Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

João Paolo Rodrigues Alves Paiva

Funções Geradoras e Algumas Aplicações à Contagem

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2020

JOÃO PAOLO RODRIGUES ALVES PAIVA

FUNÇÕES GERADORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES À CONTAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Coorientador: Luiz Gustavo Perona Araújo

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

Paiva, João Paolo Rodrigues Alves, 1985-

P142f Funções geradoras e algumas aplicações à contagem : . /
2020 João Paolo Rodrigues Alves Paiva. – Belo Horizonte, MG, 2020.
108f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.107-108.

1. Análise combinatória-estudo e ensino. 2. Funções geradoras. 3. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciência Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

510

JOÃO PAOLO RODRIGUES ALVES PAIVA

FUNÇÕES GERADORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES À CONTAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de março de 2020.

Assentimento:

João Paolo Rodrigues Alves Paiva
Autor

Luís Felipe Gonçalves Fonseca
Luís Felipe Gonçalves Fonseca
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Abel e Adriana; à minha amada esposa Camila; ao meu melhor amigo e filho Nícolas e às minhas irmãs Isabella e Rafaella.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por iluminar meus caminhos.

Aos meus pais Abel e Adriana, por absolutamente tudo que vocês passaram para que eu pudesse escrever essa obra.

A minha amada esposa Camila, pelo amor e compreensão. Por estar sempre ao meu lado me incentivando nos momentos difíceis.

Ao meu filho Nícolas, por me fazer entender o significado de amor incondicional.

As minhas irmãs Isabella e Rafaella, pelo companheirismo habitual e eterno.

Aos meus nobres professores e professoras que contribuíram de maneira grandiosa para o enriquecimento da minha formação acadêmica.

Ao meu estimado orientador, Luís Felipe Gonçalves Fonseca, por quem nutro grande admiração. Serei sempre grato por compartilhar seu conhecimento. Obrigado por compreender, em vários momentos, os meus afastamentos em função das viagens para realização de concursos públicos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

PAIVA, João Paolo Rodrigues Alves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2020. **Funções Geradoras e Algumas Aplicações à Contagem**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Coorientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.

A presente obra traz, inicialmente, um corpo teórico acerca das sequências e séries numéricas. Esse primeiro estudo serve de base para a abordagem que ocorre em seguida sobre as sequências e séries de funções. Dentro desse contexto, são exploradas algumas definições e teoremas relacionados à convergência pontual, convergência uniforme, séries de potências e séries de Taylor. Ainda nessa parte, a série geométrica e a série exponencial são enfatizadas. A partir desse primeiro exposto, a obra contempla algumas técnicas de contagem e aplicações: o princípio da inclusão e exclusão, partições e funções geradoras. Essas últimas, naturalmente, resgatarão o conteúdo relacionado às séries geométrica e exponencial, mas, dessa vez, sem a preocupação com as questões envolvendo convergência. Por fim, no tocante ao ensino da matemática, o conteúdo de análise combinatória é analisado criticamente em cinco livros didáticos do ensino básico.

Palavras-chave: Princípio da Inclusão e Exclusão. Funções Geradoras. Análise Combinatória. Análise de livros didáticos.

Abstract

PAIVA, João Paolo Rodrigues Alves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2020. **Generating functions and some counting applications**. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Co-adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo.

This work introduces a theoretical approach to numerical sequences and series. This first study provides a basis for our approach related to the sequences and series of functions. Within this context, some definitions and theorems related to pointwise convergence, uniform convergence, power series and Taylor series are explored, giving an emphasis on geometric and exponential series. Further the work focuses on certain counting techniques and applications: such as the inclusion-exclusion principle, partitions and generating functions. The last two topic will rescue the content related to geometric and exponential series, but this time, without worrying about issues involving convergence. Finally, with regard to the teaching of mathematics, we critically analyze the topic of combinatorial analysis as presented in five textbooks that cover basic mathematical concepts.

Keywords: Inclusion-Exclusion Principle. Generating Function. Combinatorial Analysis. Textbooks analysis.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1
Introdução

Caro leitor, enquanto aluno do ensino básico, você estudou os métodos de contagem? Caso não se lembre exatamente da expressão *métodos de contagem*, é provável que se recorde das seguintes palavras: permutação, arranjo e combinação.

Ao leitor professor de matemática, é feito o convite a uma reflexão: quando você ensina os conteúdos da análise combinatória aos seus alunos, certamente são abordados os arranjos, as permutações e as combinações. E além disso? Outras técnicas de contagem são contempladas? Outras situações problema, diferentes das ideias convencionais, são apresentadas aos discentes? As fómulas "surgem" de forma intuitiva?

Esta dissertação pretende colaborar para a expansão daquilo que é ensinado em análise combinatória na maioria das salas de aula de todo o Brasil. Para isso, é oferecido ao leitor um corpo teórico estruturado em cinco capítulos.

As definições de sequências e séries numéricas, sequências e séries de funções, convergência pontual, convergência uniforme e suas consequências, compõem o Capítulo 2 – Sequências e Séries de Funções. Além disso, no mesmo capítulo, são apresentadas as séries de potência e as séries de Taylor com ênfase nas séries geométrica e exponencial. O conteúdo citado será base para a sequência do trabalho.

Capítulo 3 – Princípio da Inclusão e Exclusão. Serão discutidos dois métodos de contagem: o princípio da inclusão e exclusão e as permutações caóticas. Já o Capítulo 4 – Funções Geradoras, visa mostrar ao leitor como o cálculo dos coeficientes das funções geradoras, ordinárias e exponenciais, nos fornecem o número de distribuições de "bolas distintas em caixas distintas ou idênticas".

No Capítulo 5 – Partições. As distribuições de "bolas idênticas em caixas idênticas" é o cerne dos problemas expostos.

Todos os capítulos citados até aqui têm exemplos de aplicações das diferentes técnicas de contagem abordadas no texto. É necessário que o leitor tenha um conhecimento prévio sobre elementos de análise e, obviamente, de análise combinatória. As referências norteadoras pertinentes à analise e à analise combinatória são, respectivamente, [16] e [4].

Alguns teoremas são demonstrados no decorrer da obra, mas vale salientar que as demonstrações não devem assumir o papel principal, e sim serem utilizadas como justificativa para os resultados obtidos.

Por fim, o Capítulo 6 – Análise Combinatória no Ensino Médio, traz uma investigação crítica dos conteúdos desenvolvidos, na esfera da análise combinatória, em cinco livros didáticos utilizados no ensino básico.

Em súmula, nossas principais tratativas se darão como segue:

- o problema de distribuir bolas distintas em caixas distintas;
- o problema de distribuir bolas distintas em caixas idênticas;
- o problema de distribuir bolas idênticas em caixas distintas;
- o problema de distribuir bolas idênticas em caixas idênticas;
- abordagem da análise combinatória em alguns livros didáticos.

Boa leitura!

2

Sequências e Séries de Funções

Este capítulo pode ser omitido caso o leitor tenha familiaridade com sequências e séries.

É comum em Matemática nos depararmos com alguns problemas de aplicação, providos de certas condições, que podem ser resolvidos a partir do estudo de alguma função. Constantemente, nesse tipo de situação, pode ser conveniente obter uma *sequência de funções* $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, em que cada uma delas atende às condições exigidas de maneira aproximada, contudo com aproximações cada vez mais precisas. Nesse caso, o limite dessa sequência de funções, além de cumprir as condições estabelecidas, deverá nos fornecer a melhor aproximação possível e, por consequência, a resolução mais acertada possível para tais problemas.

2.1 Convergência Numérica

Uma sequência de números reais pode ser pensada como uma "fila" de números. Mais formalmente, dizemos que

Definição 2.1: Uma *sequência* de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número $n \in \mathbb{N}$ um número $a_n \in \mathbb{R}$. Falamos que a_n é o $n - \acute{e}simo$ termo da sequência. As sequências numéricas podem ser representadas pela notação $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ ou, de forma mais compacta, pela notação (a_n).

Uma sequência (a_n) é dita *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe um real c tal que $a_n \leq c$ (respectivamente $a_n \geq c$) para todo natural n. Além disso, dizemos que uma sequência (a_n) é *limitada* quando ela for limitada tanto superiormente quanto inferiormente.

Quando uma sequência (a_n) é limitada pelo número real A, escrevemos

$$|a_n| \leq A.$$

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. O conjunto X será *limitado superiormente* se existir um número real K tal que $X \subset (-\infty, K]$. Isto posto, dizemos que K é uma *cota superior* para X. De modo análogo, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, não vazio, é *limitado inferiormente* se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $X \subset [k, +\infty)$. Nesse caso, dizemos que k é uma *cota inferior* para X.

Axioma 2.2 (Axioma da completude de $\mathbb{R}$): Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então X possui uma menor cota superior.

Sendo M a menor cota superior de X, diremos que M é o *supremo* de X, e será denotado por $M = \sup X$.

Em análise, é muito comum tratarmos das *sequências convergentes*. Uma sequência (a_n) é convergente se, conforme o índice n aumenta, o elemento a_n vai se tornando cada vez mais próximo de um certo número l. Nesse caso, dizemos que l é o limite da sequência.

Definição 2.3: Seja um $\varepsilon > 0$ qualquer. Suponha que é sempre possível encontrar um natural n_0, que depende de ε, tal que, para todo $n > n_0$ temos $|a_n - l| < \varepsilon$. Assim, dizemos que (a_n) é uma sequência convergente que converge para l, ou tem *limite* l. Podemos escrever $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim a_n = l$ ou $a_n \to l$. Caso uma sequência não convirja, ela é denominada *divergente*.

Exemplo 2.1.1: Estudar a convergência da sequência (a_n) em que $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e um natural n_0 tal que $n_0 > \dfrac{1}{4\varepsilon}$. Assim, se $n > n_0$, temos

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6} < \frac{1}{4n} < \frac{1}{4n_0} < \frac{1}{4\frac{1}{4\varepsilon}} < \varepsilon.$$

Dessa forma, pela Definição 2.3, a_n converge para $\dfrac{1}{2}$, ou $a_n \to \dfrac{1}{2}$.

Teorema 2.4: Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência que converge para l. Dessa forma, pela Definição 2.3, dado $\varepsilon = 1$, existe um natural n_0 tal que, se $n > n_0$ tem-se que $|a_n - l| < \varepsilon = 1$. Segue da desigualdade triangular que, se $n > n_0$ então $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$. Assim, se $A = \max\{1+|l|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}|\}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq A$. Portanto, a sequência citada é limitada. □

Definição 2.5: Uma sequência (a_n) é dita *monótona* quando, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a_n \leq a_{n+1}$ ou $a_{n+1} \leq a_n$ ou $a_n < a_{n+1}$ ou $a_{n+1} < a_n$.

O Teorema 2.6 é uma consequência do Axioma 2.2. A prova desse teorema será omitida aqui, mas pode ser conferida em [16] ou [4].

Teorema 2.6: Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Seja (a_n) uma sequência numérica de números reais. Quando falamos de *série*, estamos nos referindo à soma

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

que tem número infinito de parcelas. No entanto, a adição de infinitos termos é uma operação da qual não podemos extrair um resultado. Para darmos sentido às somas infinitas utilizaremos limites.

Associada à sequência (a_n), consideremos uma outra sequência (s_n) em que

$$s_1 = a_1;\ s_2 = a_1 + a_2;\ \ldots; s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n;\ \ldots.$$

Chamamos (s_n) de *soma parcial* ou *reduzida de ordem* n.

Assim, usando a notação de somatório, escrevemos $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. No lugar de $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ escrevemos $\lim s_n$. Por isso,

$$\lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.1}$$

O $n-$*ésimo* termo da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ou puramente $\sum a_n$) é s_n, que usualmente é referido como *termo geral* da série.

Exemplo 2.1.2 (A série geométrica): Quando $0 < |a| < 1$, a série geométrica $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$ tem soma igual a $\frac{1}{1-a}$. Isso quer dizer que, nessas condições, o limite da série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ existe. Por outro lado, quando $a > 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ vai assumindo valores cada vez maiores e, nesse caso, o limite é $+\infty$. Quando $a < -1$ a série geométrica alterna.

2.1.1 Séries convergentes e séries absolutamente convergentes

Definição 2.7: Se o limite dado pela Equação 2.1 existir e for finito, então a série $\sum a_n$ é *convergente*. Caso esse limite não exista ou seja infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), a série é *divergente*.

Por isso, pelo Exemplo 2.1.2, podemos afirmar que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é convergente quando $0 < |a| < 1$ e divergente se $|a| > 1$.

Teorema 2.8: Se uma série converge, seu termo geral tende a zero.

Demonstração. Seja $\sum a_n$ uma série de reduzida s_n e soma s. Então $a_n = s_n - s_{n-1}$. Disso, concluí-se que $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$. Logo $a_n \to 0$. □

Devemos nos atentar para o método estabelecido pelo Teorema 2.8. Se $a_n \not\to 0$, conclui-se que a série diverge. Mas a condição $a_n \to 0$, por não ser suficiente, não nos permite atestar a convergência de uma série. Um dos casos mais conhecidos que ilustra essa situação é o da série harmônica, cujo termo geral $1/n$ tende a 0, mas a série diverge. Ao leitor, sugerimos a discussão mais detalhada feita em [4] a respeito da série harmônica.

Teorema 2.9 (Critério da Comparação): Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não negativos com $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

(*a*) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge e $\sum a_n \leq \sum b_n$;

(*b*) $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

Demonstração. Pressuponha que $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ são as reduzidas das séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente. Temos que A_n e B_n são sequências não decrescentes com $A_n \leq B_n$.

Para provar a parte (*a*), basta perceber que B_n converge para um certo limite B e que $A_n \leq B$ para todo n. Dessa forma, como A_n é uma sequência não decrescente e limitada, segue do Teorema 2.6 que ela converge para $A \leq B$.

Provar a parte (*b*) é simples, pois a convergência de $\sum b_n$, por (*a*), acarretaria a convergência de $\sum a_n$, contradizendo a hipótese. $\square$

Exemplo 2.1.3 (A p-série): A p-série (ou série p) é toda série da forma $\sum \frac{1}{n^p}$.

Se $p < 1$, temos que

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} = \frac{n}{n^p} = n^{1-p}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1-p} = +\infty$, pelo Teorema 2.8 a p-série diverge.

Para o caso em que $p > 1$, seja l a soma da série geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2^p}\right)^n$. Seja s_q a reduzida de $\sum \frac{1}{n^p}$. Dado $q \in \mathbb{N}$, consideremos n tal que $q \leq 2^n - 1$. Assim,

$$\begin{aligned} s_q &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p}\right) \\ &< 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)p}} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^p}\right)^j < l, \end{aligned}$$

o que mostra que toda reduzida s_q da p-série, com $p > 1$, é menor do que l. Logo, pelo Teorema 2.9, nesse caso a p-série converge.

Exemplo 2.1.4: Determinar se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

Temos que $\ln n > 1$ quando $n \geq 3$. Então $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 3$. Como a série harmônica diverge, pode-se inferir, pelo Critério da Comparação, que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

Exemplo 2.1.5: Mostrar que a série $\sum \frac{1}{n!}$ converge.

Seja n natural tal que $n \geq 4$. Então $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$. Logo, $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ou, de outra forma, $\sum \frac{1}{n!} \leq \sum \frac{1}{n^2}$.

Como, pelo Exemplo 2.1.3, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, temos, pelo Critério da Comparação, que $\sum \frac{1}{n!}$ também converge.

Exemplo 2.1.6: Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes de termos positivos, mostre que $\sum a_n b_n$ também converge.

Como $\sum a_n$ é convergente temos, pelo Teorema 2.8, que $\lim a_n = 0$. Portanto, como os termos são positivos, para algum k teremos $a_n < 1$ para todo $n > k$. Então, para cada $p > k$, temos que $\sum_{n=k+1}^{p} a_n b_n \leq \sum_{n=k+1}^{p} b_n$. Como $\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n$ converge por hipótese, então, pelo Critério da Comparação, $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n b_n$ também converge. Além disso, $\sum_{n=1}^{k} a_n b_n$ converge por ser finita.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{k} a_n b_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n b_n$ também converge.

Exemplo 2.1.7: Mostrar que a série $\sum \frac{2^n}{3^{n+1} n!}$ converge.

Sabemos que as séries de termos positivos $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ e $\sum \frac{1}{n!}$ convergem. Além disso, pelo Teorema 2.9, $\sum \frac{1}{3n!} < \sum \frac{1}{n!}$, cujos termos são positivos, também converge. Assim, pelo resultado obtido no Exemplo 2.1.6, temos que $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3n!} = \sum \frac{2^n}{3^{n+1} n!}$ converge.

Definição 2.10: Uma série $\sum a_n$ é *absolutamente convergente*, ou *converge absolutamente*, quando a série $\sum |a_n|$ converge. Quando $\sum a_n$ converge e $\sum |a_n|$ diverge, a série $\sum a_n$ é *condicionalmente convergente.*

Teorema 2.11: Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração. Fixado i, seja p_i a soma dos termos positivos de (a_n), varrendo de 1 até i. Analogamente, seja q_i a soma dos módulos dos termos negativos de (a_n), varrendo de 1 até 1. Assim, as reduzidas das séries $\sum |a_n|$ e $\sum a_n$ são, respectivamente,

$$X_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = p_n + q_n, \tag{2.2}$$
$$Y_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p_n - q_n.$$

As sequências (X_n), (p_n) e (q_n) são não decrescentes. Seja X o limite da sequência (X_n), que converge por hipótese. Temos, pela Equação 2.2, que

$$p_n \leq X_n \leq X \quad \text{e} \quad q_n \leq X_n \leq X. \tag{2.3}$$

No que segue, por 2.3 e pelo Critério da Comparação, constatamos que (p_n) e (q_n) convergem. Digamos que convirjam para p e q, na devida ordem.

Portanto, como $Y_n = p_n - q_n$, passando o limite, temos que

$$\lim Y_n = \lim(p_n - q_n) = p - q.$$

Logo $\sum a_n$ converge. □

Exemplo 2.1.8: Determine se a série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Repare que $a_n = \frac{\cos n}{n^2}$ pode ser positivo ou negativo. Nesse caso, recorreremos à investigação da série cujos termos são os mesmos da série original, mas em módulo.

Sabe-se que $|\cos n| \leq 1$. Então $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, para todo n. Dessa forma, sendo $\sum \frac{1}{n^2}$ uma série convergente, temos, pelo Critério da Comparação, que $\sum \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ também converge. Logo, pelo Teorema 2.11, $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ é convergente.

2.1.2 Testes de convergência

Os testes que veremos a seguir são consequências do Teorema 2.9 (Critério da Comparação). Estes testes, que são teoremas na verdade, são importantes para averiguar se uma dada série converge ou não.

Teorema 2.12: Seja $\sum b_n$ uma série absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência (a_n/b_n) for limitada (em particular, se for convergente), então a série $\sum a_n$ será absolutamente convergente.

Demonstração. Se, para algum $c > 0$, tivermos $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq c$ então $|a_n| \leq c|b_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema 2.9, $\sum |a_n|$ converge. □

Teorema 2.13 (Teste de Leibniz): Se $\lim a_n = 0$, em que a_n é uma sequência monótona não crescente, então a série $\sum (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.

Demonstração. Temos que $s_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n$. Dessa forma,

$$s_{2n} = s_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \quad \text{e} \quad s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Assim, as reduzidas de ordem par formam uma sequência não decrescente, pois $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$, enquanto as reduzidas de ordem ímpar formam uma sequência não crescente, já que $a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0$. Além disso, $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ ou, de forma equivalente, $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0$. Portanto, temos que

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

E, dessa maneira, tanto (s_{2n}) quanto (s_{2n-1}) são monótonas e limitadas. Segue, do Teorema 2.6, que (s_{2n}) e (s_{2n-1}) são convergentes. Como

$$0 = \lim(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim s_{2n-1} - \lim s_{2n},$$

temos $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$. Assim s_n converge e o teorema está demonstrado. □

Exemplo 2.1.9: Um dos exemplos mais conhecidos é o da série harmônica alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Tendo em vista que $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = a_n$, para qualquer natural n e que $\lim a_n = 0$, então, pelo Teste de Leibniz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

Exemplo 2.1.10: Verificar se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ converge.

Se considerarmos o módulo do termo geral a partir da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$, então a derivada $f'(x) = \dfrac{-x - 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0$ para $x \geq 1$. Por isso, a função f é decrescente quando $x \geq 1$. Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ temos, pelo Teste de Leibniz, que a série alternada em questão é convergente.

Teorema 2.14 (Teste de d'Alembert ou teste da razão): Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma constante c tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c < 1$ para todo n suficientemente grande (em particular, se $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$), então a série $\sum |a_n|$ converge.

Demonstração. De fato, se para todo n suficientemente grande, vale $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c = \dfrac{c^{n+1}}{c^n}$, então $\dfrac{|a_{n+1}|}{c^{n+1}} \leq \dfrac{|a_n|}{c^n}$. Dessa forma, a sequência de números não negativos $\dfrac{|a_n|}{c^n}$ é não crescente a partir de certa ordem e, portanto, é limitada.

Como a série $\sum c^n$ é absolutamente convergente, decorre do Teorema 2.12 que $\sum a_n$ converge absolutamente. $\square$

Teorema 2.15 (Teste de Cauchy ou teste da raiz): Se c é um número real não negativo tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (em particular, quando $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$), a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstração. Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$, então $|a_n| \leq c^n$ para todo n suficientemente grande. Temos ainda que a série $\sum c^n$ é a série geométrica com $|c| < 1$ que, nesse caso, converge. Logo, pelo Teorema 2.9, $\sum |a_n|$ converge. $\square$

Quando se aplica o teste da razão, regularmente se procura calcular, assumindo que exista, o $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

Corolário 2.16: Seja $\sum a_n$ série tal que $\lim |a_{n+1}/a_n| = L$. Se

(i) $L < 1$, basta escolher um c tal que $L < c < 1$ e teremos $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c$ para todo n suficientemente grande. Assim, recaímos no que foi provado no Teorema 2.14.

(ii) $L > 1$, então $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ e $|a_{n+1}| > |a_n|$ para todo n suficientemente grande. Por isso, o termo geral a_n não tende para zero e, portanto, a série diverge.

(iii) $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Da mesma forma, quando se aplica o teste da raiz, é habitual procurar o $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Corolário 2.17: Seja $\sum a_n$ série tal que $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Se

(i) $L < 1$, elege-se um c tal que $L < c < 1$ e teremos $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ para todo n suficientemente grande. Dessa maneira, retomamos o que foi provado no Teorema 2.15.

(ii) $L > 1$ então $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ e $|a_n| > 1$ para todo n suficientemente grande. Por isso, o termo geral a_n não tende para zero. Logo a série diverge.

(iii) $L = 1$ o teste é inconclusivo.

Exemplo 2.1.11: Teste cada uma das séries seguintes, verificando se converge ou não.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!(1-\cos n^2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(an+1/n)^n},\ a > 0$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!(2+\operatorname{sen} n^2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}$

a) Temos que $a_n = \dfrac{2^n n!(1-\cos n^2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)} \leq \dfrac{2^n n!}{5\cdot 8\cdots(3n-1)} = b_n$. Aplicando o teste da razão em b_n, obtemos $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2n+2}{3n+2} \to \dfrac{2}{3} < 1$. Logo $\sum b_n$ converge e, pelo Critério da Comparação, $\sum a_n$ também converge.

b) Se $a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{(an+1/n)^n}$, então $\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{n^{1+1/n^2}}{an+1/n} = \dfrac{(\sqrt[n]{n})^{1/n}}{a+1/n^2} \to \dfrac{1}{a}$. Como $a>0$, pelo teste da raiz, $\sum a_n$ converge.

c) Se $a_n = \dfrac{3^n n!(2+\operatorname{sen} n^2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}$, então $a_n \geq \dfrac{3^n n!}{5\cdot 7\cdots(2n-1)} = b_n$. Fazendo $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{3n+3}{2n+1} \to \dfrac{3}{2} > 1$, concluímos, pelo teste da razão, que $\sum b_n$ diverge e, pelo Critério da Comparação, $\sum a_n$ também diverge.

O próximo teorema estabelece uma conexão entre os testes da razão e da raiz.

Teorema 2.18: Seja (a_n) uma sequência cujos termos são não nulos. Se $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Demonstração. Veja o Teorema 7 da página 43 de [16]. □

Exemplo 2.1.12: Dada uma sequência de números positivos x_n com $\lim x_n = a$, prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a$.

Sendo $y_n = x_1 x_2 \ldots x_n$, temos que $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = x_{n+1}$. Assim $\lim \dfrac{|y_{n+1}|}{|y_n|} = \lim x_{n+1}$. Por hipótese, $\lim x_{n+1} = a$. Desse modo, pelo Teorema 2.18, temos que

$$\lim \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} = \lim \sqrt[n]{|y_n|} = \lim \sqrt[n]{|x_1 x_2 \ldots x_n|} = \lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a.$$

Teorema 2.19 (Critério de convergência de Cauchy): Uma sequência (a_n) converge se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, $n > n_0$ acarretará $|a_n - a_{n+j}| < \varepsilon$.

Demonstração. Veja o Teorema 2.26 da página 39 de [4]. □

2.2 Convergência Pontual

Em análise, a *convergência pontual* é um dos conceitos que permeiam o estudo sobre convergência de sequências de funções. A convergência pontual também é conhecida como *convergência ponto a ponto* ou *convergência simples*.

Definição 2.20: Dizemos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $X \subset \mathbb{R}$, converge pontualmente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a sequência de números $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ converge para $f(x)$. Usaremos a notação $f_n \xrightarrow{p} f$.

Em outras palavras, $f_n \xrightarrow{p} f$ em X quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe um natural n_0, que depende de ε e de x, tal que se $n > n_0$ então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Também diz-se que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ pontualmente (ou simplesmente) em X.

Por intermédio dos exemplos seguintes, veremos que f pode ou não ser contínua.

Exemplo 2.2.1: Seja a sequência $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$. Dado $\varepsilon > 0$, e fixado x, existe um natural $n_0 > \dfrac{x}{\varepsilon}$ tal que se

$$n > n_0 \text{ então } \left|\frac{x}{n}\right| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| < \frac{x}{n_0} < x/\frac{x}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Logo $f_n \xrightarrow{p} f$, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ estipulado, tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} (x/n) = 0$.

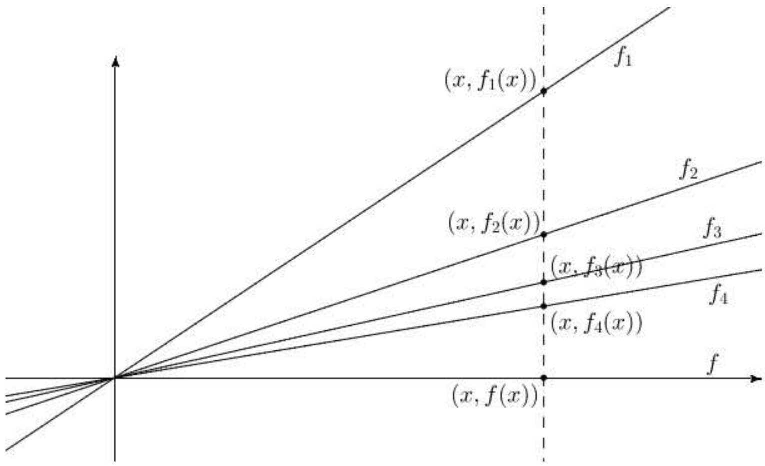


Figura 2.1: Gráfico de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$, referente ao Exemplo 2.2.1.

Exemplo 2.2.2: Seja a sequência $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = x^n$. Dados $\varepsilon > 0$ e $n_0 > \varepsilon$ temos que

(a) se $x = 1$ e $n > n_0$ então $|1^n - 1| = 0 < \varepsilon$.

(b) se $0 \leq x < 1$ e $n > n_0$ então $|x^n - 0| < x^{n_0} < \varepsilon \cdot x^{n_0} < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 1$.

Por (a) e (b), concluímos que $f_n \xrightarrow{p} f$, em que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 1, & se \quad x = 1 \end{cases}.$$

Exemplo 2.2.3: Consideremos a sequência $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n} + x$. Dados $\varepsilon > 0$ e $n_0 > \dfrac{x^2}{\varepsilon}$, com x fixo, temos que

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{n} + x - x\right| = \left|\frac{x^2}{n}\right| < \left|\frac{x^2}{n_0}\right| < \varepsilon.$$

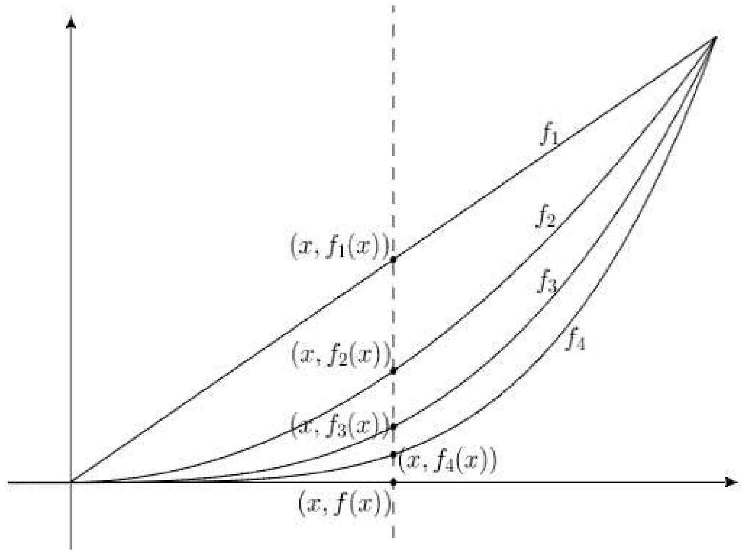


Figura 2.2: Gráfico de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$, referente ao Exemplo 2.2.2.

Portanto $f_n \xrightarrow{p} f$ com $f(x) = x$.

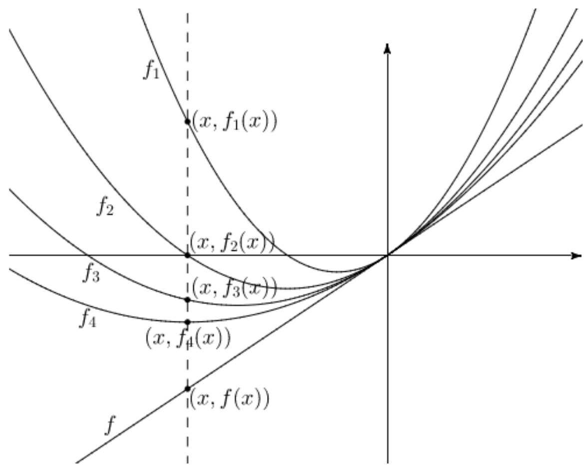


Figura 2.3: Gráfico de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$, referente ao Exemplo 2.2.3.

Exemplo 2.2.4: Mostrar que a sequência $f_n(x) = e^{x/n}$ tende a 1 pontualmente, para todo x real.

Tendo $\varepsilon > 0$, fixado $x \neq 0$ e $n_0 > \dfrac{1}{\ln \varepsilon^{1/x}}$, então $n > n_0$ acarreta $|e^{x/n} - 1| < |e^{x/n}| < |e^{x/n_0}| < |e^{x/(1/\ln \varepsilon^{1/x})}| = |e^{\ln \varepsilon}| = |\varepsilon| = \varepsilon$, para todo x não nulo.

Se $x = 0$, é imediato que $\varepsilon^{x/n} = 0$ para qualquer natural n.

Dessa forma, sendo $f(x) = 1$, está provado que $f_n \xrightarrow{p} f$, ou que $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x/n} = 1$.

Exemplo 2.2.5: Seja a sequência $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, definida para $x \in [0,\infty)$. Dessa forma, para $x = 0$, a sequência é constante. Temos $f_n \to 0$ para $x = 0$. Para $x \in (0,1)$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ e, portanto, $f_n \to 0$. Para $x = 1$ a sequência é constante e assume o valor $\frac{1}{2}$, e assim, nesse caso, $f_n \to \frac{1}{2}$. Por fim, para $x > 1$, temos $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$. Sendo assim, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = 1$.

Concluímos que $f_n \xrightarrow{p} f$ sendo que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \le x < 1 \\ 1/2, & se \quad x = 1 \\ 1, & se \quad x > 1 \end{cases} .$$

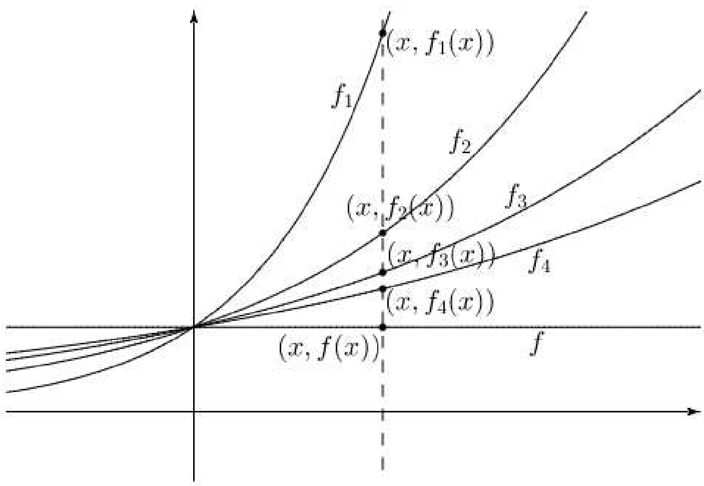


Figura 2.4: Gráfico de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$, referente ao Exemplo 2.2.4.

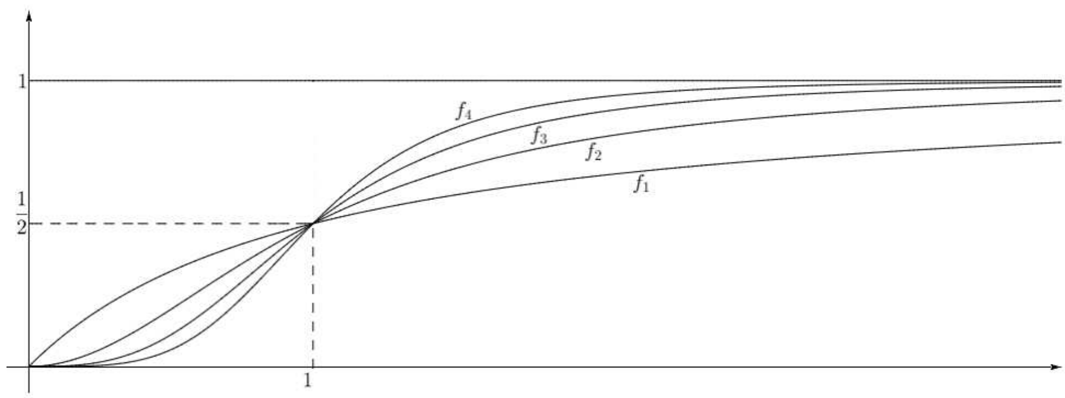


Figura 2.5: Gráfico de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$, referente ao Exemplo 2.2.5.

2.3 Convergência Uniforme

A partir daqui, serão assumidos alguns resultados de análise de um curso de fundamentos de cálculo do Profmat. Exemplo: integrabilidade, oscilação e o Teorema Fundamental do Cálculo. Para isto, recomendamos [17].

A Convergência Uniforme é outro tipo de convergência de funções. Mais restrita do que a Convergência Pontual, a Convergência Uniforme é definida como segue.

Definição 2.21: Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existir um natural n_0, dependente apenas de ε, tal que, se $n > n_0$ então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Usaremos a notação $f_n \stackrel{u}{\to} f$.

Pode-se inferir uma interpretação geométrica para a Definição 2.21. Veja Figura 2.6. Assegurar que $f_n \stackrel{u}{\to} f$, é designar, no plano $\mathbb{R}^2$, uma faixa de raio ε em torno do gráfico de f. A região F é definida por

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe o natural n_0 tal que o gráfico de f_n, para todo $n > n_0$, está contido em F.

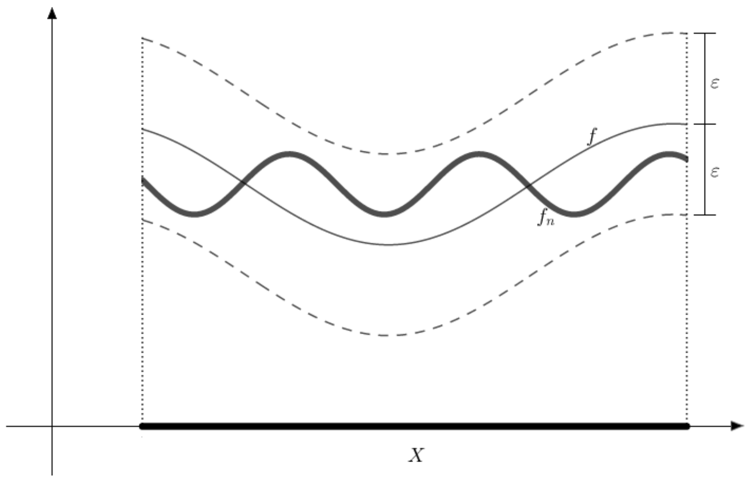


Figura 2.6: O gráfico de f_n está contido na região F

Exemplo 2.3.1: Considere a mesma sequência do Exemplo 2.2.4. Prove que, sendo $f(x) = 1$, $f_n \stackrel{u}{\to} f$ em qualquer intervalo $[-c\,, c]$.

Já que $0 < |x| \le c$, dados $\varepsilon > 0$ e um natural $n_0 > c/\ln\varepsilon$, temos que se $n > n_0$, então

$$|e^{x/n} - 1| \le |e^{|x|/n} - 1| < |e^{c/n} - 1| < e^{c/n} < e^{c/n_0} < \varepsilon.$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 2.3.2: Mostre que $f_n(x) = nx/(1 + n^2x^2) \to 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, mas não uniformemente. Depois prove que, fixado $c > 0$, a convergência é uniforme em $[-c, 0) \cup (0, c]$.

Embora $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2} = \dfrac{n/x}{\dfrac{1}{x^2} + n^2} \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, verifica-se que essa convergência não é uniforme. Com efeito, para todo natural n, observe que $f_n(1/n) = 1/2$ e $f_n(-1/n) = -1/2$. Logo, para $0 < \varepsilon < 1/2$, conclui-se que nenhuma função f_n terá seu gráfico inserido na faixa de raio ε em torno de $f(x) = 0$.

Por outro lado, se $|x| \geq c > 0$, então

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = |f_n(x)| \leq \left|\frac{nx}{n^2x^2}\right| = \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{nc}.$$

Dessa forma, para todo $\varepsilon > 1/nc$, $f_n \xrightarrow{u} f$, em que f é a função identicamente nula.

Teorema 2.22 (Critério de Cauchy): A sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um natural n_0 tal que $m,n > n_0$ implica $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para qualquer $x \in X$.

Demonstração. Se $f_n \xrightarrow{u} f$, então, por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$, se $n > n_0$, então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Também se $m > n_0$, temos

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

Assim sendo, pela desigualdade triangular e pelas Inequações 2.4 e 2.5, obtemos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciprocamente, pelo Teorema 2.19, está assegurado que, para cada x, a sequência numérica $(f_m(x))$ converge para um certo $f(x) \in \mathbb{R}$. Assim, se tomarmos o limite com $m \to \infty$ em

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

temos que, se

$$n > n_0, \text{ então } |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dessa forma, f_n converge uniformemente para f. □

2.3.1 Consequências da Convergência Uniforme

A convergência uniforme preserva continuidade, ou seja, o limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas é uma função contínua. A convergência uniforme tem consequências (teoremas) importantes. Vejamos a seguir.

Teorema 2.23: Se uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$, então f é contínua no ponto a.

Demonstração. Já que $f_n \xrightarrow{u} f$, pode-se dizer que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se

$$n > n_0, \text{ então } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } x \in X. \tag{2.6}$$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$, em que $n > n_0$.

Da continuidade de f_n no ponto a, inferimos que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ satisfazendo

$$|x - a| < \delta \text{ acarreta em } |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.7}$$

Por 2.6, 2.7 e pela desigualdade triangular, temos

$$|f(x)-f(a)| \leq |f_n(x)-f(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim, o teorema está demonstrado. □

Teorema 2.24 (Passagem ao limite sob o sinal da integral): Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Demonstração. Como $f_n \xrightarrow{u} f$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$ para todo $x \in [a, b]$.

Considere $m > n_0$. Já que f_m é integrável, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que $\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, em que ω_i' é a oscilação de f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i] \subset \mathcal{P}$. Seja ω_i a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i] \subset \mathcal{P}$. Para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, vale

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f_m(y)|+|f_m(y)-f_m(x)|+|f_m(x)-f(x)| < \omega_i'+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Dessa forma, $\omega_i \leq \omega_i' + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, que acarreta em

$$\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo f é integrável. Além disso, quando $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \\
&\leq \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso prova o resultado desejado. □

Perceba que o limite não "passeia" pelo sinal da integral se a convergência for pontual. Mesmo que f e cada f_n sejam integráveis quando $f_n \xrightarrow{p} f$, pode ocorrer de $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$, conforme podemos constatar no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.3: Seja a função $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ com

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 0, & se \quad x = 1 \end{cases}.$$

Dessa forma, como $(n+1)x^n$ corresponde ao termo geral de uma série que converge pelo Teorema 2.14, podemos afirmar que $\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n = 0$, pelo Teorema 2.8. Então, de fato, sendo $f(x) = 0$, $f_n \xrightarrow{p} f$, para $0 \leq x \leq 1$.

Observe que $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$, enquanto $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Logo $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$.

Se $f_n \xrightarrow{p} f$ no intervalo $[a,b]$, com f e cada f_n integráveis, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$, desde que exista uma constante $c > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c$ para todo natural n e todo $x \in [a,b]$. Ou seja, cada f_n é uniformemente limitada.

Teorema 2.25 (Derivação termo a termo): Seja f_n uma sequência de funções com derivadas contínuas em $[a,b]$ tal que $f_n' \xrightarrow{u} g$. Suponhamos ainda que num ponto $c \in [a,b]$ a sequência de números $f_n(c)$ converge.

Então f_n converge uniformemente para uma função f, que é derivável, com $f' = g$, isto é, $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.

Demonstração. Devido ao Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt. \tag{2.8}$$

E, já que $f_n' \xrightarrow{u} g$ e $f_n(c) \to f(c)$, temos que $f_n \to f$. Fazendo $n \to \infty$, pelo Teorema 2.24, podemos passar o limite sob o sinal de integração, ou seja, para cada x existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, que pela Equação 2.8, vale

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt. \tag{2.9}$$

E, por isso, segue que $f' = g$.

Para concluir a demonstração, ainda nos resta provar que $f_n \xrightarrow{u} f$. De 2.8 e 2.9, temos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \left| \int_c^x [f_n'(t) - g(t)]dt \right|. \tag{2.10}$$

Seja qual for $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para todo $t \in [a, b]$, tem-se que, se

$$n > n_0, \text{ então } |f_n(c) - f(c)| < \varepsilon \;\text{ e }\; |f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon.$$

Desse ponto e por 2.10, obtemos que

$$n > n_0 \text{ implica que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon[1 + (b - a)].$$

O teorema está provado. $\square$

Exemplo 2.3.4: Temos que $f_n \xrightarrow{u} f$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ e f é a função identicamente nula. No entanto, a sequência de derivadas $f'(n) = \cos(nx)$ não converge, nem mesmo pontualmente, em qualquer intervalo.

2.4 Séries de funções

Dada uma sequência de funções f_n definidas em $X \subset \mathbb{R}$, pode-se construir uma outra sequência de funções, S_n, denominada sequência de *somas parciais* ou *reduzidas de ordem* n, em que

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \;\; x \in X, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.26: Uma *série de funções* é uma sequência de reduzidas de ordem infinita e é indicada por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ou, de forma simplificada, $\sum f_n$. Se existir o limite (pontual ou uniforme) de S_n, dizemos que a série é convergente e chamaremos esse limite de *soma da série*.

Tal como nas séries numéricas, a natureza de uma série de funções não depende de seus primeiros termos.

2.4.1 Convergência pontual e uniforme para série de funções

Seja a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. A série de funções $\sum f_n$ *converge pontualmente* para f em X se a sequência de somas parciais S_n converge pontualmente para f, isto é, se para cada $x \in X$ a série numérica $\sum f_n(x)$ converge para $f(x)$.

A série de funções $\sum f_n$ *converge uniformemente* para f em $X \subset \mathbb{R}$ se a sequência de somas parciais S_n converge uniformemente para f em X.

Em outras palavras, diz-se que uma série de funções $\sum f_n$ converge uniformemente em X para uma soma $f(x)$ se, dado $\varepsilon > 0$ e para cada $x \in X$, existe n_0 tal que, se

$$n > n_0, \text{ então } \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Os Teoremas 2.22, 2.23, 2.24 e 2.25, referentes às sequências de funções, quando vistos sob a perspectiva das séries de funções, são análogos aos Teoremas 2.27, 2.28, 2.29 e 2.30, respectivamente.

Teorema 2.27 (Critério de Cauchy para séries): Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum f_n(x)$, em que os termos f_n são funções com o mesmo domínio X, convirja uniformemente é que, dado $\varepsilon > 0$, exista n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \;\; p \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.28: Se $\sum f_n$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua no ponto a, então f é contínua no ponto a.

Teorema 2.29: Se cada $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\sum f_n$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável e

$$\int_a^b \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx.$$

Teorema 2.30: Se cada $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem derivadas contínuas, $\sum f_n'$ converge uniformemente em $[a, b]$ e, para algum $c \in [a, b]$, a série $\sum f_n(c)$ converge, então $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função de derivada contínua e $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$.

O próximo teorema, também associado à série de funções, não tem análogo para sequências de funções. Esse teorema serve para averiguar se uma dada série de funções converge uniformemente.

Teorema 2.31 (Teste de Weierstrass): Dada a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, seja $\sum a_n$ uma série convergente de números reais $a_n \geq 0$ tais que $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo natural n e para todo $x \in X$. Dessa forma, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.

Demonstração. Pelo Critério da Comparação, para $x \in X$ a série $\sum |f_n(x)|$ é convergente devido à majoração de $|f_n(x)|$ por a_n e pelo fato da série $\sum a_n$ ser convergente.

Ainda temos que, devido à convergência de $\sum a_n$, dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\sum\limits_{n>n_0} a_n < \varepsilon$.

Diante disso, estabelecemos

$$R_n(x) = \sum_{k>n} |f_k(x)| \;\; \text{e} \;\; r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x).$$

E temos, diretamente, que

$$|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{n>n_0} a_n < \varepsilon.$$

Portanto, $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ convergem uniformemente. $\square$

Exemplo 2.4.1: Mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ converge uniformemente em todos os intervalos do tipo $[-a\,,a]$ com $1/2 < a < 1$.

Com $|x| < a$ temos $|x|^n < a^n < 1$. Ademais, temos $|1-x^n| \leq |1| + |x^n| \leq 2$. Da última desigualdade, obtemos

$$\sum_{n=k}^{\infty} |x^n(1-x^n)| \leq 2\sum_{n=k}^{\infty} |x^n| \leq 2\sum_{n=k}^{\infty} a^n = 2\frac{a^k}{1-a}.$$

E tomando $\varepsilon > 2\dfrac{a^k}{1-a} > 0$, independente de x, obtemos a convergência uniforme.

Exemplo 2.4.2: Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{k^n}$, em que o real k é maior do que 1, converge uniformemente para $x \in [-1, 1]$.

Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \dfrac{x^n}{k^n}$. Para todo $x \in [-1, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{k^n}\right| = \frac{|x^n|}{k^n} = \frac{|x|^n}{k^n} \leq \frac{1}{k^n}.$$

A série númerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, pelo Exemplo 2.1.2, converge. Assim, pelo Teste de Weierstrass, conclui-se que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{k^n}$ converge uniformemente (e absolutamente) para um função f em $[-1, 1]$.

No caso do Exemplo 2.4.2, pode-se exibir a função f. Basta notar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{k^n} = \frac{1}{1-\frac{x}{k}} = \frac{k}{k-x}.$$

Logo $f(x) = \dfrac{k}{k-x}$.

Observe também que f é contínua no intervalo $[-1, 1]$. A continuidade de f é garantida pelo Teorema 2.28.

Exemplo 2.4.3: Para $x \in \mathbb{R}$, determine a derivada da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$.

Se considerarmos $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que as funções f_n são diferenciáveis.

Além disso, como $f_n(0) = 0$ para todo n natural, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ converge para 0.

Já que $f_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, então

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Pelo Exemplo 2.1.3, temos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Portanto, pelo Teste de Weierstrass, segue que a série de funções $\sum f_n'$ converge uniformemente para uma função g em $\mathbb{R}$.

Por tudo, estamos diante do cumprimento de todas as hipóteses do Teorema 2.30. Logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$ converge uniformemente e pode ser derivada termo a termo, ou seja,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

2.5 Séries de potências

Estudaremos, nessa seção, funções que cumprem papel bastante importante na análise. São as funções que podem ser escritas como somas da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots .$$

Chamaremos as expressões acima de *séries de potências.*

É bem conhecido que estas séries apontam para uma generalização dos polinômios. Dizemos que a série acima está centrada em $x = x_0$.

A fim de simplificar a notação, assumiremos, sem perda de generalidade, o caso particular em que $x_0 = 0$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

Os resultados obtidos para a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ podem ser adaptados para o caso $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, conforme podemos constatar no lema a seguir.

Lema 2.32: Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em $x = x_0 \neq 0$, ela converge absolutamente em todo x do intervalo $|x| < |x_0|$; e se a série diverge em $x = x_0$, ela diverge em todo x fora desse intervalo, isto é, em $|x| > |x_0|$.

Demonstração. Se uma série converge em x_0, seu termo geral, $a_n {x_0}^n$, tende a zero e, portanto, $a_n {x_0}^n$ é limitado por uma constante K. Decorre então que

$$|a_n x^n| = |a_n {x_0}^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq K \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

A partir disso, temos que a série $\frac{1}{K}\sum |a_n x^n|$ é dominada pela série geométrica cujo termo geral é $\left|\frac{x}{x_0}\right|$, que é convergente se $|x| < |x_0|$. Dessa forma, $\sum |a_n x^n|$ converge no intervalo $|x| < |x_0|$.

Se a série $\sum |a_n x^n|$ divergir em $x = x_0$, ela não pode convergir quando $|x| > |x_0|$, senão teria que convergir em $x = x_0$.

Isso conclui a demonstração. □

Teorema 2.33: A toda série de potência $\sum a_n x^n$, que converge em algum $x' \neq 0$ e diverge em algum outro valor x'', corresponde um $r > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.

Demonstração. Seja r o supremo dos números $|x|$, em que x varia assumindo valores onde a série converge. Claramente, r é um número maior do que zero, sendo $|x'| < r$ e $|x''| > r$. Note que, se $|x''| < r$, existiria um x entre $|x''|$ e r em que a série convergiria. Pelo Lema 2.32, a série também convergiria em x'', o que é uma contradição.
Se x é tal que $|x| < r$, existe x_0 com $|x| < |x_0| \leq r$, em que a série converge. Assim, pelo Lema 2.32, a série converge absolutamente.
Certamente a série divergirá em x, com $|x| > r$, pois, se assim não fosse, novamente pelo Lema 2.32, a série teria que convergir em todo $\tilde{x}$ tal que $|x| > |\tilde{x}| > r$. Mas, dessa maneira, r não seria o supremo declarado. □

Definição 2.34: O número r, mencionado no início da demonstração do Teorema 2.33, é chamado de *raio de convergência* da série.

Teorema 2.35: Uma série de potências $\sum a_n x^n$, cujo raio de convergência é r, converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-\rho, \rho]$, em que $0 < \rho < r$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.33, a série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente e, para qualquer $-\rho \leq x \leq \rho$, temos $|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n$. Daí, pelo Teste de Weierstrass, segue a convergência uniforme de $\sum a_n x^n$ no intervalo $[-\rho, \rho]$. □

Corolário 2.36: Tendo $r > 0$ o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, a função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.35 que $\sum a_n x^n$ é uniformemente convergente no intervalo $[-\rho, \rho]$, em que $0 < \rho < r$. Como $a_n x^n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, é contínua, e a soma de funções contínuas é contínua, decorre do Teorema 2.28 que f é contínua, em $[-\rho, \rho] \subset (-r, r)$. $\square$

Teorema 2.37 (Integração termo a termo): Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então,

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Demonstração. Como $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$, pelo Teorema 2.35, temos que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente. Tomando $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < r$, temos $[\alpha, \beta] \subset [-\rho, \rho]$. Dessa forma, estamos diante das hipóteses do Teorema 2.29. Logo,

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \int_\alpha^\beta a_n x^n dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

$\square$

Teorema 2.38: Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é derivável com

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

A série de potências de $f'(x)$ também tem raio de convergência r.

Demonstração. Para uma demonstração do Teorema 2.38, recomendamos a leitura das páginas 166 e 167 de [16]. $\square$

Corolário 2.39: Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, em que $f(x)$ e todas a suas derivadas $f^{(k)}(x)$ (para todo $k \in \mathbb{N}$) existem e são contínuas em $(-r, r)$. Para quaisquer $x \in (-r, r)$ e $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f^{(k)} = \sum_{n \geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Demonstração. Para uma demonstração do Corolário 2.39, recomendamos a leitura das páginas 372 e 373 de [17]. $\square$

Oportunamente, a título de aplicação do Teorema 2.38 e do Corolário 2.39, descreveremos a função $f(x) = (1 + x)^u$ $(u \neq 0)$ em série de potências quando $|x| < 1$.

Definição 2.40 (Número binomial generalizado): Seja $u \in \mathbb{R}$. Definimos o *número binomial generalizado* por

$$\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{n!}, & \text{se} \quad k > 0, \\ 1, & \text{se} \quad k = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

Exporemos, por meio do lema seguinte, algumas propriedades dos números binomiais generalizados.

Lema 2.41: Sejam $u \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

(a) $\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ *(Relação de Stifel)*;

(b) $\dfrac{k}{u}\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-1 \\ k-1 \end{pmatrix}, \quad \forall \ u \neq 0;$

(c) $\left|\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix}\right| \leq 1, \text{ para } |u| \leq 1.$

Demonstração. **(a)** Basta efetuar o seguinte cálculo:

$$\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u-1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{k!}u(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1)$$
$$-\frac{1}{k!}(u-1)(u-2)\cdots(u-k)$$
$$= \frac{1}{k!}(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1)(u-(u-k))$$
$$= \frac{1}{(k-1)!}(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1)$$
$$= \begin{pmatrix} u-1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

(b) Segue, diretamente da Equação 2.11, que

$$\frac{k}{u}\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} = \frac{k}{u} \cdot \frac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} = \frac{(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1)}{(k-1)!} = \begin{pmatrix} u-1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

(c) Tendo $|u| \leq 1$, segue da desigualdade triangular e, novamente, da Equação 2.11, que

$$\left|\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix}\right| \leq \frac{|u|(|u|+1)(|u|+2)\cdots(|u|+k-1)}{k!} \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k}{k!} = 1.$$

□

A seguir, apresentaremos o *Teorema da série binomial* ou *Teorema binomial generalizado*. Essa última versão do nome desse teorema é bastante adequada, tendo em vista que a expressão dada em 2.12 generaliza a fórmula mais comum e habitual do binômio de Newton.

Teorema 2.42 (Teorema binomial generalizado): Se $u \neq 0$ e $|x| < 1$, então

$$(1+x)^u = \sum_{k\geq 0} \binom{u}{k} x^k. \tag{2.12}$$

Demonstração. Inicialmente, assuma que $0 < |u| \leq 1$. Temos que,

$$\left| \frac{\binom{u}{n}}{\binom{u}{n+1}} \right| = \frac{n+1}{|u-n|} \to 1.$$

Pelo Teorema 2.33, podemos afirmar que a série $\sum_{k\geq 0} \binom{u}{k} x^k$ tem raio de convergência igual a 1. Assim, pelo Teorema 2.38, a função $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{u}{k} x^k$, é derivável, com

$$f'(x) = \sum_{k\geq 1} k \binom{u}{k} x^{k-1} = \sum_{k\geq 1} u \binom{u-1}{k-1} x^{k-1}.$$

Note que a última igualdade foi obtida via item (b) do Lema 2.41. Na sequência disso e pelo item (a) do lema citado, temos que

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{k\geq 1} u \binom{u-1}{k-1} x^{k-1} \\
&= u\left(\sum_{k\geq 1} \binom{u-1}{k-1} x^{k-1} + \sum_{k\geq 1} \binom{u-1}{k-1} x^{k}\right) \\
&= u\left(1 + \sum_{k\geq 2} \binom{u-1}{k-1} x^{k-1} + \sum_{k\geq 2} \binom{u-1}{k-2} x^{k-1}\right) \\
&= u\left(1 + \sum_{k\geq 2} \binom{u}{k-1} x^{k-1}\right) = u\sum_{k\geq 0} \binom{u}{k} x^k \\
&= u \cdot f(x).
\end{aligned}$$

Portanto, se $g(x) = (1+x)^{-u} f(x)$, então, para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -u(1+x)^{-u-1} f(x) + (1+x)^{-u} f'(x) \\
&= (1+x)^{-u-1}(-u \cdot f(x) + (1+x)f'(x)) = 0,
\end{aligned}$$

e, por isso, g é constante em $(-1,1)$. Dessa forma, podemos concluir que $(1+x)^{-u} f(x) = 1$ se $|x| < 1$, pois $g(0) = 1$.

De modo análogo, pode-se verificar que

$$(1+x)^{u-1} = \sum_{k\geq 0} \binom{u-1}{k} x^k \text{ e } (1+x)^{u+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{u+1}{k} x^k.$$

Concluímos assim que o resultado é válido para todo $u \neq 0$, com $|x| < 1$. $\square$

2.6 Séries de Taylor

Uma função é dita ser de classe C^n se sua $n - ésima$ derivada existir e for uma função contínua. Uma função é dita ser de classe C^∞ se for de classe C^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere f uma função de classe C^n ou C^∞. Do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0). \tag{2.13}$$

Considerando $u = f'(t)$, $v' = 1$ e optando, de maneira conveniente, por $v(t) = t - x$, temos, pelo método da integração por partes, que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f'(t)dt &= \Big[(t-x)f'(t)\Big]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)dt. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Das Equações 2.13 e 2.14, obtemos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)dt.$$

Note o que ocorre quando se repete o processo mais duas vezes.
Na primeira repetição tem-se

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} \frac{f'''(t)}{2}(t-x)^2 dt.$$

Já na segunda repetição,

$$\begin{aligned}f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3\cdot 2}(x-x_0)^3 + \\ &\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(4)}(t)}{3\cdot 2}(t-x)^3 dt.\end{aligned}$$

De acordo com as duas equações obtidas acima, sugere-se o padrão

$$f(x) = P_n(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt, \tag{2.15}$$

com

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (2.16)$$

De fato, o padrão pode ser confirmado por indução. Deixaremos a cargo do leitor essa demonstração.

Definição 2.43: O polinômio P_n em 2.16 é o *polinômio de Taylor* de grau n da função f. Se f for de classe C^∞ em torno de x_0, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2.17)$$

é a ***série de Taylor*** da função f com centro em x_0.

A série de Taylor de uma função em torno de $x_0 = 0$ é chamada de *série de Maclaurin.*

De volta à Equação 2.15, chamaremos a última parcela

$$R_n(x) = (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t - x)^n dt. \quad (2.18)$$

de *resto* ou *erro* em sua *forma integral.* Mas, com o propósito de tornar o cálculo do erro mais acessível, usaremos o *resto de Lagrange*, dado em 2.19.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (2.19)$$

em que c se encontra entre x e x_0 e é diferente de ambos.

Por certo, o polinômio de Taylor com resto integral implica no polinômio de Taylor com resto de Lagrange. Sugerimos as leituras [4] e [17]. Ambas promovem uma discussão mais rigorosa acerca da fórmula de Taylor com resto integral e resto de Lagrange.

No Capítulo 4, faremos uso da série geométrica e da série exponencial. Por isso, nos dedicaremos, nessa parte, ao estudo das série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e da função $f(x) = e^x$.

2.6.1 A série geométrica

Temos que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Daqui, concluímos que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (2.20)$$

A fórmula acima é válida desde que $|x| < 1$.

O somatório que aparece na Equação 2.20 é a série de Taylor de $f(x)$, pois

$f^{(n)}(x) = n! \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

Com o desdobramento da Equação 2.20, inferirimos que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

O resto $R_n(x) = \pm \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \to 0$ quando $n \to \infty$. Dessa forma, para $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

2.6.2 A série geométrica centrada em x_0

Sendo $x_0 \neq 1$, temos que

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)} = \frac{1}{1-x_0}\left[\frac{1}{1-\left(\dfrac{x-x_0}{1-x_0}\right)}\right].$$

Se $\left|\dfrac{x-x_0}{1-x_0}\right| < 1$, a igualdade

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x_0)^{n+1}} (x-x_0)^n$$

é válida.

2.6.3 A série exponencial

Teorema 2.44: Se $x \in \mathbb{R}$, então

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{2.21}$$

Demonstração. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = e^x$. Claro que, para todo n natural, $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. E $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$.

Escrevendo f na forma do polinômio de Taylor com resto de Lagrange, segue que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ em que } c \text{ está entre } 0 \text{ e } x. \tag{2.22}$$

Do fato de f ser uma função crescente segue do Teorema 2.8 que

$$\left| x^{n+1} \cdot \frac{e^c}{(n+1)!} \right| = e^c \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \max\{e^0, e^x\} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Daí, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{n\to\infty} e^c \cdot \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Por isso, fazendo $n \to +\infty$ em 2.22, alcançamos o resultado desejado. $\square$

3

O Princípio da Inclusão e Exclusão

Para o que segue, denotaremos por $P_n = n!$ as permutações simples de n elementos e por $P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\kappa} = \dfrac{n!}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_\kappa}$ as permutações de n elementos dos quais um elemento se repete α_1 vezes, o segundo se repete α_2 vezes, e assim sucessivamente.

Neste capítulo também usaremos, para futuras explanações, a cardinalidade de um conjunto e a parte inteira de um número real x. Assim, sendo A um conjunto, então o número de elementos de A, isto é, sua cardinalidade, será denotada por $\#A$. Já a parte inteira de um número real x será expressa por $\lfloor x \rfloor$.

Definição 3.1: A parte inteira de um $x \in \mathbb{R}$ é o maior inteiro que não é maior do que x.

Por exemplo, $\lfloor 2 \rfloor = 2$; $\lfloor 7{,}84 \rfloor = 7$; $\lfloor -3{,}5 \rfloor = -4$.

3.1 O Princípio da Inclusão e Exclusão

Neste capítulo, os conjuntos serão designados por letras maiúsculas A, B, C, $\ldots$, enquanto seus elementos por letras minúsculas a, b, c, $\ldots$. Assim, o conjunto A que contém os elementos a_1, a_2, a_3 será representado por $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, e essa é sua representação *explícita*, isto é, os elementos são exibidos um a um.

Axioma 3.2: Sejam A_1 e A_2 conjuntos finitos tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Então $\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2$

Para o que segue, definiremos a subtração entre dois conjuntos.

Definição 3.3: Considere dois conjuntos, A e B. Então a diferença entre esses dois conjuntos consiste no conjunto formado pelos elementos que pertencem à A e não pertencem à B. Alternativamente, $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Lema 3.4: Sejam A_1 e A_2 conjuntos finitos. Então $\#(A_1 - A_2) = \#A_1 - \#(A_1 \cap A_2)$

Demonstração. Como $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 - A_2)$, então

$$\#A_1 = \#[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 - A_2)].$$

Mas, pelo Axioma 3.2 temos que

$$\#A_1 = \#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 - A_2), \text{ ou seja, } \#(A_1 - A_2) = \#A_1 - \#(A_1 \cap A_2).$$

□

Em alguns momentos, deseja-se contar a quantidade de elementos da união de dois ou mais conjuntos. Mas, para isso, precisamos nos certificar de que não estamos contando o mesmo elemento duas ou até mais vezes. Esse risco ocorre quando a contagem não leva em consideração elementos que pertencem a dois ou mais conjuntos, isto é, aqueles elementos que estão na interseção entre dois ou mais conjuntos.

Para sistematizar a contagem de elementos de dois ou mais conjuntos usaremos o *Princípio da Inclusão e Exclusão*.

3.1.1 Princípio da Inclusão e Exclusão

Teorema 3.5 (Princípio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos): Sejam A_1 e A_2 conjuntos finitos. Então $\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)$.

Demonstração. Tem-se que $A_1 \cap A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ e $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \emptyset$. Então, pelo Axioma 3.2 e pelo Lema 3.4, temos que $\#(A_1 \cup A_2) = \#[A_1 \cup (A_2 - A_1)] = \#A_1 + \#(A_2 - A_1) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)$. □

Teorema 3.6 (Princípio da Inclusão e Exclusão para três conjuntos): Sejam A_1, A_2 e A_3 conjuntos finitos. Então

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) \\ - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstração. Devemos verificar que o membro direito da Equação 3.1 conta o número de elementos da união entre A_1, A_2 e A_3.

Um elemento x pertencente a $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ pertencerá ou a somente um dos três conjuntos, ou a exatamente dois deles, ou aos três conjuntos ao mesmo tempo.

Vejamos caso a caso.

1º caso: $x \in A_1$ e $x \notin A_2$ e $x \notin A_3$.

Dessa forma, $\#A_1$ conta x uma vez; $\#A_2$ conta x zero vez; $\#A_3$ conta x zero vez; $\#(A_i \cap A_j)$ conta x zero vez; $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x zero vez. Portanto, $\#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma única vez.

É totalmente análogo quando x está somente em A_2 ou somente em A_3.

2º caso: $x \in (A_1 \cap A_2)$ e $x \notin A_3$.

Assim, $\#A_1$ conta x uma vez; $\#A_2$ conta x uma vez; $\#A_3$ conta x zero vez; $\#(A_1 \cap A_2)$ conta x uma vez; $\#(A_1 \cap A_3)$ conta x zero vez; $\#(A_2 \cap A_3)$ conta x zero vez; $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x zero vez. Logo,
$\#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma única vez.

Esse caso é totalmente análogo aos casos em que $x \in (A_1 \cap A_3)$ e $x \notin A_2$ ou $x \in (A_2 \cap A_3)$ e $x \notin A_1$.

3º caso: $x \in (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

$\#A_i$ conta x uma vez $(i = 1{,}2{,}3)$; $\#(A_i \cap A_j)$ conta x uma vez $(1 \leq i < j \leq 3)$; $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma vez.

Por isso, $\#(A_1) + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma única vez.

Portanto, em qualquer circunstância, para todo $x \in (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, o mesmo é contado apenas uma vez pelo membro direito da Equação 3.1, o que conclui a demonstração.

□

Exemplo 3.1.1: De quantas maneiras podemos ordenar as letras $a, a, b, b, b, c, c, c, c$ de forma que letras iguais nunca estejam juntas?

Se designarmos os conjuntos A, B e C como o conjunto onde somente os $a's$ nunca estão juntos, o conjunto onde somente os $b's$ nunca estão juntos e o conjunto onde somente os $c's$ nunca estão juntos, respectivamente, então, para resolver o problema, devemos encontrar $\#(A \cup B \cup C)$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
&\#A = P_9^{2,3,4} - P_8^{3,4},\ \#B = P_9^{2,3,4} - P_7^{2,4},\ \#C = P_9^{2,3,4} - P_6^{2,3};\\
&\#(A \cap B) = P_9^{2,3,4} - P_6^{4},\ \#(A \cap C) = P_9^{2,3,4} - P_5^{3},\ \#(B \cap C) = P_9^{2,3,4} - P_4^{2};\\
&\#(A \cap B \cap C) = P_9^{2,3,4} - P_3.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo os valores obtidos acima envolvendo as cardinalidades dos conjuntos, temos

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) &= (P_9^{2,3,4} - P_8^{3,4}) + (P_9^{2,3,4} - P_7^{2,4}) + (P_9^{2,3,4} - P_6^{2,3}) - \\
&\quad (P_9^{2,3,4} - P_6^{4}) - (P_9^{2,3,4} - P_5^{3}) - (P_9^{2,3,4} - P_4^{2}) + (P_9^{2,3,4} - P_3)\\
&= 871,
\end{aligned}$$

que é a solução.

Teorema 3.7 (Cardinalidade da união de n conjuntos): Seja uma coleção de k conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$. Então

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \#(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < k} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < k} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots +$$

$$(-1)^{p-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p < k} \#\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right) + \ldots + (-1)^{k-1} \#\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right).$$

Demonstração. Se um elemento x pertence a p conjuntos dentre todos os conjuntos $A_i (i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k)$, então x será contado

$$\begin{aligned}
\binom{p}{1} &\text{ vezes em } \sum_{i=1}^{k} \#(A_i);\\
\binom{p}{2} &\text{ vezes em } \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < k} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2});\\
\binom{p}{3} &\text{ vezes em } \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < k} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3});\\
&\vdots\\
\binom{p}{p} &\text{ vezes em } \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p < k} \# \left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j} \right).
\end{aligned}$$

Note que a interseção de mais de p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição na contagem de aparições do elemento x, já que x pertence a exatamente p conjuntos entre $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

A partir disso, queremos provar que x é contado apenas uma vez, ou seja, a soma

$$\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \binom{p}{j}$$

deve ser igual a 1.

Do binômio de Newton segue, para $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, que

$$(x+1)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} x^{p-j}. \tag{3.2}$$

Substituindo x por -1 na Equação 3.2, temos que

$$0 = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \ldots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p}.$$

E, dessa forma,

$$\binom{p}{0} = 1 = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \binom{p}{j}.$$

□

Exemplo 3.1.2: Sejam $m \in \mathbb{Z}_+^*$ e $p_1, p_2, \ldots, p_r$ inteiros relativamente primos dois a dois, tais que $p_i \leq m$, para todo i,$j = 1, 2, \ldots, r$. Determinar uma fórmula para calcular o número de inteiros positivos menores do que ou iguais a m que não são divisíveis por nenhum dos números $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Sejam os conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, m\};$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x \in A / x \equiv 0 \pmod{p_1}\};\\
A_2 &= \{x \in A / x \equiv 0 \pmod{p_2}\};\\
&\vdots\\
A_r &= \{x \in A / x \equiv 0 \pmod{p_r}\},
\end{aligned}$$

em que o símbolo $\equiv \pmod{p_i}$ significa *congruência módulo* p_i.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos

$$\#A - \#\left(\bigcup_{j=1}^{r} A_j\right) = \#(A) - \left[\sum_{i=1}^{r} \#(A_i) - \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le r} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2})\right.$$
$$\left. + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le r} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots + (-1)^{r-1} \# \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right)\right].$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\#(A) &= m;\\
\#(A_i) &= \left\lfloor \frac{m}{p_i} \right\rfloor;\\
\#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) &= \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1} \cdot p_{i_2}} \right\rfloor;\\
\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) &= \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3}} \right\rfloor;\\
&\vdots\\
\#\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) &= \left\lfloor \frac{m}{\prod_{i=1}^{r} p_i} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a fórmula procurada é

$$m - \left[\sum_i \left\lfloor \frac{m}{p_i} \right\rfloor - \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le r} \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1} \cdot p_{i_2}} \right\rfloor + \cdots + (-1)^{r-1} \left\lfloor \frac{m}{\prod_{i=1}^{r} p_i} \right\rfloor\right].$$

Exemplo 3.1.3: O número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, em que $n(A) = n$, $n(B) = k$ e $n \ge k$, é dado por

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \tag{3.3}$$

Demonstração. Seja C o conjunto de todas as aplicações de A em B, sem quaisquer restrições. Sendo assim, $n(C) = \underbrace{k \cdot k \cdot k \cdots k}_{n\ fatores} = k^n$.

Além disso, para cada $i \in \mathbb{Z}$, com $1 \le i \le k$, definimos o conjunto C_i tal que $C_i = \{f : A \to B \mid \nexists\ f^{-1}(b_i), b_i \in B\}$. Dessa forma, quanto à cardinalidade e sua respectiva ocorrência, temos

$$\#(C_i) = (k-1)^n, \text{ ocorrendo } \binom{k}{1} \text{ vezes;}$$

$$\#(C_1 \cap C_2) = (k-2)^n, \text{ ocorrendo } \binom{k}{2} \text{ vezes;}$$

$$\#(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = (k-3)^n, \text{ ocorrendo } \binom{k}{3} \text{ vezes;}$$

$$\vdots$$

$$\#\left(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\right) = (k-k)^n = 0, \text{ ocorrendo } \binom{k}{k} = 1 \text{ vez.}$$

Então, o número de funções $f : A \to B$ sobrejetoras, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, é dado por

$$\#C - \#\left(\bigcup_{i_1}^{k} C_i\right) = k^n - \left[\binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \ldots + \binom{k}{k}(k-k)^n\right]$$

$$= \binom{k}{0}(k-0)^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \ldots + \binom{k}{k}(k-k)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$$

□

Exemplo 3.1.4: Seja um conjunto de 7 guias turísticos que conhecem todos os pontos de passeio de uma cidade. De quantas maneiras estes 7 guias podem se distribuir para conduzir 4 grupos de turistas pela cidade?

Como cada grupo deve ter um guia, o número procurado será o número de funções sobrejetoras de um conjunto de 7 elementos num conjunto de 4 elementos. Pelo Exemplo 3.1.3, temos

$$\sum_{i=0}^{4}(-1)^i \binom{4}{i}(4-i)^7 = \binom{4}{0}4^7 - \binom{4}{1}3^7 + \binom{4}{2}2^7 - \binom{4}{3}1^7.$$

Exemplo 3.1.5 (A função ϕ de Euler): Seja $m \in \mathbb{N}$. A função que nos fornece, para todo m, a quantidade de inteiros menores do que ou iguais a m e que sejam coprimos com m é chamada de *função ϕ de Euler*, denotada $\phi(m)$.

Aplicando o *Princípio da Inclusão e Exclusão*, podemos encontrar uma fórmula fechada para $\phi(m)$, como é mostrado no teorema a seguir.

Teorema 3.8: Tendo $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ a decomposição de m em fatores primos, então $\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$.

Demonstração. Sejam os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, m\};$$
$$A_1 = \{x \in A \,|\, x \text{ é múltiplo de } p_1\};$$
$$A_2 = \{x \in A \,|\, x \text{ é múltiplo de } p_2\};$$

$$\vdots$$
$$A_r = \{x \in A \,|\, x \text{ é múltiplo de } p_r\}.$$

Note que $\phi(m)$ conta o número de elementos incluídos no conjunto complementar da união entre todos os $A_i's$ em relação ao conjunto A. Assim sendo,

$$\phi(m) = \#A - \#\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) = \#A - \left[\sum_{i=1}^{r} \#(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \ldots + (-1)^r \# \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right)\right].$$

Como

$$\# A = m; \quad \#A_i = \frac{m}{p_i}; \quad \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \frac{m}{p_{i_1} \cdot p_{i_2}};$$
$$\# (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = \frac{m}{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3}}; \ldots ; \#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r) = \frac{m}{p_1 \cdot p_2 \cdots p_r},$$

temos

$$\begin{aligned}
\phi(m) &= m - \sum_i \frac{m}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2} \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2}} + \cdots + (-1)^r \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_r} \\
&= m \left(1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_r}\right) \\
&= m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).
\end{aligned}$$

□

3.1.2 Permutações Caóticas

Definição 3.9: Uma permutação de n elementos, sendo eles $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, é dita *caótica* se nenhum a_i ocupar a $i-$*ésima* posição, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Dessa forma, tendo $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, (a_2, a_4, a_1, a_3) é uma permutação caótica, enquanto (a_2, a_4, a_3, a_1) não é, pois a_3 está em seu lugar original, isto é, ocupa a terceira posição.

Sejam D_n o número de permutações caóticas *(desarranjos)* de n elementos e os conjuntos $A =$\{todas as permutações dos n elementos\}, $A_i =$\{permutações em que a_i ocupa a $i-$*ésima* posição, sendo i um inteiro com $1 \leq i \leq n$\}.

Assim, $\#A = n!$, $\#A_i = (n-1)!$, $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (n-2)!$, $\cdots$, $\# \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$, e ocorrem $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ vezes, respectivamente, e, dessa forma,

$$D_n = \#A - \#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

.

Pelo Princípio da Inclusão ou Exclusão, temos

$$\begin{aligned}D_n &= n! - \left[\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + \binom{n}{n}(-1)^{n-1}(n-n)!\right]\\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}\\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right) \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Outra maneira de determinar o número de permutações caóticas D_n de n elementos é mostrar que esse número é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$, em que e é o número de Euler. Dessa forma, basta mostrar que a distância entre D_n e $\frac{n!}{e}$ é menor do que $\frac{1}{2}$.

A título de exemplo, verificaremos a veracidade para $n = 1$ e $n = 2$. Com efeito, note que

$$\left|D_2 - \frac{2!}{e}\right| = |1 - 0{,}7\ldots| < \left|D_1 - \frac{1!}{e}\right| = |0 - 0{,}33\ldots| < \frac{1}{2}.$$

Resta então provar que a distância entre D_n e $\frac{n!}{e}$ é menor do que $\frac{1}{2}$, para todo $n > 2$, o que será feito no próximo teorema.

Teorema 3.10: $\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{2}, \forall\, n > 2.$

Demonstração. Substituindo x por -1 na Equação 2.21, temos $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$, e assim

$$\begin{aligned}\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| &= \left|n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots\right)\right|\\ &= \left|n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} - n!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\right| = \left|n!\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\right|\\ &= n!\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots\right| \leq n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right)\\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\\ &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo D_n é, de fato, o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$, o que conclui a demonstração. □

Exemplo 3.1.6: Em uma brincadeira de "amigo secreto", N pessoas escrevem seu nome num pedaço de papel e o depositam em uma urna, de onde cada um pega aleatoriamente um dos pedaços de papel. Qual a probabilidade de ninguém pegar seu próprio nome sendo que os N amigos retiram os papéis ao mesmo tempo?

Podemos entender esse problema à luz de um enunciado equivalente:

Se um conjunto ordenado de N elementos, $C = \{a_1, \ldots, a_N\}$, é permutado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que nenhum deles volte à sua posição original?

A probabilidade $P(N)$ pedida é dada por $P(N) = \dfrac{D_N}{N!}$, em que D_N é o número de permutações caóticas dos elementos do conjunto C e $N!$ são todas as permutações irrestritas dos elementos de C. Logo, por 3.4, a solução será

$$\begin{aligned} P(N) = \frac{D_N}{N!} &= \frac{N!\left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} +, \cdots, +(-1)^N \dfrac{1}{N!}\right)}{N!} \\ &= \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} +, \cdots, +(-1)^N \frac{1}{N!}\right). \end{aligned}$$

Suponhamos, para facilitar os cálculos, que fossem três pessoas (pessoas a, b e c, nessa ordem), ou seja, $N = 3$. Elencando cada uma das seis (3!) permutações possíveis, temos: (abc), (acb), (bac), (cba), (bca) e (cab), das quais apenas as duas últimas não apresentam qualquer elemento em sua posição primitiva. Dessa forma, a probabilidade de nenhuma das três pessoas retirar seu próprio nome será claramente igual a $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Por outro lado, se usarmos a expressão obtida no exemplo anterior, obviamente teremos o mesmo resultado. De sorte que

$$P(3) = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{3}.$$

4

Funções Geradoras

A ideia trazida pelas funções geradoras nesse trabalho consiste em reconhecê-las como mais uma ferramenta para resolver problemas de contagem. As funções geradoras que trataremos são séries de potências e os coeficientes de cada parcela nos darão significado importante no contexto de alguns problemas de cunho combinatório.

Ao leitor que quiser se aprofundar no estudo das funções geradoras sugerimos [7] e [12].

4.1 Introdução

Comecemos com um problema de como encontrar o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, sendo que x_1,$x_2 \in \{2, 3, 4\}$ e $x_3 \in \{5, 6, 7\}$.
Definem-se três polinômios, um para cada variável x_i do conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{aligned} p_1 &= y^2 + y^3 + y^4; \\ p_2 &= y^2 + y^3 + y^4; \\ p_3 &= y^5 + y^6 + y^7. \end{aligned}$$

Considere o produto:

$$\begin{aligned} p(y) = p_1p_2p_3 &= (y^2 + y^3 + y^4)(y^2 + y^3 + y^4)(y^5 + y^6 + y^7) \\ &= y^9 + 3y^{10} + 6y^{11} + 7y^{12} + 6y^{13} + 3y^{14} + y^{15}. \end{aligned}$$

Note que os expoentes de y em cada polinômio p_i são os elementos do conjunto ao qual x_i pertence. Procuramos uma tripla de inteiros cuja soma vale 12 e que obedeçam às restrições de pertinência. Além disso, em $p(y)$, o coeficiente de y^{12} pode ser interpretado como sendo a quantidade de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ e suas retrições. Então, serão 7 soluções. Essas soluções são provenientes das parcelas $y^2y^3y^7$, $y^2y^4y^6$, $y^3y^2y^7$, $y^3y^3y^6$, $y^3y^4y^5$, $y^4y^2y^6$, $y^4y^3y^5$, na expansão de $p_1p_2p_3$, que por sua vez correspondem, respectivamente, às soluções $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 7$; $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6$; $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 7$; $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 6$; $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$; $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 6$; $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 5$.

Perceba que $p(y)$ nos fornece também a solução de outros problemas semelhantes ao proposto. Por exemplo, se fosse pedido o número de soluções inteiras da equação

$x_1 + x_2 + x_3 = 11$, submetidas às mesmas restrições, adotando um raciocínio completamente análogo, a resposta seria 6, pois é o coeficiente de y^{11} na expansão de $p_1 p_2 p_3$.

Na realidade, o polinômio $p(y)$ gera o número de soluções inteiras para todas as equações do tipo $x_1 + x_2 + x_3 = m$, em que o natural m é tal que $9 \leq m \leq 15$, tendo ainda as restrições inicialmente impostas.

Vejamos, no próximo exemplo, como incorporar determinados polinômios na modelagem de alguns problemas.

Exemplo 4.1.1: Suponha que uma caixa contém quatro bolas, duas azuis, uma branca e uma cinza. Quantas são as maneiras de retirar uma ou mais bolas da caixa?

Consideremos que a indica bola azul, b a branca e c a cinza. Já que o número de formas de atender ao problema é conciso, façamos a listagem:

maneiras de retirar	
uma bola	a, b, c
duas bolas	aa, ab, ac, bc
três bolas	aab, aac, abc
quatro bolas	$aabc$

Tabela 4.1: Tabela ao Exemplo 4.1.1

Agora, faremos uma associação entre polinômios e a ocorrência dessas bolas, de modo que os coeficiente a, b e c estarão relacionados ao aparecimento das bolas azul, branca e cinza, respectivamente. Os expoentes de cada um desses coeficientes indicarão o número de bolas retiradas. Assim,

$$A(x) = 1 + ax + a^2x^2 \ ; \ B(x) = 1 + bx \ \text{ e } \ C(x) = 1 + cx,$$

em que os polinômios $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ estão associados às bolas azul, branca e cinza, respectivamente.

Ao interpretarmos o polinômio $A(x)$, por exemplo, a^2x^2 significa que duas bolas azuis foram removidas em duas bolas retiradas, ao passo que ax significa que uma bola azul foi removida em uma única retirada. O termo $1 = x^0$ indica que não houve retirada de qualquer bola e, obviamente, nenhuma azul em particular. As interpretações de $B(x)$ e $C(x)$ são análogas. Pode-se dizer então que os polinômios $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ "controlam" a incidência de determinada cor.

Quando tomamos o produto $A(x)B(x)C(x)$, temos

$$\begin{aligned}(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx) = 1 &+ (a + b + c)x + (a^2 + ab + ac + bc)x^2 \\ &+ (a^2b + a^2c + abc)x^3 + a^2bcx^4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Com o propósito de fornecer uma solução alternativa para a expansão do produto indicado pelo lado esquerdo da Equação 4.1 usaremos o diagrama de árvore da Figura 4.1. Este artifício nos permite entender melhor os coeficientes das potência de x

dadas no membro direito da Equação 4.1 sob a luz de argumentos combinatórios.

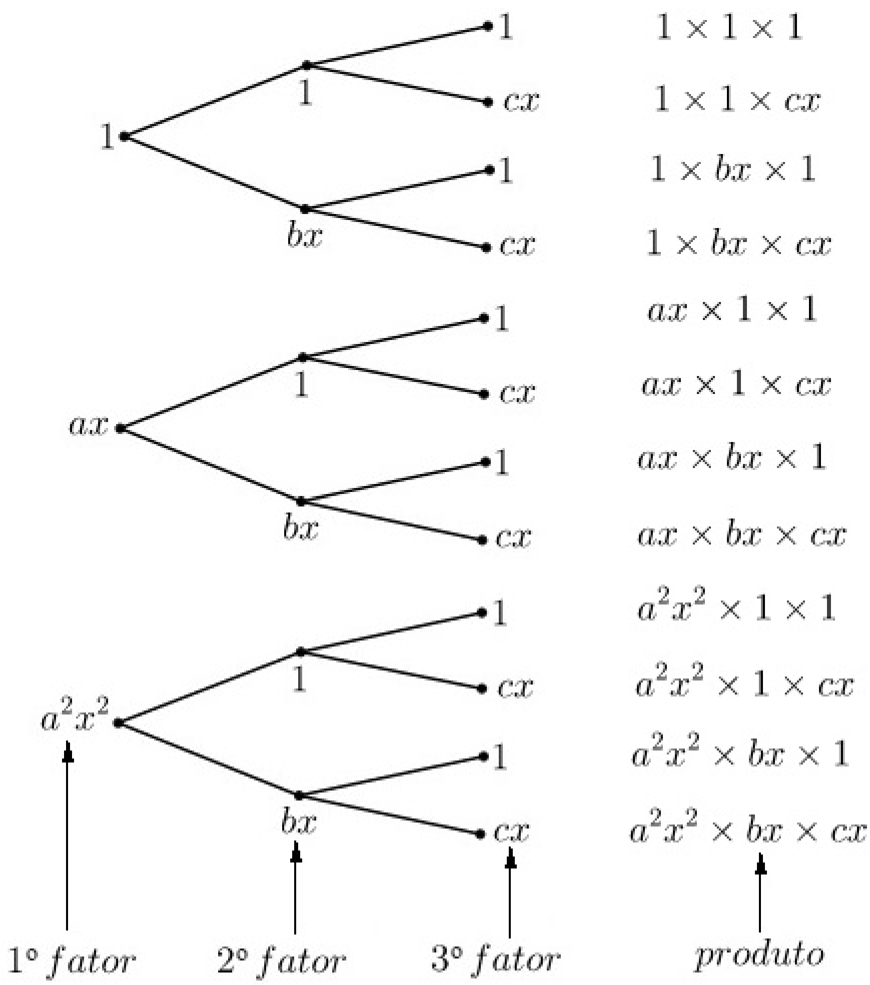


Figura 4.1: Diagrama de árvore relativo ao Exemplo 4.1.1.

Finalmente, para responder ao problema, levando em conta não a listagem das diferentes formas de selecionar as bolas, como na Tabela 4.1, e sim na quantidade de tais seleções, basta tomar $a = b = c = 1$ na Equação 4.1, obtendo

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4 = P(x).$$

Perceba que $P(x)$ nos diz que existem três maneiras de se retirar uma só bola, quatro maneiras de se retirar duas bolas, três maneiras de retirarmos três bolas, uma única maneira de se retirar uma bola e, claro, uma maneira de não retirar qualquer bola.

Assim, dizemos que $P(x)$ é a ***função geradora*** para o problema do Exemplo 4.1.1, já que seus coeficientes - 1, 3, 4, 3, 1 - nos fornecem as respostas desejadas.

Definição 4.1 (Função geradora ordinária): Se a_r, com $r = 0, 1, 2, \ldots,$ é o número de soluções de um problema de natureza combinatória, a *função geradora ordinária* para este problema é a série de potências

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{4.2}$$

ou, de maneira geral, dada a sequência (a_n), a função geradora ordinária para esta sequência é definida como a série de potências dada pela Equação 4.2.

Note que, quanto à ordem, o $(i+1)-ésimo$ termo da sequência corresponde ao coeficiente de x^i. Por isso, dizemos, por exemplo, que $g(x) = 3+4x+5x^2+6x^3+\cdots$, é a função geradora da sequência $(a_n) = (3, 4, 5, 6, \dots)$.

Exemplo 4.1.2: Nico foi a uma lanchonete pouco antes dela fechar. Por isso, a estufa estava quase vazia: só tinha uma coxinha, uma empada, em pastel e um quibe. De quantas maneiras Nico pode levar um ou mais salgados para sua casa?

Note que esse exemplo é parecido com o Exemplo 4.1.1. No lugar de bolas, tem-se salgados.

Os polinômios $C(x)$, $E(x)$, $P(x)$ e $Q(x)$ associados, respectivamente, à ocorrência da coxinha, da empada, do pastel e do quibe são iguais, pois a quantidade de cada um dos salgados é a mesma. Assim,

$$C(x) = E(x) = P(x) = Q(x) = 1 + x.$$

Efetuando o produto $G(x) = C(x) \cdot E(x) \cdot P(x) \cdot Q(x) = (1 + x)^4$, temos que

$$G(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Sendo assim, o número de maneiras de Nico levar para sua casa um salgado é 4, dois salgados é 6, três salgados é 4 e quatro salgados é 1. Por isso, $G(x)$ é a função geradora para este problema.

Uma outra maneira de obter a solução do problema é lançando mão do diagrama de árvore dado pela Figura 4.2.

Olhemos $(1 + x)^4$ como $(1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + x)$. Se escolhermos um termo de cada fator (1 ou x), obteremos quatro termos que serão multiplicados entre si. É o que a coluna '*produto*' do diagrama de árvore da Figura 4.2 nos mostra.

Efetuando as multiplicações, provenientes de todos os ramos do diagrama de árvore, indicadas pela coluna '*produto*', alcançamos os possíveis resultados: x^4, x^3, x^2, x e 1.

Vejamos quantas vezes cada um desses resultados aparecem.

1º) O termo x^4 ocorre pelo produto de quatro fatores iguais a x. Logo, a quantidade de vezes em que x^4 aparece é igual ao número de sequências de quatro símbolos sendo todos iguais a "x".Portanto,
$P_4^4 = \dfrac{4!}{4!} = 1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$;

2º) O termo x^3 ocorre pelo produto de três fatores iguais a x e um fator igual a 1. Logo, a quantidade de vezes em que x^3 aparece é igual ao número de sequências de quatro símbolos sendo três deles iguais a "x" e o outro igual a "1". Portanto,
$P_4^{3,1} = \dfrac{4!}{3!1!} = 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3º) O termo x^2 ocorre pelo produto de dois fatores iguais a x e dois fatores iguais a 1. Logo, a quantidade de vezes em que x^2 aparece é igual ao número de sequências de quatro símbolos sendo dois deles iguais a "x" e os outros dois iguais a "1". Portanto,
$P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

4º) O termo x ocorre pelo produto de um fator igual a x e três fatores iguais a 1. Logo, a quantidade de vezes em que x aparece é igual ao número de sequências de quatro símbolos sendo um igual a "x" e três iguais a "1". Portanto,
$P_4^{1,3} = \dfrac{4!}{1!3!} = 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Note que os resultados encontrados correspondem aos coeficientes de $G(x)$. Além disso, se reescrevermos $G(x)$ usando os números binomiais, atingimos a expansão do binômio de Newton dado pela Equação 3.2 quando $p = 4$.

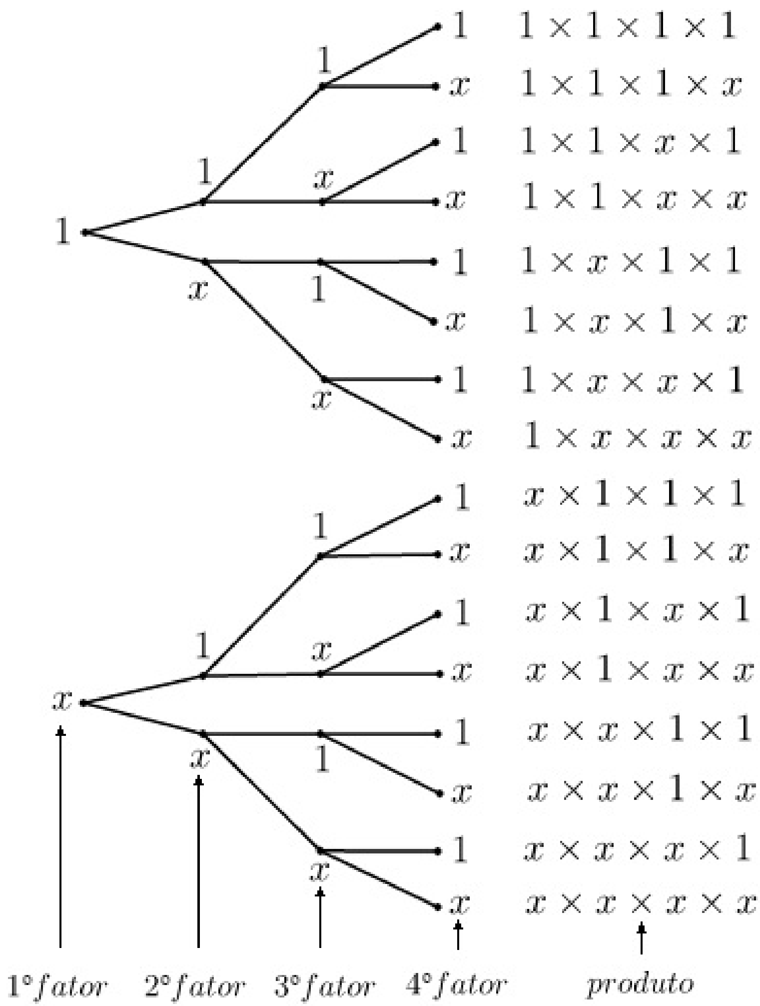


Figura 4.2: Diagrama de árvore relativo ao Exemplo 4.1.2

4.2 Cálculo de Coeficientes de Funções Geradoras

Na presente seção, nos dedicaremos ao entendimento das funções geradoras através de exemplos. Além disso, faremos um estudo acerca de maneiras de determinar coeficientes das parcelas das funções em séries de potências.

Exemplo 4.2.1: Seja $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, a função geradora ordinária da sequência $(1, 1, 1, \dots)$. Para $|x| < 1$, temos

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{4.3}$$

A obtenção da Equação 4.3 vem da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica de razão x, com $|x| < 1$, como é dado por $f(x)$.

A Equação 4.3 exprime uma expressão simples, chamada de *forma fechada*, para designar a função geradora ordinária $f(x)$.

Exemplo 4.2.2: Encontrar a função geradora $f(x)$ para a sequência $a_n = (0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$.

Por definição e pela Equação 4.3, temos

$$f(x) = x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = x^3(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{x^3}{1-x}.$$

Exemplo 4.2.3: Encontrar a sequência cuja função geradora é dada por $h(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$.

Substituindo x por x^3 na Equação 4.3 do Exemplo 4.2.1, temos que

$$h(x) = f(x^3) = \frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots$$

Logo $h(x)$ é a função geradora da sequência $h_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$.

Visto os Exemplos 4.2.2 e 4.2.3, podemos estabelecer uma generalização para funções geradoras ordinárias do tipo

$$f(x) = \frac{x^m}{1-nx^p}\ , n \in \mathbb{R};\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{e} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Claro que $|nx| < 1$. Subtituindo x por nx^p na Equação 4.3, obtemos

$$\frac{1}{1-nx^p} = 1 + nx^p + (nx^p)^2 + (nx^p)^3 + \cdots = 1 + nx^p + n^2x^{2p} + n^3x^{3p} + \cdots .$$

Multiplicando por x^m a equação acima, tem-se que

$$\frac{x^m}{1-nx^p} = x^m + nx^{m+p} + n^2x^{m+2p} + n^3x^{m+3p} \cdots = f(x). \tag{4.4}$$

Inspecionemos, via Equação 4.4, alguns casos, como seguem.

<u>1º caso:</u> $m = 1$ e $p = 1$.
Tendo em vista que $\dfrac{x}{1-nx} = x + nx^2 + n^2x^3 + \cdots$, então, da definição, a sequência gerada é $(0, 1, n, n^2, \ldots)$.

<u>2º caso:</u> $m = 1$ e $p = 3$.
Levando em consideração que $\dfrac{x}{1-nx^3} = x + nx^4 + n^2x^7 + n^3x^{10} \cdots$, decorre que a sequência gerada é $(0, 1, 0, 0, n, 0, 0, n^2, 0, 0, n^3, \ldots)$.

<u>3º caso:</u> $m = 3$ e $p = 5$.
Pelo mesmo critério adotado nos dois casos anteriores, temos que $\dfrac{x^3}{1-nx^5} = x^3 + nx^8 + n^2x^{13} + n^3x^{18} + \cdots$, donde a sequência gerada é $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, n, 0, 0, 0, 0, n^2, 0, 0, 0, 0, n^3, 0, 0, 0, 0, n^4, \ldots)$.

Note que, pela Equação 4.4, todos os coeficientes desde x^0 até x^{m-1} são nulos, e por isso, a sequência gerada será iniciada por m zeros. Ademais, os coeficientes não nulos, a partir do primeiro, só existem juntos às potências de x cujos expoentes formam uma progressão aritmética. É fácil perceber que, em geral, a sequência gerada por funções da família dada em 4.4 é

$$(\underbrace{0, 0, \ldots}_{m\, zeros}, 1, \underbrace{0, 0, \ldots}_{p-1\, zeros}, n, \underbrace{0, 0, \ldots}_{p-1\, zeros}, n^2, 0, 0, \ldots, n^3, \ldots).$$

Em todas as abordagens anteriores acerca das séries, não nos atemos às questões relacionadas à convergência, isso por estarmos inseridos no contexto das funções geradoras e, assim sendo, nosso maior interesse se concentra no cálculo dos coeficientes das potências de x que constituem uma determinada função. Vale mencionar ainda que não haverão circunstâncias em que será atribuído qualquer valor numérico para a variável x.

Quando as séries são abordadas dessa maneira, elas são denominadas *séries formais*. Segue através do teorema abaixo importantes propriedades acerca das funções geradoras.

Teorema 4.2: Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_n) e (b_n), respectivamente, tem-se

(a) $Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a sequência $(Aa_n + Bb_n)$.

(b) $f(x)g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})\right)x^n$.

(c) A função geradora para $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ é igual a $(1 + x + x^2 + \cdots)f(x)$.

(d) A função geradora para (na_n) é igual a $xf'(x)$, em que $f'(x)$ é a derivada de f com relação a x.

(e) $\displaystyle\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Demonstração. **(a)** Já que (a_n) e (b_n) são geradas por $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, então

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$$

e, dessa forma,

$$\begin{aligned} Af(x) + Bg(x) &= Aa_0 + Aa_1x + Aa_2x^2 + \cdots + Bb_0 + Bb_1x + Bb_2x^2 + \cdots \\ &= (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + (Aa_2 + Bb_2)x^2 + \cdots, \end{aligned}$$

o que demonstra o item (a) do teorema.

(b) Para demonstrar, basta realizar o produto $f(x)g(x)$ para alcançar o resultado desejado. De sorte que,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_kb_{n-k}) \right) x^n. \end{aligned}$$

(c) Fazendo $b_n = 1$, temos $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Logo $f(x)g(x) = f(x)(1+x+x^2+\cdots)$, pelo item (b), é a função geradora para $(a_0+a_1+\cdots+a_n)$.

(d) Como

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$

então

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots. \tag{4.5}$$

Multiplicando a Equação 4.5 por x, temos

$$xf'(x) = a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots.$$

Dessa forma, por definição, $xf'(x)$ é a função geradora da sequência $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots) = (na_n)$.

(e) Mais uma vez, dispondo do fato de que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$, temos que

$$\int f(x)dx = a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

$\square$

Exemplo 4.2.4: Encontrar a função geradora para $a_n = n^3$.

Da Equação 4.3, temos que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é a função geradora para a sequência $(1,1,1,\dots)$, isto é, $a_{r_0} = 1$. Inicialmente, se $a_{r_1} = ra_{r_0}$, que, pelo item (d) do Teorema 4.2, tem como função geradora $xf'(x)$. Ou seja,

$$g(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots .$$

Agora, com raciocínio análogo ao anterior, $a_{r_2} = ra_{r_1}$. Novamente pelo item (d) do Teorema 4.2, tem-se que $xg'(x)$ é a função geradora. Efetuando os cálculo, temos:

$$h(x) = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + r^2x^r + \cdots .$$

Por último, de posse do mesmo processo, $a_{r_3} = ra_{r_2}$ é gerada por $xh'(x)$. Então,

$$p(x) = x\left(\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right)' = \frac{x^2-4x+1}{(1-x)^4} = 1^3x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + \cdots + r^3x^r + \cdots .$$

Logo $p(x)$ é a função geradora ordinária para $a_n = n^3$.

Exemplo 4.2.5 (Fibonacci): Consideremos a sequência de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$, sendo que $F_0 = F_1 = 1$. Seja $F(x)$ a função geradora da sequência de Fibonacci. Então,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i\geq 0} F_i x^i = F_0 + F_1 x + \sum_{i\geq 2} F_i x^i = 1 + x + \sum_{i\geq 2}(F_{i-1}+F_{i-2})x^i \\
&= 1 + x + \sum_{i\geq 2} F_{i-1}x^i + \sum_{i\geq 2} F_{i-2}x^i = 1 + x + x\sum_{i\geq 2} F_{i-1}x^{i-1} + x^2\sum_{i\geq 2} F_{i-2}x^{i-2} \\
&= 1 + x + x\sum_{j\geq 1} F_j x^j + x^2\sum_{k\geq 0} F_k x^k = 1 + x + x[F(x) - F_0] + x^2F(x). \\
&= 1 + x + xF(x) - x + x^2F(x).
\end{aligned}$$

Dessa forma, segue que $F(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$.

4.3 Uma Aplicação do Teorema Binomial

Sabemos que o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

é dado por $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$. Para maiores detalhes, ver [19]. Cada x_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$, pode assumir qualquer valor inteiro não negativo. A função geradora que "dirige" a ocorrência de cada x_i é $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = \dfrac{1}{1-x}$. Como são n parcelas x_i, a função geradora para o problema será

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Lançaremos mão do Teorema 2.42 para provar que o coeficiente de x^p é $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$.

Teorema 4.3: O coeficiente de x^p na expansão de $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$ é igual a $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$.

Demonstração. Sabemos que $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \dfrac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$. Pelo Teorema binomial generalizado, temos

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -n \\ r \end{pmatrix} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -n \\ r \end{pmatrix} (-1)^r x^r.$$

E, dessa forma, o coeficiente de x^p é igual a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -n \\ p \end{pmatrix} (-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+2)(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

E o teorema está demonstrado. □

Exemplo 4.3.1: De quantas maneiras podemos embrulhar 11 presentes idênticos usando papéis de 5 cores diferentes?

Considere a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$, sendo que o natural x_i é tal que $0 \leq x_i \leq 11$, e x_1 está associado à cor 1, x_2 à cor 2, x_3 à cor 3, x_4 à cor 4 e x_5 à cor 5.

Como não existe nenhuma restrição com relação à quantidade de cores, a função geradora ordinária que "mapeia" o número de presentes embrulhados com papel de uma determinada cor é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{11}$$

Já que são 5 cores, a resposta será o coeficiente de x^{11} na expansão de

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{11})^5 = \left(\frac{1 - x^{12}}{1 - x}\right)^5 = (1 - x^{12})^5(1 - x)^{-5}.$$

Tendo em vista que

$$(1 - x^{12})^5 = 1 - 5x^{12} + 10x^{24} - 10x^{36} + 5x^{48} - x^{60},$$

então, o coeficiente de x^{11} se encontra em $(1 - x)^{-5}$.

Aplicando o Teorema 4.3, temos que o coeficiente de x^{11} é dado por

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} (-1)^{11} = \begin{pmatrix} 5 + 11 - 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix} = 1365.$$

Portanto existem 1365 maneiras de embrulhar 11 presentes idênticos dispondo de papéis de 5 cores distintas.

Exemplo 4.3.2: Determinar de quantos modos 4 pessoas, cada uma lançando um único dado, podem obter um total de 15.

A função geradora que "controla" a ocorrência de um certo número de um dado é

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Como são 4 pessoas, a resposta ao problema consiste no coeficiente de x^{15} na expansão de

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = \left(x\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4 = x^4(1 - x^6)^4(1 - x)^{-4}. \qquad (4.6)$$

Como

$$x^4(1 - x^6)^4 = x^4 - 4x^{10} + 6x^{16} - 4x^{22} + x^{28},$$

precisamos dos termos em x^{11} e x^5 da expansão de $(1 - x)^{-4}$, que ao serem multiplicados por x^4 e $-4x^{10}$, respectivamente, nos fornecerão todos os termos desejados, ou seja, aqueles em que a potência x^{15} aparece na Equação 4.6.

Assim, invocando o Teorema 4.3 para $(1 - x)^{-4}$, temos que o coeficiente de

1. x^{11} é dado por $\binom{-4}{11}(-1)^{11} = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = 364$;

2. x^5 é dado por $\binom{-4}{5}(-1)^5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56$.

Portanto, o coeficiente de x^{15} da expansão do produto dado na Equação 4.6 é $1 \times 364 - 4 \times 56 = 140$, que é a resposta do problema.

Podemos estabelecer uma generalização para os Exemplos 4.3.1 e 4.3.2 quando pensamos no problema de encontrar uma expressão para o número de modos de se distribuir r objetos idênticos em n caixas distintas, com a restrição de que cada caixa contenha pelo menos q objetos e não mais que $q+z-1$ objetos.

De fato, a função geradora que "controla" o número de objetos numa caixa é

$$x^q + x^{q+1} + \cdots + x^{q+z-1}.$$

Como são n caixas, a solução do problema é o coeficiente de x^r na expansão de

$$(x^q + x^{q+1} + \cdots + x^{q+z-1})^n = x^{qn}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{z-1})^n.$$

Usando a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, temos que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{z-1} = \frac{1-x^z}{1-x}.$$

Decorre que

$$(x^q + x^{q+1} + \cdots + x^{q+z-1})^n = x^{qn}\left(\frac{1-x^z}{1-x}\right)^n.$$

Assim sendo, o coeficiente de x^r da equação acima é o coeficiente de x^{r-qn} em $\left(\frac{1-x^z}{1-x}\right)^n$. A obtenção explícita desse coeficiente segue diretamente do Teorema 4.3.

Exemplo 4.3.3: Quantos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 17, 18\}$ formados de 5 elementos não consecutivos existem?

Se $\{a, b, c, d, e\}$ é um desses subconjuntos tal que $1 \leq a < b < c < d < e \leq 18$, e $\underbrace{(18-e)}_{x_1} + \underbrace{(e-d)}_{x_2} + \underbrace{(d-c)}_{x_3} + \underbrace{(c-b)}_{x_4} + \underbrace{(b-a)}_{x_5} + \underbrace{(a-1)}_{x_6} = 17$, então queremos o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$, em que $x_1, x_6 \geq 0$ e $x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 2$.

Repare que, devido às restrições acima, devemos ter $x_1, x_6 \leq 9$ e $x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 11$.

Isto é, procuramos o coeficiente de x^{17} na expansão

$$\begin{aligned}
&(1+x+\cdots+x^9)^2(x^2+x^3+\cdots+x^{11})^4 = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^2\left(x^2\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^4\\
&= x^8(1-x^{10})^6(1-x)^{-6}\\
&= (x^{68}-6x^{58}+15x^{48}-20x^{38}+15x^{28}-6x^{18}+x^8)(1-x)^{-6}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Veja, em 4.7, que a única forma de alcançar o coeficiente de x^{17} é multiplicando x^8 com o termo em x^9 na expansão de $(1-x)^{-6}$. Recorrendo ao Teorema 4.3, o coeficiente de x^9 é dado por $\binom{-6}{9}(-1)^9 = \binom{6+9-1}{9} = \binom{14}{9} = 2002.$ Assim, temos que $x^8 \cdot 2002x^9 = 2002x^{17}$ e, portanto, existem 2002 subconjuntos.

Exemplo 4.3.4: Representantes de três institutos de pesquisa devem formar uma comissão de 9 pesquisadores. Se cada instituto é composto por quatro pesquisadores, de quantos modos se pode formar essa comissão sendo que nenhum instituto deve ter maioria absoluta no grupo.

Maioria absoluta é definida como sendo um número maior do que a metade do total de indivíduos que compõem certo grupo. Note então que, para que não haja maioria absoluta, os três institutos devem ser representados por no máximo quatro pessoas e além disso, por pelo menos um indivíduo e, sendo assim, o polinômio que "baliza" a quantidade de integrantes de um instituto é $x+x^2+x^3+x^4$.

Como são três institutos, a função geradora para o problema é

$$f(x) = (x+x^2+x^3+x^4)^3,$$

donde estamos interessados no coeficiente de x^9. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+x^2+x^3+x^4)^3 = \left(x\frac{1-x^4}{1-x}\right)^3 = x^3(1-x^4)^3(1-x)^{-3}\\
&= (x^3-3x^7+3x^{11}-x^{15})(1-x)^{-3}.
\end{aligned}$$

Logo precisamos dos coeficientes de x^2 e x^6 na expansão de $(1-x)^{-3}$. Aplicando o Teorema 4.3, temos que o coeficiente de x^6 é dado por

$$\binom{-3}{6}(-1)^6 = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = 28;$$

e o coeficiente de x^2 é dado por

$$\binom{-3}{2}(-1)^2 = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Por isso, o coeficiente de x^9 na expansão de $f(x)$, solução do problema, é $1\times 28-3\times 6 = 10$.

Exemplo 4.3.5: Dispõe-se de um número ilimitado de bolas azuis, brancas e cinzas. De quantos modos podemos selecionar n bolas sendo que cada seleção deve conter uma quantidade par de bolas cinzas?

Os polinômios que "regem" as aparições de bolas azuis, brancas e cinzas são $A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$, $B(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ e $C(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$. Logo, a função geradora para o problema é

$$\begin{aligned} A(x)B(x)C(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)^2(1 + x^2 + x^4 + \cdots) \\ &= \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 (1 + x^2 + x^4 + \cdots) = \underbrace{(1-x)^{-2}}_{(i)} \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \cdots)}_{(ii)}, \end{aligned}$$

de onde estamos interessado no coeficiente de x^n. No que segue, podemos ter:

- **Nenhuma bola cinza**. Nesse caso, basta encontrarmos o coeficiente de x^n em (i). Pelo Teorema 4.3, esse coeficiente vale $\binom{2+n-1}{n} = \binom{n+1}{n}$.
- **Duas bolas cinzas**. Agora, para encontrar o coeficiente de x^n, teremos de efetuar o produto entre x^2 em (ii) e o termo cuja potência de x é $n-2$ na expansão de (i). Novamente, pelo Teorema 4.3, o coeficiente desse termo é igual a $\binom{2+(n-2)-1}{n-2} = \binom{n-1}{n-2}$.
- **Quatro bolas cinzas**. Usando um raciocínio análogo ao anterior, o coeficiente desse termo é igual a $\binom{2+(n-4)-1}{n-4} = \binom{n-3}{n-4}$.

$$\vdots$$

- $2k$ **bolas cinzas** ($k \in \mathbb{N}$). Genericamente, o coeficiente de x^n corresponderá ao coeficiente de x^{n-2k} em (i). Logo, pelo Teorema 4.3, esse coeficiente é igual a $\binom{2+(n-2k)-1}{n-2k} = \binom{n-2k+1}{n-2k}$.

A resposta final é a soma de cada caso, ou seja,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n-2i+1}{n-2i} = \sum_{i=0}^{k} (n-2i+1) = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ 2i \leq n}} (n-2i+1).$$

4.4 Função geradora exponencial

Até aqui vimos que as funções geradoras ordinárias podem ser utilizadas para resolver alguns problemas combinatórios em que a ordem dos objetos não é relevante. Entretanto, se a ordem dos objetos for relevante dentro do contexto de um problema, devemos desenvolvê-lo à luz das funções geradoras exponenciais.

Definição 4.4: A série de potências

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

é a ***função geradora exponencial*** da sequência (a_r).

Para motivar o leitor a entender melhor as circunstâncias em que são empregadas as funções gerdoras exponenciais, comecemos com um exemplo simples, mas esclarecedor.

Exemplo 4.4.1: Em um banco são distribuídas três tipos de senhas: azul, branca e cinza. Quantas são as filas compostas por quatro pessoas, de modo que exista no máximo uma pessoa com senha azul, no máximo três com senha branca e não mais do que duas pessoas com senha cinza?

Comecemos, como no Exemplo 4.1.1, estabelecendo os polinômios $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ que "controlam" as presenças das senhas azul, branca e cinza, respectivamente. Temos portanto,

$$A(x) = 1 + ax,\ B(x) = 1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3,\ C(x) = 1 + cx + c^2x^2.$$

Veja que consideramos, por ora, as funções geradoras ordinárias.

Fazendo o produto,

$$\begin{aligned} A(x)B(x)C(x) &= 1 + (a+b+c)x + (b^2+ab+bc+ac+c^2)x^2 \\ &+ (b^3+ab^2+ac^2+b^2c+abc+bc^2)x^3 + (ab^3+b^3c+ab^2c+b^2c^2+abc^2)x^4 \\ &+ (ab^3c+b^3c^2+ab^2c^2)x^5 + (ab^3c^2)x^6. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Note que, o coeficiente de x é a lista de todas as filas de uma só pessoa, o coeficiente de x^2 representa a lista de todas as filas compostas por duas pessoas, em que, por exemplo, a parcela ab nos diz que uma delas tem senha do tipo azul e a outra, do tipo branca.

Para aprofundar ainda mais, observemos o coeficiente de x^4. Pela Equação 4.8, vê-se que existem cinco modos de montar um conjunto de quatro objetos idênticos e diferenciados apenas pela cor. Nesse caso, as sequências $abbb$ ou $bbab$ retratam o mesmo elemento, que na Equação 4.8 é visto na parcela ab^3. E assim, a resposta ao exemplo seria 5.

Mas o contexto do problema, por se tratar de pessoas carregando uma senha de certa cor, nos permite afirmar que as sequências $abbb$ e $bbab$ não correspondem ao mesmo elemento e, portanto, cada uma deve ser contada de forma distinguível. Para percebermos isso com facilidade, basta ver que a fila João, Paulo e Luiz, que carregam, por exemplo, senhas azul, branca e branca, respectivamente, obviamente não é igual à fila João, Luiz e Paulo. No entanto, se eles mantiverem suas senhas, quando observadas pela cor, tanto a primeira configuração da fila, quanto a segunda configuração, nos fornecem a mesma ordem: azul, branca e branca (abb ou ab^2). Dessa forma, para efetuarmos a contagem correta, deve-se contabilizar as permutações naqueles que foram selecionados.

Voltemos ao coeficiente de x^4 da Equação 4.8. Quando tomamos a parcela ab^2c, estamos nos referindo a uma fila composta de uma pessoa portadora de senha azul, duas pessoas portadoras de senha branca e uma pessoa que possui senha cinza. E, dessa maneira, como já discutido acima, é necessário permutar as pessoas dessa fila, o que equivale à permutação da sequência $abbc$, isto é, $\dfrac{4!}{1!2!1!}$.

Podemos encontrar a resposta definitiva à questão fazendo o raciocínio análogo para todas as parecelas que compõem o coeficiente de x^4, ou seja, existem

$$\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!1!2!} = 38$$

filas conforme solicitado.

Na verdade, no exemplo anterior, o que deve ser feito é uma alteração nos polinômios que "comandam" a ocorrência das senhas azuis, brancas e cinzas. Em vez de utilizar as funções geradoras ordinárias $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$, é adequado substituí-las pelos polinômios $D(x)$, $E(x)$ e $F(x)$, em que

$$D(x) = 1 + \frac{a}{1!}x,\ E(x) = 1 + \frac{b}{1!}x + \frac{b^2}{2!}x^2 + \frac{b^3}{3!}x^3,\ F(x) = 1 + \frac{c}{1!}x + \frac{c^2}{2!}x^2.$$

Em geral, acrecenta-se o fator $\dfrac{1}{n!}$ no coeficiente de x^n.

Feito isso, a partir do produto $D(x)E(x)F(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{a}{1!}x\right)\left(1 + \frac{b}{1!}x + \frac{b^2}{2!}x^2 + \frac{b^3}{3!}x^3\right)\left(1 + \frac{c}{1!}x + \frac{c^2}{2!}x^2\right) \\
&\qquad = 1 + \left(\frac{a}{1!} + \frac{b}{1!} + \frac{c}{1!}\right) + \left(\frac{b^2}{2!} + \frac{ab}{1!1!} + \frac{bc}{1!1!} + \frac{ac}{1!1!} + \frac{c^2}{2!}\right)x^2 \\
&\qquad + \left(\frac{b^3}{3!} + \frac{ab^2}{1!2!} + \frac{ac^2}{1!2!} + \frac{b^2c}{2!1!} + \frac{abc}{1!1!1!} + \frac{bc^2}{1!2!}\right)x^3 \\
&\qquad + \left(\frac{ab^3}{1!3!} + \frac{b^3c}{3!1!} + \frac{ab^2c}{1!2!1!} + \frac{b^2c^2}{2!2!} + \frac{abc^2}{1!1!2!}\right)x^4 \\
&\qquad + \left(\frac{ab^3c}{1!3!1!} + \frac{b^3c^2}{3!2!} + \frac{ab^2c^2}{1!2!2!}\right)x^5 + \frac{ab^3c^2}{1!3!2!}x^6.
\end{aligned}$$

Devido às mudanças feitas nos polinômios $D(x)$, $E(x)$ e $F(x)$ em relação a $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$, repare que o coeficiente de x^4 agora vale

$$\left(\frac{ab^3}{1!3!} + \frac{b^3c}{3!1!} + \frac{ab^2c}{1!2!1!} + \frac{b^2c^2}{2!2!} + \frac{abc^2}{1!1!2!}\right),$$

e necessita de ajustes para chegar ao desejado. Efetivamente, basta multiplicar e dividir a expressão por 4!. Tomando-se $a = b = c = d = 1$, obtém-se o número procurado a partir do coeficiente de $\dfrac{x^4}{4!}$.

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\\
&\qquad = 1+3\frac{x}{1!}+\left(\frac{2!}{2!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!}\right)\frac{x^2}{2!}\\
&\qquad + \left(\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{3!}{1!2!}\right)\frac{x^3}{3!}\\
&\qquad + \left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right)\frac{x^4}{4!}\\
&\qquad + \left(\frac{5!}{1!3!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{1!2!2!}\right)\frac{x^5}{5!}+\frac{6!}{1!3!2!}\cdot\frac{x^6}{6!}.
\end{aligned}$$

Veja que os outros coeficientes de $\dfrac{x^i}{i!}$, em que o inteiro i é tal que $1 \leq i \leq 6$, também podem ser obtidos de maneira análoga, isto é, multiplicando e dividindo por $i!$.

Exemplo 4.4.2: Qual o número de sequências de k letras ($k \leq 10$) formadas pelas letras a, b, c, d, em que a ocorre no máximo uma vez, b no máximo duas vezes, c no máximo três vezes e d não mais do que quatro vezes?

Fazendo o produto entre os polinômios que "controlam" as aparições das letras a, b, c, d, temos

$$\begin{aligned}
&\overbrace{(1+x)}^{\text{controla } a}\overbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)}^{\text{controla } b}\overbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)}^{\text{controla } c}\overbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)}^{\text{controla } d}\\
&= 1+4x+\frac{15}{2}x^2+\frac{53}{6}x^3+\frac{175}{24}x^4+\frac{107}{24}x^5+\frac{149}{72}x^6+\frac{35}{48}x^7+\frac{55}{288}x^8\\
&+\frac{5}{144}x^9+\frac{1}{288}x^{10}\\
&= 1\frac{x^0}{0!}+4\frac{x^1}{1!}+15\frac{x^2}{2!}+53\frac{x^3}{3!}+175\frac{x^4}{4!}+535\frac{x^5}{5!}+1490\frac{x^6}{6!}+3675\frac{x^7}{7!}\\
&+7700\frac{x^8}{8!}+12600\frac{x^9}{9!}+12600\frac{x^{10}}{10!}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

A Equação 4.9 é, por definição, a função geradora exponencial para a sequência formada pelos coeficientes de $\dfrac{x^r}{r!}$, em que $r = 0, 1, \cdots, 10$. Assim, dentro do contexto do presente exemplo, cada coeficiente de $\dfrac{x^r}{r!}$ nos fornecerá o número de sequências com uma quantidade r de letras.

Por exemplo, 15 é o coeficiente de $\dfrac{x^2}{2!}$. Isso quer dizer que existem 15 sequências formadas por duas letras escolhidas entre a, b, c e d, guardadas as devidas restrições do enunciado. A título ilustrativo, enumeraremos cada uma delas: $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc, bb, cc, dd$.

Exemplo 4.4.3: Encontrar a função geradora exponencial para cada sequência.

(a) $(4, 4, 4, \ldots)$.

Da Equação 2.21, é imediato que a função geradora exponencial da sequência é $4e^x$.

(b) $(1, 3, 9, \ldots)$.

Claro que a sequência dada é equivalente à $(3^0, 3^1, 3^2, \ldots)$. Então a função procurada é e^{3x}, pois substituido x por $3x$ na Equação 2.21, obtem-se

$$\begin{aligned} e^{3x} &= 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(3x)^r}{r!} + \cdots \\ &= 3^0\frac{x^0}{0!} + 3^1\frac{x^1}{1!} + 3^2\frac{x^2}{2!} + 3^3\frac{x^3}{3!} + \cdots + 3^r\frac{x^r}{r!} + \cdots \end{aligned}$$

Definição 4.5: Uma $r-$ *sequência quaternária* é uma $r-$ *upla* formada somente pelos dígitos 0, 1, 2 e 3.

Exemplo 4.4.4: Quantas são as $r-$ *sequências* quaternárias que contém uma quantidade par de zeros e uns?

A função geradora exponencial que "controla" as aparições dos dígitos 0 e 1 é

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2r}}{(2r)!} + \cdots .$$

Por outro lado, acarreta da Equação 2.21 que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \cdots + (-1)^r\frac{(-x)^r}{r!} + \cdots . \tag{4.10}$$

Somando as Equações 2.21 e 4.10, temos:

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &= 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\frac{x^{2r}}{(2r)!} + \cdots \\ &= 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2r}}{(2r)!} + \cdots\right) = 2f(x). \end{aligned}$$

Portanto $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

No que segue, a função geradora exponencial para o problema será $f^2(x)g^2(x)$, em que $g(x) = e^x$ "controla" a incidência dos dígitos 2 e 3. Assim

$$\begin{aligned}
f^2(x)g^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{4x}}{2}+e^{2x}+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4x)^r}{r!}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}2\frac{(2x)^r}{r!}+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}4^r\frac{x^r}{r!}+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}2^{r+1}\frac{x^r}{r!}+\frac{1}{4}\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}4^{r-1}\frac{x^r}{r!}+\sum_{r=0}^{\infty}2^{r-1}\frac{x^r}{r!}+\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}+\sum_{r=0}^{\infty}(4^{r-1}+2^{r-1})\frac{x^r}{r!}.
\end{aligned}$$

Logo, o número de $r-$ sequências quaternárias, que obedecem às restrições, será o coeficiente $\frac{x^r}{r!}$, ou seja, $(4^{r-1}+2^{r-1})$.

Exemplo 4.4.5: Em um programa de televisão, o candidato é convidado a soletrar 15 palavras. O programa é interrompido por três intervalos destinados às propagandas. A regra do jogo é que as palavras devam ser distribuídas por todas as etapas do programa e que em cada etapa pelo menos uma palavra seja soletrada pelo candidato. Assim sendo, de quantas maneiras uma pessoa pode soletrar as 15 palavras ao longo do programa?

Como as palavras são obviamente diferentes, usaremos a função geradora exponencial. Isto posto, a função geradora que modela a ocorrência de certa quantidade de palavras em uma etapa do programa é

$$x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{12}}{12!}.$$

Vale ressaltar que a função geradora exponencial acima não se estende até a parcela $\frac{x^{15}}{15!}$ pois, em cada etapa, pelo menos uma palavra deverá ser soletrada. Como o programa tem três intervalos comerciais, então ele possui 4 etapas distintas. Assim, a função geradora para o problema será

$$f(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{12}}{12!}\right)^4.$$

E a resposta será o coeficiente de $\frac{x^{15}}{15!}$ em $f(x)$. Note que esse coeficiente será o mesmo se considerarmos, no lugar de $f(x)$, a função

$$g(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{12}}{12!}+\cdots\right)^4,$$

já que, as potências extras em $g(x)$ não fornecerão nenhuma contribuição para o coeficiente de $x^{15}/15!$.

Por conseguinte,

$$
\begin{aligned}
g(x) = (e^x - 1)^4 &= e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1 \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(4x)^r}{r!} - 4\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(3x)^r}{r!} + 6\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2x)^r}{r!} - 4\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} + 1 \\
&= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (4^r - 4 \cdot 3^r + 6 \cdot 2^r - 4)\frac{x^r}{r!}. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Fazendo $r = 15$, temos que o coeficiente de $\dfrac{x^{15}}{15!}$, isto é, a resposta ao problema é igual a $4^{15} - 4 \cdot 3^{15} + 6 \cdot 2^{15} - 4$.

Exemplo 4.4.6: Em uma companhia telefônica são contratados 7 novos técnicos. De quantas maneiras eles podem ser alocados em quatro diferentes escritórios se cada um deles deve receber pelo menos um técnico novato?

Inicialmente, pontua-se que, se cada cada escritório contará com pelo menos um novato, nenhum escritório terá mais do que 4 novatos. E, se os escritórios são diferentes entre si por alguma natureza, então o polinômio $x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}$ "regula" o número de técnicos novatos em cada escritório.

E baseado no Exemplo 4.4.5, mas substituindo $\dfrac{x^{15}}{15!}$ por $\dfrac{x^7}{7!}$, pode-se concluir que a solução do exercício é igual ao coeficiente de $\dfrac{x^7}{7!}$ na Equação 4.11, ou seja, $4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4$.

Repare que o número obtido acima é igual, conforme o Exemplo 3.1.4, ao número de funções sobrejetivas de A em B, em que $n(A) = 7$ e $n(B) = 4$. Por sua vez, pelo Exemplo 3.1.3, é igual a $\binom{4}{0}4^7 - \binom{4}{1}3^7 + \binom{4}{2}2^7 - \binom{4}{3}1^7$.

Devemos nos atentar para o fato de que não se trata de uma eventualidade, mas sim de um mesmo problema visto sob olhares diferentes. O próximo teorema estabelecerá essa equivalência.

Teorema 4.6: (i) Tendo $n \geq k$, o número de modos de distribuir n bolas distintas em k caixas distintas, de forma que não haja nenhuma caixa vazia é igual à $T(n,k)$, dada em 3.3.

(ii) O número de $n - uplas$ cujos elementos pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ nas quais cada um dos números 1, 2, 3, ..., k, aparece pelo menos uma vez é $T(n,k)$.

Demonstração. (i) Pelo Exemplo 3.1.3, temos que $T(n,k)$ é o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, com $n(A) = n$ e $n(B) = k$.

Devemos mostrar que existe uma relação biunívoca entre o conjunto das distribuições de bolas e o conjunto das funções sobrejetoras de A em B. Para isso, consideremos $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ e $B = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, o conjunto das n bolas e o conjunto das k caixas, respectivamente. Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Assim, para cada c_i, com $i = 1, 2, \ldots, k$, existe sua imagem inversa e, além disso, a união de todas as imagens inversas de cada c_i é o próprio conjunto A. Portanto, posta a função f, colocar na caixa c_i as bolas que estão em sua imagem inversa é uma maneira de distribuir as n bolas.

Reciprocamente, dada uma distribuição de bolas em que nenhuma caixa fique vazia, pode-se definir uma função $f : A \to B$, que vincula cada bola em c_i ao valor c_i. Como foi definida, f será sobrejetora e única.

(ii) Primeiramente identifiquemos que a ordem dos n elementos é importante. Por exemplo, as sequências $(1, 2, \ldots, k-1, k, 1)$ e $(1, 2, \ldots, k-1, 1, k)$ são diferentes, embora possuam os mesmos elementos.

A função geradora exponencial que "controla" a incidência de cada número $1, 2, 3, \ldots, k$ será

$$\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}_{\text{controla a incidência do } 1}\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}_{\text{controla a incidência do } 2}\cdots\underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}_{\text{controla a incidência do } k}$$
$$= \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^k = (e^x - 1)^k. \tag{4.12}$$

Como queremos a quantidade de $n - uplas$, desejamos na verdade encontrar o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ na expansão de 4.12.

Sabemos, pelo binômio de Newton, que

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{x(k-i)}. \tag{4.13}$$

De outra parte,

$$e^{x(k-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} (k-i)^n \frac{x^n}{n!}. \tag{4.14}$$

Substituindo 4.14 em 4.13, temos

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!}. \tag{4.15}$$

Logo, pela Equação 4.15, $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ é o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$, que corresponde exatamente a $T(n,k)$ dado pela Equação 3.3. $\square$

Detalhamos assim o número de maneiras de se distribuir n objetos distintos em k caixas distintas, de modo que nenhuma caixa fique vazia.

Examinaremos, a partir do teorema seguinte, a situação de distribuir n objetos distintos em k caixas indistinguivéis. De novo, não deve existir caixa vazia.

Teorema 4.7: O número de maneiras de se distribuir n bolas distintas em k caixas idênticas, sem que haja qualquer caixa vazia, é o *número de Stirling do segundo tipo* $S(n,k)$, sendo que

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) (k-i)^n.$$

Demonstração. Obter uma distribuição de n bolas distintas em k caixas distintas, de modo que não haja caixa vazia, é equivalente a distribuir n bolas distintas em k caixas idênticas (mais uma vez não há caixa vazia) e depois ordenar as k caixas. Lembrando que o número de maneiras de ordenar as k caixas é $k!$.

Diante disso, temos, a partir do exposto, que $T(n,k) = k!S(n,k)$, isto é,

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}T(n,k). \tag{4.16}$$

Pelas Equações 3.3 e 4.16, temos a relação desejada, provando assim o teorema. □

Exemplo 4.4.7: De quantas maneiras podemos distribuir nove sementes de plantas diferentes em quatro canteiros idênticos de uma horta, de modo que nenhum canteiro fique sem semente?

Trata-se de uma aplicação direta do Teorema 4.7. A interpretação do problema nos permite renomear sementes por *bolas distintas* e canteiros por *caixas idênticas*. Assim sendo, o número de maneiras de realizar a distribuição é $S(9,4) = 7\,770$.

Exemplo 4.4.8: De quantas maneiras podemos distribuir quatro funcionários em três escritórios idênticos, dado que um escritório pode ser ocupado por mais de um funcionário?

Podemos dividir a análise desse problemas em casos, conforme o número de escritórios não vazios. Fazendo isso, e recorrendo ao Teorema 4.7, deve-se ter

1º caso) exatamente 1 escritório utilizado. Os funcionários podem ser distribuídos de $S(4,1) = 1$ maneira;

2º caso) exatamente 2 escritórios utilizados. Os funcionários podem ser distribuídos de $S(4,2) = 7$ maneiras;

3º caso) exatamente 3 escritórios utilizados. Os funcionários podem ser distribuídos de $S(4,3) = 6$ maneiras.

Os três casos, quando reunidos abrangem o que se pede no problema, e por isso a resposta será a soma dos resultados obtidos em cada um dos casos. Portanto existem $S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) = 14$ maneiras de cumprir a distribuição.

A partir do próximo teorema, discorreremos um pouco mais sobre o *Número de Stirling do Segundo Tipo* que, daqui em diante, denotaremos da forma abaixo.

$$S(n,k) = \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}.$$

Teorema 4.8: Sejam k e n inteiros positivos tais que $0 \leq k \leq n$. Então

$$\begin{aligned} x^n &= \left\{ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right\} \binom{x}{n} n! + \left\{ \begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right\} \binom{x}{n-1} (n-1)! + \cdots + \left\{ \begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right\} \binom{x}{0} 0! \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \binom{x}{k} k!. \end{aligned}$$

A prova do Teorema 4.8 será omitida, embora seja ofertada logo abaixo uma ideia para sua demonstração. A prova formal pode ser encontrada na página 296 de [11].

Vamos expressar as potência x, x^2, x^3 em termos de números binomiais em x, $x+1$, $x+2$, conforme a seguir

$$\begin{aligned} x &= \binom{x}{1}; \\ x^2 &= 2\binom{x+1}{2} - \binom{x}{1}; \\ x^3 &= 6\binom{x+2}{3} - 6\binom{x+1}{2} + \binom{x}{1}. \end{aligned}$$

Note que, sob um olhar criterioso, os números de Stirling do Segundo Tipo manifestam-se naturalmente. Observe que, por exemplo, x^3 pode ser reescrito convenientemente como

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \times 3! \binom{x+2}{3} - 3 \times 2! \binom{x+1}{2} + 1 \times 1! \binom{x}{1} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\} 3! \binom{x+2}{3} - \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\} 2! \binom{x+1}{2} + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\} 1! \binom{x}{1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, por Indução Matemática, é possível mostrar que para a $n - ésima$ potência de x, temos:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} k! \binom{x+k-1}{k}.$$

Veja que, de acordo com o Teorema 4.8

$$\begin{aligned}
x^4 &= \sum_{k=0}^{4} \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ k \end{array} \right\} \left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array} \right) k! \\
&= \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right) 0! + \cdots + \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{c} x \\ 3 \end{array} \right) 3! + \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{c} x \\ 4 \end{array} \right) 4! \\
&= 0 \left(\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right) 0! + 1 \left(\begin{array}{c} x \\ 1 \end{array} \right) 1! + 7 \left(\begin{array}{c} x \\ 2 \end{array} \right) 2! + 6 \left(\begin{array}{c} x \\ 3 \end{array} \right) 3! + 1 \left(\begin{array}{c} x \\ 4 \end{array} \right) 4!. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Repare ainda que x^4, quando expresso pela soma dada em 4.17, nos fornece, através dos números que acompanham $\left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array} \right) k!$, o número de maneiras de distribuir 4 bolas distintas em k caixas idênticas.

5

Partições

5.1 Introdução

Examinaremos nesse capítulo o ato de distribuir objetos idênticos em compartimentos idênticos.

Suponhamos que queiramos distribuir 5 bolas idênticas em 3 caixas idênticas. Existem apenas duas maneiras de efetuar essa distribuição, três bolas na primeira caixa, uma na segunda e uma na terceira; ou duas bolas na primeira, duas bolas na segunda caixa e uma na terceira. Podemos escrever, respectivamente, as duas situações da seguinte forma: $3+1+1$ e $2+2+1$. Essa duas situações são únicas porque as três caixas são indistinguíveis entre si. Dizemos ainda que as somas exibidas são as *partições* do inteiro 5 em três partes.

Definição 5.1: Uma *partição* de um inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos cuja soma resulta em n. Cada parcela da soma é denominada *parte* da partição.

A título de exemplo, a tabela seguinte ilustra, para 3, 4, 5 e 6, a Definição 5.1.

3	4	5	6
$2+1$	$3+1$	$4+1$	$5+1$
$1+1+1$	$2+2$	$3+2$	$4+2$
	$2+1+1$	$3+1+1$	$4+1+1$
	$1+1+1+1$	$2+2+1$	$3+3$
		$2+1+1+1$	$3+2+1$
		$1+1+1+1+1$	$3+1+1+1$
			$2+2+2$
			$2+2+1+1$
			$2+1+1+1+1$
			$1+1+1+1+1+1$

Tabela 5.1: Partições de 3, 4, 5 e 6.

Definição 5.2: Denota-se por $p(n)$ o número de partições de n.

De acordo com a Tabela 5.1, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ e $p(6) = 11$.

Definição 5.3: Denota-se por
a) $p_k(n)$ o número de partições de n tendo k como a maior parte.
b) $q_k(n)$ o número de partições de n com exatamente k partes.

Nesse sentido, é claro que $p_n(n) = 1$ e $p_k(n) = 0$ quando $k > n$. Com base na Tabela 5.1, $p_2(4) = 2$, $p_2(6) = 3$, $q_4(5) = 1$ e $q_3(6) = 3$, por exemplo.

Exemplo 5.1.1: As partições de 7.

7	$4+2+1$	$3+1+1+1+1$
$6+1$	$4+1+1+1$	$2+2+2+1$
$5+2$	$3+3+1$	$2+2+1+1+1$
$5+1+1$	$3+2+2$	$2+1+1+1+1+1$
$4+3$	$3+2+1+1$	$1+1+1+1+1+1+1$

Tabela 5.2: Partições de 7 ($p(7) = 15$).

Exemplo 5.1.2: Construímos a tabela abaixo baseada na Tabela 5.2.

k	1	2	3	4	5	6	7
$p_k(7)$	1	3	4	3	2	1	1
$q_k(7)$	1	3	4	3	2	1	1

Tabela 5.3: Partições de 7.

É fácil perceber que $\sum_{k=1}^{7} p_k(7) = p(7)$. Em geral, $\sum_{k=1}^{n} p_k(n) = p(n)$.

Além disso, pela Tabela 5.3, para $k = 1, 2, \ldots, 7$, $p_k(7) = q_k(7)$. Não estamos diante de uma coincidência. Mostraremos, mais adiante, que $p_k(n) = q_k(n)$, para todo natural n.

5.2 Gráfico de uma partição

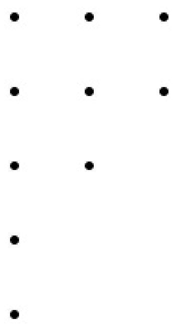
As partições de um inteiro n podem ser representadas pelo *gráfico de Ferrers*. No gráfico de Ferrers, as partes das partições são representadas como linhas de pontos, alinhadas à esquerda em ordem não crescente.

A Figura 5.1 mostra três partições de 10 representadas pelo gráfico de Ferrers.

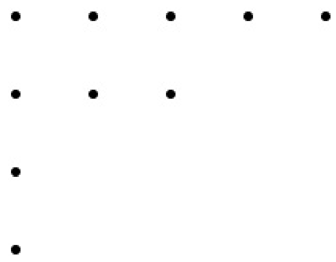
Dado um gráfico de Ferrers de um inteiro n, ao trocarmos as linhas pelas colunas, obteremos uma outra partição do inteiro n. Essa partição é chamada de *conjugada* da primeira partição.

Dessa forma, as conjugadas das partições representadas em 5.1a, 5.1b e 5.1c são, respectivamente, representadas pelas figuras 5.2a, 5.2b e 5.2c.

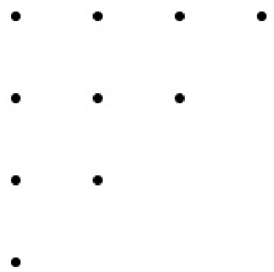
Note que nem toda partição é diferente de sua conjugada. Quando uma partição for igual a sua conjugada, dizemos que essa partição é *autoconjugada*. As Figuras 5.1c e 5.2c indicam partições conjugadas.



(a) Partição $3+3+2+1+1$.



(b) Partição $5+3+1+1$.



(c) Partição $4+3+2+1$.

Figura 5.1: Exemplos de partições de 10.

Lema 5.4: Toda partição tem uma única partição conjugada.

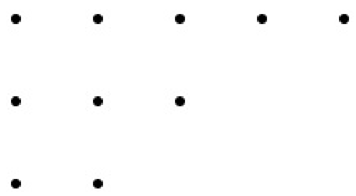
Demonstração. Sempre podemos obter uma conjugada, trocando-se as linhas pelas colunas do gráfico de Ferrers de uma partição P. Sejam P_1 e P_2 conjugadas, distintas entre si, de P. Assim, em pelo menos uma das linhas em seus respectivos gráficos de Ferrers, P_1 e P_2 terão quantidade diferente de pontos. Dessa forma, se trocarmos as linhas pelas colunas no gráfico de P_1 e P_2, não retornaremos ao gráfico de P em um deles, o que é absurdo. Logo $P_1 = P_2$. □

Teorema 5.5: Sendo n e k números naturais, então $p_k(n) = q_k(n)$.

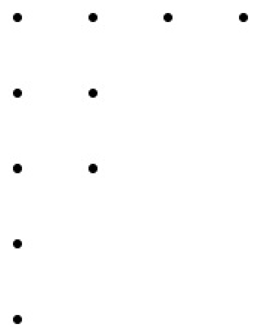
Demonstração. Pela ação de conjugação, definida para as partições de n, toda partição em que k é a maior parte é transformada em uma partição com exatamente k partes. Reciprocamente, novamente pela ação de conjugação, cada partição que tem exatamente k partes é levada a uma partição tendo k como a maior das partes. Como essa relação é biunívoca pelo Lema 5.4, o teorema está demonstrado. □

Corolário 5.6: Sejam $P_k(n)$, o número de partições de n com partes menores do que ou iguais a k, e $Q_k(n)$, o número de partições de n com uma quantidade de partes menor do que ou igual a k. Então $P_k(n) = Q_k(n)$.

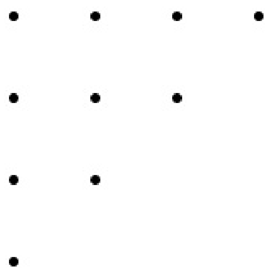
Demonstração. O Lema 5.4 e o Teorema 5.5 nos garantem que a ação de conjugação leva cada elemento contado por $P_k(n)$ a um único elemento contado por $Q_k(n)$. □



(a) 5+3+2, conjugada da partição em 5.1a



(b) 4+2+2+1+1, conjugada da partição em 5.1b.



(c) 4+3+2+1 é uma partição autoconjugada.

Figura 5.2: Partições conjugadas das partições expostas na Figura 5.1.

Seguindo, chamaremos de $W(n)$ o número de partições de n em que cada parte aparece mais de uma vez. Por outro lado, $Z(n)$ é o número de partições de n em que todas as partes são maiores do que 1 e inteiros consecutivos não configuram como partes.

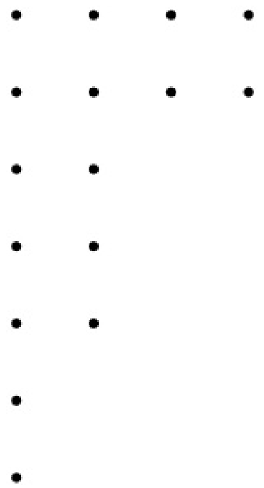
Teorema 5.7: $W(n) = Z(n)$, para n natural.

Demonstração. Outra vez, pela ação de conjugação, quando tomada uma partição contada por $W(n)$, obtemos exatamente uma partição contada por $Z(n)$. □

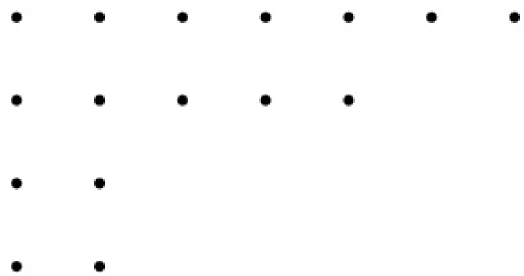
Exemplo 5.2.1: Repare que a partição $4+4+2+2+2+1+1$ é contada em $W(16)$ assim como sua conjugada, $7+5+2+2$ é contada em $Z(16)$. Veja Figura 5.3.

Considere que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ e $\lambda_1 > 1$, é uma partição de n. Com isso, seja uma partição auxiliar $(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1)$. A partição auxiliar tem k partes.

Tome o diagrama de Ferrers da partição auxiliar. Vendo-o da esquerda para a direita, a reta r é a reta que passa pelo primeiro ponto da primeira linha e pelo segundo ponto da segunda linha do diagrama.



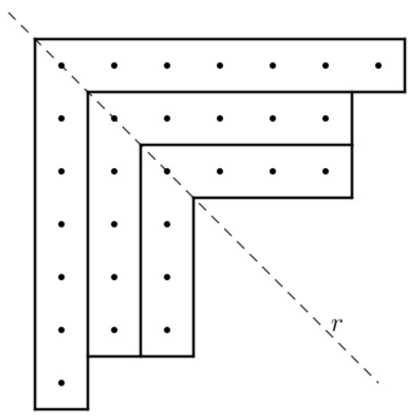
(a) $4+4+2+2+2+1+1$, partição contada em $W(16)$.



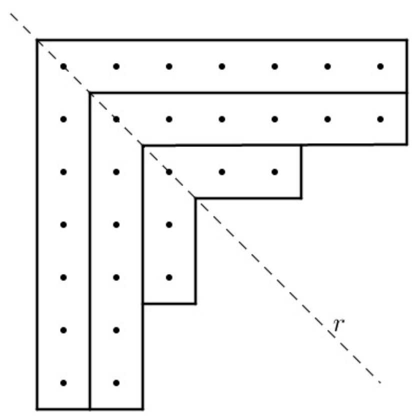
(b) $7+5+2+2$, partição contada em $Z(16)$.

Figura 5.3: Exemplos de partições de 16.

Note que toda partição autoconjugada de n é simétrica à reta r. Essa situação é ilustrada pela Figura 5.4 em que são expostos dois gráficos de Ferrers que representam partições autoconjugadas de $n = 29$.



(a) Partição $7+6+6+3+3+3+1$.



(b) Partição $7+7+5+3+3+2+2$.

Figura 5.4: Exemplos de partições autoconjugadas de 29.

Em cada uma das áreas delimitadas (em formato de "L"), a reta r contém apenas um ponto do gráfico de Ferrers. Além disso, a reta r separa cada uma dessas áreas delimitadas em duas regiões, de modo que cada região contém o mesmo número de pontos do gráfico de Ferrers. Logo, cada área delimitada contém um número ímpar de pontos. Pela natureza da distribuição dos pontos no gráfico de Ferrers, a quantidade de pontos numa área delimitada é distinta de todas as outras.

Na Figura 5.4a, a maior área delimitada, que contém 13 pontos, é dividida pela reta r em duas regiões que contém, cada uma, 6 pontos do gráfico de Ferrers. Veja Figura 5.5.

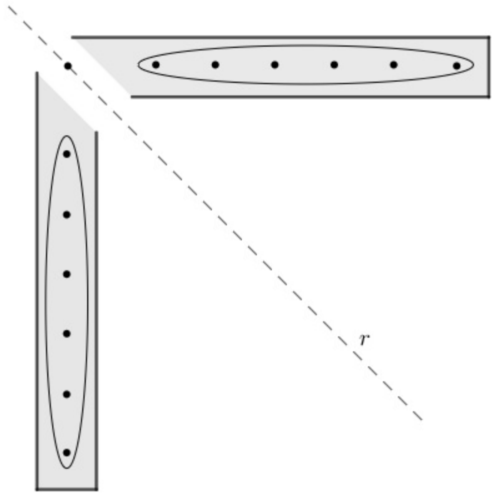


Figura 5.5: Detalhamento da maior área delimitada dada pela Figura 5.4a.

Assim como a menor das áreas delimitadas de 5.4b, que contém 5 pontos no total, é dividida pela reta r em duas regiões que contém 2 pontos cada uma. Veja Figura 5.6.

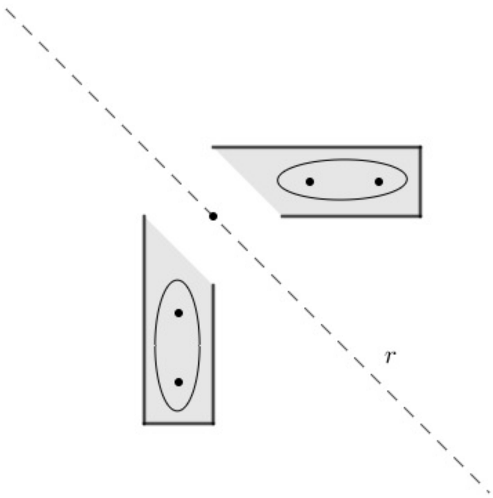


Figura 5.6: Detalhamento da menor área delimitada dada pela Figura 5.4b.

Por outro lado, dados números ímpares distintos, podemos sempre dispô-los em áreas delimitadas em formato de "L", conforme o exemplo dado pela Figura 5.4. Assim sendo, tem-se o gráfico de Ferrers de uma partição cujo eixo de simetria é a reta r posicionada como em 5.4. Portanto, obtem-se o gráfico de uma partição autoconjugada.

Teorema 5.8: O número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em que as partes são ímpares distintas.

Embora não tenhamos feito uma demonstração formal do Teorema 5.8, o argumento dado acima nos convence de que existe uma relação biunívoca entre o conjunto das partições autoconjugadas de um inteiro n e o conjunto das partições em que as partes são ímpares distintos do mesmo inteiro n.

5.3 Funções geradoras para partições

Consideremos as partições de 7, já exibidas no Exemplo 5.1.1.

Se quisermos distribuir 7 objetos idênticos em 4 caixas iguais, sem que nenhuma fique vazia, somente as configurações $\{4,1,1,1\}$, $\{3,2,1,1\}$ e $\{2,2,2,1\}$ atenderão às exigências. Os três conjuntos citados são justamente as partições do inteiro $n = 7$ com exatamente $k = 4$ partes. De fato, $q_4(7) = 3$.

Por meio de um raciocínio análogo, podemos concluir que o número de maneiras de se distrinuir n objetos idênticos em k caixas iguais, de modo que não haja caixa vazia, é $q_k(n)$.

Seguindo, temos por objetivo obter a função geradora para as partições de n em partes distintas. Consideremos o produto

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)\cdots \\ &= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+\cdots.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Repare, por exemplo, que na Equação 5.1, o coeficiente 4, nos diz que existem 4 partições de 6 em que as partes são distintas, isto é, todas as parcelas da soma são distintas entre si. A Tabela 5.1 nos permite visualizar essa afirmação, donde tem-se que as partições são: $6,\ 5+1,\ 4+2$ e $3+2+1$.

Perceba que x^6 aparece nos seguintes produtos: $1 \cdot x^6$, $x^1 \cdot x^5$, $x^2 \cdot x^4$ e $x^1 \cdot x^2 \cdot x^3$. Os expoentes de x em cada produto formam as partições que devem ser consideradas.

Por isso, podemos firmar que a função geradora para as partições do natural n em que as partes são distintas é dada pelo segundo membro da Equação 5.1. Além disso, podemos escrever

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}(n)x^n,$$

em que $\mathcal{D}(n)$ é o número de partições de n em partes distintas.

A partir disso, é natural que surja o questionamento sobre a existência de uma função geradora para $p(n)$.

Teorema 5.9: Sendo $p(n)$ o número de partições de n, $|x| < 1$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m}, \quad \text{com } p(0) = 1.$$

Sendo que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots$$
$$= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \cdots . \tag{5.2}$$

Efetuando o produto em 5.2, obtemos uma série da forma

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^k. \tag{5.3}$$

Queremos mostrar que $a(k) = p(k)$. Para isso, consideremos x^{k_1} um termo da série contida no primeiro par de parênteses da Equação 5.2, x^{2k_2} do segundo par de parênteses, x^{3k_3} do terceiro par de parênteses, e assim até x^{mk_m}, um termo no $m - \acute{e}simo$ par de parênteses. Claro que $k_i \geq 0$, para todo i.

Observe que os coeficientes de x^k são constituídos a partir de um produto da forma $x^{k_1}x^{2k_2}x^{3k_3} \cdots x^{mk_m}$, isto é, cada par de parênteses em 5.2, que abriga uma série, contribui com um termo. Desse modo, sendo

$$x^{k_1}x^{2k_2}x^{3k_3} \cdots x^{mk_m} = x^k,$$

temos que

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots mk_m = k. \tag{5.4}$$

A Equação 5.4 pode ser reescrita na forma

$$\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{k_1 \text{ parcelas}} + \underbrace{(2 + 2 + \cdots + 2)}_{k_2 \text{ parcelas}} + \cdots + \underbrace{(m + m + \cdots + m)}_{k_m \text{ parcelas}} = k. \tag{5.5}$$

Perceba que a Equação 5.5 nos dá uma partição de k. Portanto, cada partição de k produzirá um termo correspondente x^k e, reciprocamente, a cada termo x^k corresponderá uma partição de k. Por isso, $a(k)$, coeficiente de x^k, é realmente igual ao número de partições de k. Logo $a(k) = p(k)$.

Para exemplificar o que foi exposto, admita que, em cada uma das quatro primeiras séries de 5.2, tenhamos tomado, respectivamente, x^4, x^4, x^9 e x^8. Cada uma dessas potências pode ser interpretada da seguinte forma:

$$x^4 = x^{1+1+1+1}, x^4 = x^{2+2}, x^9 = x^{3+3+3}, x^8 = x^{4+4},$$

e, tendo em vista que $x^4 \cdot x^4 \cdot x^9 \cdot x^8 = x^{25}$, temos associada a partição $4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$ de 25.

A Equação 5.2 pode ser entendida como

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots\\ &= (1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\dots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\dots)\\ &\quad(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\dots)\cdots.\end{aligned}$$

Em que a função $\frac{1}{1-x}$ "governa" a incidência dos 1's, $\frac{1}{1-x^2}$ a incidência dos 2's, $\frac{1}{1-x^3}$ a incidência dos 3's e assim por diante.

Todo o argumento anterior, usado para justificar o Teorema 5.9, foi pautado exclusivamente com argumentos combinatórios. A seguir, exibiremos uma demonstração analítica formal para esse teorema que pode ser vista em [3].

Demonstração. Para nosso propósito, introduziremos duas funções:

$$F_m(x)=\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}\quad \text{e}\quad F(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}=\lim_{m\to\infty}F_m(x).$$

Temos que $F(x)$ converge absolutamente se $0\le x<1$, pois $\prod(1-x^k)$ converge absolutamente, desde que a série $\sum x^k$ convirja absolutamente. Então, para cada x fixo, temos

$$F_{m+1}(x)=\frac{1}{1-x^{m+1}}\cdot F_m(x)\ge F_m(x).$$

Portanto, $F_m(x)\le F(x)$, para todo m natural e $0\le x<1$.

Temos que $F_m(x)$ é absolutamente convergente, pois é produto de uma quantidade finita de séries que convergem absolutamente. No que segue, podemos escrever $F_m(x)$ como

$$F_m(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}p_m(k)x^k,$$

em que $p_m(k)$ é o número de soluções da Equação 5.4, ou, equivalentemente, é o número de partições de k em que as partes são menores do que ou iguais a m. Se $m\ge k$, então $p_m(k)=p(k)$. Logo, sempre teremos $p_m(k)\le p(k)$. Em outras palavras

$$\lim_{m\to\infty}p_m(k)=p(k).$$

Temos também que

$$F_m(x)=\sum_{k=0}^{m}p_m(k)x^k+\sum_{k=m+1}^{\infty}p_m(k)x^k=\sum_{k=0}^{m}p(k)x^k+\sum_{k=m+1}^{\infty}p_m(k)x^k.$$

Se $x \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{m} p(k)x^k \leq F_m(x) \leq F(x).$$

Isso nos permite afirmar que $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$ converge.

Além disso, como $p_m(k) \leq p(k)$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \leq F(x).$$

Assim, para cada x fixo, a série $\sum p_m(k)x^k$ converge uniformemente em m. Fazendo $m \to \infty$, temos

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} F_m(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k.$$

□

Pela própria natureza da obtenção das funções geradoras para partições, e amparados pelas Equações 5.1 e 5.2, temos que as funções geradoras para as partições em que as partes são distintas são da forma $\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$, enquanto que, as funções geradoras para as partições em que as partes não são distintas são da forma $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$.

Nos dois casos, k será uma expressão que traduz uma restrição dada. Nesse sentido, elencamos algumas funções geradoras.

Função geradora	para a sequência das partições de n em que as partes são
a) $\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m)$	distintas
b) $\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}$	ímpares
c) $\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^{2m-1})$	ímpares distintos
d) $\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m}}$	pares
e) $\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^{2m})$	pares distintos

Tabela 5.4: Algumas funções geradoras.

Retomando o Exemplo 5.1.1, podemos observar que o número de partições de 7 em partes distintas (7 , 6+1 , 5+2 , 4+3 , 4+2+1) é igual ao número de partições de 7 em que as partes são ímpares (7 , 5+1+1 , 3+3+1 , 3+1+1+1+1 , 1+1+1+1+1+1+1). Pela Tabela 5.1, vemos que o mesmo ocorre com o número 6, assim como com o número 5. Isso vale mais geralmente. Podemos provar essa igualdade para todo n natural.

Teorema 5.10: O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.

Demonstração. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1+x^m)(1-x^m)}{1-x^m} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1+x^m)(1-x^m)}{1-x^m} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-x^{2m}}{1-x^m} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}}.
\end{aligned}$$

Consultando a Tabela 5.4, confirmamos que o teorema foi provado. □

Exemplo 5.3.1: Mostre que o número de partições de um inteiro positivo n em partes tais que cada parte par aparece no máximo uma vez (por exemplo, $28 = 1+1+2+3+5+5+5+6$, $15 = 1+1+1+4+8$ e $27 = 1+1+3+11+11$) é igual ao número de partições de n em que cada parte aparece no máximo três vezes (por exemplo, $20 = 1+1+1+2+3+4+4+4$).

O número de partições de n em que cada parte par aparece no máximo uma vez é dado pela função geradora

$$\begin{aligned}
&(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x}\cdot(1+x^2)\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot(1+x^4)\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^{2m}). \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Por outro lado, a função geradora que nos "guia" até o número de partições de n em que cada parte aparece no máximo três vezes é

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6+x^9)(1+x^4+x^8+x^{12})\cdots \\
&= \frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1-(x^2)^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-(x^3)^4}{1-x^3}\cdots = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-x^{4m}}{1-x^m} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x^m)(1+x^m)(1+x^{2m})}{1-x^m} = \prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m)(1+x^{2m}) \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m)\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^{2m}). \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

A Equação 5.6 indica que o número de partições de n em que cada parte par não aparece mais do que uma vez é o produto entre b) e e) da Tabela 5.4.

De outro lado, a Equação 5.7 nos diz que o número de partições de n em que cada parte aparece no máximo três vezes é dado pelo produto entre a) e e) da Tabela 5.4.

Pelo Teorema 5.10, os itens a) e b) da Tabela 5.4 representam o mesmo número. Dessa forma, alcançamos o resultado desejado.

Exemplo 5.3.2: De quantas maneiras pode-se obter R$ 1,72 a partir de 19 moedas de um centavo, 39 moedas de 10 centavos e 9 moedas de 1 real?

Para uniformizarmos as unidades monetárias, consideremos que uma moeda de um real equivale a uma moeda de 100 centavos.

Na verdade, quando se pede uma quantia n que seja constituída pela coleção de moedas dada, é o mesmo que determinar a quantidade de partições de n em que as partes são restritas a 1, 10 e 100. Diante disso, podemos afirmar que a função geradora que modela a situação é

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+\cdots+x^{19})(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{390})(1+x^{100}+x^{200}+\cdots+x^{900}) \\
&= \frac{1-x^{20}}{1-x}\cdot\frac{1-(x^{10})^{40}}{1-x^{10}}\cdot\frac{1-(x^{100})^{10}}{1-x^{100}} = \frac{1-x^{20}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{400}}{1-x^{10}}\cdot\frac{1-x^{1000}}{1-x^{100}} \\
&= \frac{1}{1-x}\cdot(1-x^{1000})\cdot\frac{(1-x^{10})(1+x^{10})(1-x^{100})(1+x^{100})(1+x^{200})}{(1-x^{10})(1-x^{100})} \\
&= \frac{1}{1-x}\cdot(1-x^{1000})\cdot(1+x^{10})\cdot(1+x^{100})\cdot(1+x^{200}). \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Para resolvermos o problema, basta obtermos o coeficiente de x^{172} no desenvolvimento de 5.8. Como $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$, todos os coeficientes envolvidos no produto em 5.8 são iguais a 1. Temos que o coeficiente de x^{172} será 4, dado que x^{172} aparecerá apenas nos produtos: $x^{172}\cdot 1$; $x^{162}\cdot x^{10}$; $x^{72}\cdot x^{100}$ e $x^{62}\cdot x^{10}\cdot x^{100}$.

Nesse caso, por não ser uma lista extensa, exibimos cada uma das quatro maneiras:

1ª) 12 moedas de 1 centavo, 6 moedas de 10 centavos e 1 moeda de 1 real;

2ª) 2 moedas de 1 centavo, 7 moedas de 10 centavos e 1 moeda de 1 real;

3ª) 12 moedas de 1 centavo e 6 moedas de 10 centavos;

4ª) 2 moedas de 1 centavo e 17 moedas de 10 centavos.

6

Análise Combinatória no Ensino Médio

6.1 Uma breve reflexão

A Análise Combinatória é a área da Matemática que reúne técnicas e métodos para se contar a quantidade de elementos de um conjunto finito.

O ato de contar talvez seja um dos processos mais primitivos que o homem experimentou. Provavelmente, motivado pela necessidade de controlar a quantidade de coisas que possuía, como os animais e os alimentos, o homem contava as coisas uma a uma e, para isso, lançava mão de pedras e nós em cordas. Obviamente, contar um por um os elementos de um conjunto pode ser extremamente enfadonho para uma quantidade muito grande. Novamente impulsionado pela necessidade, o homem foi apurando e aperfeiçoando os métodos de contagem.

Dessa forma, dada a relevância do ato de contar, ao longo dos tempos, seria natural que o homem desenvolvesse outras maneiras de contabilizar os elementos de um conjunto finito através da Matemática [1].

A Análise Combinatória na educação básica brasileira é historicamente ensinada aos alunos no segundo ano do Ensino Médio. Mas, há alguns anos, o ensino dos métodos de contagem tem figurado nos livros didáticos e aulas do Ensino Fundamental. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC – comunga com essa ideia conforme as Tabelas 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4, extraídas de [8].

Para o Ensino Médio, de acordo com a BNCC da Matemática e suas tecnologias, a proposta de aprendizagem consiste na consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Inserido nesse contexto, e dentro de uma sugestão de organização curricular fornecida pela própria BNCC, encontra-se apenas uma habilidade (ver Tabela 6.5), de todas aquelas que foram elencadas nesse documento, contemplando explicitamente o ensino da Análise Combinatória. A BNCC, quanto ao Ensino Médio, não fala de objetos de conhecimento (como faz no Ensino Fundamental). Fala-se de *competências específicas* que devem ser desenvolvidas pelos estudantes.

[1] É riquíssima a história da contagem ao longo da história. Para mais, sugerimos ao leitor [20].

Ano escolar: 1º

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Contagem de rotina. Contagem ascendente e descendente. Reconhecimento de números no contexto diário: indicação de quantidades, indicação de ordem ou indicação de código para a organização de informações.	Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação.

Tabela 6.1: Diretrizes para o abordagem do conteúdo Contagem para o 1º ano do Ensino Fundamental. Retirado da BNCC.

Ano escolar: 4º

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Problemas de contagem.	Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Tabela 6.2: Diretrizes para o abordagem do conteúdo Contagem para o 4º ano do Ensino Fundamental. Retirado da BNCC.

Além disso, embora o eixo temático Matemática e suas tecnologias deva ser oferecido nos três anos do Ensino médio, o documento procura não fragmentar as habilidades em séries, permitindo a flexibilização dos currículos e adequações baseadas nas diversas realidades de cada escola.

Ainda em relação ao Ensino Médio, é frequente ouvir falar da grande dificuldade dos alunos, e até mesmo de alguns professores, quando o assunto é a Análise Combinatória.

É inadequado quando a abordagem em sala de aula se resume à fórmula e à aplicação direta. Não se deve associar o ensino da Análise Combinatória a somente o reconhecimento, por parte do aluno, de uma categoria na qual se enquadra certo problema: arranjo, permutação ou combinação e usar, "de olhos fechados", a respectiva fórmula. Certamente estarão sendo deixadas lacunas na compreensão desses conceitos. O aluno, consequentemente, será conduzido a um trabalho puramente mecânico e sem significado para ele.

Indo então no sentido oposto a essa visão automatizada da aprendizagem, faz-se

Ano escolar: $5^{\underline{o}}$

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?".	Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Tabela 6.3: Diretrizes para o abordagem do conteúdo Contagem para o $5^{\underline{o}}$ ano do Ensino Fundamental. Retirado da BNCC.

Ano escolar: $8^{\underline{o}}$

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	O princípio multiplicativo da contagem.	Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
Probabilidade e estatística	Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Tabela 6.4: Diretrizes para o abordagem do conteúdo Contagem para o $8^{\underline{o}}$ ano do Ensino Fundamental. Retirado da BNCC.

necessário o tratamento da Análise Combinatória por suas vias mais primitivas como o Princípio Fundamental da Contagem, o Princípio Aditivo e o diagrama de árvores. Dessa forma, a aprendizagem pode ser consolidada através de um trabalho mais intuitivo.

Para ratificar, segundo Lima et al (2006 p.137), não se deve fazer fórmulas ou casos particulares em demasia. Isso obscurece as ideias gerais e tudo fica mais complexo. Trocar o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjos, permutações e combinações é um passo rumo à dificuldade em resolver os problemas combinatórios, inclusive aqueles de natureza mais acessível. Nesse sentido, ainda em Lima et al (2006 p.138), afirma-se que

Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações?

Ano escolar: não definido

UNIDADE TEMÁTICA	COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	HABILIDADES
Probabilidade e estatística	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Tabela 6.5: Diretrizes para o abordagem do conteúdo Contagem para o Ensino Médio. Retirado da BNCC.

6.2 Análise de alguns livros didáticos

Na presente seção será realizada uma análise crítica de alguns livros didáticos brasileiros quanto à abordagem do ensino da Análise Combinatória.

A análise será feita, basicamente, sob a ótica dos seguintes aspectos:

a) forma de como o livro é segmentado, número de páginas e exercícios dedicados à Análise Combinatória;

b) descrição de como o autor aborda os tópicos correlatos à Análise Combinatória;

c) citação dos aspectos positivos apresentados na obra, acompanhada de contribuição para a complementação da mesma;

d) conclusão, sintetizando a análise feita nos itens anteriores.

6.2.1 Análise da obra *Métodos de Contagem e Probabilidade* (ver [10])

A obra [10], volume 2 da coleção de livros utilizados no PIC – Programa de Iniciação Científica Jr. – foi escrita por Paulo Cezar Pinto Carvalho. O PIC é um programa que propicia ao aluno premiado em cada edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP – entrar em contato com questões na área da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico.

O público que participa da OBMEP ano a ano consiste nos alunos do ensino básico (Ensino Fundamental e Ensino Médio) matriculados em escolas públicas e escolas privadas. Também podem participar os respectivos professores, escolas e secretarias de educação, todos localizados exclusivamente no Brasil.

Este livro visa atingir os grupos de alunos que se encontram no nível 1 e nível 2 e seus respectivos professores orientadores. A tabela seguinte mostra como a divisão dos alunos é feita por níveis.

Nível	Grau de escolaridade
1	6º ou 7º ano do Ensino Fundamental
2	8º ou 9º ano do Ensino Fundamental
3	Ensino Médio

Tabela 6.6: Categorização dos níveis em relação ao grau de escolaridade. Retirado do regulamento da OBMEP 2020.

Os capítulos 1 e 4 são direcionados aos conteúdos de análise combinatória. De acordo com o próprio autor, o primeiro capítulo é destinado aos alunos dos grupos 1 e 2. O capítulo 4 tem o grupo 2 como foco, embora seja acessível também aos estudantes do grupo 1, novamente segundo o autor.

No *capítulo 1* – Métodos de Contagem – são feitas considerações teóricas sobre o princípio fundamental da contagem e sobre o princípio aditivo a partir de 8 exemplos resolvidos.

Considerando que a complexidade dos exercícios combinatórios tem relação direta com o número de restrições impostas pelo problema e com o uso de técnicas de contagem, podemos afirmar que a cada exemplo proposto no capítulo 1 o grau de complexidade é alterado.

Para a Tabela 6.7, considere as legendas:

- PFC – princípio fundamental da contagem;
- PA – princípio aditivo.

Exemplo	Ferramenta(s) combinatória(s) utilizada(s)	Número de restrições
1	PFC	nenhuma
2	PFC	nenhuma
3	PFC	1
4	PFC	1
5	PFC e PA	nenhuma
6	PFC e PA	2
7	PFC	nenhuma
8	PFC	nenhuma

Tabela 6.7: Análise dos exemplos do capítulo 1 de [10].

Nos exemplos 7 e 8, são introduzidos, respectivamente, os conceitos de permutações simples e combinações simples, ambos a partir do princípio fundamental da contagem. As notações e fórmulas também são apresentadas.

No fim do capítulo 1 são oferecidos ao leitor 22 exercícios.

O *capítulo 4* – Mais Permutações e Combinações – procura diversificar a natureza dos problemas combinatórios. Para isso, são utilizados 5 exemplos resolvidos.

Esses exemplos contemplam os seguintes tópicos da análise combinatória: permutação circular, permutação com elementos repetidos, variações de estratégias em problemas envolvendo combinações simples, combinação com repetição relacionado ao número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear. As notações e fórmulas são apresentadas.

Destacamos como aspectos positivos o fato da obra trazer uma estratégia para resolução de problemas combinatórios. Essa estratégia consiste em:

1º) postura, quando o leitor se coloca “dentro” do problema como se ele mesmo fosse executando as ações;

2º) divisão, consiste em dividir o problema em etapas menores de modo a facilitar sua compreensão;

3º) não adiar dificuldades, ou seja, é recomendável que as restrições impostas sejam atacadas o quanto antes.

Além das estratégias, a resolução dos exemplos é bem detalhada, e o raciocínio, explicado minuciosamente, é valorizado em detrimento dos cálculos em si.

O uso da técnica de contagem que consiste em ignorar uma das restrições do problema, contar intencionalmente em demasia. Depois descontar o que houver sido contado indevidamente. Esse processo é popularmente conhecido como retirar os “ruins” do “todo” para sobrar os “bons” e amplia a capacidade do aluno de resolver situações de contagem de forma mais eficiente.

Figura 6.1: Obra Métodos de Contagem e Probabilidade - volume 2.

Para complementação da obra, sugerimos que, no capítulo 4, seja inserido um exemplo abordando o número de soluções inteiras positivas de uma equação linear (usando símbolos | e •, por exemplo) relacionado-o com o as combinações simples.

Além disso, consideramos produtivo que se estabeleça uma relação entre o problema de encontrar a quantidade de soluções inteiras não negativas de uma equação linear com as permutações com elementos repetidos.

Por tudo, no que concerne a análise combinatória, consideramos a obra adequada para os alunos participante do PIC por apresentar bastante diversidade de exemplos contemplando várias técnicas de contagem. Para o ensino fundamental regular, a obra pode ser usada em conjunto com livros didáticos mais elementares e servir de material de apoio para os professores desse segmento.

6.2.2 Análise da obra *Fundamentos de Matemática Elementar – volume 5* (ver [14])

O volume 5 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar é escrito por Samuel Hazzan. O capítulo 1 de [14], dedicado ao estudo da Análise Combinatória, é segmentado em dez seções distribuídas em 56 páginas e seguidas de uma leitura sobre Cardano [2]. Além disso, são propostos 229 exercícios ao longo do capítulo.

Na *seção I* – Introdução – o autor apresenta brevemente a função da Análise Combinatória e segue com quatro exemplos que, do menos para o mais complexo, visam mostrar o quão necessários são os métodos de contagem de elementos de um conjunto.

A *seção II* – Princípio fundamental da contagem – se inicia com dois lemas que envolvem a formação de pares ordenados dados dois conjuntos ou apenas um, e suas respectivas demonstrações. Após cada demonstração, são inseridos exemplos de aplicação dos lemas. A partir disso, o princípio fundamental da contagem é dividido em duas partes, A e B:

Parte A - Considera-se r conjuntos: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\}$, $\cdots$, $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_r}\}$. O número de $r-uplas$ ordenadas do tipo $(a_i, b_j, \ldots, z_p)$ em que $a_i \in A$, $b_j \in B$, $\ldots$, $z_p \in Z$ é $n(A)n(B)\cdots n(Z)$.

Parte B - Em um conjunto A com m $(m \geq 2)$ elementos, o número de $r-uplas$ ordenadas formadas com elementos distintos dois a dois de A é $m(m-1)(m-2)\cdots[m-(r-1)]$.

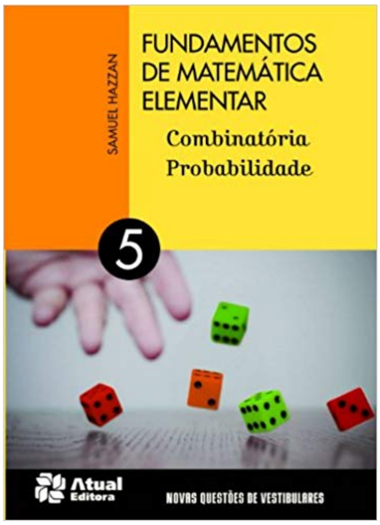


Figura 6.2: Obra Fundamentos de Matemática Elementar - volume 5.

Apenas a parte A é provada, já que a prova de B é análoga à de A e também pode ser feita por indução finita. Em seguida, são postos três exemplos de aplicação do Princípio Fundamental da Contagem, sendo que dois deles se utilizam do diagrama de árvores na sua resolução. A seção termina com uma lista de 40 exercícios, sendo que 5 deles estão resolvidos.

A *seção III* – Consequências do princípio fundamental da contagem – consiste em um único parágrafo cuja intenção é conscientizar o leitor que embora o princípio fundamental da contagem seja um instrumento básico na Análise Combinatória, sua aplicação direta na resolução de problemas pode se tornar uma tarefa muito árdua. Sendo assim, é pontuado que existem generalizações e deduções que auxiliarão nos processos de contagem.

A *seção IV* inicia-se diretamente com a definição de arranjo com repetição, seguida de um exemplo de aplicação. Logo após o exemplo, usando o Princípio Fundamental da Contagem, é deduzida uma fórmula para se obter o número de arranjos com repetição.

A *seção V* e a *seção VI* – Arranjos e Permutações – tratam de arranjos e

[2] Girolamo Cardano (⋆1501 - †1576) - matemático italiano. Produziu também sobre Medicina, Física, Filosofia, Religião e Música. Escreveu *Ars Magna*, onde encontram-se as descrições dos trabalhos de Tartaglia e Ferrari, sobre Equações do Terceiro Grau e Quarto Grau, respectivamente.

permutações, respectivamente. A abordagem é feita como na *seção IV*: inicia-se com a definição, logo após um exemplo e depois a fórmula deduzida a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Em ambas as seções, um segundo exemplo é disposto após a dedução da fórmula.

Vale a ressalva de que nenhuma das fórmulas considerou o uso do fatorial de um número até as seções já mencionadas.

A seção *seção VII* – Fatorial – trata da definição de fatorial e sua simbologia padrão. Hazzan justifica o uso do fatorial citando a simplificação das fórmulas de arranjos, permutações e outras que serão observadas em seções posteriores. As definições 1! e 0! são citadas e é comunicado ao leitor que serão justificadas mais adiante.

Em seguida, são expostos alguns exemplos envolvendo cálculo e simplificação de fatoriais. Na sequência, o autor apresenta as fórmulas tradicionais do número de arranjos e do número de permutações simplificadas pela notação fatorial.

Logo após, a obra emplaca mais 83 exercícios, sendo que 10 deles já estão resolvidos. Dentro dessa bateria de exercícios, o autor se faz valer de um deles que consiste em determinar o número de maneiras que quatro pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa circular para introduzir o assunto Permutações Circulares. O exercício é então utilizado como exemplo para se deduzir uma fórmula para o número de permutações circulares.

A *seção VIII* – Combinações – aborda as combinações. De início, é dada a definição e um exemplo bem trivial. O autor enfatiza que as combinações são conjuntos e, portanto, a ordem dos elementos não deve ser considerada, ao passo que numa sequência a ordem dos elementos é relevante. Em seguida é apresentada ao leitor uma dedução formal, com demonstração, da fórmula para o cálculo do número de combinações. A seção é finalizada com dois exemplos de aplicação direta da fórmula para o cálculo do número de combinações, 74 exercícios, dos quais 6 são resolvidos.

A *seção IX* – Permutações com elementos repetidos – é iniciada por um exemplo em que é pedido o número de anagramas de uma palavra pequena que possui letras repetidas. O autor apresenta uma sequência de raciocínio segmentada em casos:

1º caso - calcular o número de permutações de n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1;

2º caso - calcular o número de permutações de n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1 e a_2;

Caso geral - calcular o número de permutações de n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, ..., n_r são iguais a a_r, e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1, a_2, ..., a_r.

Uma fórmula particular para o *1º caso* é deduzida através do Princípio Fundamental da Contagem. A partir do *1º caso* e do *2º caso*, é deduzida uma fórmula para o *caso geral* e introduzida uma notação para indicar o número de permutações com elementos repetidos. Após os dois primeiros casos, existem exemplos de aplicação direta da fórmula.

Após a *seção IX*, são propostos ao leitor mais 13 exercícios, em que apenas um deles está resolvido.

A *seção X* – Complementos – aborda as *partições ordenadas*, *partições não ordenadas* e *soluções inteiras não negativas de uma equação linear*. Nos dois primeiros tópicos são apresentados exemplos que mostram como alguns problemas combinatórios podem ser solucionados com o auxílio dos respectivos conceitos.

Já no terceiro tópico, é utilizado um esquema com bolinhas ($\bullet$) e barras ($|$) para esclarecer ao leitor que o problema de encontrar o número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear se resume a um problema de encontrar o número de permutações com elementos repetidos. Esse raciocínio é formalizado por teorema devidamente demonstrado. Um exemplo de aplicação é colocado após a demonstração e precede a última lista de exercícios. Essa lista é composta de 19 exercícios, sendo que nenhum foi resolvido pelo autor. O capítulo 2 de [14], intitulado *Binômio de Newton*, é dividido em cinco seções. As seções são distribuídas por 31 páginas e contemplam 109 exercícios.

Na *seção I* – Introdução – é feito o diagrama de árvore para se obter o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$, para $n = 2$ e $n = 3$. No entanto, o diagrama de árvore, para esse fim, é de fato um método um tanto quanto trabalhoso à medida que aumentamos o valor de n. Assim, o livro mostra que os coeficientes dos termos da expansão do binômio podem ser obtidos através de permutações com elementos repetidos, que por sua vez são equivalentes a combinações. A título de exemplo, é executado passo a passo o caso para $n = 3$.

A *seção II* – Teorema binomial – generaliza o que foi realizado na seção anterior mediante o Teorema Binomial e sua demonstração. Um exemplo de aplicação direta acompanhado de 8 exercícios finalizam a seção.

Na *seção III* – Observações – o autor vincula o conceito coeficientes binomiais à sua notação e informa que o Teorema Binomial também é válido para $(x - a)^n$. É colocado um exemplo de aplicação direta e uma lista de 8 exercícios. Após, é dado destaque ao termo geral da expansão do binômio de Newton seguido de três exemplos de aplicação direta. A seção se encerra com uma lista de 48 exercícios sendo que 2 deles apresentam solução. Um dos exercícios resolvidos mostra, pelo Teorema Binomial, que $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ para nx próximo de zero.

O Triângulo aritmético de Pascal (ou de Tartaglia) nomeia a *seção IV*. Nessa seção, além de explicitada a famosa disposição dos coeficientes binomiais em formato triangular, são apresentadas quatro propriedades do triângulo de Pascal, entre elas a notável relação de Stifel. A seção é finalizada com um elenco de 39 exercícios dentre os quais 5 têm suas resoluções fornecidas.

A *seção V* – Expansão multinomial – aborda a expansão multinomial. O autor dá ênfase na obtenção de coeficientes de um certo termo da expansão e ressalta a semelhança com o raciocínio aplicado no desenvolvimento de um binômio de Newton. Assim como foi mostrado nas duas primeiras seções, associa-se um coeficiente de um termo da expansão multinomial a uma permutação com elementos repetidos. É feita uma generalização para o caso $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$. Ao final da seção, são postos dois exemplos de aplicação e os últimos 6 exercícios do capítulo 2.

Por fim, a obra oferece ao leitor duas leituras: "Pascal e a Teoria das Probabilidades" e "Os Irmãos Jacques e Jean Bernoulli".

Os aspectos positivos observados na obra são: o emprego do rigor matemático oferecendo ao aluno o contato com demonstrações formais, o uso massivo do princípio fundamental da contagem e do diagrama de árvore nas deduções das fórmulas. Isso gera uma compreensão mais intuitiva.

A abundância de exercícios de aplicação em cada seção dos capítulos analisados, a abordagem feita na *seção X* do capítulo 1, indo um pouco mais além daqueles que são mais comuns como arranjo, permutação e combinação.

Como contribuição para a complementação da obra analisada, sugerimos que os assuntos Princípio Aditivo e Permutações Circulares ganhem, cada um, uma seção própria no corpo teórico do livro, com aporte de exemplos. A obra tem pujança suficiente para aproveitar o assunto discutido na *seção V* do capítulo 2 e introduzir noções de funções geradoras ordinárias e seu uso na resolução de problemas combinatórios.

Para finalizar, conclui-se que a obra de Hazzan apresentou de forma adequada a Análise Combinatória. Oferece aos alunos do ensino médio uma rica listagem de exercícios de variados níveis de dificuldade que podem ser devidamente selecionados pelos professores. Os professores, por sua vez, podem se beneficiar da obra tanto para a preparação de suas aulas quanto para enriquecimento intelectual, dadas as recorrentes passagens envolvendo o rigor matemático.

6.2.3 Análise da obra *Matemática Paiva* (ver [18])

A Análise Combinatória é tratada por Paiva no capítulo 8 do volume 2 de [18]. O capítulo cujo título é *Análise combinatória e binômio de Newton* possui 61 páginas. Essas páginas estão distribuídas por quatro seções e 106 exercícios propostos. A obra conta também com 34 exercícios resolvidos e 119 exercícios complementares. Esses últimos são classificados pelo autor em duas categorias: exercícios técnicos (53 exercícios) e exercícios contextualizados (66 exercícios).

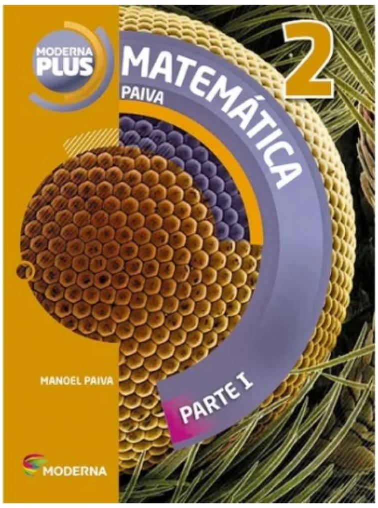


Figura 6.3: Obra Matemática Paiva.

Ao final, o autor elenca pré-requisitos que o aluno deve atender para passar ao próximo capítulo (que trata do estudo da Probabilidade) e propõe uma atividade que deve ser feita em grupo.

Antes mesmo de iniciar a primeira seção, a obra indica alguns questionamentos sobre o ato de contar seguidos por um infográfico que contextualiza o conteúdo. O infográfico trata sobre senhas, assunto presente na vida de quase todas as pessoas.

A *seção 8.1* – O que é a Análise combinatória – é iniciada dando continuidade às perguntas sobre contagem como, por exemplo, "De quantas maneiras diferentes você pode escolher seis entre 60 números para jogar na loteria?" ou "Quantos números de telefone de oito dígitos podem existir?". Na sequência, são expostas duas situações problema que são introdutórias ao princípio fundamental da contagem. Ele é formalizado com a colaboração de outros dois problemas auxiliares. São colocados 4 exercícios resolvidos e logo depois 11 exercícios propostos.

Em seguida, é enunciado o princípio aditivo da contagem e, para isso, um exercício auxiliar é utilizado. Nesse ponto, o autor esclarece ao aluno que a fórmula para determinar a cardinalidade da união entre dois conjuntos é uma revisão, uma vez que o tema já teria sido trabalhado no capítulo 1 do volume 1 de [18]. A seção é finalizada com uma lista de 3 exercícios resolvidos e 9 exercícios propostos.

A *seção 8.2* – Fatorial – traz, de forma objetiva, a apresentação e o conceito do fatorial de um número natural. Além disso, a seção inclui exemplos simples, 2 exercícios resolvidos e 11 exercícios propostos.

Na *seção 8.3* – Classificação dos agrupamentos. Essa classificação é feita da maneira clássica, isto é, nos arranjos, a ordem dos elementos deve ser considerada, enquanto nas combinações a ordem dos elementos não tem relevância. Em um exercício proposto, o aluno é convidado a classificar agrupamentos sem preocupação com a contagem dos mesmos.

Logo após, um exemplo básico sobre agrupamento ordenado é posto e os arranjos simples são definidos. À luz do princípio fundamental da contagem, o autor sistematiza o cálculo do número de arranjos simples, culminando com a respectiva fórmula tradicional. Para praticar o tema, o aluno disporá de uma bateria de 4 exercícios resolvidos, 7 exercícios propostos.

As permutações simples e com elementos repetidos, nessa ordem, são as próximas a serem tratadas na obra. O autor inicia esse tópico com dois exemplos, um contextualizado e outro de aplicação direta. Esse último é usado para se definir a permutação simples de n elementos como caso particular de um arranjo de n elementos, tomados n a n. Em seguida, dois exemplos contribuem para se chegar a uma generalização da fórmula para o cálculo do número de permutações simples do conjunto dos n primeiros números naturais.

Em relação às permutações com elementos repetidos, novamente o leitor é convidado a se amparar no raciocínio empregado em dois exemplos auxiliares para compreender a generalização da argumentação. Feito isso, é deduzida uma fórmula própria para o cálculo do número de permutações com elementos repetidos.

Ao final da exposição sobre cada uma das permutações, estão dispostos 2 exercícios resolvidos e uma lista com 8 exercícios propostos.

O próximo tópico da seção convoca as combinações simples. A estrutura dele se assemelha com a dos outros itens da *seção 8.3*, em que, nessa ordem, são postos: um exemplo contextualizado seguido da definição, indicação da notação, generalização da fórmula para encontrar o número de combinações dada uma situação adequada. Além disso, Paiva estabelece um critério para que o aluno possa diferenciar arranjos de combinações.

O encerramento da seção se dá com duas listas de exercícios, sendo a primeira composta por 4 resolvidos e a segunda por 22 propostos.

Na *seção 8.4* – O binômio de Newton. É feito um estudo sobre o desenvolvimento da potência $(x + a)^n$ em que os coeficientes dos termos da expansão desse binômio sejam entendidos como combinações. Esse raciocínio é acompanhado de um exemplo auxiliar. O Teorema Binomial é enunciado, demonstrado e exemplificado por aplicação direta. Também são citados o termo geral do binômio de Newton e a Relação de Stifel, que é demonstrada na obra.

A seção segue com a apresentação da estruturação do triângulo de Pascal. O tópico acerca do triângulo de Pascal é complementado com três propriedades. Todas as propriedades são demonstradas a título de exercício resolvido.

A seção 8.4 oferece aos discentes 12 exercícios resolvidos e 30 propostos.

Entende-se como aspectos positivos do livro as perguntas na seção 8.1 que motivam o aluno, aguçando sua curiosidade, conscientizando-o que ele será capaz de responder de fato àquelas perguntas. É importante a menção ao princípio aditivo da contagem. Além disso, a obra permite que o aluno tenha contato com demonstrações formais e disponibiliza uma quantidade considerável de exercícios contextualizados. As ilustrações do livro merecem destaque pela qualidade e por realmente auxiliarem no entendimento do conteúdo.

Para a complementação da obra, sugere-se a inserção das permutações circulares e do cálculo do número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear. O diagrama de árvore poderia ser utilizado para favorecer o pensamento intuitivo, sobretudo nos exemplos iniciais do capítulo.

Por tudo, a conclusão é de que a obra exibiu de forma adequada a Análise Combinatória. Oferta aos discentes uma gama de exercícios variados quanto ao nível de dificuldade e esclarece a teoria com exemplos e boas ilustrações.

6.2.4 Análise da obra *Noções de Matemática – volume 4* (ver [2])

O volume 4 de [2] é denominado *Combinatória, Matrizes e Determinantes*. Esse volume da obra de Neto et al. está segmentado em vinte e três capítulos. A Análise Combinatória pode ser apreciada desde o capítulo 9 até o capítulo 19.

O *capítulo 9 – Processos básicos de contagem* – é dividido em seis seções.

Na *seção 9.1* – Introdução – é feita uma breve reflexão sobre o conceito e o papel da Análise Combinatória para a sociedade. A seção ainda expõe 9 exercícios resolvidos e 12 exercícios propostos.

Já a *seção 9.2* – Diagramas de árvore – apresenta o dispositivo do diagrama de árvore. É dada ênfase à sua utilidade para fornecer o número de possibilidades de um evento ocorrer. Essa seção conta com 3 exercícios resolvidos e 6 exercícios propostos.

Um dos assuntos mais relevantes da Análise Combinatória é abordado na *seção 9.3* – Princípio fundamental da contagem (regra do produto). Para Neto et al.

> *. . . sem exagero, que o entendimento dessa Regra é fundamental para a resolução da maioria dos problemas que enfrentaremos . . . (pag 211)*

A seção inicia-se com três exemplos de aplicação, sendo que os dois primeiros são auxiliados pelo diagrama de árvore. Depois, o Princípio Fundamental da Contagem é formalmente enunciado para dois eventos e não é estendido para n eventos. Ao final da seção, o aluno tem à sua disposição 10 exercícios resolvidos e 25 exercícios propostos.

Na *seção 9.4* – O problema do número de subconjuntos - o autor trata do problema que dá nome à seção usando o princípio fundamental da contagem. Um exemplo de aplicação direta é posto e resolvido. Exibe-se cada subconjunto a ser contado. No fim, é feita a generalização para se obter o número de subconjuntos de certo conjunto.

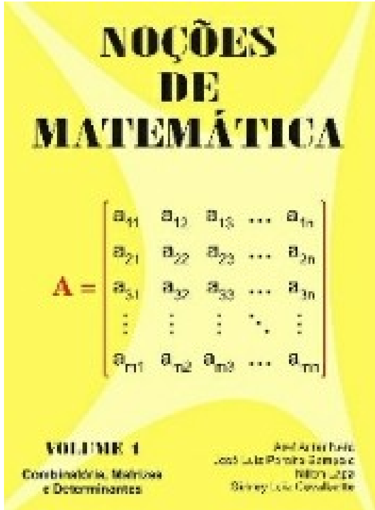


Figura 6.4: Obra Noções de Matemática - volume 4.

A *seção 9.5* – O problema do número de funções - como o próprio título sugere, trata da maneira de se obter o número de aplicações de um conjunto noutro. Para isso, são dados dois exemplos que, juntamente com o princípio fundamental da contagem, cooperam para a obtenção de uma fórmula do número de funções de um conjunto em outro, dadas as cardinalidades dos mesmos.

Na *seção 9.6* – O problema do número de divisores - o princípio fundamental da contagem é utilizado para se determinar a quantidade de divisores de um inteiro positivo. Esse é um importante resultado da Teoria dos Números. Nessa seção, são dispostos três exemplos.

O *capítulo 10 – Fatorial* – é dividido em duas seções.

A *seção 10.1* – Definição – inicia-se com uma série de produtos cujos fatores são números naturais consecutivos. Uma notação é declarada para esse tipo de produto e, a partir daí, o fatorial de um número é definido. A seção apresenta 5 exemplos simples. A *seção 10.2* – Função fatorial – define a função fatorial[3]. O capitulo 10 é finalizado com 10 exercícios resolvidos e 15 exercícios propostos. Todos os exercícios envolvem cálculos e simplificações fatoriais nos mais diversificados níveis de dificuldade.

O *capítulo 11 – Combinações simples e arranjos simples* – é dividido em três seções.

A *seção 11.1* – Introdução e conceitos iniciais – por meio de um exemplo, visa mostrar ao aluno a diferença entre os dois tipos de agrupamentos: os subconjuntos e os subconjuntos ordenados. Convenientemente, esse exemplo é enunciado de forma simples o suficiente para que o autor exiba todos os agrupamentos possíveis dos dois tipos. Os subconjuntos são chamados combinações, enquanto os subconjuntos ordenados são chamados arranjos.

A *seção 11.2* – Definições – traz, baseada na seção anterior, as definições formais de combinações simples e arranjos simples. Além disso, a notação rotineira também

[3] A função fatorial $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é tal que $f(x) = x!$.

é colocada, $C_{n,p}$ e $A_{n,p}$ para combinações e arranjos, respectivamente. Ao final, exemplos ilustram as definições.

A *seção 11.3* – Arranjo ou combinação? – propõe ao leitor uma reflexão para diferenciação de arranjos e combinações. Isso é feito sem preocupação com o cálculo final e utilizando somente a notação apresentada na seção 11.2. Para essa diferenciação, a estratégia do autor é lançar mão de um exemplo geométrico, segmentos ou segmentos orientados que podem ser construídos dados cinco pontos distintos. E depois, outro exemplo contextualizado: escolher pessoas dentre um grupo para formar comissão sem cargos ou com cargos. Depois é estabelecido um critério para se decidir se um problema deve ser enquadrado como arranjo ou combinação. Esse critério se baseia na interpretação quanto à relevância ou não da ordem dos elementos selecionados.

No fim da seção, existem 10 exercícios propostos que, de acordo com a sugestão do autor, devem ser resolvidos utilizado-se apenas as notações tradicionais de arranjo ou combinação.

O *capítulo 12 – Cálculo do número de arranjos e de combinações* – é dividido em três seções.

A *seção 12.1* – Introdução – apenas conta ao leitor que será feito um estudo acerca das regras e fórmulas para arranjos e combinações.

Na *seção 12.2* – Cálculo do número de arranjos – alguns exemplos servem para a dedução de uma fórmula para o número de arranjos. Isso é feito por intermédio do princípio fundamental da contagem (sem a notação fatorial). A partir disso, deduz-se a fórmula para o número de arranjos utilizando a notação fatorial. A seção oferta 3 exercícios resolvidos e 6 exercícios propostos.

A *seção 12.3* – Cálculo do número de combinações – é inaugurada por dois exemplos. Esses exemplos servem para a dedução da fórmula que fornece o número de combinações através dos arranjos. Dois exercícios resolvidos e 4 exercícios propostos findam a seção.

O *capítulo 13 – Problemas de arranjos e combinações* – é dividido em três seções.

A *seção 13.1* – Os problemas gerais – preocupa-se em proporcionar ao estudante uma rica cadeia de exercícios resolvidos envolvendo arranjos e combinações, com múltiplos níveis de dificuldade. Além de 19 exercícios resolvidos, o aluno tem à sua disposição 32 exercícios propostos.

A *seção 13.2* – O problema do número de funções injetoras – mostra ao discente que dados dois conjuntos finitos, o número de aplicações injetivas do primeiro conjunto no segundo é alcançado por meio de um arranjo simples.

A *seção 13.3* – O problema do número de submatrizes [4] e menores [5] – expõe, através de exemplos, que, dada uma matriz, a maneira de encontrar o número de submatrizes e de menores se resume a problemas envolvendo combinações.

O *capítulo 14 - Permutações simples* – é dividido em duas seções.

Na *seção 14.1* – Definição – por meio de um exemplo, o autor define as permutações como sendo arranjos de classe máxima, isto é, $A_{n,n}$. É introduzida uma simbologia

[4]Qualquer matriz obtida pela eliminação de linhas ou colunas de outra matriz.

[5]Determinante de uma submatriz quadrada.

para designar as permutações. Essa simbologia é escrita com notação fatorial. Dois exemplos de aplicação precedem 7 exercícios resolvidos e 13 exercícios propostos.

Em seguida, a obra direciona o leitor para uma revisão sobre o conceito de função bijetora.

Na *seção 14.2* — O problema do número de funções bijetoras – é feito um caso particular em que o domínio e o contradomínio têm três elementos. Esse caso serve de prelúdio para conclusão do caso geral, em que o número de aplicações bijetivas equivale ao cálculo de uma permutação.

O *capítulo 15 -– Permutações com repetição* carrega apenas uma seção. A *seção 15.1* — O conceito -– começa com o clássico problema de determinar o número de anagramas de uma palavra que possui letras repetidas. Depois, a fórmula que calcula o número de permutações com elementos repetidos é deduzida da mesma forma que a *seção IX* em [14], analisada em 6.2.2 . Para o discente, há 4 exercícios resolvidos 6 exercícios propostos.

Ao término do capítulo 15, são elencados 16 exercícios suplementares. Esses exercícios exigem maior abstração por parte do aluno.

O *capítulo 16 -– Números binomiais* – é composto por seis seções.

A *seção 16.1* – Introdução – remete ao Capítulo 12 para retomar a notação de combinação, $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right)$, e identificar esse símbolo como sendo um número binomial.

A *seção 16.2* – Definição – conceitua o número binomial e suas estruturas. São dados quatro exemplos diretos relativos ao cálculo de um número binomial utilizando a fórmula padrão.

As *seções 16.3* – Soma dos números binomiais de mesmo numerador – *16.4* – Números binomiais complemetares – *16.5* – Números binomiais consecutivos e *16.6* – Relação de Stifel tratam de propriedades envolvendo os números binomiais. Todas as propriedades são demonstradas.

As seções são munidas de exemplos que ilustram a aplicabilidade das propriedades, além de 7 exercícios resolvidos e 23 exercícios propostos.

O *capítulo 17 – O Triângulo de Pascal* – possui duas seções. A *seção 17.1*, que leva o mesmo nome do capítulo, descreve o triângulo de Pascal e apresenta uma ilustração do mesmo. O autor destaca ainda as propriedades trabalhadas no capítulo 16 e como elas aparecem no triângulo. A *seção 17.2* – Uma nota histórica – oferece ao aluno uma leitura memoriosa acerca de Pascal e o triângulo que recebe seu nome.

O *capítulo 18 – Binômio de Newton* – é formado por quatro seções.

A *seção 18.1* – Introdução: como desenvolver $(x + a)^n$ – se encarrega de enunciar e provar o Teorema Binomial. A demonstração é feita por indução matemática com o auxílio da relação de Stifel.

Na *seção 18.2* – Desenvolvimento de $(x - a)^n$ – é mostrado ao discente que a expansão de $(x-a)^n$ é um caso particular da expansão do binômio de Newton exposta na seção anterior. A seção traz 4 exercícios resolvidos e 5 exercícios propostos.

Na *seção 18.3* – Fórmulas do termo geral – o autor disponibiliza a fórmula do termo geral na expansão de $(x + a)^n$ e $(x - a)^n$. Dois exemplos são colocados, juntamente com 7 exercícios resolvidos e 9 exercícios propostos.

A *seção 18.4* – Algumas aplicações do binômio de Newton – introduz, a partir de um exercício resolvido, o cálculo de potências por aproximações usando o Teorema Binomial. Outra aplicação abordada na seção consiste em destacar, por meio de dois exercícios resolvidos, que somas da forma $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) podem ser estudadas utilizando-se o desenvolvimento do binômio $(x+1)^{k+1}$. Na sequência, são disponibilizados 3 exercícios.

No final do capítulo 18 existem 14 exercícios suplementares.

O *capítulo 19 – Complementos da análise combinatória* – está disposto em três seções.

A *seção 19.1* – Permutações circulares – aborda o tema que nomeia a seção. Inicialmente, é utilizado um exemplo de pessoas em uma mesa redonda. Após, é deduzida uma fórmula para o cálculo do número de permutações circulares. A seção termina com 2 exercícios resolvidos e 4 exercícios propostos.

Na *seção 19.2* – Arranjos com repetição – dois exemplos e o princípio fundamental da contagem auxiliam na obtenção de uma fórmula. Trata-se de uma fórmula para o cálculo do número de arranjos com repetição. Ao término da seção, tem-se 1 exercício resolvido e 4 propostos.

A *seção 19.3* – Combinações com repetição – se inicia com exemplos. A dedução para uma fórmula que determina o número de combinações com repetição ocorre através de um "truque" envolvendo mudanças de variáveis e índices. Nessa seção, é explorado o tópico relativo ao número de soluções inteiras não negativas, bem como o número de soluções inteiras positivas, de uma equação linear. Por fim, são ofertados ao leitor 4 exercícios resolvidos e 7 exercícios propostos.

O capítulo 19 é consumado com 8 exercícios suplementares.

Destacamos, como aspectos positivos da obra, a quantidade generosa de exercícios propostos, o uso do princípio fundamental da contagem para deduções de fórmulas, a inserção de demonstrações formais ou linhas de raciocínio que permitem conjecturas. Além disso, o capítulo 19 traz assuntos negligenciados em alguns livros didáticos brasileiros.

Para completar a obra, sugerimos que os autores demonstrem o Teorema Binomial a partir de argumentos combinatórios.

Por fim, conclui-se que [2] apresentou de forma adequada a Análise Combinatória. Oferece aos alunos do ensino médio uma lista de exercícios com diferentes níveis de dificuldade. Os professores, por sua vez, podem se beneficiar da obra tanto para a preparação de suas aulas quanto para enriquecimento intelectual, dadas as recorrentes passagens envolvendo o rigor matemático.

6.2.5 Análise da obra *Matemática Fundamental 2º grau – volume único* (ver [13])

A obra de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr., por se tratar de um volume único, incorpora quase todos os conteúdos sugeridos por [8]. O livro é segmentado em unidades (de A até F), que por sua vez são subdivididas em capítulos.

Os autores enquadram a Análise Combinatória na *Unidade A – Álgebra*. Dessa unidade, dois capítulos são dedicados aos temas dos nossos estudos: capítulo 15 e 16.

O *capítulo 15 – Análise combinatória* – possui seis seções.

A *seção 1* – Introdução – é bem sucinta e conceitua a análise combinatória. Já a *seção 2* – Fatorial – define o fatorial de um número natural e introduz a notação padrão. São postos cinco exemplos, sendo que dois deles são de simplificação de expressões e os outros três limitam-se a equações fatoriais clássicas. A seção ainda oferece 5 exercícios propostos que seguem o mesmo perfil dos exemplos.

Na *seção 3* – Princípio fundamental da contagem – um problema é resolvido de maneira que as soluções possíveis são exibidas uma por uma. Para isso, foi utilizado o diagrama de árvore. Em seguida, o princípio fundamentam da contagem é enunciado e são dados dois exemplos de aplicação. A seção termina com 6 exercícios propostos.

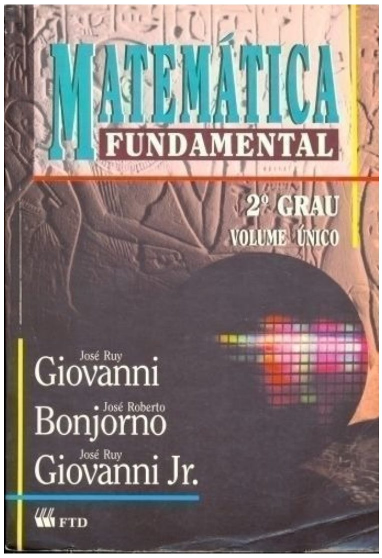


Figura 6.5: Obra Matemática Fundamental 2º grau.

A *seção 4* – Arranjos simples – inicia-se com um conceito informal de arranjo simples. Depois, é colocado um exemplo e o símbolo da notação é apresentado. Através do princípio fundamental da contagem, a fórmula que calcula o número de arranjos simples é deduzida, sem e com o fatorial. A aplicabilidade da teoria é confirmada através de três exemplos. A seção encerra-se com uma lista de 12 exercícios.

A *seção 5* – Permutações simples – é principiada com um conceito de permutações simples acompanhado de um exemplo que adota o diagrama de árvore em sua resolução. É feita então uma equivalência entre o número de permutações simples e o número de arranjos simples de classe máxima. A partir disso, deduz-se a fórmula para o cálculo do número de permutações e são elencados três exemplos. Após, tem-se 11 exercícios propostos.

A *seção 6* – Combinações simples – inicia-se com um conceito mais informal de combinações simples. Novamente, é dado um exemplo conveniente de modo que, com o auxílio do diagrama de árvore, as possibilidades que compõe a solução possam ser, uma a uma, retratadas.

Feito isso, os autores definem formalmente as combinações simples e apresentam a notação tradicional. Na sequência, a fórmula para obtenção do número de combinações é deduzida. Por fim, quatro exemplos são empregados e 21 execícios propostos são sugeridos ao leitor.

O capítulo 15 se encerra com 15 exercícios de revisão e 25 testes.

O *capítulo 16 – Binômio de Newton* – é composto de cinco seções. A *seção 1* – Números binomiais – apresenta ao leitor os números binomiais, sua notação e suas estruturas. Cita a igualdade $\binom{n}{p} = C_{n,p}$ e dá um exemplo.

Na *seção 2* – Números binomiais complementares – é dada a definição de números binomiais complementares acompanhada de dois exemplos. Ao final da seção, 8 exercícios propostos são disponibilizados ao aluno.

A *seção 3* – Triângulo de Pascal (ou de Tartaglia) – além de mostrar o triângulo de Pascal em sua disposição habitual, exibindo os números binomiais, traz também quatro propriedades do mesmo. Dentre as propriedades, é dado destaque à Relação de Stiffel. A seção ainda conta com 2 exercícios propostos.

A *seção 4* – A fórmula do binômio de Newton – mostra o resultado obtido da expansão do binômio $(x + a)^n$. São feitos casos particulares para $n = 1, 2, 3, 4$. É destacado outro caso particular: $(x - a)^n$. Depois são dados três exemplos e 3 exercícios propostos.

A *seção 5* – Fórmula do termo geral – baseada na expansão do binômio de Newton feita na seção 4, apresenta a fórmula do termos geral do desenvolvimento tanto de $(x + a)^n$, quanto de $(x - a)^n$. Para fixação, o autor sugere três exemplos e termina com 14 exercícios propostos.

Finalmente, o capítulo 16 proporciona ao aluno 9 exercícios de revisão e 18 testes.

Podemos ressaltar que uma vertente positiva da obra é a quantidade satisfatória de exercícios em diferentes níveis de dificuldade dos mesmos. Além disso, o uso do princípio fundamental da contagem na dedução da fórmula que calcula o número de arranjos simples favorece a intuição.

A título de contribuição para a complementação da obra, sugerimos a inserção de seções dedicadas ao princípio aditivo, aos agrupamentos com elementos repetidos e às permutações circulares. Além do mais, seria oportuno acrescentar uma importante propriedade do triângulo de Pascal que se refere à soma de números binomiais de uma mesma linha e o número de subconjuntos de um conjunto dado.

Por tudo, concluímos que [13] apresentou o conteúdo de Análise Combinatória de forma limitada. Apesar de se tratar de um volume único e, assim sendo, de forma mais concisa, é relevante o estudo dos temas citados no parágrafo anterior e os problemas combinatórios com elementos repetidos.

6.2.6 Análise da obra *Matemática interação e tecnologia* (ver [5])

Na obra de Balestri, o conteúdo combinatorial pode ser vislumbrado na *unidade 5 – Análise combinatória* do volume 2. A unidade é dividida em oito tópicos.

A unidade 5 é aberta com um exemplo contextualizado ao leitor: o sistema de código QR (*Quick Response code*), mostrando seu funcionamento, finalidade e um breve apanhado histórico.

No primeiro tópico – *Análise combinatória* -– novamente, tem-se um exemplo contextualizado. Esse exemplo de contagem é resolvido por enumeração, ou seja, exibem-se todos os resultados possíveis, um a um. É posto um segundo exemplo de contagem. Esse exemplo é resolvido de cinco modos: enumeração um a um, diagrama de árvore, tabela de dupla entrada, por desenho e por realização de uma multiplicação, nessa ordem. O autor utiliza o último modo para enunciar o princípio fundamental da contagem. Depois, o princípio aditivo é esclarecido por intermédio de um exemplo.

O segundo tópico é intitulado *Fatorial*. São apresentadas ao aluno a definição e a notação de fatorial. Em seguida, é trazido um texto ensinando como efetuar operações envolvendo fatoriais em uma calculadora científica. São disponibilizados ao discente 2 exercícios resolvidos e 6 exercícios propostos sobre o conteúdo dos dois primeiros tópicos.

O terceiro tópico – *Permutação simples* – sugere que o leitor volte ao início da unidade para que o primeiro exemplo do primeiro tópico. A ideia é que o exemplo lhe sirva de modelo para o entendimento do conceito de permutação. Depois disso, o autor define as permutações simples de n elementos e apresenta a fórmula do número de permutações em notação fatorial.

Figura 6.6: Obra Matemática interação e tecnologia.

Logo após, é instituído um exemplo envolvendo agrupamento em que a ordem é relevante. Esse exemplo é resolvido com base no princípio fundamental da contagem. Define-se *arranjo simples*, que titula o quarto tópico. E, amparado pelo exemplo, o autor expõe a fórmula que determina o número de arranjos simples.

A obra ainda traz um texto mostrando como conseguir o número de arranjos simples na calculadora científica. Com respeito aos terceiro e quarto tópicos, são elencados 2 exercícios resolvidos e 6 exercícios propostos.

O quinto tópico – *Combinação simples* – inicia-se com um exemplo. Por meio do diagrama de árvore, são listadas todas as possibilidades de resolução do mesmo. O intuito é destacar a repetição sistemática de agrupamentos. Daí, após introduzir a simbologia tradicional para designar as combinações simples, o autor deduz a sua fórmula.

Há um texto para explicar aos discentes como realizar o cálculo das combinações simples usando a calculadora científica. O tópico termina com um rol de 3 exercícios resolvidos e 10 exercícios propostos.

O sexto tópico versa sobre a Permutação com elementos repetidos. A proposta é mostrar, através dos anagramas de uma palavra com uma letra repetida pelo menos, que é possível alcançar a fórmula para se calcular o número de permutações com elementos repetidos. Essa fórmula é apresentada e seguida por 3 exemplos, 1 exercícios resolvido e 5 exercícios propostos.

Um dos exercícios propostos é tratado como *desafio* pelo autor. Consiste no número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear.

O sétimo tópico – *Triângulo de Pascal* – além de exibir o triângulo preenchido com coeficientes binomiais, contém quatro propriedades, dentre elas, a Relação de Stifel. Depois, são postos 2 exercícios resolvidos e 5 exercícios propostos.

No oitavo tópico – *Binômio de Newton* – é feito um diagrama de árvore para se obter o desenvolvimento do binômio $(x + y)^3$. Baseado nesse caso, é mostrado que os coeficientes dos termos da expansão do binômio podem ser obtidos através de permutações com elementos repetidos, que por sua vez, são equivalentes a combinações.

A partir disso, a fórmula do binômio de Newton, escrita com os números binomiais, é destacada. Ademais, é citado que a fórmula do binômio de Newton também é válida para $(x - y)^n$. Para o estudo da expansão do Binômio de Newton, o autor sugere o *software* wxMAXIMA[6].

Por fim, estão disponibilizados 3 exercícios resolvidos e 8 exercícios propostos.

Ressaltamos, como aspectos positivos da obra, que as figuras são adequadas e favorecem à aprendizagem. Além disso, o uso recorrente do diagrama de árvore, a dedução da fórmula para o cálculo de arranjos simples a partir do princípio fundamental da contagem, a menção ao princípio aditivo, a abordagem via diagrama de árvore para a obtenção da fórmula do binômio de Newton. Outro aspecto positivo é a exploração de contextos voltados para o estreitamento da relação entre o leitor e a tecnologia.

Com o objetivo de contribuir para a complementação da obra, aconselhamos que o autor acrescente mais exercícios, em especial os resolvidos, amplie a discussão acerca do princípio aditivo com mais exemplos, introduza as permutações circulares e os arranjos com repetições no corpo teórico do livro. Disserte mais sobre o cálculo do número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear.

Diante de tudo que foi exposto, concluímos que [5] abordou o conteúdo de Análise Combinatória de forma limitada, pois não explanou a respeito das permutações circulares e dos problemas combinatórios com elementos repetidos.

[6]O wxMAXIMA é uma interface gráfica criada para o Maxima, um sistema de computação algébrica derivado do sistema Macsyma, desenvolvido no MIT entre os anos de 1968 e 1982 como parte do projeto MAC. O wxMAXIMA é livre para uso pessoal e comercial.

7

Considerações Finais

No contexto atual, a busca por ambientes cada vez mais automatizados, o aperfeiçoamento constante das máquinas, computadores e robôs, representam um dos pilares que sustentam muitos setores da sociedade. No entanto, para que esse processo tecnológico prossiga, é necessário que os seres humanos continuem formando novos seres humanos interessados e capacitados.

A escola tem papel fundamental no cumprimento desse compromisso da humanidade com ela mesma. Considerando que a análise combinatória é uma das vertentes da matemática discreta que, que por sua vez, é a base para qualquer estudo na área da computação, concluímos que o efetivo ensino da análise combinatória na educação básica é imprescindível. Mais do que isso, essencial.

Dessa maneira, é plausível pensar que exista uma tendência de que a análise combinatória, já incluída nos currículos oficiais do ensino fundamental e do ensino médio, assuma uma função cada vez mais protagonista. Naturalmente, os professores e estudantes de graduação em matemática são parte integrante desse processo e devem se apropriar de sua responsabilidade.

Essa obra visa fornecer uma colaboração para o constante aprimoramento do professor do ensino básico, ação inerente à essa profissão. A análise combinatória deve ser apresentada à criança e ao adolescente como uma ferramenta matemática poderosa que transcende a barreira de simplesmente enquadrar uma situação problema em apenas três "compartimentos" possíveis: permutação, arranjo ou combinação. Além disso, o professor deve compreender que a natureza intuitiva do princípio multiplicativo contribui para o entendimento de outras técnicas de contagem.

Em um nível mais avançado da aprendizagem da análise combinatória, o que não quer dizer inatingível para o aluno do ensino médio, estabelecer uma conexão entre o estudo das séries (geométrica e exponencial) e problemas de contagem, pode ser uma estratégia eficiente de ensino da matemática. Isto objetifica uma evolução cognitiva mais substancial dos alunos.

Por isso tudo, acreditamos que este material seja útil para os professores e futuros professores de matemática.

Bibliografia

[1] Alegri, M. *Interpretações combinatórias para identidades envolvendo sobrepartições e partições planas. 2010. 85f. Tese de Doutorado.* Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

[2] ANTAR NETO, A. et al. *Noções de Matemática: Combinatória, Matrizes e Determinantes - volume 4).* Fortaleza: Editora Vestseller, 2009.

[3] APOSTOL, T. M. *Introduction to analytic number theory.* New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] ÁVILA, G. S. S. *Introdução à análise matemática.* 2ª edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1999.

[5] BALESTRI, R. *Matemática: interação e tecnologia.* São Paulo: Editora Leya, 2016.

[6] BIANCONI, R. *Polinômios e Séries de Taylor.* Ago. de 2015. URL: https://www.ime.usp.br/~mat/2456/arquivos/Taylor.pdf (acesso em 17 de fev. de 2020).

[7] BÓNA, M. *A Walk Through Combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory.* 2ª edição. Singapore: World Scientific, 2006.

[8] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* Brasília: MEC, 2017.

[9] CARVALHO P. C. P.; MORGADO, A. C. O. *Matemática Discreta.* 2ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM - Coleção Profmat, 2015.

[10] CARVALHO, P. C. P. *Métodos de Contagem e Probabilidade.* 1ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[11] CHARALAMBIDES, C. A. *Enumerative Combinatorics.* Chapman e Hall/CRC, 2002.

[12] ERICKSON, M. J. *Introduction to Combinatorics.* 2ª edição. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.

[13] GIOVANNI J. R.; BONJORNO J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *Matemática Fundamental 2º Grau: volume único.* 3ª edição. São Paulo: Editora FTD, 1994.

[14] HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar: Volume 5, Combinatória, Probabilidade.* 3ª edição. São Paulo: Editora Atual, 1977.

[15] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio: volume 2.* 7ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM - Coleção do Professor de Matemática, 2016.

[16] LIMA, E. L. *Análise Real, volume 1: Funções de uma Variável.* 12ª edição. Rio de Janeiro: IMPA - Coleção Matemática Universitária, 2018.

[17] MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de Cálculo.* 1ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM - Coleção Profmat, 2015.

[18] PAIVA, M. *Matemática: Paiva.* São Paulo: Editora Moderna, 2013.

[19] SANTOS J. P. O.; MELLO M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória.* 3ª edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2002.

[20] Souza, A. C. P. *Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas. 2010. 343f. Dissertação de Mestrado.* Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

[21] *THE RATIO TEST FOR SEQUENCE CONVERGENCE – Mathonline Learn Mathematics.* URL: http://mathonline.wikidot.com/the-ratio-test-for-sequence-convergence (acesso em 17 de fev. de 2020).

[22] ZAHN, M. *Sequências e séries.* 2017. URL: https://wp.ufpel.edu.br/zahn/files/2017/04/seq_ser.pdf (acesso em 17 de fev. de 2020).