

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA**

**NEEMIAS SILVA MARTINS**

**O BAKER MAP 2-POR-1**

**VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2021**

**NEEMIAS SILVA MARTINS**

**O BAKER MAP 2-POR-1**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Pouya Mehdipour

**VIÇOSA - MINAS GERAIS**  
2021

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

M386b  
2021 Martins, Neemias Silva, 1995-  
O Baker Map 2 - por - 1 / Neemias Silva Martins. – Viçosa,  
MG, 2021.  
78 f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Pouya Mehdipour.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 77-78.

1. Dinâmica. 2. Comportamento caótico dos sistemas.  
3. Teoria ergódica. I. Universidade Federal de Viçosa.  
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.39

NEEMIAS SILVA MARTINS

O BAKER MAP 2-POR-1

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de fevereiro de 2021.

Assentimento:



---

Neemias Silva Martins  
Autor



---

Pouya Mehdipour  
Orientadora

*Aos meus pais, José e Elvira,  
e ao amor da minha vida, Sarah.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus que sempre esteve a me guiar.

Agradeço aos meus pais, José e Elvira, que me apoiaram durante toda a minha trajetória. Aos meus irmãos, Miquéias e Kalebe, pelo companheirismo e cuidado.

Agradeço à minha noiva Sarah, a quem devo os meus dias mais felizes e o conforto nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos que a vida acadêmica me proporcionou - junto de vocês a vida se torna mais leve.

Agradeço à professora Pouya, que com muita dedicação e entusiasmo pela matemática me orientou neste trabalho.

À professora Catarina, cuja criatividade e disposição são admiráveis e ao professor André pelo suporte.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Grazie a tutti voi!

*"O caos é um ordem por decifrar."  
- José Saramago.*

# Resumo

MARTINS, Neemias Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2021.  
**O baker map 2-por-1.** Orientadora: Pouya Mehdipour.

Neste trabalho, apresentamos a construção e codificação de um baker map 2-por-1. Estudamos suas propriedades ergódicas e caoticidade do ponto de vista de Caos Devaney. Mais precisamente, estudamos transformações do Tipo Bernoulli e LM-Bernoulli e mostramos que o baker map 2-por-1 é uma transformação LM-Bernoulli que preserva medida de Lebesgue e é ergódica. Além disso, investigamos seu comportamento caótico.

Palavras-chave: Baker Map. Dinâmica Simbólica. Caos. Teoria Ergódica.



# Abstract

MARTINS, Neemias Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2021. **The baker map 2-to-1**. Adviser: Pouya Mehdipour.

In this work, we present the construction and codifying of a 2-to-1 baker map. We show its ergodic properties together with its chaotic behaviors from the point of view of Devaney chaos. More precisely, we study the Bernoulli and LM-Bernoulli type transformations and show that the 2-to-1 baker map is an LM-Bernoulli transformation that preserves Lebesgue's measure and is ergodic. Furthermore, we investigate its chaotic behavior.

Keywords: Baker Map. Symbolic Dynamics. Chaos. Ergodic Theory.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Introdução à Teoria da Medida</b>	<b>12</b>
1.1 Espaços Topológicos . . . . .	12
1.1.1 Espaços Métricos . . . . .	15
1.2 Espaços Mensuráveis . . . . .	15
1.3 Espaços de Medida . . . . .	17
1.4 Medida de Lebesgue . . . . .	18
1.4.1 Medidas Completas . . . . .	19
1.4.2 Conjuntos de Cantor . . . . .	19
1.5 Medida Produto . . . . .	21
1.6 Integral de Lebesgue . . . . .	22
1.7 Medidas Invariantes . . . . .	28
1.7.1 O Pushforward de uma Medida . . . . .	30
<b>2 Densidades e Operadores de Transferência</b>	<b>31</b>
2.1 Operador de Markov . . . . .	31
2.2 Operador de Frobenius-Perron . . . . .	33
2.3 Operador de Koopman . . . . .	35
<b>3 Transformações do tipo Bernoulli e LM-Bernoulli</b>	<b>39</b>
3.1 O Espaço de Sequências de Símbolos $\Sigma_S$ . . . . .	39
3.2 O Espaço de Deslocamento . . . . .	44
3.3 Transformações do tipo Bernoulli . . . . .	46
3.4 Dinâmica Simbólica Estendida . . . . .	47
3.5 Espaço Zip-Shift . . . . .	49
3.6 Transformações LM-Bernoulli . . . . .	50
<b>4 Baker Map 1-por-1 e 2-por-1</b>	<b>53</b>
4.1 A transformação Baker Map 1-por-1 . . . . .	53
4.2 A transformação Baker Map 2-por-1 . . . . .	57
<b>5 Ergodicidade e Caos Devaney</b>	<b>61</b>
5.1 Transformações Ergódicas . . . . .	61
5.2 Transformações Mixing . . . . .	62
5.2.1 A Ergodicidade e Mixing do Baker Map 1-por-1 . . . . .	64
5.2.2 A Ergodicidade e Mixing do Baker Map 2-por-1 . . . . .	66
5.3 Caos Devaney . . . . .	68
5.3.1 O Baker Map 1-por-1 $T$ é caótico . . . . .	70

<b>5.3.2</b> O Baker Map 2-por-1 $\bar{T}$ é caótico . . . . .	71
<b>Apêndice A</b>	73
<b>Bibliografia</b>	77

# Introdução

A teoria do caos é um ramo da matemática que se concentra no estudo de sistemas dinâmicos, cujos estados aparentemente aleatórios de desordem e irregularidades, são frequentemente governados por leis determinísticas altamente sensíveis às condições iniciais. O comportamento caótico aparece em muitos sistemas naturais, incluindo as redes neurais de cérebro humano, irregularidades nos batimentos cardíacos, mudanças climáticas, etc. e possui aplicações em uma grande variedade de disciplinas. Em 1967, SMALE [16] construiu uma ferradura 1-por-1 que se tornou a marca registrada do caos. Uma das principais ferramentas no estudo da dinâmica caótica é fornecida pela teoria ergódica. A Teoria Ergódica estuda os comportamentos estatísticos de sistemas dinâmicos determinísticos.

Uma das maneiras de se estudar o comportamento caótico é por meio da análise de modelos matemáticos caóticos. A transformação conhecida como *baker map* é um objeto dinâmico que fornece um paradigma para o caos determinístico. Este mapa, que é topologicamente conjugado ao mapa da ferradura de Smale, preserva a medida de Lebesgue bidimensional é rico em propriedades ergódicas, tais como *Fortemente Mixing* e *Mixing Topológico*. Além disso, do ponto de vista físico, um grande número de sistemas governados pelas leis de Newton são conhecidos por se assemelharem à dinâmica do baker map e o mesmo comportamento pode ser visto em processos estocásticos como o lançamento de moeda. Os processos deste tipo são conhecidos como Processos de Bernoulli e na teoria ergódica tais transformações são chamadas de transformações de Bernoulli [19].

Em [6] e [7], LAMEI e MEHDIPOUR definiram uma ferradura de Smale  $n$ -por-1 e uma transformação denominada Zip-Shift que estende o comportamento do mapa de deslocamento (shift-map) a transformações localmente invertíveis. Em [8], os autores definiram as transformações  $(m, l)$ -Bernoulli (LM-Bernoulli) que constituem uma extensão do conceito de transformações do tipo Bernoulli.

Em continuação destes trabalhos, nesta dissertação estudamos a construção e codificação de um baker map 2-por-1, que constitui uma transformação localmente invertível, e estudamos suas propriedades ergódicas e seu comportamento caótico do ponto de vista de caos Devaney. Os teoremas e corolários que mencionaremos a seguir são resultados originais obtidos neste trabalho de mestrado.

**Teorema 4.2.5** *A transformação baker map 2-por-1 é LM-Bernoulli.*

O resultado acima é o principal teorema do capítulo 4. Mostramos que o baker map 2-por-1 é uma transformação LM-Bernoulli - o que nos permite codificar o baker map 2-por-1 usando a dinâmica simbólica estendida.

Verificamos, no capítulo 5, que a aplicação Zip-Shift é fortemente mixing e por meio deste fato, mostramos que a propriedade LM-Bernoulli implica em mixing forte.

**Teorema 5.2.18** *Toda transformação LM-Bernoulli é fortemente mixing.*

Em particular, o baker map 2-por-1 é fortemente mixing e também é uma transformação ergódica (Corolário 5.2.19) - uma vez que mixing forte garante ergodicidade.

Nestes resultados, trabalhamos com um conjunto invariante de modo que restrito a tal conjunto o baker map 2-por-1 é uma transformação contínua e, como é fortemente mixing, também topologicamente mixing. Chamamos tal transformação de baker map 2-por-1  $\bar{T}$  e mostramos que o baker map 2-por-1  $\bar{T}$  satisfaz à definição de caos Devaney, ou seja, tal transformação é topologicamente transitiva, possui densidade de pontos periódicos e tem dependência sensível às condições iniciais.

A transitividade topológica é obtida por meio da propriedade de mixing topológico (Corolário 5.3.9); Verificamos a densidade de pontos periódicos por meio do isomorfismo de  $\bar{T}$  ao Zip-Shift e da densidade de pontos periódicos da aplicação Zip-Shift (Corolário 5.3.8); Para obtermos a sensibilidade às condições iniciais, provamos que em um espaço métrico infinito, a propriedade de mixing topológico e a densidade de pontos periódicos são suficientes para a dependência sensível às condições iniciais, isto é, mostramos o seguinte teorema:

**Teorema 5.3.2** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $X$  um conjunto infinito e  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Se  $T$  é topologicamente mixing e  $Per(T)$  é denso em  $X$ , então  $T$  tem dependência sensível às condições iniciais.*

Por fim, concluímos que o baker map 2-por-1 possui comportamento caótico:

**Teorema 5.3.10** *A transformação baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é caótica.*

A dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos de teoria de medida e topologia necessários para o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 2 definimos densidades e operadores de transferência. Tais operadores lineares nos fornecem alguns resultados sobre transformações que preservam medida. No capítulo 3 definimos as transformações Bernoulli e LM-Bernoulli e estudamos a dinâmica simbólica dada pelo mapa de deslocamento e a dinâmica simbólica estendida dada pelo mapa Zip-Shift. No capítulo 4 codificamos o baker map 1-por-1 e o baker map 2-por-1 mostrando que eles são, respectivamente, transformações do tipo Bernoulli e LM-Bernoulli. No capítulo 5 estudamos a ergodicidade, as propriedades fortemente mixing e mixing topológico e o caos Devaney para as transformações baker map 1-por-1 e baker map 2-por-1.

# Capítulo 1

## Introdução à Teoria da Medida

Introduzimos neste capítulo os conceitos básicos de teoria da medida. Enunciamos os resultados necessários para a construção de espaços topológicos e em seguida estudamos os espaços mensuráveis e os espaços de medida. Em especial, definimos a medida de Lebesgue e a medida produto. Estudamos a integral de Lebesgue, o que nos permitirá trabalhar com densidades e operadores de transferência no próximo capítulo. Finalizamos este capítulo investigando medidas invariantes. Os principais resultados deste trabalho são relacionados aos espaços mensuráveis gerados por conjuntos abertos e às transformações que preservam medida.

### 1.1 Espaços Topológicos

As referências para esta seção são [10], [12], [20], [5].

**Definição 1.1.1.** Uma **topologia** em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaz as seguintes propriedades:

(i)  $\emptyset, X \in \tau$ ;

(ii) Se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família de elementos de  $\tau$ , então  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ ;

(iii) Se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família finita de elementos de  $\tau$ , então  $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$ .

O par  $(X, \tau)$  é dito **espaço topológico**. Um subconjunto  $A$  de  $X$  é um **subconjunto aberto** de  $X$  se  $A$  pertence a  $\tau$ . Em casos em que não se faz necessário explicitar a topologia  $\tau$ , diremos simplesmente que  $X$  é um espaço topológico, omitindo a notação  $(X, \tau)$ .

**Definição 1.1.2.** Um subconjunto  $F$  de um espaço topológico  $X$  diz-se **fechado** se o seu complementar  $X \setminus F$  é aberto.

**Exemplo 1.1.3.** Se  $X$  é um conjunto qualquer, a coleção de todos subconjuntos de  $X$ , dado por  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , é uma topologia em  $X$  conhecida como **topologia discreta**.

**Definição 1.1.4.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  é **contínua** se  $T^{-1}(A)$  é aberto para cada subconjunto aberto  $A \subset Y$ .

**Definição 1.1.5.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Dizemos que a aplicação  $T : X \rightarrow Y$  é **contínua** em  $x \in X$ , se para qualquer subconjunto aberto  $B \subset Y$  contendo  $T(x)$ , existe um subconjunto aberto  $A \subset X$  que contém  $x$  tal que  $T(A) \subset B$ .

A proposição a seguir nos diz que as definições [1.1.4](#) e [1.1.5](#) são equivalentes.

**Proposição 1.1.6.** [\[12\]](#) Uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos é contínua se, e somente se, é contínua em todo  $x \in X$ .

**Definição 1.1.7.** Uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos é dita um **homeomorfismo** se é bijetiva, contínua e sua inversa  $T^{-1}$  é contínua.

**Definição 1.1.8.** Uma **base** em um espaço topológico  $(X, \tau)$  é uma coleção  $\mathcal{B}$  de subconjuntos abertos de  $X$ , chamados de **abertos básicos**, de modo que todo subconjunto aberto  $A \subset X$  se exprime como reunião  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  de abertos  $A_i$  pertencentes a  $\mathcal{B}$ . Se  $\mathcal{B}$  é uma base de um espaço topológico  $(X, \tau)$ , dizemos que  $\tau$  é a **topologia gerada** por  $\mathcal{B}$ .

**Lema 1.1.9.** [\[10\]](#) Uma coleção  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  é base de uma topologia em  $X$  se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) Para cada  $x \in X$ , existe  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in A$ .
- (ii) Se  $x \in A_1 \cap A_2$ , com  $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ , então existe  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in A \subset A_1 \cap A_2$ .

**Definição 1.1.10.** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $Y \subset X$ . A coleção

$$\tau_Y = \{Y \cap A; A \in \tau\}$$

é uma topologia em  $Y$  conhecida como **topologia induzida** por  $X$  em  $Y$ . O espaço topológico  $(Y, \tau_Y)$  é denominado um **subespaço** do espaço topológico  $X$ .

**Definição 1.1.11.** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma **cisão** em  $X$  é uma decomposição  $X = A \cup B$ , sendo  $A$  e  $B$  subconjuntos abertos de  $X$  não-vazios e disjuntos. O espaço  $X$  é dito **conexo** se não existe uma cisão em  $X$ .

**Lema 1.1.12.** [\[12\]](#) Um espaço topológico  $X$  é conexo se, e somente se,  $\emptyset$  e  $X$  são os únicos subconjuntos de  $X$  simultaneamente abertos e fechados em  $X$ .

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Note que, por definição,  $\emptyset$  e  $X$  são ambos abertos e fechados em  $X$ .

Se  $E$  é um subconjunto próprio não-vazio de  $X$  simultaneamente aberto e fechado em  $X$ , então  $A = E$  e  $B = X \setminus E$  constituem uma cisão de  $X$ , pois são ambos abertos, disjuntos, não-vazios e  $A \cup B = X$ . Logo, pela contrapositiva, segue que se  $X$  é conexo, então  $\emptyset$  e  $X$  são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados.

( $\Rightarrow$ ) Se  $X = A \cup B$  é uma cisão de  $X$ , em particular  $A$  é um subconjunto próprio aberto e não-vazio de  $X$ . Ainda,  $A$  é fechado, pois  $X \setminus A = B$  é aberto. Portanto, pela contrapositiva, se  $\emptyset$  e  $X$  são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados, então  $X$  é conexo.  $\square$

**Definição 1.1.13.** Dizemos que um espaço topológico é **totalmente desconexo** se seus únicos subconjuntos conexos são  $\emptyset$  e seus subconjuntos unitários.

**Lema 1.1.14.** [10] *Um espaço topológico é totalmente desconexo se, e somente se, para quaisquer pontos distintos  $x, y \in X$ , existem subconjuntos disjuntos  $A, B \subset X$ , simultaneamente abertos e fechados, tais que  $x \in A$  e  $y \in B$ .*

**Proposição 1.1.15.** [12] *Um espaço topológico é discreto se, e somente se, todos os seus subconjuntos são simultaneamente abertos e fechados.*

*Demonstração.* Se  $X$  é um espaço topológico discreto, então todo subconjunto de  $X$  é aberto. Logo, para cada  $A \subset X$ ,  $A$  e  $X \setminus A$  são subconjuntos abertos de  $X$ . Como  $X \setminus A$  é aberto, então  $A$  é fechado. Portanto todos subconjuntos de  $X$  são abertos e fechados.

Por outro lado, se todos subconjuntos de  $X$  são abertos então a topologia é discreta pela definição de espaço topológico discreto.  $\square$

**Lema 1.1.16.** [12] *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. A coleção de todos conjuntos da forma  $A \times B$ , com  $A$  um aberto de  $X$  e  $B$  um aberto de  $Y$ , é base para uma topologia em  $X \times Y$  conhecida como **Topologia Produto**.*

*Demonstração.* Vejamos que de essa coleção é de fato uma base topológica. Usaremos os critérios do Lema [1.1.9]

A primeira condição é satisfeita, pois para cada  $x \in X \times Y$ , o próprio conjunto  $X \times Y$  é um aberto básico. O cumprimento da segunda condição decorre do fato de que se  $A_1 \times B_1$  e  $A_2 \times B_2$  são abertos básicos, então a interseção entre eles é um elemento básico, pois

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Portanto, a coleção é uma base topológica.  $\square$

**Definição 1.1.17.** Uma família  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos de um espaço topológico  $X$  é uma **cobertura** de  $X$  se  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ . A cobertura  $C$  é **aberta** se cada  $C_\lambda$  é um subconjunto aberto de  $X$ .

**Definição 1.1.18.** Um espaço topológico  $X$  é dito **compacto** se toda cobertura aberta  $C$  de  $X$  possui uma subcobertura finita, isto é,  $C$  contém uma sub-coleção finita  $C' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$ , com  $L' \subset L$ , tal que  $C'$  é uma cobertura de  $X$ .

**Definição 1.1.19.** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$ . Um ponto  $x \in A$  é **ponto de acumulação** de  $A$  se toda vizinhança de  $x$  em  $X$  contém algum ponto  $a \in A$  distinto de  $x$ .

**Definição 1.1.20.** Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é um **conjunto perfeito** se é fechado e todo ponto de  $A$  é um ponto de acumulação de  $A$ .

**Definição 1.1.21.** Um espaço topológico  $X$  é dito **separável** se ele contém um subconjunto denso e enumerável.

**Definição 1.1.22.** Um espaço topológico  $X$  é um **espaço completamente separável** se possui uma base enumerável.



### 1.1.1 Espaços Métricos

**Definição 1.1.23.** Uma **métrica** num conjunto  $X$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que associa cada par de pontos  $x, y \in X$  a um número real  $d(x, y)$ , chamado a **distância** de  $x$  a  $y$ , de modo que para quaisquer  $x, y, z \in X$  as seguintes condições são válidas:

- (i) Positividade:  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ;
- (ii) Simetria:  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii) Desigualdade triangular:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

O par  $(X, d)$  é dito **espaço métrico**.

**Observação 1.1.24.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $y$  um ponto de  $X$  e  $r > 0$  um número real. A **bola aberta** de centro  $y$  e raio  $r$  é definida pelo conjunto a seguir:

$$B(y, r) = \{x \in X; d(x, y) < r\}.$$

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e considere  $\tau$  a coleção formada pelas bolas abertas de  $X$ . A coleção  $\tau$  constitui uma topologia em  $X$  chamada de **topologia induzida pela métrica** de  $X$ . Dessa forma podemos munir todo espaço métrico de uma estrutura de espaço topológico.

**Definição 1.1.25.** Seja  $X$  um conjunto e considere  $d_1$  e  $d_2$  duas métricas definidas em  $X$ . Dizemos que as métricas  $d_1$  e  $d_2$  são equivalentes se todo aberto  $A$  em  $(X, d_1)$  é um subconjunto aberto em  $(X, d_2)$ .

**Lema 1.1.26.** [10] *Duas métricas  $d_1$  e  $d_2$ , definidas em  $X$ , são equivalentes se, e somente se, a inclusão  $i : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  é um homeomorfismo.*

**Teorema 1.1.27.** [20] *O produto  $X = \prod X_\lambda$  de espaços métricos totalmente desconexos é totalmente desconexo.*

**Teorema 1.1.28.** [12] *O produto  $X = \prod X_\lambda$  de espaços métricos compactos é um espaço métrico compacto.*

**Definição 1.1.29.** Um espaço métrico é dito completo se toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente.

**Lema 1.1.30.** [10] *Todo espaço métrico compacto é completo.*

**Lema 1.1.31.** [12] *Todo espaço métrico compacto é completamente separável.*

## 1.2 Espaços Mensuráveis

A principal referência para esta seção é [18].

**Definição 1.2.1.** Uma **álgebra** em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ ;
- (ii) Se  $A \in \mathcal{A}$ , então  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ ;

(iii) Se  $A, B \in \mathcal{A}$ , então  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .

Uma álgebra é então uma coleção fechada para propriedades elementares de conjuntos. A teoria ergódica lida com um tipo especial de álgebras, as quais são fechadas para uniões enumeráveis.

**Definição 1.2.2.** Uma  $\sigma$ -álgebra em um conjunto  $X$  é coleção de subconjuntos de  $X$  que satisfaz as seguintes condições:

(i)  $\mathcal{A}$  é uma álgebra;

(ii) Se  $A_i \in \mathcal{A}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Definição 1.2.3.** Se  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em um conjunto  $X$ , o par  $(X, \mathcal{A})$  é denominado **espaço mensurável** e os elementos de  $\mathcal{A}$  são ditos **conjuntos mensuráveis**.

Uma  $\sigma$ -álgebra também é fechada para interseções enumeráveis, pois dada uma sequência  $\{A_i\}$  de elementos de  $\mathcal{A}$ , usando as propriedades (ii) e (iii), obtemos

$$\bigcap_i A_i = X \setminus \bigcup_i (X \setminus A_i) \in \mathcal{A}.$$

Ainda, a diferença entre dois conjuntos  $A, B \in \mathcal{A}$  pertence a  $\mathcal{A}$ , pois

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B).$$

**Proposição 1.2.4.** [18] Considere uma família não vazia  $\{A_i; i \in L\}$  de  $\sigma$ -álgebras. Então a interseção  $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in L} A_i$  é uma  $\sigma$ -álgebra.

**Definição 1.2.5.** A  $\sigma$ -álgebra gerada por uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$ , denotada por  $\sigma(\mathcal{F})$ , é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém a família  $\mathcal{F}$ . Ou seja,  $\sigma(\mathcal{F})$  é a interseção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contém  $\mathcal{F}$ .

Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Tomando a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\tau$ , obtemos o seguinte conceito:

**Definição 1.2.6.** A  $\sigma$ -álgebra de Borel de uma topologia  $\tau$ , denotada por  $\mathcal{B}$ , é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os subconjuntos abertos. Os conjuntos mensuráveis em uma  $\sigma$ -álgebra de Borel são chamados de **borelianos**.

A reta estendida,  $\overline{\mathbb{R}}$  é a união de  $\mathbb{R}$  aos pontos no infinito  $-\infty$  e  $+\infty$ .  $\overline{\mathbb{R}}$  possui uma topologia natural formada pelos intervalos  $[-\infty, b)$  e  $(a, +\infty]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ainda,  $\mathbb{R}$  é um subespaço (tanto topológico quanto mensurável) de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Definição 1.2.7.** Sejam  $(X, \mathcal{A}_1)$  e  $(Y, \mathcal{A}_2)$  dois espaços mensuráveis. Uma transformação  $T : X \rightarrow Y$  é **mensurável** se  $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$  para todo  $A \in \mathcal{A}_2$ .

**Lema 1.2.8.** [18] Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos e consideremos seus respectivos espaços mensuráveis de Borel,  $(X, \mathcal{B}_1)$  e  $(Y, \mathcal{B}_2)$ . Toda transformação contínua  $T : X \rightarrow Y$  é mensurável.

*Demonstração.* Seja  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação contínua. Então, para cada aberto  $A \subset Y$ , o subconjunto  $T^{-1}(A) \subset X$  é aberto em  $X$ .

Logo, para cada conjunto boreliano  $A \in \mathcal{B}_2$ , temos  $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$ , uma vez que a  $\sigma$ -álgebra de Borel é gerada pela coleção de subconjuntos abertos do espaço topológico. Portanto,  $T$  é uma aplicação mensurável. □

### 1.3 Espaços de Medida

A principal referência para esta seção é [18].

**Definição 1.3.1.** Uma **medida** em um espaço mensurável  $(X, \mathcal{A})$  é uma função  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  que satisfaz as condições a seguir:

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

(ii)  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ , para qualquer coleção enumerável  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\mathcal{A}$  dois a dois disjuntos. (Propriedade  $\sigma$ -aditiva)

**Definição 1.3.2.** A terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é denominada **espaço de medida**. Se  $\mu(X) < \infty$ , dizemos que  $\mu$  é uma **medida finita**. Em particular, se  $\mu(X) = 1$ , dizemos que  $\mu$  é uma **medida de probabilidade**. Um **espaço de probabilidade** é um espaço de medida munido de uma medida de probabilidade.

**Exemplo 1.3.3.** Sejam  $X$  um conjunto qualquer e  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  a  $\sigma$ -álgebra dada pela família de todos os subconjuntos de  $X$ . Dado  $x \in X$  arbitrário, a função  $\delta_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  definida por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é uma medida em  $(X, \mathcal{P}(X))$  conhecida como **medida de Dirac** no ponto  $x$ .

**Definição 1.3.4.** Um espaço de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é chamado  **$\sigma$ -finito** se existe uma sequência  $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ ,  $A_i \in \mathcal{A}$ , com  $\mu(A_i) < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . A medida de um espaço  $\sigma$ -finito recebe o nome de **medida  $\sigma$ -finita**.

Neste capítulo, exceto quando dito o contrário, assumiremos sempre espaços de medida  $\sigma$ -finitos.

A segunda condição da definição de medida é conhecida como  $\sigma$ -aditividade. Uma função  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  é finitamente aditiva se para qualquer família finita de subconjuntos dois-a-dois disjuntos  $\{A_i \in \mathcal{A}; i \in [1, N]\}$  tem-se

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i).$$

Em particular, toda medida é uma função finitamente aditiva.

O teorema a seguir nos permite construir medidas a partir de funções  $\sigma$ -aditivas definidas em álgebras.

**Teorema 1.3.5 (Teorema da Extensão).** [18] *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra em um conjunto  $X$  e  $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  uma função  $\sigma$ -aditiva com  $\mu_0(X) < \infty$ . Então existe uma única medida  $\mu$  definida na  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{A}$  de modo que  $\mu(A) = \mu_0(A)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .*

## 1.4 Medida de Lebesgue

As principais referências desta seção são [18] e [14] para definições e resultados sobre a medida de Lebesgue. As referências para a subseção sobre conjuntos de Cantor são [13], [5] e [4].

Seja  $X = [0, 1]$  e consideremos álgebra  $\mathcal{A}$  definida pela família de todos os subconjuntos de  $X$  da forma  $A = I_1 \cup \dots \cup I_N$ , sendo  $I_1, \dots, I_N$  intervalos dois-a-dois disjuntos. Seja  $m_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  uma função dada por

$$m_0(I_1 \cup \dots \cup I_N) = |I_1| + \dots + |I_N|,$$

sendo  $|I_j|$  o comprimento de cada intervalo  $I_j$ . Tal função é  $\sigma$ -aditiva e  $m_0(X) = 1$ .

Como todo conjunto aberto da reta pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos dois-a-dois disjuntos, então a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  gerada pela álgebra  $\mathcal{A}$ . Usando o Teorema 1.3.5, obtemos uma única medida de probabilidade  $m$  em  $(X, \mathcal{B})$  que estende  $m_0$ . A medida  $m$  é denominada **medida de Lebesgue** em  $[0, 1]$ .

Definamos agora a medida de Lebesgue do cubo  $X = [0, 1]^n$ , sendo  $n \geq 1$ . Chamamos de **retângulo** em  $X$ , todo subconjunto da forma  $R = I_1 \times \dots \times I_n$ . Consideremos

$$m_0(R) = |I_1| \cdots |I_n|.$$

Seja  $\mathcal{A}$  a álgebra dada pela família de subconjuntos de  $[0, 1]^n$  que são da forma  $A = R_1 \cup \dots \cup R_N$ , sendo  $R_1, \dots, R_N$  retângulos dois-a-dois disjuntos, e definamos a ação de  $m_0$  nos elementos  $A \in \mathcal{A}$  por

$$m_0(A) = m_0(R_1) + \dots + m_0(R_N).$$

A  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  gerada por  $\mathcal{A}$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $X$  e a medida de Lebesgue em  $X$  é a extensão de  $m_0$  a  $\mathcal{B}$ .

A medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  é construída decompondo o espaço euclidiano em cubos unitários:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \bigcup_{k_n \in \mathbb{Z}} [k_1, k_1 + 1) \times \cdots \times [k_n, k_n + 1).$$

Seja  $\mathcal{B}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$  e considere  $C$  a família de cubos de  $\mathbb{R}^n$  da forma  $[k_1, k_1 + 1) \times \cdots \times [k_n, k_n + 1)$ . Cada um desses cubos pode ser identificado com  $[0, 1)^n$  por meio da translação  $T_{k_1, \dots, k_n}(x) = x - (k_1, \dots, k_n)$  que leva  $(k_1, \dots, k_n)$  na origem. Com isso, podemos definir uma medida em  $C$  dada por

$$m_{k_1, \dots, k_n}(A) = m_0(T_{k_1, \dots, k_n}(A)),$$

sendo cada  $A$  um cubo de  $\mathcal{A}$ . Por fim, dado qualquer conjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}^n$ , definamos a medida de Lebesgue de  $A$  por

$$m(A) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} m_{k_1, \dots, k_n}(A \cap [k_1, k_1 + 1) \times \cdots \times [k_n, k_n + 1)).$$

A medida  $m$  é  $\sigma$ -finita, no entanto não é uma medida finita.

### 1.4.1 Medidas Completas

**Lema 1.4.1.** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos mensuráveis com  $A \subset B$ , então  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

*Demonstração.* Como  $A \subset B$ , então  $B = A \cup (B \setminus A)$ . Logo,

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Portanto,  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . □

Pelo Lema 1.4.1, se  $A \subset B$ , sendo  $A$  e  $B$  mensuráveis, então  $\mu(B) = 0$  implica  $\mu(A) = 0$ . O mesmo pode não ocorrer quando  $B$  é mensurável e  $A$  não o é, pois neste caso  $\mu(A)$  não está definido.

**Definição 1.4.2.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida. Dizemos que uma medida é **completa** se para todo  $B \in \mathcal{A}$  mensurável com  $\mu(B) = 0$ ,  $A \subset B$  implica  $A$  mensurável e  $\mu(A) = 0$ .

**Proposição 1.4.3.** [9] Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida. Existem uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$  e uma medida  $\mu_1$  em  $\mathcal{A}_1$  igual a  $\mu$  em  $\mathcal{A}$  tal que  $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  é completo.

**Definição 1.4.4.** [14] Seja  $X$  um espaço métrico completo que contenha um subconjunto denso e enumerável, (ou seja,  $X$  é separável). O complemento do espaço de probabilidade de Borel  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , dado pelo espaço de probabilidade  $(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$ , é chamado de **espaço de Lebesgue**, sendo  $\overline{\mu} = m$  a **medida de Lebesgue**.

### 1.4.2 Conjuntos de Cantor

**Definição 1.4.5.** Dizemos que um conjunto em um espaço métrico é um **conjunto de Cantor** se ele é compacto, totalmente desconexo e perfeito.

Definiremos a seguir um conjunto de Cantor conhecido como **conjunto ternário de Cantor** e veremos que ele possui medida de Lebesgue nula. Definamos

$$C_0 = [0, 1].$$

Retira-se de  $C_0$  o seu terço médio, isto é, o intervalo aberto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , obtendo-se um conjunto  $C_1$  dado por

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Em seguida, retira-se os terços médios dos dois intervalos de comprimento  $\frac{1}{3}$  que constituem  $C_1$ , obtendo-se  $C_2$  dado por

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Continuando o processo, para cada inteiro positivo  $n$ , o conjunto  $C_n$  consiste-se de  $2^n$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$ . O conjunto ternário de Cantor  $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$  é então definido por

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{3}} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

**Lema 1.4.6.** [5] O conjunto ternário de Cantor é um conjunto de Cantor.

**Lema 1.4.7.** O conjunto ternário de Cantor tem medida de Lebesgue nula.

*Demonstração.* Observe que obtém-se  $C_{\frac{1}{3}}$  ao remover do intervalo unitário um intervalo de comprimento  $\frac{1}{3}$ , dois intervalos de comprimento  $\frac{1}{9}$ , quatro intervalos de comprimento  $\frac{1}{27}$  e assim sucessivamente, em cada  $n$ -ésima etapa retira-se  $2^{n-1}$  intervalos abertos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$ , então

$$m(C_{\frac{1}{3}}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0,$$

ou seja, o conjunto ternário de Cantor tem medida de Lebesgue zero.  $\square$

Um conjunto similar de medida não nula é o conjunto **Smith-Volterra-Cantor**, também conhecido como conjunto de **Cantor gordo**. A construção deste conjunto segue a mesma ideia do conjunto ternário de Cantor, removendo-se os quartos médios em cada etapa ao invés dos terços médios: Inicialmente retira-se de  $C_0$  o intervalo aberto  $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$  de tamanho  $\frac{1}{4}$ , obtendo-se o conjunto  $C_1$  dado por

$$C_1 = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1].$$

Em seguida retira-se dos dois intervalos que constituem  $C_1$  os seus respectivos quartos médios  $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$  e  $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$ , conjuntos de tamanho  $\frac{1}{16}$ , e obtém-se  $C_2$ ,

$$C_2 = [0, \frac{5}{32}] \cup [\frac{7}{32}, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{25}{32}] \cup [\frac{27}{32}, 1].$$

Continuando o processo indefinidamente, para cada  $n$ , o conjunto  $C_n$  é obtido removendo os intervalos centrais de comprimento  $\frac{1}{4^n}$  de cada um dos  $2^{n-1}$  intervalos restantes. O conjunto de Smith-Volterra-Cantor é definido por  $C_{\frac{1}{4}}$ , sendo

$$C_{\frac{1}{4}} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

**Lema 1.4.8.** O conjunto Smith-Volterra-Cantor tem medida de Lebesgue positiva.

*Demonstração.* De fato,

$$m(C_{\frac{1}{4}}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n+2}} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

**Observação 1.4.9.** Todo ponto  $x \in [0, 1]$  possui uma representação binária da forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

com  $x_i \in \{0, 1\}$ . A expansão binária é única, exceto quando  $x = \frac{p}{2^q}$ , sendo  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Neste caso, há duas representações binárias possíveis de  $x$ : Uma termina com infinitos zeros, e outra com infinitos uns. Como por exemplo,  $\frac{1}{2}$  pode ser expresso como

$$\frac{1}{2} = \cdot 1000 \dots \text{ e } \frac{1}{2} = \cdot 0111 \dots.$$

Para pontos da forma  $x = \frac{p}{2^q}$ , adotaremos sempre a expansão que não termine com infinitos zeros. Portanto, ao considerarmos a expansão binária de algum ponto  $x \in [0, 1]$ , tal representação será única.

## 1.5 Medida Produto

A principal referência desta seção é [18].

Sejam  $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  e  $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  dois espaços de medida. Consideremos o conjunto  $X_1 \times X_2$ , e denotemos por  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por todos os conjuntos  $A_1 \times A_2$  com  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  e  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Definamos, a aplicação  $\mu_1 \times \mu_2$  dada por

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2); \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Pelo Teorema 1.3.5, segue que existe uma única medida  $\mu_1 \times \mu_2 : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$  que estende a igualdade acima.

**Definição 1.5.1.** O espaço de medida  $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$  é denominado **espaço de medida produto**. Dizemos que  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  e  $\mu_1 \times \mu_2$  são, respectivamente, a  $\sigma$ -álgebra produto e a medida produto de  $X_1$  e  $X_2$ .

De modo análogo, podemos construir espaços de medida definidos pelo produto de uma família finita de espaços de medida.

Seja  $L$  um conjunto de índices, podendo ser  $L = \mathbb{N}$  ou  $L = \mathbb{Z}$ . Consideremos espaços de medida  $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ , com  $i \in L$ . Definamos o conjunto

$$\Sigma_{X_i} = \prod_{i \in L} X_i = \{(x_i)_{i \in L} : x_i \in X_i\}.$$

Denominamos por **cilindros** de  $\Sigma_{X_i}$  os subconjuntos dados da seguinte forma,

$$C_{j \dots k}^{A_j \dots A_k} = \{(x_i)_{i \in L}; x_i \in A_i \text{ para } j \leq i \leq k\},$$

sendo  $i \in L$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $A_i \in \mathcal{A}_i$  para  $j \leq i \leq k$ .

A família  $\mathcal{A}$  das uniões finitas de cilindros dois-a-dois disjuntos é uma álgebra. Definimos a  $\sigma$ -álgebra produto de  $\Sigma_{X_i}$  como sendo a  $\sigma$ -álgebra gerada pela família de todos os cilindros de  $\Sigma_{X_i}$  e a denotamos por  $\mathcal{C}$ . A fim de definir uma medida produto no espaço mensurável  $(\Sigma_{X_i}, \mathcal{C})$ , consideremos uma aplicação  $\mu$  cuja ação sobre a família dos cilindros é dada do seguinte modo:

$$\mu(C_{j \dots k}^{A_j \dots A_k}) = \prod_{i=j}^k \mu_i(A_i).$$

Consideremos  $\mu$  restrita à álgebra  $\mathcal{A}$ , definindo que a medida de toda união finita de cilindros dois-a-dois disjuntos seja igual a soma das medidas dos cilindros. Deste modo,  $\mu$  é uma aplicação  $\sigma$ -aditiva. Usando o Teorema 1.3.5, estendemos  $\mu$  a uma medida em  $(\Sigma_{X_i}, \mathcal{C})$ , obtendo assim o espaço de medida  $(\Sigma_{X_i}, \mathcal{C}, \mu)$  chamado de o produto dos espaços de medida  $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ,  $i \in L$ .

Se considerarmos todos os espaços  $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$  iguais a um espaço de medida  $(X, \mathcal{A}, \nu)$ , a medida  $\mu$ , definida no espaço mensurável  $(\Sigma_X, \mathcal{C})$ , é conhecida como **medida de Bernoulli** e é dada por

$$\mu(C_{j \dots k}^{A_j \dots A_k}) = \prod_{i=j}^k \nu(A_i).$$

Este caso particular é importante no estudo das probabilidades de eventos independentes. No Capítulo 3 iremos estudar este tipo de medida definida em um conjunto finito de símbolos  $S = \{0, \dots, N-1\}$  e consideraremos o espaço de medida produto  $\Sigma_S = \prod_{\infty}^+ S$ . Os cilindros deste espaço de probabilidade são da forma

$$C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}; x_{i_1} = j_{i_1}, \dots, x_{i_k} = j_{i_k}\},$$

sendo que cada  $A_i$  consiste de um único ponto  $j_i$ .

A medida de probabilidade definida no espaço  $(\Sigma_S, \mathcal{C})$  será dada por  $\mu(C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}) = p_{j_{i_1}} \cdots p_{j_{i_k}}$ , sendo  $p_{j_i} = \nu(\{j_i\})$  para cada  $j_i \in S$ .

## 1.6 Integral de Lebesgue

A principal referência para esta seção é [9].

Neste trabalho utilizamos um conceito de integral mais geral do que a integração de Riemann. Tal conceito é a integral de Lebesgue.

Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável. Denotamos

$$f^+(x) = \max(0, f(x)) \text{ e } f^-(x) = \max(0, -f(x)).$$

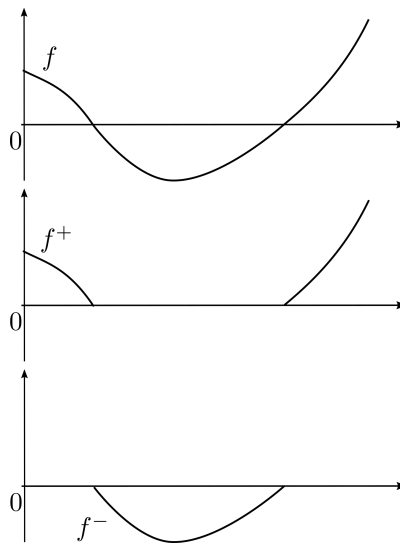


Figura 1.1: Ilustração da notação  $f^+(x)$  e  $f^-(x)$ .

Note que

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ e } |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

A função

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é chamada de **função característica** de um conjunto  $A$ .



**Observação 1.6.1.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável limitada e não negativa,  $0 \leq f(x) < M < \infty$ . Tome a partição do intervalo  $[0, M]$  dada por  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = M$ ,  $a_i = Mi/n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , e defina

$$A_i = \{x : f(x) \in [a_i, a_{i+1})\}, i = 0, \dots, n-1.$$

A função característica  $\chi_{A_i}$  é mensurável e

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_{A_i}(x) \right| \leq \frac{M}{n}.$$

Concluimos que toda função limitada não-negativa mensurável pode ser aproximada por uma combinação finita de funções características.

**Definição 1.6.2.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida. A função  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **função simples** se existem escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  e conjuntos mensuráveis  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , com  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , e

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}(x); \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

A integral de Lebesgue em relação a  $\mu$  da função  $g$  é definida por

$$\int_X g(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(A_i).$$

**Definição 1.6.3.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável, não-negativa e limitada, e  $\{g_n\}$  uma sequência de funções simples convergindo uniformemente a  $f$ . Então a **integral de Lebesgue** de  $f$  é definida como

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) \mu(dx).$$

**Definição 1.6.4.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável, não-negativa e não-limitada, e defina

$$f_M(X) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq f(x) \leq M, \\ M, & \text{se } M < f(x). \end{cases}$$

A integral de Lebesgue de  $f$  é definida por

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_X f_M(x) \mu(dx).$$

**Definição 1.6.5.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável. A integral de Lebesgue de  $f$  é definida por

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \int_X f^+(x) \mu(dx) - \int_X f^-(x) \mu(dx)$$

se ao menos um dos termos

$$\int_X f^+(x) \mu(dx), \int_X f^-(x) \mu(dx)$$

é finito. Se ambos os termos são finitos, então a função  $f$  é dita integrável.

As definições anteriores definem a integral de Lebesgue de  $f$  ao longo de todo o espaço  $X$ . Para  $A \in \mathcal{A}$ , temos

$$\int_A f(x)\mu(dx) := \int_X f(x)\chi_A(x)\mu(dx).$$

Se uma propriedade envolvendo pontos de um espaço de medida é válida em todo o espaço, exceto para um subconjunto de medida nula, dizemos que a propriedade é verdadeira para quase todo ponto e denotamos por q.t.p.

Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida. A integral de Lebesgue possui as seguintes propriedades:

(L1) Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são mensuráveis, e  $|f(x)| \leq g(x)$ , então  $f$  é integrável e

$$\left| \int_X f(x)\mu(dx) \right| \leq \int_X g(x)\mu(dx).$$

(L2)  $\int_X |f(x)|\mu(dx) = 0$  se, e só se,  $f(x) = 0$  q.t.p.

(L3) Se  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções integráveis, então para  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , a combinação linear  $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$  é integrável e

$$\int_X [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\mu(dx) = \lambda_1 \int_X f_1(x)\mu(dx) + \lambda_2 \int_X f_2(x)\mu(dx).$$

(L4) **(Teorema da Convergência Dominada)** Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções mensuráveis e  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções mensuráveis tais que  $|f(x)| \leq g(x)$  e  $\{f_n(x)\}$  converge a  $f(x)$  q.t.p. Se  $g$  é integrável, então  $f$  e  $f_n$  são integráveis e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

(L5) **(Teorema da Convergência Monótona)** Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções mensuráveis e  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções mensuráveis tais que  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  e  $\{f_n(x)\}$  converge a  $f(x)$  quase todo ponto, então  $f$  e  $f_n$  são integráveis e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

(L6) Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e  $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \dots$  conjuntos disjuntos. Se  $A = \cup_i A_i$ , então

$$\sum_i \int_{A_i} f(x)\mu(dx) = \int_A f(x)\mu(dx).$$

**Observação 1.6.6.** Observe que se  $f$  é integrável, então  $|f|$  é integrável. De fato, como  $|f| = f^+ + f^-$ , se  $f$  é integrável,  $f^+$  e  $f^-$  também o são e

$$\int_X |f(x)|\mu(dx) = \int_X f^+(x)\mu(dx) + \int_X f^-(x)\mu(dx)$$

é finito. Logo,  $|f|$  é integrável. A recíproca também é verdadeira.

**Observação 1.6.7.** Para cada função integrável  $f$ , existe uma sequência de funções simples  $f_n(x) = \sum_i \lambda_{i,n} \chi_{A_{i,n}}(x)$  tal que que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad q.t.p. \text{ e } |f_n(x)| \leq |f(x)|.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \mu(dx) = \int_X f(x) \mu(dx).$$

**Observação 1.6.8.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável não-negativa. Defina

$$\mu_f(A) := \int_A f(x) \mu(dx),$$

a medida  $\mu_f$  é finita. De fato, da definição de Integral de Lebesgue,  $\mu_f(A)$  é não-negativa e finita, e pela propriedade (L6),  $\mu_f$  é aditiva. Ainda, de (L2) se  $\mu_f(A) = 0$ , então

$$\mu_f(A) = \int_X f(x) \chi_A(x) \mu(dx) = 0,$$

pois  $f(x) \chi_A(x) = 0$  q.t.p. Portanto,  $\mu_f$  satisfaz todas propriedades de medida e  $\mu_f(A) = 0$  quando  $\mu(A) = 0$ . Deste modo, toda função integrável não-negativa define uma medida finita.

**Definição 1.6.9.** Uma medida  $\nu$  em  $(X, \mathcal{A})$  é dita **absolutamente contínua** em relação a uma medida  $\mu$  em  $(X, \mathcal{A})$  se para todo  $A \in \mathcal{A}$  com  $\mu(A) = 0$  tem-se  $\nu(A) = 0$ . Neste caso denotamos  $\nu \ll \mu$ .

**Teorema 1.6.10 (Teorema de Radon-Nikodym).** [9] *Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $\nu$  uma medida finita absolutamente contínua em relação a  $\mu$ . Então existe uma função não-negativa integrável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\nu(A) = \int_A f(x) \mu(dx) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Vejam que tal função  $f$  é única. Com efeito, assuma que existem duas funções  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\nu(A) = \int_A f_1(x) \mu(dx) \text{ e } \nu(A) = \int_A f_2(x) \mu(dx).$$

Então, para todo  $A \in \mathcal{A}$ , temos

$$\int_A [f_1(x) - f_2(x)] \mu(dx) = 0.$$

Defina os conjuntos

$$A_1 := \{x : f_1(x) > f_2(x)\} \text{ e } A_2 := \{x : f_1(x) \leq f_2(x)\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{A_1} [f_1(x) - f_2(x)]\mu(dx) - \int_{A_2} [f_1(x) - f_2(x)]\mu(dx) \\
&= \int_{A_1 \cup A_2} |f_1(x) - f_2(x)|\mu(dx) \\
&= \int_X |f_1(x) - f_2(x)|\mu(dx).
\end{aligned}$$

Da propriedade (L2), temos  $|f_1(x) - f_2(x)| = 0$  *q.t.p.* Portanto,  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  diferem apenas em um conjunto de medida nula. Isto prova a seguinte proposição.

**Proposição 1.6.11.** [9] Se  $f_1$  e  $f_2$  são funções integráveis tais que

$$\int_A f_1(x)\mu(dx) = \int_A f_2(x)\mu(dx) \text{ para } A \in \mathcal{A},$$

então  $f_1 = f_2$  *q.t.p.*

**Definição 1.6.12.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $1 \leq p < \infty$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . A família de todas funções mensuráveis  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem

$$\int_X |f(x)|^p \mu(dx) < \infty$$

é denominada **espaço**  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Se  $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ , a expressão seguinte define a **norma**  $L^p$ :

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right]^{1/p}.$$

Denotamos o espaço  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  por  $L^p$  quando o espaço de medida em questão estiver implícito.

Note que se  $f \in L^p$ , aplicando a propriedade (L2) para  $|f|^p$ , obtém-se  $\|f\|_{L^p} = 0$  se, e só se,  $f(x) = 0$  *q.t.p.*

Para a norma  $L^p$ , vale a desigualdade triangular

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \text{ para } f, g \in L^p$$

e

$$\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \cdot \|f\|_{L^p} \text{ para } f \in L^p, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Destas propriedades, segue que para cada  $f, g \in L^p$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\alpha f, f + g \in L^p$ . Logo, o espaço  $L^p$  é um espaço vetorial.

Para  $f, g \in L^p$ , chamamos de distância  $L^p$  entre  $f$  e  $g$  a expressão

$$\|f - g\|_{L^p} = \left[ \int_X |f(x) - g(x)|^p \mu(dx) \right]^{1/p}.$$

Observe que o produto  $fg$  de duas funções  $f, g \in L^p$  não está necessariamente em  $L^p$ , por exemplo  $f(x) = x^{-1/2}$  é integrável em  $[0, 1]$ , mas  $[f(x)]^2 = x^{-1}$  não é.

**Definição 1.6.13.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida. A família de todas funções mensuráveis  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  limitadas em quase todos os pontos é denominada espaço  $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Se  $f \in L^\infty$  e  $A \in \mathcal{A}$ , definimos a norma  $L^\infty$  por

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{S(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0\}$$

sendo  $S(A) = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$ . Dizemos que  $f \in L^\infty$  é uma função **essencialmente limitada**.

**Definição 1.6.14.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida. O espaço adjunto a  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  é  $L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$  com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

O espaço adjunto no caso  $p = 1$  é dado pelo espaço  $L^\infty$ .

Se  $f \in L^p$  e  $g \in L^{p'}$ , então  $fg$  são integráveis. Definimos o produto escalar de duas funções por

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)\mu(dx).$$

Uma propriedade deste produto é a desigualdade de Cauchy-Hölder: Se  $f \in L^p$  e  $g \in L^{p'}$ , então

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}.$$

Como quase sempre trabalhamos em  $L^1$ , não indicamos o espaço no qual a norma é tomada a menos que não seja  $L^1$ . Assim, escreveremos  $|f|$  ao invés de  $|f|_{L^1}$ . No espaço  $L^1$  a norma possui a propriedade de que a desigualdade triangular é às vezes uma igualdade. De fato, da propriedade (L3) temos

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| \text{ para } f, g \geq 0; f, g \in L^1.$$

O conceito de espaço  $L^1$  simplifica o teorema de Radon-Nikodym, como mostra o seguinte corolário.

**Corolário 1.6.15.** [9] Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é um espaço de medida e  $\nu \ll \mu$ , então existe um único elemento  $f \in L^1$  tal que

$$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx) \text{ para } A \in \mathcal{A}.$$

**Definição 1.6.16.** Se  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ;  $f \geq 0$ , a medida

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)\mu(dx)$$

é absolutamente contínua em relação a  $\mu$ . Dizemos que  $f$  é a **derivada Radon-Nikodym** de  $\mu_f$  em relação a  $\mu$ .

O teorema a seguir relaciona a integral de Lebesgue com a integral de Riemann.

**Teorema 1.6.17.** [1] Seja  $f$  uma função real limitada e mensurável considerando a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Então  $f$  é integrável segundo Riemann se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$  tem medida de Lebesgue zero. Neste caso, a integral de Riemann é igual a integral de Lebesgue.

## 1.7 Medidas Invariantes

As principais referências para esta seção são [18] e [15].

**Definição 1.7.1.** Uma transformação mensurável  $T : X \rightarrow X$  em um espaço de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é **não-singular** se  $\mu(T^{-1}(A)) = 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(A) = 0$ .

**Observação 1.7.2.** Uma transformação mensurável é não-singular se, e somente se, para todo  $A \in \mathcal{A}$  tem-se  $\mu(A) \geq \mu(T^{-1}(A))$ .

**Definição 1.7.3.** Sejam  $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1), (Y, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  dois espaços de medida e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação mensurável.

(i) Dizemos que  $T$  **preserva medida**, ou que as **medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são invariantes por  $T$** , se para todo conjunto mensurável  $A \in \mathcal{A}_2$ , tem-se

$$\mu_1(T^{-1}(A)) = \mu_2(A).$$

(ii) A transformação  $T$  **preserva medida invertivelmente** se é bijetiva, preserva medida e a inversa  $T^{-1}$  preserva medida.

**Teorema 1.7.4 (Característica de medidas invariantes).** [15] Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $T$  uma função mensurável. Então  $T$  preserva medida se, e somente se,

$$\int_X f d\mu = \int_X f \circ T d\mu \quad \forall f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

*Demonstração.* Suponha que  $\mu$  seja invariante por  $T$ . Isto é, para todo  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ . Como,

$$\int_X \chi_A(x) d\mu = \mu(A) = \mu(T^{-1}A) = \int_X \chi_{T^{-1}A}(x) d\mu = \int_X \chi_A \circ T(x) d\mu,$$

então o teorema é válido para funções simples, pois toda função simples pode ser escrita como combinação linear de funções características. Seja  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Logo, existe uma sequência de funções simples  $(s_n)_n$  tal que  $\lim s_n = f$  e  $|s_n| \leq f$  para todo  $n$ . Como  $s_n$  é simples, existem escalares  $\lambda_i$ 's tais que

$$s_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{A_i}; \quad X = \bigcup_{i=1}^m A_i.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu \\
&= \lambda_1 \int_X \chi_{A_1} d\mu + \dots + \lambda_m \int_X \chi_{A_m} d\mu \\
&= \lambda_1 \int_X \chi_{A_1} \circ T d\mu + \dots + \lambda_m \int_X \chi_{A_m} \circ T d\mu \\
&= \sum_{i=1}^m \lambda_i (\chi_{A_i} \circ T) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \circ T d\mu \\
&= \int_X f \circ T d\mu.
\end{aligned}$$

Suponha agora

$$\int_X f d\mu = \int_X f \circ T d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Seja  $f = \chi_A(x)$ ;  $A \in \mathcal{A}$ . Logo,

$$\int_X \chi_A \circ T d\mu = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A).$$

Por outro lado,

$$\int_X \chi_A \circ T d\mu = \int_X \chi_{T^{-1}A} d\mu = \mu(T^{-1}A).$$

Portanto,  $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ .

□

**Teorema 1.7.5 (Existência de medidas invariantes).** [15] *Se  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação contínua em um espaço métrico compacto  $X$  e  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel, então existe ao menos uma medida de probabilidade invariante por  $T$ .*

O resultado acima também é conhecido como Teorema de Krylov–Bogolyubov e é um dos principais teoremas da teoria da medida.

**Teorema 1.7.6 (Teorema de Lusin).** [18] *Sejam  $X$  um espaço métrico completo separável,  $Y$  um espaço métrico separável e consideremos  $(X, \mathcal{B}_1)$  e  $(Y, \mathcal{B}_2)$  os seus respectivos espaços mensuráveis de Borel, com  $m$  a medida de probabilidade em  $X$ . Considere  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação mensurável. Então, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um conjunto compacto  $K \subset X$  tal que  $m(X \setminus K) < \varepsilon$  e a restrição de  $\varphi$  a  $K$  é contínua.*

A transformação baker map 2-por-1, que definiremos no Capítulo 4, não é contínua. No entanto, pelo Teorema de Lusin, pode-se restringir tal aplicação de modo que a restrição seja contínua.

### 1.7.1 O Pushforward de uma Medida

**Definição 1.7.7.** Sejam  $(X, \mathcal{A}_1), (Y, \mathcal{A}_2)$  espaços mensuráveis,  $\mu$  uma medida em  $(X, \mathcal{A}_1)$  e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação mensurável. O **pushforward** de  $\mu$  é uma medida induzida no espaço mensurável  $(Y, \mathcal{A}_2)$  pela seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T_*\mu : \mathcal{A}_2 &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)). \end{aligned}$$

**Lema 1.7.8.** Sejam  $(X, \mathcal{A}_1), (Y, \mathcal{A}_2)$  espaços mensuráveis,  $\mu$  uma medida em  $(Y, \mathcal{A}_2)$  e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação mensurável invertível. Então o pushforward de  $\mu$  induz uma medida invariante em  $(X, \mathcal{A}_1)$ .

*Demonstração.* Considerando a aplicação inversa  $S = T^{-1} : Y \rightarrow X$ , por definição o pushforward de  $\mu$  é dado pela medida  $T_*^{-1}\mu$ , com  $T_*^{-1}\mu(A) = \mu(S^{-1}(A)) = \mu(T(A))$ .

Logo  $T : X \rightarrow Y$  é uma aplicação entre os espaços de medida  $(X, \mathcal{A}_1, T_*^{-1}\mu)$  e  $(Y, \mathcal{A}_2, \mu)$ . Se  $A \in \mathcal{A}_2$ , então  $T_*^{-1}\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ . Portanto,  $T$  preserva medida, isto é, o pushforward é uma medida invariante.  $\square$



## Capítulo 2

# Densidades e Operadores de Transferência

O estudo de densidades surgiu das tentativas dos cientistas em descrever certos fenômenos de natureza probabilística e estatística conhecidos na física e na mecânica estatística. Consideramos como densidade toda função  $L^1$ , definida num espaço de probabilidade, cuja norma seja 1. Os operadores de transferência caracterizam as densidades sucessivas em um espaço de probabilidade e são úteis no estudo de sistemas determinísticos e estocásticos.

Neste capítulo estudaremos os operadores de Markov, Frobenius-Perron e o operador de Koopman. Veremos que o operador de Frobenius-Perron é um operador de Markov determinístico e pode ser usado no estudo de medidas invariantes. A principal referência para este capítulo é [9].

Nos espaços  $L^p$ ,  $\|f\|_{L^p} = 0$  se, e só se,  $f = 0$  q.t.p. A igualdade de funções nos espaços  $L^p$  e  $L^\infty$  é válida q.t.p. Nas seções a seguir, denotaremos a norma em  $L^1$  usando a notação  $\|\cdot\|$ .

### 2.1 Operador de Markov

**Definição 2.1.1.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade. Um operador linear  $P : L^1 \rightarrow L^1$  é chamado **operador de Markov** se satisfaz às condições a seguir:

- (i)  $Pf \geq 0$  para  $f \geq 0, f \in L^1$ ;
- (ii)  $\|Pf\| = \|f\|$  para  $f \geq 0, f \in L^1$ .

Se  $f, g \in L^1$ , então  $f(x) \geq g(x)$  q.t.p implica  $Pf(x) \geq Pg(x)$  q.t.p. De fato, pelo item (i), para  $(f - g) \geq 0$  q.t.p temos  $P(f - g) = Pf - Pg \geq 0$  q.t.p.

**Proposição 2.1.2.** [9] Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é um espaço de probabilidade e  $P$  um operador de Markov, então, para toda  $f \in L^1$ ,

- (M1)  $(Pf(x))^+ \leq Pf^+(x)$ ;
- (M2)  $(Pf(x))^- \leq Pf^-(x)$ ;
- (M3)  $|Pf(x)| \leq P|f(x)|$ ;
- (M4)  $\|Pf\| \leq \|f\|$ .

*Demonstração.* Note que da definição de  $f^+$  e  $f^-$ , temos

$$(Pf)^+ = (P(f^+ - f^-))^+ = \max(0, P(f^+ - f^-))$$

Se  $f^+ = \max(0, f) = 0$ , então  $f^- = \max(0, -f) = -f$ . Logo  $P(f^+ - f^-) = Pf$ . Se  $f^+ = f$ , então  $f^- = 0$  e assim  $P(f^+ - f^-) = Pf$ . Portanto,

$$(Pf)^+ = \max(0, Pf) \leq \max(0, Pf^+) = Pf^+.$$

O que prova (M1). A prova de (M2) é análoga.

Para (M3), temos

$$\begin{aligned} |Pf| &= (Pf)^+ + (Pf)^- \leq Pf^+ + Pf^- \\ &= P(f^+ + f^-) = P|f|. \end{aligned}$$

Integrando em (M3), temos

$$\begin{aligned} \|Pf\| &= \int_X |Pf(x)|\mu(dx) \leq \int_X P|f(x)|\mu(dx) \\ &= \int_X |f(x)|\mu(dx) = \|f\|. \end{aligned}$$

O que prova (M4). □

A propriedade (M4) é dita **propriedade contrativa** de  $P$ . Para ilustrar, note que para toda  $f \in L^1$ , temos

$$\|P^n f\| = \|P(P^{n-1} f)\| \leq \|P^{n-1} f\| \leq \dots \leq \|f\|$$

e, daí, para quaisquer  $f_1, f_2 \in L^1, f_1 \neq f_2$ ,

$$\begin{aligned} \|P^n f_1 - P^n f_2\| &= \|P^n(f_1 - f_2)\| \\ &\leq \|P^{n-1}(f_1 - f_2)\| = \|P^{n-1} f_1 - P^{n-1} f_2\| \leq \dots \leq \|f_1 - f_2\|. \end{aligned}$$

Esta desigualdade implica que durante o processo de iteração de duas funções a distância entre elas pode diminuir, mas nunca aumentar. Chamamos tal fato de **propriedade de estabilidade** de iterações de operadores de Markov.

**Definição 2.1.3.** Se  $P$  é um operador de Markov e, para alguma  $f \in L^1, Pf = f$ , então  $f$  é dito um **ponto fixo** de  $P$ .

**Proposição 2.1.4.** [9] Se  $Pf = f$ , então  $Pf^+ = f^+$  e  $Pf^- = f^-$ .

*Demonstração.* Como  $Pf = f$ , temos  $f^+ = (Pf)^+ \leq Pf^+$  e  $f^- = (Pf)^- \leq Pf^-$ , logo,

$$\begin{aligned} &\int_X [Pf^+(x) - f^+(x)]\mu(dx) + \int_X [Pf^-(x) - f^-(x)]\mu(dx) \\ &= \int_X [Pf^+(x) + Pf^-(x)]\mu(dx) - \int_X [f^+(x) + f^-(x)]\mu(dx) \\ &= \int_X P|f(x)|\mu(dx) - \int_X |f(x)|\mu(dx) \\ &= \|P|f|\| - \| |f| \| \\ &= \|Pf\| - \|f\|. \end{aligned}$$

Pela propriedade contrativa de  $P$ , temos  $\|Pf\| - \|f\| \leq 0$ . Como ambos os integrandos  $(Pf^+ - f^+)$  e  $(Pf^- - f^-)$  são não-negativos, a última desigualdade é possível se, e somente se,  $Pf^+ = f^+$  e  $Pf^- = f^-$  q.t.p. □

**Definição 2.1.5.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade e o conjunto  $D(X, \mathcal{A}, \mu)$  definido por  $D(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) : f \geq 0 \text{ e } \|f\| = 1\}$ . Toda função  $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$  é dita uma **densidade**.

**Definição 2.1.6.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade. Se  $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$  é a derivada de Radon-Nikodym de  $\mu_f$  em relação a  $\mu$ , (Definição 1.6.16), dizemos que a função  $f$  é a **densidade** de  $\mu_f$  e que  $\mu_f$  é uma **medida normalizada**.

Com a definição a seguir, podemos estender a noção de ponto fixo de um operador de Markov.

**Definição 2.1.7.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $P$  um operador de Markov. Toda  $f \in D$  que satisfaz  $Pf = f$  é chamada **densidade estacionária** de  $P$ .

## 2.2 Operador de Frobenius-Perron

Considere  $T : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável não-singular (Def. 1.7.1) em um dado espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Definiremos um operador  $P : L^1 \rightarrow L^1$  em dois passos:

(i) Consideremos  $f \in L^1; f \geq 0$ . Seja

$$\nu(A) = \int_{T^{-1}(A)} f(x) \mu(dx).$$

Note que  $T^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i T^{-1}(A_i)$ , segue da propriedade (L6) da integral de Lebesgue que  $\nu(A)$  define uma medida finita. Como  $T$  é uma transformação não-singular, se  $\mu(A) = 0$ , temos  $\mu(T^{-1}(A)) = 0$ , o que implica  $\nu(A) = 0$ , ou seja  $\nu \ll \mu$ . Portanto, pelo Corolário 1.6.15, existe um único elemento em  $L^1$ , denotado por  $Pf$ , tal que

$$\nu(A) = \int_A Pf(x) \mu(dx); A \in \mathcal{A}.$$

(ii) Seja  $f \in L^1$  qualquer, isto é, não necessariamente não-negativa. Escrevemos  $f = f^+ - f^-$  e definimos

$$Pf = Pf^+ - Pf^-.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_A Pf(x) \mu(dx) &= \int_{T^{-1}(A)} f^+(x) \mu(dx) - \int_{T^{-1}(A)} f^-(x) \mu(dx) \\ &= \int_{T^{-1}(A)} f(x) \mu(dx) = \nu(A); A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Da Proposição 1.6.11 e como  $T$  é não-singular, segue que igualdade acima define unicamente o operador  $P$ .

**Definição 2.2.1.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade. Se  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação mensurável não-singular, o único operador  $P : L^1 \rightarrow L^1$ , definido por

$$\int_A Pf(x) \mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x) \mu(dx),$$

é chamado o **operador de Frobenius-Perron** correspondente a  $T$ .

As seguintes propriedades são válidas para um operador de Frobenius-Perron  $P$ :

(FP1)  $P$  é um operador linear, isto é,

$$P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 P f_1 + \lambda_2 P f_2; \quad \forall f_1, f_2 \in L^1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$$

(FP2)  $Pf \geq 0$  se  $f \geq 0$ ;

(FP3)  $\int_X P f(x) \mu(dx) = \int_X f(x) \mu(dx)$ ;

(FP4) Se  $T_n = T \circ \dots \circ T$  e  $P_n$  é o operador Frobenius-Perron correspondente a  $T_n$ , então  $P_n = P^n$ , sendo  $P$  o operador Frobenius-Perron correspondente a  $T$ .

Observe que o operador Frobenius-Perron é um operador de Markov.

Em alguns casos especiais, é possível obter uma fórmula explícita para  $Pf$ . Com efeito, se  $X = [a, b]$  é um intervalo real, e  $A = [a, x]$ , então

$$\int_a^x P f(s) ds = \int_{T^{-1}([a, x])} f(s) ds,$$

daí,

$$P f(x) = \frac{d}{dx} \int_{T^{-1}([a, x])} f(s) ds. \quad (2.1)$$

Quando  $T$  é uma transformação mensurável diferenciável e invertível, podemos utilizar a forma explícita acima para  $Pf$ . Suponha que  $T$  é uma função crescente e  $T^{-1}$  possui derivada contínua. Logo,  $T^{-1}([a, x]) = [T^{-1}(a), T^{-1}(x)]$ , e usando a forma explícita de  $Pf$ ,

$$P f(x) = \frac{d}{dx} \int_{T^{-1}(a)}^{T^{-1}(x)} f(s) ds = f(T^{-1}(x)) \frac{d}{dx} [T^{-1}(x)].$$

Se  $T$  é decrescente, então o sinal do lado direito é invertido. Em geral, no caso unidimensional, quando  $T$  é um difeomorfismo,

$$P f(x) = f(T^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx} [T^{-1}(x)] \right|.$$

**Exemplo 2.2.2.** Seja  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $T(x) = rx \pmod{1}$ ;  $r \in \mathbb{Z}$ . Ou seja,  $T(x) = rx - n$ , sendo  $n$  o maior inteiro tal que  $rx - n \geq 0$ . Esta expressão é chamada de transformação  $r$ -ádica.

A figura abaixo ilustra a transformação  $r$ -ádica para  $r = 2$  (diádica). Note que

$$T(x) = \begin{cases} T_1(x) = 2x; & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ T_2(x) = 2x - 1; & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

sendo  $T_1$  e  $T_2$  invertíveis e diferenciáveis.

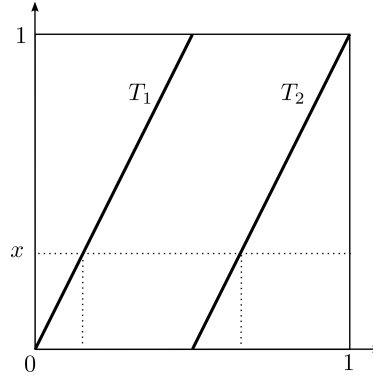


Figura 2.1: Transformação diádica.

Considerando o intervalo  $[0, x] \subset [0, 1]$ . Temos

$$T^{-1}([0, x]) = \bigcup_{i=0}^{r-1} \left[ \frac{i}{r}, \frac{i}{r} + \frac{x}{r} \right]$$

e o operador de Frobenius-Perron da transformação  $r$ -ádica é

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{r-1} \int_{i/r}^{i/r+x/r} f(s) ds = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right).$$

**Exemplo 2.2.3.** (Mapa quadrático) Seja  $T(x) = 4x(1-x)$ , para  $0 \leq x \leq 1$ . Temos,

$$T^{-1}([0, x]) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}, 1\right].$$

Da equação, temos

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{1/2-1/2\sqrt{1-x}} f(s) ds + \frac{d}{dx} \int_{1/2+1/2\sqrt{1-x}}^1 f(s) ds \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^{1/2-1/2\sqrt{1-x}} f(s) ds - \frac{d}{dx} \int_1^{1/2+1/2\sqrt{1-x}} f(s) ds \\ &= f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) \frac{d}{dx} (1/2 - 1/2\sqrt{1-x}) - f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) \frac{d}{dx} (1/2 + 1/2\sqrt{1-x}) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left[ f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) \right]. \end{aligned}$$

A última igualdade acima nos fornece uma fórmula explícita do operador de Frobenius-Perron correspondente à transformação quadrática, descrevendo como  $T$  leva uma densidade  $f$  em uma nova densidade  $Pf$ .

## 2.3 Operador de Koopman

**Definição 2.3.1.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade,  $T : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável não-singular e  $f \in L^\infty$ . O operador  $U : L^\infty \rightarrow L^\infty$  definido por  $Uf(x) = f(T(x))$  é chamado **operador de Koopman** relacionado a  $T$ .

Como  $T$  é não-singular,  $U$  é bem definido, pois  $f_1(x) = f_2$  q.t.p. implica  $f_1(T(x)) = f_2(T(x))$  q.t.p. O operador de Koopman possui algumas importantes propriedades:

(K1)  $U$  é um operador linear, isto é,

$$U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 U f_1 + \lambda_2 U f_2, \quad \forall f_1, f_2 \in L^\infty, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$$

(K2)  $U$  é uma contração, isto é,

$$\|Uf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}, \quad \forall f \in L^\infty;$$

(K3) O operador de Koopman é o operador linear adjunto do operador de Frobenius Perron, isto é,

$$\langle Pf, g \rangle = \langle f, Ug \rangle, \quad \forall f \in L^1, g \in L^\infty.$$

A fim de verificarmos a propriedade (K2), note que  $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$  q.t.p. implica  $|f(T(x))| \leq \|f\|_{L^\infty}$  q.t.p. Como  $Uf(x) = f(T(x))$ , então  $\|Uf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$ .

Para a propriedade (K3), consideremos inicialmente  $g = \chi_A$ . Assim,

$$\langle Pf, g \rangle = \int_X Pf(x) \chi_A \mu(dx) = \int_A Pf(x) \mu(dx),$$

e

$$\begin{aligned} \langle f, Ug \rangle &= \int_X f(x) U \chi_A(x) \mu(dx) \\ &= \int_X f(x) \chi_A(T(x)) \mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

Portanto, para  $g(x) = \chi_A$ , (K3) é equivalente a

$$\int_A Pf(x) \mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x) \mu(dx).$$

Como a propriedade (K3) é válida para  $g(x) = \chi_A$ , então é válida para qualquer função simples. Então, pela Observação 1.6.1, a propriedade vale para todo  $g \in L^\infty$ .

**Definição 2.3.2.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade. Um operador de Markov é dito **determinístico** se o seu adjunto  $U = P^*$  possui a seguinte propriedade: Para todo  $A \in \mathcal{A}$ , a função  $U \chi_A$  é uma função característica, isto é,  $U \chi_A = \chi_B$  para algum  $B \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 2.3.3.** [9] O operador de Frobenius-Perron é um operador determinístico.

*Demonstração.* Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $P : L^1 \rightarrow L^1$  o operador de Frobenius-Perron correspondente à transformação mensurável não-singular  $T : X \rightarrow X$ . O operador adjunto de  $P$  é dado pelo operador de Koopman  $U$  correspondente a  $T$ . Logo,

$$U \chi_A = \chi_A(T(x)) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) \in A, \\ 0, & \text{se } T(x) \notin A. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in T^{-1}(A), \\ 0, & \text{se } x \notin T^{-1}(A). \end{cases} = \chi_{T^{-1}(A)}(x)$$

Como  $T$  é mensurável,  $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ . Portanto,  $P$  é um operador determinístico.  $\square$

**Teorema 2.3.4.** [9] Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade,  $T : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável não-singular e  $P$  o operador de Frobenius-Perron associado a  $T$ . Considere  $f \in L^1$  não-negativa. Então a medida  $\mu_f$ , dada por

$$\mu_f(A) = \int_A f(x) \mu(dx),$$

é invariante se, e somente se,  $f$  é um ponto fixo de  $P$ .

*Demonstração.* Assuma que  $\mu_f$  é invariante. Então, pela definição de medida invariante,

$$\mu_f(A) = \mu_f(T^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

logo,

$$\int_A f(x) \mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x) \mu(dx), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Da definição do operador de Frobenius-Perron, temos

$$\int_{T^{-1}(A)} f(x) \mu(dx) = \int_A Pf(x) \mu(dx), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Comparando as duas últimas igualdades, segue que  $Pf = f$ .

Por outro lado, se  $Pf = f$  para algum  $f \in L^1, f \geq 0$ , então da definição do operador de Frobenius-Perron, a equação é válida e assim  $\mu_f$  é invariante. □

**Observação 2.3.5.** Observe que a medida original  $\mu$  é invariante se, e só se,  $P1 = 1$ .

**Exemplo 2.3.6.** Seja  $T(x) = \begin{cases} T_1(x) = 4x^2; & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ T_2(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2; & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ .

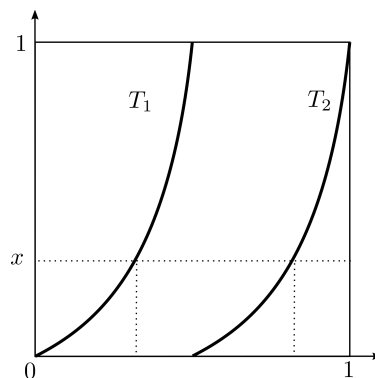


Figura 2.2: Transformação T.

Observe que se  $[0, x] \subset [0, 1]$ , então

$$T^{-1}([0, x]) = T_1^{-1}([0, x]) \cup T_2^{-1}([0, x]) = [0, \frac{\sqrt{x}}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}].$$

Assim,

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \frac{d}{dx} \int_{T^{-1}([0,x])} f(s)ds = \frac{d}{dx} \int_{T^{-1}(0)}^{T^{-1}(x)} f(s)ds = f(T^{-1}(x)) \frac{d}{dx}[T^{-1}(x)] \\ &= \left( f\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \right) \frac{1}{4\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Note que  $P1 \neq 1$ , logo a medida de Lebesgue não é invariante pela transformação  $T$ . Observe ainda que  $m([0,x]) \geq m(T^{-1}([0,x]))$ .



## Capítulo 3

# Transformações do tipo Bernoulli e LM-Bernoulli

Neste capítulo definiremos uma dinâmica simbólica a partir de um espaço de sequências de símbolos e definiremos as transformações do tipo Bernoulli, isto é, transformações que são isomorfas a mapas de deslocamento.

Em seguida, estudaremos uma dinâmica simbólica composta por duas coleções de símbolos. Por fim, definiremos as transformações LM-Bernoulli, cujo conceito é uma extensão das transformações Bernoulli.

### 3.1 O Espaço de Sequências de Símbolos $\Sigma_S$

As principais referências para esta seção são [17] e [18].

Seja  $S = \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ ,  $N \geq 1$ , uma coleção de símbolos. Queremos construir sequências de elementos de  $S$ , e definir o conjunto de todas sequências como o espaço de todas sequências de símbolos, que denotaremos por  $\Sigma_S$ .

Iremos dotar  $S$  da estrutura de espaço métrico, para tal, para cada  $x, y \in S$ , definimos

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$$

A aplicação  $d$  é uma métrica, conhecida como métrica discreta. Tal métrica induz em  $S$  a topologia discreta  $\tau = \mathcal{P}(S)$ , definida pela coleção de todos subconjuntos de  $S$ .

**Proposição 3.1.1.** [17] *O espaço métrico  $(S, d)$  é compacto e totalmente desconexo.*

*Demonstração.* Como  $S$  é finito, então o espaço métrico  $(S, d)$  é compacto. Com efeito, seja  $C = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$  uma cobertura aberta de  $S$ . Note que para cada  $x \in S$ , existe  $\lambda' \in L$  tal que  $x \in C_{\lambda'}$ . Então,

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\} \subset \bigcup_{\lambda' \in L} C_{\lambda'} \subset C.$$

Como  $S$  é finito, segue que  $\bigcup_{\lambda' \in L} C_{\lambda'}$  é uma subcobertura finita de  $S$ .

Resta mostrarmos que  $(S, d)$  é totalmente desconexo. Como  $S$  é um conjunto discreto, para quaisquer  $x, y \in S$  distintos, os conjuntos unitários  $\{x\}, \{y\}$  são disjuntos e simultaneamente abertos e fechados. Portanto, pelo Lema 1.1.14,  $(S, d)$  é totalmente desconexo.  $\square$

Todo espaço métrico compacto é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em  $S$  converge em  $S$ . Definamos

$$\Sigma_S = \cdots \times S \times S \times S \times \cdots = \prod_{-\infty}^{\infty} S.$$

Ou seja, se  $x \in \Sigma_S$ , então

$$x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$$

com  $x_i \in S$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Usando uma notação mais sucinta, escrevemos

$$x = (\cdots x_{-n} \cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots x_n \cdots).$$

É possível definir várias métricas em  $\Sigma_S$ . As aplicações  $\bar{d}_1 : \Sigma_S \times \Sigma_S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{d}_2 : \Sigma_S \times \Sigma_S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{d}_3 : \Sigma_S \times \Sigma_S \rightarrow \mathbb{R}$  dadas a seguir são três métricas bem definidas em  $\Sigma_S$ :

$$\begin{aligned} \bar{d}_1(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)}; \\ \bar{d}_2(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}}; \\ \bar{d}_3(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{2^{M(x, y)}}, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y, \end{cases} \end{aligned}$$

sendo  $M(x, y) = \min\{|i|; x_i \neq y_i\}$  quando  $x \neq y$ .

**Proposição 3.1.2.** A aplicação  $\bar{d}_1$  é uma métrica em  $\Sigma_S$ .

*Demonstração.* Sejam  $x, y, z \in \Sigma_S$  quaisquer:

(i) Positividade:  $\bar{d}_1(x, y) \geq 0$ , pois  $d(x_i, y_i), 1 + d(x_i, y_i) \geq 0$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Ainda,

$$\bar{d}_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x_i, y_i) = 0 \forall i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = y;$$

(ii) Simetria:

$$\bar{d}_1(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(y_i, x_i)}{1 + d(y_i, x_i)} = \bar{d}_1(y, x);$$

(iii) Desigualdade Triangular: Observe que a função  $f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$  é crescente, uma vez que  $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ . Daí, usando a desigualdade triangular de  $d$ , temos

para todo  $i$  :

$$\begin{aligned}
& d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i) \\
\Rightarrow & \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} \leq \frac{d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)}{1 + d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)} \\
\Rightarrow & \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} \leq \frac{d(x_i, z_i)}{1 + d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)} + \frac{d(z_i, y_i)}{1 + d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)} \\
\Rightarrow & \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} \leq \frac{d(x_i, z_i)}{1 + d(x_i, z_i)} + \frac{d(z_i, y_i)}{1 + d(z_i, y_i)} \\
\Rightarrow & \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} \leq \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, z_i)}{1 + d(x_i, z_i)} + \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(z_i, y_i)}{1 + d(z_i, y_i)} \\
\Rightarrow & \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, z_i)}{1 + d(x_i, z_i)} + \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(z_i, y_i)}{1 + d(z_i, y_i)} \right) \\
\Rightarrow & \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, z_i)}{1 + d(x_i, z_i)} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(z_i, y_i)}{1 + d(z_i, y_i)} \\
\Rightarrow & \bar{d}_1(x, y) \leq \bar{d}_1(x, z) + \bar{d}_1(z, y).
\end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{d}_1$  é uma métrica. □

No Apêndice A, mostramos que as aplicações  $\bar{d}_2$  e  $\bar{d}_3$  são de fato métricas em  $\Sigma_S$ .

**Proposição 3.1.3.** *As métricas  $\bar{d}_1, \bar{d}_2$  e  $\bar{d}_3$  são equivalentes.*

*Demonstração.* A demonstração se encontra no Apêndice A. □

**Lema 3.1.4.** [17] *Sejam  $x, y \in \Sigma_S$  e  $M \in \mathbb{N}$ .*

(i) *Se  $\bar{d}_1(x, y) < \frac{1}{2^{M+1}}$ , então  $x_i = y_i$  para todo  $i$  tal que  $|i| \leq M$ .*

(ii) *Se  $x_i = y_i$  para todo  $i$  tal que  $|i| \leq M$ , então  $\bar{d}_1(x, y) \leq \frac{1}{2^M}$ .*

*Demonstração.* (i) Suponha, por absurdo, que exista  $j$ , com  $|j| \leq M$  tal que  $x_j \neq y_j$ .

Logo,  $d(x_j, y_j) = 1$ . Assim, existe um termo na soma dada por  $\bar{d}_1(x, y)$  da forma

$$\frac{1}{2^{|j|}} \frac{d(x_j, y_j)}{1 + d(x_j, y_j)}.$$

Como  $x_j \neq y_j$ , temos

$$\frac{d(x_j, y_j)}{1 + d(x_j, y_j)} = \frac{1}{2},$$

ainda como cada termo da soma definida por  $\bar{d}_1(x, y)$  é positivo,

$$\bar{d}_1(x, y) \geq \frac{1}{2^{|j|}} \frac{d(x_j, y_j)}{1 + d(x_j, y_j)} = \frac{1}{2^{|j|+1}} \geq \frac{1}{2^{M+1}},$$

o que contradiz a hipótese de (i).

(ii) Suponhamos  $x_i = y_i$  para  $|i| \leq M$ , daí,  $d(x_i, y_i) = 0$  para  $|i| \leq M$ , logo

$$\sum_{i=-M}^M \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} = 0.$$

Assim,

$$\bar{d}_1(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{-(M+1)} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)}.$$

Como  $\frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} \leq \frac{1}{2}$  para todo  $i$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{d}_1(x, y) &\leq 2 \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+M+1}} \\ &= \frac{1}{2^{M+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^{M+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^M}. \end{aligned}$$

□

Como as três métricas determinam a mesma família de abertos, o lema acima também é válido para as métricas  $\bar{d}_2$  e  $\bar{d}_3$ .

**Definição 3.1.5.** Sejam  $y \in \Sigma_S$  e  $\varepsilon > 0$ . A **bola aberta** de centro de  $y$  e raio  $\varepsilon$ , denotada por  $B(y, \varepsilon)$  é o conjunto dos pontos  $x \in \Sigma_S$  cuja distância de  $y$  é estritamente menor do que  $\varepsilon$ , ou seja

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in \Sigma_S; \bar{d}_1(x, y) < \varepsilon\}.$$

A métrica  $\bar{d}_1$  induz uma topologia em  $\Sigma_S$  cuja base é constituída pela coleção de todas as bolas abertas de  $\Sigma_S$ .

Consideremos  $x, y \in \Sigma_S$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M = M(\varepsilon)$  tal que  $\varepsilon < \frac{1}{2^{M+1}}$ , logo se  $\bar{d}_1(x, y) < \varepsilon$ , então  $\bar{d}_1(x, y) < \frac{1}{2^{M+1}}$ . Usando o item (i) do Lema 3.1.4, temos  $x_i = y_i$  para todo  $|i| \leq M$ . Por outro lado, pelo item (ii), se  $x_i = y_i$  sempre que  $|i| \leq M$ , então existe  $\varepsilon > \frac{1}{2^M}$  tal que  $\bar{d}_1(x, y) < \varepsilon$ . Logo, podemos reescrever  $B(y, \varepsilon)$  da seguinte forma:

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in \Sigma_S; x_i = y_i \text{ para todo } i \text{ tal que } |i| \leq M\}.$$

**Definição 3.1.6.** Um **cilindro básico**  $C_i^{j_i}$  de  $\Sigma_S$  é o conjunto das sequências de símbolos que possuem um dado  $j_i \in S$  na  $i$ -ésima entrada. Isto é,

$$C_i^{j_i} = \{x \in \Sigma_S; x_i = j_i, i \in \mathbb{Z}, j_i \in S\}.$$

**Lema 3.1.7.** Os cilindros básicos são conjuntos abertos de  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$ .

*Demonstração.* De fato, se  $x \in C_i^{j_i}$ , então  $x_i = j_i$ . Pelo item (i) do Lema 3.1.4, se  $y \in \Sigma_S$  e  $\bar{d}_1(x, y) < \frac{1}{2^{i+1}}$ , então  $x_k = y_k$  sempre que  $|k| \leq i$ . Logo, pelo item (ii) do Lema 3.1.4 existe  $\varepsilon$ , com  $\frac{1}{2^{i+1}} < \varepsilon$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset C_i^{j_i}$ . □

**Definição 3.1.8.** Um cilindro  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}$  em  $\Sigma_S$  é definido pelo conjunto

$$C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}} := C_{i_1}^{j_{i_1}} \cap \dots \cap C_{i_k}^{j_{i_k}} = \{x \in \Sigma_S; x_{i_1} = j_{i_1}, \dots, x_{i_k} = j_{i_k}\},$$

sendo  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

**Lema 3.1.9.** Os cilindros de  $\Sigma_S$  são conjuntos simultaneamente abertos e fechados em  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$ .

*Demonstração.* Por definição, cada cilindro é uma interseção finita de cilindros básicos. Como a interseção finita de conjuntos abertos é aberta, segue que todo cilindro é um conjunto aberto em  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$ .

Por outro lado,

$$\Sigma_S \setminus C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}} = (C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}})^c = (C_{i_1}^{j_{i_1}})^c \cup \dots \cup (C_{i_k}^{j_{i_k}})^c.$$

Note que cada complemento  $(C_i^{j_i})^c$  é um conjunto aberto, pois é união de abertos:

$$(C_i^{j_i})^c = \{x \in \Sigma_S; x_i \neq j_i\} = \bigcup_{n \neq j_i} C_i^n.$$

Logo,  $(C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}})^c$  é união de conjuntos abertos e, portanto, é um conjunto aberto. Ou seja,  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}$  é fechado. Portanto os cilindros são simultaneamente abertos e fechados. □

**Lema 3.1.10.** A coleção de todos cilindros de  $\Sigma_S$  é uma base topológica.

*Demonstração.* Mostraremos que tal coleção satisfaz às condições do Lema 1.1.9.

(i) Seja  $x = (\dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots) \in \Sigma_S$ . Existe ao menos um cilindro contendo  $x$ , a saber  $C_{i_1 \dots i_k}^{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$ .

(ii) Se  $x$  pertence à interseção entre dois cilindros, digamos  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}$  e  $C_{l_1 \dots l_n}^{m_1 \dots m_n}$ , então

$$x \in C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}} \cap C_{l_1 \dots l_n}^{m_1 \dots m_n} = C_{i_1 \dots i_k l_1 \dots l_n}^{j_{i_1} \dots j_{i_k} m_1 \dots m_n} \in \Sigma_S.$$

Note que  $i_1, \dots, i_k, l_1, \dots, l_n$  são dois a dois distintos.

Portanto, pelo Lema 1.1.9, a coleção de todos os cilindros de  $\Sigma_S$  constitui uma base para uma topologia em  $\Sigma_S$ . □

**Proposição 3.1.11.** [17] O espaço métrico  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$  é um conjunto de Cantor.

*Demonstração.* Seguindo a Definição 1.4.5, precisamos mostrar que  $\Sigma_S$  é compacto, totalmente desconexo e perfeito.

Como  $S$  é um espaço métrico compacto, segue pelo Teorema 1.1.28 que  $\Sigma_S$  é compacto. Pela Proposição 3.1.1,  $S$  é totalmente desconexo. Logo, pelo Teorema 1.1.27,  $\Sigma_S$  é um espaço totalmente desconexo.

Vamos mostrar que o espaço  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$  é perfeito, ou seja não possui pontos isolados. Seja  $x \in \Sigma_S$ , veremos que  $x$  é ponto de acumulação, isto é, cada vizinhança de  $x$  contém um ponto  $y \in \Sigma_S$  tal que  $x \neq y$ .

Recordemos que a coleção de símbolos de  $\Sigma_S$  é dada por  $S = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ . Seja  $B(x, \varepsilon)$  uma bola aberta centrada em  $x$  e definamos um símbolo  $z$  da seguinte forma:

$$z = \begin{cases} x_{M(\varepsilon)+1} + 1, & \text{se } x_{M(\varepsilon)+1} \neq N-1 \\ x_{M(\varepsilon)+1} - 1, & \text{se } x_{M(\varepsilon)+1} = N-1. \end{cases}$$

A sequência

$$y = (\dots x_{-M(\varepsilon)-2} z x_{-M(\varepsilon)} \dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots x_{M(\varepsilon)} z x_{M(\varepsilon)+2} \dots) \in \Sigma_S$$

pertence a  $B(x, \varepsilon)$  e  $x \neq y$ . Portanto  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$  é um espaço métrico perfeito.  $\square$

Considere a coleção de todos cilindros básicos de  $\Sigma_S$  e  $\mathcal{C}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por esta coleção, ou seja, a menor  $\sigma$ -álgebra que contenha a coleção de cilindros básicos. Obtemos então um espaço mensurável  $(\Sigma_S, \mathcal{C})$ . Vamos definir uma medida de probabilidade  $\mu$  em  $(\Sigma_S, \mathcal{C})$ .

Para cada  $i \in S$ , seja  $\mu(i) = p_i$ , com  $p_i \geq 0$ , e  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Definamos a medida dos cilindros básicos como sendo  $\mu(C_i^j) = p_j$ . Por fim, definamos a medida dos cilindros:

$$\mu(C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}) = \mu(C_{i_1}^{j_1} \cap \dots \cap C_{i_k}^{j_k}) = p_{j_1} \dots p_{j_k}.$$

Note que  $\mu$  é uma medida genérica, pois não especificamos os valores dos  $p_i$ 's. Obtemos assim um espaço de medida de probabilidade  $(\Sigma_S, \mathcal{C}, \mu)$ .

**Observação 3.1.12.** Se, alternativamente, considerássemos  $\mathcal{C}$  como a  $\sigma$ -álgebra gerada por todos os cilindros de  $\Sigma_S$ , então obteríamos uma  $\sigma$ -álgebra de Borel.

## 3.2 O Espaço de Deslocamento

A principal referência para esta seção é [17].

Seja  $\sigma : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  a aplicação dada por

$$\sigma(\dots x_{-n} \dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots x_n \dots) = (\dots x_{-n} \dots x_{-1} x_0 \cdot x_1 \dots x_n \dots),$$

isto é,  $(\sigma(x))_i \equiv x_{i+1}$ . Tal aplicação é conhecida como **mapa de deslocamento**.

**Definição 3.2.1.** Seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação. Um ponto  $x \in X$  é **periódico** se existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(x) = x$ . O **período** de  $x$  é dado pelo menor  $n$  tal que  $T^n(x) = x$ .

**Definição 3.2.2.** Seja  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação e considere  $x \in X$ . A **órbita** de  $x$ , denotada por  $\mathcal{O}(x)$ , é definida pelo conjunto  $\mathcal{O}(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ . A **órbita futura** de  $x$  é dada pelo conjunto  $\mathcal{O}^+(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$  e a **órbita passada** de  $x$  é definida por  $\mathcal{O}^-(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}_-\}$ .

**Observação 3.2.3.** Consideremos agora a dinâmica de  $\sigma$  em  $\Sigma_S$ , isto é, as órbitas dos pontos de  $\Sigma_S$  sob iteração de  $\sigma$ . Denotaremos seqüências bi-infinitas cujos símbolos se repetem periodicamente com uma barra acima dos termos que se repetem. Note que as seqüências do tipo  $(\overline{j_{i_1} j_{i_2} \cdots j_{i_k}} \cdot \overline{j_{i_1} j_{i_2} \cdots j_{i_k}}) = (\cdot \overline{j_{i_1} j_{i_2} \cdots j_{i_k}})$  são periódicas sob  $\sigma$ , pois

$$\begin{aligned} \sigma^k(\overline{j_{i_1} j_{i_2} \cdots j_{i_k}} \cdot \overline{j_{i_1} j_{i_2} \cdots j_{i_k}}) &= \sigma^{k-1}(\overline{j_{i_2} \cdots j_{i_k} j_{i_1}} \cdot \overline{j_{i_2} \cdots j_{i_k} j_{i_1}}) \\ &\vdots \\ &= \sigma(\overline{j_{i_k} j_{i_1} \cdots j_{i_{k-1}}} \cdot \overline{j_{i_k} j_{i_1} \cdots j_{i_{k-1}}}) \\ &= (\overline{j_{i_1} j_{i_2} \cdots j_{i_k}} \cdot \overline{j_{i_1} j_{i_2} \cdots j_{i_k}}) \end{aligned}$$

Por exemplo  $\sigma^2(\overline{01} \cdot \overline{01}) = \sigma(\overline{10} \cdot \overline{10}) = (\overline{01} \cdot \overline{01})$ , isto é,  $(\cdot \overline{01}) = (\overline{01} \cdot \overline{01})$  tem período 2.

**Proposição 3.2.4.** [17] Seja  $\sigma : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  o mapa de deslocamento. Então:

- (i)  $\sigma(\Sigma_S) = \Sigma_S$ ;
- (ii)  $\sigma$  é um homeomorfismo.

*Demonstração.* A primeira afirmação é imediata. Resta mostrarmos que o mapa de deslocamento é um homeomorfismo.

Como  $\sigma(\Sigma_S) = \Sigma_S$ , então a aplicação  $\sigma$  é sobrejetiva. Vejamos que  $\sigma$  também é injetiva: se  $x, y \in \Sigma_S$  e  $\sigma(x) = \sigma(y)$ , então, para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $x_{i+1} = y_{i+1}$ , isto é,  $x = y$ . Portanto  $\sigma$  é bijetiva.

Continuidade: Queremos mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta(\varepsilon)$  tal que  $\overline{d}_1(x, y) < \delta$  implica  $\overline{d}_1(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $M$  tal que  $\frac{1}{2^{M-1}} < \varepsilon$ , se  $\delta = \frac{1}{2^{M+1}}$ , pelo Lema 3.1.4,  $\overline{d}_1(x, y) < \delta$  implica  $x_i = y_i$  para  $|i| \leq M$ , ou seja,

$$(\sigma(x))_i = (\sigma(y))_i \text{ se } |i| \leq M - 1.$$

Usando o Lema 3.1.4, obtemos

$$\overline{d}_1(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^{M-1}} < \varepsilon.$$

Então o mapa de deslocamento é uma aplicação contínua.

A inversa  $\sigma^{-1} : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  é dada por  $(\sigma^{-1}(x))_i \equiv (x_{i-1})$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $M$  tal que  $\frac{1}{2^{M+1}} < \varepsilon$ . Se  $\delta = \frac{1}{2^{M+1}}$ , pelo Lema 3.1.4,  $\overline{d}_1(x, y) < \delta$  implica  $x_i = y_i$  para  $|i| \leq M$ , logo  $x_{i-1} = y_{i-1}$  para  $|i| \leq M + 1$ , ou seja,

$$(\sigma^{-1}(x))_i = (\sigma^{-1}(y))_i \text{ se } |i| \leq M + 1.$$

Então, usando o Lema 3.1.4,

$$\overline{d}_1(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \leq \frac{1}{2^{M+1}} < \varepsilon.$$

Logo a inversa do mapa de deslocamento também é contínua. Portanto,  $\sigma$  é um homeomorfismo. □

**Proposição 3.2.5.** [17] Seja  $(\Sigma_S, \mathcal{C}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $\sigma : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  o mapa de deslocamento. Então o mapa de deslocamento  $\sigma$  preserva medida  $\mu$  em  $\Sigma_S$ .

*Demonstração.* Como  $\mathcal{C}$  é gerado pela coleção de todos os cilindros básicos, basta mostrar que a medida de qualquer cilindro básico permanece invariante por  $\sigma$ . Da definição de  $C_i^j$  e do mapa de deslocamento, temos  $\sigma^{-1}(C_i^j) = C_{i+1}^j$ , ainda

$$\mu(\sigma^{-1}(C_i^j)) = \mu(C_{i+1}^j) = p_j = \mu(C_i^j).$$

Portanto, o mapa de deslocamento preserva medida.  $\square$

**Observação 3.2.6.** Note que se  $\mathcal{C}$  fosse a  $\sigma$ -álgebra de Borel gerada pelos cilindros de  $\Sigma_S$ , deveríamos mostrar que a medida de qualquer cilindro permanece invariante por  $\sigma$ . Com efeito, considerando este caso, teríamos

$$\begin{aligned} \mu(\sigma^{-1}(C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k})) &= \mu(C_{i_2 \dots i_{k+1}}^{j_1 \dots j_k}) \\ &= \mu(C_{i_2}^{j_1} \cap \dots \cap C_{i_{k+1}}^{j_k}) \\ &= p_{j_1} \cdots p_{j_k} = \mu(C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}). \end{aligned}$$

### 3.3 Transformações do tipo Bernoulli

A principal referência para esta seção é [19].

**Definição 3.3.1.** [19] Sejam  $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$  e  $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$  espaços de probabilidade e

$$T_1 : X_1 \rightarrow X_1, T_2 : X_2 \rightarrow X_2$$

transformações que preservam medida. Dizemos que  $T_1$  é **isomorfo** a  $T_2$  se existem  $M_1 \in \mathcal{B}_1, M_2 \in \mathcal{B}_2$  com  $\mu_1(M_1) = \mu_2(M_2) = 1$ , tais que

- (i)  $T_1(M_1) \subset M_1, T_2(M_2) \subset M_2$ ;
- (ii) Existe uma transformação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  que preserva medida invertivelmente e  $\varphi \circ T_1 = T_2 \circ \varphi$ , ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{T_1} & M_1 \\ \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \downarrow \varphi \\ M_2 & \xrightarrow{T_2} & M_2 \end{array}$$

Observe que cada  $M_i, i = 1, 2$ , é equipado com uma  $\sigma$ -álgebra dada por  $M_i \cap \mathcal{B}_i = \{M_i \cap B; B \in \mathcal{B}_i\}$  e uma medida  $\mu_i|_{M_i}$ .

**Definição 3.3.2.** Uma transformação invertível  $T : X \rightarrow X$  definido num espaço de Lebesgue (Definição 1.4.4) possui a **propriedade de Bernoulli** se é isomorfo a um mapa de deslocamento.

Ao longo deste trabalho nos referimos às transformações com a propriedade de Bernoulli como **transformações do tipo Bernoulli** ou simplesmente **transformações Bernoulli**.



### 3.4 Dinâmica Simbólica Estendida

A principal referência para esta seção é [7].

Sejam  $Z = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $S = \{0, 1, \dots, l-1\}$  duas coleções de símbolos com  $m \leq l$ . Consideremos

$$\Sigma_Z := \prod_{-\infty}^{-1} Z \text{ e } \Sigma_S := \prod_0^{\infty} S.$$

Definamos um novo espaço de símbolos,

$$\Sigma_{Z,S} := \Sigma_Z \times \Sigma_S,$$

e definamos a seguinte métrica  $\bar{d} : \Sigma_{Z,S} \times \Sigma_{Z,S} \rightarrow \mathbb{R}$  em  $\Sigma_{Z,S}$  :

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{M(x,y)}}, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y, \end{cases}$$

sendo  $M(x, y) = \min\{|i|; x_i \neq y_i\}$  quando  $x \neq y$ .

**Lema 3.4.1.** *Sejam  $x, y \in \Sigma_{Z,S}$ .*

(i) *Se  $\bar{d}(x, y) < \frac{1}{2^{M+1}}$ , então  $x_i = y_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $|i| \leq M$ .*

(ii) *Se  $x_i = y_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  que satisfaz  $|i| \leq M$ , então  $\bar{d}(x, y) < \frac{1}{2^M}$ .*

*Demonstração.* (i) Suponha que exista  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $|j| \leq M$  e  $x_j \neq y_j$ . Então,

$$\begin{aligned} M(x, y) &\leq |j| \leq M \\ \Rightarrow 2^{M(x,y)} &\leq 2^{|j|} \leq 2^M < 2^{M+1} \\ \Rightarrow \frac{1}{2^{M+1}} &< \frac{1}{2^{|j|}} \leq \frac{1}{2^{M(x,y)}}. \end{aligned}$$

Contradizendo a hipótese de que  $\bar{d} < \frac{1}{2^{M+1}}$ .

(ii) Se  $x_i = y_i$  para todo inteiro  $i$  tal que  $|i| \leq M$ , então  $M(x, y) > M$ . Logo,

$$\begin{aligned} 2^M &< 2^{M(x,y)} \\ \Rightarrow \frac{1}{2^{M(x,y)}} &< \frac{1}{2^M}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{d}(x, y) < \frac{1}{2^M}$ . □

**Definição 3.4.2.** Sejam  $y \in \Sigma_{Z,S}$  e  $\varepsilon > 0$ . A **bola aberta** de centro de  $y$  e raio  $\varepsilon$ , denotada por  $B(y, \varepsilon)$  é o conjunto dos pontos  $x \in \Sigma_{Z,S}$  que distam  $\varepsilon$  de  $y$ , ou seja

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in \Sigma_{Z,S}; \bar{d}(x, y) < \varepsilon\}.$$

A coleção de todas as bolas abertas centradas em  $x \in \Sigma_{Z,S}$  é base da topologia induzida em  $\Sigma_{Z,S}$  pela métrica  $\bar{d}$ . Analogamente ao que ocorre no espaço métrico  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$ , podemos reescrever o conjunto  $B(y, \varepsilon)$  do seguinte modo:

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in \Sigma_{Z,S}; x_i = y_i, |i| \leq M(\varepsilon)\}.$$

**Definição 3.4.3.** Um cilindro básico  $C_i^{j_i}$  de  $\Sigma_{Z,S}$  é definido pelo conjunto

$$C_i^{j_i} = \{x \in \Sigma_{Z,S}; x_i = j_i, i \in \mathbb{Z}, j_i \in Z \text{ se } i < 0, \text{ e } j_i \in S \text{ se } i \geq 0\}.$$

**Lema 3.4.4.** Os cilindros básicos são conjuntos abertos de  $(\Sigma_{Z,S}, \bar{d})$ .

*Demonstração.* De fato, se  $x \in C_i^{j_i}$ , então  $x_i = j_i$ . Pelo Lema 3.4.1, se  $y \in \Sigma_{Z,S}$  e  $\bar{d}(x, y) < \frac{1}{2^{i+1}}$ , então  $x_k = y_k$  sempre que  $|k| \leq i$ . Logo, existe  $\varepsilon$ , com  $\frac{1}{2^i} < \varepsilon$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset C_i^{j_i}$ . □

**Definição 3.4.5.** Um cilindro  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}$  em  $\Sigma_{Z,S}$  é definido pelo conjunto

$$C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}} := C_{i_1}^{j_{i_1}} \cap \dots \cap C_{i_k}^{j_{i_k}} = \{x \in \Sigma_S; x_{i_1} = j_{i_1}, \dots, x_{i_k} = j_{i_k}\},$$

com  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

**Lema 3.4.6.** Os cilindros de  $\Sigma_{Z,S}$  são conjuntos simultaneamente abertos e fechados em  $(\Sigma_{Z,S}, \bar{d})$ .

*Demonstração.* A prova é análoga à demonstração do Lema 3.1.9. □

**Lema 3.4.7.** A coleção de todos cilindros de  $\Sigma_{Z,S}$  é uma base topológica.

*Demonstração.* A prova é análoga à demonstração do Lema 3.1.10. □

**Proposição 3.4.8.** O espaço métrico  $(\Sigma_{Z,S}, \bar{d})$  é um conjunto de Cantor.

*Demonstração.* Mostraremos que  $\Sigma_{Z,S}$  é compacto, totalmente desconexo e perfeito.

Pelo Lema 3.1.11,  $\Sigma_Z$  e  $\Sigma_S$  são espaços métricos compactos. Então, usando o Teorema 1.1.28,  $\Sigma_{Z,S}$  é compacto. Pela Lema 3.1.11,  $\Sigma_Z$  e  $\Sigma_S$  são totalmente desconexos. Então, pelo Teorema 1.1.27,  $\Sigma_{Z,S}$  é um espaço totalmente desconexo.

Recordemos que  $S = \{0, 1, 2, \dots, l-1\}$ . Seja  $B(x, \varepsilon)$  uma bola aberta centrada em  $x$  e definamos um símbolo  $s$  da seguinte forma:

$$s = \begin{cases} x_{M(\varepsilon)+1} + 1, & \text{se } x_{M(\varepsilon)+1} \neq l-1 \\ x_{M(\varepsilon)+1} - 1, & \text{se } x_{M(\varepsilon)+1} = l-1. \end{cases}$$

A sequência

$$y = (\dots x_{-i} \dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots x_{M(\varepsilon)} s x_{M(\varepsilon)+2} \dots) \in \Sigma_S$$

pertence a  $B(x, \varepsilon)$  e  $x \neq y$ . Portanto  $(\Sigma_S, \bar{d}_1)$  é um espaço métrico perfeito. □

### 3.5 Espaço Zip-Shift

A principal referência para esta seção é [Z].

Uma **função de fatoração** é uma aplicação sobrejetiva  $\kappa : S \rightarrow Z$  que associa a cada símbolo  $b \in S$  um símbolo  $a \in Z$ .

Cada  $x \in \Sigma_{Z,S}$  pode ser escrito do seguinte modo

$$x = (\cdots x_{-n} \cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots x_n \cdots),$$

com  $x_i \in Z$  se  $i \leq -1$  e  $x_i \in S$  se  $i \geq 0$ .

**Definição 3.5.1.** Considere o espaço métrico  $(\Sigma_{Z,S}, \bar{d})$  e  $\kappa : S \rightarrow Z$  uma função de fatoração. O **mapa Zip-Shift** é a aplicação  $\sigma_\kappa : \Sigma_{Z,S} \rightarrow \Sigma_{Z,S}$  definida por

$$\sigma_\kappa(\cdots x_{-n} \cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots x_n \cdots) = (\cdots x_{-n} \cdots x_{-1} \kappa(x_0) \cdot x_1 \cdots x_n \cdots).$$

Quando todos os pontos possuem o mesmo número de elementos em sua pré-imagem, digamos  $m$ , dizemos que  $\sigma_\kappa$  é uma aplicação Zip-Shift finito-por-1, ou mais especificamente, Zip-Shift  $m$ -por-1.

**Exemplo 3.5.2.** Sejam  $S = \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,  $\Sigma_S = \prod_{-\infty}^{-1} S \times \prod_0^{\infty} S$ , com  $\kappa : S \rightarrow S$  a aplicação identidade. Então o mapa de deslocamento  $\sigma : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  é um mapa Zip-Shift, pois

$$\begin{aligned} \sigma(\cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots) &= (\cdots x_{-1} x_0 \cdot x_1 \cdots) \\ &= (\cdots x_{-1} \kappa(x_0) \cdot x_1 \cdots). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.5.3.** Sejam  $Z = \{a, b\}$  e  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ . Consideremos as seguintes funções de fatoração:

$$\begin{aligned} \kappa_1 : S &\rightarrow Z \\ \kappa_1(0) &= \kappa_1(2) = a \\ \kappa_1(1) &= \kappa_1(3) = b \\ \kappa_2 : S &\rightarrow Z \\ \kappa_2(0) &= \kappa_2(2) = \kappa_2(3) = a \\ \kappa_2(1) &= b. \end{aligned}$$

As funções de fatoração  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são associadas, respectivamente, aos mapas Zip-Shift  $\sigma_{\kappa_1}$  e  $\sigma_{\kappa_2}$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \sigma_{\kappa_1}(\cdots abaa \cdot 30112 \cdots) &= (\cdots baak_1(3) \cdot 0112 \cdots) \\ &= (\cdots baab \cdot 0112 \cdots) \text{ e} \\ \sigma_{\kappa_2}(\cdots abaa \cdot 30112 \cdots) &= (\cdots baak_2(3) \cdot 0112 \cdots) \\ &= (\cdots baaa \cdot 0112 \cdots). \end{aligned}$$

**Observação 3.5.4.** Os pontos periódicos de  $\sigma_\kappa$  são sequências da forma

$$\overline{(\kappa(j_{i_1}) \cdots \kappa(j_{i_k}) \cdot j_{i_1} \cdots j_{i_k})}.$$

Denotamos tais sequências por

$$\overline{(\kappa(j_{i_1}) \cdots \kappa(j_{i_k}) \cdot j_{i_1} \cdots j_{i_k})} = (\cdot \overline{j_{i_1} \cdots j_{i_k}}).$$

Por exemplo, considerando  $\Sigma_{Z,S}$  e  $\kappa_1$  dados no Exemplo 3.5.3, a seqüência dada por  $(\overline{aba} \cdot \overline{012})$  é periódica de período 3:

$$\begin{aligned} \sigma_{\kappa_1}^3(\overline{aba} \cdot \overline{012}) &= \sigma_{\kappa_1}^3(\overline{\kappa_1(0)\kappa_1(1)\kappa_1(2)} \cdot \overline{012}) \\ &= \sigma_{\kappa_1}^2(\overline{\kappa_1(1)\kappa_1(2)\kappa_1(0)} \cdot \overline{120}) \\ &= \sigma_{\kappa_1}(\overline{\kappa_1(2)\kappa_1(0)\kappa_1(1)} \cdot \overline{201}) \\ &= \overline{\kappa_1(0)\kappa_1(1)\kappa_1(2)} \cdot \overline{012} \\ &= (\overline{aba} \cdot \overline{012}). \end{aligned}$$

**Proposição 3.5.5.** *Seja  $\kappa : S \rightarrow Z$  uma função de fatoração e  $\sigma_\kappa : \Sigma_{Z,S} \rightarrow \Sigma_{Z,S}$  o mapa Zip-Shift. Então:*

(i)  $\sigma_\kappa(\Sigma_{Z,S}) = \Sigma_{Z,S}$ ;

(ii)  $\sigma_\kappa$  é um homeomorfismo local.

*Demonstração.* O primeiro item é imediato.

Seja  $x = (\cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots) \in \Sigma_{Z,S}$  qualquer. Existe um cilindro contendo  $x$ , a saber  $C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}$ , tal que a restrição de  $\sigma_\kappa$  a  $C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}$  é injetiva.

De fato, se  $\sigma_\kappa(x) = \sigma_\kappa(y)$  para algum  $y = (\cdots y_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 y_2 \cdots) \in C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}$ , então

$$(\cdots x_{-2} x_{-1} k(x_0) \cdot x_1 x_2 \cdots) = (\cdots y_{-2} x_{-1} k(x_0) \cdot x_1 y_2 \cdots),$$

logo  $x_i = y_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , isto é,  $x = y$ . Então  $\sigma_\kappa$  é injetiva em  $C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}$ . Ainda,  $\sigma_\kappa : C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1} \rightarrow \sigma_\kappa(C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}) = C_{-2-10}^{x_{-1}\kappa(x_0)x_1}$  é sobrejetiva e, portanto, bijetiva.

Continuidade: Dado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $M$  tal que  $1/(2^{M-1}) < \varepsilon$ , se  $\delta = 1/(2^{M-1})$ , pelo Lema 3.4.1,  $\bar{d}(x, y) < \delta$  implica  $x_i = y_i$  para  $|i| \leq M$ , ou seja,  $(\sigma_\kappa(x))_i = (\sigma_\kappa(y))_i$  se  $|i| \leq M-1$ . Daí, usando o Lema 3.4.1,

$$\bar{d}(\sigma_\kappa(x), \sigma_\kappa(y)) \leq \frac{1}{2^{M-1}} < \varepsilon.$$

Portanto  $\sigma_\kappa$  é contínua, em particular a restrição  $\sigma_\kappa|_{C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}}$  é contínua.

Vejamos agora que  $\sigma_\kappa^{-1} : C_{-2-10}^{x_{-1}\kappa(x_0)x_1} \rightarrow C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}$  é uma aplicação contínua. Dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $M$  tal que  $\frac{1}{2^{M-1}} < \varepsilon$ . Se  $\delta = \frac{1}{2^{M+1}}$ , pelo Lema 3.4.1,  $\bar{d}(x, y) < \delta$  implica  $x_i = y_i$  para  $|i| \leq M$ , logo  $(\sigma_\kappa^{-1}(x))_i = (\sigma_\kappa^{-1}(y))_i$  se  $|i| \leq M+1$ . Portanto, usando o Lema 3.4.1,

$$\bar{d}(\sigma_\kappa^{-1}(x), \sigma_\kappa^{-1}(y)) \leq \frac{1}{2^{M+1}} < \varepsilon.$$

Portanto,  $\sigma_\kappa|_{C_{-101}^{x_{-1}x_0x_1}}$  é um homeomorfismo, isto é,  $\sigma_\kappa$  é homeomorfismo local.  $\square$

## 3.6 Transformações LM-Bernoulli

A principal referência para esta seção é [8].

Considere a coleção de todos cilindros básicos de  $\Sigma_{Z,S}$  e  $\mathcal{C}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por esta coleção, ou seja, a menor  $\sigma$ -álgebra que contenha a coleção de cilindros básicos.

Obtemos então um espaço mensurável  $(\Sigma_{Z,S}, \mathcal{C})$ . (Se, alternativamente, considerarmos  $\mathcal{C}$  como a  $\sigma$ -álgebra gerada pela coleção de todos os cilindros de  $\Sigma_{Z,S}$ , então  $\mathcal{C}$  seria uma  $\sigma$ -álgebra de Borel).

Vamos definir uma medida de probabilidade  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ . Seja

$$\mu(C_i^{z_j}) = p_{z_j} \text{ e } \sum_{j=1}^m p_{z_j} = 1, \text{ se } z_j \in Z, i \in \mathbb{Z}_-^*.$$

Consideremos uma função de fatoração  $\kappa : S \rightarrow Z$ . Para cada  $z_j \in Z$ , seja

$$\kappa^{-1}(z_j) = \{s_1, \dots, s_{k_j}\}, \text{ com } 1 \leq k_j \leq l.$$

(Observe que  $k_j$  depende de  $z_j$ . Quando for conveniente, para simplificar a notação, podemos omitir o índice  $j$  e denotar a cardinalidade de  $\kappa^{-1}(z_j)$  por apenas  $k$ .)

Definamos para cada  $s_\lambda \in S, \lambda \in \{1, \dots, l\}; l = \#S$ .

$$\mu(C_i^{s_\lambda}) = p_{s_\lambda} := \frac{1}{k_j} p_{z_j},$$

com  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $s_\lambda \in \kappa^{-1}(z_j)$  e  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Observe que  $\sum_{\lambda=1}^l p_{s_\lambda} = 1$ .

**Exemplo 3.6.1.** Consideremos o espaço  $\Sigma_{Z,S}$  definido no Exemplo 3.5.3. Note que  $m = 2$  e  $l = 4$ . Escolhendo  $p_{z_1} = p_{z_2} = \frac{1}{2}$ , temos

$$p_{z_1} + p_{z_2} = 1 \text{ e } \mu(C_i^{z_j}) = p_{z_j}, \text{ sendo } j \in \{1, 2\} \text{ e } i \in \mathbb{Z}_-^*.$$

Ou seja,  $\mu(C_i^a) = \mu(C_i^b) = \frac{1}{2}$ , pois  $z_1 = a$  e  $z_2 = b$ .

Temos

$$\kappa_1^{-1}(a) = \{0, 2\} \text{ e } \kappa_1^{-1}(b) = \{1, 3\}$$

Logo  $k_1 = k_2 = 2$ .

Portanto, para  $i \in \mathbb{Z}_+$ ,

$$\mu(C_i^0) = p_0 = \frac{1}{2} p_{z_1} = \frac{1}{4}, \text{ pois } 0 \in \kappa_1^{-1}(z_1);$$

$$\mu(C_i^1) = p_1 = \frac{1}{2} p_{z_2} = \frac{1}{4}, \text{ pois } 1 \in \kappa_1^{-1}(z_2);$$

$$\mu(C_i^2) = p_2 = \frac{1}{2} p_{z_1} = \frac{1}{4}, \text{ pois } 2 \in \kappa_1^{-1}(z_1);$$

$$\mu(C_i^3) = p_3 = \frac{1}{2} p_{z_2} = \frac{1}{4}, \text{ pois } 3 \in \kappa_1^{-1}(z_2).$$

e  $\sum_{\lambda=1}^4 p_{s_\lambda} = 1$ . E assim definimos a medida de probabilidade  $\mu$  no espaço mensurável  $(\Sigma_{Z,S}, \mathcal{C})$ .

Por outro lado, se considerarmos a função de fatoração  $\kappa_2$ , então

$$\kappa_2^{-1}(a) = \{0, 2, 3\} \text{ e } \kappa_2^{-1}(b) = \{1\}$$

Logo  $k_1 = 3$  e  $k_2 = 1$ .

Portanto, para  $i \in \mathbb{Z}_+$ ,

$$\begin{aligned}\mu(C_i^0) &= p_0 = \frac{1}{k_1} p_{z_1} = \frac{1}{6}, \text{ pois } 0 \in \kappa_2^{-1}(z_1); \\ \mu(C_i^1) &= p_1 = \frac{1}{k_2} p_{z_2} = \frac{1}{2}, \text{ pois } 1 \in \kappa_2^{-1}(z_2); \\ \mu(C_i^2) &= p_2 = \frac{1}{k_1} p_{z_1} = \frac{1}{6}, \text{ pois } 2 \in \kappa_2^{-1}(z_1); \\ \mu(C_i^3) &= p_3 = \frac{1}{k_1} p_{z_1} = \frac{1}{6}, \text{ pois } 3 \in \kappa_2^{-1}(z_1).\end{aligned}$$

e  $\sum_{\lambda=1}^4 p_{s_\lambda} = 1$ .

**Proposição 3.6.2.** *Considere o espaço mensurável  $(\Sigma_{Z,S}, \mathcal{C})$ ,  $\mu$  uma medida de probabilidade e  $\kappa : S \rightarrow Z$  uma função de fatoraço. O mapa Zip-Shift  $\sigma_\kappa : \Sigma_{Z,S} \rightarrow \Sigma_{Z,S}$  preserva a medida de probabilidade  $\mu$ .*

*Demonstraço.* A  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}$  é gerada pela coleção de todos os cilindros básicos de  $\Sigma_{Z,S}$ . Mostraremos que a medida é invariante para tais cilindros básicos. Vamos considerar os seguintes casos:

- $C_i^{j_i}$  é um cilindro básico com  $i \geq 0$ , isto é  $j_i \in S$  :

$$\mu(\sigma_\kappa^{-1}(C_i^{j_i})) = \mu(C_{i+1}^{j_i}) = p_{j_i}.$$

- $C_i^{j_i}$  é um cilindro básico com  $i < -1$ ,  $j_i \in Z$  :

$$\mu(\sigma_\kappa^{-1}(C_i^{j_i})) = \mu(C_{i+1}^{j_i}) = p_{j_i}.$$

- $C_i^{j_i}$  é um cilindro básico com  $i = -1$ ,  $j_i \in Z$  : Seja  $\kappa^{-1}(j_{-1}) = \{s_1, \dots, s_k\}$ ,  $1 \leq k \leq l$ . Logo,

$$\sigma_\kappa^{-1}(C_{-1}^{j_{-1}}) = C_0^{s_1} \cup \dots \cup C_0^{s_k}.$$

Então,

$$\mu(\sigma_\kappa^{-1}(C_{-1}^{j_{-1}})) = \mu(C_0^{s_1} \cup \dots \cup C_0^{s_k}) = k \left( \frac{1}{k} p_{j_{-1}} \right) = p_{j_{-1}} = p_{j_i}.$$

Portanto,  $\mu$  é medida invariante pelo mapa Zip-Shift.

□

**Definiço 3.6.3.** Seja  $(X, \overline{\mathcal{B}}, m)$  um espaço de Lebesgue. Uma transformação  $T : X \rightarrow X$  possui a propriedade **LM-Bernoulli** se ela é isomorfa a uma aplicaço Zip-Shift.

## Capítulo 4

### Baker Map 1-por-1 e 2-por-1

Neste capítulo definiremos as transformações baker map 1-por-1 e 2-por-1 e mostraremos que tais aplicações são, respectivamente, Bernoulli e LM-Bernoulli.

Seja  $X$  o quadrado unitário no plano, isto é,  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ . A  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$  é gerada por todos retângulos da forma  $[0, a] \times [0, b]$ . Para definir as transformações baker map 1-por-1 e 2-por-1, consideraremos o espaço de Lebesgue  $(X, \overline{\mathcal{B}}, m)$ , sendo  $m$  a medida de Lebesgue com

$$m([0, a] \times [0, b]) = ab.$$

#### 4.1 A transformação Baker Map 1-por-1

As principais referências para esta seção são [9] e [17].

Definamos a transformação **baker map**  $T : X \rightarrow X$  dada por

$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y); & 0 \leq x < \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1, \\ (2x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

O baker map contrai  $X$  à metade na direção  $y$  e o expande com fator dois na direção  $x$ , em seguida recorta a metade da direita e a posiciona acima da metade da esquerda. Os retângulos verticais  $V_0$  e  $V_1$  são levados, respectivamente, nos retângulos horizontais  $H_0$  e  $H_1$ . Observa-se que a pré-imagem de qualquer retângulo contido em  $X$  é um retângulo em  $X$ , ou um par de retângulos, de mesma área. Assim, a transformação baker map é mensurável.

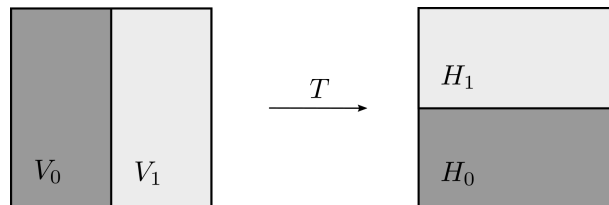


Figura 4.1: O baker map 1-por-1

A aplicação inversa é dada por

$$T^{-1}(x, y) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x, 2y); & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \frac{1}{2}, \\ (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, 2y - 1); & 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

A inversa age em  $X$  expandindo na direção  $y$ , contraindo na direção  $x$  e recortando a metade superior e a posicionando à direita da metade inferior, como ilustra a figura a seguir.

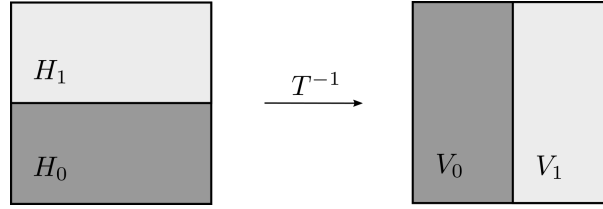


Figura 4.2: A inversa do baker map 1-por-1

**Proposição 4.1.1.** [9] *O baker map preserva medida de Lebesgue.*

*Demonstração.* Vamos calcular o operador de Frobenius-Perron correspondente à transformação baker map, veremos que  $P1 = 1$ , e então concluiremos que a medida de Lebesgue é preservada usando a Observação 2.3.5. Para o cálculo do operador de Frobenius-Perron, iremos analisar os seguintes casos:  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ .

Supondo  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, \frac{1}{2}]$  temos

$$T^{-1}([0, x] \times [0, y]) = [0, \frac{1}{2}x] \times [0, 2y].$$

Então,

$$Pf(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \int_{T^{-1}([0, x] \times [0, y])} f(s, t) dt ds = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^{x/2} \int_0^{2y} f(s, t) dt ds = f\left(\frac{x}{2}, 2y\right).$$

Se  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ , então

$$T^{-1}([0, x] \times [0, y]) = ([0, \frac{x}{2}] \times [0, 1]) \cup ([\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2}] \times [0, 2y - 1]).$$

Daí,

$$Pf(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \int_0^{x/2} \int_0^1 f(s, t) dt ds + \int_{1/2}^{1/2+x/2} \int_0^{2y-1} f(s, t) dt ds \right) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}, 2y - 1\right).$$

Logo,

$$Pf(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{2}, 2y\right); & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}, 2y - 1\right); & \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Portanto,  $P1 = 1$ . Assim, a medida de Lebesgue é invariante pela transformação baker map. □

Seja  $T : X \rightarrow X$  a aplicação baker map. Definamos os conjuntos

$$\partial_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0, 1], \quad \partial_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\},$$

$$\partial = \partial_1 \cup \partial_2,$$

$$\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(\partial) \text{ e } X^* = X \setminus \Omega.$$



Veremos a seguir que o conjunto  $X^*$  é invariante e possui medida total, o que nos permite estudar a dinâmica do baker map 1-por-1 restrita ao conjunto  $X^*$ .

**Lema 4.1.2.** *O conjunto  $X^*$  é invariante sob o baker map 1-por-1 e possui medida total.*

*Demonstração.* Mostraremos inicialmente que o conjunto  $X^*$  é invariante, isto é,  $T(X^*) = X^*$ .

De fato, se  $x \in X^*$  então  $x \notin \Omega$ , logo  $T(x) \notin \bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n(\partial) = \Omega$ . Daí,  $T(x) \in X \setminus \Omega = X^*$ . Portanto  $T(X^*) \subset X^*$ .

Por outro lado, se  $x \in X^*$ , como  $T$  é sobrejetiva, então existe  $w \in X$  tal que  $T(w) = x$ . Observe que  $w \in X^*$ , pois em caso contrário, supondo  $w \notin X^*$ , logo  $w \in \Omega$  e assim  $T(w) = x \in \Omega$ , o que contradiz o fato de que  $x$  pertence a  $X^*$ . Então,  $X^* \subset T(X^*)$  e, portanto, vale a igualdade  $X^* = T(X^*)$ .

Em cada  $n$ -ésima iteração, o conjunto  $\Omega$  corresponde a união de  $2^n$  linhas verticais (retângulos verticais de medida nula) com  $2^n$  linhas horizontais (retângulos horizontais de medida nula). Então,  $m(\Omega) = 0$ . Como  $X^* = X \setminus \Omega$ , então

$$m(X^*) = m(X \setminus \Omega) = 1.$$

Portanto, o conjunto invariante possui medida de Lebesgue total.  $\square$

**Observação 4.1.3.** Chamamos a restrição do baker map à  $X^*$ , dado por  $\bar{T} = T|_{X^*} : X^* \rightarrow X^*$ , de transformação baker map 1-por-1  $\bar{T}$ .

Note que  $\Omega$  contém o conjunto dos pontos de descontinuidade do Baker Map 1-por-1. Logo, o baker map é contínuo em  $X^* = X \setminus \Omega$ , ou seja, o baker map  $\bar{T}$  é uma transformação contínua. Então, pelo Lema 1.2.8, o baker map  $\bar{T}$  é uma transformação mensurável.

**Lema 4.1.4.** *A transformação baker map 1-por-1  $\bar{T}$  preserva medida.*

*Demonstração.* Considerando o espaço de medida  $(X, \mathcal{B}, m)$ ,  $X^* \subset X$  possui uma estrutura de espaço medida ao considerarmos a  $\sigma$ -álgebra definida em  $X^*$  por  $\mathcal{B} \cap X^* = \{B \cap X^*; B \in \mathcal{B}\}$  e a medida dada por  $m|_{X^*}$ .

Observe que para todo  $B \in \mathcal{B}$ , tem-se  $B = (B \cap X^*) \cup (B \cap X \setminus X^*)$ . Como  $m(X \setminus X^*) = 0$ , segue que  $m(B \cap X \setminus X^*) = 0$ , logo,  $m(B) = m(B \cap X^*)$ . Do mesmo modo,  $m(T^{-1}(B)) = m(T^{-1}(B) \cap X^*)$ . Então, se  $B \in \mathcal{B}$ , temos

$$\begin{aligned} m(\bar{T}^{-1}(B \cap X^*)) &= m(\{x \in X^*; \bar{T}(x) \in B \text{ e } \bar{T}(x) \in X^*\}) \\ &= m([T^{-1}(B) \cap X^*] \cap \bar{T}^{-1}(X^*)) \\ &= m(T^{-1}(B) \cap X^*) = m(T^{-1}(B)) \\ &= m(B) = m(B \cap X^*). \end{aligned}$$

Portanto  $\bar{T}$  preserva medida.  $\square$

**Teorema 4.1.5.** *A transformação baker map 1-por-1 é Bernoulli.*

*Demonstração.* Seja  $T : X \rightarrow X$  a transformação baker map definida no espaço de Lebesgue  $(X, \bar{\mathcal{B}}, m)$  sendo  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ . Tal aplicação é invertível e preserva medida de Lebesgue.

Seja  $S = \{0, 1\}$  e  $\Sigma_S$  a coleção de todas sequências bi-infinitas de elementos de  $S$ . Seja  $\sigma : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  o mapa de deslocamento definido no espaço mensurável  $(\Sigma_S, \mathcal{C})$ . A aplicação  $\sigma$  é invertível e preserva medida.

Consideremos a aplicação  $\rho : \Sigma_S \rightarrow X$  dada por

$$\rho(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{2^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i} \pmod{1} \right); \quad x = (x_i).$$

Para cada  $B \in \overline{\mathcal{B}}$ , temos as seguintes possibilidades para  $\rho^{-1}(B)$ :

- $\rho^{-1}(B)$  é um cilindro básico  $C_i^j \in \mathcal{C}$ ;
- $\rho^{-1}(B)$  é interseção de cilindros básicos, ou seja, é um cilindro  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \in \mathcal{C}$ ;
- $\rho^{-1}(B)$  é união de cilindros (básicos ou não), e neste caso, como cada cilindro pertence a  $\mathcal{C}$ , a união deles também é um elemento desta  $\sigma$ -álgebra.

Como para qualquer  $B \in \overline{\mathcal{B}}$ , obtém-se  $\rho^{-1}(B) \in \mathcal{C}$ , então  $\rho$  é uma transformação mensurável.

Definamos  $\Sigma_S^* = \Sigma_S \setminus (\rho^{-1}(\Omega))$ . O conjunto  $\Sigma_S^*$  é invariante. Com efeito, seja  $x = (x_i) \in \Sigma_S^*$ , então  $x \notin \rho^{-1}(\Omega)$ , daí

$$\rho(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{2^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i} \pmod{1} \right) \notin \Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(\partial)$$

e assim  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{2^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i}$  são expansões binárias únicas. Em particular,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i+1}}{2^i}$  também são expansões únicas. Então

$$\rho(\sigma(x)) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i+1}}{2^i} \pmod{1} \right) \notin \Omega.$$

Ou seja,  $\sigma(x) \in \Sigma_S^*$  e, portanto,  $\sigma(\Sigma_S^*) \subset \Sigma_S^*$ . Por outro lado, considerando  $x = (x_i) \in \Sigma_S^*$ ,  $w = (x_{i-1}) \in \Sigma_S$  é tal que  $\sigma(w) = x$ . Como  $\rho(x) \notin \Omega$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{2^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i}$  são expansões binárias únicas. Logo,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-2}}{2^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i-1}}{2^i}$  também são expansões únicas, ou seja  $\rho(w) \notin \Omega$  e assim  $w \in \Sigma_S^*$ . Então  $\sigma(\Sigma_S^*) = \Sigma_S^*$ , isto é,  $\Sigma_S^*$  é invariante.

Consideremos  $\sigma : \Sigma_S^* \rightarrow \Sigma_S^*$ . Seja  $\varphi : \Sigma_S^* \rightarrow X^*$  a aplicação dada por  $\varphi(x) = \rho(x)$  para todo  $x \in \Sigma_S^*$ . Mostraremos que a transformação  $\overline{T} : X^* \rightarrow X^*$  é isomorfo ao mapa de deslocamento por meio do isomorfismo  $\varphi$ .

Em  $X^*$  a expansão binária é única, logo  $\varphi$  é injetiva. Para cada  $(x, y) \in X^*$ ,  $x$  e  $y$  possuem podem ser expressos por sua representação binária, logo  $\varphi$  é sobrejetiva. Portanto a aplicação  $\varphi$  é bijetiva.

Seja  $\mu = \varphi_*^{-1}m$  o pushforward de  $m$  pela aplicação  $\varphi^{-1}$ . Pelo Lema 1.7.8, o pushforward induz então uma medida de probabilidade invariante em  $(\Sigma_S, \mathcal{C})$  obtendo-se o espaço de probabilidade  $(\Sigma_S, \mathcal{C}, \mu)$ . Ainda, para cada  $A \in \overline{\mathcal{B}}$ ,  $\mu(\varphi^{-1}(A)) = m(\varphi(\varphi^{-1}(A))) = m(A)$ , ou seja,  $\varphi^{-1}$  preserva medida. Logo  $\varphi$  preserva medida invertivelmente.

Resta mostrar que  $\varphi \circ \sigma = \bar{T} \circ \varphi$ . Seja  $z \in \Sigma_S$ . Então,

$$\varphi(\sigma(z)) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{2^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i+1}}{2^i} \pmod{1} \right).$$

Para  $(x, y) \in X$ , definamos como  $z_0$  o primeiro dígito da expansão binária de  $x$  de modo que se  $z_0 = 0$  se  $x \in V_0$  e  $z_1 = 1$  se  $x \in V_1$ . Podemos reescrever o baker map na forma a seguir

$$\bar{T}(x, y) = \left( 2x \pmod{1}, \frac{y}{2} + \frac{z_0}{2} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \bar{T}(\varphi(z)) &= \bar{T}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{i-1}}{2^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i}}{2^i}\right) \\ &= \left( 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{i-1}}{2^i} \pmod{1}, \frac{z_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i}}{2^i} \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i+1}}{2^i} \right) = \varphi(\sigma(z)). \end{aligned}$$

Portanto o baker map é isomorfo ao mapa de deslocamento e então possui a propriedade de Bernoulli.  $\square$

## 4.2 A transformação Baker Map 2-por-1

As principais referências para esta seção são [8] e [11].

Seja  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ . A transformação mensurável  $T : X \rightarrow X$  dada por

$$T(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) = \begin{cases} (4x, \frac{1}{2}y); & 0 \leq x < \frac{1}{4}, 0 \leq y \leq 1 \\ (4x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \\ T_2(x, y) = \begin{cases} (4x - 2, \frac{1}{2}y); & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, 0 \leq y \leq 1 \\ (4x - 3, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$

é chamada baker map 2-por-1.

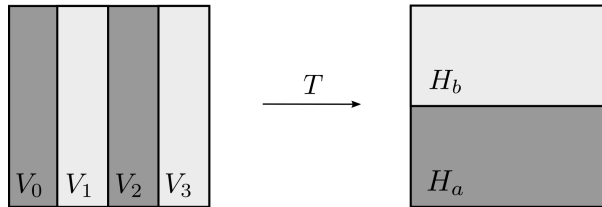


Figura 4.3: baker map 2-por-1

**Proposição 4.2.1.** *A transformação baker map 2-por-1 preserva medida de Lebesgue.*

*Demonstração.* Se  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, \frac{1}{2}]$ , então

$$\begin{aligned} T^{-1}([0, x] \times [0, y]) &= T_1^{-1}([0, x] \times [0, y]) \cup T_2^{-1}([0, x] \times [0, y]) \\ &= [0, \frac{x}{4}] \times [0, 2y] \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{x}{4}] \times [0, 2y]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Pf(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \int_0^{\frac{x}{4}} \int_0^{2y} f(s, t) dt ds + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{x}{4}} \int_0^{2y-1} f(s, t) dt ds \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{x}{4}, 2y\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}, 2y-1\right) \right). \end{aligned}$$

Portanto, neste caso,  $P1 = 1$ .

Se  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ , então

$$\begin{aligned} T^{-1}([0, x] \times [0, y]) &= T_1^{-1}([0, x] \times [0, y]) \cup T_2^{-1}([0, x] \times [0, y]) \\ &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{x}{4}\right] \times [0, 2y-1] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{x}{4}\right] \times [0, 2y-1]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Pf(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4} + \frac{x}{4}} \int_0^{2y-1} f(s, t) dt ds + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4} + \frac{x}{4}} \int_0^{2y-1} f(s, t) dt ds \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{4}, 2y-1\right) + f\left(\frac{3}{4} + \frac{x}{4}, 2y-1\right) \right). \end{aligned}$$

E assim,  $P1 = 1$ . Portanto a medida de Lebesgue é invariante por  $T$ .  $\square$

Seja  $T : X \rightarrow X$  a aplicação baker map 2-por-1. Definamos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \left\{\frac{1}{4}\right\} \times [0, 1], \quad \partial_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0, 1], \quad \partial_3 = \left\{\frac{3}{4}\right\} \times [0, 1], \quad \partial_4 = [0, 1] \times \{0\}, \\ \partial &= \partial_1 \cup \partial_2 \cup \partial_3 \cup \partial_4, \\ \Omega &= \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(\partial) \text{ e } X^* = X \setminus \Omega. \end{aligned}$$

No lema a seguir, veremos que o conjunto  $X^*$  é invariante e possui medida total, o que nos permite estudar a dinâmica do baker map 2-por-1 restrita ao conjunto  $X^*$ .

**Lema 4.2.2.** *O conjunto invariante do baker map 2-por-1 tem medida total.*

*Demonstração.* A prova de que  $X^*$  é invariante é análoga à demonstração do Lema 4.1.2.

Observe que em cada  $n$ -ésima iteração,  $\Omega$  corresponde a união de  $4^n$  linhas verticais e  $2^n$  linhas horizontais de medida nula. Então,  $m(\Omega) = 0$ . Portanto o conjunto invariante dado por  $X^* = X \setminus \Omega$  é tal que  $m(X^*) = 1$ .  $\square$

**Observação 4.2.3.** Denominados a restrição do baker map 2-por-1 à  $X^*$ , dado por  $\bar{T} = T|_{X^*} : X^* \rightarrow X^*$ , de transformação baker map 2-por-1  $\bar{T}$ .

Observe que  $\Omega$  contém o conjunto dos pontos de descontinuidade do baker map 2-por-1. Logo, o baker map 2-por-1 é uma transformação contínua em  $X^* = X \setminus \Omega$ , isto é, a transformação  $\bar{T}$  é contínua. Então, pelo Lema 1.2.8, o baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é uma transformação mensurável.

**Lema 4.2.4.** *A transformação baker map 2-por-1  $\bar{T}$  preserva medida.*

*Demonstração.* A prova é análoga à demonstração do Lema [4.1.4](#).  $\square$

**Teorema 4.2.5.** *A transformação baker map 2-por-1 é LM-Bernoulli.*

*Demonstração.* Seja  $T : X \rightarrow X$  a transformação baker map 2-por-1 definida no espaço de Lebesgue  $(X, \overline{B}, m)$ .

Consideremos o espaço  $\Sigma_{Z,S}$  sendo  $Z = \{a, b\}$  e  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ , e  $\kappa : S \rightarrow Z$  o mapa de fatoração dado por  $\kappa(0) = \kappa(2) = a$  e  $\kappa(1) = \kappa(3) = b$ .

Definamos a transformação  $\rho : \Sigma_{Z,S} \rightarrow X$  dada por

$$\rho(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{4^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i} \pmod{1} \right); x = (x_i).$$

A aplicação  $\rho$  associa a cada sequência de símbolos de  $\Sigma_{Z,S}$ , um par ordenado do quadrado unitário. De modo análogo à aplicação  $\rho$  definida no caso do baker map 1-por-1, a transformação acima é mensurável.

Definamos  $\Sigma_{Z,S}^* = \Sigma_{Z,S} \setminus (\rho^{-1}(\Omega))$ . O conjunto  $\Sigma_{Z,S}^*$  é invariante. Com efeito, seja  $x = (x_i) \in \Sigma_{Z,S}^*$ , então  $x \notin \rho^{-1}(\Omega)$ , daí

$$\rho(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{4^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i} \pmod{1} \right) \notin \Omega$$

e assim  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{4^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i}$  são expansões únicas. Em particular,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{4^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i+1}}{2^i}$  também são expansões únicas. Então

$$\rho(\sigma_{\kappa}(x)) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{4^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i+1}}{2^i} \pmod{1} \right) \notin \Omega.$$

Ou seja,  $\sigma_{\kappa}(x) \in \Sigma_{Z,S}^*$  e, portanto,  $\sigma_{\kappa}(\Sigma_{Z,S}^*) \subset \Sigma_{Z,S}^*$ . Por outro lado, considerando  $x = (x_i) \in \Sigma_{Z,S}^*$ , a sequência  $w = (\dots x_{-2} \cdot s x_0 x_1 \dots) \in \Sigma_{Z,S}$ , tal que  $s \in \kappa^{-1}(x_{-1})$ , satisfaz a igualdade  $\sigma_{\kappa}(w) = x$ . Como  $\rho(x) \notin \Omega$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{4^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i}$  são expansões únicas, logo,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-2}}{4^i}$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i-1}}{2^i}$  também são expansões únicas. Em particular  $\rho(w) \notin \Omega$  e assim  $w \in \Sigma_{Z,S}^*$ . Então  $\sigma_{\kappa}(\Sigma_{Z,S}^*) = \Sigma_{Z,S}^*$ , isto é,  $\Sigma_{Z,S}^*$  é invariante.

Consideremos  $\sigma_{\kappa} : \Sigma_{Z,S}^* \rightarrow \Sigma_{Z,S}^*$ . Seja  $\varphi : \Sigma_{Z,S}^* \rightarrow X^*$  a aplicação dada por  $\varphi(x) = \rho(x)$ , para todo  $x \in \Sigma_{Z,S}^*$ . Vamos mostrar  $\varphi$  que o baker map 2-por-1  $\overline{T} : X^* \rightarrow X^*$  é isomorfo ao mapa Zip-Shift por meio da aplicação  $\varphi$ .

Em  $X^*$  a expansão binária é única, logo a aplicação  $\varphi$  é injetiva. Como cada  $x, y \in [0, 1]$  podem ser expressos em representação binária, segue-se que  $\varphi$  é sobrejetiva. Portanto,  $\varphi$  é bijetiva.

Seja  $\mu = \varphi_*^{-1}m$  o pushforward de  $m$  pela aplicação  $\varphi^{-1}$ . Pelo Lema [1.7.8](#), o pushforward induz uma medida de probabilidade invariante em  $(\Sigma_{Z,S}, \mathcal{C})$ , obtendo-se o espaço de probabilidade  $(\Sigma_{Z,S}, \mathcal{C}, \mu)$ . Ainda, para cada  $A \in \overline{B}$ ,  $\mu(\varphi^{-1}(A)) = m(\varphi(\varphi^{-1}(A))) = m(A)$ , ou seja,  $\varphi^{-1}$  preserva medida. Logo  $\varphi$  preserva medida invertivelmente.

Resta mostrar que  $\varphi \circ \sigma_{\kappa} = \overline{T} \circ \varphi$ . Ou seja, o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{Z,S}^* & \xrightarrow{\sigma_{\kappa}} & \Sigma_{Z,S}^* \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ X^* & \xrightarrow{\overline{T}} & X^* \end{array}$$

Seja  $z = (z_i) \in \Sigma_{Z,S}^*$ . Então,

$$\varphi(\sigma_\kappa(z)) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{4^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i+1}}{2^i} \pmod{1} \right).$$

Para  $(x, y) \in X^*$ , definamos  $z_0 = 0$  se  $x \in V_0$  e  $z_0 = 1$  se  $x \in V_1$ . Reescrevemos o baker map 2-por-1 na forma a seguir

$$\bar{T}(x, y) = \left( 4x \pmod{1}, \frac{1}{2}(y + \kappa(z_0)) \right),$$

sendo  $\kappa(z_0)$  dado pela representação numérica de  $a, b \in Z$ , isto é, fazemos  $Z = \{0', 1'\} = \{a, b\}$ , escrevendo  $a = 0', b = 1'$ .

Então,

$$\begin{aligned} T(\varphi(z)) &= T\left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{i-1}}{4^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i}}{2^i} \pmod{1} \right) \\ &= \left( 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{i-1}}{4^i} \pmod{1}, \frac{\kappa(z_0)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i}}{2^{i+1}} \pmod{1} \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{4^i} \pmod{1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{-i+1}}{2^i} \pmod{1} \right) = \varphi(\sigma_\kappa(z)). \end{aligned}$$

Portanto o baker map 2-por-1 é isomorfo à transformação Zip-Shift e, então, possui a propriedade de LM-Bernoulli.  $\square$

# Capítulo 5

## Ergodicidade e Caos Devaney

Neste capítulo investigamos as propriedades ergódicas do baker map 2-por-1 e seu comportamento caótico.

### 5.1 Transformações Ergódicas

As principais referências para esta seção são [19] e [9].

**Definição 5.1.1.** Seja  $(X, \mathcal{A})$  um espaço mensurável e seja  $T$  uma transformação mensurável. Dizemos que a medida invariante  $\mu$  é **ergódica** ou que a transformação  $T$  é ergódica, se para cada  $A \in \mathcal{A}$  com  $T^{-1}(A) = A$ , tem-se  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A) = 1$ .

**Teorema 5.1.2** (Característica de medidas ergódicas). [18] *Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva medida. São equivalentes:*

- (i)  $\mu$  é ergódica;
- (ii)  $f \circ T = f$ ;  $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \Rightarrow f \equiv cte$   $\mu$ -q.t.p.

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponha que  $\mu$  seja uma medida ergódica. Por contradição, seja  $f \in L^1$  tal que  $f \circ T = f$ , mas  $f$  não constante  $\mu$ -q.t.p.

Definindo  $B = \{x \in X : f(x) > c\}$ , tem-se  $0 < \mu(B) < 1$ .

Como  $f \circ T(x) = f(x)$ , então  $T^{-1}B = B$ , pois  $f \circ TT^{-1}(x) = f \circ T^{-1}(x)$  implica  $f(x) = f(T^{-1}(x))$ . Assim,  $T^{-1}B = \{x \in X : f(T^{-1}x) > c\} = B$ .

Como  $B$  é invariante e  $T$  preserva medida,  $0 < \mu(B) < 1$  implica  $0 < \mu(T^{-1}B) < 1$ . O que contradiz o fato de  $\mu$  ser uma medida ergódica.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Seja  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $T^{-1}B = B$ . Se  $\mu(B) = 0$ , então  $\mu$  é ergódica. Suponha  $\mu(B) > 0$  e defina  $f = \chi_B$ . Logo,

$$\mu(B) = \int_X \chi_B(x) d\mu = \int_X \chi_{T^{-1}B}(x) d\mu = \int_X \chi_B(T(x)) d\mu = \mu(T^{-1}B).$$

Daí, para  $\mu$ -q.t.p.,  $\chi_B(x) = \chi_B(T(x))$ . Ou seja,  $\chi_B = \chi_B \circ T$ , o que implica, por hipótese, que  $\chi_B$  é constante  $\mu$ -q.t.p. Logo,  $\chi_B(x) = 1$   $\mu$ -q.t.p.

Como  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é um espaço de probabilidade,

$$\mu(B) = \int_X \chi_B(x) d\mu = \int_X 1 d\mu = 1,$$

isto é,  $\mu(B) = 1$ . Portanto  $\mu$  é ergódica. □

**Exemplo 5.1.3.** Seja  $R_\alpha(x) : S^1 \rightarrow S^1$  a rotação racional dada por  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$  tal que  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  com  $p$  e  $q$  primos entre si. A transformação  $R_\alpha$  não é ergódica.

De fato, considerando

$$A = \bigcup_{i=0}^{q-1} \left[ \frac{i}{q}, \frac{i}{q} + \frac{1}{2q} \right],$$

tem-se  $R_\alpha^{-1}(A) = A$ . O conjunto  $A$  é a reunião de intervalos de medida  $\frac{1}{2q}$ , daí  $m(A) = q \frac{1}{2q} = \frac{1}{2}$ , ou seja,  $0 < m(A) < 1$ . Portanto,  $m$  não é ergódica.

**Exemplo 5.1.4.** A rotação irracional  $R_\alpha = x + \alpha \pmod{1}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , é uma transformação ergódica.

Seja  $f \in L^2$  tal que  $f \circ R_\alpha = f$  q.t.p. Vejamos que  $f$  é constante q.t.p. Para tal, consideremos a expansão de  $f$  em série de Fourier dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}; c_n = \int f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Como  $f \circ R_\alpha = f$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n(x+\alpha)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} e^{2\pi i n \alpha} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \\ \Rightarrow c_n &= c_n e^{2\pi i n \alpha} \\ \Rightarrow c_n (1 - e^{2\pi i n \alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , as órbitas de  $R_\alpha$  são todas distintas. Em particular,  $R_\alpha^n(0) = n\alpha \pmod{1} \neq 0$ . Logo,  $1 - e^{2\pi i n \alpha} \neq 0$ , daí  $c_n = 0$  para todo  $n$ . Então a função  $f$  é constante. Portanto, pelo Teorema [5.1.2](#), a rotação irracional é ergódica.

## 5.2 Transformações Mixing

As principais referências desta seção são [\[17\]](#), [\[18\]](#) e [\[8\]](#).

**Definição 5.2.1.** Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade. Uma medida  $\mu$  invariante por  $T : X \rightarrow X$  (ou a transformação  $T$  que preserva medida  $\mu$ ) é **fortemente mixing** se para cada  $A, B \in \mathcal{B}$  tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$



**Definição 5.2.2.** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma aplicação  $T : X \rightarrow X$  é **topologicamente transitiva** se para cada par de subconjuntos abertos  $A$  e  $B$  de  $X$ , existe  $n$  tal que

$$T^n(A) \cap B \neq \emptyset.$$

**Definição 5.2.3.** Uma transformação contínua  $T : X \rightarrow X$  sobre um espaço topológico  $X$  é **topologicamente mixing** se para todo par de subconjuntos abertos  $A$  e  $B$  de  $X$  existe  $N > 0$  inteiro tal que

$$T^n(A) \cap B \neq \emptyset, \quad \forall n \geq N.$$

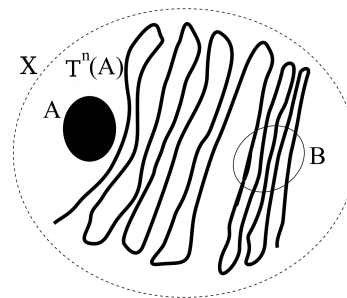


Figura 5.1: [17] A figura acima ilustra a propriedade de mixing.

**Lema 5.2.4.** [17] Toda transformação topologicamente mixing é topologicamente transitiva.

*Demonstração.* Se  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação topologicamente mixing, então para quaisquer abertos  $A$  e  $B$  de  $X$ , existe  $N > 0$  tal que  $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$  para todo  $n \geq N$ . Em particular,  $T^N(A) \cap B \neq \emptyset$ . Portanto,  $T$  é topologicamente transitiva.  $\square$

**Proposição 5.2.5.** [14] Seja  $(X, \mathcal{B}, m)$  um espaço de Lebesgue e  $T : X \rightarrow X$  uma transformação contínua que preserva medida. Se  $T$  é fortemente mixing, então  $T$  é topologicamente mixing.

*Demonstração.* Sejam  $A, B \subset X$  subconjuntos abertos não-vazios. A medida de Lebesgue de abertos não-vazios é sempre estritamente positiva, logo,  $m(A)m(B) > 0$ . Como a transformação  $T$  é fortemente mixing, então, por definição,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}(A) \cap B) = m(A)m(B) > 0.$$

Logo, existe  $N > 0$  tal que se  $n \geq N$  então  $m(T^{-n}(A) \cap B) > 0$ , o que implica  $T^{-n}(A) \cap B \neq \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 5.2.6.** [17] Toda transformação fortemente mixing é ergódica.

*Demonstração.* Sejam  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade, com  $\mu$  uma medida invariante por  $T : X \rightarrow X$ .

Tome  $A \subset X$  tal que  $T^{-1}(A) = A$ . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap A) = \mu^2(A).$$

Ou seja,  $\mu(A) = \mu^2(A)$ , o que implica que  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A) = 1$ . Portanto,  $\mu$  é ergódica.  $\square$

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. A rotação irracional é ergódica mas não é fortemente mixing.

**Exemplo 5.2.7.** Seja  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  uma rotação irracional. Se  $A, B \subset S^1$  são intervalos suficientemente pequenos, então  $R_\alpha^{-n}(A) \cap B = \emptyset$  e  $m(R_\alpha^{-n}(A) \cap B) = 0$  para infinitos valores de  $n$ . No entanto,  $m(A)m(B) \neq 0$ . Logo  $R_\alpha$  não é fortemente mixing.

### 5.2.1 A Ergodicidade e Mixing do Baker Map 1-por-1

Veremos na proposição a seguir que o mapa de deslocamento é uma transformação fortemente mixing. Usaremos este fato para demonstrar que toda transformação isomorfa ao mapa de deslocamento, isto é, toda transformação Bernoulli, é também fortemente mixing. Daí concluiremos que o baker map 1-por-1 é fortemente mixing, e em particular, é uma transformação ergódica. A partir de tais resultados, mostraremos que o baker map  $\bar{T}$  é fortemente mixing, ergódico e topologicamente mixing.

**Proposição 5.2.8.** [17] *Seja  $(\Sigma_S, \mathcal{C}, \mu)$  um espaço de probabilidade. O mapa de deslocamento  $\sigma : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  é fortemente mixing.*

*Demonstração.* Como  $\mathcal{C}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela coleção de cilindros básicos, basta verificar que a propriedade é válida para qualquer par de cilindros básicos. Consideremos os cilindros básicos  $C_i^j, C_n^m$ . Observe que  $\sigma^{-n}(C_i^j) = C_{i+n}^j$ . Logo,

$$\mu(\sigma^{-n}(C_i^j) \cap C_n^m) = \mu(C_{i+n}^j \cap C_n^m) = p_j p_m = \mu(C_i^j) \mu(C_n^m).$$

Portanto, o mapa de deslocamento é fortemente mixing.  $\square$

**Observação 5.2.9.** Observe que de fato, ao considerarmos dois cilindros quaisquer de  $\Sigma_S$ , a propriedade mixing é satisfeita. Sejam  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}, C_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_k} \in \Sigma_S$ . Temos

$$\sigma^{-n}(C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}) = C_{i_1+n \dots i_k+n}^{j_1 \dots j_k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu(\sigma^{-n}(C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}) \cap C_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_k}) &= \mu(C_{i_1+n \dots i_k+n}^{j_1 \dots j_k} \cap C_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_k}) \\ &= p_{j_1} \cdots p_{j_k} p_{m_1} \cdots p_{m_k} \\ &= \mu(C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}) \mu(C_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_k}). \end{aligned}$$

**Observação 5.2.10.** Se  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação Bernoulli, ou seja, se existe um isomorfismo  $\varphi : \Sigma_S \rightarrow X$  entre  $T$  e o mapa de deslocamento  $\sigma : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$ , então para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

i)  $T^n \circ \varphi = \varphi \circ \sigma^n$ , pois como  $T \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$ , então

$$\begin{aligned} T^n \circ \varphi &= T^{n-1} \circ (T \circ \varphi) \\ &= T^{n-1} \circ (\varphi \circ \sigma) \\ &= T^{n-2} \circ \varphi \circ \sigma^2 \\ &\vdots \\ &= T \circ \varphi \circ \sigma^{n-1} \\ &= \varphi \circ \sigma^n. \end{aligned}$$

ii)  $T^{-n}(\varphi(A)) = \varphi(\sigma^{-n}(A))$ , para todo  $A \in \mathcal{C}$ .

Com efeito, como  $\varphi$  é bijeção e  $T \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$ , então  $T = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ . Logo,

$$T^n = (\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}) \cdot \dots \cdot (\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ \sigma^n \circ \varphi^{-1}.$$

Usaremos a igualdade acima para mostrar que  $T^{-n}(\varphi(A)) \subset \varphi(\sigma^{-n}(A))$ :

$$\begin{aligned} x \in T^{-n}(\varphi(A)) &\Rightarrow T^n(x) \in \varphi(A) \\ &\Rightarrow \varphi(\sigma^n(\varphi^{-1}(x))) \in \varphi(A) \\ &\Rightarrow \sigma^n(\varphi^{-1}(x)) \in A \\ &\Rightarrow \sigma^{-n}(\sigma^n(\varphi^{-1}(x))) \subset \sigma^{-n}(A) \\ \varphi^{-1}(x) \in \sigma^{-n}(\sigma^n(\varphi^{-1}(x))) &\Rightarrow \varphi^{-1}(x) \in \sigma^{-n}(A) \\ &\Rightarrow x \in \varphi(\sigma^{-n}(A)). \end{aligned}$$

Então  $T^{-n}(\varphi(A)) \subset \varphi(\sigma^{-n}(A))$ . Vejamos, por outro lado, que  $\varphi(\sigma^{-n}(A)) \subset T^{-n}(\varphi(A))$ :

$$\begin{aligned} x \in \varphi(\sigma^{-n}(A)) &\Rightarrow x = \varphi(y), \text{ para algum } y \in \sigma^{-n}(A) \\ &= T^n(x) = T^n(\varphi(y)) \\ &= \varphi(\sigma^n(y)) \in \varphi(A), \text{ pois } \sigma^n(y) \in A \\ &\Rightarrow T^n(x) \in \varphi(A) \\ &\Rightarrow x \in T^{-n}(\varphi(A)). \end{aligned}$$

Portanto,  $T^{-n}(\varphi(A)) = \varphi(\sigma^{-n}(A))$ .

**Teorema 5.2.11.** [17] *Toda transformação que possui a propriedade Bernoulli é fortemente mixing.*

*Demonstração.* Consideremos o espaço de Lebesgue de probabilidade  $(X, \overline{\mathcal{B}}, m)$ ,  $T : X \rightarrow X$  uma transformação Bernoulli,  $\varphi : \Sigma_S \rightarrow X$  o isomorfismo de  $T$  ao mapa de deslocamento  $\sigma$  e o espaço de probabilidade  $(\Sigma_S, \overline{\mathcal{C}}, \mu)$ , sendo  $\mu = \varphi_*^{-1}m$  o pushforward de  $m$  por  $\varphi^{-1}$ .

Sejam  $A, B \in \overline{\mathcal{B}}$ . Como  $\varphi$  é mensurável, então  $\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{C}$ , ou seja, existem  $A', B' \in \overline{\mathcal{C}}$  tais que  $A' = \varphi^{-1}(A)$  e  $B' = \varphi^{-1}(B)$ . Como  $\varphi$  é bijetiva, então  $A = \varphi(A')$  e  $B = \varphi(B')$ .

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}(A) \cap B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}(\varphi(A')) \cap \varphi(B')) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(\varphi(\sigma^{-n}(A')) \cap \varphi(B')), \text{ pela Observação } \boxed{5.2.10} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(\varphi(\sigma^{-n}(A') \cap B')), \text{ pois } \varphi \text{ é bijetiva} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\sigma^{-n}(A') \cap B') \\ &= \mu(A')\mu(B'), \text{ pela Proposição } \boxed{5.2.8} \\ &= m(\varphi(A'))m(\varphi(B')) \\ &= m(A)m(B). \end{aligned}$$

Portanto,  $T$  é fortemente mixing. □

**Corolário 5.2.12.** *A transformação baker map 1-por-1 é fortemente mixing e ergódica.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.1.5 o baker map 1-por-1 é Bernoulli. Logo, usando o Teorema 5.2.11, o baker map é fortemente mixing. Como é fortemente mixing, então, pelo Teorema 5.2.6, a transformação é ergódica.  $\square$

**Corolário 5.2.13.** *A transformação baker map 1-por-1  $\bar{T}$  é fortemente mixing e ergódica.*

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos abertos quaisquer de  $X$ . Os conjuntos  $A \cap X^*$ ,  $B \cap X^*$  são abertos arbitrários de  $X^*$ . Temos

$$\begin{aligned}\bar{T}^{-n}(A \cap X^*) \cap (B \cap X^*) &= \{x \in X^*; \bar{T}^n(x) \in A \text{ e } \bar{T}^n(x) \in X^*\} \cap (B \cap X^*) \\ &= (T^{-n}(A) \cap X^*) \cap (T^{-n}(X^*) \cap X^*) \cap (B \cap X^*) \\ &= T^{-n}(A) \cap B \cap X^*.\end{aligned}$$

Note que

$$T^{-n}(A) \cap B = [(T^{-n}(A) \cap B) \cap X^*] \cup [(T^{-n}(A) \cap B) \cap (X \setminus X^*)].$$

Como  $m(X \setminus X^*) = 0$ , segue que  $m((T^{-n}(A) \cap B) \cap (X \setminus X^*)) = 0$ . Logo,

$$m(T^{-n}(A) \cap B) = m(\bar{T}^{-n}(A \cap X^*) \cap (B \cap X^*)).$$

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} m(\bar{T}^{-n}(A \cap X^*) \cap (B \cap X^*)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}(A) \cap B) \\ &= m(A)m(B), \text{ pois } T \text{ é mixing.}\end{aligned}$$

Portanto a transformação  $\bar{T}$  é fortemente mixing, e daí, pelo Lema 5.2.6, é ergódica.  $\square$

**Corolário 5.2.14.** *A transformação baker map 1-por-1  $\bar{T}$  é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Consideremos o espaço de Lebesgue  $(X^*, \bar{\mathcal{B}} \cap X^*, m|_{X^*})$ , sendo  $T : X^* \rightarrow X^*$  o baker map 1-por-1  $\bar{T}$ . Pela Observação 4.1.3,  $\bar{T}$  é contínua. Pelo Corolário anterior  $\bar{T}$  é fortemente mixing. Portanto, segundo a Proposição 5.2.5, o baker map 1-por-1  $\bar{T}$  é topologicamente mixing.  $\square$

## 5.2.2 A Ergodicidade e Mixing do Baker Map 2-por-1

De modo similar ao estudo da última subseção, veremos o mapa de Zip-Shift é uma transformação fortemente mixing e mostraremos que toda transformação LM-Bernoulli é fortemente mixing. Concluiremos que o baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é fortemente mixing, ergódico e topologicamente mixing.

**Proposição 5.2.15.** *Seja  $(\Sigma_{Z,S}, \mathcal{C}, \mu)$  um espaço de probabilidade. A aplicação Zip-Shift  $\sigma_\kappa : \Sigma_{Z,S} \rightarrow \Sigma_{Z,S}$  é fortemente mixing.*

*Demonstração.* Sejam  $C_i^j, C_n^r$  dois cilindros básicos de  $\Sigma_{Z,S}$ . Vamos calcular  $\sigma_\kappa^{-n}(C_i^j)$ , considerando os seguintes possíveis casos:

- Se  $i \geq 0$  ou  $i < -n$ , obtemos  $\sigma_\kappa^{-n}(C_i^j) = C_{i+n}^j$ . Então,

$$\begin{aligned}\mu(\sigma_\kappa^{-n}(C_i^j) \cap C_n^r) &= \mu(C_{i+n}^j \cap C_n^r) \\ &= p_j p_r = \mu(C_i^j) P(C_n^r).\end{aligned}$$

- Se  $-n \leq i < 0$ , supondo  $\kappa^{-1}(j) = \{s_1, \dots, s_k\}$ , obtemos

$$\sigma_\kappa^{-n}(C_i^j) = C_{i+n}^{s_1} \cup \dots \cup C_{i+n}^{s_k}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_\kappa^{-n}(C_i^j) \cap C_n^r) &= \mu((C_{i+n}^{s_1} \cup \dots \cup C_{i+n}^{s_k}) \cap C_n^r) \\ &= \mu(C_{i+n}^{s_1} \cup \dots \cup C_{i+n}^{s_k}) \mu(C_n^r) \\ &= (p_{s_1} + \dots + p_{s_k}) p_r \\ &= p_j p_r = \mu(C_i^j) \mu(C_n^r). \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{C}$  é gerado pela coleção de todos cilindros básicos, segue que a aplicação Zip-Shift é fortemente mixing.  $\square$

**Observação 5.2.16.** Consideremos agora os cilindros da forma  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}, C_{r_1 \dots r_k}^{t_{r_1} \dots t_{r_k}}$ .

Vejamus que  $\mu(\sigma_\kappa^{-n}(C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}})) = p_{j_{i_1}} \dots p_{j_{i_k}}$ . Consideremos os seguintes casos:

- Se  $i_1 \geq 0$  ou  $i_k < -n$ , obtemos  $\sigma_\kappa^{-n}(C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}) = C_{i_1+n \dots i_k+n}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}$ . Então,

$$\mu(\sigma_\kappa^{-n}(C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}})) = p_{j_{i_1}} \dots p_{j_{i_k}}.$$

- Se existe  $i_j$  com  $-n \leq i_j < 0$  e  $j \in \{1, \dots, k\}$ , supondo  $\kappa^{-1}(i_j) = \{s_1 \dots s_l\}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_\kappa^{-n}(C_{i_1 \dots i_j \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_j} \dots j_{i_k}}) &= C_{i_1+n \dots (i_{j-1}+n) (i_{j+1}+n) \dots i_k+n}^{j_{i_1} \dots j_{i_{j-1}} j_{i_{j+1}} \dots j_{i_k}} \cap (C_{i_j+n}^{s_1} \cup \dots \cup C_{i_j+n}^{s_l}) \\ &= (p_{j_1} \dots p_{j_{i_{j-1}}} p_{j_{i_{j+1}}} \dots p_{j_{i_k}}) (p_{s_1} + \dots + p_{s_l}) \\ &= (p_{j_1} \dots p_{j_{i_{j-1}}} p_{j_{i_{j+1}}} \dots p_{j_{i_k}}) p_{j_j} \\ &= p_{j_{i_1}} \dots p_{j_{i_k}}. \end{aligned}$$

Como  $\mu(C_i^{\kappa^{-1}(j)}) = p_j$ , então  $\mu(\sigma_\kappa^{-n}(C_{i_0 \dots i_l}^{j_0 \dots j_l})) = p_{j_0} \dots p_{j_l}$ .

Portanto, a propriedade fortemente mixing é de fato válida ao considerarmos os cilindros, pois

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_\kappa^{-n}(C_{i_1 \dots i_j \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}) \cap C_{r_1 \dots r_k}^{t_{r_1} \dots t_{r_k}}) &= \mu(\sigma_\kappa^{-n}(C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}})) \mu(C_{r_1 \dots r_k}^{t_{r_1} \dots t_{r_k}}) \\ &= (p_{j_{i_1}} \dots p_{j_{i_k}}) (p_{t_{r_1}} \dots p_{t_{r_k}}) \\ &= \mu(C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}) \mu(C_{r_1 \dots r_k}^{t_{r_1} \dots t_{r_k}}). \end{aligned}$$

**Observação 5.2.17.** Se  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação LM-Bernoulli, ou seja, se existe um isomorfismo  $\varphi : \Sigma_{Z,S} \rightarrow X$  entre  $T$  e um mapa Zip-Shift  $\sigma_\kappa : \Sigma_{Z,S} \rightarrow \Sigma_{Z,S}$ , então para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

- $T^n \circ \varphi = \varphi \circ \sigma_\kappa^n$ ;
- $T^{-n}(\varphi(A)) = \varphi(\sigma_\kappa^{-n}(A))$  para todo  $A \in \mathcal{C}$ .

A prova dos itens acima é análoga ao caso em que  $T$  é uma transformação Bernoulli - visto na Observação [5.2.10](#).

**Teorema 5.2.18.** *Toda transformação LM-Bernoulli é fortemente mixing.*

*Demonstração.* Consideremos os espaços de medida  $(X, \bar{\mathcal{B}}, m)$ ,  $(\Sigma_{Z,S}, \bar{\mathcal{C}}, \mu)$ ,  $T : X \rightarrow X$  uma transformação LM-Bernoulli,  $\varphi : \Sigma_{Z,S} \rightarrow X$  o isomorfismo de  $T$  à aplicação Zip-Shift  $\sigma_\kappa$  e  $\mu = \varphi_*^{-1} m$  o pushforward de  $m$  por  $\varphi^{-1}$ .

Sejam  $A, B \in \bar{\mathcal{B}}$ . Como  $\varphi$  é mensurável, então  $\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(B) \in \bar{\mathcal{C}}$ , ou seja, existem  $A', B' \in \bar{\mathcal{C}}$  tais que  $A = \varphi^{-1}(A')$  e  $B = \varphi^{-1}(B')$ . Como  $\varphi$  é bijetiva, então  $A' = \varphi(A)$  e  $B' = \varphi(B)$ .

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}(A) \cap B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}(\varphi(A')) \cap \varphi(B')) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(\varphi(\sigma_\kappa^{-n}(A')) \cap \varphi(B')), \text{ pela Observação } \a href="#">5.2.17 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(\varphi(\sigma_\kappa^{-n}(A') \cap B')), \text{ pois } \varphi \text{ é bijetiva} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\sigma_\kappa^{-n}(A') \cap B') \\ &= \mu(A')\mu(B'), \text{ pela Proposição } \a href="#">5.2.15 \\ &= m(\varphi(A'))m(\varphi(B')) \\ &= m(A)m(B). \end{aligned}$$

Portanto,  $T$  é fortemente mixing. □

**Corolário 5.2.19.** *A transformação baker map 2-por-1 é fortemente mixing e ergódica.*

*Demonstração.* Pelo Teorema [4.2.5](#), o baker map 2-por-1 é do tipo LM-Bernoulli. Então, usando o teorema anterior, o baker map 2-por-1 é fortemente mixing. Como o baker map 2-por-1 é fortemente mixing, a ergodicidade segue pelo Teorema [5.2.6](#). □

**Corolário 5.2.20.** *A transformação baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é fortemente mixing e ergódica.*

*Demonstração.* A prova é análoga à demonstração do Corolário [5.2.13](#). □

**Corolário 5.2.21.** *A transformação baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Consideremos o espaço de Lebesgue  $(X^*, \bar{\mathcal{B}} \cap X^*, m|_{X^*})$  e  $T : X^* \rightarrow X^*$  o baker map 2-por-1  $\bar{T}$ . Pela Observação [4.2.3](#),  $\bar{T}$  é contínua. Pelo Corolário anterior  $\bar{T}$  é fortemente mixing. Portanto, segundo a Proposição [5.2.5](#), o baker map 2-por-1 é topologicamente mixing. □

### 5.3 Caos Devaney

A principal referência desta seção é [\[3\]](#).

**Definição 5.3.1.** [\[3\]](#) Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma transformação contínua  $T : X \rightarrow X$  é **caótica** se satisfaz às três seguintes condições:

- (i)  $T$  é topologicamente transitiva.
- (ii) O conjunto dos pontos periódicos de  $T$ , denotado por  $Per(T)$ , é denso em  $X$ .
- (iii)  $T$  é **sensivelmente dependente das condições iniciais**, isto é, existe  $\delta > 0$  tal que para cada ponto  $x \in X$  e para cada aberto  $U$  contendo  $x$ , existem  $y \in U$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$ . O número positivo  $\delta$  é chamado de **constante de sensibilidade**.

Em [2], BANKS et al, mostraram que em um espaço métrico infinito, se uma transformação é topologicamente transitiva e possui densidade de pontos periódicos, então ela é sensivelmente dependente das condições iniciais. Alternativamente, no teorema a seguir, mostramos que ao supormos  $T$  uma transformação topologicamente mixing com densidade de pontos periódicos, obtemos a dependência às condições iniciais.

**Teorema 5.3.2.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $X$  um conjunto infinito e  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Se  $T$  é topologicamente mixing e  $Per(T)$  é denso em  $X$ , então  $T$  tem dependência sensível às condições iniciais.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $T$  não seja sensivelmente dependente de condições iniciais. Isto é, para todo  $\delta > 0$ , existe  $x \in X$  e um aberto  $U$  contendo  $x$ , tal que para todo  $y \in U$  e todo  $n \in \mathbb{Z}$ , tem-se  $d(T^n(x), T^n(y)) \leq \delta$ . Então, para qualquer  $z \in U$ , usando a desigualdade triangular,

$$d(T^n(y), T^n(z)) \leq d(T^n(y), T^n(x)) + d(T^n(x), T^n(z)) \leq 2\delta. \quad (5.1)$$

Por hipótese  $\overline{Per(T)} = X$ , então existe um ponto periódico  $p \in U$ . Seja  $k \in \mathbb{N}$  o período de  $p$ .

Seja  $z \in X \setminus U$  tal que  $d(p, z) > 10\delta$ . Tome  $V = B(z, \delta)$ . Como  $T$  é topologicamente mixing, então existe um inteiro positivo  $N$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Como  $k$  e  $N$  são inteiros positivos,  $Nk > 0$ . Logo,  $T^{Nk}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Daí, existe  $w \in U$ , tal que  $T^{Nk}(w) \in V$  e então

$$d(T^{Nk}(w), z) < \delta.$$

Como  $p, w \in U$ , pela equação (5.1) temos

$$d(T^{Nk}(p), T^{Nk}(w)) \leq 2\delta.$$

Observe que

$$T^{Nk}(p) = T^k \circ \dots \circ T^k(p) = p.$$

Usando as observações acima e a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} 10\delta < d(p, z) &\leq d(p, T^{Nk}(w)) + d(T^{Nk}(w), z) \\ &\leq d(T^{Nk}(p), T^{Nk}(w)) + d(T^{Nk}(w), z) \\ &< 2\delta + \delta = 3\delta \\ &\Rightarrow 10\delta < 3\delta. \end{aligned}$$

O que é um absurdo. Portanto,  $T$  é sensível às condições iniciais. □

### 5.3.1 O Baker Map 1-por-1 $\bar{T}$ é caótico

A partir da proposição a seguir e do isomorfismo entre o baker map  $\bar{T}$  e o mapa de deslocamento, mostraremos que o conjunto dos pontos periódicos do baker map 1-por-1  $\bar{T}$  é denso em  $X^*$ .

**Proposição 5.3.3.** *O conjunto dos pontos periódicos do mapa de deslocamento é denso em  $\Sigma_S^*$ .*

*Demonstração.* Consideremos

$$C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}} = \{x \in \Sigma_S^*; x_{i_1} = j_{i_1}, \dots, x_{i_k} = j_{i_k}\}$$

um cilindro qualquer de  $\Sigma_S^*$ . Seja  $x = (\dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots) \in \Sigma_S^*$ . Definamos  $\bar{x} \in \Sigma_S^*$  dado por

$$\bar{x} = (\overline{\cdot x_0 x_1 \dots j_{i_1} x_{i_1+1} \dots j_{i_k}}) \in C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}.$$

O ponto  $\bar{x}$  é periódico de período  $i_k$  e pertence a  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_{i_1} \dots j_{i_k}}$ . Então cada cilindro em  $\Sigma_S^*$  possui um ponto periódico. Portanto o conjunto dos pontos periódicos de  $\sigma$  é denso em  $\Sigma_S^*$ . □

**Proposição 5.3.4.** *O conjunto dos pontos periódicos do baker map 1-por-1  $\bar{T}$  é denso em  $X^*$*

*Demonstração.* Consideremos os espaços mensuráveis  $(X^*, \bar{\mathcal{B}} \cap X^*)$  e  $(\Sigma_S^*, \mathcal{C})$  e  $\varphi : \Sigma_S^* \rightarrow X^*$  o isomorfismo definido no Teorema 4.1.5.

Seja  $B \in \bar{\mathcal{B}} \cap X^*$ . Como  $\varphi$  é mensurável, então  $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{C} \cap \Sigma_S^*$ . Pela Proposição 5.3.3,  $Per(\sigma)$  é denso em  $\Sigma_S^*$ . Logo, existe  $x \in Per(\sigma) \cap \varphi^{-1}(B)$ , então  $x \in \varphi^{-1}(p)$  para algum  $p \in B$ , isto é,  $\varphi(x) = p$ .

Como  $x \in Per(\sigma)$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $\sigma^k(x) = x$ . Como  $\bar{T}$  é Bernoulli, temos  $\varphi \circ \sigma^k = \bar{T}^k \circ \varphi$ , logo

$$p = \varphi(x) = \varphi(\sigma^k(x)) = \bar{T}^k(\varphi(x)) = \bar{T}^k(p).$$

Então,  $p \in Per(\bar{T})$ , e, portanto,  $Per(\bar{T})$  é denso em  $X^*$ . □

**Proposição 5.3.5.** *O baker map 1-por-1  $\bar{T}$  é topologicamente transitivo.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 5.2.14, o baker map  $\bar{T}$  é topologicamente mixing. Então, usando o Lema 5.2.4, segue-se que tal aplicação é topologicamente transitiva. □

**Teorema 5.3.6.** *A transformação baker map  $\bar{T}$  é caótica.*

*Demonstração.* Pela Proposição 5.3.4, o conjunto dos pontos periódicos de  $\bar{T}$  é denso em  $X^*$ . Pela Proposição 5.3.5,  $\bar{T}$  é topologicamente transitivo. Então, pelo Teorema 5.3.2, a aplicação  $\bar{T}$  é sensível às condições iniciais. Portanto o baker map  $\bar{T}$  é uma transformação caótica. □



### 5.3.2 O Baker Map 2-por-1 $\bar{T}$ é caótico

Mostraremos a seguir que o conjunto dos pontos periódicos do mapa Zip-Shift é denso em  $\Sigma_{Z,S}^*$ . Usaremos este resultado e o fato de que o baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é LM-Bernoulli para concluirmos que o baker map 2-por-1  $\bar{T}$  também possui densidade de pontos periódicos.

Recordemos que os elementos periódicos de  $\Sigma_{Z,S}$  são pontos do tipo  $\overline{(\kappa(j_1) \cdots \kappa(j_n) \cdot j_1 \cdots j_n)}$ , os quais denotamos de modo sucinto por  $\overline{(\cdot j_1 \cdots j_n)}$ .

**Proposição 5.3.7.** *O conjunto dos pontos periódicos do mapa Zip-Shift é denso em  $\Sigma_{Z,S}^*$ .*

*Demonstração.* A fim de obter a densidade de pontos periódicos, mostraremos que cada cilindro de  $\Sigma_{Z,S}^*$  contém um ponto periódico de  $\sigma_\kappa$ .

Seja  $C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = C_{i_1}^{j_1} \cap \cdots \cap C_{i_k}^{j_k} \in \Sigma_{Z,S}^*$  um cilindro qualquer. Por definição, temos  $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ . Devemos analisar 3 casos possíveis.

**Caso i)** Suponhamos  $j_1, \dots, j_k \in S; i_1, \dots, i_k \geq 0$ .

Seja  $x = (x_i)_i \in \Sigma_{Z,S}^*$  qualquer e definamos o seguinte ponto de  $\Sigma_{Z,S}^*$ .

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \overline{(x_0 \cdots x_{i_1-1} j_{i_1} x_{i_1+1} \cdots x_{i_k-1} j_{i_k})} \in C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \\ &= \underbrace{(\kappa(x_0) \cdots \kappa(x_{i_1-1}) \kappa(j_{i_1}) \kappa(x_{i_1+1}) \cdots \kappa(x_{i_k-1}) \kappa(j_{i_k}))}_{\kappa(\text{Bloco 1})} \cdot \underbrace{x_0 \cdots x_{i_1-1} j_{i_1} x_{i_1+1} \cdots x_{i_k-1} j_{i_k}}_{\text{Bloco 1}}. \end{aligned}$$

(Chamamos de Bloco 1 a sequência de símbolos compreendida entre  $x_0$  e  $j_{i_k}$  e denotamos por  $\kappa(\text{Bloco 1})$  a sequência de símbolos compreendida entre  $\kappa(x_0)$  e  $\kappa(j_{i_k})$ .)

Observe que  $\bar{x} \in C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$  é um ponto periódico de período  $i_k$ , isto é,  $\sigma_\kappa^{i_k}(\bar{x}) = \bar{x}$ .

**Caso ii)** Suponhamos  $j_1 \dots j_k \in Z; i_1, \dots, i_k < 0$ .

Seja  $x = (x_i)_i \in \Sigma_{Z,S}^*$ . Para cada símbolo  $x_{i_n}$  com  $i_1 \leq i_n < 0$ , fixemos um elemento  $s_{i_n} \in \kappa^{-1}(x_{j_n})$ . Definamos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \overline{(j_{i_1} x_{i_1+1} \cdots j_{i_k} x_{i_k+1} \cdots x_{-1} \cdot s_{i_1} s_{i_1+1} \cdots s_{i_k} s_{i_k+1} \cdots s_{-1})} \\ &= \underbrace{(j_{i_1} x_{i_1+1} \cdots j_{i_k} x_{i_k+1} \cdots x_{-1})}_{\text{Bloco 1}} \cdot \underbrace{(s_{i_1} s_{i_1+1} \cdots s_{i_k} s_{i_k+1} \cdots s_{-1})}_{\in \kappa^{-1}(\text{Bloco 1})} \\ &= \overline{(s_{i_1} s_{i_1+1} \cdots s_{i_k} s_{i_k+1} \cdots s_{-1})} \in C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

Assim como no caso anterior,  $\bar{x} \in C_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$  é um ponto periódico de período  $-i_1$ , isto é,  $\sigma_\kappa^{-i_1}(\bar{x}) = \bar{x}$ .

**Caso iii)** Suponhamos  $j_1, \dots, j_l \in Z; i_1, \dots, i_l < 0$ , e  $j_{l+1}, \dots, j_k \in S; i_{l+1}, \dots, i_k \geq 0$ .

Seja  $x = (x_i)_i \in \Sigma_{Z,S}^*$ . Para cada símbolo  $x_{i_n}$  com  $i_1 \leq i_n < 0$ , fixemos um elemento  $s_{i_n} \in \kappa^{-1}(x_{j_n})$ . Definamos

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \left( \underbrace{\kappa(x_0) \cdots \kappa(j_{i_{l+1}}) \cdots \kappa(j_{i_k})}_{\kappa(\text{Bloco 1})} \underbrace{j_{i_1} x_{i_1+1} \cdots j_{i_l} \cdots x_{-1}}_{\text{Bloco 2}} \cdot \underbrace{x_0 \cdots j_{i_{l+1}} x_{i_{l+1}+1} \cdots j_{i_k}}_{\text{Bloco 1}} \underbrace{s_{i_1} \cdots s_{-1}}_{\in \kappa^{-1}(\text{Bloco 2})} \right) \\ &= (\cdot x_0 \cdots j_{i_{l+1}} x_{i_{l+1}+1} \cdots j_{i_k} s_{i_1} \cdots s_{-1}) \in C_{i_1 \cdots i_k}^{j_{i_1} \cdots j_{i_k}}.\end{aligned}$$

Observe que  $\sigma_\kappa^{i_k - i_1}(\bar{x}) = \bar{x}$ . Ou seja,  $\bar{x} \in C_{i_1 \cdots i_k}^{j_{i_1} \cdots j_{i_k}}$  é um ponto periódico de período  $i_k - i_1$ . Portanto, cada cilindro de  $\Sigma_{Z,S}^*$  contém um ponto periódico de  $\sigma_\kappa$ , isto é, o conjunto  $Per(\sigma_\kappa)$  é denso em  $\Sigma_{Z,S}^*$ . □

**Proposição 5.3.8.** *O conjunto dos pontos periódicos do baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é denso em  $X^*$ .*

*Demonstração.* Consideremos os espaços mensuráveis  $(X^*, \bar{\mathcal{B}} \cap X^*)$ ,  $(\Sigma_{Z,S}^*, \mathcal{C} \cap \Sigma_{Z,S}^*)$  e  $\varphi: \Sigma_{Z,S}^* \rightarrow X^*$  o isomorfismo definido no Teorema 4.2.5.

Seja  $B \in \bar{\mathcal{B}} \cap X^*$ . Como  $\varphi$  é mensurável, então  $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{C} \cap \Sigma_{Z,S}^*$ . Pela Proposição 5.3.7,  $Per(\sigma_\kappa)$  é denso em  $\Sigma_{Z,S}^*$ . Logo, existe  $x \in Per(\sigma_\kappa) \cap \varphi^{-1}(B)$ , então  $x \in \varphi^{-1}(p)$  para algum  $p \in B \cap X^*$ , isto é,  $\varphi(x) = p$ .

Como  $x \in Per(\sigma_\kappa)$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $\sigma_\kappa^k(x) = x$ . Como  $\bar{T}$  é LM-Bernoulli, temos  $\varphi \circ \sigma_\kappa^k = \bar{T}^k \circ \varphi$ , logo

$$p = \varphi(x) = \varphi(\sigma_\kappa^k(x)) = \bar{T}^k(\varphi(x)) = \bar{T}^k(p).$$

Então,  $p \in Per(\bar{T})$ , e, portanto,  $Per(\bar{T})$  é denso em  $X^*$ . □

**Proposição 5.3.9.** *A transformação baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é topologicamente transitiva.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 5.2.21, o baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é topologicamente mixing. Então, pelo Lema 5.2.4, tal transformação é topologicamente transitiva. □

**Teorema 5.3.10.** *A transformação baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é caótica.*

*Demonstração.* Pela Proposição 5.3.9, o baker map 2-por-1  $\bar{T}$  é topologicamente transitivo. Pela Proposição 5.3.8, o conjunto dos pontos periódicos de  $\bar{T}$  é denso em  $X^*$ . Como o baker map 2-por-1 é topologicamente mixing (Corolário 5.2.21) e possui densidade de pontos periódicos, então pelo Teorema 5.3.2, a aplicação  $\bar{T}$  é sensível às condições iniciais. Portanto o baker map 2-por-1 satisfaz às três condições da definição de caos Devaney, ou seja,  $\bar{T}$  é uma transformação caótica. □

# Apêndice A

## Métricas em $\Sigma_S$

A aplicação  $\bar{d}_2 : \Sigma_S \times \Sigma_S \rightarrow \mathbb{R}$  dada a seguir é uma métrica em  $\Sigma_S$  :

$$\bar{d}_2(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}};$$

*Demonstração.* Sejam  $x, y, z \in \Sigma_S$  quaisquer.

(i) Positividade:  $\bar{d}_2(x, y) \geq 0$  pois  $d(x_i, y_i) \geq 0$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Ainda,

$$\bar{d}_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x_i, y_i) = 0 \forall i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = y.$$

(ii) Simetria:

$$\bar{d}_2(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(y_i, x_i)}{2^{|i|}} = \bar{d}_2(y, x).$$

(iii) Desigualdade triangular: Como  $d$  é uma métrica, em particular a desigualdade triangular é válida para  $d$ . Então,

$$\begin{aligned} d(x_i, y_i) &\leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i) \forall i \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}} &\leq \frac{d(x_i, z_i)}{2^{|i|}} + \frac{d(z_i, y_i)}{2^{|i|}} \\ \Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}} &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, z_i)}{2^{|i|}} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(z_i, y_i)}{2^{|i|}} \\ \Rightarrow \bar{d}_2(x, y) &\leq \bar{d}_2(x, z) + \bar{d}_2(z, y). \end{aligned}$$

□

A aplicação  $\bar{d}_3 : \Sigma_S \times \Sigma_S \rightarrow \mathbb{R}$  dada a seguir é uma métrica em  $\Sigma_S$  :

$$\bar{d}_3(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{M(x, y)}}, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y, \end{cases}$$

sendo  $M(x, y) = \min\{|i|; x_i \neq y_i\}$  quando  $x \neq y$ .

*Demonstração.* Sejam  $x, y, z \in \Sigma_S$  quaisquer.

(i) Positividade: Observe que por definição,

$$\bar{d}_3(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Se  $x \neq y$ , então  $\bar{d}_3(x, y) = \frac{1}{2^{M(x, y)}} > 0$ .

(ii) Simetria: Note que

$$M(x, y) = \min\{|i|; x_i \neq y_i\} = M(y, x).$$

Logo

$$\bar{d}_3(x, y) = \frac{1}{2^{M(x, y)}} = \frac{1}{2^{M(y, x)}} = \bar{d}_3(y, x).$$

(iii) Desigualdade triangular: Seja  $a = \min\{M(x, y), M(x, z), M(z, y)\}$ .

- Se  $a = M(x, z)$ , então  $M(x, y) \geq M(x, z)$ , logo

$$\bar{d}_3(x, y) = \frac{1}{2^{M(x, y)}} \leq \frac{1}{2^{M(x, z)}} < \frac{1}{2^{M(x, z)}} + \frac{1}{2^{M(z, y)}} = \bar{d}_3(x, z) + \bar{d}_3(z, y).$$

- Se  $a = M(z, y)$ , então  $M(x, y) \geq M(x, z)$ , logo

$$\bar{d}_3(x, y) = \frac{1}{2^{M(x, y)}} \leq \frac{1}{2^{M(x, z)}} < \frac{1}{2^{M(x, z)}} + \frac{1}{2^{M(z, y)}} = \bar{d}_3(x, z) + \bar{d}_3(z, y).$$

- Suponhamos  $a = M(x, y)$ . Como  $M(x, y) = \min\{|i|; x_i \neq y_i\}$ , então

$$\bar{d}_3(x, y) = \frac{1}{2^{M(x, y)}} \text{ implica } x_i = y_i \text{ para todo } i < M(x, y);$$

$$\bar{d}_3(x, z) = \frac{1}{2^{M(x, z)}} \text{ implica } x_i = z_i \text{ para todo } i < M(x, z);$$

$$\bar{d}_3(z, y) = \frac{1}{2^{M(z, y)}} \text{ implica } z_i = y_i \text{ para todo } i < M(z, y).$$

Então, como  $x_i = y_i$  para todo  $i < M(x, y)$ , então

$$x = (\cdots x_0 x_1 \cdots x_{M(x, y)} \cdots)$$

$$y = (\cdots x_0 x_1 \cdots x_{M(x, y)-1} y_{M(x, y)} \cdots).$$

Como  $x_i = z_i$  para todo  $i < M(x, z)$ , então

$$z = (\cdots x_0 x_1 \cdots x_{M(x, z)-1} z_{M(x, z)} \cdots).$$

Como  $z_i = y_i$  para todo  $i < M(z, y)$ , então

$$z = (\cdots x_0 x_1 \cdots y_{M(x, y)-1} y_{M(x, y)} \cdots).$$

O que implica  $M(x, y) = M(z, y)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{M(x, y)}} &= \frac{1}{2^{M(z, y)}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2^{M(x, y)}} &\leq \frac{1}{2^{M(x, z)}} + \frac{1}{2^{M(z, y)}} \\ \bar{d}_3(x, y) &\leq \bar{d}_3(x, z) + \bar{d}_3(z, y). \end{aligned}$$

Portanto  $\bar{d}_3$  é uma métrica em  $\Sigma_S$ .

As métricas  $\bar{d}_1, \bar{d}_2$  e  $\bar{d}_3$  são equivalentes.

*Demonstração.* Mostraremos que a inclusão

$$j : (\Sigma_S, \bar{d}_1) \rightarrow (\Sigma_S, \bar{d}_2)$$

é um homeomorfismo. A aplicação é naturalmente bijetiva.

Observe que para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $2^{|i|} \leq 2^{|i|}(1 + d(x_i, y_i)) \leq 2^{|i|+1}$ . Então,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|+1}} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}(1 + d(x_i, y_i))} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}}. \quad (5.2)$$

Seja  $x \in \Sigma_S$  qualquer. Dado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , se  $y \in \Sigma_S$  e  $\bar{d}_1(x, y) < \delta$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|+1}} &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}(1 + d(x_i, y_i))} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|+1}} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \bar{d}_2(j(x), j(y)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, a inclusão é contínua em todo  $x \in \Sigma_S$ .

Por outro lado, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\delta = \varepsilon$ , se  $y \in \Sigma_S$  e  $\bar{d}_2(x, y) < \delta$ , então

$$\bar{d}_1(j^{-1}(x), j^{-1}(y)) = \bar{d}_1(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)} < \delta = \varepsilon.$$

Ou seja, a inversa também é contínua. Obtemos então que a inclusão é um homeomorfismo. Portanto, as métricas  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_2$  são equivalentes.

Consideremos agora a inclusão  $h : (\Sigma_S, \bar{d}_2) \rightarrow (\Sigma_S, \bar{d}_3)$ . Se  $x \in \Sigma_S$ , e  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, tomando  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , para  $y \in \Sigma_S$  com  $\bar{d}_2(x, y) < \delta$ , isto é,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

então para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{1}{2^{|i|}} < \varepsilon$ . Em particular,

$$\bar{d}_3(h(x), h(y)) = \frac{1}{2^{M(x,y)}} < \varepsilon.$$

Logo a inclusão é contínua.

Vejam agora que a inversa  $h^{-1} : (\Sigma_S, \bar{d}_3) \rightarrow (\Sigma_S, \bar{d}_1)$  é contínua. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . Suponhamos  $\bar{d}_3(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) = \bar{d}_3(x, y) = \frac{1}{2^{M(x,y)}} < \delta$ , então,  $x_i = y_i$  para todo  $i < M(x, y)$ . Pelo Lema [3.1.4](#), segue que

$$\bar{d}_1(x, y) < \frac{1}{2^{M(x,y)}}.$$

Pela equação (5.2),

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|+1}} &\leq \bar{d}_1(x, y) < \frac{1}{2^{M(x,y)}} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}} &< \varepsilon \\ \Rightarrow \bar{d}_2(x, y) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo a inversa é contínua e, então, a inclusão é um homeomorfismo. Portanto as métricas  $d_2$  e  $d_3$  são equivalentes. Note que  $j \circ h : (\Sigma_S, \bar{d}_1) \rightarrow (\Sigma_S, \bar{d}_3)$  é um homeomorfismo, então as métricas  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_3$  são equivalentes.

□

## Referências Bibliográficas

- [1] BASS, R.F. **Real analysis for graduate students**. 2nd ed. 2013.
- [2] BANKS, T; BROOKS, J; CAIRNS, G; DAVIS G e STACEY, P; **On Devaney's Definition of Chaos**. The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4. 1992. pp. 332-334.
- [3] DEVANEY, R.L. **An introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Addison-Wesley, 2.ed. 1989.
- [4] DIMARTINO, R; Urbina, W. **Excursions on Cantor-Like Sets**. arXiv:1411.7110 [math.CA].
- [5] HOCKING, J; YOUNG, G. **Topology**. Addison-Wesley, 1961.
- [6] LAMEI, S; MEHDIPOUR, P; **An n-to-1 Smale Horseshoe**. 2020 (preprint).
- [7] LAMEI, S; MEHDIPOUR, P; **Zip-shift space**. 2019 (preprint).
- [8] LAMEI, S; MEHDIPOUR, P; **(m,l)-Bernoulli Transformations**. 2020 (preprint).
- [9] LASOTA, A e MACKEY, MICHAEL C. **Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics**. Springer-Verlag New York Inc; v.97, 1994.
- [10] LIMA, E.L. **Elementos de Topologia Geral**. SBM, 2009.
- [11] MEHDIPOUR, P; MARTINS, N.S. **Encoding a 2-to-1 Baker map**. 2020 (preprint).
- [12] MUNKRES, J.R. **Topology**. Pearson, 2ed, 2000.
- [13] NELSON, G. **A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration**. Student Mathematical Library, vol 78. AMS, 2015.
- [14] PETERSEN, K. **Ergodic Theory**. Cambridge University Press, 1983.
- [15] POLLICOT, M; YURI, M. **Dynamical Systems and Ergodic Theory** . Cambridge University Press, 1998.
- [16] SMALE, S. **Differentiable dynamical systems**. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 73, Number 6, p. 747-817, 1967.
- [17] STURMAN, R; OTTINO, J; WIGGINS, S. **The Mathematical Foundations of Mixing: The Linked Twist Map as a Paradigm in Applications Micro to Macro, Fluids to Solids**. Cambridge University Press, 2006.

- [18] VIANA, M; OLIVEIRA, K. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. SBM, 1.ed, 2015.
- [19] Walters, P. **An introduction to Ergodic Theory**. texts in mathematics, Springer-Verlag, 1982.
- [20] WILLARD, S. **General Topology**. Addison-Wesley, 1970.