

THIAGO MARTINS MELO

**ALGUMAS PROPRIEDADES DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS CONFINADAS A
GUIAS DE ONDAS CONSTITUÍDOS POR INTERFACES DE ISOLANTES
TOPOLÓGICOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

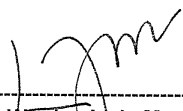
VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
2011

THIAGO MARTINS MELO

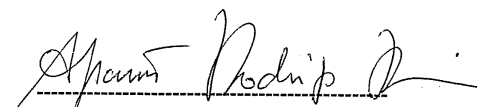
ALGUMAS PROPRIEDADES DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS CONFINADAS
A GUIAS DE ONDAS CONSTITUIDOS POR INTERFACES DE ISOLANTES
TOPOLÓGICOS

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do
Programa de Pós-Graduação em
Física Aplicada, para obtenção do
título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de julho de 2011.



Prof. Winder A. de Moura Melo
(Orientador)



Prof. Afrânio Rodrigues Pereira
(Coorientador)



Profa. Leticia Ribeiro de Paiva

Agradecimentos

Primeiramente agradeço minha mãe e a meu avô, pelo apoio incondicional, sem vocês eu jamais teria conseguido. A minha mulher, por tudo que passamos juntos e ainda vamos passar (sem você também seria impossível). Vocês três são meu porto seguro, meu poço de confiança, sinceridade, honestidade e conduta, só mesmo poesia para descrever o amor e a gratidão que sinto por vocês, minhas palavras nunca serão o bastante.

Ao Professor Winder A. Moura-Melo, pela orientação, formação acadêmica, pela paciência, compreensão e por tudo que aprendi ao longo desses anos na pesquisa e em sala de aula, sua maneira de enxergar e interpretar a Física é algo que tentarei sempre carregar comigo e ensinar também, muito obrigado.

Aos colegas de grupo de pesquisa Davidson R. Viana e Jakson M. Fonseca, pela colaboração na pesquisa e ajuda no trabalho.

Aos professores Afrânio R. Pereira e Daniel H. T. Franco pela co-orientação, a todos os professores que eu tive ao longo do mestrado e aos funcionários do Departamento de Física.

Agradeço também, aos meus amigos que me acompanham desde o início da graduação até os dias atuais e as amizades que eu fiz durante o mestrado, são tantos que citar nomes seria injusto.

A CAPES e CNPQ pelo suporte financeiro à pesquisa.

Sumário

Unidades, notações e convenções.....	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Capítulo 1 Introdução e Motivação.....	1
Capítulo 2 Classificação Topológica de Fases Eletrônicas.....	5
2.1 O Efeito Hall Quântico Inteiro e o Invariante TKNN.....	7
2.2 Grafeno e o Isolante topológico Z_2	13
2.3 Isolantes Topológicos Bidimensionais (isolante de spin Hall quântico) e Tridimensionais.....	17
Capítulo 3 O Efeito Magneto-Elétrico Topológico e Algumas de suas Manifestações..	22
Capítulo 4 Propagação de Ondas Eletromagnéticas Confinadas a Isolantes Topológicos.....	27
4.1 Guia de onda retangular constituído por paredes de isolantes topológicos.....	28
4.2 Guia de onda tipo <i>slab</i> constituído por paredes de isolantes topológicos.....	36
Capítulo 5 Conclusões e Perspectivas Futuras.....	46
Referências Bibliográficas.....	49
Apêndice A – Algumas Propriedades de Ondas Eletromagnéticas Confinadas a Guias de Onda Usuais.....	51
Apêndice B – Guia de Onda Retangular.....	53
Apêndice C – Obtenção dos Modos TE e TM e das Soluções do Guia de Onda Retangular Através de um <i>Slab</i>	55

Unidades, notações e convenções

- São utilizadas unidades gaussianas no que o texto se refere a efeito magneto-elétrico topológico e propagação de ondas confinadas a isolantes topológicos. Neste sistema de medidas, as constantes eletromagnéticas μ e ε são adimensionais, a unidade de medida de comprimento é o cm e os campos elétrico e magnético possuem mesma unidade.
- Derivadas parciais espaciais e temporais de ordem n serão denotadas pela notação compacta: $\frac{\partial^n}{\partial_{x^n, y^n, z^n, t^n}} = \partial_{x, y, z, t}^n$.
- Quaisquer outras convenções serão explicadas ao longo do texto.

Resumo

MELO, Thiago Martins, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2011. **Algumas propriedades de ondas eletromagnéticas confinadas a guias de onda constituídos por interfaces de isolantes topológicos.** Orientador: Winder Alexander de Moura Melo. Co-orientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Daniel Heber Theodoro Franco.

Nos últimos anos o conceito de ordem topológica tem sido largamente utilizado para classificar fases eletrônicas da matéria como, por exemplo, fases que apresentam efeito Hall quântico. Este efeito se manifesta em materiais com forte interação spin-órbita levando a fases denominadas isolantes topológicos. Um isolante topológico, assim como um isolante comum, possui bandas de valência e de condução separadas por um gap de energia, mas suporta estados de borda sem gap de energia em suas extremidades. Neste trabalho, revisamos as principais propriedades destes novos materiais, bem como, sua estrutura de bandas e a classificação topológica que os distingue dos isolantes triviais. Devido as superfície destes materiais exibirem estados sem gap energético, estes levam à uma condutividade Hall não-nula nas bordas, onde ocorre a manifestação do efeito magneto-elétrico topológico, que por sua vez, é descrito por um termo que acopla os campos elétrico e magnético, juntamente com uma espécie de campo de axion θ que assume valor π para isolantes topológicos e é nulo para isolantes triviais. O efeito magneto-elétrico topológico, modifica algumas propriedades fundamentais na propagação de ondas eletromagnéticas como: a rotação de Kerr e Faraday, ângulo de Brewster. Além de ser possível obter a quantização da resposta eletromagnética em unidades de constantes fundamentais como a constante de estrutura fina. Nesta dissertação, estudamos os efeitos de confinamento de ondas eletromagnéticas a guias de onda cujas paredes são constituídas de isolantes topológicos. Primeiramente abordamos o guia de onda retangular, obtendo as equações de onda, as componentes transversas dos campos elétrico e magnético e a dinâmica espacial das componentes axiais dos campos neste sistema. Posteriormente estudamos em mais detalhes um tipo específico de guia onda denominado *slab*, que por sua vez, simplifica a análise da propagação das ondas eletromagnéticas devido à simplicidade de algumas equações neste sistema, e as relacionamos com as condições de contorno não-triviais que se originam do efeito magneto-elétrico topológico. Em seguida comparamos os resultados obtidos com alguns guias onda usuais bem conhecidos na literatura.

Abstract

MELO, Thiago Martins, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2011. **Some properties of electromagnetic waves confined to wave guides made of topological insulators interfaces.** Adviser: Winder Alexander de Moura Melo. Co-advisers: Afrânio Rodrigues Pereira and Daniel Heber Theodoro Franco.

In recent years the concept of topological order has been widely used to classify electronic phases of matter, like phases that present the quantum Hall effect. This effect manifests itself in materials which present strong spin-orbit interaction, leading to phases named topological insulators. A topological insulator, as well as a common insulator, have the valence and conduction bands separated by an energy gap, but allow border states with no energy gap at both ends. In this dissertation, we review the main properties of such materials, as their band structure and the topological classification that distinguishes them from trivial insulators. Because the surface of these materials exhibit states with no energy gap, it leads to a non-zero Hall conductivity at the boundaries, where the manifestation of topological magneto-electric effect occurs, which, in turn, is described by a term that couples the electric and magnetic fields, with a kind of axion field θ which has a value equal π for topological insulators and a null value for non-topological insulators. The magneto-electric topological effect changes some fundamental properties in the electromagnetic waves propagation, as the Kerr and Faraday rotation and the Brewster's angle. Besides being possible to obtain the electromagnetic response quantization in terms of fundamental constants units, like the fine structure constant. In this dissertation, we studied the effects of electromagnetic waves confinement to waveguides, whose walls are made of topological insulators. First we deal with the rectangular waveguide, obtaining the wave equations, the transverse components of the electric and the magnetic fields and the spatial dynamics of the field axial components in this system. Later, we studied in a more detailed way a specific type of waveguide, called *slab* waveguide, which simplifies the propagation of electromagnetic waves analysis due to the simplicity of some equations in this system, and relate them to the non-trivial boundary conditions, originated from the topological magneto-electric effect. Finally, we compare the results with some well-known waveguides from the literature.

Capítulo 1

Introdução e Motivação

As leis físicas que governam sistemas fortemente correlacionados como sistemas de matéria condensada (matéria nos estados líquido e sólido), assim como os fenômenos que emergem destes, podem diferir muito dos princípios da física de partículas elementares e ou sistemas compostos de poucas partículas. Uma das principais diferenças reside na variedade de vácuos que formam o plano de fundo para as chamadas excitações coletivas (quasipartículas) em matéria condensada, como os estados de superfície oriundos da ordem topológica que vigora nas fases que vamos apresentar nesta dissertação, caracterizando os isolantes topológicos [1]. Em sistemas que apresentam fortes correlações, algumas excitações de baixa energia podem apresentar propriedades exóticas como os monopolos que emergem em alguns sistemas de spins [2].

Enquanto que a física de partículas elementares demanda cada vez mais de escalas de altas energias para ser explorada, a maioria das aplicações e objetos de estudo em física da matéria condensada (FMC) concentra-se na dinâmica do sistema no regime de baixas energias. Além de tornar plausíveis comprovações experimentais de previsões teóricas e aplicações tecnológicas. Há uma tendência à universalidade do comportamento desses sistemas em baixas temperaturas, tal comportamento universal independe dos detalhes microscópicos dos materiais (ou vácuo particular do sistema), o que possibilita unificar alguns princípios que regem fenômenos coletivos na teoria quântica de sistemas de muitos corpos, nesses regimes [2].

Uma vez especificada a região de interesse em FMC (setor de baixas energias), surge a necessidade de classificar, sem ambigüidades os diferentes estados quânticos da matéria, ou seja, especificar qual o critério formal que descreve e distingue fases como: sólidos cristalinos, ferromagnetos e anti-ferromagnetos, superfluidos, supercondutores e etc. A teoria de Landau-Ginzburg descreve quase todas as fases conhecidas, sendo esta, uma teoria de campo efetiva na qual forma a base da FMC tradicional. No ambiente desta teoria, as fases quânticas da matéria são rotuladas pelas diferentes simetrias subjacentes a estas, sendo uma transição, caracterizada pela mudança de simetria inerente a cada fase. Geralmente, cada quebra espontânea de simetria na teoria (que classificam os estados quânticos) leva a um parâmetro de ordem, que por sua vez, assume valor esperado não-nulo no estado ordenado, como é o caso da magnetização (parâmetro de ordem) na fase ferromagnética de um dado sistema [3].

A teoria de Landau-Ginzburg é muito bem sucedida e descreve de maneira elegante as diferenças entre as fases quânticas da matéria por argumentos de simetria. No entanto, desde a descoberta do efeito Hall quântico inteiro (EHQI), e de fases diferentes que possuem a mesma simetria, surgiu a necessidade de uma nova classificação dos estados quânticos destes sistemas. Tal classificação é baseada no conceito de ordem topológica, onde propriedades fundamentais (como a condutância Hall, por exemplo) são insensíveis a variações suaves nos parâmetros físicos que caracterizam estes sistemas. Essa invariância sob mudança nos parâmetros do sistema, além de levar a uma descrição similar, releva uma relação direta entre FMC e topologia. Para ilustrar, relembremos que, em topologia, podemos classificar espaços (variedades mais genericamente) pelo número de “buracos” (tecnicamente este número é relacionado ao gênero da variedade) que ela contém. Assim, uma esfera é topologicamente semelhante a uma elipse no sentido de que deformações suaves transformam um objeto no outro. No âmbito da FMC, semelhança topológica está relacionada à hamiltoniana dos sistemas, ou seja, hamiltonianas que possuem um *gap* de energia que separa o estado fundamental dos estados excitados no volume da amostra de um material, que podem ser suavemente modificadas (adicionar pequenas perturbações) de maneira que o *gap* no volume seja mantido, são ditas pertencerem à mesma classe topológica [4]. Tal conceito pode ser aplicado em materiais isolantes, condutores e também supercondutores. Recentemente, materiais bidimensionais que possuem um *gap* energético no volume, mas suportam estados de borda ou de superfícies sem *gap* em suas extremidades, foram previstos teoricamente para existir no grafeno [5] e posteriormente, foram comprovados experimentalmente em poços quânticos de HgTe/CdTe [6]. Tal material foi denominado isolante topológico bidimensional ou isolante spin Hall quântico (devido à sua superfície exibir efeito Hall quântico, oriundo dos estados sem *gap* de energia na superfície). O isolante topológico tridimensional foi posteriormente previsto teoricamente como um novo estado e observado em materiais como: Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 [7]. Estas fases eletrônicas, tanto no isolante topológico bidimensional quanto no tridimensional, são protegidas por simetria de reversão temporal e são robustas¹ frente a perturbações locais como, por exemplo, flutuações térmicas. Uma importante propriedade destes estados é a existência de um invariante topológico conhecido como TKNN invariante (número de Chern), que controla a intensidade da condutância Hall na superfície destes sistemas, sendo neste contexto, um invariante topológico devido a não sensibilidade a pequenas mudanças na hamiltoniana do sistema, ou em linguagem topológica, deformações suaves nesta [1,8].

¹ Como será discutido posteriormente, isolantes topológicos tridimensionais (IT-3D) possuem ainda uma subclassificação: IT fraco ou IT forte (*topological insulator weak or strong*), no primeiro os estados não são robustos frente a desordem locais, já no segundo os estados são protegidos topologicamente.

Propriedades interessantes em isolantes topológicos podem surgir quando a simetria de reversão temporal é preservada no volume, mas é quebrada na superfície, separando o cone de Dirac dos estados de borda nas extremidades do material. O fenômeno emergente em tal situação é o efeito magneto-elétrico topológico, que por sua vez é descrito por um termo que acopla os campos elétrico e magnético e é proporcional a uma espécie de campo de axion (θ) [1,9], que assume valor $\theta = \pi$ para isolantes topológicos e $\theta = 0$ para isolantes triviais. Devido ao efeito magneto-elétrico (que tem sua origem no acoplamento citado acima juntamente com $\theta \neq 0$) topológico, algumas leis do eletromagnetismo usual são drasticamente modificadas como os efeitos Kerr e Faraday [10], descrição de campos estáticos dentro de um isolante topológico [11], a fórmula de Fresnel para reflexão de ondas eletromagnéticas em interfaces entre isolantes triviais e topológicos, o ângulo de Brewster, entre outros [12]. Além destes fenômenos que são significativamente modificados na presença de isolantes topológicos, tais materiais possibilitam a elaboração de experimentos ópticos que permitem medir a quantização de grandezas fundamentais, como por exemplo, a constante de estrutura fina em termos de respostas eletromagnéticas destes materiais que (independentemente de detalhes destes), evidenciando a natureza topológica dos estados emergentes nestes materiais que dão origem ao efeito magneto-elétrico topológico.

Neste presente trabalho, abordaremos nos primeiros capítulos uma revisão acerca do arcabouço teórico que culminou no desenvolvimento dos isolantes topológicos, bem como, algumas propriedades fundamentais e alguns efeitos peculiares que se manifestam nestes. No Capítulo 4, apresentaremos nosso estudo realizado em um sistema que deu origem a esta dissertação: propagação de ondas eletromagnéticas confinadas por isolantes topológicos, onde estudamos a dinâmica dos campos elétrico e magnético em um guia de onda retangular, e mais detalhadamente em um guia de onda específico denominado *slab* (ou fenda plana) constituído de material isolante topológico, onde foi possível obter as equações de onda para os campos, relação de dispersão, atenuação dos campos ao longo da fenda, velocidade de grupo e etc. No capítulo posterior apresentamos algumas conclusões acerca do problema estudado. Em seguida, apresentamos alguns meios confinantes mais elaborados que pretendemos abordar posteriormente, como perspectivas futuras. Esperamos, com este trabalho, não só dar uma pequena contribuição ao estudo das propriedades eletromagnéticas destes sistemas, mas também poder de maneira didática, ajudar os futuros iniciantes nessa linha de pesquisa. A física da matéria condensada proporciona ao estudante aprender e ter contato com áreas diversas como física do estado sólido, teoria quântica de campos, mecânica estatística, eletromagnetismo e etc. A teoria dos isolantes topológicos além de utilizar conceitos de todas essas áreas, relaciona estas com topologia, que por sua vez, é rica em abstração e ferramentas matemáticas proporcionando um conhecimento razoavelmente versátil além da

riqueza de aplicações em física. Além disso, guias de onda de forma e estruturas diversas, são largamente utilizados para fins práticos e cotidianos que utilizam transmissão de sinais eletromagnéticos canalizados, assim, guias de onda com novas propriedades de confinamento, são de especial interesse para estes fins. Foram, principalmente, com estas motivações, que desenvolvemos o presente trabalho.

Capítulo 2

Classificação Topológica de Fases Eletrônicas

A matéria no estado sólido apresenta diferentes propriedades eletrônicas devido às diversas formas de arranjo dos elétrons nas estruturas de bandas de energia dos materiais, ou seja, metais, semicondutores, isolantes (triviais ou não-triviais como os isolantes topológicos), entre outros, possuem um espectro distinto entre si de auto-energias separadas por regiões que coletivamente formam a estrutura de bandas do material. O *gap* energético que separa a banda de valência da banda de condução é uma região na qual a função de onda associada ao elétron não existe. Os estados eletrônicos são auto-estados da hamiltoniana de Bloch, que por sua vez, contém simetria translacional no modelo de rede cristalina [13,14]. A Fig. 2 ilustra os níveis de energia ocupados e os permitidos para os materiais citados acima, assim como o *gap* energético entre os níveis permitidos, as bandas de energia são representadas pelas caixas preenchidas ou vazias, a extensão vertical das caixas indica as regiões de energias permitidas.

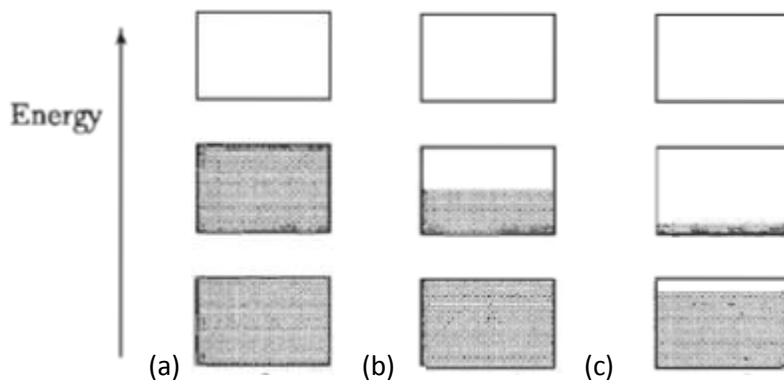


Figura 2 – Representação esquemática de preenchimento dos estados eletrônicos das estruturas de bandas de energia de isolantes (a), metais (b) e semicondutores (c) [14].

Os isolantes possuem as bandas de valência ocupadas pelos estados eletrônicos e as bandas de condução vazias, enquanto que metais possuem bandas de condução parcialmente ocupadas. Esta estrutura de ocupação das bandas de energia proporciona a estes materiais respostas diferentes sob aplicação de campos elétrico e magnético.

Apesar de materiais diferentes apresentarem propriedades microscópicas distintas, como principalmente o *gap* de energia em um isolante ser maior do que outros sistemas que têm estrutura de bandas semelhante, estes podem

pertencer a uma mesma classificação. A hamiltoniana que descreve cada sistema pode ser continuamente “deformada” uma na outra de forma que haja uma interpolação entre os dois sistemas sem que o *gap* energético em ambos seja fechado. Deformar a hamiltoniana do sistema, no contexto de física da matéria condensada, significa adicionar perturbações ao modelo vigente sem que este passe por uma transição de fase quântica [15]. O conceito de deformação suave é largamente utilizado em topologia, possuindo uma aplicação pertinente na classificação de sistemas de matéria condensada que diferem ligeiramente entre si pelo espectro da hamiltoniana. O processo de deformar suavemente ou adicionar pequenas perturbações às hamiltonianas de estados isolantes próximos define uma classe de equivalência topológica entre eles, analogamente a grupos de homotopia definirem classes de equivalência entre variedades que são mapeadas umas nas outras em topologia pura [16].

Neste capítulo, são apresentados alguns dos principais desenvolvimentos teóricos acerca da abordagem topológica do efeito Hall quântico, algumas propriedades do grafeno, bem como, as semelhanças que o fazem uma espécie de protótipo dos isolantes topológicos, que são abordados na Seção 2.3 onde, nesta seção, foi dada uma ênfase na fenomenologia destes devido aos conceitos topológicos (qualitativos) envolvidos na compreensão deste serem abordados nas Seções 2.1 e 2.2.

2.1 O efeito Hall quântico inteiro e o invariante TKNN

O efeito Hall quântico é originado quando elétrons confinados a duas dimensões são sujeitos a um forte campo magnético (da ordem de 10 Teslas) perpendicular ao plano de confinamento, sendo resfriados a baixas temperaturas (aproximadamente 1 Kelvin). De acordo com a teoria clássica, a resistividade Hall (ρ_{xy}) é diretamente proporcional ao campo magnético aplicado, tal resultado é válido somente para campos magnéticos de baixas magnitudes [3]. Para campos de valores maiores, observou-se experimentalmente que a resistência comporta-se como *plateaus* (planaltos), o comportamento clássico e quântico é ilustrado na figura abaixo (onde i denota o número que quantiza ρ_{xy}):

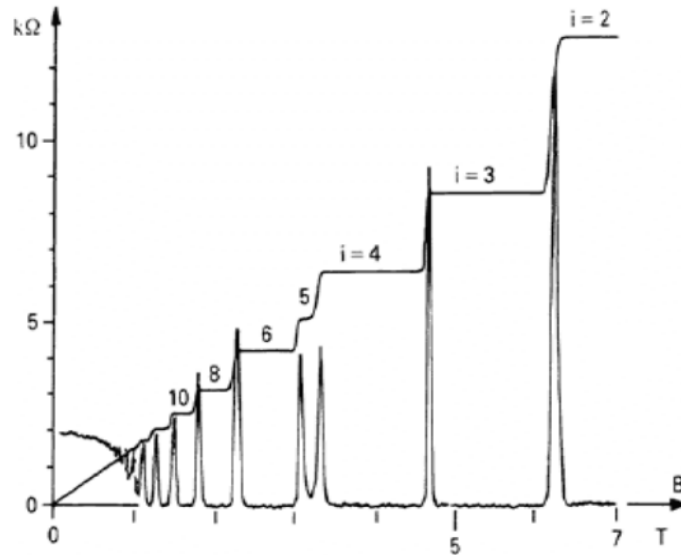


Figura 2.1 – Resistência Hall como função do campo magnético aplicado [30].

Um elétron em um campo magnético é descrito pela hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_x + eA_x)^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_y + eA_y)^2. \quad (2.1)$$

Onde na equação acima A_x e A_y são as componentes do vetor potencial no plano de confinamento dos elétrons, e podem ser obtidos da relação $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. A hamiltoniana (2.1) possui um espectro de autovalores que são a estrutura de níveis de Landau, podendo ser descritos pelas órbitas de ciclotron ilustrados na Fig. 2.1.2 [3,4]:

$$\begin{cases} E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_c \\ E_1 = \left(\frac{1}{2} + 1\right)\hbar\omega_c \\ E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega_c. \end{cases} \quad (2.2)$$

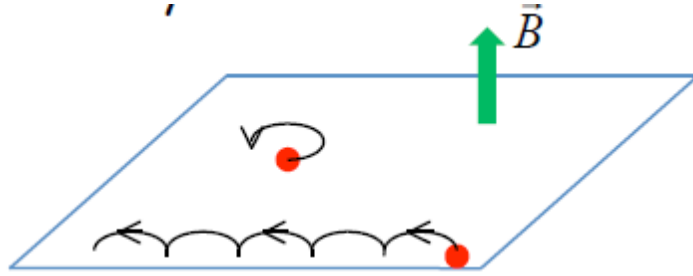


Figura 2.2 – Orbitas de cíclotron devido à aplicação do campo magnético perpendicular.

Nas auto-energias (2.2), n é um inteiro positivo e ω_c é a frequência de cíclotron dada por $\omega_c = \frac{eB}{mc}$, onde m é massa do elétron, e sua carga, c a velocidade da luz no vácuo e B é o campo magnético aplicado. Na presença de um potencial periódico os níveis de energia irão dispersar com \mathbf{k} , o que conduz a uma estrutura de bandas equivalente a de um isolante comum, com um *gap* de energia separando as bandas de valência e de condução.

Se além do campo magnético perpendicular, um campo elétrico uniforme (ϵ_0) na direção x é aplicado paralelamente ao plano quem contém os elétrons (como representado na Fig. 2.3), a hamiltoniana (2.1) toma a forma:

$$H = \frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_x + eA_x)^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_y + eA_y)^2 + e\epsilon_0 x. \quad (2.3)$$

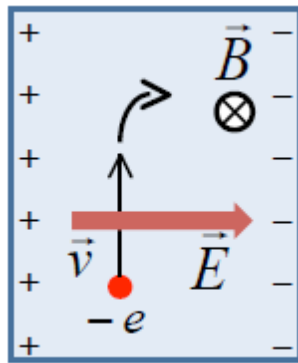


Figura 2.3 – Movimento dos elétrons sob a aplicação de um campo elétrico tangencial ao plano de confinamento [30].

A densidade de corrente correspondente aos auto-estados da hamiltoniana acima para N níveis de Landau preenchidos, no calibre $A_x = 0$ e $A_y = Bx$, é denominada corrente Hall e é quantizada de acordo com a relação abaixo:

$$J_y = \left(\frac{NBe}{h}\right) \left(\frac{e\epsilon_0}{B}\right) = \left(\frac{Ne^2}{h}\right) \epsilon_0. \quad (2.4)$$

Da equação acima, pode-se inferir que a condutividade Hall:

$$\sigma_{xy} = \frac{Ne^2}{h}. \quad (2.5)$$

A manifestação da quantização da condutividade Hall é extremamente robusta e tem sido medida experimentalmente com a precisão de uma parte em um bilhão [1,17]. Esta enorme precisão na medida de σ_{xy} dá indícios de uma natureza topológica de tal quantidade.

A robustez na quantização da condutividade Hall pode ser descrita em termos da classificação topológica de hamiltonianas que possuem um *gap* finito de energia. Como mencionado, objetos em topologia são classificados pelo gênero, ou grosseiramente falando, pelo número de “buracos” que uma superfície possui. Assim, os objetos na Fig. 2.4 são iguais do ponto de vista topológico, pois, podem ser suavemente deformados e ainda pertencerem à mesma classe topológica.

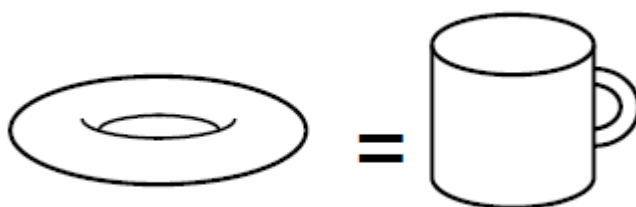


Figura 2.4 – *Dois objetos pertencentes à mesma classe topológica [30].*

As deformações que levam um objeto no outro na figura acima são realizadas através de grupos de homotopia, que realizam mapeamentos entre objetos pertencentes à mesma classe topológica. A análise formal de grupos de homotopia é uma área da matemática que exige conhecimentos um pouco mais avançados de topologia diferencial, neste texto, vamos nos ater aos aspectos mais básicos de topologia que julgamos serem suficientes para a compreensão da descrição topológica do efeito Hall quântico abordado nesta seção que culmina na classificação de isolantes topológicos, cujas algumas propriedades de confinamento de ondas eletromagnéticas foram estudadas nesta dissertação. Para classificar objetos em topologia, utiliza-se o conceito de pacotes de fibra ou pacotes fibrosos (o termo original em inglês é *bundles fibers*), qualitativamente, um pacote de fibras é uma coleção de espaços denominados fibras, que por sua vez, são indexados por parâmetros que vivem em alguma variedade (ou objeto topológico) como um toro, uma esfera, etc. [1,8]. Tais variedades podem suportar pacotes fibrosos gerados por mapeamentos ou funções contínuas que, transformam a variedade M em uma variedade T continuamente através da função f , como indicado na equação (2.6).

$$f: M \rightarrow T. \quad (2.6)$$

Onde M e T são subconjuntos do mesmo espaço vetorial e f é uma função contínua que realiza o mapeamento, esta definição não está relacionada à existência de uma métrica, mas sim com as características globais dos espaços topológicos. Fisicamente, tal processo é análogo ao mapeamento que um campo φ que permeia o espaço-tempo realiza, como indicado abaixo:

$$\begin{cases} \varphi: M \rightarrow T \\ z \rightarrow \varphi(z) \end{cases} \quad (2.7)$$

Onde z é uma variável espacial, se o sistema é unidimensional, $M = [0, L] \times [0, t] \subset \mathbb{R}^2$ é o produto do intervalo de espaço pelo intervalo de tempo e $T = \mathbb{R}$ são os números reais mapeados por φ , ou seja, tal campo associa valores reais às coordenadas do espaço-tempo. O funcional S , tal que $S: \varphi \rightarrow S[\varphi]$, denotando a ação no sistema, mapeia o campo que permeia o espaço-tempo em números reais, estes são procedimentos são ilustrados na Fig. 2.1.3 [16].

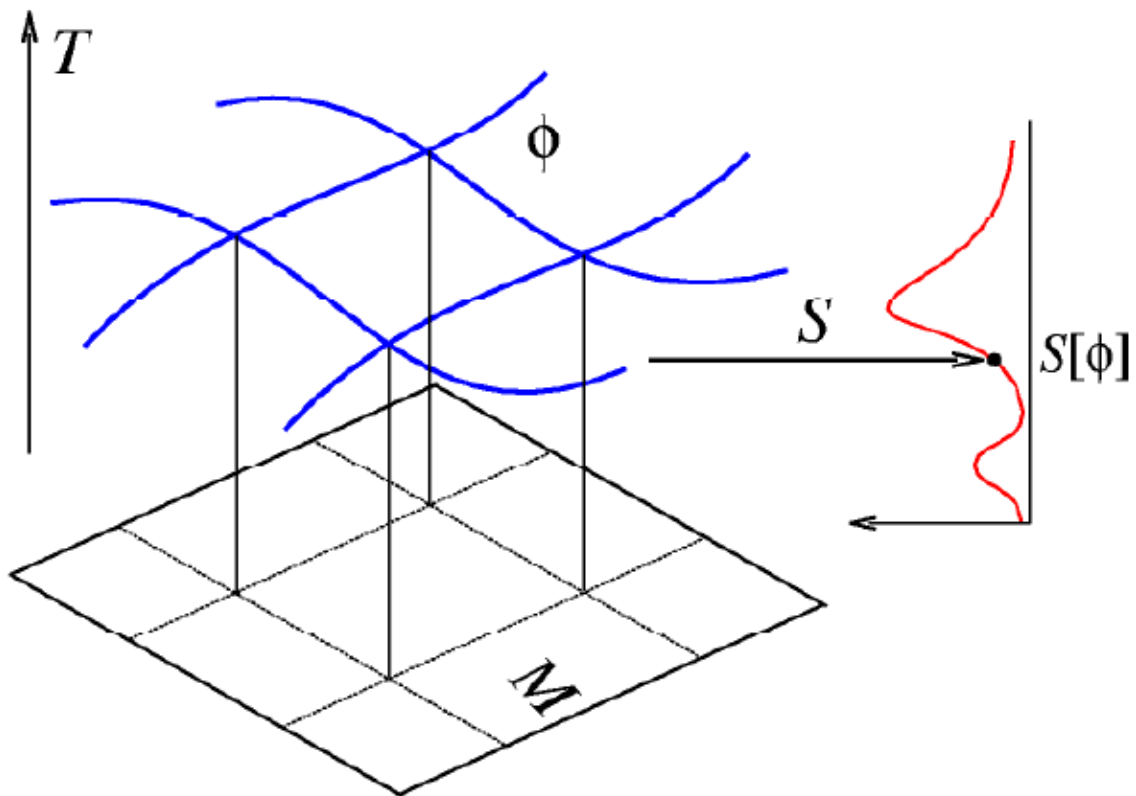


Figura 2.5 – Mapeamento descrito por (2.7) e pelo funcional S [16].

Voltemos agora à descrição topológica do efeito Hall quântico inteiro, estruturas de bandas que possuem um *gap* de energia que separam os estados ocupados dos vazios, podem ser classificadas considerando classes de equivalências entre os modelos que as descrevem através de deformações contínuas que relacionam suas respectivas hamiltonianas $(\mathcal{H}(\mathbf{k}))$. A hamiltoniana de Bloch $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ para um sistema bidimensional como descrito

anteriormente, na presença de um potencial periódico e de um campo magnético tem a forma:

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla + \hbar\mathbf{k} + e\mathbf{A})^2 + V(x, y) \\ V(x, y) = V(x + a, y) = V(x, y + b) \end{cases} \quad (2.8)$$

Na equação acima a e b representam um deslocamento no vetor de rede ao longo da direção x e da direção y respectivamente. Os autovalores da hamiltoniana (2.1.8) $E_n(\mathbf{k})$ coletivamente definem uma estrutura de bandas que possui um *gap* energético (como citado anteriormente) do tipo:

$$\Delta = E_{N+1}(\mathbf{k}) - E_N(\mathbf{k}). \quad (2.9)$$

Onde N é o número de ocupação do estado fundamental do sistema, a hamiltoniana (2.8) possui um conjunto de autofunções $\{\alpha_n(\mathbf{k})\}$ que descrevem o estado fundamental deste sistema formado de muitos corpos. Os momentos (denotados por \mathbf{k}) do cristal “vivem” na zona de Brillouin: $0 \leq k_x \leq \frac{2\pi}{qa}$, $0 \leq k_y \leq \frac{2\pi}{b}$, que por sua vez, é topologicamente um toro T^2 no espaço recíproco [1]. Os auto-estados que figuram na equação:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) | \alpha_n(\mathbf{k}) \rangle = E_n(\mathbf{k}) | \alpha_n(\mathbf{k}) \rangle, \quad (2.10)$$

adquirem uma fase global do tipo $\exp [if(k_x, k_y)]$ devido à não-trivialidade do espaço topológico T^2 que descreve a zona Brillouin. A fase complexa adquirida pelos auto-estados de (2.10) pode ser descrita em termos da chamada função transição Φ_{ij} que sobrepõe subespaços P^i e P^j que são vizinhanças do de T^2 , tal função tem a forma [4]:

$$\Phi_{ij} = \exp\{i[\theta^i(k_x, k_y) - \theta^j(k_x, k_y)]\} = \exp [if(k_x, k_y)]. \quad (2.11)$$

Na equação (2.11) θ^i e θ^j são as fases adquiridas em P^i e P^j . O conjunto de auto-estados $\{ | \alpha_n(\mathbf{k}) \rangle \}$ formam um pacote de vetores sobre o toro da zona de Brillouin, analogamente aos pacotes fibrosos mencionados anteriormente. A conexão de Berry (1-forma) [15,18] é invariante sob uma espécie de transformação de gauge, como mostrado abaixo:

$$A' = \Phi A \Phi^{-1} + \Phi d\Phi^{-1} = A - i \frac{\partial \Phi}{\partial k_\mu} dk_\mu. \quad (2.12)$$

Onde na equação acima $A = i \sum_{n=1}^N \langle \alpha_n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | \alpha_n(\mathbf{k}) \rangle$, uma vez obtida a conexão, pode-se determinar a curvatura, que por sua vez é dada por:

$$\mathbf{F} = dA = \frac{\partial A}{\partial k_\nu} dk_\nu \wedge dk_\mu = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.13)$$

A forma da condutividade Hall expressada na equação (2.5) pode ser obtida da primeira forma de Chern $c_1 = \left(\frac{i}{2\pi}\right)F$ [4], integrando-a sobre toda a variedade T^2 :

$$C_1 = \frac{i}{2\pi} \int F d^2k . \quad (2.14)$$

Utilizando-se de um forte teorema em topologia, que afirma que a integral da curvatura gaussiana sobre uma superfície fechada é um invariante topológico quantizado [1,8] que se relaciona ao gênero (número de “buracos”) do objeto topológico, conclui-se que o número de Chern dado pela equação (2.14) é um tipo de invariante topológico similar, por ser igual a uma integral de uma curvatura sobre T^2 onde residem os momentos do cristal, logo, comparando-se com forma de Kubo [4], a condutividade Hall se relaciona com o C_1 através da equação:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C_1 . \quad (2.15)$$

Comparando a expressão acima com equação (2.5) verifica-se que C_1 desempenha o mesmo papel que N em tal equação, ambas as expressões denotam a contribuição à condutividade Hall de uma única banda completamente preenchida. O invariante topológico C_1 é denominado invariante TKNN (Thouless, Kohmoto, Nightingale e den Nijs ver referência [1]).

2.2 Grafeno e o isolante topológico Z_2

Um dos materiais mais estudados atualmente em física da matéria condensada tanto teoricamente quanto experimentalmente é o grafeno. Tal material é um arranjo bidimensional de átomos de carbono dispostos em uma rede hexagonal e foi obtido experimentalmente em 2004 por Andre Geim da Universidade de Manchester . O grafeno é cerca de duzentas vezes mais forte do que o aço estrutural e desponta como substituto do silício na fabricação de microchips, pois, pode aumentar a capacidade de processamento dos chips de computadores atuais (cerca de 5 GHz) para 1 THz, entre outras, estas são algumas possibilidades tecnológicas que justificam o interesse no estudo das propriedades deste material [19].

Alguns efeitos peculiares que se manifestam no grafeno, são principalmente devido à estrutura de bandas de energia deste material: A banda de valência e a de condução se interceptam em pontos específicos da zona de Brillouin [1], como ilustrado na figura abaixo:

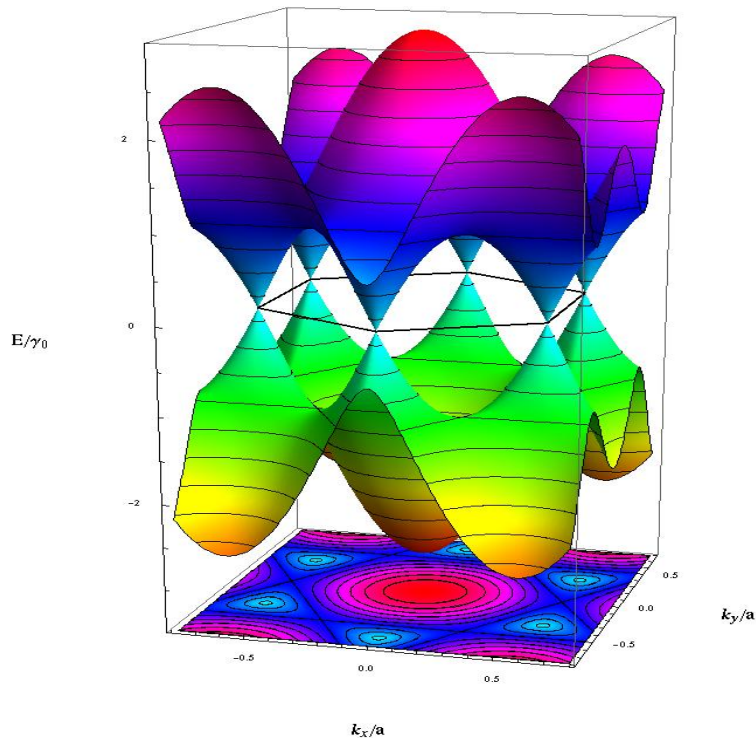


Figura 2.6 – Bandas de condução (parte superior) e de valência (parte inferior) do grafeno e os pontos em que elas se interceptam formando um hexágono, que por sua vez, está no mesmo nível da energia de Fermi [1].

Próximo aos pontos em que as bandas de valência e de condução se tocam, a dispersão da energia é linear, se assemelhando a dispersão de partículas relativísticas sem massa, que são descritas por uma hamiltoniana de Dirac para partículas sem massa [1,20], que possui a forma:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{h}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.16)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli e $\mathbf{h}(\mathbf{k}) = (h_x(k), h_y(k), 0) = \hbar v_F \mathbf{k}$, com v_F sendo a velocidade de Fermi (velocidade na qual quasipartículas se propagam no material, $v_F \sim \frac{c}{300}$). Os pontos de Dirac (ou cones de Dirac) possuem degenerescência (mais de um estado associado à mesma energia) na qual é inerente das simetrias de reversão de paridade (representada pelo operador \hat{P}) e de reversão temporal (representada pelo operador \hat{T}), ou seja, aplicando-se o operador paridade em (2.16), obtém-se:

$$\hat{P} \mathcal{H} \Rightarrow h_z(\mathbf{k}) = -h_z(-\mathbf{k}), \quad (2.17)$$

enquanto que aplicando-se a reversão temporal:

$$\hat{T} \mathcal{H} \Rightarrow h_z(\mathbf{k}) = h_z(-\mathbf{k}), \quad (2.18)$$

as duas simetrias combinadas implicam em $h_z(\mathbf{k}) = 0$, logo, a hamiltoniana (2.16) descreve a dispersão eletrônica dos pontos onde as bandas de valência e de condução se interceptam. A simetria de paridade (representada em (2.17)) pode ser quebrada se na mesma célula dois átomos não são equivalentes, ou seja, se há uma impureza na célula, a violação de tal simetria, acrescenta “massa” aos pontos específicos da zona de Brillouin em que as bandas se tocam, com estes sendo descrito pela hamiltoniana de Dirac para partículas massivas:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{h}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + m\sigma_z. \quad (2.19)$$

Na equação acima, $m = h_z(\mathbf{k})$ é massa adquirida pelos pontos de Dirac. A dispersão com o termo de massa não é linear em k e possui a forma:

$$E(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{(\hbar v_F \mathbf{k})^2 + m^2}, \quad (2.20)$$

o espectro eletrônico exibido acima é tipicamente de um isolante, possuindo um *gap* energético entre as bandas de energia.

O modelo teórico construído por Haldane [5] para estudo de estados Hall quântico em uma rede hexagonal (“*honeycomb lattice*”, rede tipo colméia) é idêntico ao do grafeno descrito aqui, neste modelo, a degenerescência dos pontos de Dirac é levantada através de um campo magnético periódico na rede, violando a simetria de reversão temporal, tal quebra de simetria também contribui com um termo de massa à hamiltoniana (2.16). Em seu trabalho, Haldane mostrou que o estado resultante (que também possui um *gap* de energia) exhibe uma condutividade Hall quantizada em unidades de $\frac{e^2}{h}$, além disso, estes estados possuem a mesma topologia dos estados Hall quânticos ordinários. A condutividade Hall é calculada da mesma maneira da seção anterior, ou seja, através da integral da curvatura de Berry adequada para tal sistema, que por sua vez resulta em um invariante topológico quantizado da mesma maneira que (2.14) e tem uma estrutura do tipo [1]:

$$n = \frac{1}{4\pi} \int \left[\partial_{k_x} \left(\frac{\mathbf{h}(\mathbf{k})}{|\mathbf{h}(\mathbf{k})|} \right) \times \partial_{k_y} \left(\frac{\mathbf{h}(\mathbf{k})}{|\mathbf{h}(\mathbf{k})|} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{h}(\mathbf{k})}{|\mathbf{h}(\mathbf{k})|} \right) \right] d^2 k. \quad (2.21)$$

O grafeno é um exemplo concreto de como o efeito Hall quântico pode ser descrito em termos de uma teoria de campo topológica, e é um protótipo do isolante topológico bidimensional (como será apresentado posteriormente). Uma das principais diferenças entre eles é no número de cones de Dirac que cada um possui, com o grafeno possuindo um número par destes e os isolantes topológicos um número ímpar.

Uma importante característica dos estados Hall quânticos apresentados até aqui, é que eles se propagam em uma única direção ao longo da borda do sistema, ou seja, dada a dispersão dos cones de Dirac, a relação $\hbar v_F = \frac{dE(k)}{dk}$, descreve um estado de borda que intercepta o nível de Fermi com uma velocidade de grupo positiva, ou seja, descreve movimento quiral de tal estado em uma interface entre um isolante comum e uma superfície que exhibe efeito Hall quântico. Como indicado abaixo [5]:

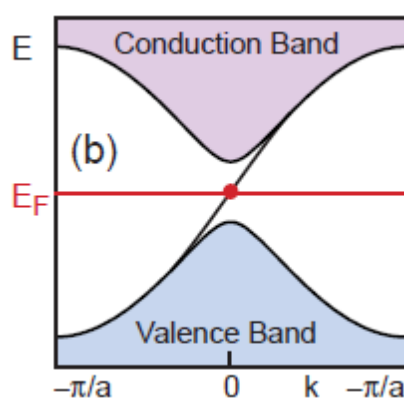


Figura 2.7 – Estado de borda com velocidade de grupo positiva interceptando o nível de Fermi no modelo de Haldane e conectando as bandas de valência e de condução [15].

A hamiltoniana próxima à interface pode ser mudada (ou deformada como discutido anteriormente em termos de topologia) de forma que, os estados de borda possam “cruzar” o nível de Fermi um número ímpar de vezes, por exemplo, duas com valor de velocidade de grupo positiva e uma com velocidade negativa ou vice-versa. No entanto, a diferença entre o número de estados de borda (ou de superfície) que se movem com velocidade de grupo positiva (N^+) dos que se movem com velocidade negativa (N^-), não se altera, pois, esta diferença é relacionada com a diferença do número de Chern (sua forma foi obtida na seção anterior através da conexão de Berry) ΔC_1 na interface, como expressado na equação abaixo:

$$N^+ - N^- = \Delta C_1. \quad (2.22)$$

A relação acima é denominada correspondência volume-fronteira (*bulk-boundary correspondence*), pois o valor de tal diferença depende da topologia dos estados no volume do sistema, assim como o número de Chern (2.14) depende da topologia da hamiltoniana como um todo.

Um importante resultado conhecido como teorema de Kramer [21], é essencial na classificação topológica de fases eletrônicas como a do modelo de Haldane (semelhante o grafeno) e dos isolantes topológicos discutidos a seguir. Tal teorema garante que, todos os auto-estados de uma hamiltoniana

cujo comutador com o operador de reversão temporal \hat{T} para sistemas de spin $\frac{1}{2}$, obedece a relação:

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{T}] = 0, \quad (2.23)$$

são no mínimo, duplamente degenerados. A hamiltoniana se transforma como: $\hat{T}\hat{\mathcal{H}}\hat{T}^{-1} = \mathcal{H}(-\mathbf{k})$, assim, hamiltonianas pertencentes à mesma classificação, são aquelas que satisfazem (2.23) e podem ser obtidas uma das outras (através de deformações suaves) mantendo o *gap* de energia. O invariante TKNN (ou o número de Chern) é zero para tais sistemas hamiltonianos, pois, tal invariante topológico é oriundo dos estados Hall quânticos em que relação de comutação (2.23) não é válida. No entanto, há outro invariante topológico que assume os valores $\nu = 0$ ou $\nu = 1$ somente, onde tal valor depende da correspondência volume-fronteira dada por (2.22). Tal invariante é denominado invariante Z_2 [15], no qual, para $\nu = 0$ há um número par de estados de borda que interceptam o nível de Fermi, já para $\nu = 1$ um número ímpar destes estados ocorre, ambos casos são mostrados na Fig. 2.8, sendo o último classificado como isolante topológico Z_2 ².

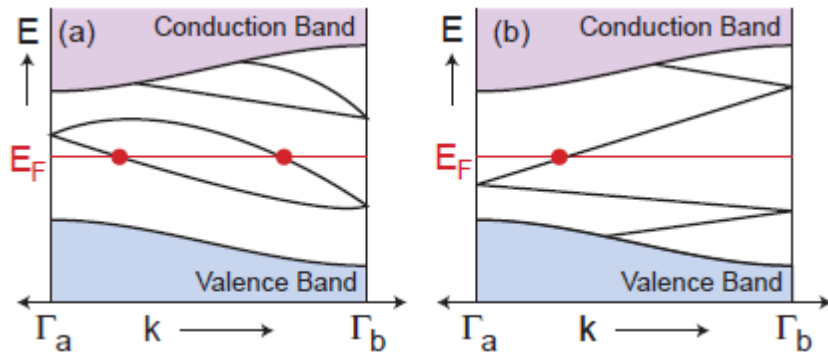


Figura 2.8 – Pares de Kramer interceptando o nível de Fermi um número par de vezes (a) e um número ímpar de vezes (b), Γ_a e Γ_b denotam pontos de degenerescência na zona de Brillouin [15].

² O formalismo matemático por trás da classificação Z_2 envolve a construção de uma matriz unitária (a partir dos auto-estados de Bloch) e o cálculo de seu *pfaffian*, ver referências citadas no texto.

2.3 Isolantes topológicos bidimensionais (isolante de spin Hall quântico) e tridimensionais

O isolante topológico bidimensional (IT-2D) também conhecido como isolante de spin Hall quântico, é um tipo de isolante Z_2 como apresentado na seção anterior, e foi primeiramente proposto teoricamente por Kane e Mele em 2005 [21] para existir no grafeno, motivado pelo trabalho de Haldane, que por sua vez, descreve o efeito Hall quântico em redes hexagonais. A proposta de Kane e Mele é baseada na interação spin-órbita do grafeno e sua descrição matemática é semelhante à utilizada no modelo de Haldane (discutido na seção anterior). Outra proposta foi apresentada de maneira independente por Bernevig e Zang em 2006 [6] baseada na interação spin-órbita em semicondutores. Nenhuma das propostas anteriores foram observadas de imediato em sistemas reais de matéria condensada, devido a principalmente, a pequena magnitude da interação spin-órbita (implicando em um *gap* de energia pequeno) dos sistemas abordados (grafeno e alguns semicondutores) [ref]. Bernevig, Zang e Hughes ainda em 2006 [6,15], consideraram poços quântico de estruturas de HgTe/CdTe. O semiconductor CdTe possui estados da banda de condução com simetria do tipo p , enquanto que sua banda de valência possui simetria tipo s . Já no HgTe as simetrias das bandas de condução e de valência são tipo s e p respectivamente, a estrutura de bandas destes materiais são mostradas na Fig. 2.9 [6].

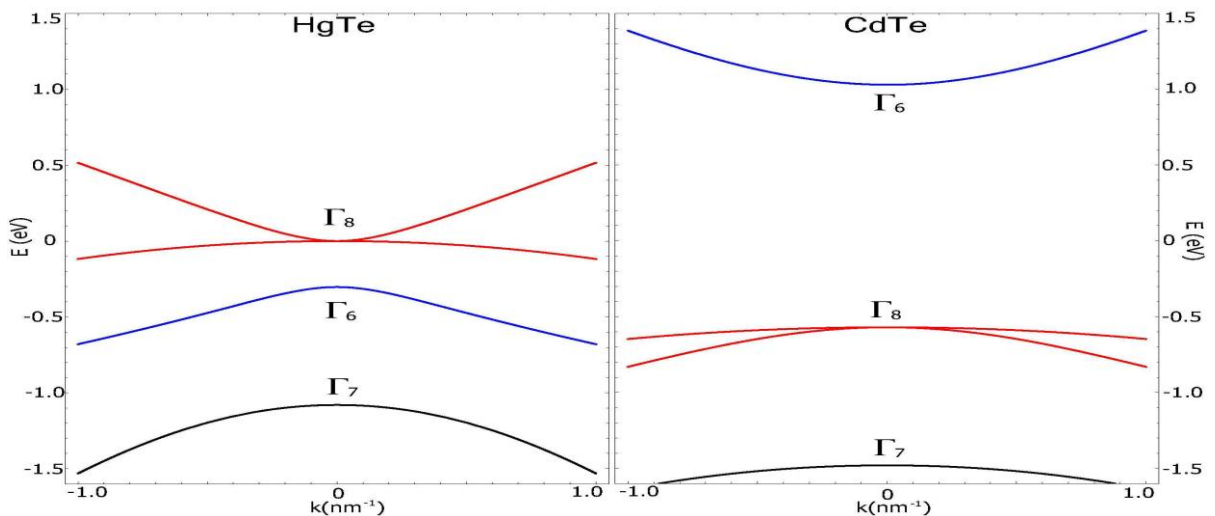


Figura 2.9 - Estrutura de bandas do HgTe (a esquerda) e do CdTe (a direita) [1].

Na figura acima, Γ_6 e Γ_8 denotam as bandas com simetria invertidas para cada material. Quando o HgTe é “sandwichado” entre lâminas de CdTe como na Fig. 2.10., dependendo da espessura dos poços quânticos (d) desta estrutura, pode ocorrer uma inversão de bandas como ilustrado na Fig. 2.10. Se a espessura do poço é maior do que uma espessura crítica ($d_c=6.3$ nm), há uma mudança de paridade na banda de valência de tal estrutura, denotada pela inversão das sub-bandas E_1 e H_1 na figura abaixo:

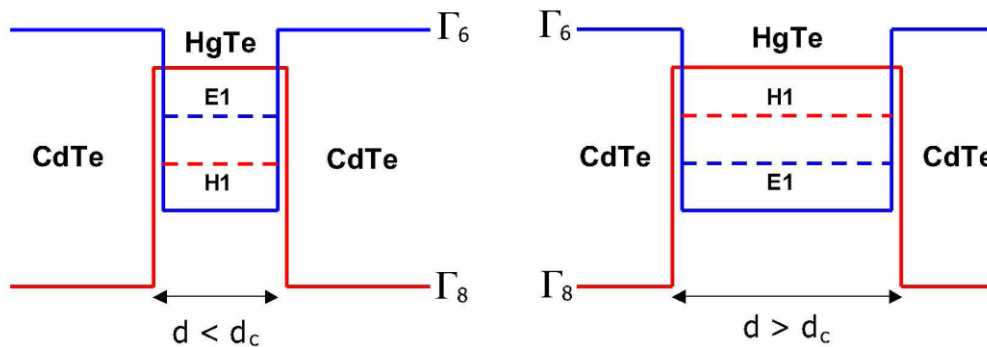


Figura 2.10 – Inversão das bandas no sistema HgTe/CdTe em função da espessura do poço quântico [1].

Berneving, Zang e Hughes mostraram que a inversão de bandas como uma função da espessura do poço quântico, descreve uma transição de fase quântica entre um isolante trivial e no regime invertido, um isolante de spin Hall quântico (ou IT-2D). No momento da inversão, ou seja, quando $d = d_c$ as bandas de valência e de condução se interceptam em alguns pontos, como apresentado em outros modelos, logo, o *gap* de energia se anula permitindo a existência de estados de borda nestas estruturas. Tais estados são descritos topologicamente de maneira semelhante aos estados pertencentes às fases Hall quânticas descritas anteriormente, com a diferença que em estruturas de HgTe/CdTe, há a existência de dois “canais de transporte” para os estados de borda devido a forma dos poços quânticos, tal sistema pode ser concebido como um modelo de Haldane “dobrado”, como indicado na figura abaixo:

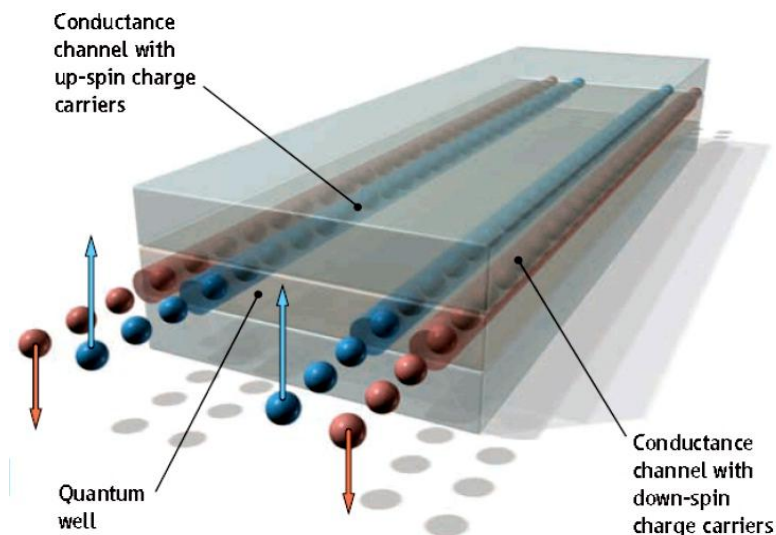


Figura 2.11 – Canais de transporte de estados de borda em HgTe/CdTe [30].

A inversão das bandas na espessura crítica equivale a topologicamente, uma mudança no invariante ν na classificação através do isolante Z_2 discutido na seção anterior. Os estados de borda emergentes na estrutura HgTe/CdTe são robustos frente a perturbações locais, como, espalhamento por impurezas ou pequenas flutuações térmicas [12], devido a tais estados serem protegidos pela ordem topológica vigente e por simetria de reversão temporal [15].

O isolante de spin Hall quântico possui uma generalização para três dimensões, sendo tal fase caracterizada por quatro invariantes topológicos do tipo $Z_2 : (v_0, v_1, v_2, v_3)$, onde a descrição desta fase topológica generalizada é feita em termos da correspondência volume-fronteira discutida na seção anterior. Na zona de Brillouin há quatro pontos que são invariantes sob reversão temporal, dependendo da subclassificação do isolante topológico tridimensional, ocorre o aparecimento de estados degenerados de Kramer. Os isolantes topológicos tridimensionais são classificados como [1,7]:

$$\begin{cases} v_0 = 0, & \text{isolante topológico fraco} \\ v_0 = 1, & \text{isolante topológico forte} \end{cases} \quad (2.24)$$

Ambas as fases são ilustradas na figura abaixo:

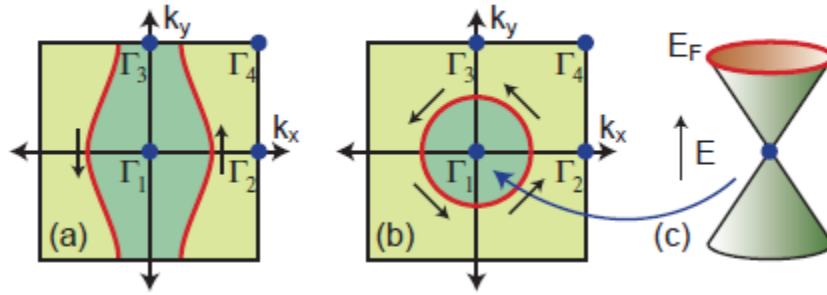


Figura 2.12 – Isolantes topológicos tridimensionais fraco (a) e forte (b), no caso do isolante forte há formação de pontos de Dirac bidimensionais (c) [15].

Um isolante topológico forte possui um número ímpar de cones de Dirac bidimensionais, no caso mais simples de somente um cone (como na Fig. 2.12), a hamiltoniana que descreve a dinâmica de tal ponto é a hamiltoniana bidimensional de Dirac, sendo esta dada por:

$$\mathcal{H}_{superficial} = -i\hbar v_F \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}. \quad (2.25)$$

Os estados de superfícies do isolante topológico tridimensional (IT-3D), também adquirem uma fase de Berry não-trivial quando estes estados são transportados em torno da zona de Brillouin semelhantemente como apresentado na seção anterior. Como mencionado, para o IT-3D, existem quatro invariantes topológicos, onde v_0 classifica-o de acordo com (2.24), os outros três números de Chern são indexados aos planos xy, xz e yz da zona de Brillouin. Estes três números de Chern são combinados de forma que, as bordas de um IT-3D exibem estados metálicos superficiais ocorrendo a manifestação do efeito Hall quântico inteiro como descrito na primeira seção deste capítulo.

Os primeiros IT's-3D foram obtidos experimentalmente em ligas do semicondutor $Bi_{1-x}Sb_x$, no qual os estados de superfícies foram mapeados por fóton emissão de ângulo resolvido (*angle-resolved photoemission*

spectroscopy) – ARPES), esta técnica basicamente, incide luz sobre a superfície do isolante topológico e mapeia o ângulo no qual os elétrons arrancados da superfície atingem um detector, que por sua vez, mapeia a textura da distribuição dos estados que emergem na superfície, tal experimento é mostrado esquematicamente na figura abaixo [22]:

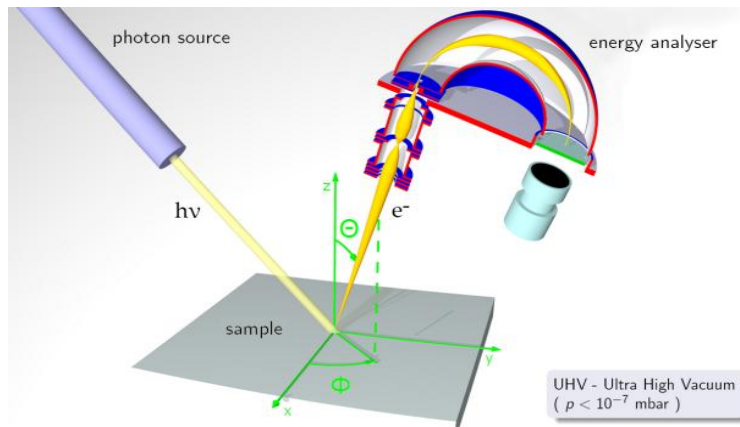


Figura 2.13 – Desenho esquemático da técnica ARPES [30].

Posteriormente foram obtidos outros IT's-3D, como Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 , em todos estes isolantes topológicos, já obtidos experimentalmente, os estados de superfície são mapeados através de técnicas de microscopia juntamente com a técnica ARPES. Para isolantes topológicos da família BiSe e BiTe, a distribuição dos estados metálicos é quase que efetivamente superficial, e esta é distribuída entre os átomos de Bi/Se e Bi/Te na estrutura do material, como mostrado na Fig. 2.14 [23].

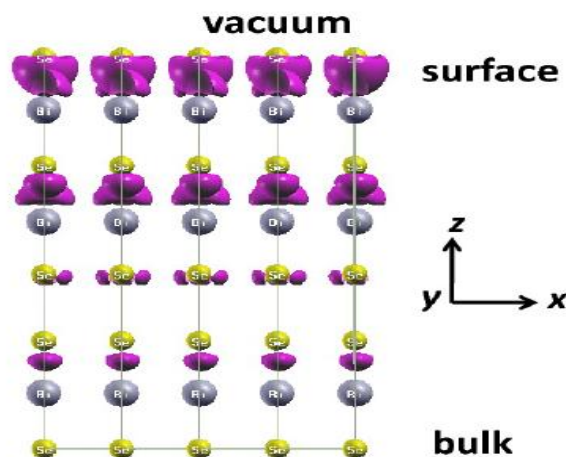


Figura 2.14 – Distribuição dos estados metálicos em isolantes topológicos da família BiSe e BiTe [23].

Os estados metálicos possuem uma distribuição tal que, não se pode afirmar que estes são totalmente superficiais (apesar de nos referimos a estes estados como existentes somente nas extremidades do sistema), no sentido de que próximo ao *bulk* (volume), alguns estados podem existir nesta região, conseqüentemente, a corrente Hall (na qual se origina da presença de um campo elétrico), possui um comprimento finito de penetração no isolante topológico. Estes resultados serão essenciais nas considerações que fizemos no estudo que realizamos acerca da propagação de ondas eletromagnéticas confinadas a estes materiais, pois, as paredes dos guias de ondas que abordamos, são constituídas de isolantes topológicos e na presença de campos eletromagnéticos, exibem efeito magneto-elétrico topológico (apresentado a seguir), que por sua vez, altera algumas propriedades da propagação de ondas eletromagnéticas na presença de tal efeito.

Capítulo 3

O Efeito Magneto-elétrico Topológico e Algumas de suas Manifestações

Uma vez que as extremidades dos isolantes topológicos exibem condutividade Hall, algumas propriedades eletromagnéticas não-usuais se manifestam nestes materiais. Devido à presença dos estados metálicos de borda (protegidos topologicamente pela correspondência volume-fronteira e por simetria de reversão temporal), na presença de um campo elétrico, uma corrente Hall é “excitada” na superfície, que por sua vez, origina um campo magnético que magnetiza o material, tal magnetização é uma resposta topológica ao campo elétrico aplicado e independe de detalhes microscópicos do sistema. Esta resposta peculiar a campos eletromagnéticos origina o chamado efeito magneto-elétrico topológico. Este efeito pode ser descrito uma teoria de campo denominada eletrodinâmica axial [9], que contém um termo adicional ao modelo eletromagnético usual acoplando os campos elétrico e magnético juntamente com um termo θ , que tem sido largamente aplicado no contexto de física de partículas, a lagrangiana que descreve o efeito magneto-elétrico topológico (EMT) é dada por:

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\theta = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \alpha \frac{\theta}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Onde na equação acima, $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ o seu dual [24], na forma vetorial $\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi} \vec{E} \cdot \vec{B}$, este termo adicional a lagrangiana usual de Maxwell, não altera a estrutura das equações de movimento resultantes, pois, pode tal termo pode ser descrito em termos de derivadas totais do potencial eletromagnético A^μ . O campo θ que figura na teoria de campo efetiva do EMT é uma variável dinâmica que assume valores distintos dependendo da classe topológica do material:

$$\begin{cases} \theta = \pm\pi, & \text{para isolantes topológicos} \\ \theta = 0, & \text{para isolantes triviais} \end{cases}. \quad (3.2)$$

Os valores assumidos por θ na classificação acima, são consistentes com a simetria de reversão temporal e podem ser obtidos da forma de Chern (2.14) para σ_{xy} [1,15,22] implicando em valores para a razão $\frac{|\theta|}{\pi}$ idênticas aos valores assumidos pelo invariante topológico ν_0 , que por sua vez, configura uma classificação dos isolantes topológicos tridimensionais em fracos ou fortes.

A teoria de campo que descreve o EMT é válida somente no limite de baixas energias [22], logo, um *gap* de energia deve, necessariamente, ser induzido

nas bordas do isolante topológico separando os cones de Dirac existentes na superfície. Tal *gap* energético pode ser obtido através da quebra da simetria de reversão temporal aplicando-se um campo magnético externo, ou depositando-se um filme magnético sobre a superfície do isolante topológico. Ao induzir um *gap* na interface, ocorre uma mudança abrupta na condutividade Hall:

$$\sigma_{xy} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \frac{e^2}{h}, \quad (3.3)$$

logo, sob a aplicação de um campo elétrico (\vec{E}) a corrente Hall (\vec{J}_{Hall}) induzida é dada por:

$$\vec{J}_{Hall} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \frac{e^2}{h} (\hat{n} \times \vec{E}). \quad (3.4)$$

Como a carga elétrica é conservada na superfície do isolante topológico, pode-se deduzir a “carga Hall” (ρ_{Hall}) acumulada na superfície através da equação de continuidade juntamente com a lei de Faraday ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$):

$$\partial_t \rho_{Hall} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{Hall} \Rightarrow \rho_{Hall} = \left(\frac{\Delta\theta}{2\pi} \frac{e^2}{h} \right) (\hat{n} \cdot \vec{B}), \quad (3.5)$$

onde nas equações (3.4) e (3.5), \hat{n} denota um vetor unitário perpendicular à superfície do isolante topológico. Como mencionado, o termo adicional ao eletromagnetismo usual não altera a estrutura das equações de Maxwell, mas as relações constitutivas dos campos são modificadas devido aos valores assumidos por θ para isolantes não triviais, tais relações são dadas por (nas equações abaixo $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, que por sua vez, é a constante de estrutura fina):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} - \frac{(\alpha\theta)}{\pi} \vec{B}, \quad (3.6)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} + \frac{(\alpha\theta)}{\pi} \vec{E}. \quad (3.7)$$

O efeito Hall quântico que ocorre na superfície de isolantes não-triviais, relaciona a polarização elétrica com o campo magnético e a magnetização com o campo elétrico através do campo de axion θ que tem origem puramente topológica. Estas características são em essência, a origem física por trás do EMT.

Um fenômeno peculiar originado do EMT é a indução de um monopolo magnético imagem devido à aproximação de uma carga elétrica q de um isolante topológico ocupando metade do espaço, tal arranjo é mostrado na figura abaixo:

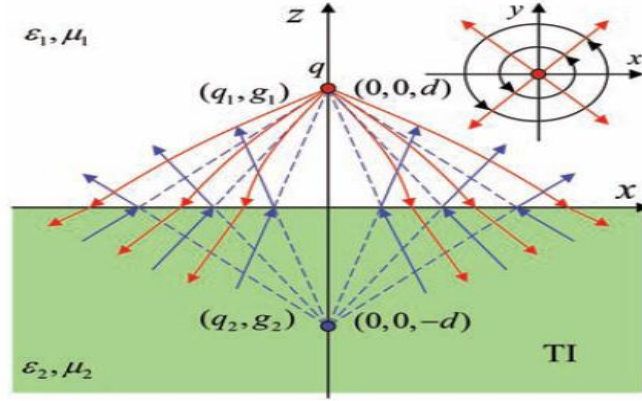


Figura 3.1 - Carga elétrica situada a uma distância d de um isolante topológico [11].

Devido à configuração das linhas de campo elétrico originadas pela carga q , uma corrente Hall do tipo vórtice é induzida na superfície do isolante topológico. O campo magnético criado pela corrente Hall pode ser descrito em termos de uma carga magnética imagem no interior do isolante topológico, que por sua vez, pode ser calculada através do método das imagens resultando em:

$$g_1 = -g_2 = -\frac{4\alpha P}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + 4\alpha^2 P^2} q, \quad (3.8)$$

na equação acima, α é a constante de estrutura fina, $P = \pm \frac{1}{2}$, g_1 é a carga magnética imagem em $(0,0,d)$ e g_2 é o monopolo magnético em $(0,0,-d)$. As cargas elétricas imagem se relacionam como:

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1/\mu_1 + 1/\mu_2) - 4\alpha P^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + 4\alpha^2 P^2} q. \quad (3.9)$$

A excitação elementar no sistema acima são *dyons* (quasipartículas que possuem carga elétrica e magnética), sendo estes confinados ao vácuo θ e suas cargas se relacionam por:

$$q = \left(\frac{\theta}{2\pi}\right) g, \quad (3.10)$$

da equação acima, observa-se que, a carga elétrica do *dyon* se relaciona com sua carga magnética através do termo topológico θ . Estes monopolos que emergem nestes sistemas podem ser sondados por microscopia de força magnética através do mapeamento do fluxo magnético gerado por tais cargas [1,11,15].

O EMT pode também proporcionar a quantização de respostas eletromagnéticas de isolantes topológicos em unidades de constantes fundamentais. Os efeitos Kerr e Faraday, são observados quando ocorre uma rotação no plano de polarização da onda eletromagnética refletida e transmitida respectivamente, quando a onda incidir sobre uma superfície magnética (na

qual quebra a simetria de reversão temporal), devido a troca de momento angular entre a onda e a superfície [10]. Os ângulos de Kerr e Faraday são definidos em termos das amplitudes dos campos elétricos da onda incidente, quando a luz está polarizada no plano xy , estes são:

$$\begin{cases} \tan \theta_K = \frac{E_r^y}{E_r^x} \\ \tan \theta_F = \frac{E_t^y}{E_t^x} \end{cases} \quad (3.11)$$

onde E_r^y e E_r^x são respectivamente, as componentes x e y do campo elétrico refletido e E_t^y e E_t^x do campo elétrico transmitido. Uma onda com esta polarização ao incidir sobre um isolante topológico depositado sobre um substrato trivial e na presença de um campo magnético, como ilustrado na Fig. 3.2, apresenta assinaturas dos estados topológicos que residem na superfície do isolante não-trivial.

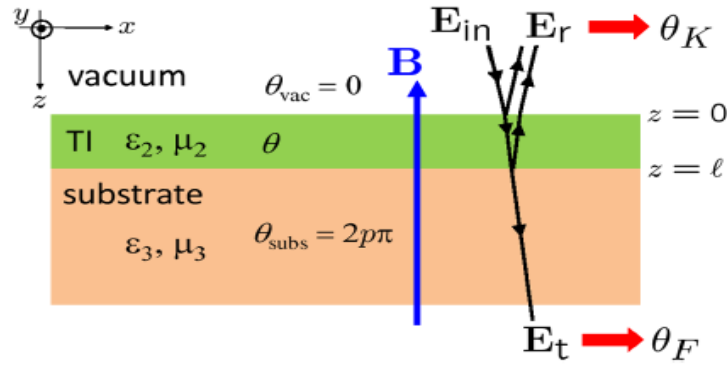


Figura 3.2 – Medidas dos ângulos de Kerr e Faraday [26].

No arranjo acima, $\theta_{subs.} = 2p\pi$, onde $p \in \mathbb{Z}$, implica em valores distintos para a condutância Hall nas diferentes interfaces:

$$\begin{cases} \sigma_H^0 = \frac{\theta}{2\pi} \frac{e^2}{h} \\ \sigma_H^l = \left(p - \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{e^2}{h} \end{cases} \quad (3.12)$$

No sistema ilustrado na Fig. 3.2, refletividade definida pela equação:

$$R \equiv \frac{|E_r|^2}{|E_{in}|^2}, \quad (3.13)$$

atinge um mínimo quando a espessura l do isolante topológico é um múltiplo semi-inteiro do comprimento de onda da radiação eletromagnética dentro do isolante topológico. Quando a frequência de operação da onda incidente é sintonizada para este mínimo, encontra-se uma relação entre os ângulos de Kerr e Faraday e a constante de estrutura fina:

$$\frac{\cot \theta'_F + \cot \theta'_K}{1 + \cot^2 \theta'_F} = \alpha p, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

A relação acima evidencia a natureza topológica dos estados de superfície, pois, os ângulos de Kerr e Faraday são medidas macroscópicas da resposta eletromagnética e do modo como figuram na equação (3.14) tal resposta é quantizada em termos da constante de estrutura fina [12,15]. Outras medidas dos ângulos de Kerr e Faraday demonstraram uma rotação universal em baixas frequências uma rotação universal do ângulo de Faraday $\theta_F = \tan^{-1} \alpha$, enquanto que uma rotação gigante para o ângulo de Kerr $\theta_K = \frac{\pi}{2}$ [10,15].

Outra manifestação do EMT é observada na modificação das fórmulas de Fresnel para as componentes do campo elétrico da onda eletromagnética refletida na presença de um isolante topológico. A base de polarização da onda eletromagnética ao atingir a superfície do isolante não-trivial é girada por meio de uma matriz, que por sua vez, provoca uma rotação nos modos de polarizações transversais elétrico e magnético (nestes modos, as componentes na direção de propagação são nulas) da onda incidente [29]. Este último resultado desempenha um papel importante na abordagem do problema de confinamento de ondas por isolantes topológicos tratado nesta dissertação, pois, modos puramente TE ou TM não se propagam ao longo do guia de onda constituído de interfaces de IT's devido a este efeito se manifestar em toda incidência da onda eletromagnética nas paredes do guia. Esta propriedade difere o guia de onda abordado neste trabalho dos guias usuais, pois não apresentam esta característica peculiar, que, se origina do efeito magneto-elétrico na interface.

Capítulo 4

Propagação de Ondas Eletromagnéticas Confinadas por Isolantes Topológicos

Uma das aplicações mais utilizadas das leis da eletrodinâmica para fins práticos é o envio de sinais eletromagnéticos através de guias de onda. Estas estruturas, também denominadas linhas de transmissão, são usadas basicamente para confinar a energia associada à onda eletromagnética em uma certa região do espaço e guiá-las numa determinada direção. Além de aplicações tecnológicas, meios confinantes de onda também foram propostos para testar teorias de campo com quebra da simetria de Lorentz no setor de radiação. Dependendo da geometria e ou constituição do guia de onda (se o guia for fechado em todas as direções será uma cavidade ressonante), alguns efeitos podem ser amplificados ou algumas soluções modais (modos que se propagam ao longo da direção de guiamento, ou modos ressonantes no caso de cavidades) podem ser suprimidas.

Em nossa primeira abordagem, consideramos um guia de onda com geometria retangular onde suas paredes são constituídas de isolantes topológicos. Foram obtidas as equações de onda para os campos elétrico e magnético, bem como as equações de dinâmica espacial para as componentes transversais e axiais para tais campos. Como será apresentado ao longo deste capítulo, devido à manifestação do efeito magneto-elétrico topológico, quando a onda eletromagnética incide nas paredes do guia, as condições de contorno, bem como, as estruturas das equações diferenciais parciais para as componentes dos campos e, conseqüente, a relação de dispersão da onda guiada se tornam extremamente complicadas. Em seguida, é proposto uma simplificação do problema acima citado, considerando uma propagação bidimensional do pulso eletromagnético, confinado por isolantes topológicos através de um guia de onda tipo fenda plana ou *slab*. Tal sistema, como será mostrado posteriormente, simplifica a análise da propagação dos campos e da relação de dispersão da onda, pois, as equações diferenciais parciais acopladas se tornam equações diferenciais ordinárias no *slab*, cujo método de solução é bem conhecido e as equações podem ser desacopladas por diferenciação e algumas manipulações algébricas.

4.1 Guia de onda retangular constituído por paredes de isolante topológico

Primeiramente, abordamos a propagação de ondas eletromagnéticas confinadas à uma geometria retangular cujas paredes são constituídas por isolantes topológicos como indicado na Fig. 4.1, o interior do guia é constituído de vácuo (que é uma espécie de isolante trivial) e tal estrutura é infinita na direção de propagação (eixo z), para que sejam evitados efeitos de bordas que complicariam ainda mais o tratamento do problema. Além disso, o comprimento de onda da radiação eletromagnética não pode ser comparável às dimensões da fenda do guia para que não haja efeitos de difração, por exemplo, o que poderia comprometer a análise da propagação do sinal eletromagnético. Como citado anteriormente, a teoria de campo efetiva que descreve o efeito Hall quântico na superfície, que por sua vez, origina o efeito magneto-elétrico topológico se aplica unicamente ao setor de baixas energias (longos comprimentos de onda), de modo que um *gap* de energia deve ser induzido na superfície, com a seguinte condição [26]:

$$\omega \ll \frac{E_g}{\hbar}. \quad (4.1)$$

Onde ω é a frequência de operação da onda eletromagnética, E_g é o gap de energia na superfície e \hbar a constante de Planck normalizada.

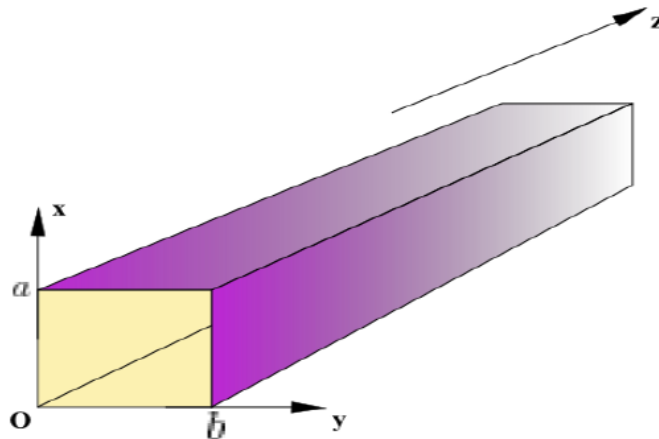


Figura 4.1 – Guia de onda retangular cujas paredes são isolantes topológicos.

Este *gap* energético pode ser obtido via quebra da simetria de reversão temporal através da aplicação de um campo magnético perpendicular às paredes do guia de onda, ou depositando uma fina camada de material ferromagnético sobre o isolante topológico. Em nossa análise, o *gap* na

superfície é aberto por um filme fino de material ferromagnético como ilustrado na Fig. 4.2. O sinal da polarizabilidade magneto-elétrica (expressada nas equações (3.6) e (3.7)) que figura na equação do divergente do campo elétrico e na equação do rotacional do campo magnético é determinada pela direção da magnetização do material que recobre o isolante topológico nas paredes do guia.

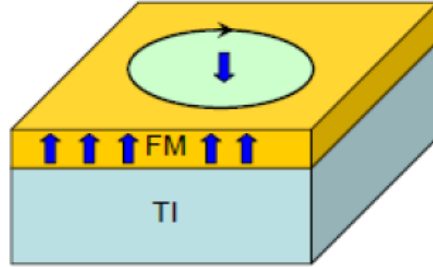


Figura 4.2 - Uma das paredes do guia. Uma lâmina ferromagnética (FM) recobre o material (TI) [1].

Tal guia de onda poderia ser construído com qualquer isolante topológico tridimensional, tais como: Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 .

O ponto de partida foi tentar resolver as equações de Maxwell na presença do efeito magneto-elétrico topológico, ou seja, encontrar a dinâmica e a forma dos campos no isolante topológico para então conectá-las com as soluções no interior do guia via condições de contorno, e obter os modos que se propagam, bem como, os eventuais que seriam atenuados neste sistema. Assim, partindo da lagrangiana efetiva, que tal como mencionada é adequada para descrição do modelo no regime de baixas energias (como explicitado na condição expressa na equação (1)) a qual é indicada em notação tensorial e vetorial na equação abaixo:

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \alpha \frac{\theta}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \\ \mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) + \frac{\theta}{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{cases} \quad (4.2)$$

Onde na expressão (4.2) $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ o seu dual [24]. As equações de movimento para os campos, ou seja, as equações de Maxwell obtidas do modelo acima têm a forma³:

³ Em alguns trabalhos onde o EMT é abordado (ver referências [1,10,11,15,23]), as equações de Maxwell que figuram a carga e corrente Hall (dadas pelas equações (3.4) e (3.5) respectivamente) para o isolante topológico, são acompanhadas de uma função delta de Dirac que concentra as “fontes Hall” essencialmente à superfície. Como será mostrado no desenvolver deste capítulo, as equações para os campos obtidas figuram derivadas e multiplicações da função delta de Dirac no mesmo ponto, porém, estas operações com tal função, não são bem definidas matematicamente, o que traria inconsistência matemática às equações obtidas. Consideramos então, o comprimento l de penetração dos estados de

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\mp \alpha \theta}{\pi l} \right) \hat{n} \cdot \vec{B}, \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}, \quad (4.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l} \right) \hat{n} \times \vec{E} + \frac{\mu \varepsilon}{c} \partial_t \vec{E}, \quad (4.6)$$

nestas equações, \hat{n} representa o vetor unitário perpendicular às paredes do guia e aponta para fora destas, θ é o parâmetro que classifica o isolante como trivial ($\theta = 0$, em nosso sistema caracteriza o vácuo) ou não-trivial ($\theta = \pi$, isolantes topológicos que constituem as paredes do guia). Tais equações possuem a mesma estrutura das equações de Maxwell na presença de fonte, mostradas nas equações (4.7) a (4.10)). Assim, o tratamento dado para as equações de movimento em nosso caso, deve ser no mínimo similar.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (4.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{J} + \frac{\mu \varepsilon}{c} \partial_t \vec{E}, \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}. \quad (4.10)$$

Como pode ser facilmente checado as equações (4.3) a (4.6), recobrem as equações de Maxwell quando $\theta = 0$ (se as paredes fossem isolantes triviais, ou condutores perfeitos), assim como as equações (4.7) a (4.10) recobrem o caso livre de fontes para $\rho = 0$ e $J = 0$, tais equações são listadas abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}, \quad (4.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu \varepsilon}{c} \partial_t \vec{E}. \quad (4.14)$$

Na presença do efeito magneto-elétrico topológico, a densidade de carga, da qual o divergente do campo elétrico é proporcional, é o acúmulo de “carga Hall” na superfície do isolante topológico, que pode ser deduzida a partir da equação de continuidade da carga. Já a densidade de corrente presente na equação para o rotacional do campo magnético, é a corrente Hall excitada pelas componentes tangenciais do campo elétrico que incidem nas paredes do guia.

superfícies medido por algumas técnicas de microscopia em IT's, que por sua vez, é da ordem de alguns nanômetros ($\sim 10^{-9}m$) [23], como sendo o comprimento de penetração da carga e da corrente Hall no IT.

É importante notar também que as equações livres de fontes permanecem imutáveis no modelo descrito em (4.2). Tal resultado já seria esperado, pois, estas equações são advindas da identidade de Bianchi e quadridimensionalmente não se alteram, nem mesmo com a presença do termo adicional à ação eletromagnética convencional. Já as equações de onda para os campos elétrico e magnético se tornam não-homogêneas na região onde o efeito magneto-elétrico topológico se manifesta:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c} \partial_t^2\right) \vec{E} = \mu \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) \partial_t (\hat{n} \times \vec{E}) + \frac{(\pm\alpha\theta)}{\varepsilon\pi l} \vec{\nabla}(\hat{n} \cdot \vec{B}), \quad (4.15)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c} \partial_t^2\right) \vec{B} = -\mu \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) \vec{\nabla} \times (\hat{n} \times \vec{E}). \quad (4.16)$$

Ao passo que no interior do guia, constituído por vácuo, as equações de onda vigentes são homogêneas como expressadas abaixo:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c} \partial_t^2\right) \vec{E} = \vec{0}, \quad (4.17)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c} \partial_t^2\right) \vec{B} = \vec{0}. \quad (4.18)$$

As equações constitutivas dos campos são alteradas de tal maneira que influenciam na dinâmica destes. Sob a aplicação de um campo elétrico, uma corrente Hall é induzida nas paredes do guia, que por sua vez, induz uma polarização magnética, enquanto que um campo magnético pode induzir uma polarização elétrica, e esta induz uma outra corrente Hall, que por sua vez. Como percebido, um pulso eletromagnético que uma vez se propaga no guia e atinge suas paredes origina um “efeito em cascata”, na forma de contribuições que se adicionam como numa soma em séries. Este tipo de comportamento, parece ser típico de uma situação onde a aplicação de métodos perturbativos para obtenção das soluções que podem se propagar, dinâmica e relação de dispersão dos campos, como correções sobre o caso usual (propagação sem a presença do efeito magneto-elétrico topológico), se tornam pertinentes. No presente trabalho, no intuito de simplificar o estudo, trataremos as equações de dinâmica espacial bem como as equações de dinâmica espaço-temporal (equações de onda) dos campos como sendo exatas, ou seja, somente o que seria a contribuição de primeira ordem na série perturbativa.

Devido ao efeito magneto-elétrico topológico, as relações constitutivas dos campos são modificadas e tomam as formas:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} - \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) \vec{B}, \quad (4.19)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} + \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) \vec{E}. \quad (4.20)$$

Das equações acima e das equações de Maxwell na presença do efeito magneto-elétrico topológico, pode-se deduzir as condições de contorno para os

campos elétrico e magnético nas interfaces entre as paredes do guia e o interior composto de vácuo⁴. As componentes perpendiculares às paredes do guia do campo elétrico sofrem de uma descontinuidade proporcional ao campo magnético perpendicular à superfície do guia (ou proporcional ao acúmulo de carga Hall na superfície):

$$\mathbf{E}_{perp.}^+ = \varepsilon \mathbf{E}_{perp.}^- + \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}\right) (\hat{n} \cdot \mathbf{B})_S. \quad (4.21)$$

Já o campo magnético é sujeito a descontinuidades em suas componentes tangenciais às paredes do guia, proporcionais à corrente Hall nesta região, sendo assim, proporcional ao campo elétrico paralelo à superfície do referido meio confinante:

$$\mathbf{B}_{\parallel}^+ = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{\parallel}^- + \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}\right) (\hat{n} \times \mathbf{E})_S. \quad (4.22)$$

A esta altura, já se pode notar algumas complicações inerentes (nas quais os detalhes principais serão apresentados mais adiante nesta seção) ao efeito em questão, além das equações do divergente e rotacional para o campo elétrico e magnético respectivamente, conterem termos lineares adicionais nos dois campos, tornando as equações resultantes destas de difícil resolução, as condições de contorno agora misturam os dois campos devido à relação direta entre polarização elétrica e campo magnético, e entre magnetização e campo elétrico. Estes dois fatos, principalmente tornam o ambiente para ondas guiadas bem diferente dos casos usuais.

Após a obtenção das equações de movimento e das condições de contorno para os campos, o próximo passo é naturalmente supor uma forma estrutural para os campos que satisfaçam as equações de Maxwell nesse modelo (e conseqüente as equações de onda (4.15) e (4.16)) juntamente com as condições de contorno não-triviais (4.21) e (4.22). Propomos, aqui, uma solução do tipo onda plana para cada campo, com “ansatz” nas formas:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.23)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.24)$$

Desta maneira, os efeitos do confinamento figuram nas amplitudes transversais dos campos elétrico e magnético, $\vec{E}(x, y)$ e $\vec{B}(x, y)$ respectivamente e, parte do problema se reduz a encontrar as formas destas amplitudes. Um

⁴ Se as paredes do guia fossem condutoras perfeitas, as condições de contorno seriam as triviais, ou seja, as componentes do campo elétrico paralelas às superfícies do material que constitui o guia se anulariam semelhantemente às componentes perpendiculares do campo magnético (ver Apêndice A).

questionamento natural seria se estas seriam as soluções exatas das equações de Maxwell no isolante topológico. No entanto, com o intuito de simplificar a análise da propagação do pulso eletromagnético ao longo do guia, tomaremos esta estrutura como solução das equações de Maxwell neste sistema⁵.

Inserindo as equações (20) na lei de Faraday, obtemos:

$$\partial_y E_z - ikE_y = \frac{i\omega}{c} B_x, \quad (4.25)$$

$$ikE_x - \partial_x E_z = \frac{i\omega}{c} B_y, \quad (4.26)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = \frac{i\omega}{c} B_z \quad (4.27)$$

Da lei de Ampere (que por sua vez contém a corrente Hall) contida nas equações de Maxwell, obtém-se:

$$\partial_y B_z - ikB_y = -i \frac{\mu\epsilon\omega}{c} E_x + \mu \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \times \vec{E})_x, \quad (4.28)$$

$$ikB_x - \partial_x B_z = -i \frac{\mu\epsilon\omega}{c} E_y + \mu \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \times \vec{E})_y, \quad (4.29)$$

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x = -i \frac{\mu\epsilon\omega}{c} E_z + \mu \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \times \vec{E})_z. \quad (4.30)$$

Das equações (4.25) a (4.30) juntamente com alguma álgebra, é possível encontrar as componentes transversais dos campos elétrico e magnético em função das componentes axiais e derivadas espaciais destas:

$$E_x = \frac{i}{(\mu\epsilon\omega^2 - k^2 c^2)} (kc^2 \partial_x E_z + \omega c \partial_y B_z + \mu\omega c \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \times \vec{E})_x), \quad (4.31)$$

$$E_y = \frac{i}{(\mu\epsilon\omega^2 - k^2 c^2)} (kc^2 \partial_y E_z - \omega c \partial_x B_z + \mu\omega c \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \times \vec{E})_y), \quad (4.32)$$

$$B_x = \frac{i}{(\mu\epsilon\omega^2 - k^2 c^2)} (kc^2 \partial_x B_z - \mu\epsilon\omega c \partial_y E_z + \mu\omega c \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \times \vec{E})_y), \quad (4.33)$$

$$B_y = \frac{i}{(\mu\epsilon\omega^2 - k^2 c^2)} (kc^2 \partial_x E_z + \mu\epsilon\omega c \partial_y B_z + \mu\omega c \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \times \vec{E})_x). \quad (4.34)$$

Inserindo as componentes transversais dos campos (obtidas acima) nas equações escalares de Maxwell, ou seja, nas expressões (4.3) e (4.4), pode-se deduzir as equações de dinâmica espacial para as componentes axiais dos campos elétrico e magnético respectivamente:

$$\partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z + \left(\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z + \frac{\mu\omega}{kc} \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\partial_y (\hat{n} \times \vec{E})_y + \partial_x (\hat{n} \times \vec{E})_x) - \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\hat{n} \cdot \vec{B}) = 0 \quad (4.35)$$

$$\partial_x^2 B_z + \partial_y^2 B_z + \left(\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_z - \mu \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l} \right) (\partial_x (\hat{n} \times \vec{E})_y + \partial_y (\hat{n} \times \vec{E})_x) = 0. \quad (4.36)$$

⁵ Em materiais usuais que possuem uma condutividade finita, as equações de onda também se tornam não-homogêneas (de uma maneira menos complicada do que para o caso de isolantes topológicos), tais equações ainda admitem soluções de onda plana (ver referência [27]).

Vale ressaltar que tanto as equações obtidas para as componentes transversas dos campos quanto às equações encontradas para as componentes axiais elétricas e magnéticas recobrem o caso usual (sem a presença de “fontes Hall”) quando $\theta = 0$. Como a corrente Hall reside essencialmente na superfície de cada parede do guia, ao considerá-las separadamente a componente desta corrente (proporcional ao produto vetorial $\hat{n} \times \vec{E}$ nas equações acima) perpendicular à superfície deve ser nula, simplificando um pouco as equações obtidas acima. Explicitemos somente as equações na parede onde $\hat{n} = \hat{x}$, de modo que as equações (4.35) e (4.36) tomam a forma:

$$\partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z + \left(\frac{\mu \epsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) E_z - \frac{\mu w}{kc} \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l} \right) \partial_y E_z - \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l} \right) B_x = 0, \quad (4.37)$$

$$\partial_x^2 B_z + \partial_y^2 B_z + \left(\frac{\mu \epsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) B_z + \mu \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l} \right) \partial_x E_z = 0. \quad (4.38)$$

Na equação (4.37) B_x é como dado pela expressão (4.33). O mesmo argumento apresentado acima, se aplica a todas as equações anteriores. Como as componentes transversais são funções das componentes axiais e derivadas destas, a obtenção da forma de todas as componentes dos campos elétrico e magnético se resume a resolução das equações acima. Em sistemas usuais de confinamento de ondas (por exemplo, guias de onda condutores, dielétricos etc., para mais detalhes veja Apêndices A e B), neste ponto da resolução pode-se tomar os modos de polarização que os campos nestes sistemas admitem, ou seja, os modos transversais elétrico (em tal modo, não há componente axial do campo elétrico) e/ou magnético (neste modo analogamente ao transversal elétrico, o campo magnético não possui componente na direção z) o que facilita a resolução das equações. Na presença do efeito magneto-elétrico topológico (como mencionado no Capítulo 3) a base de polarização da onda refletida é sempre girada da base de polarização da onda incidente. Conseqüentemente, mesmo que seja possível enviar uma onda puramente transversal elétrica e/ou magnética para o interior de um guia de onda como o nosso, tal estado de polarização não se manteria ao longo da propagação da onda eletromagnética [29].

O primeiro passo na resolução de uma equação diferencial parcial que possui uma estrutura complicada como no caso das equações acima, é classificá-la genericamente para então aplicar algum método de resolução (em alguns poucos casos). Antes de tentar encontrar uma classe (parabólica, hiperbólica ou elíptica) [28], na qual as equações acima poderiam se encaixar, seria necessário desacoplá-las, o que não é um procedimento trivial ou possivelmente até viável em nosso caso. Ao tentar desacoplar as equações (4.37) e (4.38) via aplicação de algum operador escalar diferencial, além de aumentar o grau das equações, ocorre o aparecimento de termos de derivadas cruzadas complicando-as ainda mais. Até onde sabemos, não existe um método padrão para resolução das equações em questão, dependendo da

classe da equação diferencial parcial, algumas mudanças de variáveis nas equações são possíveis para simplificá-las e assim tentar obter uma solução [28], mas no caso das equações (4.37) e (4.38) até mesmo classificá-las se torna difícil, pois, há parâmetros nas equações que mudam continuamente (vetor de onda k e frequência angular ω) dificultando a tentativa de simplificar tais equações, uma vez que a classificação pressupõe que os parâmetros sejam fixados [28]. Da mesma forma que foi proposto um “ansatz” como solução das equações de Maxwell no isolante topológico, poder-se-ia pensar num procedimento semelhante para as equações (4.37) e (4.38) com soluções na forma de $\exp(ik_x x)$ e $\exp(ik_y y)$, mas a estrutura das equações neste sistema confinante de onda são tais que, fica extremamente difícil obter k_x e k_y separadamente e conseqüentemente também propriedades de dispersão da onda eletromagnética ao longo de sua propagação no guia.

4.2 Guia de onda tipo *slab* constituído por paredes de isolantes topológicos

Na seção anterior, foram levantadas algumas dificuldades encontradas ao se tentar resolver as equações diferenciais relativas à propagação das ondas eletromagnéticas confinadas por interfaces de isolantes topológicos, mesmo numa geometria simples como a retangular. No intuito de tornarmos o problema mais simples, de modo a podermos tratá-lo em mais detalhes, uma simplificação extra será introduzida: Consideremos a propagação das ondas confinadas bidimensionalmente por apenas duas interfaces vácuo-isolante topológico. Em nosso caso, consideramos a onda confinada na direção x , na direção y (a qual seria a outra direção de confinamento no guia retangular) admitimos uma extensão infinita, logo $\partial_y = 0$, assim a onda é livre nas direções y e z . Tal estrutura é denominada *slab* (em português a tradução literal para esta palavra é laje) ou guia de onda tipo fenda, que por sua vez, configura uma propagação bidimensional das frentes de onda, como é mostrada na figura abaixo:

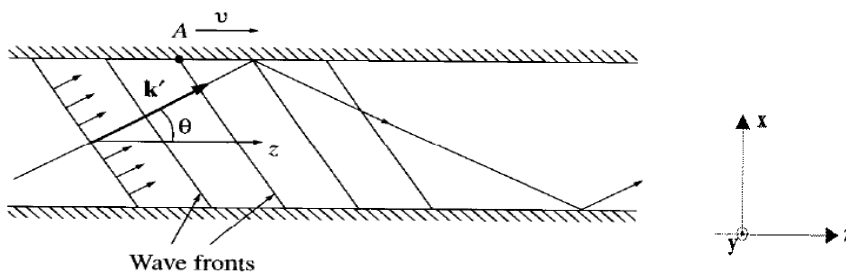


Figura 4.3 – Guia de onda tipo *slab* [27].

Neste sistema, as principais dificuldades na resolução das equações para as componentes dos campos elétrico e magnético no isolante topológico, encontradas no confinamento a geometria anterior não figuram mais. De fato, as equações diferenciais parciais acopladas que nos deparamos no guia retangular, tornam-se equações diferenciais ordinárias no *slab* e podem ser desacopladas por diferenciação simples e algumas manipulações algébricas. As componentes transversais dos campos são obtidas das equações (4.31) a (4.34) fazendo $\partial_y = 0$, estas são dadas por:

$$E_x = \frac{i}{(\mu\epsilon\omega^2 - k^2 c^2)} k c^2 \partial_x E_z, \quad (4.39)$$

$$E_y = \frac{i}{(\mu\varepsilon w^2 - k^2 c^2)} (-wc \partial_x B_z - \mu w c (\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}) E_z), \quad (4.40)$$

$$B_x = \frac{i}{(\mu\varepsilon w^2 - k^2 c^2)} (k c^2 \partial_x B_z - \mu w c (\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}) E_z), \quad (4.41)$$

$$B_y = \frac{i}{(\mu\varepsilon w^2 - k^2 c^2)} k c^2 \partial_x E_z. \quad (4.42)$$

As componentes transversas (exibidas acima) e axiais, a serem apresentadas a seguir, dos campos devem satisfazer as equações de dinâmica espaço-temporal (equações de onda) no *slab*, que assumem uma forma mais simples neste sistema confinante:

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \partial_t^2) \vec{E} = -\mu (\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}) \partial_t (E_y \hat{z} - E_z \hat{y}) + \frac{1}{\varepsilon} (\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}) (\partial_x \hat{x} + \partial_z \hat{z}) B_x, \quad (4.43)$$

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \partial_t^2) \vec{B} = \mu (\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}) \vec{\nabla} \times (E_y \hat{z} - E_z \hat{y}). \quad (4.44)$$

Da mesma forma, as equações de dinâmica espacial das componentes axiais dos campos podem ser obtidas das equações gerais no guia de onda retangular (expressões (4.37) e (4.38)) através do mesmo procedimento (fazendo $\partial_y = 0$ e substituindo nesta equação a expressão para B_x no *slab*):

$$\partial_x^2 E_z + \left(\frac{\mu\varepsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) E_z - \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l} \right) \frac{i}{(\mu\varepsilon w^2 - k^2 c^2)} \left(k c^2 \partial_x B_z - \mu w c (\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l}) E_z \right) = 0, \quad (4.45)$$

$$\partial_x^2 B_z + \left(\frac{\mu\varepsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) B_z + \mu \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l} \right) \partial_x E_z = 0. \quad (4.46)$$

Como pode ser notado, as equações permanecem acopladas, mas um procedimento relativamente simples pode ser adotado para desacoplar tais expressões, de forma que, o nível de dificuldade na resolução das equações resultantes não aumente a ponto de o procedimento se tornar inviável (como discutido para o caso do guia de onda retangular na seção anterior). Diferenciando a equação (4.45) em relação à variável que representa a direção de confinamento (em nosso caso a direção x), obtém-se uma equação diferencial ordinária de terceira ordem na derivada de E_z :

$$\partial_x^3 E_z + \left(\frac{\mu\varepsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) \partial_x E_z + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\pm \alpha \theta}{\pi l} \right) \partial_x^2 B_z - \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha \theta}{\pi l} \right)^2 \partial_x E_z = 0. \quad (4.47)$$

Tal equação possui um termo de segunda ordem na derivada de B_z , o que ainda não desacopla totalmente as equações (4.45) e (4.46). Isolando na equação (4.46) a derivada primeira de E_z , encontra-se a expressão:

$$\partial_x E_z = - \frac{\pi l}{\mu (\pm \alpha \theta)} (\partial_x^2 B_z + \left(\frac{\mu\varepsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) B_z). \quad (4.48)$$

A expressão acima pode ser usada como uma relação de recorrência para se obter as derivadas de ordens superiores de E_z em função das derivadas de B_z . Utilizando-se destas relações e substituindo-as na expressão (4.47), obtém-se

uma equação diferencial onde a única componente axial de campo que figura é a do campo magnético:

$$\partial_x^4 B_z + 2 \left(\frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha \theta}{\pi} \right)^2 \right) \partial_x^2 B_z + \left(\left(\frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} - k^2 \right)^2 - \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha \theta}{\pi l} \right)^2 \left(\frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right) B_z = 0 \quad (4.49)$$

A expressão (4.49) é uma equação diferencial ordinária de quarta ordem incompleta (por não possuir termo de terceira ordem) e a solução pode ser obtida via equação característica, a solução possui uma estrutura exponencial da forma⁶:

$$B_z(x) = B_1 \exp(\gamma_- x) + B_2 \exp(\gamma_+ x) + B_3 \exp(-\gamma_- x) + B_4 \exp(-\gamma_+ x) \quad (4.50)$$

Onde B_1, B_2, B_3 e B_4 são constantes com dimensão de campo magnético e o parâmetro γ_{\pm} é dado por:

$$\gamma_{\pm} = \left\{ k^2 - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \omega^2 + \left(\frac{\alpha \theta}{\pi l} \right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha \theta}{\pi l} c \right)^2 \left[\mu \varepsilon k^2 c^2 - (\mu \varepsilon)^2 \omega^2 + \mu^2 \left(\frac{\alpha \theta}{\pi l} c \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.51)$$

da relação de recorrência para as derivadas de E_z (equação (4.48) pode-se obter a forma explícita desta componente do campo elétrico.

Como as soluções para as componentes axiais dos campos elétrico e magnético, são advindas de uma equação diferencial de quarta ordem (em nosso caso incompleta), seriam necessárias quatro condições de contorno para as soluções E_z e B_z serem unicamente determinadas. Mas tal necessidade é unicamente devida à estrutura matemática das equações, não são todos os termos que figuram na equação (4.50), que são soluções fisicamente aceitáveis, ou seja, dependendo da região do *slab* alguns termos nas soluções para as componentes axiais dos campos podem divergir. Como será mostrado mais adiante nesta seção, os parâmetros que aparecem nos argumentos das exponenciais se arranjam de forma a adquirir uma estrutura do tipo: $\alpha + i\beta$, com $\alpha > 0$ para uma faixa de valores de frequências ou comprimentos de onda aceitáveis no regime de baixas energias onde o modelo dado pela equação (4.2) é válido. Assim, alguns termos são eliminados de maneira que, as formas fisicamente aceitáveis de E_z e B_z em cada região do *slab* são diferentes. Na região inferior do *slab*, ou seja, em $x < 0$, a componente axial do campo magnético é dada por (analogamente para o campo elétrico):

$$B_z(x) = B_1 \exp(\gamma_- x) + B_2 \exp(\gamma_+ x) \quad (4.52)$$

As soluções acima, não necessitam de quatro condições de contorno para serem únicas, como as componentes de campo acima são fisicamente

⁶ Como pode ser observado, em todas as equações obtidas no *slab* recupera-se o caso usual ao se fazer $\theta = 0$, para se obter as soluções usuais para E_z e B_z , deve-se anular θ nas equações (4.45) e (4.46) respectivamente.

adequadas, somente as condições de contorno advindas diretamente das equações de Maxwell especificam unicamente as soluções. No *slab* as condições de contorno exibem a forma:

$$E_x^+ = \varepsilon E_x^- + \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) B_x \quad (4.53)$$

$$\mathbf{B}_{\parallel}^+ = \frac{\mathbf{B}_{\parallel}^-}{\mu} + \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) (E_y \hat{z} - E_z \hat{y}) \quad (4.54)$$

Da mesma forma como procedido no caso usual (ver Apêndices A, B e C) a relação de dispersão da onda eletromagnética confinada a isolantes topológicos pode ser encontrada inserindo as soluções acima na equação de onda apropriada. A componente z da equação de onda (4.44) é dada por:

$$\left(\partial_x^2 + \partial_z^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \partial_t^2\right) B_z = \mu \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) E_z. \quad (4.55)$$

Substituindo as soluções encontradas para E_z e B_z na equação acima, encontra-se uma relação de dispersão que descreve a relação entre a frequência de operação e a magnitude do vetor onda no isolante topológico:

$$\gamma_-^2 + \gamma_+^2 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 - k^2 = 0. \quad (4.56)$$

Da equação acima obtemos que:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(k^2 c^2 + \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l} c \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.57)$$

donde a velocidade de grupo (v_g) é facilmente obtida:

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{k}{\sqrt{k^2 + \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l} \right)^2}}. \quad (4.58)$$

Para verificar a consistência destes resultados, valoramos numericamente a expressão acima, substituindo os valores das constantes universais α e c , inserindo os valores apropriados para isolantes topológicos dos parâmetros μ e ε ($\mu = 1$ e $\varepsilon = 100$ para Bi_2Se_3) e então “percorrendo” o espectro eletromagnético até o limite de comprimentos de onda no visível. O valor encontrado é uma ordem de grandeza menor do que a velocidade da luz no vácuo e é uniforme para todas as frequências percorridas, havendo variações somente para comprimentos de onda menores:

Vetor de onda k (1/cm)

Velocidade de grupo (cm/s)

10	4.24264×10^9
100	4.24264×10^9
1000	4.24264×10^9
10000	4.24375×10^9
10000000000000000	4.24375×10^9

Tabela 4.1 – Alguns valores encontrados para velocidade de grupo das frentes de onda nas paredes do slab para frequências até a faixa do visível.

Tanto a relação de dispersão (4.57) quanto a velocidade de grupo expressa por (4.59) recobrem a dispersão e velocidade de grupo usual quando $\theta = 0$.

Justifiquemos agora o motivo das soluções fisicamente aceitáveis filtrarem alguns termos que figuram na equação (4.50). Como mencionado, devido aos parâmetros nas exponenciais se arranjam em uma estrutura do tipo: $\alpha + i\beta$, com $\alpha > 0$, alguns termos podem divergir, com isso alguns termos nas soluções para as componentes axiais dos campos elétrico e magnético seriam filtrados fisicamente. Os parâmetros das exponenciais das soluções para E_z e B_z têm a forma:

$$k'_x = \sqrt{-\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} + k^2 - \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2 + \frac{\sqrt{c^6 \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2 \mu (\epsilon k^2 c^2 - \mu \epsilon \omega^2 + \mu \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2)}}{\epsilon c^4}} \quad (4.60)$$

Substituindo k encontrado na equação (4.57) obtém-se uma relação somente em função da frequência ω de operação:

$$k'_x = \sqrt{-3 \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2 - \frac{\sqrt{c^6 \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2 \mu (c^2 \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2 \mu - \mu \epsilon^2 \omega^2 + c^2 \epsilon (-2 \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2 + \frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2}))}}{c^4 \epsilon}} \quad (4.61)$$

Inserindo os valores das constantes: c , α , ϵ e μ (estas duas últimas diferem dependendo do material, utilizamos aqui uma faixa os valores $\mu = 1$ e $\epsilon = 100$, valores estes adequados para o material isolante topológico Bi_2Se_3) e “varrendo” uma faixa de frequência do espectro eletromagnético até a ordem de grandeza da frequência do visível (condição necessária do limite de baixas energias), encontra-se:

Frequência (1/s)	Kx (1/cm)
1000	0.000207919 ± 0.00128125i
⋮	
10000000000000000	0.000207919 ± 0.00128125i

Tabela 4.2 – Alguns valores encontrados para k'_x no isolante topológico.

Dos valores acima, observa-se que para uma larga faixa de frequências de operação, k_x é tal que, quando valorado numericamente, sempre tem uma parte real positiva e uma parte imaginária e até a casa decimal exibida na tabela acima parece ser uniforme mesmo para todas as frequências de operação, logo se justifica as componentes axiais dos campos elétrico e magnético exibirem apenas parte dos termos das suas soluções.

Em guias de onda usuais como os perfeitamente condutores, ou guias dielétricos as frequências de corte são discretas, ou seja, cada solução modal (também discreta) tem uma frequência de corte característica como mostradas na Fig. 4.4. A discretização destes modos tem origem no fato dos campos se anularem nas bordas das paredes destes tipos de guia onda, assim, o número de onda para cada modo de propagação é dado por:

$$k_\gamma = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c} \sqrt{(\omega^2 - \omega_\gamma^2)} \quad (4.62)$$

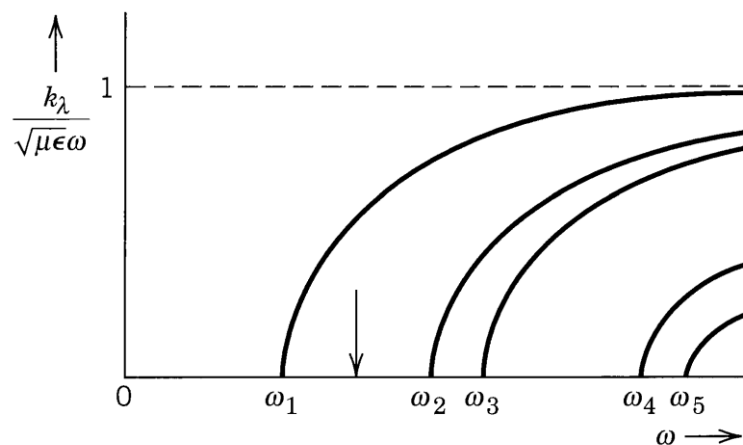


Figura 4.4 - Número de onda k_γ versus frequência ω para vários modos γ . ω_γ é a frequência de corte [28].

Onde γ é um inteiro positivo. De acordo com a equação (4.62) juntamente com a figura acima, os modos que se propagam são aqueles em que $\omega > \omega_\gamma$, ou seja, quando k_γ é real. Para frequências de operação menores que a frequência de corte, k_γ é imaginário e tal modo não se propaga no guia.

Voltemos agora à relação (4.58), isolando-se k nesta equação e rearranjado alguns termos obtém-se:

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\mu \epsilon \omega^2 - 2 \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{\alpha \theta}{\pi l} c \right)^2} \quad (4.63)$$

Definindo-se a frequência $\omega_\theta \equiv \left(\frac{\alpha \theta}{\pi l} \right) c$, a relação (4.63) assume a forma:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{c} \sqrt{1 - \frac{2}{\epsilon^2} \frac{\omega_\theta^2}{\omega^2}} \quad (4.64)$$

Como pode ser notado da equação acima, frequências menores do que ω_θ não podem se propagar em toda extensão do *slab* ou na maior parte deste, pois seria rapidamente atenuada, analogamente ao caso usual apresentado anteriormente. A frequência de corte ω_θ parece exibir um caráter universal para uma determinada família de isolantes topológicos cujo ϵ são próximos, ou seja, depende somente da constante de estrutura fina e do parâmetro topológico θ , da velocidade da luz não proporcionando modos discretos de propagação como em guias de ondas usuais, tal frequência de corte é da ordem de $\frac{\alpha c}{l} \sim 10^{17} \text{ Hz}$. Da forma da relação de dispersão (4.64), nota-se que frequências da ordem de 10^{13} Hz podem se propagar ao longo do guia de onda, tal comportamento é ilustrado no gráfico abaixo:

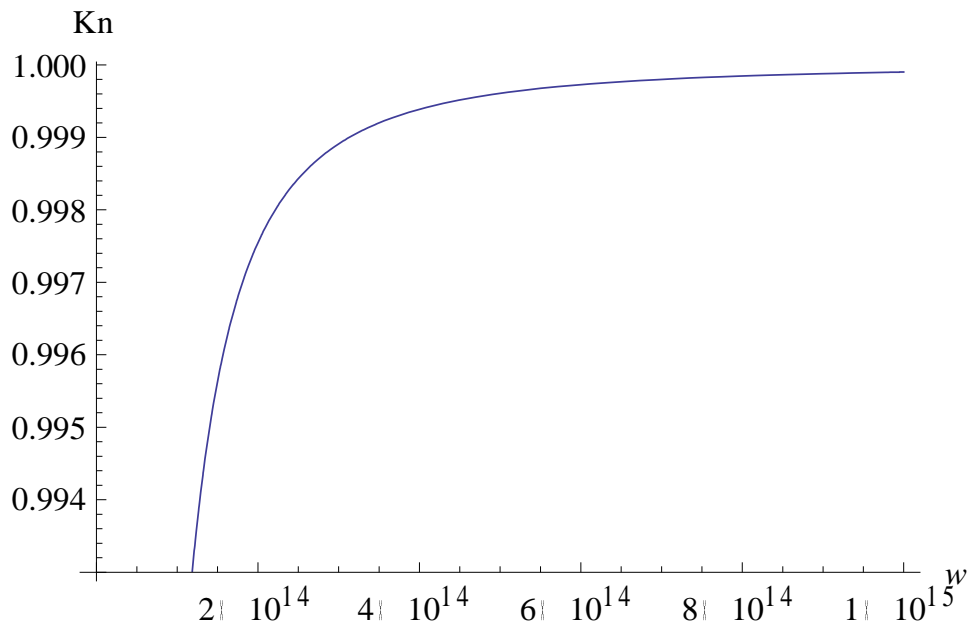


Figura (4.5) – Número de onda k_n ($k_n = \frac{ck}{\sqrt{\mu\epsilon}\omega}$) versus frequência ω , onde a frequência de corte ω_θ é mostrada para $\epsilon=100$.

Da relação (4.64) nota-se que frequências de corte podem ser continuamente obtidas para uma determinada faixa de valores de ϵ (isolantes topológicos com características eletromagnéticas próximas), diferindo do caso usual onde as frequências de corte são discretas.

Retomemos agora, a discussão acerca das condições de contorno não-triviais que se manifestam nas interfaces do *slab*. Tais condições de borda levam a relações entre componentes do vetor de onda no interior do *slab* e amplitudes dos campos elétrico e magnético nas paredes e no interior do guia. Para tal objetivo, explicitemos novamente as condições de contorno (4.53) e (4.54):

$$E_x^+ = \epsilon E_x^- + \frac{(\mp\alpha\theta)}{\pi l} B_x$$

$$\mathbf{B}_\parallel^+ = \frac{B_\parallel^-}{\mu} + \left(\frac{\pm\alpha\theta}{\pi l}\right) (E_y \hat{z} - E_z \hat{y})$$

A condição de contorno sobre a componente perpendicular do campo elétrico dada pela equação (4.54) relaciona valores deste campo em diferentes regiões do espaço próximas à interface entre vácuo (onde os campos obedecem à equação de onda homogênea) e isolante topológico, assim a descontinuidade, ou seja, a diferença entre os campos na interface é proporcional à carga Hall na superfície da parede do *slab*, esta é a razão de se introduzir os limites laterais nos (sinais de + e – nas condições de contorno) campos próximos à superfície. Em nossa abordagem, consideramos que em primeira instância (o que seria a contribuição de primeira ordem em α na série perturbativa) o campo que polariza a superfície no momento que onda incide na parede do *slab* é o campo magnético da própria onda eletromagnética, logo a descontinuidade na componente perpendicular do campo elétrico é proporcional ao campo magnético da onda incidente valorado na superfície. Utilizando então destes argumentos e das formas ou soluções de campo encontradas no isolante topológico e no interior do *slab*, após algumas manipulações algébricas é possível encontrar a componente na direção de confinamento do vetor de onda no vácuo:

$$k_x = \frac{\left(\mu\left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)^2 - \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}\right)B}{\left(E_0 + \left(\frac{\alpha\theta}{\pi l}\right)B_0\right)} \quad (4.65)$$

Onde na equação acima, B denota a amplitude constante de campo magnético nas paredes do guia e E_0 e B_0 as amplitudes de campo elétrico e magnético respectivamente. No interior do *slab* os campos obedecem à seguinte dinâmica espaço-temporal:

$$\left(\partial_x^2 + \partial_z^2 - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \partial_t^2\right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (4.66)$$

A relação de dispersão nesta região é então dada por:

$$k^2 + k_x^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 = 0 \quad (4.67)$$

Onde no vácuo: $\mu = \varepsilon = 1$. A dispersão encontra para o interior do *slab* tem algumas características peculiares, como: mesmo se tratando da propagação no vácuo o termo topológico figura na relação, as amplitudes de campo elétrico e magnético no vácuo e no isolante topológico também figuram na equação. Para testar a validade de tal relação de dispersão, substituímos os valores das constantes α , c , θ , dos parâmetros μ e ε , e “varremos” a mesma faixa de frequências para o cálculo da velocidade de grupo das frentes de onda no isolante topológico, já para as amplitudes dos campos, foi atribuído um valor unitário para a amplitude de campo elétrico e um valor dez ordens de grandeza menor para o campo magnético⁷. Apesar da relação de dispersão encontrada apresentar um aspecto peculiar, esta leva à uma velocidade da luz próxima ao seu valor no vácuo, assim, o valor encontrado para a mesma faixa de frequências utilizadas anteriormente foi de:

$$v_g = 2.96 \times 10^{10} \text{ cm/s}. \quad (4.68)$$

As condições de contorno sobre as componentes paralelas do campo magnético à superfície do *slab* exibem as diferenças entre os campos magnéticos próximos à interface, sendo estas proporcionais às componentes tangenciais do campo elétrico da onda eletromagnética que incide nas paredes do *slab* (analogamente ao campo magnético na condição de contorno (4.54) ser considerado da onda incidente), ou seja, a descontinuidade no campo magnético é proporcional à corrente Hall na superfície do isolante topológico. Ao implementar estas condições de contorno, encontra-se uma complicada relação entre componentes do vetor de onda no isolante topológico e no vácuo, e também entre as amplitudes de campo no interior do *slab* e nas paredes deste. Esta relação parece levar à mesma relação de dispersão encontrada para a propagação da onda eletromagnética no vácuo (equação (4.67)). Uma relação similar parece emergir quando tentamos implementar as condições de contorno sobre as componentes tangenciais do campo elétrico (advindas da lei de Faraday), e também na implementação das condições de contorno sobre as componentes perpendiculares (no caso do *slab* somente a componente B_x) do campo magnético (advindas do divergente identicamente nulo deste campo). Estas condições contorno sobre os campos descrevem uma continuidade das componentes tangenciais e perpendiculares dos campos elétrico e magnético (respectivamente) na interface entre vácuo e isolante topológico, pois, estas condições de borda são advindas das equações de Maxwell livres de fonte,

⁷ Como as equações livres de fontes permanecem inalteradas, os campos elétricos e magnéticos das ondas e o vetor de onda k permanecem ortogonais uns aos outros, prevalecendo assim, a relação entre as amplitudes dos campos: $B = \frac{1}{c} E$.

assim não apresentam variações abruptas na interface. Devido às relações citadas acima até a conclusão do presente trabalho, estarem em fase de verificação (a quantidade de termos envolvidos e a relação entre eles é razoavelmente complicada, logo as manipulações algébricas são relativamente dispendiosas de realizá-las) não apresentaremos as relações citadas, deixando-as como verificações e perspectivas de futuros desenvolvimentos deste trabalho, que apesar de abordar a propagação de ondas eletromagnéticas em um sistema relativamente simples como o *slab*, o fato de compor as paredes deste tipo de guia onda com um material em que o efeito magneto-elétrico topológico se manifesta, mesmo com a simplificação que leva à uma análise bidimensional do problema abordado, complicações são introduzidas em algumas equações, como as citadas anteriormente. Assim, nos atemos somente às conjecturas levantadas sobre as relações que podem ser advindas das outras condições de contorno sobre os campos.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesta dissertação, apresentamos uma revisão acerca do arcabouço teórico e alguns aspectos experimentais que juntos culminaram no desenvolvimento dos isolantes topológicos. Na primeira parte de nossa revisão constaram propriedades básicas de condutores, isolantes e semi-condutores, o efeito Hall quântico e algumas propriedades em comum entre grafeno e isolantes topológicos. Ainda nesta parte, revisamos as principais características que revelam o caráter robusto dos estados de borda (ou de superfície) evidenciando a natureza topológica destes. Na segunda parte, revisamos alguns trabalhos que exploram as conseqüências do efeito magneto-elétrico que se manifesta em isolantes topológicos, os trabalhos escolhidos para a revisão, empregando certo coloquialismo, “preparam o terreno” para o problema abordado nesta dissertação.

No presente trabalho, apresentamos como proposta contribuir com o estudo de algumas propriedades que podem emergir da propagação de ondas eletromagnéticas confinadas a isolantes topológicos (diferentemente dos trabalhos revisados, que em sua maioria, tratam de propriedades das ondas eletromagnéticas e campos estáticos incidindo em um semi-plano infinito sem confinamento). No guia de onda retangular, nos deparamos com equações diferenciais parciais acopladas que não possuem método padrão de resolução. As equações de onda que regem a dinâmica espaço-temporal dos campos, além de serem não-homogêneas, também são equações diferenciais parciais acopladas. As dificuldades que residem na resolução destas equações comprometem a análise da propagação do sinal eletromagnético confinado a esta geometria por isolantes topológicos, pois, a obtenção das componentes transversais, da relação de dispersão, entre outras propriedades, depende da solução destas equações. O que poderia simplificar análise das equações e conseqüentemente as propriedades na propagação da onda eletromagnética no guia de onda retangular seria supor os modos transversos de polarização, ou seja, os modos transversos elétrico (TE) e transversos magnéticos (TM), mas devido ao efeito Kerr na presença de isolantes topológicos, ocorre uma rotação na base de polarização original da onda incidente, impedindo então de um modo puramente TE ou TM de se propagar plenamente ao longo do guia.

Diante das complicações que surgiram no guia de onda retangular, propomos uma simplificação na geometria de confinamento: consideramos uma propagação bidimensional da onda eletromagnética através da introdução de um guia tipo fenda plana ou *slab*. Neste novo sistema, as equações aparecem

simplificadas, o que nos permitiu encontrar soluções fisicamente aceitáveis para as componentes axiais e transversais dos campos elétrico e magnético, foi também possível encontrar as soluções para as equações dos campos mesmo que para desacoplá-las aumentamos o grau da equação diferencial (ordinária) para componente axial do campo magnético. De posse destas soluções, encontramos uma relação de dispersão que leva a uma velocidade de grupo aceitável das frentes de onda (uma ordem de grandeza menor do que a da luz no vácuo) na presença do efeito magneto-elétrico topológico. Tal relação de dispersão parece revelar uma frequência de corte universal para os isolantes topológicos com permissividade elétrica próximas, onde diferentemente do caso usual, não permite modos discretos de propagação. Ao atribuímos valores numéricos para as frequências de operação na faixa aceitável de baixas energias, nota-se que os campos elétrico e magnético são atenuados nas paredes do *slab* por meio de uma constante de atenuação que tende a um valor essencialmente uniforme para as frequências consideradas. Atribuímos esta atenuação principalmente ao efeito magneto-elétrico topológico, pois, a onda eletromagnética vai continuamente perder parte de sua energia para manter a corrente Hall nas paredes do *slab* toda vez que esta incidir nas superfícies deste guia.

Ao implementarmos a condição de contorno sobre a componente perpendicular do campo elétrico às paredes do *slab*, encontramos a componente na direção de confinamento do vetor de onda no vácuo (em nosso sistema na direção x) que na relação de dispersão da onda no vácuo, onde vigora uma equação de onda homogênea, conduz a uma velocidade de grupo também aceitável para as frentes de onda nesta região (na mesma ordem de grandeza do valor da velocidade da luz no vácuo). Já as outras condições de contorno levam a equações em que a interpretação física não é tão direta, mas somente conjecturando, parecem levar à mesma relação comentada anteriormente. A condição de contorno sobre as componentes perpendiculares do campo elétrico (no caso do *slab* somente E_x) tem uma estrutura menos complicada do que as condições sobre as componentes tangenciais do campo magnético, devido ao substituir as soluções adequadas para cada lado da interface entre isolante topológico e vácuo estas conterem menos termos do que para as componentes do campo magnético. Concluímos que a dificuldade ao considerarmos todas as condições de contorno, reside no fato que estas relacionam campos valorados em diferentes regiões do espaço, onde a dinâmica espaço-temporal dos campos elétrico e magnético obedecem a equações de onda completamente diferentes (no interior do guia a equação de onda é trivial, já nas paredes a equação é não-homogênea). Essencialmente, a não-trivialidade das condições de contorno complica a compatibilização das soluções e relações advindas destas com todas as condições de contorno, mesmo numa geometria de confinamento relativamente simples com a do *slab*.

Como perspectivas futuras, pretendemos completar a análise do problema abordado, verificando a coerência das soluções de campo encontradas com todas as condições de contorno. Pretendemos também quantificar como se dá a atenuação dos campos no isolante topológico através do cálculo da energia absorvida por estes quando a onda eletromagnética incide nas paredes do guia excitando o efeito magneto-elétrico topológico. Uma vertente interessante seria considerar acopladores direcionais baseados no guia *slab* tratado aqui, uma vez que, os guias podem ser dispostos paralelamente, de forma que, uma parcela dos campos de um dos guias interaja com o outro, ocorrendo um compartilhamento de energia entre os *slabs*. Além disso, poderíamos permutar a composição do guia como, por exemplo, uma das paredes ser constituída de um bom condutor o que poderia permitir a amplificação de alguns efeitos como Kerr e Faraday, ou até mesmo a obtenção de modos de polarização que um guia constituído puramente de isolantes topológicos não permite propagar plenamente ao longo deste. Outro ambiente para estudo das propriedades eletromagnéticas dos isolantes topológicos seria confinar ondas a cavidades ressonantes, em geometrias diversas como cavidades cúbicas, esféricas, toroidais entres outras. As possibilidades são muitas, uma vez que é possível variar a constituição e geometria de meios confinantes de onda eletromagnética plausivelmente.

Como em quase todo problema considerado difícil ou muito complexo a ser estudado, o primeiro passo na resolução deste é simplificá-lo, esperamos, através de um sistema simples como um guia de onda tipo *slab* ter contribuído para o estudo futuro de sistemas mais elaborados (como os citados anteriormente) de confinamento de ondas eletromagnéticas por isolantes topológicos, que devido às novas propriedades que emergem destes, muitos estudos e aplicações no campo do eletromagnetismo serão possíveis.

Referências bibliográficas

- [1] Topological Insulators - arXiv:1002.3895v1 [cond-mat.mes-hall] 20 Feb 2010.
- [2] A.R.Pereira e A.S.Pires,"Teoria Quântica de Campos em Sistemas Magnéticos de Baixas Dimensões",Universidade Federal de Viçosa e Universidade Federal de Minas Gerais (2008).
- [3] X.Wen,"Quantum Field Theory of Many-Body Systems",Oxford University Press (2004).
- [4] David J. Thouless,"Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics",World Scientific Publishing Co. Pte.Ltda (1998).
- [5] Haldane, F. D. M., 1988, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015.
- [6] Bernevig, B. A., T. A. Hughes, and S. C. Zhang, 2006, Science, **314**, 1757.
- [7] Xia Y, Qian D, Hsieh D, Wray L, Pal A, et al. 2009. Nat. Phys. 5:398–402.
- [8] Nakahara, M, "Geometry, Topology and Physics", Adam Hilger, Bristol,(1990).
- [9] Wilczek, F., 1987, Phys. Rev. Lett. **58**, 1799.
- [10] W. K. Tse et al, Giant Magneto Optical Kerr Effect and Universal Faraday Effect in Thin- Film Topological Insulators, PRL **105**, 057401 (2010).
- [11] Qi X.-L., R. Li, J. Zang, and S.-C. Zhang (2009), Inducing a Magnetic Monopole, Science, **323**, 1184.
- [12] Maciejko J., X.-L. Qi, H. D. Drew, and S.-C. Zhang (2010), arXiv:1004.2514.
- [13] Neil W. Archrofit,"Solide State Physics",Harcourt, Inc. (1976).
- [14] Charles Kittel,"Introduction a Solide State Physics", Jhon Willey and Sons,Inc.(2005).
- [15] Topological Insulators and Superconductors - arXiv:1008.2026v1 [cond-mat.mes-hall] 12 Aug 2010.
- [16] A.Atland and B.Simons,"Condensed Matter Field Theory",Cambridge University Press,Second Edition (2010).
- [17] Von Klitzing, K., 2005, Phil. Trans. R. Soc. A **363**, 2203..

- [18] Berry, M. V., 1984, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45..
- [19] Quantum Spin Hall Effect in Graphene PRL **95**, 226801 (2005).
- [20] DiVincenzo, D. P. and E. J. Mele, 1984, Phys. Rev. B **29**, 1685.
- [21] Kane, C. L. and E. J. Mele, 2005a, Phys. Rev. Lett. **95**,
226801.
- [22] Annu. Rev. Condens.Matter Phys. 2011. 2:55–78.
- [23] New Journal of Physics **12** (2010) 065013.
- [24] H. C. Ohanian and R. Ruffini "Gravitation and Spacetime", W.W.Norton and Company, Second Edition (1994)
- [25] Qi, X. L., T. L. Hughes, and S. C. Zhang, 2008, Phys. Rev., B **78**, 195424.
- [26] Topological Quantization in Units of the Fine Structure Constant,PRL **105**, 166803 (2010)
- [27] D. J. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics", Prentice Hall, Third Edition,
(1999).
- [28] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Wiley, New York, Third Edition (1999).
- [29] Optical signature of topological insulators, Physical Review B **80**, 113304 (2009).
- [30] Akira Furusaki, Condensed Matter Theory Lab., www.riken.go.jp/lab-www/theory/colloquium/furusaki.pdf.

Apêndice A – Algumas propriedades de ondas eletromagnéticas confinadas em guias de onda usuais

Apresentaremos aqui, alguns resultados básicos acerca da propagação de sinais eletromagnéticos em guias de onda constituídos de paredes perfeitamente condutoras. Estes resultados elucidam os procedimentos que foram utilizados nesta dissertação na análise da propagação de ondas eletromagnéticas confinadas a isolantes topológicos. Guias de onda feitos de paredes perfeitamente condutoras são sistemas idealizados, mas, materiais com propriedades ótimas de condução são muito aproximadamente descrito pela análise apresentada neste apêndice. Além disso, tal sistema serve como protótipo para o estudo de guias de ondas mais exóticos (como o guia constituído de paredes isolantes topológicos abordado neste trabalho) devido a trivialidade das condições de contorno facilitarem a obtenção de soluções compatíveis com estas. Os resultados apresentados a seguir são encontrados nas referências: [27,28].

Considerando um guia de onda de formato arbitrário (como ilustrado na Fig. A.1) e assumindo que o guia é um condutor perfeito, dentro do material que constitui as paredes do guia, os campos elétrico e magnético se anulam. Assim, as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{cases} E^{\parallel} = 0 \\ B^{\perp} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

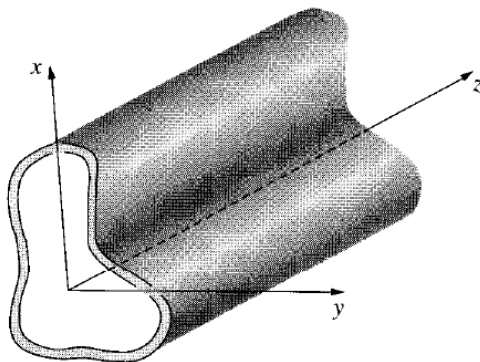


Figura A.1 – Guia de formato arbitrário condutor perfeito [27].

Supondo ondas monocromáticas se propagando ao longo do guia, as formas dos campos são descritas pelas equações:

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \\ \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Sendo assim, os efeitos de confinamento figuram somente nas amplitudes transversais na forma das funções $E(x, y)$ e $B(x, y)$. Estes campos podem ser escritos como:

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \quad (\text{A.3})$$

Considerando juntamente com as equações acima, a forma geral de onda plana dada pela equação (A.2) e, em seguida, inserindo-as nas equações vetoriais (lei de Faraday e lei de Ampere) de Maxwell livres de fontes, encontra-se as componentes transversais dos campos elétrico e magnético em função das derivadas das componentes axiais destes campos:

$$E_x = \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_x E_z + \omega \partial_y B_z) \quad (\text{A.4})$$

$$E_y = \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_y E_z - \omega \partial_x B_z) \quad (\text{A.5})$$

$$B_z = \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_x E_z - \omega \partial_x B_z) \quad (\text{A.6})$$

$$B_z = \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_x E_z - \omega \partial_x B_z) \quad (\text{A.7})$$

Substituindo as componentes transversas encontradas acima nas equações remanescentes, ou seja, nas equações escalares (lei de Gauss e divergente do campo magnético) de Maxwell, pode-se obter as equações diferenciais desacopladas para as componentes axiais dos campos elétrico e magnético:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2) E_z = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2) B_z = 0, \quad (\text{A.9})$$

guias de onda deste tipo não admitem ondas transversal elétrico e magnético (TEM) ao mesmo tempo.

Apêndice B – Guia de onda retangular

Consideramos agora, um guia também constituído de material perfeitamente condutor, porém, possuindo geometria retangular como ilustrada na Fig. A.2. As equações (A.4) a (A.7), admitem dois modos de polarização ou dois subconjuntos de soluções: os modos transverso elétrico (TE) e transverso magnético (TM), cujas soluções são explicitadas a seguir.

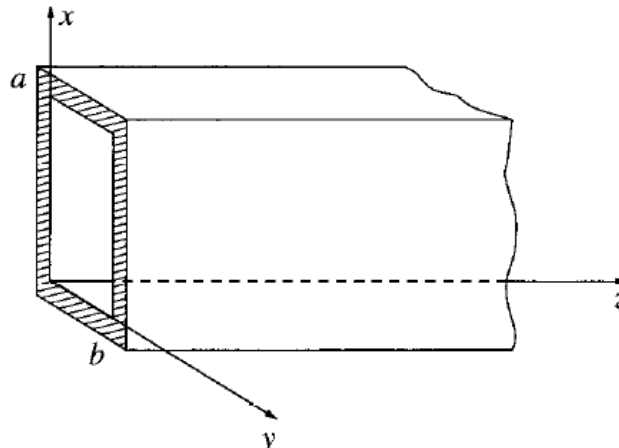


Figura A.2 – Guia de onda retangular com paredes perfeitamente condutoras [27].

Modo TM

Neste modo de polarização a onda eletromagnética não possui componente de campo magnético ao longo da direção de propagação. Utilizando a equação (A.8) e implementando a condição de contorno (A.1) para o campo elétrico, encontra-se a solução:

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{A.10})$$

Onde m e n são inteiros positivos E_0 é uma constante com dimensão de campo elétrico. Considerando todos os valores possíveis de m e n as soluções constituem um conjunto ortogonal de funções. A relação de dispersão pode ser encontrada inserindo a solução acima na equação diferencial para a componente axial do campo elétrico:

$$\omega^2 = k^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \quad (\text{A.11})$$

Uma frequência de corte definida como ω_{mn} , limita inferiormente os possíveis valores de frequências que se propagam ao longo do guia:

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (\text{A.12})$$

A velocidade de grupo das frentes de onda é obtida da equação acima através da relação:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} < c. \quad (\text{A.13})$$

Modo TE

Neste modo a componente axial do campo elétrico se anula. Da equação diferencial para a componente axial do campo magnético obtém-se:

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{A.14})$$

Onde m e n também são inteiros positivos, B_0 é uma constante com dimensão de campo magnético e para todos os possíveis valores de m e n as soluções constituem um conjunto ortogonal de funções. A relação de dispersão, frequências de corte e velocidade de grupo têm forma idênticas às do modo TE.

Apêndice C – Obtenção dos modos TE e TM e das soluções no guia de onda retangular através de um *slab*.

Consideremos agora um *slab* constituído de paredes perfeitamente condutoras como nas seções anteriores deste apêndice. Tal estrutura é ilustrada na figura abaixo:

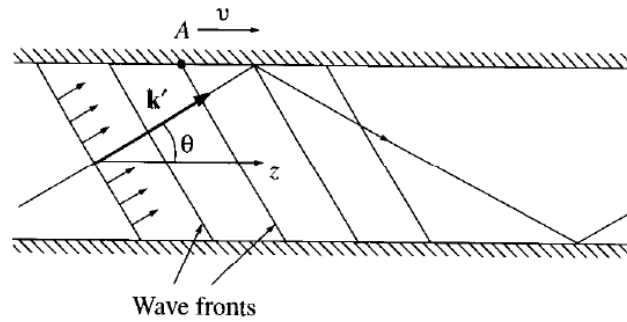


Figura A.3 – *Slab* com paredes perfeitamente condutoras [27].

Neste sistema de confinamento, as equações para as componentes axiais se reduzem a:

$$\partial_x^2 E_z + \left(\frac{\mu \epsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) E_z = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_x^2 B_z + \left(\frac{\mu \epsilon w^2}{c^2} - k^2 \right) B_z = 0. \quad (\text{A.16})$$

Para o modo TM, a solução encontrada tem a forma (considerando a condição de contorno sobre o campo elétrico):

$$E_z(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right). \quad (\text{A.17})$$

Onde m é um inteiro positivo, E_0 é uma constante com dimensão de campo elétrico e a é largura do *slab*. A relação de dispersão analogamente como procedido no guia de retangular é dada pela equação (A.18) e a freqüência de corte no *slab* é $\left(\omega_n = \frac{m\pi}{a}\right)$.

$$\frac{w^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \quad (\text{A.18})$$

Com a velocidade de grupo:

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2} < c. \quad (\text{A.19})$$

O modo TE é obtido da equação diferencial para a componente axial do campo magnético considerando a condição de contorno sobre o campo magnético,

sendo a solução para componente axial do campo magnético expressada abaixo:

$$B_z(x) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right). \quad (\text{A.20})$$

Onde m e n são como especificados no modo TM e B_0 uma constante com dimensões de campo magnético.

Para obter as soluções no guia de onda retangular, basta mudar a direção de confinamento no *slab* para direção y em vez de x , e alterar a largura do *slab* de a para b . As soluções no guia de onda retangular serão resultados da soma direta dos modos obtidos no primeiro *slab* mais os modos obtidos no segundo (com confinamento em y e largura b). Este procedimento simples que nos motivou a considerar a propagação bidimensional de ondas eletromagnéticas confinadas a isolantes topológicos.