

MARCOS TEIXEIRA GODINHO

**IMPLICAÇÕES DA VIOLAÇÃO DA HIPÓTESE
DA ERGODICIDADE NOS MODELOS ECONÔMICOS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada, para obtenção do título de “Magister Scientiae”.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2002

MARCOS TEIXEIRA GODINHO

**IMPLICAÇÕES DA VIOLAÇÃO DA HIPÓTESE
DA ERGODICIDADE NOS MODELOS ECONÔMICOS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada, para obtenção do título de “Magister Scientiae”.

APROVADA: 21 de fevereiro de 2002.

Heleno do Nascimento Santos

Wilson da Cruz Vieira

José Maria Alves da Silva

Marília Fernandes Maciel Gomes
(Conselheira)

João Eustáquio de Lima
(Orientador)

“Here is Edward Bear, coming downstairs now, bump, bump, bump, on the back of his head, behind Christopher Robin. It is, as far as he knows, the only way of coming downstairs, but sometimes he feels that there really is another way, if only he could stop bumping for a moment and think of it”.

(Winnie-the-Pooh)

AGRADECIMENTO

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, que, com sua infinita sabedoria, criou o universo em que vivemos com uma fonte de mistérios, que se renovam a cada dia, pois para Ele tudo é conhecido (ergódico), mas para a ciência tudo é um mistério (não-ergódico). Portanto, um dia, quando os véus da ignorância caírem, nós conheceremos a Deus e seus mistérios, como, hoje, somos conhecidos por Ele. Em parte conhecemos e em partes entendemos, mas pelo amor de Deus seremos capazes de perceber que todos os mistérios, outrora escondidos, se revelam em Cristo Jesus.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, prof. João Eustáquio de Lima, pelo seu apoio e pela confiança em mim, que muitas vezes superava a minha própria confiança. À professora Marília Fernandes Maciel Gomes, pelas sugestões que levaram a uma exposição mais clara das idéias aqui apresentadas. Ao professor Anthony Quas, do *Memphis Dynamics Group*, da Universidade de Memphis, nos Estados Unidos, por sua paciência em responder os meus vários questionamentos sobre não-linearidade e ergodicidade. Ao professor Robert Leeson, da Universidade Murdoch, na Austrália, por suas sugestões de literatura, que gerou a seção sobre os “limites da econometria”. Ao professor Paul Davidson, da Universidade do Tennessee, nos Estados Unidos, por responder os

meus questionamentos sobre os problemas de se testar a hipótese da ergodicidade e pelas indicações, na literatura, de pessoas que tentaram fazer isso.

Gostaria de agradecer, em particular, aos professores dos Departamentos de Matemática e Estatística da Universidade de Brasília, que gentilmente corrigiram as demonstrações matemáticas e sugeriram modificações que estão nesta tese. Gostaria, também, de agradecer a Simone Patrícia Martins, por ter criado as figuras que estão no capítulo dois.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer aos meus pais, por serem os melhores pais que alguém podia ter. Gostaria de agradecer especialmente à minha querida esposa, Virgínia, por seus comentários e sugestões, além de suas correções gramaticais. Parafraçando Samuelson, apesar do suporte e do amor, que a minha esposa vem dedicando a mim, e do seu imenso esforço em me ajudar a chegar ao final, infelizmente este seu trabalho não é contabilizado nas Contas Nacionais; quem sabe esse erro seja corrigido no futuro.

BIOGRAFIA

MARCOS TEIXEIRA GODINHO, filho de Heber de Macedo Godinho e Maria Auxiliadora Teixeira Godinho, nasceu em Belo Horizonte, MG, em 13 de fevereiro de 1963.

ÍNDICE

	Página
LISTA DE FIGURAS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Ergodicidade	4
1.1.1. Uma definição não-matemática	4
1.2. O tempo na teoria econômica	5
1.2.1. O conceito de tempo	7
1.2.2. A abordagem filosófica do tempo	8
1.2.3. A teoria especial da relatividade e o conceito de tempo	9
1.2.4. Tempo e economia	11
1.3. Incertezas na teoria econômica	14
1.3.1. Diferentes noções de incertezas	15

	Página
1.3.1.1. Incertezas subjetivas	15
1.3.1.2. Incerteza keynesiana	16
1.3.1.3. Incertezas e expectativas racionais	16
1.3.1.4. Incertezas para Knight	16
1.4. O problema	17
1.4.1. Os limites da econometria	18
1.5. Hipótese	21
1.6. Objetivos	21
2. METODOLOGIA	22
2.1. Introdução	22
2.2. Marco teórico	24
2.2.1. Espaço de probabilidade e medida invariante	25
2.2.2. Ergodicidade	27
2.2.3. Implicações da ergodicidade	28
2.2.3.1. Implicações estatísticas	29
2.2.3.1.1. O problema da média	29
2.2.3.1.2. Processos estocásticos	29
2.2.3.1.3. Shifts nos processos estocásticos	31
2.2.3.2. Implicações na econometria das séries temporais	34
2.2.3.2.1. Séries temporais estacionárias	30
2.2.3.2.2. Conceito de funções estacionárias ergódicas	35
2.3. Modelo analítico	38

	Página
2.3.1. Modelo de Hicks	39
2.3.2. Modelo de Metzler	43
2.4. Procedimentos	49
2.4.1. Comentário geral	49
2.4.2. Procedimento básico	52
3. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	54
3.1. Comentário geral	54
3.2. Os modelos econômicos	55
3.2.1. O modelo de Metzler não-linear	55
3.2.2. Modelo de Hicks de ciclos de negócios	64
4. RESUMO E CONCLUSÕES	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

LISTA DE FIGURAS

		Página
1	Plano de fase para o modelo original	57
2	Plano de fase para o modelo modificado	58
3	Plano de fase para o modelo modificado 2	59
4	Trajectoria no tempo para a variável Y_0 , para os modelos original, modificado e modificado 2	60
5	Trajectoria no tempo para a variável Y_0 , para os modelos original, modificado e modificado 2. (Continuação)	60
6	Trajectoria no tempo para a variável Y_1 , para os modelos original, modificado e modificado 2	62
7	Trajectoria no tempo para a variável Y_1 , para os modelos original, modificado e modificado 2. (Continuação)	62
8	Trajectoria da renda, Y , utilizando o modelo modificado 1	65
9	Trajectoria da renda, Y , utilizando o modelo modificado 2. (Continuação)	66

RESUMO

GODINHO, Marcos Teixeira, M.S., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2002. **Implicações da violação da hipótese da ergodicidade nos modelos econométricos.** Orientador: João Eustáquio de Lima. Conselheiros: Marcelo José Braga e Marília Fernandes Maciel Gomes.

A teoria econômica, desde a sua origem, sempre aceitou que as economias estão em equilíbrio, e, quando não, existem forças internas aos sistemas que as levarão para o equilíbrio. Outro pressuposto aceito, sem uma investigação rigorosa, é o de linearidade. Dessa forma, todos os fenômenos econômicos são, sob certas condições, previsíveis. Estas certas condições são: o futuro segue uma distribuição de probabilidade que começou no passado e irá seguir seu curso no futuro; e o tempo não exerce qualquer influência nas variáveis econômicas. A teoria econômica aceita como verdadeiro que o mundo real é ergódico, i.e., ele segue o seu curso em conformidade com um processo estocástico; de acordo com o qual é possível inferir os diferentes estados em que o sistema estará. Em outras palavras, se as condições iniciais do sistema forem conhecidas, bem como as suas leis de movimento, todos os estados futuros do sistema serão conhecidos, assim como o passado o é. Este trabalho prova que as evidências teóricas levam a rejeitar a hipótese da ergodicidade. Os impactos

sobre a teoria econômica são muitos, principalmente nas construções dos modelos econométricos.

ABSTRACT

GODINHO, Marcos Teixeira, M.S., Universidade Federal de Viçosa, February 2002. **The implications of the violation of the ergodicity hypothesis on econometric modelling.** Adviser: João Eustáquio de Lima. Committee Members: Marcelo José Braga and Marília Fernandes Maciel Gomes.

The economic theory, since its beginning, take for granted the concept of equilibrium. And when a economy is not in equilibrium there is internal forces that lead it to the equilibrium point. Another assumption accept without a rigorous investigation is of linearity. Hence, all economic events are, under certain conditions, predictable. These certain conditions are twofold. The former is the acceptance that the future always follows a stable probability distribution. Outro pressuposto aceito, sem uma investigação rigorosa, é o de linearidade; and the latter is that the time does not any influence on the economic variables. In another words the economic theory accept without a prove the the real world is ergodic, i.e., all economic events are realizations of a stochastic process, therefore it is possible to predict all future states of the sistem knowing only its initial conditions and its laws of movement. This dissertation proves that the real world is not ergodic and hence the impact on the economic theory are many, especially regarding the econometrics modelling.

1. INTRODUÇÃO

Natura non facit saltum

O Iluminismo¹ influenciou tanto as ciências exatas quanto a teoria econômica. Os seus principais expoentes em economia foram Adam Smith e Jeremy Bentham. Uma das idéias básicas, que permeavam o movimento, era de que o homem poderia entender os fenômenos da natureza sem o auxílio de um ser sobrenatural. De acordo com seus precursores - Bacon, Descartes e Newton -, o universo, e conseqüentemente a natureza, poderia ser comparado com uma máquina perfeita, com leis precisas que poderiam ser desvendadas pelo homem.

A teoria econômica daquela época tinha os seguintes pressupostos: a existência de uma mão invisível que garantiria o equilíbrio automático dos mercados e a maximização da utilidade como chave da elaboração de uma ciência do bem-estar². Dessa forma, a Teoria Econômica se desenvolveu em torno dos conceitos de equilíbrio e ergodicidade³. SAMUELSON (1947) afirmou

¹ O movimento iluminista data do século XVIII e seus precursores, Bacon, Descartes e Newton, são de aproximadamente 350 anos atrás.

² Segundo HUNT (1978), Bentham achava que, reduzindo todos os princípios humanos a um único, a teoria econômica seria capaz de expressar-se matematicamente e que um dia seria elaborada com a mesma exatidão numérica que a Física.

³ A definição formal do termo será dada na próxima seção.

que os equilíbrios instáveis são improváveis de serem observáveis na teoria e que no mundo real esse tipo de equilíbrio é infinitamente improvável. Já um outro “extremamente proeminente economista”⁴ afirmou que o estudo da estabilidade no modelo de equilíbrio geral não é importante, porque a economia é estável e, se não fosse estável, os economistas estariam perdendo seu tempo.

Essa influência iluminista se tornou marcante nos meios acadêmicos e a postura anteriormente especificada em relação à hipótese de equilíbrio estável pode ser de extrema dificuldade para o desenvolvimento da teoria econômica. Salvo algumas exceções, entre elas a principal é SARGENT (1984), que reconheceu a necessidade de postular ergodicidade nos processos estocásticos comparativos, poucos foram os trabalhos até o final da década de 80 que se preocuparam em ventilar a possibilidade de desequilíbrio permanente. Segundo VERCELLI (1991), ergodicidade não pode apenas ser postulada em aplicações empíricas, mas uma prova explícita deve ser providenciada, e, de acordo com ele, isso nunca foi feito.

Com o desenvolvimento da Teoria do Caos⁵, o interesse pelos modelos com choques externos mudou para os de modelos não-lineares com equilíbrios orbitais caóticos. Esses modelos, atualmente na Teoria Econômica, ilustram o paradoxo matemático de que os modelos determinísticos podem ser imprevisíveis. Assim, a Teoria Econômica conseguiu, em parte, romper com os grilhões impostos pelas idéias iluministas e de seus precursores, que eram os conceitos de linearidade e de harmonia social.

Dessa forma, a Teoria do Caos trouxe o conceito de imprevisibilidade para o cerne do problema dos sistemas dinâmicos instáveis. De acordo com GOODWIN (1992:4), *“Like meteorology, economics can often yield good short-term prediction (not, however, for the recent crashes), not so good for medium-term and more or less worthless for long-term”*. As evidências empíricas coletadas por DAVIDSON (1994) corroboram a tese de Goodwin. HICKS (1979)

⁴ “Extremely prominent economist” citado por FISHER (1983).

⁵ Ramo da matemática que estuda o comportamento das funções não-lineares ao longo do tempo. Segundo essa teoria, os sistemas determinísticos podem apresentar trajetórias imprevisíveis, como se fossem um modelo probabilístico.

afirmou: *"I am bold enough to conclude from these considerations that the usefulness of statistical or stochastic methods in economics is a good deal less than is now conventionally supposed"*. Então, a Teoria Econômica necessita desenvolver uma análise profunda dos seus pressupostos básicos, principalmente quando se aceita que o seu objetivo é o de prever o comportamento futuro das economias⁶.

O conceito de imprevisibilidade está intrinsecamente relacionado com os conceitos de incerteza⁷, não-ergodicidade e não-linearidade. Assim, admitindo que os processos não-ergódicos são comuns de serem encontrados em economia, pode-se argumentar que as falhas dos modelos econométricos residem no fato de que as técnicas desenvolvidas até então partem do pressuposto de que uma série temporal estacionária é considerada ergódica⁸.

É importante ressaltar que o conceito de ergodicidade é um dos pontos de divergência entre a corrente neoclássica e a corrente pós-keynesiana. Segundo os neoclássicos, o mundo em que vivemos é ergódico e, conseqüentemente, as variáveis econômicas seguem uma distribuição de probabilidade, i.e., o futuro é apenas uma extrapolação do passado. De acordo com os pós-keynesianos, a economia não é uma extrapolação do passado, mas um tempo que não foi escrito ainda, razão pela qual as ações atuais dos agentes econômicos poderão modificar completamente o futuro; dessa forma, o mundo é considerado não-ergódico.

Assim, o conceito de ergodicidade está no centro da Teoria Econômica, primeiramente devido à sua relação com o tempo, isto é, se o mundo for ergódico, então a passagem do tempo não afeta o sistema econômico; caso contrário, o tempo se torna essencial para entender os fatos econômicos. Um outro conceito que é dependente do conceito de ergodicidade é o de incertezas.

⁶ FRIEDMAN (1953).

⁷ O conceito de incerteza é um ponto conflitante na teoria econômica; algumas vezes ele se mistura com o conceito de risco ou com o conceito de intervalo de confiança. O conceito adotado aqui é o conceito keynesiano de incerteza: probabilidade não é a propriedade de um mundo material, mas é uma característica de como pensamos o mundo.

⁸ SAMUELSON (1968:11) afirmou que *"the acceptance of the ergodic hypothesis is sine qua non of the scientific method in economics"*.

Se o mundo for ergódico, então incerteza e risco serão iguais, uma vez que o futuro faz parte de um evento probabilístico que começou no passado; no entanto, com a aceitação de que o mundo possa ser considerado não-ergódico, as incertezas irão se diferenciar do conceito de risco, visto que, para o primeiro, não existe uma teoria que possa antecipá-lo, ao passo que o último pode ser calculado. Como ilustração, pode-se considerar um jogo de roleta. A chance de se ganhar pode ser antecipada por uma distribuição de probabilidade (risco). Mesmo que esse jogo ocorra daqui a 30 anos as chances serão as mesmas, o que não acontece com um time de futebol. Quais são as chances de o Atlético ganhar do Cruzeiro amanhã no Mineirão? Essas chances poderão ser calculadas. Contudo, qual é a chance de o Atlético ganhar do Cruzeiro, no Mineirão, daqui a 50 anos? A única resposta aceitável para esta pergunta é: “*Não se sabe*”.

As próximas seções tratam do conceito de ergodicidade, tempo e incertezas. As últimas tratam de definir o problema que foi estudado neste trabalho, o objetivo e a hipótese que foi testada.

1.1. Ergodicidade

1.1.1. Uma definição não-matemática

A Teoria Ergódica estuda o comportamento de longo prazo dos sistemas. O problema básico estudado por ela refere-se à condição pela qual o tempo histórico (órbita) não seja relevante. Dessa forma, um cientista pode, através da observação de uma única ocorrência de um evento, em um tempo histórico determinado, estimar as estatísticas de um processo estocástico atual e prever as características médias de todas as órbitas futuras ou de todas as histórias futuras possíveis⁹. O cálculo da esperança matemática é um bom exemplo para se ilustrar a importância de estudar as implicações da ergodicidade.

⁹ Em um processo estocástico estacionário não-ergódico, as probabilidades calculadas com base em dados passados não produzirão estimadores confiáveis para qualquer inferência futura, pois as leis dos grandes números não se aplicam nesse caso.

Para determinar a esperança matemática de uma função aleatória, é necessário conhecer sua densidade de probabilidade. Caso esta não seja conhecida, é necessário observar um número suficientemente grande de realizações para cada valor da variável tempo, t .

A média da função aleatória, para cada t , pode ser considerada como a esperança matemática para aquele t específico. Para uma função aleatória estacionária, a sua média amostral é a mesma, ou seja, ela independe do valor de t . Assim, pergunta-se: poderiam ser utilizados, para determinação da esperança matemática de uma função aleatória estacionária, os valores de uma só realização, i.e., para um t qualquer? A resposta é positiva apenas para o caso das funções estacionárias ergódicas¹⁰.

Antes de prosseguir, é importante deixar claro dois fatos relevantes para a pesquisa econômica:

1. A própria característica dos fenômenos estudados em economia pode ser considerada apenas uma única realização de um processo estocástico, e isso ocorre porque os fenômenos econômicos são **dependentes** do tempo. Dessa forma, é de vital importância a aceitação da **hipótese da ergodicidade**.
2. Como os processos estocásticos em economia não podem ser repetidos, torna-se impossível classificar os fenômenos econômicos em ergódicos ou não-ergódicos.

1.2. O tempo na teoria econômica

Marshall, na sua obra mais importante e, com certeza, a mais influente, *Princípios de Economia*, escrita em 1898, abordando o complexo problema do valor, escreveu: “*O elemento tempo é uma das principais causas daquelas dificuldades nas investigações econômicas que tornam necessário que o homem, com limitadas faculdades, não avance senão passo a passo*”¹¹ (MARSHALL,

¹⁰ Esse ponto é abordado detalhadamente no próximo capítulo.

¹¹ Esta é a razão para o epígrafe no começo do capítulo. Esta citação foi extraída de MARSHALL (1982).

1982:123). Mais adiante, o mesmo autor, tratando da dificuldade de se interpretar os fatos históricos, escreveu:

“...Embora a observação ou a história possa dizer-nos que um acontecimento foi simultâneo ou posterior a outro, elas não podem dizer-nos se o primeiro foi a causa do segundo... Essa dificuldade se tem tornado relevante pelas recentes controvérsias sobre acontecimentos contemporâneos... sempre que uma conclusão é extraída deles encontra oposição... alegações rivais são oferecidas; novos fatos trazidos à luz... e em alguns casos mostram apoiar a conclusão oposta àquela a favor da qual foram de primeira mão invocados.” Marshall conclui dizendo que *“Tanto a dificuldade de análise como a necessidade dela aumentam com o fato de dois acontecimentos econômicos não serem exatamente iguais sob todos os aspectos... não há repetição exata, mesmo em pequena escala. Sempre que dois casos se correspondem proximamente, temos que decidir se as diferenças entre eles podem ser abandonadas como sem importância prática, e isso pode não ser muito fácil, mesmo se os dois casos se referem ao mesmo lugar e tempo”* (MARSHALL, 1982:124).

Marshall era considerado o maior economista de sua época. Além de sua formação matemática, ele teve influência muito marcante dos escritos de Kant. Devido à sua sólida formação em filosofia e matemática, ele se tornou o mais importante escritor e a mais influente personalidade acadêmica do começo do século¹². Vários economistas adotaram seus métodos de trabalhos, entre eles Pigou, Keynes e Hicks. A influência de Marshall foi tão marcante para a economia que a sua obra marcou a origem da Escola Neoclássica, que é hoje considerada o *Mainstream* da economia moderna.

Apesar das dificuldades apontadas por Marshall, com relação ao tempo e às incertezas, a Escola Neoclássica se desenvolveu quase que inteiramente fora do conceito de tempo e o conceito de incerteza foi absorvido, completamente, pelos métodos estatísticos¹³. Somente com Keynes e Shackle, três décadas depois, é que a economia iria romper com essas limitações, ou pelo menos tentou.

¹² Haja vista o fato de que vários eminentes economistas escreveram sobre ele, como Keynes, Pigou e Schumpeter.

¹³ Todas as argumentações apresentadas na introdução deste capítulo foram feitas por autores neoclássicos.

1.2.1. O conceito de tempo

Quando se admite que os estudos dos problemas econômicos devem ser considerados no tempo, a dinâmica econômica passa a ser o instrumental teórico mais importante. Dessa forma, o conceito de *tempo* se torna, sem dúvida, o problema central. Qual, entre as várias maneiras de se abordar o tempo, seria o mais relevante para a teoria econômica? O conceito newtoniano de tempo, que atualmente é aceito em economia, é o mais correto? Ou se deveria, como os físicos, a partir de Einstein, adotar um conceito mais “flexível”, ou seja, um conceito que reflete o verdadeiro significado físico do tempo?

Quando se considera que a própria psicanálise freudiana se reestruturou em torno de um conceito de tempo que era condizente com as descobertas da Teoria da Relatividade de Einstein, i.e., de um tempo relativo e não absoluto, como a mecânica utilizava, o problema do tempo se torna relevante para a economia.

O objetivo do presente trabalho não foi o de estudar o efeito do tempo na economia. Apesar de se reconhecer que o seu movimento gera as incertezas, já que este só existe como uma característica do decurso temporal das variáveis econômicas e que o próprio tempo, como Marshall reconhecia, modifica os eventos econômicos para que estes não se repitam exatamente ao longo da história. É propício comentar que esse último ponto, em linguagem estatística moderna, poderia ser colocado da seguinte forma: “Quando um evento aleatório é dependente do tempo diz-se que estamos tratando de um processo estocástico não-ergódico”.

A próxima subseção trata do conceito filosófico do problema do tempo, seguido, depois, pelo conceito físico do tempo¹⁴, refletindo principalmente a contribuição de Einstein para o problema. A última subseção trata do conceito em dinâmica econômica.

¹⁴ Não será apresentado o conceito de tempo utilizado pela Termodinâmica, apesar de sua relevância, em função de sua complexidade, pois seria necessário entender-se o conceito de entropia (Segunda Lei da Termodinâmica). É conhecida a relação entre ergodicidade e entropia, mas ela está fora do escopo do trabalho. As referências sobre o assunto são PRIGOGINE (1980) e GEORGESCU-ROEGEN (1971).

1.2.2. A abordagem filosófica do tempo

Segundo Platão¹⁵, o tempo é o movimento circular dos céus. Aristóteles¹⁶, por sua vez, afirmava que o tempo é a medida do movimento e não o movimento em si. Existe uma ligação entre o tempo e as mudanças, segundo Aristóteles. Certa vez afirmou ele que *“Neither does time exist without change... Time is neither movement nor independent of it”*. Segundo Santo Agostinho¹⁷, o tempo não é nada, mas existe somente na apreensão da mente sobre a realidade.

O tempo era um tema recorrente na obra de Agostinho; quanto mais ele refletia sobre o tema, mais perplexo ficava e cada vez mais era forçado a afirmar que *“I still do not know what time is”*. Percebeu que sua reflexão sobre o assunto ocorreu durante um longo período de tempo e que não seria, realmente, um longo período se o tempo não tivesse passado durante todo o tempo. *“How can I know this, when I do not know what time is?”* Essa pergunta ele não conseguiu responder.

No século XVII, o físico inglês Issac Barrow rejeitou o elo entre o tempo e as mudanças de Aristóteles, argumentando que o tempo existe independentemente do movimento e que existia antes da criação de Deus. O seu aluno mais importante, Isac Newton, acrescentou que o movimento depende do quadro referencial que se está utilizando para analisá-lo, mas que existia um quadro referencial especial no qual o tempo real (tempo absoluto) é o tempo medido. Newton estava se referindo à existência de um arcabouço teórico, o espaço e o tempo, que era um quadro referencial considerado a substância que continha todos os outros eventos. Segundo Leibniz, Newton e Aristóteles erram em enfatizar a relação tempo e duração. Para ele, o tempo envolve ordem, i.e., tempo é uma ordenação das mudanças. Tempo implica ordem.

¹⁵ PLATÃO (1990:449).

¹⁶ ARISTÓTELES (1990:297).

¹⁷ AGOSTINHO (1990:117).

Kant¹⁸, no século XVIII, afirmou que o tempo e o espaço são formas nas quais a mente se projeta sobre as coisas externas. Para ele, o debate sobre a visão de Newton ou a visão de Santo Tomás de Aquino se opunha, pois Newton afirmava que o universo não tinha começo, enquanto Aquino argumentava que o universo tinha um começo. Para Kant, os dois lados não poderiam atingir uma conclusão porque ambos não podiam demonstrar genuinamente esse fato¹⁹.

Em 1924, Reichenbach definiu a ordem temporal em termos de causas possíveis. O evento *A* aconteceu antes do evento *B*, se *A* puder ter causado *B*, mas *B* não puder ter causado *A*. Esta foi a primeira Teoria Causal do Tempo.

1.2.3. A teoria especial da relatividade e o conceito de tempo

A Teoria da Relatividade é o princípio da relatividade de todo movimento dos corpos. A diferença básica entre a abordagem especial e a geral está no tipo de tratamento que se dá aos movimentos. Quando se trata de movimentos retilíneo e uniforme não-rotatório, está-se referindo à Teoria Especial da Relatividade. A Teoria Geral da Relatividade estuda todos os outros movimentos.

O objetivo central desta subseção é mostrar de que forma a Teoria da Relatividade se contrapõe à Teoria da Mecânica Clássica²⁰, na qual o tempo era tratado como absoluto e independente do espaço, e, com isso, mostrar que uma visão do tempo, sendo dependente dos eventos, é compatível não só com a visão moderna das Ciências Exatas, como também é perfeitamente lógica do ponto de vista das Ciências Sociais, na qual a apreciação do tempo se dá de forma dependente dos eventos econômicos. O que se está afirmando é a necessidade do tratamento formal do tempo histórico, especialmente na Economia, e também através de uma reflexão filosófica sobre o tema. Por exemplo, os grandes autores

¹⁸ KANT (1990:33).

¹⁹ Atualmente, esta argumentação de Kant gera muita controvérsia, pois a existência de uma prova transcendental é questionável, já que o seu ponto de argumentação era a Geometria Euclidiana, que em 1820 perdia sua posição para a Geometria Não-Euclidiana, que tinha acabado de ser descoberta.

²⁰ Galileu e Newton.

do passado, não muito distante, num primeiro momento, faziam suas reflexões utilizando os avanços das demais ciências da época. Dessa forma, ampliavam os limites de referência teórica da Economia, como Marshall, Marx, Keynes, Shackle, Savage e Knight fizeram no seu tempo.

As bases para esta subseção são as obras de EINSTEIN (1916, 1956). Ele sempre começava suas obras com um debate filosófico sobre os pressupostos que, usualmente, são aceitos como verdadeiros e procurava levá-los até o limite lógico possível²¹.

Einstein aborda na sua obra mais importante, a Teoria da Relatividade, de que maneira o conceito de distância afeta a geometria plana. Este, por sua vez, é relacionado com os fenômenos físicos, que estão posicionados sob o mesmo sistema de coordenadas. Assim, ele chega ao problema básico da mecânica, que é o de descrever como os corpos mudam suas posições no tempo.

Se um corpo realizar um movimento uniformemente em uma linha reta, de acordo com um sistema de coordenadas K, então ele estará movendo, também, com um movimento uniforme e em linha reta, relativo a um segundo sistema de coordenadas K', se o corpo estiver executando um movimento de translação com respeito a K. O princípio da relatividade pode então ser posto da seguinte forma, como Einstein o fez: *“If relative to K, K' is uniformly moving co-ordinate system devoid of rotation, then natural phenomena run their course with respect to K` according to exactly the same general laws as with respect to K.”*

Um evento qualquer pode ser fixado relativamente a um sistema de coordenadas, K, que consiste nas coordenadas espaciais, x, y, z , e com relação ao tempo, t . Relativamente a K', o mesmo evento pode ser fixado, em relação ao espaço e tempo, pelas coordenadas, x', y', z', t' , que não é idêntico às coordenadas anteriores. O problema posto pela teoria da relatividade é: Quais são os valores, x', y', z', t' , relativos a K', quando as magnitudes, x, y, z , com respeito a K são fornecidas? A resposta é dada com base no sistema de equações de Lorenz:

²¹ Esta prática em economia é usualmente utilizada para evitar o que os economistas conhecem como a Indeterminação de Sênior ou por Vício Ricardiano.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

A inovação de Einstein com relação ao tempo é que este perdeu a sua independência, o que é mostrado na quarta equação da transformação de Lorenz. Para a física da relatividade, o tempo, junto com as dimensões espaciais, forma um *continuum* de quatro dimensões. O mundo dos fenômenos físicos é, naturalmente, em quatro dimensões. Nesse sentido, o mundo é contínuo, pois para cada evento existem vários outros eventos na sua vizinhança. Antes do aparecimento da Teoria da Relatividade, o tempo tinha um papel diferente e independente do sistema de coordenada espacial. De acordo com a mecânica clássica, o tempo independe da posição e da condição de movimento do sistema de coordenadas.

1.2.4. Tempo e economia

O conceito de tempo desenvolvido na física teve uma influência marcante na economia, principalmente a mecânica newtoniana, com a visão de que o tempo é absoluto e independente. Se a Física, como ciência, precisou de 230 anos²² para mudar o seu conceito de tempo, e assim poder se desenvolver, o que dizer então da Economia? Será necessário trilhar os mesmos 230 anos para reconhecer as limitações do conceito de tempo em Economia? Não, pois alguns autores estão cômnicos dessa limitação. Se para a economia o tempo tivesse o mesmo sentido que tem nas Ciências Naturais, faria sentido na dinâmica

²² Desde a primeira edição dos *Principia* de Newton, em 1686, até a publicação da Teoria da Relatividade de Einstein, em 1916.

econômica a utilização das equações diferenciais ou em diferenças finitas.

SHACKLE (1958) afirmou que:

“In the classical dynamics of the physicist time is merely and purely a mathematical variable. The essence of his scheme of thought is the fully abstract idea of function, the idea of some working model or coded procedure which, applied to any particular and specified value or set of values of one or more independent variables, generates a value of a dependent variable. For the independent variable in a mental construction of this kind, time is misnomer ... the solution of a differential equation, if it can be found, is a complete in an instantaneous and timeless sense. This timelessness ... abolishes the distinction between past and future. The physicist has, within the stated limits of his problem, complete, perfect and indisputable knowledge of where his particle will be at any instant; the very nature of human consciousness ... depends ... upon ignorance of the future ... upon the necessity to live in one moment at a time.”

O conceito científico do tempo tem sido proeminente em Economia, principalmente quando se trata da construção de modelos econômicos. Shackle procurou mostrar em seus trabalhos que o tempo, sob esse ponto de vista, produz uma economia vazia. Modelos criados dessa forma mecânica não podem descrever os ciclos ou o crescimento a longo prazo. Nestes modelos não existe lugar para expectativas e decisões humanas, isto é, *invenções* com seus impactos sobre os investimentos, o produto e o emprego. O debate sobre o tempo foi intenso em meados do século XX, principalmente durante o surgimento dos modelos de decisões sob incertezas, utilizando os vários conceitos de risco e incertezas que se desenvolveram naquela época, os quais serão abordados na próxima seção.

Em economia existem, basicamente, duas alternativas²³ de se tratar o tempo: ele pode ser lógico ou histórico. A diferença entre elas está na forma como o tempo ordena os eventos. Quando se compara um par de eventos, independentemente se for no passado, presente ou futuro, e se afirma que um aconteceu antes, depois ou simultaneamente a um outro qualquer, diz-se que o tempo está expresso de forma lógica. O tempo lógico gera apenas uma maneira de ordenar os eventos através do tempo, sem se preocupar em experienciá-lo como passado, presente ou futuro. Assim, as pessoas podem mover-se para frente

²³ Apesar de POSSAS (1987) afirmar que existem três formas, cronológica, teórica e histórica, não existe distinção do campo de ação entre estas duas últimas.

e para trás sem, de fato, experimentá-lo²⁴. Já na abordagem histórica, o tempo ordena um conjunto de eventos, e não apenas um único evento.

No tempo histórico, a sociedade é possuidora de uma capacidade cognitiva, que transcende, e não é apenas determinado pelo conhecimento de suas partes. Em outras palavras, conhecer todos os fatos materiais sobre um indivíduo e seu ambiente não é suficiente para se explicar o seu comportamento. Usando um exemplo atual, pode-se perguntar se o clone de uma pessoa irá se desenvolver e se tornar uma pessoa idêntica à sua matriz, i.e., idêntico significa com as mesmas percepções de mundo, com as mesmas reações em situações semelhantes e se tomaria as mesmas decisões quando deparado com os mesmos problemas? Se a resposta for positiva, está se tratando de um evento que ocorre no tempo lógico; se for negativa, então se trata de um evento em tempo histórico.

Existem três diferenças importantes entre essas duas visões de tempo. A *primeira* é que o tempo lógico pode ser controlado; dessa forma, quando se simula matematicamente um evento, a estrutura do modelo não se modifica com as simulações. Em outras palavras, o tempo é reversível, ao passo que no tempo histórico os agentes econômicos estão presos no presente. A *segunda* é que no tempo histórico o momento presente tem significado diferente em relação ao passado e ao futuro. Em *terceiro* lugar, para a visão histórica os agentes econômicos não sabem tudo que precisam saber sobre o passado, presente e futuro antes de tomarem uma decisão. As informações não são perfeitas e completas²⁵.

Assim, quando se considera que as economias estão se movendo em um único sentido, do presente para o futuro, através do tempo histórico, o conhecimento do passado pode ser útil na descrição do presente ou do futuro próximo, na terminologia de Keynes. O fato de essa percepção ser única, no sentido de que apenas um grupo de indivíduos a possui e pela enorme complexidade de informações que deveria ser conhecida e que não se conhece, torna a representação probabilística do futuro quase que sem sentido.

²⁴ Veja HICKS (1976) e KATZNER (1998).

²⁵ Para uma análise mais detalhada, veja KATZNER (1998).

Tecnicamente, diz-se que, se a hipótese da estabilidade das distribuições de probabilidade ao longo do tempo, i.e., à medida que novas informações surgem, for violada, está-se tratando então de um fenômeno não-ergódico, utilizando a terminologia dos processos estocásticos. DAVIDSON (1982) argumenta que o mundo real, devido à sua complexidade, deve ser considerado como não-ergódico. Não se pode, como alguns teóricos fizeram, rechaçar o uso da estatística e da matemática em Economia, pois, fazendo assim, nega-se o grande avanço da teoria a partir do século XIX. Pode-se afirmar com certeza que, para os eventos econômicos não-ergódicos, a modelagem matemática e estatística, como está sendo utilizada atualmente, é ineficaz. O problema é como separar os eventos em ergódicos e não-ergódicos.

1.3. Incertezas na teoria econômica

O tempo gera os problemas mais importantes da Economia, que são as flutuações econômicas no produto, no emprego e nos investimentos. Além disso, a dificuldade na ordenação dos eventos passados, entre causa e efeito, gera as incertezas quanto ao futuro. A complexidade do mundo torna impossível a previsão futura, ou, em outras palavras, transforma o mundo em um ambiente não-ergódico, ou, pelo menos, a maior parte dos eventos.

A distinção entre tempo lógico e tempo histórico abre um caminho novo na análise econômica. Desde Shackle e Keynes - pode-se incluir também Knight - alguns modelos tentaram incorporar os conceitos de surpresa potencial, tempo histórico e ignorância para se analisar o comportamento dos agentes na economia. As incertezas que estão ligadas a uma distribuição de probabilidade, segundo Knight, são chamadas de risco, e quase todos os modelos econômicos, hoje em dia, tratam do risco. O risco e as incertezas só são iguais quando os fenômenos são ergódicos; caso contrário, a estrutura teórica será completamente diferente.

A proposta desta seção é explicitar os diversos conceitos de incertezas que usualmente são usados em economia, evidenciando a sua relação com o tema central, que é ergodicidade.

1.3.1. Diferentes noções de incertezas

Os conceitos de incertezas podem ser divididos em quatro grupos: incertezas subjetivas, incertezas do tipo keynesiano, incertezas de Knight e as das expectativas racionais. Existem vários trabalhos sobre a interpretação das incertezas de acordo com as várias visões de probabilidade, os quais não serão abordados aqui. Entretanto, vale a pena citar algumas das mais importantes, que são LAWSON (1988), CARVALHO (1988), WILLIAMS e FINDLAY (1986) e KATZNER (1986).

1.3.1.1. Incertezas subjetivas

A Teoria da Utilidade Subjetiva Esperada, que é ligada à Teoria Subjetiva da Probabilidade, está no centro do desenvolvimento da economia das incertezas. A visão de probabilidade está associada ao conceito de subjetivismo probabilístico de Ramsey e Savage.

Os maiores expoentes teóricos são: Savage, Ramsey, Arrow, Debreu, Diamond e Rothschild. O ponto central da análise subjetivista é de que os agentes podem e realmente colocam probabilidades a quaisquer proposições ou eventos. Em outras palavras, os subjetivistas agem como se cada indivíduo tivesse uma opinião sobre todas as coisas. Cada estado futuro do mundo tem ligado a ele uma probabilidade diferente, e qualquer uma delas poderá ocorrer em um futuro breve. Nesse caso, as incertezas são vistas como uma medida de probabilidade.

1.3.1.2. Incerteza keynesiana

Para Keynes, as incertezas correspondem às situações em que as probabilidades não são numericamente determinadas, ou mesmo comparadas, com outras relações probabilísticas. Uma citação de Keynes deixa claro o que ele entendia como incertezas:

“The game of roulette is not subject, in this sense to uncertainty; ... The expectation of life is only slightly uncertain. The sense I am using the term is that in which the prospect of a European war is uncertain, or the price of copper and the rate of interest twenty years hence, or the obsolescence of a new invention, or the position of private wealth owners in the social system in 1970. About these matters there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply do not know” (KEYNES, 1973a:400).

1.3.1.3. Incertezas e expectativas racionais

Os proponentes da Escola das Expectativas Racionais costumam introduzir um conjunto probabilístico, no qual a distribuição de probabilidades dos parâmetros é conhecida, caracterizando essa situação como incerta. Os autores dessa corrente costumam caracterizar, por exemplo, uma incerteza de demanda, uma demanda estocástica, que muda aleatoriamente em cada período. As conseqüências diretas são de que a previsão econométrica da demanda é possível e que risco e incertezas são equivalentes. Os mais proeminentes desta escola são: Lucas, Sargent, Prescott, Sims e Granger.

1.3.1.4. Incertezas para Knight

Knight é, sem margem de dúvida, o autor mais importante sobre incertezas. Em 1921, ele separou as incertezas em dois grupos: as que podiam ser medidas e as que não podiam. Aquelas que podiam ser medidas correspondem à situação na qual o julgamento probabilístico ou *a priori* seria possível, enquanto nas do segundo grupo o julgamento probabilístico poderia ser formado.

Para Knight, as duas situações eram radicalmente diferentes. Ele insistia que as incertezas do primeiro grupo, as que podiam ser medidas, não eram

realmente incertezas e deveriam ser referidas como risco: *“It will appear that a measurable uncertainty, or risk proper, as we shall use the term, is so far different from an unmeasurable one that is not in effect an uncertainty to cases of the non-quantitative type”* (KNIGHT, 1921).

Como foi visto, existe grande diferença entre os conceitos de incertezas nos quatro grupos estudados. Pode-se dividi-los em dois grupos: o primeiro formado pelos que utilizam uma distribuição de probabilidade para representar uma situação de incerteza, que são os subjetivistas e a escola das expectativas racionais. Esse primeiro grupo não faz distinção entre risco e incertezas, ao passo que para o segundo grupo, Keynes e Knight, as incertezas não são calculáveis. A diferença básica entre Keynes e Knight está relacionada com o significado de probabilidade. Para Keynes, a probabilidade é uma característica do conhecimento, enquanto para Knight a probabilidade é uma propriedade da realidade.

1.4. O problema

Os métodos matemáticos e estatísticos sempre foram aplicados, de forma irrestrita, na economia, tendo ocorrido o auge com o desenvolvimento da Econometria na década de 40.

O pressuposto principal era de que o comportamento das economias seguia alguma lei desconhecida, mas que poderia ser desvendada a partir de um modelo econométrico. De posse do modelo, o economista poderia fazer inferências sobre os estados futuros da economia, ou seja, poderia fazer previsões do futuro com certo grau de certeza.

Quando o modelo não funcionava, novas especificações deveriam ser testadas, novos dados deveriam ser incorporados e, assim, um modelo mais complexo iria se desenvolver. Novas técnicas surgiram com a intenção de aprimorar as previsões econômicas, porém os modelos se mostraram, ainda, insatisfatórios à medida que o ambiente externo tornava-se mais instável.

A hipótese de que o mundo real, apesar de toda sua complexidade, é ergódico nunca foi testada²⁶. Assim, não se pode afirmar, com certeza, que modelos mais complexos ou mais sofisticados irão gerar previsões mais confiáveis do que os modelos mais simples.

Portanto, o problema que foi estudado, no presente trabalho, é se a utilização dos modelos econométricos para modelar fenômenos não-ergódicos gera erros sistemáticos de previsão e, se isso se confirmar, quais são as implicações para a Teoria Econômica.

1.4.1. Os limites da econometria

O trabalho da “Cowles Commission” durante a década de 40 pode ser considerado o marco mais importante na construção da Econometria. Mesmo naquela época já era intenso o debate entre os economistas que defendiam a utilização dos métodos estatísticos na economia e os críticos desses métodos. Esse debate ficou conhecido como *the Keynes-Tinbergen controversy*, que teve sua origem em um dos primeiros e mais ambiciosos trabalhos da econometria. A proposta de Harberler, em 1937, a Tinbergen foi a de testar estatisticamente as teorias dos ciclos econômicos. O debate se centrou no seguinte ponto: Os métodos estatísticos são apropriados para testar a teoria econômica?²⁷

A contribuição mais importante de Keynes durante os debates talvez tenha sido o reconhecimento da importância das expectativas para o comportamento econômico. Segundo ele, é impossível tratar as expectativas de forma matemática, devido ao seu alto grau de interdependência²⁸ (KEYNES, 1936). Dessa forma, é quase impossível tratar os investimentos através da econometria, já que estes são determinados pelas expectativas, e conseqüentemente estudar os ciclos econômicos que dependem quase que exclusivamente da função investimento.

²⁶ Segundo algumas fontes, VERCELLI (1991) e DAVIDSON (1994).

²⁷ Para um estudo mais detalhado sobre este debate, veja KEUZENCAMP (1995).

²⁸ “Human nature invalidates a mathematical treatment of expectation” (KEYNES, 1936).

Um outro ponto levantado por Keynes em uma carta a Tinbergen, em 1938, foi o seguinte dilema: *“The methods requires not too short a series, whereas it is only in a short series, in most cases, that there is a reasonable expectation that the coefficients will be fairly constant”* (KEYNES, 1973b). Assim, não existe indicação da constância dos parâmetros estimados. Dessa forma, os métodos indutivos (probabilísticos) não são válidos. Até mesmo hoje, esse ponto continua sem resposta. Apesar da existência de vários métodos para tratar com parâmetros variáveis, isto é, mínimos quadrados recursivos, filtro de kalman, análise bayesiano, teste de Chow, todos estes métodos partem do princípio de que os parâmetros variam de acordo com um padrão estável. KEUZENCAMP (1995) conclui da seguinte forma: *“The fact that econometric modelling of investment has turned out to be a notoriously difficult issues in applied econometrics, even today, suggests that Keynes’ objections was not altogether misguided”*. LEESON²⁹ (1998) corrobora esse pensamento.

Atualmente, DAVIDSON (1982) resgata esse debate e, utilizando a terminologia dos processos estocásticos, identificou esta instabilidade nas previsões e a ineficiência dos modelos econométricos com o problema da ergodicidade. DAVIDSON (1982) demonstra que a análise macroeconômica de Keynes foi desenvolvida em termos de um mundo não-ergódico. Vários autores defendem esse ponto de vista, entre eles HICKS (1979) e SHACKLE (1955). Segundo eles, a situação econômica do mundo real é não-ergódica; assim, é quase inútil a utilização de modelos econométricos para previsão³⁰.

Davidson, e posteriormente os Pós-Keynesianos, incluíram em suas agendas de pesquisa o problema da ergodicidade. Davidson foi mais além e mostrou que as incertezas com relação ao futuro não seguem uma distribuição de probabilidade, pois, segundo ele, *“The future is created by crucial choice decisions; it is not discovered via the Bayes-Laplace theorem”* (DAVIDSON, 1982).

²⁹ Gostaria de agradecer ao professor Robert Leeson, da Universidade Murdoch, na Áustria, por ter enviado os artigos sobre o debate Keynes-Tinbergen, que foi de grande ajuda.

³⁰ O presente trabalho mostrou que até mesmo em um mundo ergódico a complexidade do mundo real já é suficiente para gerar especificações não-lineares, o que já inviabiliza as técnicas atuais de previsão.

Infelizmente, desde 1982 até os dias de hoje, os Pós-Keynesianos não conseguiram avançar nesse ponto. Na Conferência Internacional da Escola Pós-Keynesiana em 1998, o Prof. Fernando Cardim, um dos mais reconhecidos representantes dessa escola no Brasil, citando o discurso de Minsky e Davidson em Paris, frisou que continua na agenda de pesquisa pós-keynesiana o problema da ergodicidade. Segundo Cardim, esse é um dos desafios mais importantes a ser solucionado.

Recentemente, com o desenvolvimento dos estudos na área dos sistemas não-lineares, principalmente na sua vertente mais importante - a teoria do caos, já é possível estudar o comportamento dos sistemas quando pequenas variações nos parâmetros causam instabilidade nos modelos, sendo esse exatamente o dilema que Keynes propôs a Tinbergen. De acordo com Billingley e Davidson, existe uma relação muito importante entre a geração de modelos não-lineares que apresentam ciclos limitados³¹ e as séries temporais estacionárias não-ergódicas.

De que forma os sistemas dinâmicos não-lineares podem auxiliar na análise dos modelos econométricos? Essa é uma questão que ainda não foi respondida, e, apesar dos avanços nesta área, a econometria ainda não conseguiu assimilar essas teorias.

1.5. Hipótese

A hipótese que foi testada neste trabalho é se um modelo econométrico ergódico não gera estimadores confiáveis de dados gerados por um modelo não-ergódico.

1.6. Objetivos

O objetivo do presente trabalho consistiu em analisar as implicações da violação da hipótese da ergodicidade na estimação econômica.

³¹ Limit Cycles.

Especificamente, pretendeu-se:

1. Verificar se os estimadores são confiáveis.
2. Verificar se as conclusões que o modelo gera são diferentes das conclusões tiradas com o modelo original.
3. Identificar se os modelos ergódicos são boas aproximações de um modelo não-ergódico.

2. METODOLOGIA

2.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é o de apresentar a base matemática da ergodicidade, mostrando a sua importância e, principalmente, enfatizando a dificuldade de se provar a ergodicidade para as séries econômicas.

Quando se estuda um processo estocástico, é necessário fazer algumas suposições sobre como as variáveis aleatórias na seqüência se relacionam. A natureza da associação depende do fenômeno que se está estudando. Existem duas classes amplas de processos estocásticos: aqueles que dependem do *tempo histórico* e os que não dependem. Os processos do primeiro grupo são chamados de *processos evolucionários*, enquanto os do segundo grupo são conhecidos por *processos estritamente estacionários*. Segundo FISHMAN (1969:14), “*Since most economic time-varying phenomena exhibit nonstationary behavior, it seems appropriate to classify them as evolutionary processes and to dismiss stationary models as inadequate representations*”.

A solução encontrada na econometria é: primeiramente, permita algum grau de dependência temporal nas séries estritamente estacionárias e, depois, transforme as séries evolucionárias em séries estacionárias. Tecnicamente, a solução encontrada pela econometria é: para os processos estritamente

estacionários, o objetivo é de fazer inferência sobre as leis probabilísticas que governam os fenômenos que se deslocam no tempo, mas a não-dependência temporal implica uma restrição dos fenômenos que podem ser estudados. Assim, já que normalmente os estudos se restringem ao primeiro e segundo momentos, podem-se estudar os fenômenos evolucionários desde que se aceite a hipótese de independência do tempo histórico para o primeiro e segundo momentos, isto é, o processo tem que ser estacionário na covariância. A segunda parte da solução implica usar a análise espectral para transformar essas séries evolucionárias em séries estritamente estacionárias. Em análise espectral, o que se procura fazer é reduzir a concentração da variância em bandas de frequência específicas, já que essas concentrações causam perda de eficiência nos procedimentos de estimação. Quanto mais achatado for o periodograma, menor será a necessidade de *lags* para solucionar o espectro e, assim, melhorar a eficiência das estimativas. O procedimento-padrão é a utilização de algum tipo de filtro linear³².

O objetivo do trabalho não foi o de estudar a teoria espectral, mas sim o de entender quão forte são seus pressupostos para a economia. Para isso, este capítulo foi distribuído como se segue. A primeira parte, marco teórico, está dividida nas seguintes seções: a primeira trata da definição de medidas invariantes e suas relações com espaços probabilísticos, visando mostrar de que forma se pode, matematicamente, considerar uma série dependente ou não de uma transformação linear ou não-linear. Se a série for invariante, pode-se transformá-la em outra série sem perda essencial de suas características estocásticas. A segunda seção da primeira parte trata da teoria ergódica: seus teoremas e seus pressupostos básicos. A última seção apresenta uma série de implicações da ergodicidade na estatística e na econometria. Quando forem apresentadas as implicações para os processos estocásticos, será respondida a seguinte pergunta: Se considerarmos a relação entre diferentes membros de uma seqüência, de que forma a distribuição conjunta de X_t e X_{t-k} depende de k e de t ? Isto é, se um processo for invariante em relação ao tempo³³, pode-se diferenciá-lo

³² O problema com os filtros é que eles são sensíveis também à passagem do tempo.

³³ Se for uma medida invariante em relação ao tempo.

sem perda da estrutura topológica da série. A forma de, convencionalmente, se responder a essa pergunta está, intrinsecamente, relacionada com o conceito de *shift*. Esse conceito é de suma importância para o estudo dos processos não-estacionários, pois ele garante que alguns processos podem ser deslocados ou diferenciados no tempo sem alterar a estrutura topológica do processo. Se esses pressupostos não forem observados, a diferenciação da série irá criar outra que não possui a essência do processo original.

A segunda parte do capítulo - Modelo Analítico - apresenta dois modelos matemáticos³⁴. O primeiro modelo é o de Hicks, que gera uma série temporal, estacionária e não-ergódica. O outro, de Metzler, é um modelo teórico menos conhecido. O modelo produz ciclos limitados, apresentando séries estacionárias, mas não-ergódicas, realçando a impossibilidade de previsão econométrica de longo prazo. A última parte do capítulo - Procedimentos - explica como o capítulo seguinte é direcionado, mostrando como este trabalho foi testado.

2.2. Marco teórico

A teoria ergódica estuda o comportamento de longo prazo dos sistemas. O problema básico refere-se à condição pela qual o tempo histórico não é relevante. Dessa forma, um cientista pode, através da observação de uma única ocorrência de um evento, em um tempo histórico determinado, estimar as estatísticas de um processo estocástico atual e prever as características médias de todas as órbitas futuras. Assim, pode-se definir a teoria ergódica, de maneira mais formal, da seguinte forma: ela estuda a dinâmica das transformações que preservam a estrutura de um espaço de medida.

Quando se joga uma moeda, o estado de espaço do experimento é um conjunto ρ de possíveis resultados. Se esse experimento ocorrer em intervalos regulares de tempo e para sempre, ter-se-á a seqüência $w = (\dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots)$ de

³⁴ Apesar da sua importância, o modelo acelerador de Samuelson não foi apresentado por ser um modelo ergódico.

elemento de ρ . A estrutura probabilística é descrita por uma medida de probabilidade P no espaço Ω de tais seqüências.

Se o tempo não afetar as leis de probabilidades conjuntas do experimento, pode-se deslocar no tempo³⁵ w . As duas seqüências, w e w^\dagger , terão as mesmas probabilidades³⁶, P , já que as leis probabilísticas são invariantes no tempo.

Dessa forma, uma transformação, T , na seqüência w , gerando a seqüência w^\dagger , deverá apresentar $P(A) = P(TA)$ para o conjunto A . Em outras palavras, T deverá ser uma transformação que preserva medida.

2.2.1. Espaço de probabilidade e medida invariante

Um espaço de probabilidade (Ω, F, μ) possui os seguintes elementos: Ω , que é o espaço amostral, ou espaço dos pontos; ω , que são os resultados de um experimento; F é um sigma-álgebra³⁷ de eventos; e μ é uma medida de probabilidade em F . Uma medida é uma função não-negativa, enumerável e aditiva. Uma função μ , em um conjunto, definido em $F \subset \Omega$, é uma medida de probabilidade se:

$$\mu(A) \in [0, \infty], A \in F$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Se A_1, A_2, \dots é uma seqüência disjunta de F , então $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (condição aditiva e enumerável).

Se μ for finito, então $\mu(\Omega) = 1$.

³⁵ Este conceito é o mais importante dentro da Teoria Ergódica e será estudado mais adiante.

³⁶ Este conceito é conhecido como Shift topológico.

³⁷ É uma classe de conjuntos fechados e complementares, formando uma união enumerável.

Uma transformação $T: \Omega \rightarrow \Omega$ é mensurável no sentido de que $[A \in \mathcal{F}] \Rightarrow [T^{-1}A = \{\omega: T\omega \in A\} \in \mathcal{F}]$. Se $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{F}$, então T é dito que preserva medida e que μ é invariante com respeito a T .

Em sistemas dinâmicos, o espaço de estado, Ω , corresponde ao estado de fase, e os elementos ω de Ω , aos estados ou à posição do sistema, ao passo que o subconjunto A dos eventos corresponde a uma configuração das órbitas do sistema no estado de fase (ponto fixo, ciclo limite ou atrator estranho), e, finalmente, T é o mapa que governa o movimento do sistema.

Se $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ for um espaço de probabilidade e f uma função real μ -integrável e μ for invariante com respeito ao mapa T , então o limite seguinte existe com probabilidade 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) = \hat{f}(\omega)$$

em que $\hat{f}(\omega)$ é uma função invariante, de forma que:

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \hat{f}(\omega) d\mu(\omega)$$

Esse limite é conhecido como o Teorema de Birkhoff-Khinchin e pertence à classe da Lei dos Grandes Números. Ele implica que, na presença de uma medida invariante, se torna possível tirar a média ao longo do tempo, ou, o que é o mesmo, nas iterações do mapa.

A segunda propriedade importante é o conceito de ergodicidade, o que é visto na próxima seção. Em linhas gerais, se T for ergódico, então cada conjunto invariante A ³⁸ é trivial, no sentido de que ele tem medida 1 ou 0.

³⁸ $T^{-1}A = A$.

2.2.2. Ergodicidade

O que se procura descobrir é quais das transformações T têm a propriedade para quase todo ω ; a órbita $\{\omega, T\omega, T^2\omega, \dots\}$ de ω é uma forma de réplica de Ω . Em outras palavras, a órbita não é relevante para se poder entender um processo estocástico. Dessa forma, por meio da observação de um único evento, podem-se estimar as estatísticas do processo estudado e prever as características médias de todas as órbitas futuras ou de todas as histórias futuras possíveis.

TEOREMA DE BIRKHOFF: Seja (X, α, μ) um espaço de probabilidade e $T: X \rightarrow X$ uma transformação que preserva medida.

Se $f \in L^1(X)$, o limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

existe para q.t.p.³⁹. $x \in X$

Se $f \in L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, a função f , definida por:

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

pertence a $L^p(X)$ e satisfaz:

$$b_1) \lim \left\| \tilde{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right\|_p = 0$$

$$b_2) \tilde{f}(T(x)) = \tilde{f}(x) \quad \text{q.t.p.}$$

$$\int_X \tilde{f} d\mu = \int_X f d\mu$$

para toda $f \in L^p(X)$.

³⁹ Para quase todos os pontos.

TEOREMA DE BIRKHOFF⁴⁰ (versão probabilística): Se um processo estacionário contínuo $\xi(t)$ tem uma expectativa finita, então com probabilidade unitária existe o limite:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt$$

O teorema anterior nos garante que, se um processo for estacionário e ergódico (os cálculos dos parâmetros do modelo probabilístico), não há necessidade de se fazer um experimento com várias repetições; no entanto, com probabilidade unitária podem-se inferir esses parâmetros com uma única realização do processo estudado.

2.2.3. Implicações da ergodicidade

O objetivo desta seção foi o de desenvolver uma análise da Teoria dos Processos Estocásticos Estacionários e Não-Estacionários, enfocando o seu relacionamento com a teoria ergódica. Um outro ponto abordado aqui é o relacionamento dos *shifts* com os processos estocásticos. Não é novidade que na estatística matemática, principalmente os estudos probabilísticos de processos estocásticos, teoria espectral, processos markovianos, sinais podem e devem ser estudados utilizando o aparato topológico, já que estes deram origem à moderna teoria estatística.

Alguns trabalhos, a partir do artigo seminal de Debreu, em 1950, sobre a teoria do consumidor, com número infinito de mercadorias deram origem a um número relativamente importante de trabalhos abordando os problemas econômicos com os instrumentais topológicos. Apesar da sua grande utilidade

⁴⁰ Khinchin provou que o teorema de Birkhoff poderia ser generalizado para casos probabilísticos mais amplos; dessa forma, esta versão algumas vezes é conhecida como o Teorema de Birkhoff-Khinchin.

para a economia, principalmente na modelagem matemática, pouco se fez nessa direção⁴¹, ou seja, a de divulgar a sua utilidade nos meios científicos.

2.2.3.1. Implicações estatísticas

2.2.3.1.1. O problema da média

O problema central nas aplicações dos processos estocásticos é a estimação dos vários parâmetros estatísticos a partir de dados reais. Muitos parâmetros podem ser expressos como valores esperados de alguma forma funcional de um processo $\mathbf{x}(t)$. O problema da estimação da média do processo $\mathbf{x}(t)$ é, assim, central nas investigações.

Para um t específico, $\mathbf{x}(t)$ é uma variável aleatória com média $\eta(t) = E\{\mathbf{x}(t)\}$. Sua média pode ser calculada a partir de uma amostra. Se n amostras observadas $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$ de $\mathbf{x}(t)$ forem usadas como um estimador de $E\{\mathbf{x}(t)\}$, então a média:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum \mathbf{x}(t, \zeta_i)$$

é um estimador consistente de $\eta(t)$. Entretanto, ela só pode ser usada se um número muito grande de realizações $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$ de $\mathbf{x}(t)$ está disponível. Em muitas aplicações⁴² só é conhecida uma única realização de $\mathbf{x}(t)$. É possível estimar $\eta(t)$ em termos da média temporal de uma amostra dada? Isto não é possível se $E\{\mathbf{x}(t)\}$ depender de t . Entretanto, se $\mathbf{x}(t)$ for um processo estacionário regular, sua média temporal tenderá para $E\{\mathbf{x}(t)\}$ quando a amostra tender para ∞ .

⁴¹ Os trabalhos que mais amplamente utilizam estes métodos são os de POLLOCK (1977), NIKAIDO (1968), STOCKEY e LUCAS (1997) e MASCOLLEL (1985).

⁴² Principalmente em economia.

2.2.3.1.2. Processos estocásticos

A teoria dos processos estocásticos surgiu dos trabalhos de dois matemáticos soviéticos: KOLMOGOROV (1938) e KHINCHIN (1938). Kolmogorov fundamentou de forma rigorosa os processos estocásticos sem efeitos posteriores, ou seja, os processos markovianos. Em vários outros trabalhos, Khinchin⁴³ criou os princípios da teoria dos processos estacionários⁴⁴.

Antes de tratar o problema matematicamente, eles tiveram que fazê-lo de forma esquemática. A razão para isso era que a análise matemática aplicada à investigação de um processo variacional de um sistema somente pode ocorrer quando assumimos que cada estado possível do sistema já foi definido anteriormente através de um aparato matemático qualquer. Na mecânica clássica, seria definido da seguinte forma: Para cada tempo, t , o estado do sistema, y , é completamente determinado pelo estado, x , em qualquer tempo anterior, t_0 . Entretanto, fora da mecânica clássica, na física moderna e na economia, tem-se que tratar com situações mais complicadas, quando o conhecimento do estado do sistema, em qualquer tempo, t_0 , não mais determina, unicamente, o estado do sistema em períodos subsequentes, mas somente a probabilidade de que o sistema estará em um dos estados de um conjunto de estados do sistema. Se x é o estado de um sistema, no tempo t_0 , e E um conjunto de estados, então para o processo descrito existirá uma probabilidade, $P = \{t_0; t, E\}$, de que o sistema, que no tempo t_0 estava no estado x , estará nos tempos futuros passando em um dos estados do conjunto E .

O conceito de processo estocástico é: Deixe U ser um conjunto de eventos elementares e t um parâmetro contínuo. Um processo estocástico é definido como uma função de dois argumentos:

$$\xi(t) = \varphi(e, t) \quad e \in U$$

⁴³ É importante lembrar que Khinchin, juntamente com Birkhoff, desenvolveu a prova matemática para o teorema da ergodicidade, que foi apresentado na seção anterior.

⁴⁴ Estes processos serão desenvolvidos na próxima seção.

Para qualquer valor de t , a função $\varphi(e, t)$ é função apenas de e e, conseqüentemente, é uma variável aleatória. Para cada valor fixo de e , isto é, para cada evento elementar, $\varphi(e, t)$ depende apenas de t , sendo função de um argumento real. Essa função é chamada de uma realização do processo estocástico $\xi(t)$. Assim, um processo estocástico pode ser tanto uma coleção de variáveis aleatórias, $\xi(t)$, que dependem do parâmetro t , ou uma coleção de realizações do processo⁴⁵ $\xi(t)$.

2.2.3.1.3. *Shifts* nos processos estocásticos

Para finalizar esta seção, Marco Teórico, é importante que se aborde o ponto central da ergodicidade, que é o deslocamento temporal. Para isso, é utilizado o conceito de *shifts* topológicos. As referências mais importantes para esta seção são BILLINGSLEY (1978) e MANÉ (1983).

No começo do capítulo foi mostrado que o estado de espaço do experimento era formado pela seqüência, w ; se o tempo não influenciasse as leis de probabilidades conjuntas do experimento, poder-se-ia transladar no tempo o estado de espaço, gerando a seqüência w^\dagger , e as duas seqüências teriam as mesmas probabilidades, P , já que as leis probabilísticas são invariantes no tempo. Essa característica das estruturas ergódicas é de grande importância nos processos estocásticos, pois sem ela não se poderia diferenciar as séries não-estacionárias. Assim, será desenvolvida a estrutura topológica para tal procedimento estatístico e, na seção seguinte, a sua aplicação nos processos estocásticos.

O conceito de *shift* estabelece que, sob certas condições, um difeomorfismo f de uma variedade M possui um compacto $\Lambda \subset M$ tal que para algum N vale $f^N(\Lambda) = \Lambda$ e f^N/Λ é topologicamente equivalente a um *shift*.

Seja X um espaço topológico, em que $B(X)$ é o conjunto das seqüências $\theta: Z \rightarrow X$ e $B^+(X)$ o conjunto das seqüências $\theta: Z^+ \rightarrow X$ providos da topologia produto. O *shift* $\sigma: B(X) \rightarrow B(X)$ é a transformação definida por $\sigma(\theta)(n) = \theta(n+1)$

⁴⁵ Naturalmente, para se definir um processo é necessário especificar uma medida de probabilidade.

e, analogamente, $\sigma: B^+(X) \rightarrow B^+(X)$, como o *shift* unilateral. Ambas são transformações contínuas. Quando X é um conjunto finito com n elementos, ter-se-á $B(X) = B(n)$, $B^+(X) = B^+(n)$ e se identificará X com o conjunto $\{1, \dots, n\}$ provido da topologia discreta. Se $\mu \in M(B(X))$, então $B_\mu(X)$ é o espaço $B(X)$ provido da medida μ . Utilizando a definição de cilindro⁴⁶, tem-se que, dados os boreleanos A_0, \dots, A_m em X e $j \in \mathbb{Z}$, define-se o cilindro $C(j, A_0, \dots, A_m)$ como $C(j, A_0, \dots, A_m) = \{\theta \in B(X) \mid \theta(j+i) \in A_i, 0 \leq i \leq m\}$.

As uniões disjuntas de cilindros são uma álgebra que gera a σ -álgebra sobre os boreleanos $B(X)$. Portanto, toda probabilidade $\mu \in M(X)$ é determinada por sua restrição a esta álgebra. Dada uma média $\mu_0 \in M(X)$, pode-se provar⁴⁷ que existe uma única medida $\mu \in M(B(X))$, denominada medida produto associada a μ_0 , tal que $\mu(C(j, A_0, \dots, A_m)) = \prod_{i=0}^m \mu_0(A_i)$. μ é σ -invariante. E o *shift* $\sigma: B(X) \rightarrow B(X)$ é denominado *shift* de Bernouilli. Dar uma probabilidade σ -invariante sobre os boreleanos de $B(X)$ é equivalente a dar um processo estocástico estacionário a valores de X .

Um processo estacionário a valores no espaço X é uma seqüência $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de variáveis aleatórias $\xi_n: (Y, \mathfrak{b}, \nu) \rightarrow X$. Associado a ele tem-se uma probabilidade $\mu \in M(B(X))$ definida da seguinte forma: seja $\tilde{\gamma}: Y \rightarrow B(X)$ definida pela expressão: $\tilde{\gamma}(x)(n) = \xi_n(x)$, define-se μ como $\mu(A) = \nu(\tilde{\gamma}^{-1}(A))$.

Se A é um boreleano de $B(X)$, ou seja, μ é a probabilidade associada à variável aleatória $\tilde{\gamma}$ a valores em $B(X)$. Se μ é σ -invariante, diz-se que o processo é estacionário. Os processos estocásticos modelam os resultados de uma série de observações não-determinísticas. Se os resultados dessas observações são expressos por números reais, descrevem-se como um processo estocástico $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ a valores em \mathbb{R} e dados intervalos (a_i, b_i) e inteiros $m_i, i = 1, \dots, l$ o

⁴⁶ Este conceito já foi apresentado anteriormente na seção dos sistemas dinâmicos.

⁴⁷ Veja FERNANDEZ (1976).

valor $\mu\left(\bigcap_{j=1}^l C(m_i, (a_i, b_i))\right)$, interpreta-se como a probabilidade de a m_i -ésima observação dar um resultado entre a_i e b_i , para $i = 1, \dots, l$.

Um exemplo importante dos shifts

Considere Ω um conjunto infinito de seqüência e $\omega \in \Omega$, em que $\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots)$ de ρ , sendo ρ o espaço de estado ou de possíveis resultados. P é uma medida de probabilidade no espaço $f \in \Omega$ de tais seqüências e ωf é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Então o trio (Ω, f, P) é um espaço probabilístico.

Se P é qualquer medida que é preservada pela transformação T , dizer que T preserva P é exatamente o mesmo que $P\{\omega: (x_n(\omega), \dots, x_{n+k-1}(\omega)) \in E\}$ ⁴⁸ é independente de n , que é a definição de estacionariedade de um processo estocástico $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$. A transformação T é chamada de *shifts* associado ao processo.

Já que P é uma medida preservada pelo *shift* T definida como $x_n(T\omega) = x_{n+1}(\omega)$, a medida P é determinada pela medida de dimensão finita $\mu_k(E) = P\{\omega: (x_n(\omega), \dots, x_{n+k-1}(\omega)) \in E\}$. Se cada μ_k é produto do k -ésimo produto de μ_1 , o processo $\{x_n\}$ é independente. Segue que T é ergódico. Tomando $f(\omega) = x_0(\omega)$, pode-se ver que se $E\{|x_0|\} < \infty$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k(?) = E(x_0) \quad \text{para q.t.p.}$$

O teorema de Birkhoff mostra que a lei forte dos grandes números é um caso especial do teorema de ergodicidade, para o caso de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com primeiro momento finito.

⁴⁸ E é um conjunto de borel com k dimensões.

2.2.3.2. Implicações na econometria das séries temporais

2.2.3.2.1. Séries temporais estacionárias

Se for removido de uma série temporal o elemento constituído de variação sazonal e de tendência, em geral, a série apresentará movimento oscilatório em torno de um valor constante. Esse movimento oscilatório pode às vezes nem existir. As séries temporais em que se está interessado são aquelas que apresentam movimentos oscilatórios que permanecem após a eliminação da sazonalidade e da tendência.

Considere um conjunto de variáveis aleatórias, u_1, \dots, u_n, \dots . Se a função distribuição de qualquer conjunto de n u 's consecutivos, u_{t+1}, \dots, u_{t+n} , será $F(u_{t+1}, \dots, u_{t+n})$. Se F for independente de t , para todo inteiro $n > 0$, diz-se que F é uma série estacionária. A distribuição de qualquer conjunto de dimensão n , de elementos consecutivos, será a mesma.

Assumindo que a média e a variância de u existam, então, para todo t , tem-se

$$\begin{aligned}\mu &= E(u_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t dF(u_t) \\ s^2 &= E(u_t - \mu)^2 = \int (u_t - \mu)^2 dF(u_t) \\ \rho_j &= E\{(u_t - \mu)(u_{t+j} - \mu)\} = \rho_{-j}\end{aligned}$$

Suponha que se observou uma série⁴⁹ $u'_{t_1}, \dots, u'_{t_2}$. Cada u tem média, μ , e variância, σ^2 . Assim, pode-se definir o tempo médio como:

$$\begin{aligned}M_{t_2-t_1+1}(u') &= \frac{1}{t_2 - t_1 + 1} \sum_{t_1}^{t_2} u'_t \\ M(u') &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty, t_2 \rightarrow \infty} M_{t_2-t_1+1}(u')\end{aligned}$$

⁴⁹ O apóstrofo representa uma única observação.

Utilizando o teorema de Birkhoff⁵⁰, é possível provar que se pode estimar a média de μ de uma série de sucessivos valores de uma única realização. Esse resultado é central para as séries estacionárias, pois sem elas as estimações com base em uma única realização seriam praticamente impossíveis.

Se $M(u') = E(u)$ e o segundo momento $E(\mu - \mu)^2$ for finito, o processo é ergódico. Do mesmo modo, utilizando o teorema de Birkhoff, pode-se concluir que a autocorrelação⁵¹ é igual à correlação calculada de uma única realização:

$$\frac{M\{u'_t - M(u')\}\{u'_{t+j} - M(u')\}}{M\{u'_t - M(u')\}^2}$$

Esse resultado permite estimar a autocorrelação de uma única realização.

2.2.3.2.2. Conceito de funções aleatórias estacionárias ergódicas

Quando as características probabilísticas de uma função aleatória não são conhecidas, então, para determiná-las experimentalmente é necessário observar um número muito grande de suas realizações para cada valor dado do argumento t . Assim, a média aritmética da função pode ser encontrada, para cada valor de t ⁵², tomando o valor de todas as suas realizações observadas. E só assim pode-se considerá-las como valor de sua esperança matemática para esse valor específico de t .

É bom lembrar que a esperança matemática de uma função aleatória estacionária é constante. Cabe perguntar: poder-se-ia utilizar para a determinação experimental da esperança matemática de uma função aleatória estacionária os valores de apenas uma realização para diferentes valores do argumento t , em vez

⁵⁰ Este teorema pode ser reescrito da seguinte forma: a) Se μ_t é estacionário com média finita, μ , $M(u')$ existe para quase todas as realizações, i.e., com probabilidade unitária. b) Se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho_j = 0, \text{ em que } \rho_j \text{ é a função autocorrelação.}$$

⁵¹ A autocovariância, γ_j , foi definida acima, e a autocorrelação é definida como $\rho_j = \frac{\gamma_j}{S^2} = \rho_{-j}$. Os coeficientes ρ_0, ρ_1, \dots são chamados de correlograma, que é um instrumento muito útil para explorar a natureza da estrutura interna de uma série.

⁵² Como já foi apresentado anteriormente.

de usar um grande número de diferentes realizações para um mesmo argumento t ? Poder-se-ia aproveitar a circunstância de que as características probabilísticas das funções aleatórias estacionárias não variam para qualquer que seja o deslocamento temporal ou, em geral, ao longo do eixo do argumento? O objetivo desta seção é o de responder a essas questões, observando quais são as condições em que uma única realização de uma função aleatória estacionária pode substituir uma grande quantidade de experimentos.

Matematicamente, está-se querendo determinar quais são as condições em que uma única realização, $x(t)$, de uma função aleatória estacionária, $X(t)$, garante a igualdade:

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1)$$

É óbvio que a integral, do segundo membro, terá valores diferentes para distintas realizações possíveis de $X(t)$. Dessa forma, todos os valores, do segundo membro da equação (1), correspondem a distintas realizações possíveis de uma magnitude aleatória:

$$Y_t = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (2)$$

A esperança matemática, evidentemente, é igual a m_x , posto que ela é constante e igual a m_x , para as funções estacionárias. Para que se possa escrever a equação (1), é necessário e suficiente que a dispersão, da magnitude aleatória $Y(t)$, seja pequena⁵³. A dispersão de $Y(t)$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$D[Y_t] = M \left[\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - m_x \right\}^2 \right] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T k_x(t-t') dt dt' \quad (3)$$

⁵³ Pequena, esta no sentido de proximidade em topologia.

A equação (3) expressa a dispersão de $Y(t)$ e, portanto, o erro quadrático médio na equação (1) pode ser tão pequeno quanto se queira, já que se pode escolher um valor para T tão grande quanto se queira. A condição suficiente para isso é a existência de um valor t_0 que torne a função $k_x(\tau)$ tão pequena como se queira⁵⁴. Em outras palavras, para que a dispersão de $Y(t) \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow \infty$, é suficiente que exista o intervalo finito de correlação da função aleatória $X(t)$.

As funções aleatórias estacionárias que respondem positivamente às duas questões que foram colocadas no começo desta seção são chamadas de funções estacionárias ergódicas, e a tendência de uma função de correlação $k_x(\tau)$ é zero quando $\tau \rightarrow \infty$ é uma condição suficiente de ergodicidade da função aleatória estacionária com respeito à esperança matemática.

Assim, a dispersão de Y_T depende da relação entre o tamanho da amostra da realização da função $X(t)$ e o do intervalo de correlação. Assim, para que a equação (1) seja verdadeira, é suficiente que o tamanho da amostra, T , de $X(t)$, seja grande em comparação com seu intervalo de correlação. Ou, em outras palavras, a amostra tem que ser suficientemente grande para que a função aleatória estudada possa apresentar todas as suas características aleatórias.

O valor da função correlação $k_x(\tau_0)$, para um função aleatória estacionária, para qualquer valor τ_0 , é a esperança matemática de uma função $Z(t) = X^0(t)X^0(t+\tau_0)$:

$$k_x(\tau_0) = MX^0(t)[X^0(t+\tau_0)] = M[Z(t)] \quad (4)$$

Assim, sob certas condições, a função correlação, para uma função aleatória estacionária, pode também ser usada para se determinar, com base em uma única realização, seu valor médio referente ao tempo. Isso é possível se a função $Z(t)$ for ergódica em relação à esperança matemática. A condição suficiente⁵⁵ de sua ergodicidade é que $k_x(\tau) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$, que se

⁵⁴ Ou, em notação topológica, $k_x(\tau) \rightarrow 0$ para $|\tau| > \tau_0$.

⁵⁵ Uma prova pode ser encontrada em PUGACHEV (1969).

determina, evidentemente, pelo momento de quarta ordem de $X(t)$. Assim, o decréscimo ilimitado da função correlação, de uma função aleatória estacionária, é uma condição suficiente de sua ergodicidade. Portanto, a função correlação pode ser determinada, aproximadamente, por:

$$k_x(t_0) \approx \frac{1}{T} \int_0^T x^0(t)x^0(t+t_0)dt = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t+t_0) - m_x]dt$$

Um último ponto, importante de ser abordado, é que nenhuma função aleatória estacionária senoidal pode ser ergódica com respeito à função correlação e, por conseguinte, sua função correlação pode ser calculada com apenas uma única realização. É sabido que qualquer que seja a função correlação $k_x(\tau)$ sempre existem funções aleatórias estacionárias, com realizações puramente senoidais, que apresentam essa função correlação. Por isso, toda função correlação, $k_x(\tau)$, corresponde sempre a funções aleatórias estacionárias tanto ergódicas como não-ergódicas. Pode-se concluir que somente como conhecimento da função correlação de uma função aleatória estacionária não é possível determinar se ela é ergódica ou não com respeito à função correlação. A única solução então será conhecer o momento de quarta ordem da função aleatória estudada.

2.3. Modelo analítico

Após a publicação da Teoria Geral de Keynes, surgiram vários modelos macroeconômicos que permitiram apresentar algumas explicações sobre os dois fenômenos mais significativos de um sistema econômico: as flutuações cíclicas e o crescimento do tipo exponencial. Esses modelos podem ser divididos em dois grupos: os que buscavam as explicações das flutuações nos choques externos e os que buscavam a explicação em alguma relação endógena da economia, i.e., no comportamento dos consumidores, no multiplicador keynesiano e nas expectativas dos empresários, princípio da aceleração, como explicação para os ciclos econômicos.

Os modelos lineares utilizados por esses dois grupos não conseguiam explicar os ciclos sem a utilização de choques externos. HICKS (1950), bem como GOODWIN (1951), foram os primeiros a adotar um modelo não-linear com a finalidade de gerar movimentos cíclicos. Mais tarde, LORENZ (1963) mostrou, através do seu sistema dinâmico não-linear para explicar o clima no planeta, que tais sistemas produziriam séries temporais caóticas e, dessa forma, não seria confiável, ou mesmo impossível, a previsão do tempo.

O modelo desenvolvido por Hicks é interessante, pois as séries temporais geradas por ele seriam estacionárias, mas ao mesmo tempo não-ergódicas. A próxima seção desenvolve o modelo de Hicks e um modelo linear padrão, multiplicador-acelerador, que é utilizado como modelo de previsão para o modelo de Hicks.

Por último, é apresentada uma variação do modelo de METZLER (1941) dos ciclos de estoques. A variação do modelo tem por objetivo produzir ciclos limitados, realçando que os modelos não-lineares podem apresentar séries temporais estacionárias, porém que produzem erros sistemáticos de previsão quando utilizados os métodos econométricos. BROCK e LIMA (1996), estudando o sistema financeiro, concluíram que a hipótese de linearidade e, conseqüentemente, de estacionaridade deveriam ser rejeitadas, segundo eles:

“given de rate at which new financial and technological tools have been introduced in financial markets, the case for existence of structural changes (and thus the lack of stationarity) seems quite strong, especially when relatively large periods of time are considered.”

2.3.1. Modelo de Hicks

Hicks percebeu que um modelo puramente linear não seria adequado para representar os ciclos econômicos. Assim, utilizando o modelo multiplicador-acelerador de Samuelson-Hansen, ele criou uma interação não-simétrica do acelerador. Segundo ele, um desinvestimento não poderia acontecer da mesma forma que um investimento. Dessa forma, Hicks desenvolveu seu modelo colocando duas restrições: primeiro, a economia não podia crescer mais

rapidamente do que o pleno emprego, criando, assim, um teto máximo de ação para o modelo. Em segundo lugar, os desinvestimentos não poderiam ser menores que o nível de depreciação da economia.

Essas duas pré-condições do modelo geravam a não-linearidade necessária para que ele apresentasse ciclos limitados, i.e., um equilíbrio que não fosse nem um ponto fixo nem um equilíbrio estático, mas um equilíbrio, como Poincaré chamou de um movimento limitado ou “non-wandering set”.

As equações do modelo são:

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t & (5) \\ C_t = bY_{t-1} & (6) \\ I_t = I_t^i + I_t^a & (7) \\ I_t^a = A_0(1+g)^t & (8) \\ I_t^i = ?(Y_{t-1} - Y_{t-2}) & (9) \end{cases}$$

em que Y = renda nacional, C = consumo, I^i = investimento autônomo e I^a = investimento induzido, ao passo que os parâmetros são b - propensão marginal a consumir, k - expectativas⁵⁶ dos empresários e g - taxa constante de crescimento.

A tendência da renda (*Economic trend*) é dada pela expressão:

$$Y_t = \frac{A_0(1+g)^t}{(1+g)^2 - (b+?)(1+g) + ?}$$

E o teto máximo do modelo é dado pelo pleno emprego que cresce à mesma taxa, g , da tendência:

$$B_t = B_0(1+g)^t, \text{ em que } B_0 > Y_0 \quad (10)$$

Já o piso mínimo não pode ser menor do que a depreciação, a_t :

$$I_t^i = -a_t \quad (11)$$

⁵⁶ O processo de formação das expectativas.

Dessa forma, são necessárias mais duas equações⁵⁷, as de tomada de decisões, para as escolhas entre renda e teto e entre investimento autônomo e o piso mínimo, que são:

$$I_t = \text{Max}\{a_t, I_t^a + \lambda(Y_{t-1} - Y_{t-2})\} \quad (12)$$

e

$$Y_t = \text{Min}\{B_t, C_t + I_t\} \quad (13)$$

Assim, o modelo completo engloba as equações (5) a (13).

Alguns comentários de HICKS (1950) são importantes de serem reproduzidos no momento. Segundo ele, a interação do multiplicador-acelerador é essencial no seu modelo, já que ela constitui uma representação adequada dos processos cíclicos, pois o acelerador é assimétrico nos momentos de crescimento e nos momentos de retração econômica, uma vez que os desinvestimentos em bens de capital não podem acontecer da mesma forma que um investimento. Assim, um aumento da demanda conduzirá a uma expansão proporcional no capital, enquanto uma contração não conduzirá à mesma retração na mesma proporção no capital. O processo de ajustamento do capital existente em um nível de demanda menor é lento e gradual, de espera até que a depreciação e a obsolescência produzam seus efeitos.

Outro ponto importante levantado por Hicks é em relação aos valores reais dos parâmetros, que no modelo linear são essenciais para gerar as flutuações na renda. No modelo linear as oscilações só acontecem por uma causalidade feliz, isto é, quando o acelerador for igual à unidade. O problema é que todas as evidências empíricas levam a crer que o acelerador possui valor superior à unidade que no modelo linear geraria flutuações explosivas.

Antes de apresentar a solução do modelo, é importante fazer algumas considerações. A primeira é que a presença dos limites superior e inferior e do

⁵⁷ No desenvolvimento original do modelo, HICKS (1950) não fez uso das equações (8) e (9), mas esse acréscimo ao modelo torna mais fácil de serem entendidas as simulações do modelo.

comportamento assimétrico do acelerador faz com que as oscilações de amplitude relativamente constante ocorram, independentemente dos valores dos parâmetros do sistema. Assim, as oscilações explosivas se vêm freadas ao se chocarem com o limite superior; então o multiplicador entra em ação, e, uma vez que o acelerador começa a atuar, não há necessidade de um novo conjunto de condições iniciais⁵⁸.

A segunda consideração, ressaltada pelo modelo de Hicks, é em relação à dificuldade básica dos modelos lineares. Em tais modelos o comportamento futuro está governado pelas condições iniciais e pelos parâmetros. Com a presença da não-linearidade, Hicks conseguiu explicar as oscilações uniformes sem recorrer ao pressuposto de que o valor do coeficiente de aceleração é, por obra do acaso, igual à unidade e sem a necessidade de supor que o futuro está regido por algum conjunto de condições iniciais que colocaram o sistema em movimento há 100 anos.

A solução matemática do modelo de Hicks é calculada substituindo as equações (6) a (13) na equação (5) e resolvendo para a variável renda, Y_t , que formalmente pode ser expressa como:

$$I_t^i = \begin{cases} \lambda(Y_{t-1} - Y_{t-2}) & \text{se } \lambda(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \geq -a_t \\ -a_t & \text{se } \lambda(Y_{t-1} - Y_{t-2}) < -a_t \end{cases} \quad (14)$$

$$Y_t = \begin{cases} (b + \lambda)Y_{t-1} - \lambda Y_{t-2} + A_0(1+g)^t & \text{se } (b + \lambda)Y_{t-1} - \lambda Y_{t-2} + A_0(1+g)^t \leq B_0(1+g)^t \\ B_0(1+g)^t & \text{se } (b + \lambda)Y_{t-1} - \lambda Y_{t-2} + A_0(1+g)^t > B_0(1+g)^t \end{cases} \quad (15)$$

Com esses dois sistemas não-lineares já é possível calcular a trajetória da renda para diversos valores dos parâmetros. A simulação matemática através de um método recursivo permite a geração de uma série temporal para a variável endógena, renda. É importante lembrar que, uma vez determinados os valores dos parâmetros do modelo, a solução poderá ser transformada em uma equação

⁵⁸ Para uma explicação mais detalhada, veja DERNBURG e DERNBURG (1969) e BLATT (1983).

em diferenças finitas de ordem dois, que tem a forma de um modelo auto-regressivo⁵⁹.

2.3.2. Modelo de Metzler

Há evidências de que os ciclos econômicos não são do mesmo tipo. Existe muita controvérsia com relação à existência de ciclos de longa duração. Alguns economistas sugerem a existência de ciclos de 20 anos, outros relacionam ciclos de 50 anos e outros, ainda, estudam os ciclos de 100 anos, mas existe pouca unanimidade em relação a esses ciclos.

Entretanto, existe aceitação universal da existência de ciclos menores, de um ano e meio, e de três anos de duração. Estes ciclos estão relacionados com os investimentos voluntários, ou seja, em estoques, e podem ser de qualquer espécie.

Diferentemente do capital fixo de uma empresa, o nível de estoque pode ser alterado sem um plano de investimento previamente definido pela gerência da empresa. Dessa forma, METZLER (1941) estudou o comportamento do produto nacional quando os empresários procuravam manter um nível desejado de estoque. Esse autor percebeu que as flutuações econômicas estavam relacionadas com as decisões empresariais de curto prazo. Para ele, essas decisões estavam relacionadas com as expectativas empresariais sobre o comportamento futuro das suas vendas. Assim, como o investimento em capital fixo está, normalmente, relacionado a um plano estratégico, o investimento em estoque possui um componente não-planejado e não-intencional, de tamanho não-desprezível.

Esse mesmo autor desenvolveu um modelo de ciclos de estoques procurando mostrar que os esforços dos empresários em cumprir a meta de manter um nível de estoque desejado podem gerar ciclos econômicos. Ele demonstrou que as expectativas dos empresários com relação às vendas futuras são as principais responsáveis pelos ciclos de produção.

⁵⁹ O que é feito no próximo capítulo quando se modelar a série temporal da renda.

*O modelo de Metzler*⁶⁰

Metzler foi o primeiro a investigar, formalmente, as conseqüências dos esforços dos empresários em manter um nível desejado de estoque, através de variação na produção.

A produção total corrente é a soma entre a produção para consumo, que por sua vez é composto pela soma entre o que será destinado para as vendas e o que irá trazer os estoques para o nível desejado, e a produção de bens para investimentos.

As expectativas de vendas, U_t , são iguais às vendas realizadas no período anterior; assim, $U_t = C_{t-1}$. A função consumo não apresenta *lag* entre a variável dependente e a independente, $C_t = bY_t$, em que $0 < b < 1$. Metzler assumiu que os produtores desejam manter uma taxa constante entre os estoques e as vendas, k , conhecida como acelerador dos estoques. Como as vendas atuais serão conhecidas somente *ex post facto*, os produtores utilizam como *proxy* as expectativas de vendas, para o cálculo do nível desejado de estoques, \hat{Q}_t . Dessa forma, os investimentos em estoques são calculados por:

$$\hat{Q}_t - Q_{t-1} = kbY_t - Q_{t-1} \quad (16)$$

Se Q_{t-1} é o nível existente de estoque no final de período anterior, então:

$$Q_{t-1} = kbY_{t-2} - (C_{t-1} - U_{t-1}) \quad (17)$$

Assim, o investimento em estoque pode ser calculado substituindo (17) em (16) e transformando a equação final em função da renda, Y :

$$\hat{Q}_t - Q_{t-1} = (1+k)bY_{t-1} - (1+k)bY_{t-2} \quad (18)$$

A renda nacional é dada pela seguinte identidade:

⁶⁰ O modelo utilizado aqui toma como base o de GANDOLFO (1971).

$$Y_t = U_t + (\hat{Q}_t - Q_{t-1}) + I_0 \quad (19)$$

Sendo I_0 o investimento autônomo, substituindo (18) em (19), chega-se à seguinte equação de segunda ordem:

$$Y_t - (2 + k)bY_{t-1} + (1 + k)bY_{t-2} = I_0 \quad (20)$$

Estudando o comportamento da equação (5), pode-se perceber que a solução é estável se $b < \frac{1}{1+k}$. A sucessão dos sinais, +--, mostra que raízes reais

negativas não ocorrerão. Isso implica que $\frac{4(1+k)}{(2+k)^2} > \frac{1}{1+k}$, que é verdade para

$k > 0$. Assim, os movimentos possíveis para o modelo são:

Se $0 < b < \frac{1}{1+k}$, o movimento é oscilatório e convergente.

Se $b = \frac{1}{1+k}$, o movimento é oscilatório com amplitude constante;

Se $\frac{1}{1+k} < b < \frac{4(1+k)}{(2+k)^2}$, o movimento é oscilatório e divergente.

Se $b \geq \frac{4(1+k)}{(2+k)^2}$, o movimento é monótono e divergente.

A conclusão em relação ao modelo é de que, quanto menor for o valor de k , mais estável será o movimento, e quanto mais instável se tornam as expectativas empresariais, mais provável será a ocorrência de ciclos na economia.

A versão estocástica

Poder-se-ia abordar o mesmo modelo utilizando uma especificação mais probabilística; para isso, o modelo teria as seguintes equações :

$$C_t = bY_{t-1} \quad (21)$$

$$U_t = C_{t-1} \quad (22)$$

$$\bar{C}_t = U_t + (C_{t-1} - C_{t-2}) + e_t \quad (23)$$

$$I_t = I_0 \quad (24)$$

$$Y_t = \bar{C}_t + I_t \quad (25)$$

As únicas variáveis novas são e_t , que é um ruído branco, e \bar{C}_t , que representa a produção total de bens de consumo.

Substituindo as equações (21) e (22) em (23) e depois substituindo o resultado em (25), juntamente com (24), tem-se :

$$Y_t = 2bY_{t-1} - bY_{t-2} + e_t + I_0 \quad (25)$$

Rearranjando os termos da equação e observando que I_0 não influencia a trajetória da renda, tem-se:

$$Y_t - 2bY_{t-1} + bY_{t-2} = e_t + 1 \quad (26)$$

que possui raízes complexas conjugadas $\theta(\cos \alpha \pm i \cdot \sin \alpha)^{61}$, cuja solução é:

$$Y_t = \frac{I}{1-b} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^{j/2}}{\sqrt{1-b}} \sin(j+1)\alpha e_{t-j} \quad (27)$$

A equação (27), que é a solução da equação em diferenças finitas estocásticas (26), apresenta o mesmo comportamento da solução do modelo original de Metzler. A diferença básica está nas causas dos movimentos cíclicos: no primeiro, estava representada pelas expectativas dos empresários e, nestas, no ruído branco presente na equação (23). Essa variável aleatória, presente no modelo, representa as expectativas dos empresários em decidir qual deve ser a produção atual. Existe diferença profunda entre se adotar uma variável representando as expectativas dos empresários e se usar uma variável aleatória

⁶¹ Em que $\cos \alpha = \sqrt{b}$ e $\sin \alpha = \sqrt{1-b}$.

para esse fim. A diferença é que, no primeiro caso, existe uma *conjectura* econômica, explicando o comportamento das expectativas, ao passo que no segundo caso as expectativas são *ad hoc*.

O modelo de Metzler não-linear

A grande depressão fez surgir duas teorias: os modelos de Kalecki e de Hansen-Samuelson. Ambos são lineares e incapazes de explicar as continuações das oscilações. Frisch acrescentou os choques externos com a finalidade de resolver esse problema. Van der Pol já tinha demonstrado, na década de 20, que certas formas não-lineares geram oscilações contínuas. Seus estudos levaram ao desenvolvimento dos ciclos limitados. Bem mais tarde, na década de 60, Malinvaud provou que os processos harmônicos e, conseqüentemente, os ciclos limitados não são ergódicos, mas que todos os processos lineares são ergódicos⁶².

Suponha que a função de investimento seja do tipo senoidal, gerando o sistema $\dot{x} = f(x, t)$. A variável, x , tem um período $T_N = 2\pi/\omega_N$. Se a função de propagação tem um período $T_t = T_N$, o resultado é um *torus* com um ponto no estado de espaço retornando para qualquer posição uma vez em cada ciclo, gerando, assim, um modelo que apresente oscilações contínuas. Mais tarde, Rossler, Birkhoff e Shaw concluíram que um sistema determinístico, sob certas especificações, apresenta trajetórias imprevisíveis. Assim, pontos inicialmente perto um dos outros continuamente divergem ao longo do tempo. Poincaré generalizou o conceito de equilíbrio, de forma a abranger o conceito de ciclos limitados. Dessa forma, não existe nem um ponto fixo nem um movimento fixo. Essa generalização de Poincaré fez perder completamente o sentido tradicional de equilíbrio. Pode um sistema que nunca se repete, ao longo do tempo, ser considerado em equilíbrio?

O modelo de Metzler, quando foi desenvolvido, possuía sete variáveis endógenas e sete equações em diferenças finitas. Neste trabalho é apresentada

⁶² Esta prova só é encontrada na primeira edição de MALINVAULD (1966); nas outras edições já não aparecem. Gostaria de agradecer a Paul Davidson por ter mostrado essa diferença entre as edições.

uma versão condensada do modelo, uma vez que não são necessárias todas as sete equações para se definir a economia estudada por ele. Se Metzler tivesse acesso aos computadores digitais, provavelmente teria utilizado uma versão estocástica do modelo, que apresenta os mesmos resultados do modelo original, porém com roupagem mais moderna, utilizando as equações em diferenças finitas estocásticas, o que foi feito anteriormente. Essa modificação é um passo intermediário para o desenvolvimento de um modelo mais sofisticado, no qual o modelo de Metzler irá se modificar para poder captar flutuações não-lineares, tornando o modelo próximo aos modelos da Física Teórica, que apresentam trajetórias caóticas. Esse modelo final, que é estudado em detalhes neste capítulo, é importante no que se refere às implicações de sua modelagem econométrica, visto que os modelos harmônicos geram séries temporais estacionárias e não-ergódicas.

O modelo aqui adotado é uma variação do modelo inicial. O objetivo é o de não gerar os ciclos harmônicos, que foi o objetivo de Metzler, mas sim o de gerar movimentos irregulares de forma que seja quase inviável a utilização de técnicas estatísticas tradicionais.

O modelo desenvolvido torna o modelo não-linear de Metzler um modelo caótico com trajetórias imprevisíveis, no sentido econométrico, caso não haja informação *a priori* sobre a especificação do modelo. Ou seja, torna-se impossível prever o comportamento futuro do modelo utilizando o comportamento passado.

A primeira equação mostra a taxa de crescimento do produto como função dos estoques real e desejado:

$$\frac{dQ}{dt} = a\beta Q_t - \beta S_t - eZ_t \quad (28)$$

A segunda equação mostra a taxa de crescimento do estoque como função da produção e da demanda efetiva:

$$\frac{dS}{dt} = Q_t + aS_t \quad (29)$$

A última equação mostra o efeito perverso dos déficits do governo sobre a economia:

$$\frac{dZ}{dt} = d + Z_t(Q_t - c) \quad (30)$$

Essas três equações formam um sistema não-linear com trajetórias limitadas. Esse modelo é apresentado e discutido no capítulo 3, demonstrando a dificuldade de se prever a trajetória futura do sistema sem conhecimento prévio dos parâmetros.

2.4. Procedimentos

2.4.1. Comentário geral

A Teoria Econômica tem como pilar básico de análise os conceitos de linearidade, estabilidade, equilíbrio e estacionariedade. Esses conceitos estão intrinsecamente relacionados com a capacidade preditiva dos modelos econométricos e da modelagem matemática em economia, cuja técnica básica são as equações diferenciais e em diferenças finitas. Um outro conceito deveria ser acrescentado à lista dos pilares da teoria: o de ergodicidade. Apesar de ser pouco conhecida e, conseqüentemente, pouco estudada, a ergodicidade está presente em quase todos os trabalhos científicos. Implícita ou explicitamente, todos os modelos econométricos assumem que as séries econômicas são ergódicas.

Apesar da grande dificuldade em se testar a hipótese de ergodicidade nas séries históricas, os economistas continuam a trabalhar com modelos ergódicos, como se não houvesse conseqüência nenhuma em tratar séries não-ergódicas como se fossem ergódicas. Possivelmente, a própria estrutura lógica e metodológica das hipóteses agrava essa situação. Esta falácia lógica, como é chamada na metodologia das ciências, ocorre principalmente nas construções dos silogismos, que são usados para a dedução lógica de um estudo econômico. A ilustração a seguir torna clara a argumentação aqui exposta. Partindo de um

silogismo hipotético: “Se A é verdadeiro, então B é verdadeiro”, se for possível a prova de que A é verdadeiro, então se pode concluir com certeza de que B é verdadeiro. Isso é conhecido como uma *conclusão lógica*. O ponto importante da hipótese é a veracidade da relação de causalidade entre as premissas A e B e a forma como a premissa A é provada. Esses dois pontos são importantes porque elas conservam a lógica de encadeamento, que nos assegura que a conclusão será verdadeira.

Continuando com o exemplo anterior, o que aconteceria se fosse dividida a primeira afirmação em duas? Então a argumentação ficaria: “Se A é verdadeiro”, “então B é verdadeiro”. À primeira vista parece não fazer muita diferença, mas agora existe a necessidade de afirmar o antecedente ou, em outras palavras, é necessário provar a primeira para que se possa assegurar a veracidade da segunda. O que aconteceria se fosse possível testar e, conseqüentemente, afirmar a segunda: “B é verdadeiro”? Assim, logicamente, nada se pode concluir sobre A; contudo, uma saída não aceita, do ponto de vista da metodologia da ciência, seria afirmar a relação entre os silogismos e, a partir da comprovação de B, tentar argumentar em direção de A, o que é conhecido como *falácia de argumentação*, i.e., a tentativa de argumentação com base na verdade do conseqüente.

A solução encontrada para esse problema foi dada por POPPER (1959), na primeira metade do século XX. Segundo ele, da veracidade do conseqüente nada se pode concluir do antecedente, mas da não-veracidade do conseqüente muito se pode dizer do antecedente. Utilizando o exemplo anterior: “Se A é verdadeiro”, “então B é verdadeiro”, o que se pode dizer de A, se for concluído que B é falso? Nesse caso, pode-se afirmar com certeza absoluta que A é falso. Esse tipo de argumentação é conhecido por *falsificacionismo*. O que Popper estava querendo dizer⁶³ é que, caso haja uma relação de causalidade entre duas afirmações na qual é impossível provar o antecedente, se houver uma forma de se testar o conseqüente, este teste só vai ser útil se ela for falsa.

⁶³ Isso está implícito na argumentação de Popper, que estava mostrando a contestabilidade das hipóteses científicas.

Aplicando essa análise em economia, pode-se gerar a seguinte relação: “Se o mundo é ergódico, então um modelo linear é uma boa aproximação estatística”. Isso quer dizer que: caso se prove que o mundo é ergódico, então se pode, com segurança, gerar modelos lineares para as séries econômicas; entretanto, se um modelo linear for uma boa aproximação, no sentido estatístico, de um evento econômico, nada se pode dizer com relação à hipótese da ergodicidade. No entanto, caso se refaça o silogismo anterior, de forma que seja possível de ser testada, ou seja, A: “Uma função não-ergódica é usada como modelo inicial”; e B: “Um modelo linear preserva a mesma estrutura do modelo inicial, apesar de ser uma boa aproximação, no curto prazo, no sentido de aderência estatística, do modelo teórico inicial”⁶⁴. Assim, se uma série temporal for gerada a partir de um modelo não-ergódico, então se conclui que os modelos lineares não preservam a mesma estrutura do modelo inicial.

O objetivo deste trabalho foi o de explorar essas duas afirmativas. Um modelo contínuo não-ergódico é estudado, mostrando as suas peculiaridades. Logo após, um outro modelo não-ergódico é apresentado, só que, neste caso, em tempo discreto, é gerada uma série temporal. Um modelo linear também foi construído, a partir dos dados fornecidos pelo modelo original. Testes estatísticos foram aplicados e a sua estrutura teórica será estudada. A conclusão a que se chega é que a estrutura teórica foi violada, levando à conclusão de que a premissa B é falsa e, conseqüentemente, torna A falsa.

2.4.2. Procedimento básico

Em razão da complexidade de se testar a hipótese do trabalho, foi necessário o desenvolvimento de um conjunto de procedimentos específicos, que serão apresentados a seguir.

Primeiramente, foi desenvolvido o modelo de Metzler, que foi transformado em um modelo não-ergódico e contínuo, uma vez que a

⁶⁴ Um outro teste que, aparentemente, parece ser possível é: “Se uma série é não-estacionária, então ela não é ergódica”, uma vez que não-estacionariedade é condição suficiente da não-ergodicidade. Assim, seria suficiente observar os testes de raiz unitária nas séries macroeconômicas.

especificação original era em tempo discreto e linear. Por ser esse um sistema dinâmico, é possível estudar a dinâmica do modelo utilizando um Estado de Espaço, ou Plano de Fase, que representa a trajetória que um sistema passa ao longo do tempo. Cada ponto no Estado de Espaço representa um estado do sistema em um tempo determinado. Como ilustração, qual seria o plano de fase de um pêndulo? O gráfico bidimensional, velocidade e posição, teria o formato de uma espiral em direção à origem, indicando que, à medida que o tempo passa, a velocidade irá diminuir até atingir zero, e à medida que a velocidade cai, a posição do pêndulo se aproximará de zero. Se este pêndulo recebe impulso novo a cada instante, i.e., o pêndulo nunca iria atingir velocidade zero, a sua representação gráfica seria a de um círculo com centro na origem. Esse exemplo é importante porque ilustra também o conceito de ciclo limitado, de extrema importância no estudo da ergodicidade, visto que todo ciclo limitado é um exemplo de um sistema não-ergódico.

Por ser um modelo caótico e contínuo, é impossível a geração de um modelo econométrico; assim, a importância do modelo está no estudo da sua sensibilidade à escolha dos parâmetros.

Para cada simulação foi apresentado o Estado de Fase e, no final, foi apresentada uma série temporal para duas das variáveis, para que possa ser percebida a dificuldade econométrica de estimar o conjunto de parâmetros correto.

O segundo passo foi construir o modelo de Hicks, que é não-ergódico, podendo ser estacionário ou não. As duas versões são apresentadas. Uma vez que o modelo é em diferenças finitas, ele se torna passível de ser testado com as técnicas usuais da econometria.

Três versões do modelo de Hicks foram simuladas. A primeira gera uma série temporal estacionária para a variável dependente renda, Y_t , com tamanho $n = 200$. Com esses dados um modelo auto-regressivo foi estimado. Os parâmetros do modelo estimado foram comparados com os do modelo original, mostrando que eles levam a conclusões diametralmente opostas ao do modelo original, provando, dessa forma, que a prova do conseqüente não é suficiente para se

aceitar o antecedente, quando se tratar de um modelo não-ergódico. No entanto, a refutação do conseqüente garante que o antecedente também é falso, de acordo com o que foi visto no começo desta seção.

As outras duas versões do modelo de Hicks gerarão séries não-estacionárias: na primeira existe o conhecimento prévio da não-ergodicidade, ao passo que na segunda esse conhecimento não existe. O procedimento se repete com relação à primeira versão. A mesma refutação do conseqüente ocorre, e o conhecimento *a priori* levou a um erro menor do que a versão sem conhecimento prévio.

Esse procedimento foi criado com base nos pressupostos da lógica científica, devido à impossibilidade de se gerar esse teste com dados reais. Assim, o alcance deste trabalho não pode ir além do estudo das implicações da hipótese da ergodicidade.

3. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

3.1. Comentário geral

Como foi relatado no capítulo anterior, na seção Procedimentos, o que se pretende aqui é gerar um silogismo⁶⁵ que possa ser demonstrado como verdadeiro ou refutado como falso. O silogismo que se trabalhou foi:

A partir de um modelo não-ergódico inicial, tem-se:

- A: Um modelo ergódico é criado como aproximação do modelo inicial.
- B: O modelo ergódico apresenta, ou seja, preserva, a mesma estrutura do modelo inicial.
- Conclusão: Os modelos ergódicos podem ser usados como aproximações dos modelos não-ergódicos.

É importante fazer o seguinte comentário: mesmo se o modelo desenvolvido for uma aproximação, no curto prazo, ele não pode ser considerado uma boa aproximação, uma vez que, dependendo da localização do ponto final da série temporal na órbita (trajetória) do modelo inicial no estado de espaço, qualquer modelo será uma boa aproximação.

⁶⁵ Pelos padrões da filosofia da ciência, dever-se-ia chamar de silogismo dialético, uma vez que tais proposições são apenas prováveis ou de silogismo hipotético.

O objetivo deste capítulo foi o de explorar esse silogismo. Um modelo contínuo não-ergódico foi simulado, mostrando as suas peculiaridades. Logo após, um outro modelo não-ergódico foi apresentado, só que, neste caso, em tempo discreto, foi gerado para ele uma série temporal. Um modelo auto-regressivo também será construído, a partir dos dados fornecidos pelo modelo original. Testes estatísticos foram aplicados e a sua estrutura teórica foi testada. O resultado esperado das simulações é: A violação da estrutura teórica levará à conclusão de que a premissa B é falsa, refutando, conseqüentemente, a conclusão do silogismo.

3.2. Os modelos econômicos

Os dois modelos que foram simulados aqui são os de Metzler e o de Hicks. A versão do modelo de Metzler que foi analisada é contínua e não-linear. Uma vez que os sistemas dinâmicos contínuos são mais simples de serem estudados, foi utilizado este modelo para explorar as características dos modelos não-ergódicos. Uma aproximação econométrica não foi desenvolvida com base na série temporal aqui apresentada, já que a modelagem econométrica em tempo contínuo é bem mais complexa do que em tempo discreto (modelo de Hicks). O modelo discreto, nesse caso, apresenta a mesma estrutura não-ergódica, ou seja, ciclos limitados e séries estacionárias. A iteração de um modelo discreto gera uma série temporal, que pode ser modelada com as técnicas econométricas. Dessa forma, utilizou-se o modelo contínuo para estudar a estrutura dos modelos não-ergódicos, enquanto o modelo discreto foi reservado para o teste do silogismo.

3.2.1. O modelo de Metzler não-linear

Metzler, na década de 40, desenvolveu um modelo para explorar as conseqüências das decisões empresariais, com respeito ao nível de estoque, nos ciclos econômicos. O modelo original foi tratado no capítulo anterior, bem como

algumas de suas variações. O modelo estudado nesta seção foi a versão não-linear e contínua.

A forma diferencial do modelo de Metzler pode ser formulada como se segue. A taxa de variação do produto, y'_0 , é uma proporção fixa, β , da diferença entre o estoque atual e o estoque desejado, y_1^* , que é um proporção fixa, α , do produto. A taxa de variação dos estoques é o produto menos a demanda, que é uma proporção fixa, δ , do produto. O comportamento dos investimentos, y_2 , é o responsável pela não-linearidade do modelo. O que o modelo expressa é que, durante uma expansão do produto, os investimentos são encorajados, a capacidade de produção é expandida e os investimentos em estoques aumentam mais rapidamente do que o produto, gerando uma desaceleração eventual dos investimentos, precipitando em um declínio da demanda e chegando ao fim o período de *boom* da economia.

As equações do modelo são:

$$\begin{cases} y'_0 = \alpha\beta y_1 - y_2 \\ y'_1 = (1-d)y_0 \\ y'_2 = \mu + y_2(y_0 - c) \end{cases} \quad (31)$$

em que⁶⁶ $\alpha\beta = \varphi = 1,0$; $1 - \delta = 0,16$; $\mu = 0,4$; $c = 8,5$.

Os valores de contorno para o sistema são $y_0 = 1$ e $y_1 = y_2 = 0$. A solução para esse sistema está representada na Figura 1⁶⁷.

⁶⁶ Os valores, dos parâmetros do modelo, foram escolhidos de forma a tornar o modelo mais sensível às suas variações.

⁶⁷ É importante lembrar que os eixos de um sistema de equações são as próprias equações diferenciais que compõem o modelo. Assim, cada equação no modelo (31) representa uma dimensão do plano de fase (Figura 1).

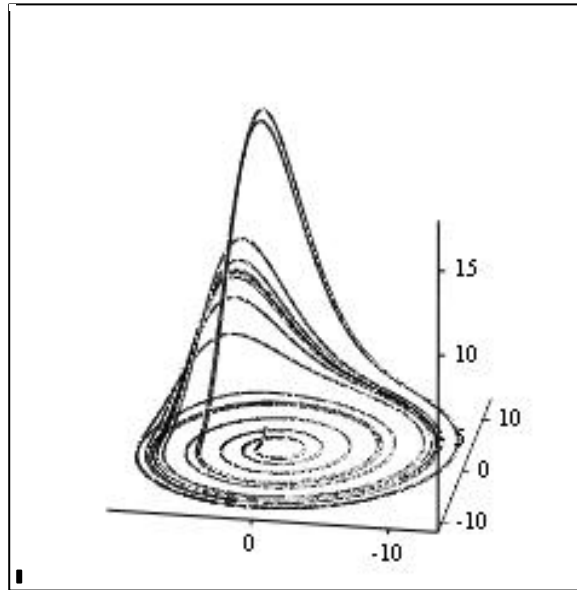


Figura 1 - Plano de fase para o modelo original.

A Figura 1 mostra a trajetória do sistema (31), para os parâmetros especificados. O sistema gera uma trajetória estável e limitada durante algumas iterações, como se observa pela base da Figura 1. Ao longo do tempo, os investimentos começam a entrar em ação e o sistema é levado para fora do equilíbrio, como se observa pela calda da figura. Dez mil iterações foram calculadas, e durante todo o tempo pôde-se perceber que não existe possibilidade de o sistema retornar ao equilíbrio anterior, pois o processo é auto-alimentador, isto é, quando as variáveis interagem no sistema, levam-no a propagar o efeito para todos os períodos futuros, mostrando a dependência temporal, característica esta dos sistemas não-ergódicos.

Outra característica do sistema (31) é a sua sensibilidade às variações nos parâmetros. Quaisquer variações nos valores dos parâmetros do modelo originais geram grandes alterações na dinâmica do sistema. A trajetória do sistema se alteraria se os parâmetros $1-\delta$ e μ variassem em 5,9 e 2,5%, respectivamente. Chamando de modelo modificado esse novo conjunto de valores dos parâmetros do modelo:

$$\alpha\beta = \varphi = 1,0$$

$$1 - \delta = 0,17$$

$$\mu = 0,39$$

$$c = 8,5$$

pode-se perceber a diferença da trajetória (Figura 2).

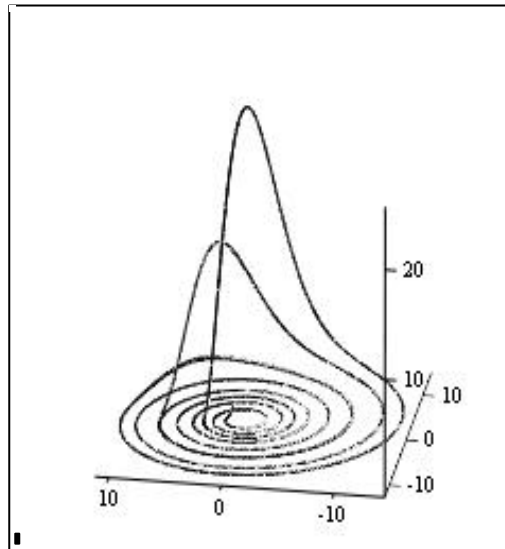


Figura 2 - Plano de fase para o modelo modificado.

A Figura 2 mostra que os investimentos governam o comportamento do sistema, quando este se afasta do equilíbrio. Antes de mostrar como as séries temporais são sensíveis a variações dos parâmetros, foi calculada mais uma simulação, que foi chamada de modelo modificado 2. As variações nos parâmetros foram maiores: $\alpha\beta$ variará em 5,0%, enquanto μ variará em 5,2% e c variará em 5,9%. Assim, os parâmetros irão apresentar os seguintes valores:

$$\alpha\beta = \varphi = 0,95$$

$$1 - \delta = 0,16$$

$$\mu = 0,38$$

$$c = 8,0$$

A Figura 3 mostra a dinâmica do modelo modificado 2.

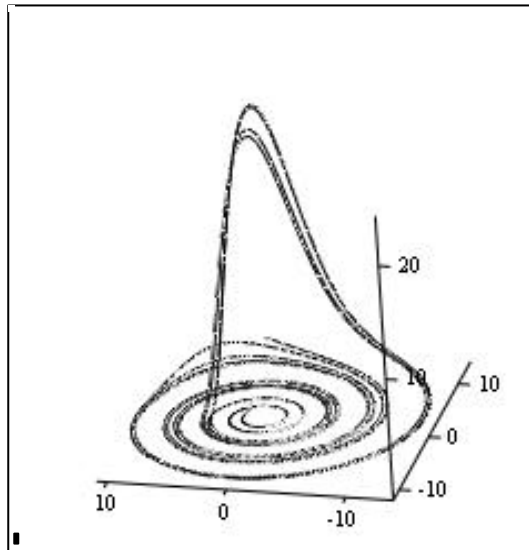


Figura 3 - Plano de fase para o modelo modificado 2.

As Figuras 1, 2 e 3 mostram que pequenas variações nos parâmetros, como as ocorridas com os modelos modificado e modificado 2, geram distorções nas trajetórias, principalmente em relação à influência dos investimentos nos ciclos econômicos, o que é condizente com as conclusões do modelo de Metzler. A diferença é que Metzler gerava os ciclos através da interação do multiplicador keynesiano e do acelerador dos investimentos, que entram em ação quando ocorria um choque externo nas expectativas empresariais, ao passo que aqui os próprios parâmetros do modelo geram os ciclos, sem a necessidade de geração de ciclos externos, o que condiz com as observações dos ciclos econômicos.

A questão que surge é: com um modelo como este, gerando uma série temporal, com um $n = 100$, é possível gerar parâmetros condizentes com essas trajetórias? Ou, em outras palavras, um modelo econométrico geraria os valores precisos para os parâmetros, já que qualquer variação nos seus valores daria origem a uma nova trajetória, diferente da que se estava estudando

originalmente? As Figuras 4 e 5 mostram as séries temporais para a variável y_0 , para o modelo original (org), modificado (mod) e modificado 2 (mod2).

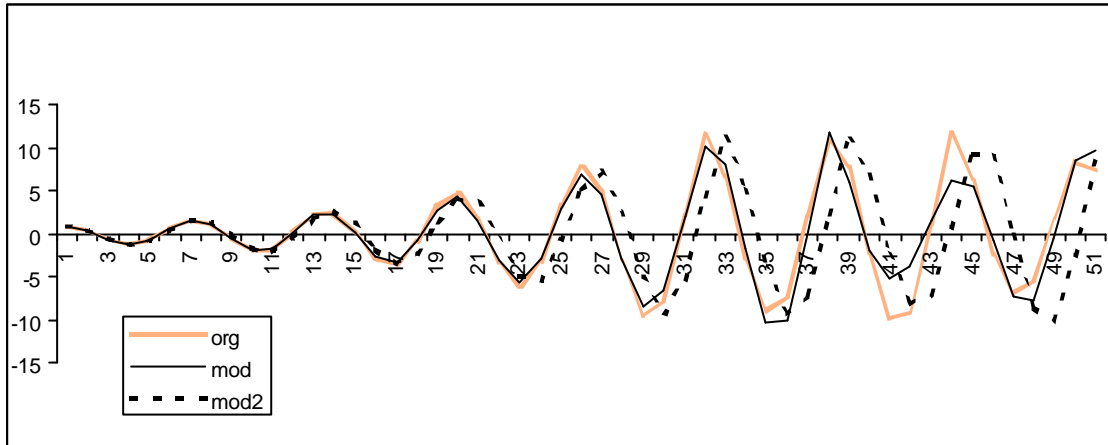


Figura 4 - Trajetória no tempo para a variável Y_0 , para os modelos original, modificado e modificado 2.

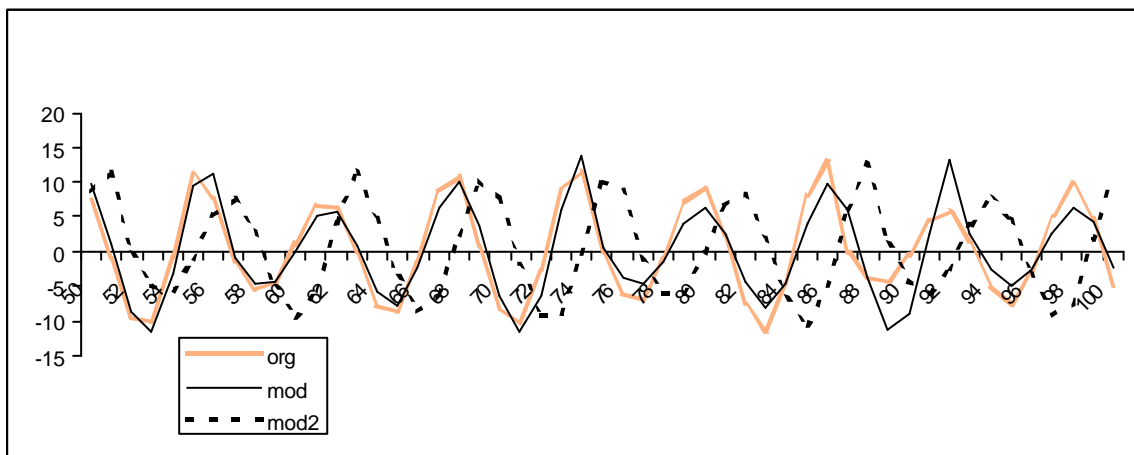


Figura 5 - Trajetória no tempo para a variável Y_0 , para os modelos original, modificado e modificado 2 (continuação).

Pode-se observar que as séries geradas pelos três modelos apresentam, quase que perfeitamente, os mesmos valores para $t = 0$ até $t = 20$. As séries alternam os seus picos, entre $t = 27$ e $t = 49$. Em $t = 38$, o modelo modificado assume o maior valor, em $t = 45$ o modelo original apresenta o maior pico, enquanto em $t = 50$ o modelo modificado assumiu o valor mais alto. De $t = 51$ até $t = 100$, os modelos começam a apresentar diferentes frequências, o que é esperado, uma vez que o modelo de Metzler tem solução harmônica.

Fica claro, na Figura 5, que qualquer modelo econométrico não irá calcular os parâmetros do modelo com eficiência suficiente para gerar ciclos coincidentes com a série original. Em outras palavras, se a série que se deseja estimar for o modelo original, um erro de estimativa de 2,5%, em um dos parâmetros do modelo, como o que aconteceu com o modelo modificado, irá gerar um modelo que apresentará amplitudes diferentes. Se o erro de estimação for de 5% em todos os parâmetros, o modelo estimado apresentará frequência e amplitude diferentes, como pode ser visto comparando o modelo original com o modelo modificado 2, ocorrendo, até mesmo, uma reversão dos ciclos a partir de $t=70$.

As Figuras 6 e 7 apresentam as séries temporais para a variável Y_1 , para o conjunto de parâmetros utilizado para gerar os modelos original, modificado e modificado 2. As séries apresentadas para esta variável se comportam exatamente igual às séries da variável Y_0 .

Em termos econômicos, isso implica que a essência dos ciclos econômicos reside na influência dos investimentos sobre a renda, Y_0 , e sobre os estoques, Y_1 . Em termos das Figuras 1, 2 e 3, os investimentos regem o comportamento da calda, na dinâmica do modelo. Em outras palavras, a versão econométrica do modelo de Metzler é incapaz de captar a dinâmica dos investimentos sobre a economia, isto é, sem se ter alguma informação prévia sobre os valores dos parâmetros originais do modelo, o que é impossível, pois a teoria do investimento não conseguiu evoluir, nesse sentido, ao longo dos 60 anos desde a criação da econometria na década de 40, como se pode ver em LEESON (1998).

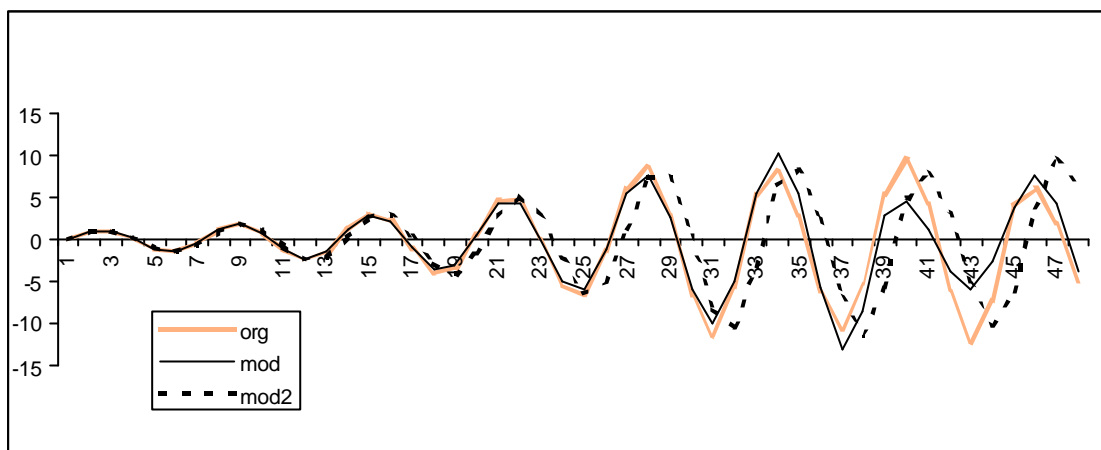


Figura 6 - Trajetória no tempo para a variável Y_1 , para os modelos original, modificado e modificado 2.

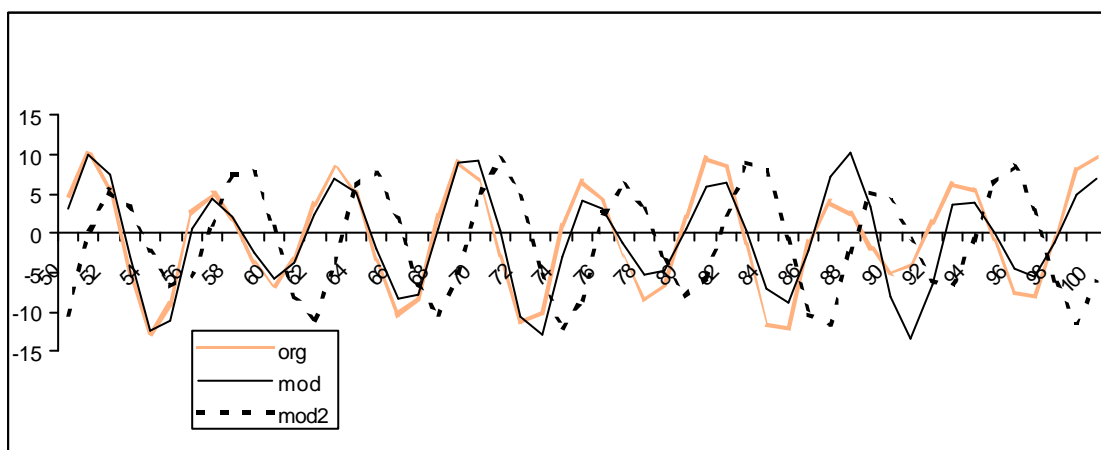


Figura 7 - Trajetória no tempo para a variável Y_1 , para os modelos original, modificado e modificado 2 (continuação).

O modelo de Metzler desenvolvido aqui é um caso particular do modelo de Rössler desenvolvido para estudar as turbulências em termodinâmica. Assim como vários outros modelos caóticos, o modelo de Metzler não-linear consegue explicar as flutuações econômicas utilizando um modelo endógeno de crescimento, i.e., sem a necessidade de utilizar choques externos para explicar as

flutuações, que sempre geram choques que se dissipam ao longo do tempo, exigindo assim novos choques na economia. O modelo aqui desenvolvido mostra que a sua própria estrutura é suficiente para gerar flutuações recorrentes e indefinidas, o que é condizente com a Teoria Keynesiana e a Teoria Marxista. Este tipo de modelo, gerando ciclos endógenos, aparentemente não é utilizado, ainda, como alternativa aos modelos atuais do crescimento endógeno, uma vez que AGHION e HOWITT⁶⁸ (1998) não abordam, e nem mesmo mencionam, esse tipo de modelo.

Os resultados mais importantes obtidos do modelo linear (ML), original de Metzler⁶⁹, e da sua especificação não-linear (MNL), apresentada nesta seção, são os seguintes:

- No ML, as flutuações dependem da relação entre a propensão a consumir, b , e o acelerador dos estoques, k , já que estes são fornecidos fora do modelo. Assim, dependendo dos valores dos parâmetros, b e k , o modelo apresenta ciclos divergentes, convergentes ou constantes, podendo estes ciclos ser monotônicos ou explosivos. Já no MNL a própria especificação do modelo gera uma infinidade de movimentos, uma vez que os parâmetros são escolhidos ou quando os valores de contorno são determinados.
- O MNL é extremamente sensível a qualquer variação, por menor que seja, em qualquer um dos parâmetros. Esse comportamento a longo prazo, como pode ser visto nas Figuras 1 a 7, reflete a sensibilidade, ou complexidade, da economia para variações imperceptíveis⁷⁰ nos valores das suas variáveis. Em outras palavras, em um modelo não-ergódico, e até mesmo nos modelos ergódicos não-lineares, as estimações dos parâmetros são impossíveis, se não houver qualquer conhecimento prévio destes.
- A especificação de um modelo ergódico, como aproximação de um modelo não-ergódico, perde o seu sentido, já que nenhum modelo linear ergódico pode

⁶⁸ Este livro é considerado a referência na área de crescimento endógeno.

⁶⁹ Apresentado no capítulo 2.

⁷⁰ Imperceptível está relacionado com a incapacidade de mensurar, precisamente, os valores das variáveis econômicas e, conseqüentemente, a impossibilidade de se gerar uma estimativa exata dos parâmetros a serem estimados.

capturar as características dos modelos intrinsecamente não-lineares⁷¹. Quando se depara com esse tipo de modelo, como o apresentado nesta seção, a determinação econométrica se torna inútil, visto que a própria especificação do modelo quanto os seus parâmetros podem gerar trajetórias instáveis a longo prazo.

- Um modelo econométrico se torna viável apenas quando existe conhecimento prévio sobre a especificação do modelo e dos seus parâmetros.

Na próxima seção, estuda-se o modelo de Hicks. Este modelo é importante, pois permite mostrar como um modelo linear pode ser transformado em um modelo não-ergódico e não-linear, acrescentando apenas uma restrição de trajetória. Vários pontos sobre a restrição dos modelos econométricos são ilustrados com o modelo de Hicks.

3.2.2. Modelo de Hicks de ciclos de negócios

No capítulo anterior mostrou-se a solução matemática para este modelo; dessa forma, pode-se gerar, utilizando o fato de que este modelo é recursivo, uma série temporal para a variável dependente, Y_t . O que foi feito nesta seção foi gerar duas séries temporais para a variável Y_t , cada uma de um conjunto diferente de valores para os parâmetros do modelo. Os dois conjuntos de valores para os parâmetros foram escolhidos de forma a gerar o máximo de sensibilidade possível, uma vez que se deseja obter duas séries temporais diferentes, uma estacionária e a outra não, a fim de investigar as implicações da não-ergodicidade na modelagem econométrica.

⁷¹ Os modelos caóticos podem ser usados para estudar o comportamento de um modelo não-ergódico. Entretanto, uma vez que os modelos econométricos são incapazes de trabalhar com modelos caóticos, essa afirmação se torna correta.

$$\text{mod 1} \left\{ \begin{array}{l} b = 0,69578 \\ k = 1,58478 \\ g = 0,81\% \\ A_0 = 60 \\ a_t = -180 \\ B_0 = 300 \end{array} \right. \quad \text{mod 2} \left\{ \begin{array}{l} b = 0,76 \\ k = 2 \\ g = 2,5\% \\ A_0 = 60 \\ a_t = -200 \\ B_0 = 300 \end{array} \right.$$

As Figuras 8 e 9 mostram as trajetórias da renda ao longo do tempo, levando em consideração os parâmetros dos modelos 1 e 2, respectivamente.

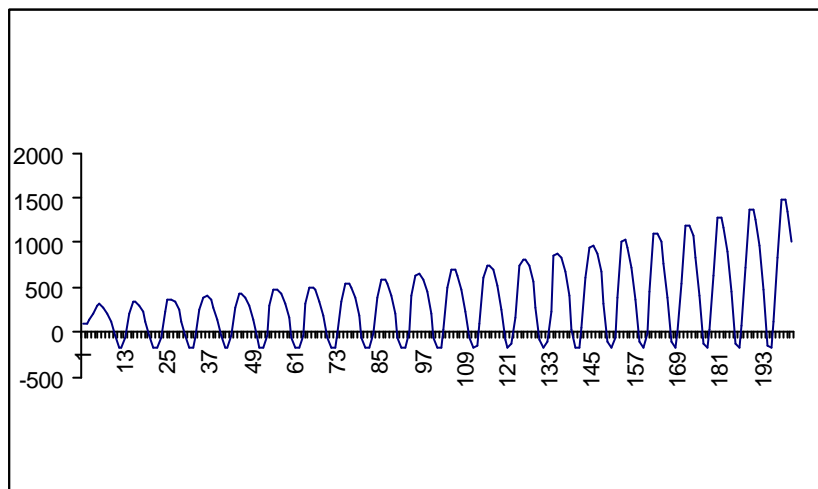


Figura 8 - Trajetória da renda, Y, utilizando o modelo modificado 1.

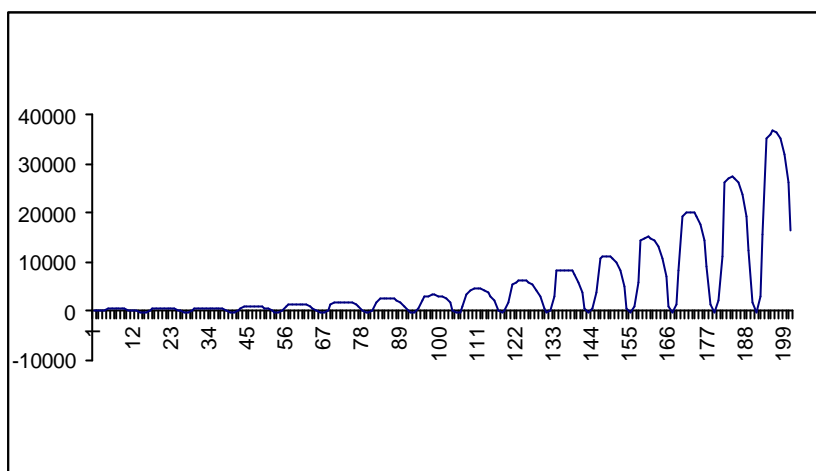


Figura 9 - Trajetória da renda, Y , utilizando o modelo modificado 2 (continuação).

Observando as Figuras 8 e 9, pode-se perceber que, no mod1, a série temporal que foi gerada é estacionária, enquanto o mod2 gerou uma série temporal não-estacionária. É importante lembrar que as duas séries são não-ergódicas, pois a solução do modelo apresenta ciclo limitado, ou, em outras palavras, um processo harmônico.

Uma vez que as séries apresentadas anteriormente são não-ergódicas, retoma-se a pergunta central deste trabalho: Quais as implicações econométricas de se modelar um processo não-ergódico como se fosse ergódico? Quais são as implicações econométricas? Para responder a essas perguntas, é necessário criar um modelo econométrico que se ajuste a esses dados.

A única especificação que se pode adotar, de acordo com a solução matemática do modelo, é:

$$Y_t = (C_0 + I_0) + (b + \kappa)Y_{t-1} - \kappa Y_{t-2} + u_t \quad (32)$$

Na qual as seguintes relações se aplicam: $\beta_0 = C_0 + I_0$, $\beta_1 = b + \kappa$, $\beta_2 = -\kappa$ e $\hat{b} = \beta_1 + \beta_2$.

Mod1 – Série estacionária e não-ergódica

O modelo econométrico é:

$$Y_t = 117,4853 + 1,496839 \cdot Y_{t-1} - 0,862597 \cdot Y_{t-2}$$

(9,588) (39,185) (-22,148)

$$R^2 = 0,90 \quad \text{Akaike Criterion} = 12,6489 \quad F = 887,0722$$

Utilizando o modelo especificado, podem-se calcular os valores para os dois parâmetros mais importantes de (32). Assim, tem-se que $\hat{b} = 0,634242$ e $\hat{\gamma} = 0,862597$, o que representa um desvio em relação aos valores reais de 8,8%, para a propensão marginal a consumir, b , e de 45,57% para o acelerador dos investimentos, k .

Como se pode observar, o modelo estimado é estatisticamente aceitável e, conseqüentemente, bom para se estudar a dinâmica da economia. A implicação mais importante é que o modelo econométrico estimado tornou o modelo estruturalmente estável, dado que o parâmetro b , responsável pela estabilidade do modelo, foi bem estimado, o mesmo não ocorrendo com as estimativas do acelerador, que está situado na região em que torna os ciclos amortecidos e convergentes ao valor de equilíbrio, o que não é possível de ser concluído com o modelo original. O que está ocorrendo é que o modelo polinomial e ergódico não pode gerar valores de κ acima da unidade, devido ao tipo de movimento cíclico que iria ocorrer, pois os ciclos explosivos e tendendo ao infinito não são uma realidade para a série temporal apresentada; assim, a melhor aproximação para um ciclo limitado, ou para uma função harmônica, é a geração de ciclos estáveis e amortecidos.

Esse exemplo levanta algumas considerações importantes, vistas a seguir. Se os métodos econométricos geram modelos estáveis, então não faz sentido estudar a estabilidade dos modelos no tempo. BLATT (1983) afirma que os modelos, em geral, apresentam trajetórias estáveis e que tendem para o equilíbrio, mesmo em situações em que a instabilidade é evidente. As evidências geradas com o modelo de Hicks corroboram as conclusões de Blatt. Outro ponto importante é que os testes estatísticos mostram que o modelo especificado

anteriormente apresenta valores significativos, mas, como se percebe, as conclusões levam a uma direção quase que diametralmente oposta. Assim, a seguinte questão surge: *Um modelo econométrico é um bom teste de uma teoria?* Em outras palavras, a construção um modelo econométrico com base em uma teoria econômica qualquer, que gere boas previsões de curto prazo, pode ser considerada como evidência para a validação daquela teoria? Segundo alguns teóricos, a resposta é afirmativa. De acordo com Friedman, toda teoria que gere previsões acertadas a curto prazo é uma teoria correta⁷².

O parâmetro b (Propensão Marginal a Consumir), que possui a propriedade de levar a economia ao ponto de equilíbrio, foi ajustado razoavelmente bem. Enquanto o parâmetro κ (Acelerador dos Investimentos), que gera, teoricamente, toda instabilidade no modelo, foi estimado de forma errada, levando o modelo, e as suas conclusões, em direções não condizentes com o modelo original, isto é, os dados gerados eram de uma série harmônica que se repetiria ao longo do tempo, o modelo econométrico estimou um valor, para esse parâmetro, que gerava oscilações amortecidas ao longo do tempo. Segundo DAVIDSON (1982), isso acontece por causa da ergodicidade do modelo. Em parte, este trabalho corrobora essas conclusões, porém ainda é cedo para se afirmar, já que os modelos ergódicos não-lineares podem gerar dados que confundem os modelos econométricos e até passam em testes estatísticos, como é o caso da função logística, desenvolvida em GODINHO (1998). A não-linearidade é um dos fenômenos mais complexos da matemática moderna, e seus efeitos não estão claros na economia, uma vez que os econométricos não estão preocupados com a exploração de modelos que, aparentemente, são impraticáveis. Segundo Campbell⁷³:

“The possibility that a relatively simple set of nonlinear deterministic equations can generate the kind of complexities we see in financial markets is tantalizing, but it is of little interest if we cannot recover these equations with any degree of precision. Moreover, the impact of statistical sampling errors on a system with sensitive dependence to initial conditions makes dynamical systems theory even less practical. Of course, given the rapid pace at which this field is advancing, these reservations may be much less serious in a few years.”

⁷² FRIEDMAN (1953).

⁷³ CAMPBELL e MACKINKEY (1997).

Mod2 – Série não-estacionária e não-ergódica

A série temporal gerada com o modelo 2 é uma série não-estacionária; assim, duas possibilidades surgem: a do conhecimento *a priori* de que o modelo é não-ergódico e do não-conhecimento *a priori* de que o modelo é não-ergódico.

Hipótese 1 – Conhecimento a priori da não-ergodicidade

Com base no conhecimento de que o modelo original é não-ergódico, o pesquisador sabe que não é possível de se tirar a diferença da série, que é o procedimento econométrico em série temporal para se estacionarizar uma série. Assim, o modelo estimado sem tirar as diferenças ficaria:

$$Y_t = 587,3743 + 1,5496009 \cdot Y_{t-1} - 0,656497 \cdot Y_{t-2}$$

(3,046) (27,760) (-11,474)

$$R^2 = 0,92 \quad \text{Akaike Criterion} = 18,3301 \quad F = 1200,02$$

Utilizando este modelo, podem-se calcular os valores para os dois parâmetros mais importantes de (32). Assim, tem-se que $\hat{b} = 0,8931$ e $\hat{\alpha} = 0,656497$, o que representa um desvio em relação aos valores reais de 28,3% para a propensão marginal a consumir, b , e de 58,57% para o acelerador dos investimentos, k . Quando se compara esse resultado com o resultado do modelo 1, é fácil perceber que aqui os parâmetros estimados levam o modelo estimado para o equilíbrio rapidamente, o que não ocorre e nem mesmo existe no modelo original. Esse resultado já era esperado, por dois motivos: o primeiro, devido à não-ergodicidade, que invalida a Lei dos Grandes Números, tornando o modelo tendencioso; e o segundo problema está ligado à não-estacionariedade da série, que gera estimativa tendenciosa. O que aconteceria se a série fosse estacionarizada antes de estimar os parâmetros?

Hipótese 2 – Não-conhecimento a priori da não-ergodicidade

Se o pesquisador não souber *a priori* que o modelo é não-ergódico, a primeira providência que irá tomar é a de tirar as diferenças da série até que ela

se torne estacionária, o que acontece com a primeira diferença para o modelo 2. Dessa forma, o modelo estimado, excluindo as diferenças, ficaria:

$$Y_t = 62,0427 + 0,736432 \cdot Y_{t-1} - 0,277803 \cdot Y_{t-2}$$

(0,366) (10,594) (-3,983)

$$R^2 = 0,38 \quad \text{Akaike Criterion} = 18,3904 \quad F = 59,22$$

Essa nova estimativa apresenta os seguintes valores para os parâmetros do modelo: $\hat{b} = 0,4586$ e $\hat{k} = 0,2778$. Esses valores representam um desvio em relação aos valores reais de 34,08% para a propensão marginal a consumir, b , e de 82,47% para o acelerador dos investimentos, k .

Como $\beta_0 < t$, uma nova estimação poderia ser feita, e o novo resultado é apresentado a seguir.

$$Y_t = 0,757639 \cdot Y_{t-1} - 0,277619 \cdot Y_{t-2}$$

(10,849) (-3,937)

$$R^2 = 0,39 \quad \text{Akaike Criterion} = 18,4124 \quad F = 125,30$$

As novas estimativas dos parâmetros do modelo são: $\hat{b} = 0,48$ e $\hat{k} = 0,2776$, os quais representam um desvio em relação aos valores reais de 31,01% para a propensão marginal a consumir, b , e de 82,48% para o acelerador dos investimentos, k .

Pode-se perceber com esses resultados que, quando se tira a diferença de uma seqüência não-ergódica sem conhecer a ergodicidade *a priori*, as estimativas tendem a agravar os parâmetros do modelo, b e k . Isso ocorre porque as diferenças⁷⁴ só podem ser tiradas quando se estiver certo de que a série com que se está trabalhando possui medida invariante, o que é impossível saber sem o conhecimento *a priori* do modelo original.

As estimativas errôneas dos parâmetros do modelo, b e k , levam a conclusões falaciosas do ponto de vista econômico, uma vez que a propensão

⁷⁴ Tirar as diferenças é conhecido na Teoria Ergódica como *Shift*, que mostra que um deslocamento temporal preserva a estrutura topológica, ou seja, os dois conjuntos são homomórficos.

marginal a consumir irá interagir com o coeficiente de aceleração - efeito Samuelson -, gerando a estabilidade da economia (para esses valores específicos); isso implica que, ao longo do tempo, a economia atingirá o equilíbrio estacionário, o que é impossível de se inferir a partir dos modelos modificados 1 e 2.

O resultado mais importante é que os modelos econométricos não geram estimativas confiáveis quando o modelo original for não-ergódico, o que ocorre quando se estudam os ciclos econômicos, visto que estes, geralmente, geram funções harmônicas ou ciclos limitados, corroborando a opinião de Keynes, de que os modelos econométricos não irão conseguir explicar os ciclos, já que estes dependem da função investimento, a qual é altamente instável, como relatado em KEUZENCAMP (1995). No modelo de Hicks, a decisão de investimento está representada pelo acelerador dos investimentos, k , que se mostrou o problema mais sério gerado pela não-ergodicidade.

Mesmo em modelos ergódicos, mas que apresentem instabilidade estrutural⁷⁵, o problema de geração de parâmetros confiáveis para se utilizar, não somente para previsão mas também para se estudar o fenômeno ao longo do tempo, torna-se quase impossível de ser superado. Dessa forma, a ênfase maior deveria ser colocada em se confirmar se o modelo original é ergódico ou não e, se for, deve-se provar a estabilidade estrutural do modelo, pois, na ausência da ergodicidade e da estabilidade estrutural, torna-se a estimação econométrica sem um propósito claro.

Vários trabalhos exploratórios da eficiência preditiva dos modelos têm sido realizados nos últimos anos, mas poucos abordaram o problema da instabilidade estrutural, que está ligada aos modelos caóticos, e muito menos suas relações com a ergodicidade, enquanto a grande maioria tentou gerar modelos, ou modificações, nas técnicas de estimação. No entanto, a questão não respondida é se os modelos são necessários ou não. Segundo GRANGER (1986), não existe evidência direta. Ainda de acordo com Granger, os *Naive Time Series Models*,

⁷⁵ Sobre esse problema, GODINHO (1998) apresenta um modelo ergódico, mas com instabilidade estrutural.

como os ARIMA, são sem dúvida os mais eficientes a curto prazo, mas o problema com esses modelos é que eles não encerram nenhuma teoria, sendo completamente *ad hoc*.

Assim, a fim de evitar esse erro, o pesquisador deverá, primeiramente, observar se o evento que se irá modelar é ergódico ou não, isto é, se se faz necessário estabelecer a veracidade da premissa maior, em outras palavras, da afirmação A, antes de se buscar um modelo “ideal” que se ajuste aos dados observados, ou, o que é o mesmo, de se aceitar a premissa menor, ou a afirmação B. Somente depois disso se pode estabelecer como certa a conclusão do silogismo.

4. RESUMO E CONCLUSÕES

Um dos pontos mais importantes de discordância entre as Escolas Neoclássica⁷⁶ e Pós-Keynesiana⁷⁷ é a visão, não compartilhada, de como os eventos econômicos são gerados. Segundo os neoclássicos, os fenômenos estudados, em economia, são resultados de uma distribuição de probabilidade, que não é conhecida *a priori*, mas que pode ser inferida através de uma análise dos dados passados. Do ponto de vista matemático, o mundo real é ergódico, gerando, assim, fenômenos que seguem algum processo estocástico desconhecido, deixando para o cientista social apenas a tarefa de tentar desvendar que tipo de processo é esse.

As conseqüências para a teoria econômica são muitas. A primeira, e talvez a mais importante, é que o tempo cronológico e o tempo histórico são iguais. Assim, os processos estudados são de alguma forma estacionários, i.e., eles se repetem ao longo da série. A segunda é em relação ao conceito de imprevisibilidade. De acordo com a teoria⁷⁸ das expectativas racionais, risco e incertezas são iguais; em outras palavras, as duas dependem de uma distribuição

⁷⁶ Representada por Milton Friedman e Robert Lucas.

⁷⁷ Representada por Paul Davidson e Hyman Minsky.

⁷⁸ A palavra correta seria a conjectura, pois ainda não se pode falar sobre uma teoria das expectativas racionais, uma vez que esse ponto não foi solucionado.

de probabilidade que rege o resíduo de se especificar, erroneamente, o fenômeno estudado. A terceira consequência está relacionada com as técnicas, matemáticas e estatísticas, que são utilizadas no estudo da economia. As equações diferenciais, a programação dinâmica, o controle ótimo estocástico, são todos importados da Física e da Engenharia, em que os fenômenos são bem comportados. Por exemplo, a órbita dos planetas em torno do Sol segue uma trajetória constante; assim, faz sentido a utilização das equações diferenciais. Quando se estuda o comportamento de uma partícula, sob determinadas situações, as equações diferenciais estocásticas, ou o controle ótimo estocástico, passam a ser os instrumentos matemáticos mais importantes, uma vez que o conjunto Ω de todos os comportamentos possíveis para a partícula é conhecido, assim como suas probabilidades.

Essa visão de mundo, compartilhada pelos neoclássicos, é de que a sociedade capitalista é uma máquina perfeita e, sendo assim, previsível. Essa visão é compartilhada por todas as ciências modernas e está relacionada com nossa herança Iluminista, que moldou a nossa forma de ver o mundo. Seria um erro dizer a herança Iluminista, já que é possível perceber essa idéia nas obras dos Pré-Socráticos e Socráticos, mas a discussão das ligações entre os pensadores gregos e os iluministas não é de relevância para este trabalho, cabendo aos filósofos responder a essa pergunta⁷⁹.

Para os Pós-Keynesianos, o mundo não se comporta de acordo com uma distribuição de probabilidade, conhecida ou não, pois o futuro não pode ser extrapolado do passado, simplesmente porque o futuro ainda não existe. Quando os Pós-Keynesianos dizem isso, eles não estão negando a observação do passado, pois eles sabem que o passado não guarda, hermeticamente, os segredos da distribuição que rege o futuro, e sim que o passado esconde no seu interior as forças que irão transformar o futuro. Os agentes na economia são dinâmicos, agindo e reagindo de forma diferente uma da outra, uma vez que a percepção do mundo irá determinar a forma de se interpretá-lo. Assim, a própria evolução da

⁷⁹ Essa resposta é afirmativa, na visão deste autor, uma vez que Kant, Descartes e Newton estavam cientes das obras dos gregos, principalmente Kant.

história gera variações nos eventos. Uma prova disso é a completa insatisfação nos estudos dos ciclos econômicos de longa duração, uma vez que nas séries é difícil prever o tipo de tendência que está nelas contido. Portanto, o mundo se comporta de forma não-ergódica.

A não-ergodicidade implica que, em parte, se conhece o passado através dos dados obtidos. Como Marshall reconheceu, a complexidade do mundo pode gerar explicações diferentes, utilizando até o mesmo conjunto de dados. Um bom exemplo é a explicação dada para o fim da hiperinflação alemã no pós-guerra, dada por Thomas Sargent, e a explicação dada pelos inercialistas brasileiros⁸⁰.

Outras implicações estão relacionadas com as incertezas; por ser impossível “ver” o futuro, não faz sentido dizer que risco e incertezas são iguais. Qual modelo financeiro, no mundo, poderia prever que as bolsas do mundo inteiro iriam cair em média 5 pontos percentuais em meados de setembro de 2001? Essa informação não estava contida nas séries históricas do passado, porque um evento que nunca aconteceu antes estava ocorrendo. Uma variável aleatória, representando o risco de ocorrência de futuros eventos não contidos no modelo original, não seria capaz, a não ser por sorte, de mostrar reversão na trajetória da bolsa. A destruição do World Trade Center em Nova York, usando as palavras de Keynes, é um evento que nem uma teoria nem um modelo estatístico possa antecipar; *simplesmente não se sabe*.

Dessa forma, a visão de mundo do cientista irá determinar a abordagem teórica dos eventos econômicos que serão utilizados. Conseqüentemente, a própria teoria econômica se modificará. Torna-se essencial, para as Ciências Econômicas, responder a essa pergunta. A prova definitiva e matemática para essa questão não existe, principalmente pelo teorema de Göedel, o qual garante que a própria prova matemática deverá partir de um conjunto de axiomas, que por si só não são passíveis de serem provados. Em outras palavras, só se pode provar se for possível usar, como ponto de partida, um conhecimento

⁸⁰ O debate sobre o processo de hiperinflação tem várias explicações e todas utilizam a Alemanha como uma evidência que corrobora essas “teorias”.

incontestável e que não seja passível de ser provado como axioma⁸¹. Portanto, uma prova não-passível de ser rejeitada deverá ser avaliada. O mundo deve ser considerado como ergódico ou como não-ergódico? Essa resposta é dada a seguir.

Devido às limitações metodológicas e científicas, a hipótese da ergodicidade não pode ser rejeitada formalmente nem mesmo aceita como correta. No entanto, algumas evidências foram exploradas neste trabalho, que levam à seguinte conclusão: a hipótese de que as séries temporais são originárias de processos ergódicos não se sustenta teoricamente. Dessa forma, as Ciências Econômicas deveriam explorar novas abordagens científicas para a modelagem de eventos não-ergódicos.

Este trabalho mostrou que a aceitação dessa hipótese gera um erro lógico na argumentação dos resultados. Aceitar que o futuro seja regido por uma distribuição de probabilidade imutável, que gera dados estacionários, não condiz com a realidade, uma vez que vários artigos em Macroeconomia mostram que as séries possuem raiz unitária, i.e., não são estacionárias, sendo uma evidência de que a função geradora do evento não seja ergódica. A seqüência óbvia da modelagem econométrica, quando esta sustenta a hipótese da ergodicidade, é a de admitir que nos primeiros dois momentos a função é ergódica, já que essa é a única maneira de justificar a diferenciação da série, com o fim de torná-la estacionária. São muitas as limitações que levam à conclusão dos trabalhos a tender para as conclusões de técnicas, como a *rule of thumb*.

Foi apontada ainda neste trabalho a complicação de analisar as séries estatísticas, pois o desenvolvimento de estruturas algébricas é complexo de ser feito com as séries econômicas. O conceito que se pode aceitar como pertencente a um conjunto formado pelo subconjunto dos dados obtidos é o de distância, i.e., o conceito de medida. Esse conceito é fácil de ser provado, visto que ele pode ser considerado um subconjunto dos números reais.

⁸¹ Na realidade, Gödel dizia que todo sistema que utilize como um axioma os números inteiros não é consistente de ser provado.

A existência de séries temporais longas causa um outro problema sério, pois a estrutura da economia se modifica no tempo; assim, o axioma da modelagem econométrica - os momentos de primeira e segunda ordens são ergódicos - já não pode ser considerado como um axioma e sim como uma hipótese, o que significa que ela tem de ser provada antes de ser invocada na construção de um modelo econométrico.

Alguns teóricos, para fugir desse problema, afirmaram que, se um modelo for bem ajustado, é uma indicação de que a teoria está correta; no entanto, o modelo de Hicks mostrou que alguns processos não-ergódicos geram dados que, quando utilizados pela econometria, fornecem modelos bem ajustados, mas não verdadeiros. Pode-se inferir do exemplo que, sem conhecimento *a priori* do modelo original, um modelo bem ajustado não tem condição de provar, ou validar, qualquer teoria. Esses modelos podem até acertar algumas previsões de curtíssimo prazo, porém é limitado em mostrar as reversões de tendência, mesmo a curto prazo.

Uma outra conclusão do trabalho é em relação aos conceitos de incertezas, risco e tempo. A Teoria Econômica que trata das decisões sob incertezas é completamente permeada com o axioma da ergodicidade, uma vez que se aceita sem prova. Dessa forma, de que maneira a não-ergodicidade iria mudar as abordagens sobre decisões estratégicas, uma vez que a essência de economia é a tomada de decisão? Esse é um ponto que precisa ser abordado.

Respondendo à hipótese do trabalho sobre quais seriam as implicações da violação da hipótese para a modelagem econômica, pode-se afirmar que, uma vez que esta hipótese seja violada, os modelos econométricos não levarão a conclusões diferentes das que o pesquisador chegaria sem o modelo; no caso de as duas conclusões serem diferentes, a probabilidade de que a conclusão que está sustentada pelo modelo seja a incorreta é bem maior.

Concluindo, a aceitação da ergodicidade como verdadeira leva a resultados contraditórios, devendo-se rejeitar essa hipótese. Como consequência, deveriam ser pesquisadas novas técnicas de modelagem e novas teorias que tratem as incertezas nos modelos econômicos, além de novas abordagens para a

teoria da tomada de decisões. Uma outra alternativa seria a de gerar um teste para a ergodicidade, utilizando uma análise da estabilidade dos momentos de primeira e segunda ordens e compará-las com o comportamento dos momentos de ordem superior. Assim, estes seriam os desdobramentos naturais desta tese.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGHION, P., HOWITT, P. **Endogenous growth theory**. Cambridge: The MIT Press, 1998. p. 694.
- AGOSTINHO. The confessions. **Enciclopaedia Britannica**, v. 16, p. 784, 1990.
- ARISTÓTELES. The works of Aristotle. **Enciclopaedia Britannica**, v. 8, p. 699, 1990.
- ARNOLD, V.I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. **Russian Mathematics Surveys**, n. 18, p. 85-191, 1967.
- BILLINGSLEY, P.A. **Ergodic theory and information**. Huntington: Kreiger Publisher, 1978. 256 p.
- BLATT, J.M. **Dynamic economic systems**. New York: M.E. Sharpe, 1983. 386 p.
- BROCK, A.B., LIMA, P.J.F. Nonlinear time series, complexity theory, and finance. In: MADDALA, C.R. **Handbook of statistics volume 14**. New York: North Holland, 1996.
- CAMPBELL, J.K., MACKINKEY, A.W. **The econometrics of financial markets**. Princeton: Princeton University, 1997. 879 p.
- CARVALHO, F.J.C. Keynes on probability, uncertainty and decision making. **Journal of Post Keynesian Economics**, v. 9, p. 66-81, 1988.

- CORNFELD, I.P., FORMIN, S.V., SINAI, Y.G. **Ergodic theory**. New York: Springer Verlag, 1982. p. 543.
- DAVIDSON, P. Rational expectations: a fallacious foundation for studying crucial decision-making processes. **Journal of Post Keynesian Economics**, v. 5, p. 182-198, 1982.
- DAVIDSON, P. **Post keynesian macroeconomic theory**. Vermont: Edward Elgar, 1994. 309 p.
- DERNBURG, T.F., DERNBURG, J.D. **Análisis macroeconômico: uma introducción a la estática y dinámica comparativas**. Barcelona: EUNSA, 1969. 328 p.
- EINSTEIN, A. The foundation of the general theory of relativity. **Annalen der physik**, v. 49, p. 111-164, 1916.
- EINSTEIN, A. **Relativity: the special and the general theory**. Chicago: Encyclopedia Britannica, 1956. p. 53.
- FERNANDEZ, P.J. **Medida e integração**. Rio de Janeiro: Impa, 1976. p. 196.
- FISHER, F.M. **Disequilibrium foundations of equilibrium economics**. Cambridge: Cambridge University, 1983. 290 p.
- FISHMAN, G.S. **Spectral methods in econometrics**. Cambridge: Harvard University, 1969. 207 p.
- FRIEDMAN, M. **Essays in positive economics**. Chicago: University of Chicago, 1953. 225 p.
- GANDOLFO, G. **Mathematical methods and economic dynamics**. Amsterdam: North-Holland, 1971. p. 511.
- GEORGESCU-ROEGEN, N. **The entropy law and the economic process**. Cambridge: Harvard University, 1971. p. 460.
- GNEDENKO, B.V. **The theory of probability**. Moscow: Mir Publisher, 1969. p. 405.
- GODINHO, M.T. Dinâmicas complexas em modelos econômicos simples. **Reuna**, v. 1, n. 7, p. 31- 44, 1998.
- GOODWIN, R.M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. **Econometrica**, v. 19, p. 1-17, 1951.

- GOODWIN, R.M. **Chaotic economic dynamics**. Oxford: Oxford University, 1992. 137 p.
- GRANGER, C.W.J. **Forecasting in business and economics**. San Diego: Academic Press, 1986. 338 p.
- HAMILTON, J.D. **Time series analysis**. Princeton: Princeton University, 1994. p. 1087.
- HICKS, J.R. **A contribution to the theory of trade cycle**. Clarendon: Oxford, 1950. 247 p.
- HICKS, J.R. Some questions of time in economics. In: TANG, A.S., WESTFIELD, F.M., WORLEY, J.S. (Eds.). **Evolution, welfare, and time in economics**. Lexington: Health, 1976. p. 320.
- HICKS, J.R. **Causality in economics**. New York: Basic Books, 1979. 250 p.
- HUNT, E.K. **História do pensamento econômico**. Rio de Janeiro: Campus, 1978. 541 p.
- KANT, I. The critique of pure reason. **Enciclopaedia Britannica**, v. 39, p. 614, 1990.
- KATZNER, D.N. Time, ignorance, surprise and economic decisions: a comment on Williams and findlay's risk and the role of failed expectations in an uncertain world. **Journal of Post Keynesian Economics**, v. 7, p. 48-57, 1986.
- KATZNER, D.N. **Time, ignorance, and uncertainty in economic models**. Ann Arbor: The University of Michigan, 1998. p. 486.
- KEUZENCAMP, H.A. Keynes and the logic of econometric method. **Research Paper**, Tilburg University, Sept. 1995.
- KEYNES, J.M. **The general theory of employment, interest, and money**. New York: Harcourt, Brace & World, 1936. 403 p.
- KEYNES, J.M. **Collected writings of J.M. Keynes**. London: Moggridge D.E. and Johnson, 1973a. v. 7, 560 p.
- KEYNES, J.M. **Collected writings of J.M. Keynes**. London: Moggridge D.E. and Johnson, 1973b. v. 8, 600 p.
- KHINCHIN, A.Y. Correlation theory of stationary stochastic processes. **Uspekhi Mat. Nauk**, v. 5, 1938.

- KNIGHT, F. **Risk, uncertainty and profit.** New York: Riverside, 1921. p. 250.
- KOLMOGOROV, A.N. On analytical methods in probability theory. **Uspekhi Mat. Nauk**, v. 5, 1938.
- LAWSON, T. Probability and uncertainty in economic analysis. **Journal of Post Keynesian Economics**, v. 9, p. 38-65, 1988.
- LEESON, R. **The ghosts I called I can't get rid of now: the Keynes-Tinbergen-Friedman-Phillips critique of keynesian macroeconomics.** Murdoch University, 1998. (Mimeogr.).
- LORENZ, E.N. Deterministic non-periodic flow. **Journal of Atmospheric Science**, v. 20, p. 130-141, 1963.
- MALINVAULD, E. **Statistical methods of econometrics.** Chicago: Rand McNally & Company, 1966. p. 920.
- MANÉ, R. **Teoria ergódica.** Rio de Janeiro: Impa, 1983. 388 p.
- MARSHALL, A. **Princípios de economia: tratado introdutório.** São Paulo: Abril Cultural, 1982. 272 p. (Coleção Os Economistas, 6).
- MASCOLLEL, A. **The theory of general economic equilibrium: a differentiable approach.** Cambridge: Cambridge University, 1985. p. 373.
- METZLER, L.A. The nature and stability of inventory cycles. **Review of Economics and Statistics**, v. 23, p. 113-129, 1941.
- NEWHOUSE, S. **Dynamical systems.** Birkhauser: Progress in Mathematics 8, 1980. p. 124.
- NIKAIDO, H. **Convex structures and economic theory.** New York: Academic Press, 1968. p. 346.
- PAPOULIS, A. **Probability, random variables and stochastic processes.** New York: McGraw-Hill, 1991. p. 666.
- PLATÃO. Dialogues. **Enciclopaedia Britannica**, v. 6, p. 813, 1990.
- POLLOCK, D.S.G. **The algebra of econometrics.** New York: John Wiley & Sons, 1977. p. 358.
- POPPER, K.R. **A lógica da pesquisa científica.** São Paulo: Cultrix, 1959. p. 567.

- POSSAS, M.L. **Dinâmica da economia capitalista**. São Paulo: Brasiliense, 1987. p. 352.
- PRIGOGINE, I. **From being to becoming: time and complexity in the physical sciences**. New York: W.H. Freeman and Company, 1980. p. 357.
- PUGACHEV, V.S. **Introducción a la teoría de las probabilidades**. Moscow: Mir Publisher, 1969. p. 320.
- SAMUELSON, P.A. **Foundations of economics analysis**. Atheneum: Harvard University, 1947. 447 p.
- SAMUELSON, P.A. What classical and neo-classical monetary theory really was. **Canadian Journal of Economics**, v. 1, n. 1, p. 1-15, 1968.
- SARGENT, T.J. Autoregressions, expectations and advice. **American Economic Review**, v. 78, n. 2, p. 408-415, 1984.
- SHACKLE, G.L.S. **Uncertainty in economics**. Cambridge: Cambridge University, 1955. 145 p.
- SHACKLE, G.L.S. **Time in economics**. Amsterdam: North-Holland, 1958. 235 p.
- STOCKEY, N.L., LUCAS, R.E. **Recursive methods in economic dynamics**. Cambridge: Harvard University, 1997. p. 587.
- VERCELLI, A. **Methodological foundations of macroeconomics: Keynes and Lucas**. Cambridge: Cambridge University, 1991. 269 p.
- WILLIAMS, E.E., FINDLAY, M.C. Risk and the role of failed expectations in an uncertain world. **Journal of Post Keynesian Economics**, v. 7, p. 32-47, 1986.