derivar $y = \ln \sqrt{1+x^2}$ aplicamos as regras $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot u'$ e

$\frac{d}{dx}[u^\alpha] = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\ln \sqrt{1+x^2}] &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot [\sqrt{1+x^2}]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot [1+x^2]^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1+x^2)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot [1+x^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Exemplo 4: Para derivar $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ aplicamos a regra

$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$, juntamente com a regra do quociente. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \right] &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} \cdot \left[\frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \right] \\ &= \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2} \cdot \left[\frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \right] \\ &= \frac{(1+x^2)^2}{1+2x^2+x^4+1-2x^2+x^4} \cdot \left[\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2} \right] = \frac{-4x}{2+2x^4} = \frac{-2x}{1+x^4} \end{aligned}$$

Agora, vamos apresentar um resumo das principais fórmulas de derivadas vistas até o momento.

3.7 TABELA GERAL DE DERIVADA

Na tabela que se segue u, v são funções deriváveis de x e c, α, a são constantes reais.

- (1) $y = c \Rightarrow y' = 0$
- (2) $y = x \Rightarrow y' = 1$
- (3) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$
- (4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$
- (5) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- (6) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
- (7) $y = u^\alpha \Rightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', (\alpha \neq 0)$
- (8) $y = a^u \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u', (a > 0, a \neq 1)$
- (9) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$
- (10) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u', (a > 0, a \neq 1)$
- (11) $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
- (12) $y = \operatorname{sen} u \Leftrightarrow y' = (\operatorname{cos} u) \cdot u'$
- (13) $y = \operatorname{cos} u \Leftrightarrow y' = (-\operatorname{sen} u) \cdot u'$
- (14) $y = \operatorname{tg} u \Leftrightarrow y' = (\sec^2 u) \cdot u'$
- (15) $y = \operatorname{sec} u \Leftrightarrow y' = (\operatorname{sec} u \cdot \operatorname{tg} u) \cdot u'$
- (16) $y = \operatorname{cotg} u \Leftrightarrow y' = (-\operatorname{cosec}^2 u) \cdot u'$
- (17) $y = \operatorname{cosec} u \Leftrightarrow y' = (-\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u) \cdot u'$
- (18) $y = \operatorname{arcsen} u \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
- (19) $y = \operatorname{arccos} u \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
- (20) $y = \operatorname{arctg} u \Leftrightarrow y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Teste o seu conhecimento

1. Ache os pontos da curva $y = \sin(3x)$ nos quais a tangente é horizontal.
2. Encontre $\frac{dy}{dx}$ supondo que a equação dada determina y implicitamente como uma função derivável de x .

2.1. $2^{xy} + \ln(y-4) = \sin x \cos y$

2.2. $(\arctg x^3)^5 + 3x = y^4 - x$

2.3. $\sin y^3 + e^y = (x^3 - 6)^4$

3. Encontre a derivada das seguintes funções:

3.1. $f(x) = (8x-7)^{-5}$

3.2. $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^4}$

3.3. $f(x) = \left(\frac{3x+4}{6x-7}\right)^3$

3.4. $f(x) = (2x^2 - 9x + 8)^{\frac{2}{3}}$

3.5. $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)^2 (3x + 2)^4$

3.6. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 3}$

3.7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$

3.8. $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 3})^6$

3.9. $f(x) = (\sqrt[5]{4x+1})^3 \sqrt{(3x^2+2)^2}$

3.10. $f(x) = e^{(2x^5-7)}$

3.11. $f(x) = e^{\sin(7x^3-3)}$

3.12. $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

3.13. $f(t) = \cos(5t^5 - 7)$

3.14. $f(x) = \operatorname{tg}(e^x)$

3.15. $f(x) = \cos(\ln x)$

3.16. $f(x) = \sin(x^5 - 7)$

3.17. $f(x) = \sin^3 x$

3.18. $f(x) = \sin x^3$

3.19. $f(x) = \sin^3 x^3$

3.20. $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)}$

3.21. $f(x) = e^{2x+3} \sin(4x)$

3.22. $f(t) = \ln\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$

3.23. $f(t) = \arctg \sqrt{1+t^2}$

3.24. $f(x) = \ln[\arctg x^2]$

4. Esboce os gráficos de f e f' .

4.1. $f(x) = x^2 |x|$;

$$4.2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 5x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

5. Determine, se existir, a derivada da função f nos pontos indicados a , b e c . Caso não exista, justifique.

$$5.1. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x < 0 \\ 2x - 3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 2, \quad c = 1;$$

$$5.2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 2, \quad c = 1;$$

$$5.3. \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad a = 0, \quad b = -3, \quad c = 3;$$

$$5.4. \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad a = -2, \quad b = 2, \quad c = 5$$

$$5.5. \quad f(x) = |x - 5| \quad a = 5, \quad b = 0, \quad c = -3$$

6. Encontre os valores de x para os quais a derivada das seguintes funções é igual a zero.

$$6.1. \quad f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 3x - 7$$

$$6.2. \quad f(x) = e^x$$

$$6.3. \quad f(x) = \cos x$$

$$6.4. \quad f(x) = \operatorname{tg} x$$

7. Dada a função f abaixo determine $D(f)$, $f'(x)$ e $D(f')$

$$7.1. \quad f(x) = \sqrt{x - 5}$$

$$7.2. \quad f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$7.3. \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

$$7.4. \quad f(x) = 15^{2x}$$

$$7.5. \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < -1 \\ 2x + 3 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

8. Seja f a função definida por $f(x) = \sqrt{4-x}$. Verifique se

8.1. é derivável no intervalo $[0, 4]$;

8.2. f é derivável no intervalo $[1, 3]$;

9. Calcule $f''(x)$ das seguintes funções:

9.1. $f(x) = (7x^2 + 6x)^7$

9.2. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

9.3. $f(x) = e^{1-x}$

9.4. $f(x) = \frac{1}{x-4}$

9.5. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

9.6. $f(x) = \frac{2x}{3x-3}$

10. Calcule $f^{(4)}(x)$ das seguintes funções:

10.1. $f(x) = 7x^5 - 4x^4$

10.2. $f(x) = \sqrt{3-4x}$

11. Verifique os intervalos onde as derivadas de segunda ordem das seguintes funções são positivas e negativas.

11.1. $f(x) = e^{2x}$

11.2. $f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 3x - 7$

11.3. $f(x) = 2x^2 - 4$

12. Dada a função $f(x) = (x-1)^3$ determine:

12.1. os valores de x para os quais $f'(x) = 0$;

12.2. intervalos onde $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$;

12.3. os valores de x para os quais $f''(x) = 0$;

12.4. intervalos onde $f''(x) > 0$ e $f''(x) < 0$;

CAPÍTULO 4. APLICAÇÕES DA DERIVADA

4.1 Taxa de Variação

Vimos que a interpretação geométrica da derivada de uma função f em um ponto $P(a, f(a))$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em P . Agora veremos que a derivada de uma função f pode ser interpretada como uma "taxa de variação de f em relação a x " em um ponto $(x, f(x))$. Veremos que existem muitas aplicações práticas da taxa de variação, como por exemplo, velocidade, aceleração, taxa de crescimento de uma população e outras.

A taxa de variação pode ser de dois tipos: taxa de *variação média* e taxa de *variação instantânea*. Para introduzirmos essas taxas e analisarmos a diferença entre elas, necessitamos de definições e algumas notações específicas.

Relembramos que o símbolo Δ (delta) quando escrito na frente de uma variável significa a diferença entre dois valores desta variável. Assim, a notação padrão para representar a variação de uma variável x é Δx (leia-se "delta x "), de modo que $\Delta x = x_1 - x_0$ (valor final de x menos o valor inicial de x) representa a variação em x ao se passar do primeiro valor para o segundo. Também vale ressaltar que Δx não é o produto de um número Δ por um número x , mas um único número, que poderá ser positivo ou negativo, denominado *variação de x ou incremento de x* . Podemos considerar também $x_1 = x_0 + \Delta x$. Se $y = f(x)$ e a variável independente muda de x_0 para $x_1 = x_0 + \Delta x$ então podemos definir Δx e Δy da seguinte maneira:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = (x_0 + \Delta x) - x_0 \quad \text{e} \quad \Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Note que, neste caso, o valor de Δy depende de x_0 e de Δx .

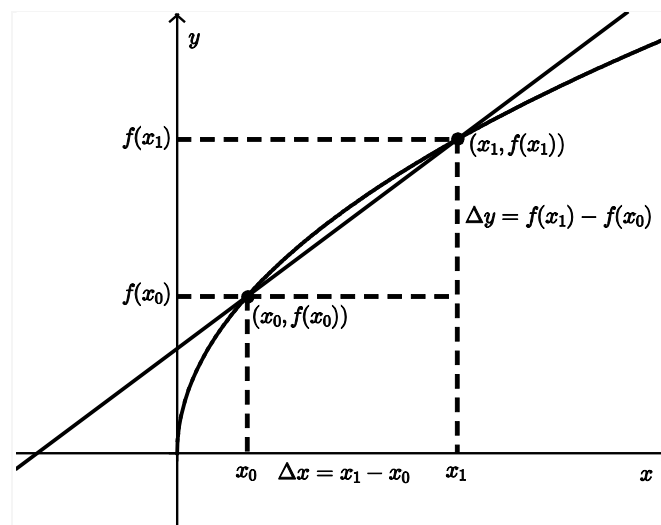


Figura 1: Representação gráfica de Δx e Δy

Vamos agora analisar o comportamento de uma partícula que se move no plano numa trajetória qualquer, retilínea ou não. Seja s o espaço percorrido pela partícula até certo instante de tempo t . Como s é uma função do tempo, escreveremos $s = s(t)$. Agora vamos considerar o movimento durante um intervalo de tempo Δt , isto é, entre um intervalo de tempo t e outro instante subsequente $t + \Delta t$. Consequentemente, o espaço s sofrerá uma variação correspondente Δs . Essa variação, dada por $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, é o espaço percorrido desde o instante t até o instante $t + \Delta t$. A velocidade média V_m , nesse intervalo de tempo que vai de t a $t + \Delta t$, é definida como sendo igual ao quociente da variação do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo, isto é, $v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Exemplo 1: A função s , definida por $s(t) = 10t^2$, $0 \leq t \leq 4$, fornece a distância, em km, em linha reta, que um motorista de caminhão se encontra do local de partida após t horas. Assim,

- no intervalo de $t = 2,8$ a $t = 3$ horas a taxa média de variação no espaço é $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2,8)}{3 - 2,8} = \frac{90 - 78,4}{0,2} = 58$ km/h que é a velocidade média no intervalo de 2,8 a 3 horas.
- no intervalo de $t = 2,9$ a $t = 3$ horas a taxa média de variação no espaço é $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2,9)}{3 - 2,9} = \frac{90 - 78,4}{0,1} = 59$ km/h que é a velocidade média no intervalo de 2,9 a 3,0 horas.
- no intervalo de $t = 3$ a $t = 3,2$ horas a taxa média de variação no espaço é $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3,2) - s(3)}{3,2 - 3} = \frac{102,4 - 90}{0,2} = 62$ km/h que é a velocidade média no intervalo de 3,0 a 3,2 horas.

Sabemos que a velocidade do carro varia durante o percurso, isto é, o carro tem sua velocidade aumentada ou diminuída durante o intervalo de tempo considerado. Daí, a velocidade média pode não ser igual à velocidade mostrada no velocímetro no instante t (velocidade instantânea). Por exemplo, como podemos saber exatamente qual é a velocidade (velocidade instantânea) do carro no instante $t = 3$? Para isso vamos calcular a velocidade média em intervalos de tempo Δt cada vez menores e próximos de $t = 3$. Vejamos alguns dados em uma tabela.

Intervalo de tempo	Δt (h)	Δs (km)	$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (km/h)
$2,8 \leq t \leq 3$	0,2	11,6	58

$2,9 \leq t \leq 3$	0,1	5,9	59
$2,99 \leq t \leq 3$	0,01	0,599	59,9
$2,999 \leq t \leq 3$	0,001	0,05999	59,99
$3 \leq t \leq 3,2$	0,2	12,4	62
$3 \leq t \leq 3,1$	0,1	6,1	61
$3 \leq t \leq 3,01$	0,01	0,601	60,1
$3 \leq t \leq 3,001$	0,001	0,060	60,01

Com base na tabela acima, podemos observar que, quanto menor for o valor de $\Delta t > 0$, a velocidade média $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, em intervalos de tempo do tipo $[3, 3 + \Delta t]$ ou $[3 - \Delta t, 3]$, torna-se cada vez mais próxima de 60 km/h. Assim, a estimativa para velocidade exata (velocidade instantânea) no momento $t = 3$ horas será $v(3) \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx 60$ km/h.

Em geral, para caracterizarmos o estado do movimento num dado instante t , vamos imaginar intervalos de tempo Δt cada vez menores, para que as velocidades médias correspondentes possam dar informações cada vez mais precisas do que se passa neste instante. A velocidade média $v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ torna-se cada vez mais próxima da velocidade instantânea, $v = v(t)$, no instante t , quanto menor for o valor Δt . Assim, $v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$, e essa aproximação será cada vez melhor quanto menor for o valor Δt . Isto nos leva ao conceito de *velocidade instantânea*, $v = v(t)$, no instante t , como sendo $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$, isto é, a *velocidade instantânea* no instante t ou, simplesmente, *velocidade* no instante t , é a derivada do espaço em relação ao tempo no instante t .

Exemplo 2: A função s , definida por $s(t) = 10t^2$, $0 \leq t \leq 4$, fornece a distância, em km, em linha reta, que um motorista de caminhão se encontra do local de partida após t horas. Para obter a velocidade exata em $t = 3$ (velocidade instantânea), observamos os valores da velocidade média nas vizinhanças de $t = 3$, com intervalos cada vez menores, isto é, quando Δt se aproxima de zero ($\Delta t \rightarrow 0$). O valor exato da velocidade no instante $t = 3$ é dado por $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = 20t$.

Logo, para $t=3$ tem-se que $v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(3) = 20 \cdot 3 = 60$ km/h.

Este resultado está de acordo com o que vimos no exemplo 1.

Observamos que a velocidade média é a razão entre duas variações, que denominamos de taxa de variação média, conforme definição a seguir.

Definição 1: Se $y = f(x)$, a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ é dada pela razão das variações, isto é

$$\text{Taxa de variação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

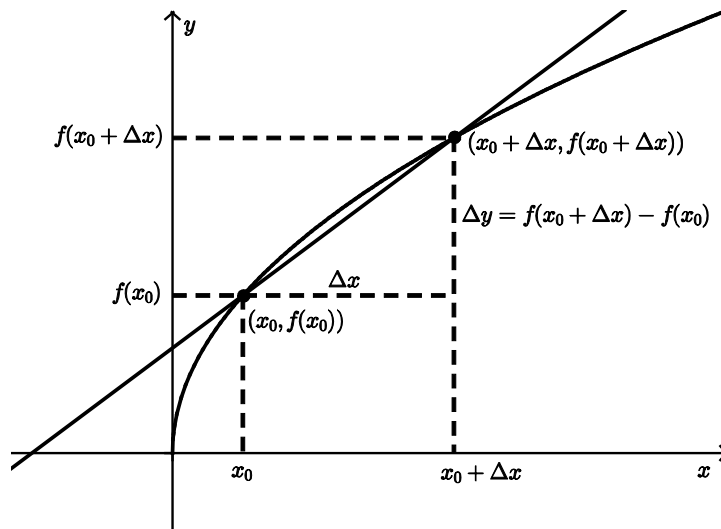


Figura 2: Taxa de variação média

Definição 2: Se $y = f(x)$, a taxa de variação instantânea ou, simplesmente, taxa de variação de y em relação a x em um ponto $(x, f(x))$ é dada pela seguinte expressão:

$$\text{Taxa de variação} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemplo 3: Sabemos que a inclinação da reta r que passa pelos pontos

(x_0, y_0) e (x_1, y_1) é dada por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x}$.

Então é possível expressar a inclinação de uma reta como quociente de dois incrementos. Ao fazermos isto estamos considerando a inclinação de uma reta como uma taxa de variação média de y em relação a x . Note que $m = \operatorname{tg} \alpha$, conforme ilustra a figura 3.

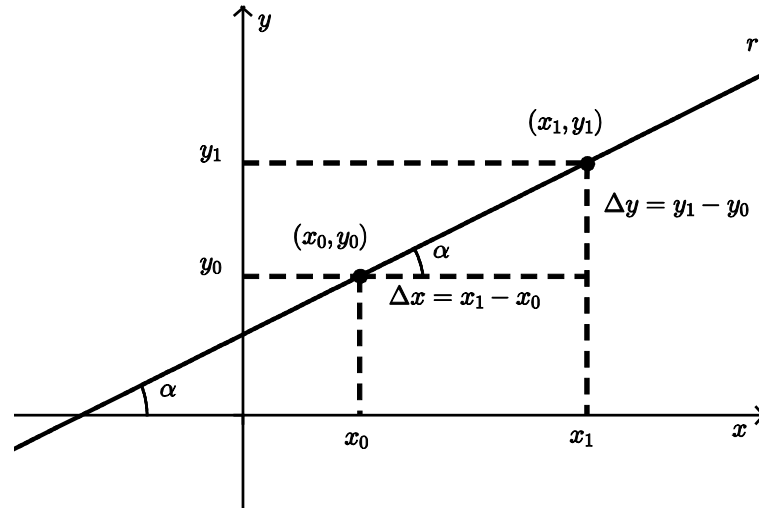


Figura 3: Inclinação de uma reta

Em particular, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é a taxa de variação instantânea de uma variável em relação à outra, no ponto $(x_0, f(x_0))$ e isto é exatamente a derivada de f , calculada em x_0 .

Observação 1: Nos problemas práticos, é importante definir a unidade que será utilizada para medir a taxa de variação. Uma taxa de variação do tipo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é sempre medida em “unidades de y ” por “unidades de x ”. Assim, por exemplo, se y é medido em quilômetros e x é medido em horas, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é medido em quilômetros por hora. Também é conveniente usar t com sendo a variável independente, em lugar de x , quando a variável independente está relacionada com o tempo.

Exemplo 4: Em 2010, a população mundial era de 6,908 bilhões de habitantes, conforme dados divulgados pelo Fundo de População das Nações Unidas. A projeção feita para 2050 é de que habitarão o planeta 9,1 bilhões de pessoas. Determine a taxa de variação média da população mundial em relação a t , $\frac{\Delta P}{\Delta t}$, no intervalo $[2010, 2050]$.

Solução: Como a população mundial em 2010 era de 6,908 bilhões e a projeção para 2050 é de 9,1 bilhões, então a variação da população será dada por $\Delta P = 9,1 - 6,908 = 2,192$ e a variação do tempo será $\Delta t = 2050 - 2010 = 40$.

Portanto, a taxa de variação média da população mundial em relação a t , no intervalo $[2010, 2050]$, é dada por $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2,192}{40} = 0,05$ bilhões/ano.

Exemplo 5: Numa experiência controlada, a área total utilizada para certa cultura é anotada a cada hora. Um estudante obtém experimentalmente a seguinte tabela:

Área de criação (cm ²)	320	500	600	540	504
tempo (hora)	0	12	24	36	48

No intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 12$ a taxa média de variação na área é

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{500 - 320}{12 - 0} = 15 \text{ cm}^2/\text{h}$$

No intervalo de tempo de $t = 24$ a $t = 36$ a taxa média de variação na área é

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{540 - 600}{36 - 24} = -5 \text{ cm}^2/\text{h}$$

O significado da taxa de variação negativa indica que a quantidade desta cultura está diminuindo.

Observação 2: Uma aplicação comum da taxa de variação média é a determinação da velocidade média de um corpo que está se movendo em linha reta.

Temos $\text{velocidade média} = \frac{\text{variação da distância}}{\text{variação do tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ é uma taxa média de variação. Quando passamos ao limite com $\Delta t \rightarrow 0$ obtemos a velocidade instantânea ou velocidade no instante t . $\text{velocidade} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ que é uma taxa de variação instantânea.

Exemplo 6: Uma pedra é lançada verticalmente do solo, para cima, com velocidade inicial de 112m/s. Após t segundos, sua distância do solo é dada por $s(t) = 112t - 4,9t^2$.

Determine:

- a velocidade v da pedra, quando $t=3$ segundos;
- o instante em que a velocidade da pedra é zero;
- a velocidade da pedra ao atingir o solo.

Solução: Sabemos que $v(t) = \frac{ds}{dt} = 112 - 9,8t$. Portanto, $v(3) = \frac{ds}{dt} = 82,6$ m/s

é a velocidade da pedra quando $t=3$ segundos.

Basta resolver a equação $v(t) = \frac{ds}{dt} = 112 - 9,8t = 0$ cuja solução é $t=11,4$ segundos.

Inicialmente, devemos determinar os instantes em que $s(t) = 112t - 4,9t^2 = 0$, ou seja, $t(112 - 4,9t) = 0 \Leftrightarrow t=0$ ou $t=22,9$ segundos. Daí, a velocidade da pedra ao

atingir o solo é dada por $v(22,9) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=22,9} = -112$ m/s.

O significado da velocidade negativa indica que a pedra está descendo e atinge o solo à velocidade de 112 m/s.

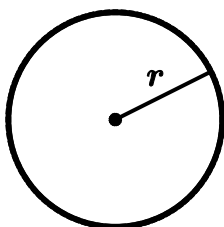
Observação 3: Observe a relação existente entre o sinal da derivada e o crescimento ou decréscimo de uma função. Note que, se uma função é crescente então sua derivada é positiva ou zero, ou seja, a "taxa de variação" é positiva ou zero e sendo decrescente sua derivada é negativa ou zero. Este fato será estudado posteriormente com maiores detalhes.

4.2 Taxas Relacionadas

O problema que relaciona duas ou mais variáveis que dependem de outra variável independente, por exemplo, o tempo t , é chamado de problema de taxas relacionadas.

Exemplo 1: O raio de uma circunferência cresce à taxa de 21 cm/s. Determine a taxa que aumenta o comprimento da circunferência.

Solução: Sejam r o raio da circunferência, em centímetros (cm), t o tempo, em segundos (s) e C o



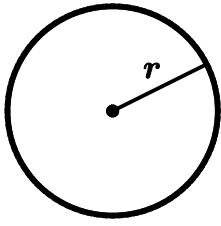
comprimento da circunferência, em cm. Observe que, à medida que o tempo passa, o raio e o comprimento aumentam, de modo que o raio $r = r(t)$ e $C = C(t)$ são dados em função de t . Sabemos que as variáveis $r = r(t)$ e $C = C(t)$ estão relacionadas por meio da fórmula $C(t) = 2\pi r(t)$. Além disso, a informação que o raio cresce à taxa de 21 cm/s, significa que $\frac{dr}{dt} = 21$ cm/s. Precisamos determinar a que taxa aumenta o comprimento da circunferência, isto é, $\frac{dC}{dt}$. Derivando implicitamente, em relação a t , a equação $C(t) = 2\pi r(t)$, encontramos uma nova equação que envolve as taxas de variação, isto é, $\frac{dC}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}$ (as taxas estão relacionadas).

Agora, considerando que $\frac{dr}{dt} = 21$, temos $\frac{dC}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot 21 = 42\pi \approx 42 \cdot 3,14 = 131,95$ cm/s, isto é, a taxa com que o comprimento da circunferência aumenta é de, aproximadamente, 131,95 cm/s e independe, neste caso, do raio.

Diretrizes para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas.

- **Passo 1:** Desenhe, se possível, uma figura e identifique as variáveis e as constantes. Use t para tempo. Considere que todas as variáveis são funções deriváveis de t ;
- **Passo 2:** Expresse todas as informações numéricas dadas em termos dos símbolos que você escolheu;
- **Passo 3:** Expresse o que você deseja determinar, geralmente uma taxa, em termos da derivada;
- **Passo 4:** Obtenha uma equação que relacione as variáveis do problema. Talvez você possa combinar duas ou mais equações para conseguir uma única,
- **Passo 5:** Derive implicitamente, em relação a t , a equação encontrada no passo 4. Neste caso, será encontrada uma nova equação que envolve as taxas de variação (taxas relacionadas);
- **Passo 6:** Expresse a taxa que você deseja determinar em termos das taxas e variáveis cujos valores são conhecidos;
- **Passo 7:** Substitua as informações numéricas dadas na equação obtida no passo 6 para encontrar a taxa desconhecida. Estes valores numéricos devem ser introduzidos somente no estágio final do processo de resolução do problema.

Exemplo 2: Quando uma chapa metálica circular é aquecida, seu raio aumenta a uma taxa de 0,01cm/min. Determine a que taxa a área da chapa aumenta quando seu raio é de 50cm.



Solução: Inicialmente, identificamos no problema as variáveis e as constantes. Sejam t o tempo, em minutos, r o raio, em cm, e A a área, em cm^2 , da chapa metálica circular. Observe que, à medida que o tempo passa, o raio e a área aumentam, de modo que o raio $r = r(t)$ e $A = A(t)$ são funções de t relacionadas pela equação $A = A(t) = \pi[r(t)]^2$.

Além disso, a informação que o raio cresce à taxa de $0,01\text{cm}/\text{min}$, significa que $\frac{dr}{dt} = 0,01$ cm/min. Precisamos determinar a que taxa aumenta a área da chapa

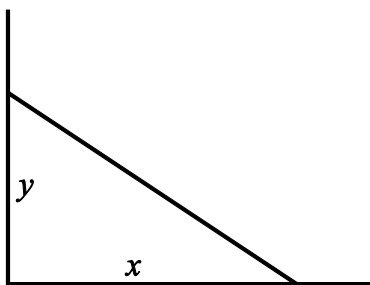
$A = A(t)$ quando seu raio é de 50 cm, isto é, $\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=50}$. Derivando implicitamente, em

relação a t , a equação $A = \pi r^2$, encontramos uma nova equação que envolve as taxas de variação, isto é, $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ (as taxas estão relacionadas).

Agora, considerando que $\frac{dr}{dt} = 0,01$, temos $\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=50} = 2\pi \cdot (50) \cdot (0,01) = \pi$ cm^2/min .

Observe que, neste caso, a taxa de variação da área depende, não apenas da taxa de variação do raio, mas também, do próprio raio.

Exemplo 3: Uma escada com 25m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada deslizar horizontalmente, afastando da parede à taxa de $3\text{m}/\text{s}$, com que velocidade o topo da escada está deslizando, quando sua base está a 15m da parede?



Solução: Inicialmente, vamos identificar as variáveis e as constantes do problema. Denotemos por t o tempo medido em segundos, a variável y como sendo a distância, em metros, do chão ao topo da escada e por x a distância, em metros, da base da escada à parede.

Pelas informações dadas no problema, podemos escrever $\frac{dx}{dt} = 3$ m/s. Precisamos determinar $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=15}$. Pelo Teorema de Pitágoras

podemos relacionar as variáveis $x = x(t)$ e $y = y(t)$ pela equação $(25)^2 = x^2 + y^2$.

Derivando implicitamente, em relação a t , encontramos

$$\frac{d}{dt}[(25)^2] = \frac{d}{dt}[x^2 + y^2] \Leftrightarrow 0 = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\text{ou, equivalentemente, } \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{\sqrt{625 - x^2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Substituindo as informações numéricas dadas

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=15} = \frac{-15}{\sqrt{625 - (15)^2}} \cdot 3 = -\frac{9}{4} = -2,25 \text{ m/s.}$$

Exemplo 4: Um reservatório tem a forma de um cone circular reto invertido, com 16m de altura e 4m de raio da base. Se a água entra no reservatório a uma taxa de $2\text{m}^3/\text{min}$, com que velocidade o nível da água estará subindo quando a profundidade é de 5m?

Solução: Sejam t o tempo decorrido, em minutos, desde que a água começou a entrar no reservatório, h a altura, em metros, do nível de água em t minutos, r a medida em metros do raio da superfície da água, em t minutos e V a medida, em m^3 , do volume de água, em t minutos. Observe que, à medida que o tempo passa, as variáveis r , h e V aumentam, de modo que $r = r(t)$, $h = h(t)$ e $V = V(t)$ são funções de t relacionadas pela equação $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (volume do cone). Pelos dados do problema podemos escrever $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m}^3/\text{min}$ e precisamos determinar $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=5}$.

Por semelhança de triângulos podemos relacionar as variáveis r e h , obtendo a equação $\frac{4}{r} = \frac{16}{h} \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}h$. Daí, podemos escrever

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{4}h\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{48}h^3$$

Derivando implicitamente, em relação a t , encontramos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\pi}{48} h^3 \right] \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{3\pi}{48} h^2 \cdot \left(\frac{dh}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

Substituindo as informações numéricas dadas temos que

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=5} = \frac{16}{\pi(5)^2} \cdot 2 = \frac{32}{25\pi} \text{ m/min.}$$

Exemplo 5: Um trabalhador ergue um saco de areia de cimento para uma plataforma situada a 12m acima de sua cabeça por meio de um cabo de 24m de comprimento que passa por uma roldana na plataforma. Ele segura firmemente a extremidade da corda ao nível da cabeça e caminha a 1,5m/s, na horizontal, de modo a se afastar do ponto P que está diretamente abaixo da roldana. Com que velocidade o saco de areia está sendo levantado quando o trabalhador está a 9m do ponto P ?

Solução: Fazemos um desenho para modelar o problema. Vejamos:

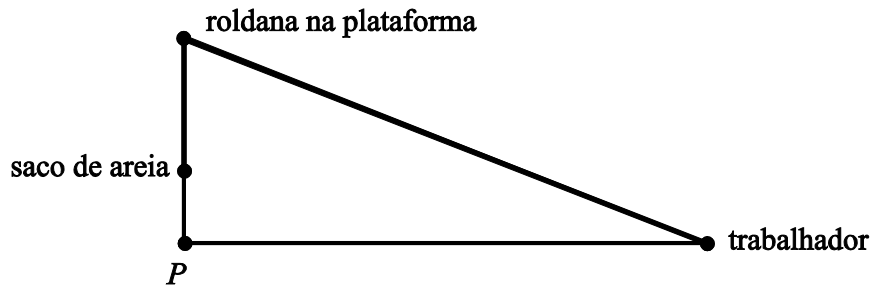


Figura 1: Modelagem do problema

Agora, vamos identificar as variáveis e as constantes. Usando t para tempo, denotamos por y a distância do saco à roldana e, por x , a distância do ponto P ao trabalhador. Observemos que $y = y(t)$ e $x = x(t)$ são funções de t . Além disso, como o cabo tem 24 m de comprimento, temos que a distância do saco de areia ao trabalhador é 24m. Daí, a distância da roldana ao trabalhador de $24 - y$, conforme ilustra a figura 2.

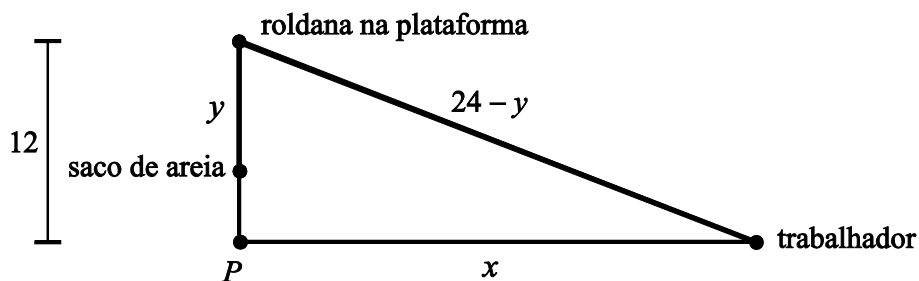


Figura 2: Identificando as variáveis

Pelos dados do problema podemos escrever $\frac{dx}{dt} = 1,5 = \frac{3}{2}$ m/s e precisamos determinar $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=9}$. Pelo Teorema de Pitágoras podemos relacionar as variáveis

$x = x(t)$ e $y = x(t)$, obtendo a equação $(24 - y)^2 = (12)^2 + x^2$. Derivando implicitamente, em relação a t , encontramos

$$\frac{d}{dt}[(24 - y)^2] = \frac{d}{dt}[(12)^2 + x^2] \Leftrightarrow 2(24 - y) \cdot \left(-\frac{dy}{dt}\right) = 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

Expressando a taxa que você deseja determinar em termos das taxas e variáveis cujos valores são conhecidos, temos $\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{24 - y} \cdot \frac{dx}{dt}$ ou, equivalentemente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{\sqrt{144 + x^2}} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Substituindo as informações numéricas dadas

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=9} = \frac{-9}{\sqrt{144 + 9^2}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{10} = -0,9 \text{ m/s}$$

Portanto, a velocidade que o saco de areia está sendo levantado quando o trabalhador está a 9 m do ponto P é de 0,9 m/s. O significado da velocidade negativa indica que a distância y está decrescendo com o tempo, de acordo com a modelagem do problema, o que indica que o saco de areia está subindo. Este problema pode ser modelado de outra forma, o que não altera a resposta do problema.

Teste o seu conhecimento

1. Um pedreiro deixa uma escada de 12 m de comprimento encostada na lateral de um prédio. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razão de 0,8 m/s, qual a velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a 7m do solo?
2. Uma bola de neve desce uma montanha e seu volume aumenta à taxa de $16\text{dm}^3/\text{min}$. Determine a taxa a qual o raio é aumentado quando a bola de neve tem 8 dm de diâmetro.
3. Um móvel parte de um ponto P em direção leste a 4m/s. Um minuto depois, outro móvel parte de P e segue em direção norte a 3m/s. A que taxa está variando a distância entre eles 1 minuto depois da partida do segundo móvel?

4.3 Funções Crescentes e Decrescentes

Vimos que a interpretação geométrica da derivada de uma função f em um ponto $P(a, f(a))$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em P . Este fato nos permite aplicar as derivadas como um auxílio no esboço de gráficos. Por exemplo, a derivada pode ser usada para determinarmos os pontos em que a reta tangente é horizontal; para encontrarmos os intervalos em que o gráfico de uma função está acima ou abaixo da reta tangente, etc.

Antes de aplicarmos a derivada para traçarmos esboço de gráficos necessitamos de algumas definições e resultados.

Definição 1: Seja f uma função definida em um intervalo I . Então

- f é crescente em I se, para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$.
- f é decrescente em I se, para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.
- f é constante em I se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se que $f(x_1) = f(x_2)$.

Em outras palavras, f é crescente em I se, a medida que $x \in I$ aumenta ocorrer também um aumento no valor $f(x)$, e, f é decrescente em I se, à medida que $x \in I$ aumenta ocorrer que o valor $f(x)$ diminui (veja figura 1).

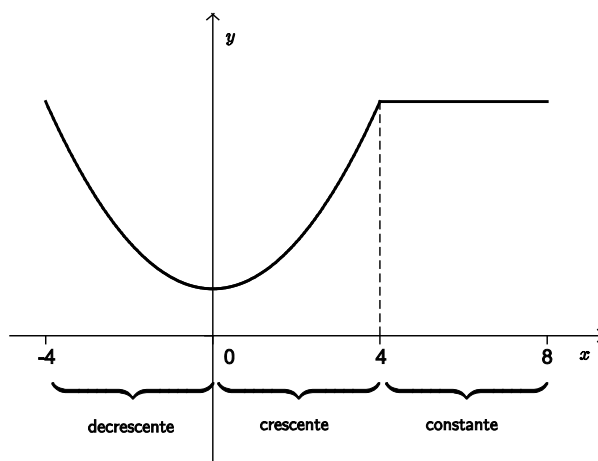


Figura 1: f é decrescente em $[-4,0]$, crescente em $[0,4]$ e constante em $[4,8]$

Teorema 1 (Teorema de Rolle): Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto c , $a < c < b$, tal que $f'(c) = 0$.

Em palavras, este teorema diz que sendo f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) tal que $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um número c entre a e b tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é uma reta horizontal (tem coeficiente angular $f'(c) = 0$).

Teorema 2 (Teorema do Valor Médio (TVM)): Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) . Então existe um número c , no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ou, equivalentemente, } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

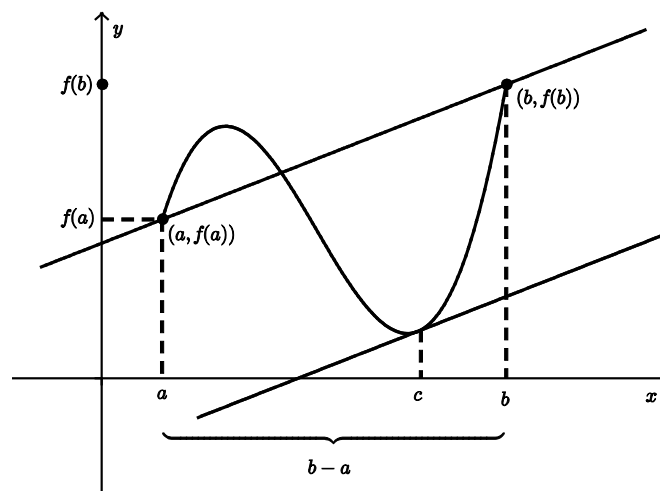


Figura 2: Representação gráfica do TVM

Observe que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Daí, o TVM diz que existe uma reta tangente ao gráfico de f que é paralela a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Agora, considere a figura 4.

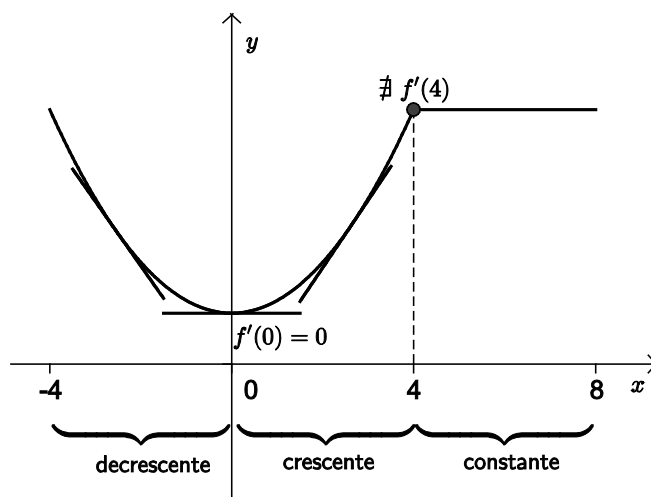


Figura 3: f é decrescente em $[-4,0]$, crescente em $[0,4]$ e constante em $[4,8]$

Podemos observar que, sendo f derivável em um intervalo aberto I (isto é, o gráfico de f admite reta tangente em todos os pontos do intervalo aberto I). Se a declividade da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$, $x \in I$, é negativa, a função f é decrescente em I . Se a declividade da reta tangente é positiva, a função f é crescente em I . Se a declividade da reta tangente no ponto $(x, f(x))$, $x \in I$, é zero, a função é constante em I .

Formalizando o resultado acima, segue o teorema 2.

Teorema 3 (Teste da 1ª derivada para Crescimento/Decrescimento): Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b) .

- Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$.
- Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$.
- Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ então f é constante em $[a,b]$.

Demonstração:

Sejam $x_1, x_2 \in [a,b]$, com $x_1 < x_2$. Como f é contínua em $[x_1, x_2] \subset [a,b]$ e derivável em $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe $c \in [x_1, x_2]$ tal que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, ou seja, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Além

disso, se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$ e $c \in [x_1, x_2] \subset [a, b]$ então $f'(c) > 0$. Daí, sendo $x_2 - x_1 > 0$ e $f'(c) > 0$ segue que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$. Portanto, $f(x_2) > f(x_1)$ para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ isto é, f é crescente em $[a, b]$.

É análoga a parte (i).

Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$, com $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a f em $[x_1, x_2]$, existe $c \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Como $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ e $c \in [x_1, x_2] \subset [a, b]$ então $f'(c) = 0$. Daí, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$, ou seja, $f(x_2) = f(x_1)$, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

Observe a figura 4:

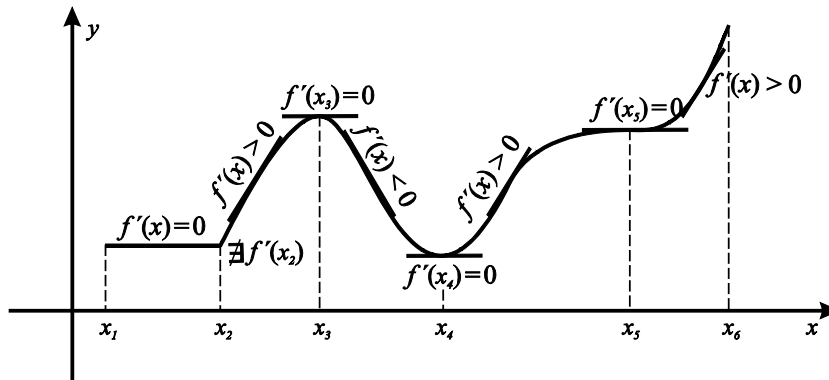


Figura 4: Teste da 1ª derivada

- No intervalo aberto (x_1, x_2) temos que $f'(x) = 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$, pois todas as retas tangentes ao gráfico de f são horizontais e, portanto, f é constante no intervalo fechado $[x_1, x_2]$;
- Nos intervalos abertos (x_2, x_3) , (x_4, x_5) e (x_5, x_6) temos que $f'(x) > 0$, pois todas as retas tangentes ao gráfico de f são inclinadas para a direita (inclinação positiva) e, portanto f é crescente nos intervalos fechados $[x_2, x_3]$, $[x_4, x_5]$ e $[x_5, x_6]$;
- No intervalo (x_3, x_4) temos que $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_3, x_4)$, pois todas as retas tangentes ao gráfico de f são inclinadas para a esquerda (inclinação negativa) e, portanto f é decrescente em $[x_3, x_4]$.

Observação 1: O teorema 3 diz que podemos obter informações sobre o comportamento do gráfico de f estudando o sinal da função f' (função derivada de f). Conforme vimos no exemplo 5 da seção 2.8 os únicos pontos em que a função pode mudar de sinal são aqueles onde ela se anula ou onde é descontínua. Em particular, a função f' pode mudar de sinal em $x = a$ se $f'(a) = 0$ ou $\nexists f'(a)$.

Observação 2: Utilizaremos os símbolos $f \uparrow$ e $f \downarrow$ para representar crescimento e decrescimento de f , respectivamente. Daí,

- $f'(x) > 0$ (+) $\Rightarrow f$ crescente ($f \uparrow$)
- $f'(x) < 0$ (-) $\Rightarrow f$ é decrescente. ($f \downarrow$)

Exemplo 1: Para determine os valores de x nos quais a função $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$ é crescente ou decrescente vamos estudar o sinal da função f' . Como $f'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = 3(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)$ é derivável em todos os pontos, temos que f' poderá mudar de sinal apenas nos pontos onde $f'(x) = 0$, ou seja, $x = -2$ ou $x = 4/3$. Para $x < -2$ ou $x > 4/3$ temos que $f'(x) > 0$ (+) e, portanto, pelo teste da 1ª derivada, f é crescente nos intervalos $(-\infty, -2]$ e $[4/3, +\infty)$. Para $-2 < x < 4/3$ temos que $f'(x) < 0$ e, portanto, f é decrescente no intervalo $[-2, 4/3]$. Para simplificar, é comum utilizarmos o diagrama abaixo para representar a relação do sinal de f' com o estudo de crescimento/decrescimento de f .

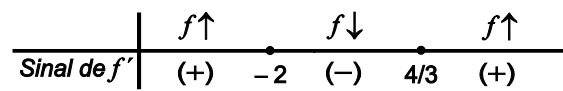


Figura 5: Diagrama da relação de f' com a f

Exemplo 2: Para determine os valores de x nos quais a função $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$ é crescente ou decrescente vamos estudar o sinal da função f' . Como $f'(x) = \frac{-3(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}$ não possui raízes reais temos que f' poderá mudar de sinal apenas nos pontos onde f não é derivável, isto é, nos pontos $x = -2$ ou $x = 2$. Mas, para $x < -2$ ou $-2 < x < 2$ ou $x > 2$ temos que $f'(x) < 0$ (-) e, portanto, pelo teste da 1ª derivada, f é decrescente nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, +\infty)$. O diagrama abaixo representa a relação do sinal de f' com o estudo de crescimento/decrescimento de f .

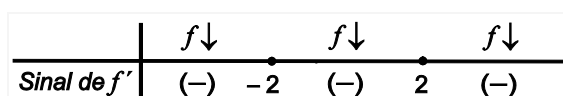


Figura 6: Diagrama da relação de f' com a f

Uma consequência importante do teorema 3 é que se duas funções f e g tem a mesma derivada em um intervalo aberto (a,b) então f e g difere por uma constante. Vamos formalizar este resultado.

Consequência do Teorema 3: Sejam f e g funções contínuas em $[a,b]$ e derivável em (a,b) . Suponha que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Então existe um número c tal que $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in [a,b]$.

De fato, seja $H(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Como f e g são funções contínuas em $[a,b]$ e derivável em (a,b) temos que $H = f - g$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) . Por outro lado, como $f'(x) = g'(x)$ temos que $H'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, ou seja, H é constante em $[a,b]$. Daí existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $H(x) = f(x) - g(x) = c$, $\forall x \in [a,b]$, ou seja,

$$f(x) = g(x) + c, \quad \forall x \in [a,b].$$

4.4 Máximos e Mínimos

Definição 1: Dizemos que uma função f

- tem um valor *máximo relativo* (ou máximo local) em c se existe um intervalo aberto $I \subset \text{Dom}(f)$, contendo c , tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x em I . Neste caso, dizemos que $f(c)$ é um valor máximo relativo (ou, simplesmente, máximo relativo) de f .
- tem um valor *mínimo relativo* (ou mínimo local) em c se existe um intervalo aberto $I \subset \text{Dom}(f)$, contendo c , tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x em I . Neste caso, dizemos que $f(c)$ é um valor mínimo relativo (ou, simplesmente, mínimo relativo) de f .

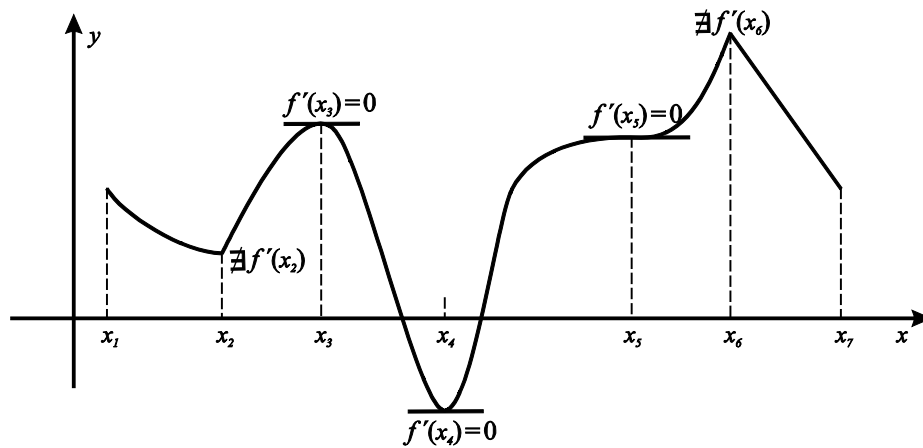


Figura 1: Representação geométrica de máximos e mínimos relativos de f

Observando a figura 1 temos que existe um intervalo aberto I , contendo x_2 , por exemplo, $I = (x_1, x_3)$, tal que o valor $f(x_2) \leq f(x), \forall x \in I = (x_1, x_3)$.

- Isto significa que $f(x_2)$ é um mínimo relativo de f . Analogamente, existe um intervalo aberto I , contendo x_4 , por exemplo, $I = (x_1, x_7)$, tal que o valor $f(x_4) \leq f(x), \forall x \in I = (x_1, x_7)$.
- Isto significa que $f(x_4)$ é um mínimo relativo de f . Também existe um intervalo aberto I , contendo x_3 , por exemplo, $I = (x_2, x_4)$, tal que o valor $f(x_3) \geq f(x), \forall x \in I = (x_2, x_4)$.
- Isto significa que $f(x_3)$ é um máximo relativo de f . De forma análoga, temos que $f(x_6)$ é também um máximo relativo de f .

Por outro lado, no intervalo $I = [x_1, x_7]$ temos que $f(x_4) \leq f(x), \forall x \in I = [x_1, x_7]$ e $f(x_6) \geq f(x), \forall x \in I = [x_1, x_7]$, ou seja, o valor $f(x_4)$ é o menor valor de f em $I = [x_1, x_7]$ e $f(x_6)$ é o maior valor de f em $I = [x_1, x_7]$. Neste caso, dizemos que, em $I = [x_1, x_7]$, $f(x_4)$ é o mínimo absoluto de f e $f(x_6)$ é o máximo absoluto de f .

Definição 2: Seja f uma função definida em um intervalo I tal que $c \in I, I \subset Dom(f)$. Dizemos que f :

- tem um valor máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Neste caso, $f(c)$ é o valor máximo absoluto (ou máximo global) de f em I .
- tem um valor mínimo absoluto (ou mínimo global) em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Neste caso, $f(c)$ é o valor mínimo absoluto (ou mínimo global) de f em I .

Definição 3: Os máximos ou mínimos relativos de f são chamados *extremos relativos* de f . Os máximos ou mínimos absolutos de f são chamados *extremos absolutos* de f .

Observação 1: Analisando a figura 1 podemos observar que se $f(c)$ é um extremo relativo de f então $f'(c)=0$ ou $\nexists f'(c)$, como veremos no próximo teorema.

Teorema 1 (Teorema de Fermat): Se f tem um máximo ou mínimo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demonstração: Suponhamos que f tem um mínimo relativo em c . Assim, existe um intervalo aberto I , contendo c , tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$, ou equivalentemente, $f(x) - f(c) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $f'(c)$ existe, então existe

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Logo, se $x \in I$ e $x \rightarrow c^-$, então $x - c < 0$. Assim,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0.$$

Por outro lado, se $x \in I$ e $x \rightarrow c^+$, então $x - c > 0$. Assim,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0.$$

Portanto, $f'(c) = 0$.

O caso de máximo relativo pode ser demonstrado de forma análogo.

Observação 2: A interpretação geométrica do Teorema de Fermat é que se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal no ponto $(c, f(c))$.

Observação 3: A recíproca do Teorema de Fermat não é verdadeira, isto é, $f'(c) = 0$ não implica necessariamente que f tem um extremo relativo em c . Este fato pode ser visualizado na figura 1 acima tomando $c = x_5$, pois $f'(c_5) = 0$ e, no entanto, $f(c)$ não é um extremo relativo de f . Daí, se f é uma função derivável, os únicos valores possíveis de x para os quais f possa ter um extremo relativo serão aqueles que $f'(x) = 0$.

Observação 4: Notemos também que uma função f pode ter um extremo relativo em c e $f'(c)$ pode não existir. Este fato pode ser visualizado também na figura 1 acima tomando $c = x_2$, ou $c = x_6$, pois $\nexists f'(x_2)$ e $\nexists f'(x_6)$ e, no entanto, $f'(x_2)$ e $f'(x_6)$ são extremos relativos de f .

Definição 4 (ponto crítico): Um número c é chamado *ponto crítico* de uma função f quando $c \in \text{Dom}(f)$ e $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Conclusão: Se f é uma função definida em c , os únicos números possíveis de c para os quais f possa ter um extremo relativo são aqueles que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Isto é, f tem um extremo relativo em c então c é um ponto crítico de f .

Exemplo 1: Para encontrar os pontos críticos da função $f(x) = (x^2 - 9)^{\frac{2}{3}}$ devemos inicialmente observar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Agora, como

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$$

temos que os pontos nos quais f não é derivável são $x = -3$ e $x = 3$. Além disso,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Como os números $x = -3$, $x = 3$ e $x = 0$ pertencem ao $\text{Dom}(f)$, segue que estes são os pontos críticos de f .

Exemplo 2: Para encontrar os pontos críticos da função $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ devemos inicialmente observar que

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 9 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -3 \text{ e } x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}.$$

Agora, como

$$f'(x) = \frac{x^2 - 9 - x \cdot (2x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-(x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^2}$$

temos que os pontos nos quais f não é derivável são $x = -3$ e $x = 3$, mas estes não pertencem ao domínio de f e, portanto, não são pontos críticos. Além disso,

$f'(x) \neq 0, \forall x \in \text{Dom}(f)$. Portanto, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ não tem pontos críticos. Como

consequência, não terá também extremos relativos.

Conforme vimos, os únicos números possíveis de c para os quais f possa ter um extremo relativo são os pontos críticos de f . Porém, se c é ponto crítico de f , não podemos afirmar que f tem um extremo relativo em c . O teorema a seguir classificará estes pontos críticos para os quais f terá um extremo relativo.

Teorema 2 (Teste da 1ª derivada para extremos relativos): Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) , exceto possivelmente num ponto crítico $c \in (a, b)$ de f .

- (i) Se $f'(x) > 0, \forall x < c$ e $f'(x) < 0, \forall x > c$ então f tem um máximo relativo em c .
- (ii) Se $f'(x) < 0, \forall x < c$ e $f'(x) > 0, \forall x > c$ então f tem um mínimo relativo em c .
- (iii) Se $f'(x)$ possui o mesmo sinal em ambos os lados de c , então f não tem um extremo relativo em c .

Demonstração:

- (i) Se $f'(x) > 0, \forall x < c$ temos, pelo teste da 1ª derivada para crescimento/decrescimento, que f é crescente em $[a, c]$. Daí, sendo $x < c$ temos que $f(x) \leq f(c) \forall x \in [a, c]$.
- (ii) Se $f'(x) < 0, \forall x > c$ temos, pelo Teste da 1ª derivada para crescimento/decrescimento, que f é decrescente em $[a, c]$. Daí, sendo $x > c$ temos que $f(x) \leq f(c) \forall x \in [c, b]$.

Daí, $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja, f tem um máximo relativo em c .

- (iii) Deixamos como exercícios a parte

Diretrizes para Determinar os Extremos Relativos de uma Função f :

- Passo 1: Encontrar $Dom(f)$;
- Passo 2: Encontrar $f'(x)$;
- Passo 3: Encontrar os pontos críticos de f ;
- Passo 4: Estudar o sinal de $f'(x)$;
- Passo 5: Aplicar o Teste da derivada primeira para determinação de extremos.

Exemplo 3: Para encontrar os extremos relativos da função $f(x) = (x^2 - 9)^{\frac{2}{3}}$ vimos, pelo exemplo1, que $Dom(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$ e os pontos críticos de f são $x = -3$, $x = 3$ e $x = 0$.

O diagrama abaixo representa a relação do sinal de f' com o estudo de crescimento/decrescimento de f .

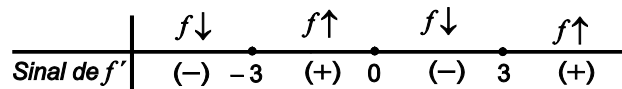
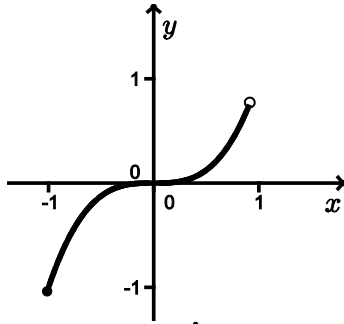


Figura 2: Diagrama da relação de f' com a f

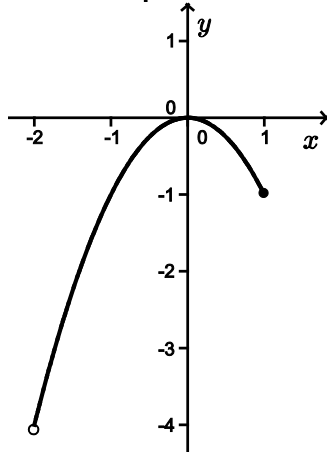
Aplicando o Teste da 1ª derivada para extremos relativos temos que f tem um mínimo relativo em $x = -3$ e em $x = 3$ e um máximo relativo em $x = 0$, ou seja, $f(-3) = f(3) = 0$ é um valor mínimo relativo e $f(0) = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ é um valor máximo relativo de f .

Agora que já sabemos encontrar os extremos relativos de uma função veremos como determinar os extremos absolutos de uma função contínua num intervalo fechado.

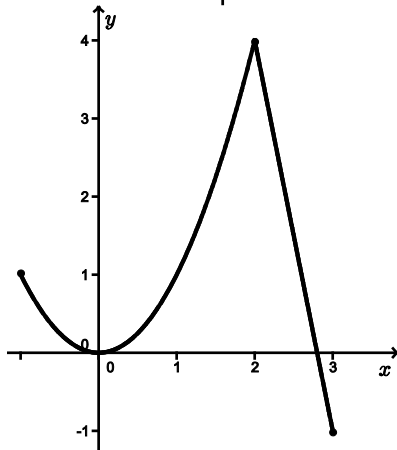
Exemplo 4: Vejamos os extremos absolutos, se existirem de algumas funções:



$f(x) = x^3$ em $[-1, 1)$
 $f(-1)$ é o valor mínimo absoluto de f em $[-1, 1)$ e não existe valor máximo absoluto de f em $[-1, 1)$.

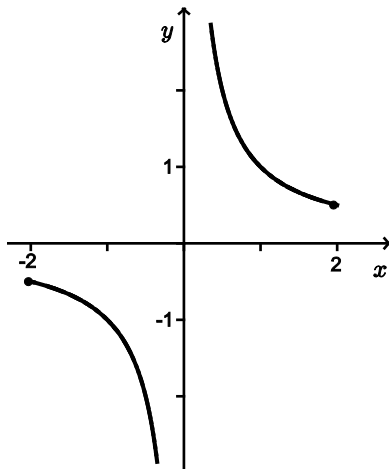


$f(x) = -x^2$ em $(-2, 1]$
 $f(0)$ é o valor máximo absoluto de f em $(-2, 1]$ e não existe valor mínimo absoluto de f em $(-2, 1]$. Observe que $f(0)$ é também valor máximo relativo de f em $(-2, 1]$.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ -5x + 14 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases} \text{ em } [-1, 3]$$

$f(2) = 4$ é o valor máximo absoluto de f em $[-1, 3]$ e $f(3) = -1$ é o valor mínimo absoluto de f em $[-1, 3]$. Observe que $f'(2)$ não existe e $f(2) = 4$ é também valor máximo relativo de f em $[-1, 3]$.



$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0, \text{ em } [-2, 2]$$

Não existe valor máximo absoluto e nem mínimo absoluto de f em $[-2, 2]$.

Nestes exemplos podemos observar que se uma função não for contínua e/ou o intervalo não for fechado, não temos garantia da existência dos extremos absolutos. Porém, garantindo que a função é contínua e o intervalo é fechado sempre haverá máximo e mínimo absoluto e estes ocorrerão nas extremidades do intervalo ou em um ponto crítico no interior do intervalo. E quando um extremo absoluto ocorrer no interior ele também será um extremo relativo.

Teorema 3 (Teorema do Valor Extremo): Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

A demonstração do teorema do valor extremo é mais sofisticada e, portanto, não iremos demonstrar.

Diretrizes para determinar os extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

- **Passo 1:** Encontre os pontos críticos de f em $[a, b]$;
- **Passo 2:** Calcule o valor de f em cada ponto crítico encontrado no passo 1;
- **Passo 3:** Encontre $f(a)$ e $f(b)$;
- **Passo 4:** Compare os valores encontrados no passo 2 e no passo 3. O maior dos valores é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto de f em $[a, b]$.
- **Exemplo 5:** Encontre os extremos absolutos de $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, $-1 \leq x \leq 4$.

Solução: Como f é uma função contínua no intervalo fechado $[-1, 4]$ temos, pelo teorema do valor extremo, que f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[-1, 4]$. Vamos seguir as diretrizes acima para determinar os extremos absolutos de f . Vejamos:

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3)$$

Daí, $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 3$.

Portanto, os pontos críticos de f no intervalo $[-1, 4]$ são $x = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.

Mas, $f(0) = 0$,

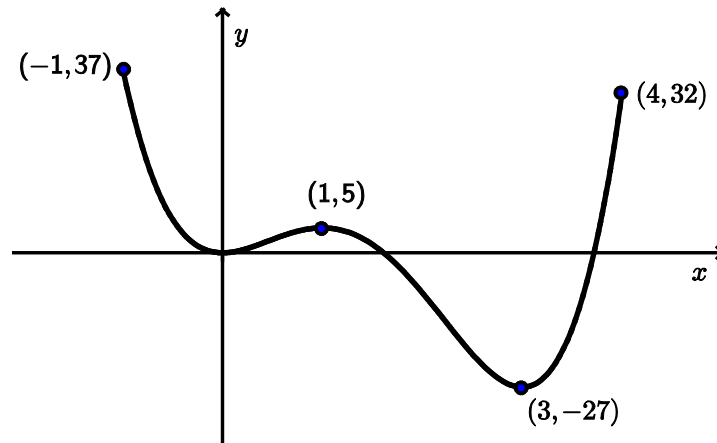


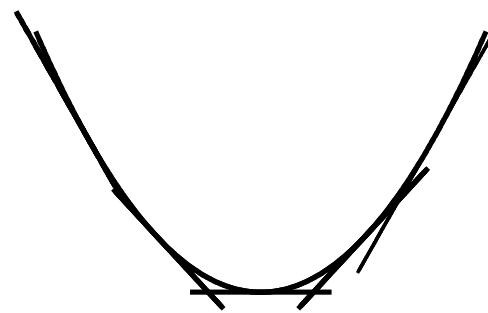
Figura 3: Gráfico de $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ em $[-1, 4]$

4.5 Concavidade e Pontos de Inflexão

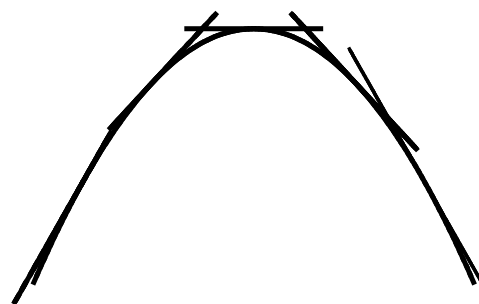
Agora vamos obter algumas informações dadas pela derivada segunda. Vamos mostrar que o sinal da derivada segunda dará informações úteis quanto à forma do gráfico de uma função. Isto nos auxiliará muito no esboço do seu gráfico. Além disso, fornecerá também uma outra maneira de caracterizar máximos e mínimos relativos.

Definição 1 (Concavidade): Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I .

- Quando as retas tangentes ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$, $\forall x \in I$, estiver sempre abaixo do gráfico f dizemos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima (ou côncavo para cima) em I . A concavidade para cima será indicada por \cup .
- Quando as retas tangentes ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$, $\forall x \in I$, estiver sempre acima do gráfico f dizemos que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo (ou côncavo para baixo) em I . A concavidade para baixo será indicada por \cap .



concavidade para cima



concavidade para baixo

Figura 1: Representação gráfica da concavidade

Observação 1: Observe que, quando a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ passa de negativa (inclinada para à esquerda) para positiva (inclinada para à direita), à medida que $x \in I$ cresce então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em I . Isto significa que, se f' é crescente em I então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em I . Analogamente, quando a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ passa de positiva para negativa, à medida que $x \in I$ cresce então o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em I . Isto significa que, se f' é decrescente em I então f tem concavidade voltada pra baixo em I .

A observação 1 sugere o seguinte teorema:

Teorema 2 (Teste da 2ª derivada para Concavidade): Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável até a 2ª ordem no intervalo aberto (a,b) , exceto possivelmente num ponto crítico $c \in (a,b)$ de f .

- Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$, então o gráfico de f tem concavidade voltada pra cima em (a,b) .
- Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$, então o gráfico de f tem concavidade voltada pra baixo em (a,b) .

Demonstração: Como $[f'(x)]' = f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$, então, pelo teste da 1ª derivada para crescimento/decrescimento aplicado à função f' , temos que f' é crescente em (a,b) . Daí, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em (a,b) . É análoga a parte (i).

Observação 1: O teorema 2 diz que podemos obter informações sobre a concavidade de f estudando o sinal da função f'' (função derivada segunda de f).

Definição 1 (Ponto de Inflexão): Um ponto $P(c, f(c))$ no gráfico de f é chamado ponto de inflexão de f se f é contínua em c e existe um intervalo aberto (a,b) contendo c tal que uma das seguintes situações ocorra:

- f é côncavo para cima em (a,c) e côncavo para baixo em (c,b) .
 - f é côncavo para baixo em (a,c) e côncavo para cima em (c,b) .
- ou seja, um ponto do gráfico de f no qual muda o sentido da concavidade.

Exemplo 1:

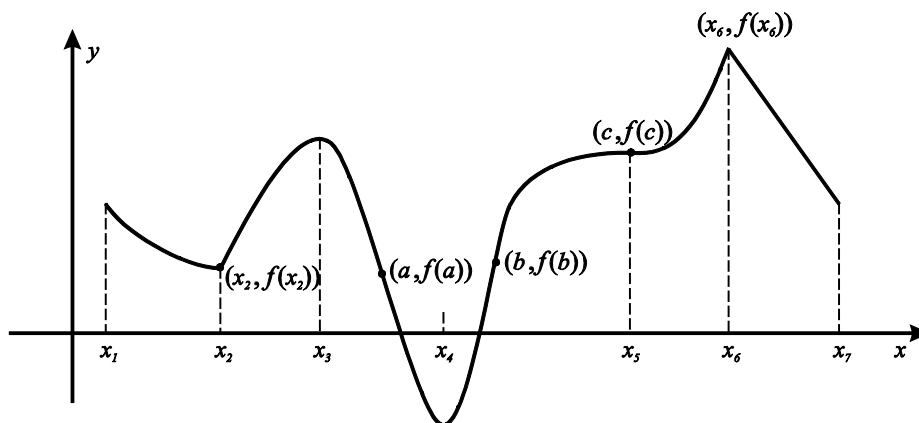


Figura 2: Representação gráfica de pontos de inflexão

Os pontos $(x_2, f(x_2))$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ e $(x_6, f(x_6))$ são pontos de inflexão. O teorema a seguir fornece um modo de obter os possíveis números c tais que $(c, f(c))$ possa ser um ponto de inflexão.

Teorema 3: Se a função f tem um ponto de inflexão em $(c, f(c))$ então ou $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existe.

Diretrizes para Determinar os Pontos de Inflexão de uma Função f :

- Passo 1: Encontrar $Dom(f)$;
- Passo 2: Encontrar $f''(x)$;
- Passo 3: Encontrar os números x tais que $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe;
- Passo 4: Estudar o sinal de $f''(x)$ e aplicar o teste da 2ª derivada para concavidade. Verifique se $f''(x)$ muda de sinal nos pontos encontrados no passo 3. Se $f''(x)$ muda de sinal em $x = c$ e $c \in Dom(f)$ então $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão de f .

Exemplo 2: Considere a função $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Determine:

- os pontos críticos de f ;
- os intervalos onde f é crescente ou decrescente;
- os extremos relativos de f , se existirem;
- os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima ou côncavo para baixo;
- os pontos de inflexão de f , se existirem.

Solução: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Observe que $f'(0)$ não existe, mas como $0 \notin Dom(f)$ temos que $x=0$ não é ponto crítico de f . Daí, $x=1$ e $x=-1$ são os únicos pontos críticos de f .

Façamos o diagrama para estudar o sinal de

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^3}.$$

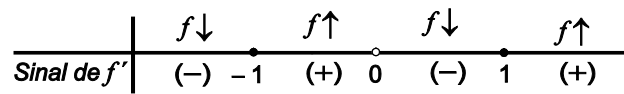


Figura 3: Diagrama da relação de f' com a f

Portanto, f é decrescente nos intervalos $(-\infty, -1]$, $(0, 1]$ e crescente nos intervalos $[-1, 0)$, $[1, +\infty)$.

Pelo teste da derivada primeira para determinação de extremos, temos que f tem mínimo relativo em $x=-1$ e também em $x=1$ (ou, equivalentemente, $f(-1) = f(1) = 2$ é um valor mínimo relativo de f). Note que f não tem um máximo relativo em $x=0$, pois este não é ponto crítico de f .

Temos que $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} = \frac{2x^4 + 6}{x^4}$. Observe que $f''(0)$ não existe, mas $0 \notin Dom(f)$.

Façamos o diagrama para estudar o sinal de $f''(x)$:

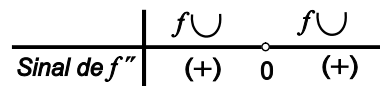


Figura 6: Diagrama da relação de f'' com a f .

$f''(x) > 0$ nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Portanto, pelo teste da 2ª derivada para concavidade, temos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. f não tem ponto de inflexão.

Teorema 2 (Teste da 2ª derivada para extremos relativos): Seja $c \in I$ um ponto crítico de f no qual f é derivável em um intervalo aberto J contendo c . Então, se $f''(c) \neq 0$ existe e

- se $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo relativo em c .
- se $f''(c) < 0$ então f tem um máximo relativo em c .

Exemplo 3: Encontre os extremos relativos de $f(x) = \frac{2000}{x} + 2\pi x^2$.

Solução: Temos que $f'(x) = \frac{-2000}{x^2} + 4\pi x$.

$$\text{Daí, } f'(x) = \frac{-2000}{x^2} + 4\pi x = 0 \Rightarrow 4\pi x^3 = 2000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

(único ponto crítico de f)

Como $f''(x) = \frac{4000}{x^3} + 4\pi$ segue que

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = \frac{4000}{\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^3} + 4\pi = 4000 \cdot \frac{\pi}{500} + 4\pi = 12\pi > 0.$$

Portanto, pelo teste da 2ª derivada, temos que f tem um mínimo relativo em

$x = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, ou equivalentemente, $f\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$ é o único valor mínimo relativo de f .

Experimente aplicar o teste da 1ª derivada, será bem mais trabalhoso!

Observação 2: O teste da 2ª derivada para extremos relativos é, às vezes, mais simples de ser aplicado do que o teste da 1ª derivada, pois não precisamos analisar o sinal da 1ª derivada e nem da 2ª derivada, basta apenas saber o sinal da derivada 2ª aplicada no ponto crítico. Porém, se c é um ponto crítico de f e

$f''(c)=0$ ou $f''(c)$ não existe, o teste falha e portanto devemos usar o teste da 1ª derivada. Vejamos dois exemplos para mostrar que o teste falha.

Exemplo 4: Considere a função $f(x)=2x^3$. Temos que $f'(x)=6x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (ponto crítico de f). Como $f''(x)=12x$ e, daí, $f''(0)=0$, não podemos aplicar o teste da 2ª derivada para extremos relativos. Observe que $f(x)=2x^3$ não tem máximo nem mínimo relativo. Esta conclusão é imediata pelo teste da 1ª derivada.

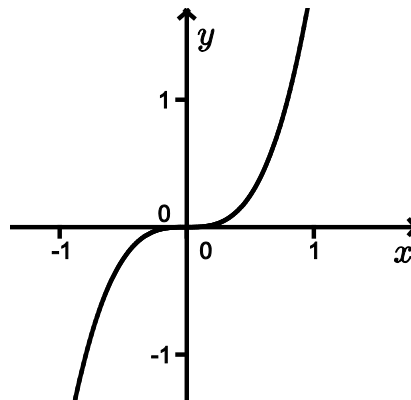


Figura 3: Gráfico de $f(x)=2x^3$

Exemplo 5: Considere a função $f(x)=2x^4$. Temos que

$f'(x)=8x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ (ponto crítico de f). Como $f''(x)=24x^2$ e, daí, $f''(0)=0$, não podemos aplicar o teste da 2ª derivada para extremos relativos. Observe que $f(x)=2x^4$ tem um mínimo relativo em $x=0$. Esta conclusão é imediata pelo teste da 1ª derivada.

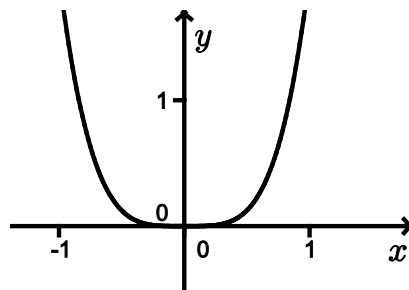


Figura 4: Gráfico de $f(x)=2x^4$

4.6 Assíntotas Horizontais e Verticais

Inicialmente, vamos verificar o que pode ocorrer com o gráfico de algumas funções:

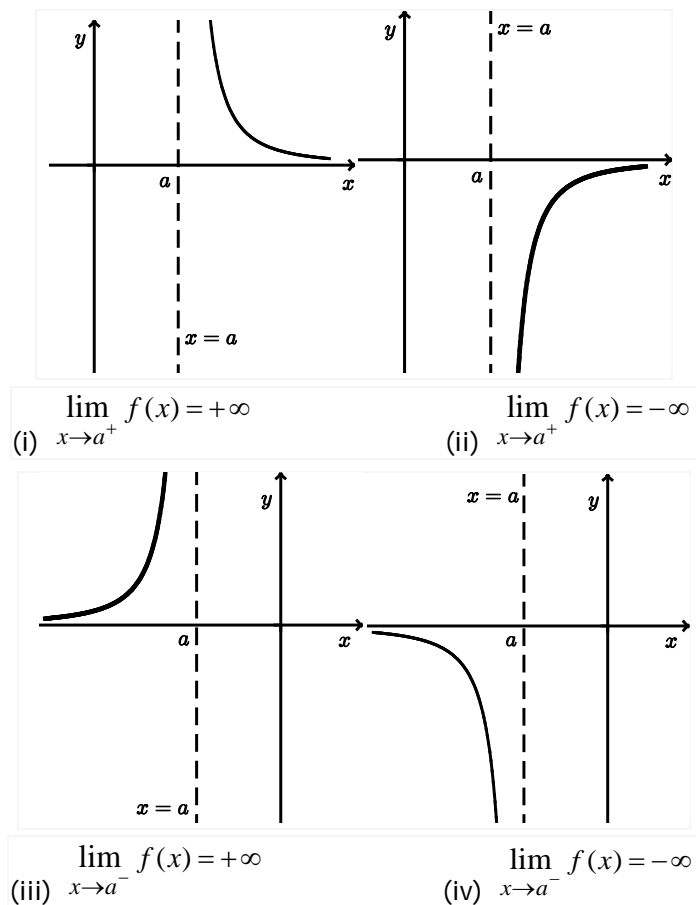


Figura 1: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f

Definição 1 (assíntota vertical): Dizemos que a reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de uma função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

Observação 1: Devemos ter cuidado em diferenciar o número a com a reta $x = a$. Observe que uma assíntota vertical é uma reta vertical e sabemos que equação de reta vertical é da forma $x = a$.

Exemplo 1: A reta $x = -1$ é uma assíntota vertical do gráfico $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

pois $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$.

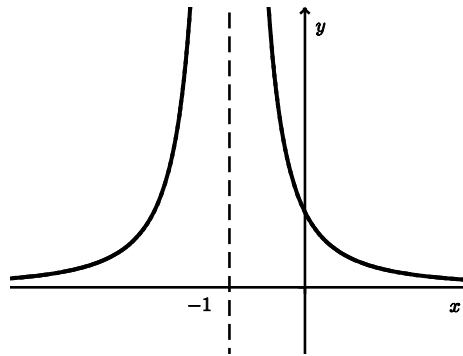


Figura 2: A reta $x = -1$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

Observação 2: Observe que no exemplo 1 também ocorre $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$.

Mas, basta que ocorra uma das condições listadas na definição 1 para concluirmos que, neste caso, $x = -1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Observação 3: Lembramos que se uma função f é contínua em a então existem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e valem $f(a)$. Para que a reta $x = a$ possa ser uma assíntota vertical do gráfico de f um dos limites laterais da definição 1 não poderá existir e terá que ser representado pelo símbolo de $+\infty$ ou $-\infty$. Daí, se a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f então f é descontínua em a . Porém, se f é descontínua em a não podemos afirmar que $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f . Por exemplo, a função $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ é descontínua em

-2 . Porém $x = -2$ não é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$, pois

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4} \quad (\text{o limite existe}).$$

Também pode ocorrer nos gráficos de funções a seguinte situação:

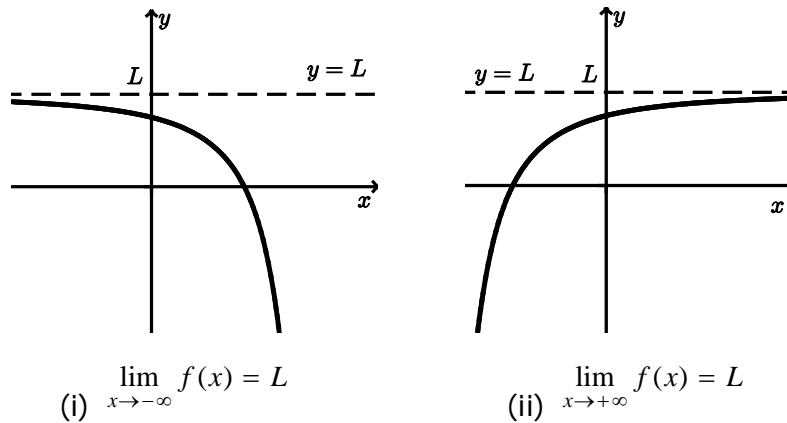


Figura 3: A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f

Definição 2 (assíntota horizontal): Dizemos que a reta $y=L$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico de uma função f se pelo menos uma das afirmações for verdadeira:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Exemplo 2: As retas $y=2$ e $y=-2$ são assíntotas horizontais do gráfico

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}} \text{ pois}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{2x \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}}} = -2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}}} = 2\end{aligned}$$

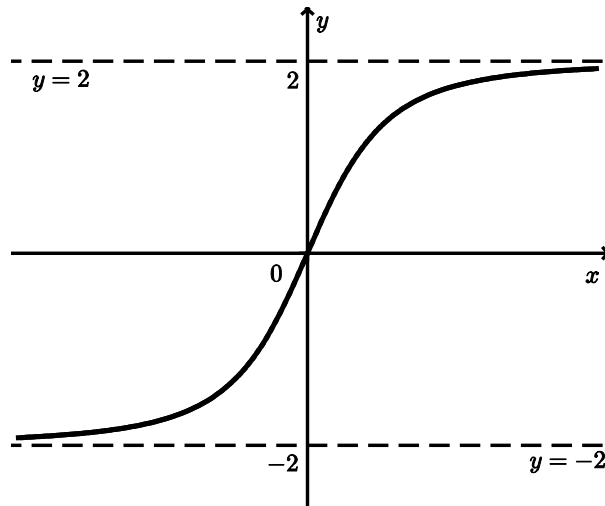


Figura 4: As retas $y = -2$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 3}}$

4.7 Esboço de Gráficos

O processo de esboçar, no plano xy , o gráfico de uma função contínua ligando um número finito de pontos do seu gráfico não revela informações qualitativas, como os extremos relativos, a concavidade, os pontos de inflexão, as assíntotas, etc. Nosso objetivo agora é unir todas estas informações dadas até o momento para esboçar o gráfico de uma função.

Utilizaremos a terminologia “esboço completo do gráfico de uma função” ao esboço do gráfico de uma função com todas as informações qualitativas analisadas, inclusive as assíntotas, se existirem.

Exemplo1: Faça um esboço completo do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Solução: Já vimos no exemplo 2 da seção 4.5 que $f'(0)$ não existe, $f(-1) = f(1) = 2$ é um valor mínimo relativo de f e que f não tem um máximo relativo e nem pontos de inflexão. Além disso, as informações sobre o crescimento/decrescimento e a concavidade são resumidas na tabela a seguir.

Resumo das Informações sobre a função f

intervalos	crescimento/ decréscimento	concavidade
$x < -1$	(↓)	(∪)
$-1 < x < 0$	(↑)	(∪)
$0 < x < 1$	(↓)	(∪)
$x > 1$	(↑)	(∪)

Analizamos agora as assíntotas:

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty$$

não existem assíntotas horizontais.

Quanto às assíntotas verticais devemos analisar apenas se a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical já que o único ponto de descontinuidade de f é zero. Vejamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x^2} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ é uma assíntota vertical do gráfico de } f.$$

Agora, juntando todas as informações acima, podemos obter o esboço de gráfico:

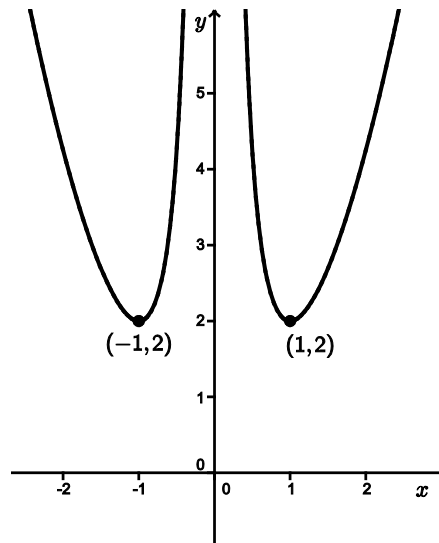


Figura 4: Esboço do gráfico de $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

4.8 Problemas de Otimização

Os problemas aplicados de otimização podem ser classificados de duas formas:

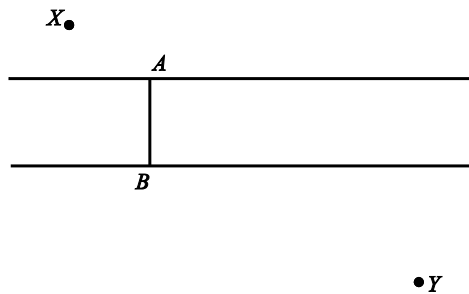
- Problemas que se reduzem a maximizar ou minimizar uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Neste caso, usamos as diretrizes para determinar os extremos absolutos de uma função contínua em $[a, b]$.
- Problemas que se reduzem a maximizar ou minimizar uma função contínua em um intervalo que não seja da forma $[a, b]$. Neste caso usamos o teste da 1ª ou da 2ª derivada para extremos relativos e, se necessário, o esboço do gráfico da função.

Diretrizes para resolução de problemas de otimização:

- Passo 1: Leia o problema atentamente;
- Passo 2: Faça uma figura apropriada e identifique as variáveis a serem utilizadas;
- Passo 3: Expresse a variável a ser maximizada ou minimizada como função de uma variável independente;
- Passo 4: Determine o domínio da função encontrada no passo 3, levando em consideração as restrições física do problemas;
- Passo 5: Use as técnicas do cálculo para obter, no domínio, os extremos absolutos da função;
- Passo 6: Interprete a solução e responda a questão proposta no problema.

Exemplo 1 [Fonte: Exame Nacional de Cursos/Provão 2001] Duas cidades, X e Y , estão situadas em lados opostos de um rio, que tem um curso retilíneo

nesse trecho, conforme a figura. As duas cidades vão ser ligadas por uma ponte AB, perpendicular ao rio, de modo que a soma das distâncias $XA + AB + BY$ seja a menor possível. Onde deverá ser localizada essa ponte?



Solução: Para modelar o problema vamos identificar as variáveis a serem utilizadas. Denotemos por a a distância da cidade X à margem do rio, por b a distância da cidade Y à outra margem do rio, por l a largura do rio, por P a projeção de X à reta, paralela ao rio, passando por Y , por d a distância de P a Y e, finalmente, por x a distância da projeção de X à margem do rio ao ponto A , conforme ilustra a figura 1. Vale observar todas as variáveis envolvidas são não negativas.

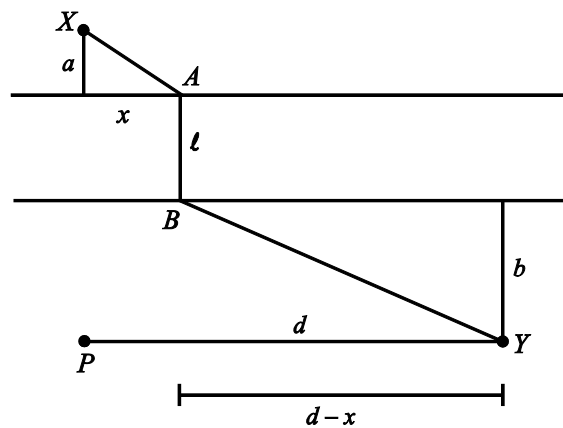


Figura 1: Modelagem do problema

Para minimizar $XA + AB + BY$ observamos que

$$XA = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad AB = l \quad \text{e} \quad BY = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Assim, podemos definir a função

$$L(x) = XA + AB + BY = \sqrt{a^2 + x^2} + l + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}, \quad x \in [0, d]$$

Como L é uma função contínua definida no intervalo fechado $[0, d]$ temos, pelo Teorema do Valor Extremo, que L tem máximo e mínimo absoluto em $[0, d]$. Assim, para minimizar a função L vamos utilizar as diretrizes para determinar os extremos absolutos de uma função contínua em intervalo fechado. Vejamos:

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{2(d-x)(-1)}{2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{(d-x)(-1)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

e

$$\begin{aligned} L'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{(d-x)(-1)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{b^2 + (d-x)^2} = (d-x)\sqrt{a^2 + x^2} \\ &\Leftrightarrow \left(x\sqrt{b^2 + (d-x)^2}\right)^2 = \left((d-x)\sqrt{a^2 + x^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2[b^2 + (d-x)^2] = (d-x)^2(a^2 + x^2) \\ &\Leftrightarrow b^2x^2 + x^2(d-x)^2 = a^2(d-x)^2 + x^2(d-x)^2 \Leftrightarrow b^2x^2 = a^2(d-x)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{b^2x^2} = \sqrt{a^2(d-x)^2} \Leftrightarrow bx = a(d-x) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{ad}{a+b} \end{aligned}$$

Denotaremos por $x_o = \frac{ad}{a+b}$ este ponto. Vamos mostrar agora que $x_o \in (0, d)$. De fato, é claro que $x_o > 0$. Por outro lado,

$$0 < b \Rightarrow a < a+b \Rightarrow ad < (a+b)d \Rightarrow \frac{ad}{a+b} < d \Rightarrow x_o < d.$$

Daí, $x_o = \frac{ad}{a+b}$ é o único ponto crítico de L em $(0, d)$. Note que

$$L(x_o) = \sqrt{(a+b)^2 + d^2} + \ell, \quad L(0) = \sqrt{b^2 + d^2} + a + \ell \quad \text{e} \quad L(d) = \sqrt{a^2 + d^2} + b + \ell.$$

Deixamos como exercícios mostrar que $L(x_o) < L(0)$ e $L(x_o) < L(d)$. Com isso, podemos concluir que $L(x_o)$ é o valor mínimo absoluto de L em $[0, d]$, ou seja, a ponte deverá estar localizada a uma distância $\frac{ad}{a+b}$ da projeção do ponto X à margem do rio ao ponto A , conforme ilustra a figura 1.

CAPÍTULO 5. INTEGRAÇÃO

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de integral indefinida. Este conceito é de grande importância para definirmos o conceito de Integral Definida que terá um papel fundamental no cálculo de áreas e volumes.

5.1 Integral Indefinida

Definição 1: Dizemos que uma função F é uma *primitiva* (ou *antiderivada*) de uma função f , num intervalo aberto I se, e somente se, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Observação 1: Na definição de primitiva de uma função, quando não explicitarmos o intervalo I , admitiremos que este seja o domínio de f .

Exemplo 1: Vejamos alguns exemplos:

(i) Se $f(x) = 2x$ então uma primitiva de f é dada por $F(x) = x^2$, uma vez que $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Note que $D(f) = \mathbb{R}$ e, portanto assumimos que $I = D(f)$, este fato vai se repetir com muita frequência.

(ii) Se $f(x) = 2x$ então uma outra primitiva de f é dada por $F(x) = x^2 + 1$, uma vez que $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Se $f(x) = \cos x$ então uma primitiva de f é dada por $F(x) = \text{sen } x$, uma vez que $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(iv) Se $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ então uma primitiva de f é dada por $F(x) = \sqrt{x}$, uma vez que $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Neste momento o leitor astuto já deve ter observado que se adicionarmos qualquer constante a uma determinada primitiva de uma função ainda teremos uma primitiva desta mesma função. De fato, é o que veremos no teorema que se segue.

Teorema 1: Se F é uma primitiva de f em um intervalo aberto I , então a função G , definida por $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante qualquer, também é uma primitiva de f em I .

Demonstração: Com efeito, dado C uma constante qualquer, se F é uma primitiva de f em um intervalo aberto I , então sabemos pela definição de primitiva que $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. Assim, $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \forall x \in I$, ou seja, $G = F + C$ também é primitiva de f em I . Isto conclui a demonstração.

Observação 2: Uma questão que precisa ser respondida é a seguinte: Será que toda primitiva de uma função f é da forma $G(x) = F(x) + C$, onde F é uma primitiva qualquer de f e C uma constante qualquer? Isto é, digamos, por exemplo, que tenhamos $f(x) = 2x$, sabemos que $F(x) = x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma primitiva de f . A questão a ser respondida é a seguinte: Não haveria outra função G , bem diferente de F , tal que $G' = f$. Para respondermos a esta questão precisaremos da consequência do teorema 3 vista na seção 4.3. Para comodidade do leitor, vamos repetir o enunciado e demonstração desta consequência no teorema que segue.

Teorema 2: Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I , tal que $f'(x) = 0, \forall x \in I$, então f é constante em I .

Demonstração: Consideremos $x, y \in I$ tais que $x < y$. Como f é uma função derivável em I , em particular, f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y) , então pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$, tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como $f'(x) = 0, \forall x \in I$, então $f'(z) = 0$ e assim teremos

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0,$$

ou seja, $f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x)$. Pela arbitrariedade de $x, y \in I$, resulta que f é constante em I . Isto conclui a demonstração.

Agora estamos em condições de responder a questão proposta anteriormente. É o que fará o Teorema que se segue.

Teorema 3: Se F e G são primitivas de f , em um intervalo aberto I , então existe uma constante C tal que $G(x) = F(x) + C, \forall x \in I$, ou equivalentemente, $G(x) - F(x) = C, \forall x \in I$.

Demonstração: Considere a função auxiliar $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = G(x) - F(x)$. Note que por hipótese temos que $F'(x) = G'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Assim,

$$\varphi'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in I.$$

Portanto pelo Teorema 2, φ é constante em I , ou seja, existe uma constante C tal que $\varphi(x) = C, \forall x \in I \Rightarrow G(x) - F(x) = C, \forall x \in I \Rightarrow G(x) = F(x) + C, \forall x \in I$. Isto conclui a demonstração.

Observação 3: Os teoremas enunciados e demonstrados nos dizem que se F é uma primitiva particular de f em I , então toda primitiva de f em I é da forma $G = F + C$, onde C é uma constante qualquer. Assim o problema de determinarmos as primitivas de uma função f se resume a determinar uma primitiva particular de f . Isto nos leva a seguinte definição.

Definição 2: Seja F uma primitiva de f , a *integral indefinida* de f , denotada por $\int f(x)dx$, é definida por $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Observação 4: De acordo com nossa definição o símbolo \int é chamado de *senal de integração*, $f(x)$ de *função integrando* e $f(x)dx$ *integrando*. O processo pelo qual determinamos todas as primitivas de uma função é denominado *integração*. Pela definição de integral indefinida, concluímos resumidamente que:

$$(i) \int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F' = f$$

$$(ii) \int f(x)dx \text{ representa a família de todas as primitivas de } f.$$

Exemplo 2: Vejamos alguns exemplos, onde C é uma constante qualquer.

$$(i) \int 2x \, dx = x^2 + C$$

$$(ii) \int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$$

$$(iii) \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + C$$

5.2 Propriedades da Integral Indefinida

Veremos agora algumas propriedades da integral indefinida que nos permitirá obter integrais de funções mais complexas.

Teorema 1: Sejam $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções e K uma constante. Então:

$$P1) \int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

$$P2) \int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

Demonstração:

P1) Sejam F uma primitiva de f (isto é, $F' = f$) e K uma constante. Então KF é uma primitiva de Kf , uma vez que $(KF)' = KF' = Kf$. Desta forma, temos que

$$\int k f(x) \, dx = k F(x) + C = k(F(x) + C_1) = k \int f(x) \, dx$$

P2) Sejam F e G primitivas de f e g , respectivamente. Então, $F + G$ é uma primitiva de $f + g$, uma vez que $(F + G)' = F' + G' = f + g$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] \, dx &= [F(x) + G(x)] + C = [F(x) + G(x)] + C_1 + C_2 \\ &= [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \end{aligned}$$

A demonstração com o sinal de menos é idêntica e assim a demonstração está concluída.

Observação 1: Para determinarmos a integral de uma função precisamos conhecer muito bem o processo de derivação, pois o que pretendemos realizar agora é um processo inverso que exigirá muita intuição. A seguir exibiremos uma Tabela de Integrais Imediatas a qual usaremos com muita frequência.

Tabela de Integrais Imediatas

Nesta tabela admitiremos α, a e C constantes tais que $\alpha \neq -1$ e $a > 0$ e $a \neq 1$.

- | | |
|---|--|
| (1) $\int du = u + C$ | (9) $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cotg u + C$ |
| (2) $\int \frac{1}{u} \, du = \ln u + C$ | (10) $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$ |
| (3) $\int u^\alpha \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | (11) $\int \operatorname{cosec} u \cdot \cotg u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$ |
| (4) $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ | (12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \operatorname{arcsen} u + C$ |
| (5) $\int e^u \, du = e^u + C$ | (13) $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \operatorname{arctg} u + C$ |
| (6) $\int \operatorname{sen} u \, du = -\operatorname{cos} u + C$ | (14) $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \, du = \operatorname{arcsec} u + C$ |
| (7) $\int \operatorname{cos} u \, du = \operatorname{sen} u + C$ | (15) $\int \operatorname{senh} u \, du = \operatorname{cosh} u + C$ |
| (8) $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$ | (16) $\int \operatorname{cosh} u \, du = \operatorname{senh} u + C$ |

Exemplo 1: Calcule as integrais indefinidas:

$$(i) \int \left(5x^4 + 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = \int 5x^4 dx + \int 6x^2 dx + \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = x^5 + 2x^3 + \sqrt{x} + C$$

$$(ii) \int (e^x + 4 \sec x \cdot \operatorname{tg} x) dx = \int e^x dx + 4 \int \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = e^x + 4 \sec x + C$$

$$(iii) \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \ln|x| + \operatorname{arcsen} x + C$$

$$(iv) \int (5^x - x^{-2} + \sec^2 x) dx = \int 5^x dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \sec^2 x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{1}{x} + \operatorname{tg} x + C$$

Observação 2: Para calcularmos a integral de funções mais complicadas necessitamos de técnicas mais apuradas, não podemos confiar apenas na Tabela de Integrais Imediatas e na nossa experiência em derivação. Nosso objetivo agora é desenvolver métodos de integração para facilitar o processo de integração.

5.3 Método da Substituição (ou Mudança de Variáveis)

Este método se baseia em fazer uma mudança de variáveis com o objetivo de simplificar a integral que desejamos calcular. Sejam f uma função e F uma primitiva de f , isto é, $F' = f$.

Suponhamos que g seja uma função derivável tal que podemos considerar a função composta $F \circ g$. Nosso problema é calcular a integral $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$.

Sabemos pela regra da cadeia que $(F \circ g)'(x) = [F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$, no entanto, como F é uma primitiva de f , então podemos escrever $(F \circ g)'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Desta forma mostramos que $F \circ g$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Assim, podemos escrever: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$

Na prática procedemos da seguinte forma:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx \stackrel{(*)}{=} \int f(u) du = F(u) + C \stackrel{(*)}{=} F(g(x)) + C$$

(*) Fazemos a mudança de variável $u = g(x)$ e note que $du = g'(x)dx$

Exemplo 2: Calcule a integral $\int 2xe^{x^2} dx$.

Solução:

$$\int 2xe^{x^2} dx \stackrel{(*)}{=} \int e^u du = e^u + C \stackrel{(*)}{=} e^{x^2} + C$$

(*) Fazemos a mudança de variável $u = x^2$ e note que $du = 2xdx$

Exemplo 3: Calcule a integral $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Solução:

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{(*)}{=} \int \cos u \cdot 2 du = \text{sen } u + C \stackrel{(*)}{=} \text{sen } \sqrt{x} + C$$

(*) Fazemos a mudança de variável $u = \sqrt{x}$ e note que $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Exemplo 4: Calcule a integral $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = x - \text{arctg } x + C \end{aligned}$$

Exemplo 5: Calcule a integral $\int \frac{du}{a^2+u^2}; (a > 0)$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{a^2+u^2} &= \int \frac{du}{a^2 \left[1 + \left(\frac{u}{a} \right)^2 \right]} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{a} \right)^2} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1+w^2} dw = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+w^2} dw = \frac{1}{a} \text{arctg } w + C \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{a} \text{arctg} \left(\frac{u}{a} \right) + C \end{aligned}$$

(*) Fazemos a mudança de variável $w = \frac{u}{a}$ e note que $dw = \frac{1}{a} du \Rightarrow du = a dw$

Observação 1: Um fato importante é que o nome da variável não é relevante no processo de integração, mais especificamente, a integral

$$\int f(x)dx = \int f(u)du = \int f(w)dw = \int f(t)dt$$

Exemplo 6: Calcule a integral $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

Solução:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{dx}{4 + (x^2 + 2x + 1)} = \int \frac{dx}{2^2 + (x+1)^2} \stackrel{(*)}{=} \int \frac{du}{2^2 + u^2} \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + C \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \end{aligned}$$

(*) Fazemos a mudança de variável $u = x + 1$ e note que $du = dx$

(**) Pelo Exemplo 5, temos o resultado.

O processo de escrever $x^2 + 2x + 5 = 4 + (x^2 + 2x + 1) = 2^2 + (x+1)^2$ é denominado processo de "completar o quadrado".

Exemplo 7: Calcule a integral $\int \frac{\sqrt{2x-6}}{x+2} dx$

Solução:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sqrt{2x-6}}{x+2} dx \stackrel{(*)}{=} \\ &= \int \frac{u}{\frac{u^2}{2} + 10} \cdot u du = 2 \int \frac{u^2}{u^2 + 10} du = 2 \cdot \int \frac{(u^2 + 10) - 10}{u^2 + 10} du = \\ &= 2 \cdot \int \frac{(u^2 + 10) - 10}{u^2 + 10} du = 2 \left\{ \int \frac{u^2 + 10}{u^2 + 10} du - 10 \int \frac{1}{u^2 + 10} du \right\} \\ &= 2 \left\{ \int du - 10 \int \frac{1}{u^2 + (\sqrt{10})^2} du \right\} = \\ &= 2 \left\{ u - \frac{10}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{10}}\right) \right\} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(*)}{=} 2 \left\{ \sqrt{2x-6} - \frac{10}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2x-6}}{\sqrt{10}} \right) \right\} + C \\
& = 2 \left\{ \sqrt{2x-6} - \sqrt{10} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2x-6}{10}} \right\} + C
\end{aligned}$$

(*) Fazemos a mudança de variável $u = \sqrt{2x-6}$ e note que

$$du = \frac{2}{2\sqrt{2x-6}} dx \Rightarrow dx = u du$$

Além disso, temos que

$$2x-6 = u^2 \Rightarrow x = \frac{u^2+6}{2} \Rightarrow x+2 = \frac{u^2+10}{2}$$

5.4 Método de Integração por Partes

Este método de integração consiste em escrever uma determinada integral como uma soma de uma função com uma outra integral, na esperança que esta nova integral seja mais fácil de integrar. Vejamos com mais detalhes. Considere duas funções deriváveis em algum intervalo. Pela regra de derivação do produto entre funções temos:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

Integrando ambos os lados desta última equação, obtemos

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' dx - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

ou equivalentemente,

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Observação 1: Uma observação importante é com relação à constante de integração que omitimos na última passagem da descrição acima, procedemos assim porque aparecerão outras constantes no decorrer do processo de integração e a soma de todas elas poderá ser representado por uma única constante que introduziremos no final do processo. Após a última integração, a constante deverá ser introduzida obrigatoriamente.

Observação 2: Na prática procedemos da seguinte forma . Digamos que queremos calcular a integral

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Então fazemos $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$ e $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x) dx$.

Portanto, podemos escrever $\int u dv = uv - \int v du$, que é denominada de fórmula para integração por partes.

Exemplo 1: Calcule a integral $\int x e^{3x} dx$

Solução:

$$\begin{aligned} \int x e^{3x} dx &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C = \\ &= \frac{e^{3x}}{9} (3x - 1) + C \end{aligned}$$

(*) Por integração por partes, temos $u = x$ $dv = e^{3x} dx$ $du = dx$ $v = \frac{e^{3x}}{3}$

Exemplo 2: Calcule a integral $\int x^2 \sen x dx$

Solução:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sen x dx &\stackrel{(1)}{=} -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sen x - \int \sen x dx \right) \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sen x + \cos x) + C = 2x \sen x + (2 - x^2) \cos x + C \end{aligned}$$

(1) Por integração por partes, temos

$$u = x^2 \quad dv = \sen x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = -\cos x$$

(2) Por integração por partes, temos

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos x \, dx \\ du &= dx & v &= \text{sen } x \end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcule a integral $\int \ln x \, dx$

Solução:

$$\int \ln x \, dx \stackrel{(*)}{=} x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

(*) Por integração por partes, temos $u = \ln x$ e $dv = 1 \, dx$ $du = \frac{1}{x} \, dx$ $v = x$

Exemplo 4: Calcule a integral $\int e^{3x} \text{sen}(2x) \, dx$

Solução:

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \text{sen}(2x) \, dx &\stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos(2x) \, dx \\ &\stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{3x} \text{sen}(2x) - \frac{3}{2} \int e^{3x} \text{sen}(2x) \, dx \right] \\ &\stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{4} e^{3x} \text{sen}(2x) - \frac{9}{4} \int e^{3x} \text{sen}(2x) \, dx \end{aligned}$$

Aparentemente não houve evolução no processo de integração, entretanto se denotarmos a integral que desejamos calcular por I , isto é, $I = \int e^{3x} \text{sen}(2x) \, dx$, obteremos:

$$I = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{4} e^{3x} \text{sen}(2x) - \frac{9}{4} I + C_o$$

Note que neste momento introduzimos uma constante aleatória C_o , pois não iremos resolver mais integrais e todas as constantes estavam acumuladas na última integral a ser calculada. Assim, isolando I , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} I + I &= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{4} e^{3x} \text{sen}(2x) + C_o \Rightarrow \frac{13}{4} I = e^{3x} \left[\frac{3}{4} \text{sen}(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right] + C_o \\ \Rightarrow I &= \frac{4}{13} e^{3x} \left[\frac{3}{4} \text{sen}(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right] + \frac{4}{13} C_o = \frac{1}{13} e^{3x} [3 \text{sen}(2x) - 2 \cos(2x)] + C \end{aligned}$$

onde denotamos $C = \frac{4}{13}C_o$.

$$\text{Portanto, } \int e^{3x} \sin(2x) dx = \frac{e^{3x}}{11} [3\sin(2x) - \cos(2x)] + C.$$

(1) Por integração por partes, temos

$$u = e^{3x} \quad dv = \sin(2x) dx$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

(2) Por integração por partes, temos

$$u = e^{3x} \quad dv = \cos(2x) dx$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad v = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Exemplo 5: Calcule a integral $I = \int \sec^3 x dx$

Solução:

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^3 x dx \stackrel{(1)}{=} \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx \stackrel{(2)}{=} \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) dx = \\ &= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - I + \int \sec x dx + C_o \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - I + \int \sec x dx + C_o \stackrel{(3)}{\Rightarrow} I = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - I + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C_1 + C_o$$

$$\Rightarrow 2I = \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C_2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|] + C$$

$$\text{Portanto, } \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|] + C$$

$$\stackrel{(1)}{=} \text{Por integração por partes, temos } u = \sec x \quad dv = \sec^2 x dx \quad du = \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx \quad v = \operatorname{tg} x$$

$$\stackrel{(2)}{=} \text{Usaremos a Relação Trigonométrica: } 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\stackrel{(3)}{=} \int \sec x dx = \int \frac{\sec x \cdot (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx \stackrel{(*)}{=} \int \frac{1}{w} dw = \ln|w| + C_1$$

$$\stackrel{(*)}{=} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C_1$$

$$\stackrel{(*)}{=} w = \sec x + \operatorname{tg} x \Rightarrow dw = (\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x) dx$$

Observação 3: Em todas as integrais indefinidas que havíamos visto pode ser feita uma verificação ao final do processo de integração. Para isso, usaremos o seguinte fato $\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F' = f$

Vejamos isto neste último exemplo.

Verificação do Exemplo 5: Vimos que

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|] + C$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} [\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|] + C \right]' &= \frac{1}{2} \left[\sec x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \sec^3 x + \frac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sec x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \sec^3 x + \frac{\sec x(\operatorname{tg} x + \sec x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\sec x(\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x) + \sec x] \\ &= \frac{1}{2} [\sec x(\sec^2 x - 1 + \sec^2 x) + \sec x] \\ &= \frac{1}{2} [\sec^3 x - \sec x + \sec^3 x + \sec x] = \sec^3 x \end{aligned}$$

Teste o seu conhecimento

1. Nos exercícios de 1 a 6, calcule as integrais e verifique sua resposta por derivação.

$$1.1. \int \frac{dx}{x^4}$$

$$1.4. \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} dx$$

$$1.2. \int \sqrt{\frac{9}{1-x^2}} dx$$

$$1.5. \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$$

$$1.3. \int \frac{4x^6 + 3x^5 - 2x}{x^3} dx$$

$$1.6. \int \frac{\ln x}{x \ln x^2} dx$$

2. Encontre uma função f tal que $f'(x) + \operatorname{sen} x = 0$ e $f(0) = 3$.

3. Nos exercícios que se seguem calcule as integrais.

$$3.1. \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$3.11. \int \frac{\cos \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$3.2. \int \operatorname{tg} x dx$$

$$3.12. \int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$$

$$3.3. \int (2x^2 + 2x - 5)^6 \cdot (2x + 1) dx$$

$$3.13. \int (x-1)e^{-x} dx$$

$$3.4. \int \sqrt{x^2 - 2x^4} dx$$

$$3.14. \int x^2 e^x dx$$

$$3.5. \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$$

$$3.15. \int x^5 e^{x^2} dx$$

$$3.6. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

$$3.16. \int \operatorname{sen}^3 x dx$$

$$3.7. \int \frac{dx}{16+x^2}$$

$$3.17. \int \operatorname{cosec}^3 x dx$$

$$3.8. \int \frac{\ln x^2}{x} dx$$

$$3.18. \int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$3.9. \int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} dx$$

$$3.19. \int x \operatorname{arctg} x dx$$

$$3.10. \int \frac{e^x}{e^x + 16} dx$$

$$3.20. \int e^{3x} \cos(4x) dx$$

5.5 Integração por Substituição Trigonométrica.

Suponhamos que desejamos calcular uma integral onde o integrando contém expressões da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde admitiremos $a > 0$. Nestes casos, quando não for possível uma substituição simples, podemos remover o radical com substituições trigonométricas convenientes.

(i) A função integrando envolve a expressão $\sqrt{a^2 - u^2}$

Neste caso, podemos fazer a substituição $u = a \operatorname{sen} \theta$. Assim, $du = a \cos \theta d\theta$, e desta forma podemos escrever:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

(ii) A função integrando envolve a expressão $\sqrt{a^2 + u^2}$

Neste caso, podemos fazer a substituição $u = a \operatorname{tg} \theta$. Assim, $du = a \sec^2 \theta d\theta$, e desta forma podemos escrever:

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + (a \operatorname{tg} \theta)^2} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta$$

(iii) A função integrando envolve a expressão $\sqrt{u^2 - a^2}$

Neste caso, podemos fazer a substituição $u = a \sec \theta$. Assim, $du = a \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta$, e desta forma podemos escrever:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{(a \sec \theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = a \operatorname{tg} \theta$$

Vejam alguns exemplos para esclarecer o procedimento.

Exemplo 1: Calcule a integral $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx$

Solução:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx &\stackrel{(*)}{=} \int \frac{\sqrt{4 - (2 \operatorname{sen} \theta)^2}}{(2 \operatorname{sen} \theta)^2} 2 \cos \theta d\theta = \int \frac{\sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}}{4 \operatorname{sen}^2 \theta} 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{\sqrt{4 \cos^2 \theta}}{4 \operatorname{sen}^2 \theta} 2 \cos \theta d\theta = \int \frac{2 \cos \theta}{4 \operatorname{sen}^2 \theta} 2 \cos \theta d\theta = \int \frac{4 \cos^2 \theta}{4 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= \int \left(\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 d\theta = \int \operatorname{cotg}^2 \theta d\theta = \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \operatorname{cosec}^2 \theta \, d\theta - \int d\theta = -\cotg \theta - \theta + C \\
 &= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C
 \end{aligned}$$

(*) Fazemos a substituição $x = 2 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta \, d\theta$

Além disso, $\cotg \theta = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ e $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Observação 1: Havendo dificuldade para retornar à variável original x , faça uso de um triângulo retângulo que satisfaz a relação $\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{2}$.

Exemplo 2: Calcule a integral $\int \sqrt{4+x^2} \, dx$

Solução

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{4+x^2} \, dx &\stackrel{(*)}{=} \int \sqrt{4+(2 \operatorname{tg} \theta)^2} \cdot 2 \sec^2 \theta \, d\theta = \int \sqrt{4+4 \operatorname{tg}^2 \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta \, d\theta = \\
 &= \int \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2 \theta)} \cdot 2 \sec^2 \theta \, d\theta = \int \sqrt{4 \sec^2 \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta \, d\theta \\
 &= \int 2 \sec \theta \cdot 2 \sec^2 \theta \, d\theta = 4 \int \sec^3 \theta \, d\theta \stackrel{(**)}{=} \\
 &\stackrel{(***)}{=} 2 [\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|] + C \\
 &\stackrel{(*)}{=} 2 \left[\frac{x \sqrt{4+x^2}}{4} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{4+x^2}}{2} \right| \right] + C
 \end{aligned}$$

(*) Fazemos a substituição $x = 2 \operatorname{tg} \theta \Rightarrow dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta$. Além disso, $\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2}$ e

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

(**) Vimos no exemplo 5 da seção 5.4, que $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|] + C$

Observação 2: Havendo alguma dificuldade para retornar à variável original x , faça uso de um triângulo retângulo que satisfaz a relação

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{x}{2}.$$

Exemplo 3: Calcule a integral $\int \sqrt{x^2 - 4} \, dx$

Solução:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4} \, dx & \stackrel{(*)}{=} \int \sqrt{(2 \sec \theta)^2 - 4} \cdot 2 \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \, d\theta = \int \sqrt{4(\sec^2 \theta - 1)} \cdot 2 \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \, d\theta = \\ & = \int \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \theta} \cdot 2 \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \, d\theta = 4 \int \sec \theta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \, d\theta = \\ & = 4 \int \sec \theta \cdot (\sec^2 \theta - 1) \, d\theta = 4 \int \sec^3 \theta - \sec \theta \, d\theta = \\ & = 4 \int \sec^3 \theta \, d\theta - 4 \int \sec \theta \, d\theta = \\ & = 2[\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|] - 4 \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C = \\ & = 2[\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|] + C \stackrel{(**)}{=} 2 \left[\frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{4} - \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| \right] + C \end{aligned}$$

(*) Fazemos a substituição $x = 2 \sec \theta \Rightarrow dx = 2 \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ Além disso, $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$
e $\sec \theta = \frac{x}{2}$.

(**) Vimos no exemplo 5 da seção 5.4, que $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C_1$

$$\text{e } \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|] + C$$

Observação 3: Havendo alguma dificuldade para retornar à variável original x , faça uso de um triângulo retângulo, construa o triângulo retângulo com a informação de que

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{x}{2}.$$

5.6 Integração por Frações Parciais

Inicialmente, lembremos que uma função racional é, por definição, o quociente entre duas funções polinomiais, isto é,

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais. Vale ressaltar que algumas funções racionais simples podem ser resolvidas por processos de integração vistos anteriormente, como, por exemplo, as integrais

$$\int \frac{1}{x^2} dx, \int \frac{1}{x^2 + 16} dx, \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx \text{ e } \int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx$$

Nesta seção vamos apresentar um método de integração, denominado “*Integração por Frações Parciais*”. Este método se baseia em escrever a função racional como soma de frações mais simples, na esperança de facilitar a integração, integrando as frações mais simples. Para isto, usaremos um resultado da Álgebra, que é dado no teorema que se segue.

Teorema 1: Todo polinômio, com coeficientes reais, pode ser escrito como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis, todos com coeficientes reais.

Demonstração: Não veremos a demonstração neste curso para não desviarmos de nosso objetivo imediato que são as técnicas de integração. Não obstante, o estudante verá a demonstração em um curso de álgebra mais adiante. Dividiremos o nosso estudo em quatro casos, dependendo de como o denominador $q(x)$, da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, seja decomposto. Admitiremos no que segue que o grau de

$p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$, isto é, $\partial p(x) < \partial q(x)$, se isso não ocorrer, façamos a divisão inicialmente, e desta forma voltaremos aos casos tradicionais. Mais precisamente, se $\partial p(x) \geq \partial q(x)$ então existem polinômios $m(x)$ e $r(x)$ tais que $p(x) = q(x) \cdot m(x) + r(x)$, onde $\partial r(x) < \partial q(x)$, assim obtemos

$$\int f(x) dx = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{q(x) \cdot m(x) + r(x)}{q(x)} dx = \int m(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx, \text{ onde } \partial r(x) < \partial q(x).$$

Outra simplificação útil em nosso estudo é admitir que o polinômio $q(x)$ possui coeficiente do termo de mais alto grau igual a 1, se isto não ocorrer divida o

numerador e o denominador da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ por este fator.

Passemos aos casos.

(Caso 1) $q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

Neste caso podemos escrever $q(x)$ na forma $q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, desta forma o *Teorema das frações parciais* estabelece que existem constantes

$$A_1, A_2, \dots, A_n \text{ tais que } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Estas constantes serão determinadas conforme o exemplo abaixo. Daí teremos:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} dx = \\ &= \int \frac{A_1}{x - a_1} dx + \int \frac{A_2}{x - a_2} dx + \dots + \int \frac{A_n}{x - a_n} dx = \\ &= A_1 \int \frac{1}{x - a_1} dx + A_2 \int \frac{1}{x - a_2} dx + \dots + A_n \int \frac{1}{x - a_n} dx \\ &= A_1 \ln|x - a_1| + A_2 \ln|x - a_2| + \dots + A_n \ln|x - a_n| + C \end{aligned}$$

Exemplo 1: Calcule a integral $\int \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$

Solução:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx &= \int \frac{1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} dx \stackrel{(*)}{=} \int \frac{1/2}{x - 1} + \frac{-1}{x - 2} + \frac{1/2}{x - 3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x - 2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \ln|x - 2| + \frac{1}{2} \ln|x - 3| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 2} \right| + K \end{aligned}$$

$$(*) \frac{1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \Rightarrow A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2) = 1$$

- Para $x = 1$, temos que $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

- Para $x = 2$, temos que $-B = 1 \Rightarrow B = -1$
- Para $x = 3$, temos que $2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Desta forma, podemos escrever $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{1/2}{x-3}$

Note que, neste caso, não é aconselhável multiplicar os fatores e fazer identificação de polinômios, daria mais trabalho. Não obstante, se assim procedermos, obteríamos o mesmo resultado.

Exemplo 2: Calcule a integral $\int \frac{x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 23}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$

Solução: Como o grau do numerador, $p(x)$, é maior que o grau do denominador, $q(x)$, efetuamos inicialmente a divisão dos polinômios, para obter:

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 23 = (x + 4)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 23}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx &= \int \frac{(x+4)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx = \\ &= \int \frac{(x+4)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx = \int (x+4) + \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx = \\ &= \int (x+4) dx + \int \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx \stackrel{\text{Exemplo 1}}{=} \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x-2} \right| + K \end{aligned}$$

(Caso 2) $q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos, alguns dos quais repetidos.

Se um determinado fator linear de $q(x)$, digamos $x - a$, tem multiplicidade k , a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

Estas constantes podem ser determinadas conforme o exemplo que se segue.

Exemplo 3: Calcule a integral $\int \frac{3x^2 - 7x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$

Solução: O primeiro passo é decompor o denominador da função racional. Vejamos, $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$. Desta forma o denominador é um produto de fatores lineares distintos, alguns dos quais repetidos. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x + 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx &= \int \frac{3x^2 - 7x + 5}{(x-1)(x-2)^2} dx = \int \frac{3x^2 - 7x + 5}{(x-1)(x-2)^2} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \ln|x-1| + 2 \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + K \\ &= \ln|x^3 - 5x^2 + 8x - 4| - \frac{3}{x-2} + K. \end{aligned}$$

$$(*) \frac{3x^2 - 7x + 5}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1) = 3x^2 - 7x + 5$$

- Para $x = 1$, temos que $A = 1$
- Para $x = 2$, temos que $C = 3$
- Para $x = 3$, temos que $A + 2B + 2C = 11 \Rightarrow 2B = 11 - 7 \Rightarrow B = 2$

Portanto, podemos escrever $\frac{3x^2 - 7x + 5}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$

(Caso 3) $q(x)$ é um produto de fatores lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem.

Neste caso, para cada fator quadrático irredutível ($\Delta = b^2 - 4c < 0$) da forma $x^2 + bx + c$, corresponderá uma fração parcial da forma $\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$. Estas constantes podem ser determinadas conforme o exemplo que se segue.

Exemplo 4: Calcule a integral $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$

Solução: O primeiro passo é decompor o denominador da função racional. Vejamos, $x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$. Desta forma, o denominador é um produto de fatores lineares e quadráticos irredutíveis. Assim,

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x - 3} dx = \int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x^2 + 2x + 3| + K =$$

$$= \ln \left| \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[4]{x^2 + 2x + 3} \right| + K$$

$$(*) \quad \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\Rightarrow A(x^2 + 2x + 3) + (x-1)(Bx + C) = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (3A-C) = x^2 + x + 1$$

Fazendo a identidade dos polinômios, obtemos o sistema:
$$\begin{cases} A+B = 1 \\ 2A-B+C = 1 \\ 3A-C = 1 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $A = B = C = \frac{1}{2}$. Portanto, podemos escrever $\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x - 3}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} \right)$$

(Caso 4) $q(x)$ é um produto de fatores lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem.

Neste caso, para cada fator quadrático irredutível ($\Delta = b^2 - 4c < 0$) da forma $x^2 + bx + c$, que se repete com multiplicidade k , corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(x^2 + bx + c)^k}$$

Estas constantes podem ser determinadas conforme o exemplo que se segue.

Exemplo 5: Calcule a integral $\int \frac{x^4 + 4x^2 + x - 2}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} dx$

Solução: O primeiro passo é decompor o denominador da função racional. Vejamos, $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 + 1)^2$. Desta forma o denominador é um produto de fatores lineares e quadráticos irredutíveis que se repetem. Assim,

$$\int \frac{x^4 + 4x^2 + x - 2}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} dx = \int \frac{x^4 + 4x^2 + x - 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2} dx \stackrel{(*)}{=} \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{(x^2 + 1)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{(x^2 + 1)^2} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x+3}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx + 3 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\stackrel{(**)}{=} \ln|x-1| - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{3}{2} \left(\arctg x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + K_o$$

$$(*) \frac{x^4 + 4x^2 + x - 2}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} = \frac{x^4 + 4x^2 + x - 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 1} + \frac{Dx+E}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x-1)(x^2 + 1) + (x-1)(Dx + E) = x^4 + 4x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow A(x^4 + 2x^2 + 1) + (Bx + C)(x^3 - x^2 + x - 1) + (x-1)(Dx + E) = x^4 + 4x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow (A+B)x^4 + (-B+C)x^3 + (2A+B-C+D)x^2 + (-B+C-D+E)x + (A-C-E) = x^4 + 4x^2 + x - 2$$

Fazendo a identidade dos polinômios, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -B + C = 0 \\ 2A + B - C + D = 4 \\ -B + C - D + E = 1 \\ A - C - E = -2 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por $A=1$, $B=C=0$, $D=2$ e $E=3$. Portanto, podemos

escrever $\frac{x^4 + 4x^2 + x - 2}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 1} + \frac{Dx+E}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{(x^2 + 1)^2}$

$$(**) \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \stackrel{(\#)}{=} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} = \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta = \int \cos^2 \theta d\theta = \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + K_o = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta + K_o = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + K_o$$

Fazendo a substituição trigonométrica $x = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow dx = \sec^2 \theta d\theta$

5.7 Substituições Diversas

Nesta seção veremos algumas substituições especiais que podem ser usadas para resolvermos determinadas integrais. Veremos vários exemplos onde usaremos algumas dessas substituições.

Exemplo 1: Calcule a integral $\int \cos^5 x \, dx$

$$\text{Solução: } \int \cos^5 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx \stackrel{(*)}{=}$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx \stackrel{(*)}{=}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int (1 - u^2)^2 \, du = \int (1 - 2u^2 - u^4) \, du = u - \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$$(*) \quad u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$$

Exemplo 2: Calcule a integral $\int \sin^4 x \, dx$.

Solução:

$$\int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \, dx = \frac{3}{8} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Neste exemplo não fizemos nenhuma substituição, procedemos de maneira direta. No processo de integração é importante adquirir tal habilidade.

Exemplo 3: Calcule a integral $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

Solução:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \, dx &= \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x - \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

Observação: Quando temos uma integral da forma $\int R(\cos x, \operatorname{sen} x) dx$, isto é, o integrando é uma função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, devemos fazer a seguinte substituição $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

$$\text{Além disso, como } \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ e } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Assim, quando utilizamos esta substituição podemos fazer uso das fórmulas

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Vejamos esta substituição no exemplo que se segue.

Exemplo 4: Calcule a integral $\int \frac{dx}{3+5 \cos x}$

$$\text{Solução: } \int \frac{dx}{3+5 \cos x} \stackrel{(*)}{=} \int \frac{1}{3+5 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{8-2t^2} dt = - \int \frac{1}{t^2-4} dt =$$

$$\stackrel{(**)}{=} -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C$$

(*) Fazendo a substituição $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Além disso, temos $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. (***) Resolvendo a integral $\int \frac{1}{t^2-4} dt$ pelo método de

$$\text{frações parciais, temos } \int \frac{1}{t^2-4} dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C$$

Teste o seu conhecimento

1. Calcule as integrais dadas.

1.1.
$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2} dx$$

1.2.
$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx$$

1.3.
$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-16}} dx$$

1.4.
$$\int \frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3} dx$$

1.5.
$$\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} dx$$

1.6.
$$\int \frac{2x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$$

1.7.
$$\int \frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} dx$$

1.8.
$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2}$$

5.8 Área e Integral Definida

Agora vamos introduzir o conceito de integral definida. Veremos as propriedades das integrais definidas e veremos o *Teorema Fundamental do Cálculo* que é a peça chave de todo o Cálculo Diferencial e Integral, pois é o elo de ligação entre as operações de derivação e integração. Veremos dentro das aplicações da integral, o cálculo de áreas entre curvas e volumes de sólidos de revolução.

Considere uma função contínua e não negativa f . Desejamos analisar agora o problema de definir a área A de uma região plana S , delimitada pelo gráfico de f , pelo eixo dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme figura 1.

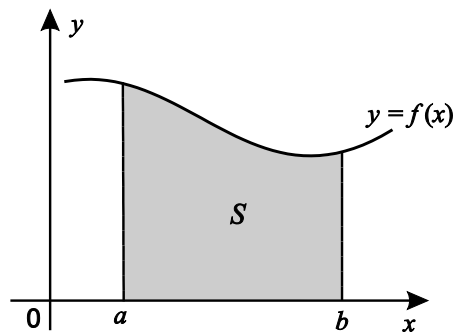


Figura 1: Área sob o gráfico de f , de a até b .

Para calcular esta área, considere uma partição P do intervalo $[a, b]$, isto é, uma subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Com o objetivo de entender a definição, considere também $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Além disso, em cada um destes intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i .

Para cada i , $i = 1, \dots, n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$.

A soma das áreas dos n retângulos, que denotaremos por S_n , é dada por

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

Esta soma é denominada soma de Riemann da função f . Note que à medida que n cresce muito e cada Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n$, torna-se muito pequeno, a soma das

áreas retangulares aproxima-se do que entendemos intuitivamente como sendo a área da região plana S .

Definição 1: Seja f uma função contínua e não negativa em $[a,b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b , é definida por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

onde c_i é um ponto aleatório do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Observação 1: Podemos provar, não o faremos aqui neste curso, que o limite da definição anterior existe e é um número não negativo.

Definição 2: Seja f uma função definida no intervalo $[a,b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a,b]$. A *integral definida* de a até b , denotada por $\int_a^b f(x) dx$, é dada

$$\text{por } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \text{ desde que o limite exista. Se } \int_a^b f(x) dx \text{ existe,}$$

dizemos que f é *integrável* em $[a,b]$.

Observação 2: O símbolo \int foi introduzido por Leibniz e é chamado de sinal de integração. Na notação de integral definida, $\int_a^b f(x) dx$, os números a e b são denominados limites de integração, mais precisamente, a é denominado limite inferior e b de limite superior. Além disso, quando $\int_a^b f(x) dx$ é integrável em $[a,b]$, temos que $\int_a^b f(x) dx$ é um número real e não depende da variável utilizada para integração, desta forma podemos escrever, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(w) dw$, isto é, podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente.

Observação 3: Uma observação de grande importância é que se f é contínua e não negativa em $[a,b]$, as definições de área e integral definida coincidem e portanto temos que $A = \int_a^b f(x)dx$, isto é, a integral definida representa a área da região sob o gráfico de f , de a até b .

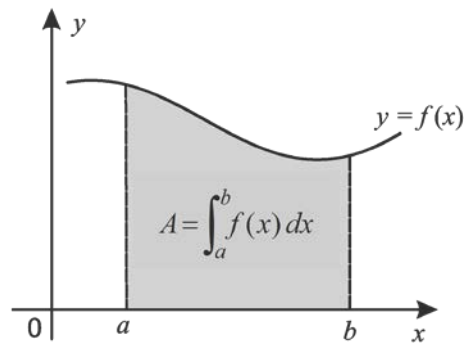


Figura 2: Área sob f , de a até b .

Observação 4: No que segue, quando usarmos um intervalo $[a,b]$, admitiremos $a \leq b$.

Definição 3: Suponhamos que f é integrável em $[a,b]$. Então,

$$(i) \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$(ii) \text{ Se } f(a) \text{ existe, então } \int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorema: Se f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Demonstração: Não será feita neste curso. Não obstante, o estudante verá esta demonstração num primeiro curso de análise na reta que fará futuramente.

5.9 Propriedades da Integral Definida

Agora, listaremos várias propriedades da integral definida. Não é o nosso objetivo demonstrar estas propriedades, apenas usá-las. O leitor interessado na demonstração destas propriedades encontrará nas bibliografias listadas abaixo.

Teorema 1: Se f é uma função integrável em $[a,b]$ e k é um número real arbitrário, então kf é também uma função integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx .$$

Teorema 2: Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$, então $f + g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Observação: O teorema 2 pode ser generalizado para a soma de um número finito de funções e podemos escrever

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

Além disso, o teorema também é válido para diferença de função

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Teorema 3: Suponhamos que $a < c < b$ e f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Teorema 4: Seja f uma função integrável em $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Teorema 5: Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ tais que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Teorema 6: Se f é uma função contínua em $[a,b]$, então

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Teorema 7: Se f é uma função contínua em $[a,b]$, então existe um ponto c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

Teorema 8: Se f é uma função contínua em $[a,b]$, tal que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

5.10 Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O Cálculo Diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a precisa relação inversa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental do Cálculo os capacitou a computar áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário recorrer à definição diretamente.

Teorema 1: Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então a função $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, é derivável em $[a, b]$ e $G'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Demonstração: De fato, dado $x \in [a, b]$, temos

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(z) \stackrel{(**)}{=} f(x) \end{aligned}$$

(*) Como f é contínua em $[a, b]$, em particular o será em $[x, x+h]$, então pelo Teorema 7,

existe $z \in (x, x+h)$ tal que $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(z)(x+h-x) = f(z)h$.

(**) Além disso, como z está entre x e $x+h$, segue que $z \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$. Então pela continuidade da função f , temos que $\lim_{h \rightarrow 0} f(z) = f(\lim_{h \rightarrow 0} z) = f(x)$.

Note que se x for a ou b , considere os limites laterais adequados. Isto completa a demonstração.

Agora, estamos em condições de estabelecer o principal teorema do cálculo integral denominado Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2 (Teorema Fundamental do Cálculo): Sejam f uma função contínua em $[a,b]$ e F uma primitiva de f em $[a,b]$, então $\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Demonstração: Como f é uma função contínua em $[a,b]$, então pelo Teorema 1, segue que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de f em $[a,b]$. Seja F uma primitiva de f em $[a,b]$, então existe uma constante C tal que $F(x) = G(x) + C, \forall x \in [a,b]$.

Note agora que $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Assim, temos que

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) - C) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - 0 = \int_a^b f(t)dt.$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 1: Calcule a integral $\int_0^1 x^2 dx$

Solução: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$. Note que, como a função $f(x) = x^2$ é

contínua e não negativa em $[0,1]$, resulta que a área sob o gráfico de f , de 0 a 1, é igual a $\frac{1}{3}$.

Exemplo 2: Calcule a integral $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

Solução: $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$. Note que, como a função

$f(x) = \cos x$ é contínua e não negativa em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, resulta que a área sob o gráfico de f , de 0 a $\frac{\pi}{2}$, é igual a 1.

Exemplo 3: Calcule a integral $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx$

Solução: Neste caso, temos dois procedimentos para calcular a integral. Vejamos em detalhes estes procedimentos.

Primeiro Procedimento: Calculamos, inicialmente, a integral indefinida

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx.$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} \ln|u| + C \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

(*) Fazemos a mudança de variáveis $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x \, dx$. Portanto, $\frac{1}{2} du = x \, dx$. De

posse da primitiva de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ que é dada por $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$, calculamos a integral. Com efeito,

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

Segundo Procedimento: Calculamos diretamente a integral dada.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} [\ln|u| + C]_1^2 = \frac{1}{2} [\ln 2 - \ln 1] = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

(*) Fazemos a mudança de variáveis $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x \, dx$. Portanto, $\frac{1}{2} du = x \, dx$. Além disso, como $u = u(x) = x^2 + 1$, então $u(0) = 1$ e $u(1) = 2$

A vantagem do segundo procedimento está em não haver a necessidade de desfazermos a substituição. Por outro lado, se a integral for um pouco mais complicada, o primeiro procedimento é mais indicado.

Note também que, como a função $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ é contínua e não negativa em $[0,1]$, resulta que a área sob o gráfico de f , de 0 a 1, é igual a $\frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$

Exemplo 4: Calcule a integral $\int_1^e \ln x \, dx$

Solução: Sabemos que $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$, vimos este fato quando estudamos integração por partes. Assim,

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = [e \ln e - e] - [1 \ln 1 - 1] = 1.$$

Note que, como a função $f(x) = \ln x$ é contínua e não negativa em $[1, e]$, resulta que a área sob o gráfico de f , de 1 a e , é igual a 1.

Observação: Quanto ao método de integração por partes, na prática procedemos da seguinte forma. Digamos que queremos calcular a integral $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$. Então façamos $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) \, dx$ e $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x) \, dx$.

Portanto, podemos escrever $\int_a^b u \, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \, du$, que é denominada de fórmula para integração por partes com limites de integração.

Exemplo 5: Calcule a integral $\int_0^1 x e^x dx$

$$\text{Solução: } \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = (e - 0) - (e - 1) = 1$$

(*) Por integração por partes, temos
$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

5.11 Cálculo de Áreas

Podemos calcular áreas de figuras planas com o auxílio da integral definida. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Determine a área limitada pela curva $y = 9 - x^2$ e o eixo dos x .

Solução: Como $y = f(x) = 9 - x^2$ é uma função contínua e não negativa no intervalo $[-3, 3]$, então a área procurada, que denotaremos por A , é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 = (27 - 9) - (-27 + 9) = 36$$

Portanto, a área é 36 unidades de área.

Exemplo 2: Determine a área limitada pela curva $y = x^2 - 9$ e o eixo dos x .

Solução: Como $y = f(x) = x^2 - 9$ é uma função contínua no intervalo $[-3, 3]$, no entanto, negativa no intervalo $(-3, 3)$, então a área procurada, que denotaremos por A , é dada por

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 = (27 - 9) - (-27 + 9) = 36$$

Portanto, a área é 36 unidades de área.

Exemplo 3: Determine a área limitada pela curva $y = \sin x$ e o eixo dos x , de 0 até 2π .

Solução: Como $y = f(x) = \sin x$ é uma função contínua em $[0, 2\pi]$, positiva no intervalo $(0, \pi)$ e negativa em $(\pi, 2\pi)$, então a área procurada, que denotaremos por A , é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx = \\ &= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = (1+1) + (1+1) = 4 \end{aligned}$$

Portanto, a área é 4 unidades de área.

Exemplo 4: Determine a área limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 6$.

Solução: Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 6$. Inicialmente, vamos determinar a interseção entre as curvas dadas. Vejamos,

$$x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}. \text{ Logo, as curvas se}$$

interceptam nos pontos de abscissa $x = -2$ e $x = 3$. Note que $g(x) \geq f(x), \forall x \in [-2, 3]$. Então a área procurada, que denotaremos por A , é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-2}^3 [x + 6 - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 = \left[\frac{9}{2} + 18 - 9 \right] - \left[\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3} \right] = \\ &= \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

Portanto, a área é $\frac{125}{6}$ unidades de área.

Observação: Em geral, a área A limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, é dada por $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Exemplo 5: Determine a área limitada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 5$.

Solução: Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 5$. Inicialmente, vamos determinar a interseção entre as curvas dadas. Vejamos,

$$x^2 - 1 = x + 5 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}.$$

Logo, as curvas se interceptam nos pontos de abscissa $x = -2$ e $x = 3$. Note que $g(x) \geq f(x), \forall x \in [-2, 3]$. Então a área procurada, que denotaremos por A , é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-2}^3 [(x + 5) - (x^2 - 1)] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 = \left[\frac{9}{2} + 18 - 9 \right] - \left[\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3} \right] = \\ &= \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

Portanto, a área é $\frac{125}{6}$ unidades de área. Observe que recaímos basicamente no Exemplo 4, o que fizemos foi transladar verticalmente para baixo, 1 unidade, a região do Exemplo 4. É claro que, desta forma, o valor da área não se altera.

5.12 Cálculo de Volumes

Definição: Seja f uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e seja \mathfrak{R} a região sob o gráfico de f de a até b . A volume do sólido de revolução T , gerado pela rotação de \mathfrak{R} em torno do eixo dos x , é definido por

$$V = \lim_{\text{máx} \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n f^2(c_i) \Delta x_i,$$

desde que o limite exista.

Observação: De acordo com a definição, temos a fórmula $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Exemplo: Calcule o volume V do sólido T , gerado pela rotação da região \mathfrak{R} , limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 1$, em torno do eixo dos x .

Solução: Seja $f(x) = x^2$. Sabemos que o volume V é dado por

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}$$

Teste o seu conhecimento

Calcule as integrais.

$$1. \int_0^4 \sqrt{x} \, dx$$

$$5. \int_0^3 \sqrt{x+1} \, dx$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

$$2. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$$

$$6. \int_1^2 x \ln x \, dx$$

$$10. \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx$$

$$3. \int_0^{\ln 2} e^{3x} \, dx$$

$$7. \int_0^2 (6+x-x^3) \, dx$$

$$11. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$$

$$4. \int_2^4 \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$8. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$$

$$12. \int_1^e \cos(\ln x) \, dx$$

13. Seja f uma função contínua em $[-a, a]$, onde $a > 0$. Mostre que:

$$13.1. \text{ Se } f \text{ é par, então } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

$$13.2. \text{ Se } f \text{ é ímpar, então } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

$$14. \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{tg} x \, dx$$

$$15. \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x^2} \sin x \, dx$$

$$16. \text{ Calcule } \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \, dt \right]$$

17. Determine a área da região S limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2 - x^2$ e $x = 0$.

18. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x , da região limitada pela parábola $y = \frac{1}{4}(13 - x^2)$ e pela reta $y = \frac{1}{2}(x + 5)$.

19. (Desafio) Calcule a integral $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$

BIBLIOGRAFIA

STEWART, James. **Cálculo**. 5 ed. Vol. 1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2008.

LEITHOLD, Louis. **Cálculo com geometria analítica**. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, George B et al. **Cálculo 1.1ª ed.** São Paulo: Addison Wesley, 2009. Vol. 1.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

FLEMMING, Diva M. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 5.ed. São Paulo, SP: Makron Books do Brasil, 1992.

LARSON, Roland E.; HOSTELER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações**, 4 ed., Rio de Janeiro: LTC, 1998

MEDEIROS, Valéria Z. et. al. **Pré-Cálculo**, São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. v.1, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SWOKOWSKI, E. W., **Cálculo com Geometria Analítica**, vol. 1, Makron Books, 2ª edição, 1994.

GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, vols. 1 e 2, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos S.A, 2001.

BOULOS, P., **Introdução ao Cálculo**, vols. 1 e 2, São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

Páginas WEB:

<http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/calculo1.html>

<http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2009.2/gma00108/index.html>

<http://www.labma.ufrj.br/~mcabral/bvm/bvm-ufrj-disciplina.html>

<http://ecalculo.if.usp.br>