

VINÍCIUS SOARES DOS REIS

HIPERSUPERFÍCIES INVARIANTES EM DINÂMICA COMPLEXA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2012

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

R375h
2012

Reis, Vinícius Soares dos, 1984-

Hipersuperfícies invariantes em dinâmica complexa /
Vinícius Soares dos Reis. – Viçosa, MG, 2012.
viii, 66f. : il. ; 29cm.

Orientador: Maurício Barros Correa Júnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 65-66.

1. Hipersuperfícies. 2. Folheações (Matemática).
3. Geometria algébrica. I. Universidade Federal de Viçosa.
- II. Título.

CDD 22. ed. 516.352

VINÍCIUS SOARES DOS REIS

HIPERSUPERFÍCIES INVARIANTES EM DINÂMICA COMPLEXA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 17 de fevereiro de 2012

Luis Guillermo Martinez Maza

Rogério Carvalho Picanço

Kennedy Martins Pedroso
(Coorientador)

Alexandre Miranda Alves
(Coorientador)

Maurício Barros Correa Júnior
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Desde o início de minha caminhada no ensino superior, algumas pessoas foram de importância fundamental para chegar até esse momento. Minha mãe, que foi sem dúvida alguma o pilar que me manteve de pé até hoje, sem dúvidas é a pessoa que mais agradeço e com palavras é difícil expressar essa gratidão, obrigado mãe por me apoiar, acreditar e confiar em mim até hoje. Meu pai, que infelizmente já se foi mas que me ajudou a ser homem e a cumprir com minhas obrigações, muito obrigado por esses ensinamentos pai.

Agradeço demais minha Avó, que também já não está entre nós, obrigado por suas orações e pelas preocupações que sempre tivera comigo, muito obrigado por tudo isso. Não posso esquecer meus irmãos pela amizade e pelo apoio que sempre me deram. Meu sobrinho Pedro, que foi o meu melhor amigo durante essa caminhada e que sempre me distraiu muito nos momentos que mais precisei.

Amigos da sala 312 do DMA, em particular meu amigo Frederico que desde a graduação está nessa caminhada comigo pelo mundo da matemática, o agradeço pela hombridade, pela simplicidade, pela força que tens e sem dúvidas pelo amigo que és. Ao Fernando, por ter se tornado um bom amigo e se mostrado uma pessoa simples, dedicada e que sempre esteve disposto a ajudar, valeu mano! Ana Paula, por toda sua gentileza e tranquilidade, Artur pelo companheirismo, o Isaque pela amizade e por tanto nos ajudar com o latex e o Guemael que conheço pouco mas mostrou a pessoa que é nesse pouco tempo que conheço, obrigado a vocês. Aos amigos da Física Tiago e Renan obrigado pela amizade e o apoio.

Agradeço ao meu orientador Maurício, pela disponibilidade e boa vontade em me ajudar, pelos ensinamentos que sempre passou, pela liberdade que me concedeu para trabalhar, por sua compreensão e pela confiança depositada em mim, o agradeço muito. Não posso deixar de citar o Senhor Jair, sempre de bom humor, sempre disposto a uma boa prosa, se mostrou uma dessas raras pessoas que passam por nossas vidas, obrigado pela amizade e claro, pelos excelentes cafés que fez com tanta boa vontade. Obrigado também à Mírian pela boa vontade em nos atender e nos orientar em algumas questões burocráticas. Agradeço aos professores da graduação e da pós pelos valiosos ensinamentos que nos passaram.

Não posso deixar de agradecer à Capes pelo apoio financeiro, pois sem esse jamais teria feito uma pós graduação.

Para finalizar, agradeço à Deus, por motivos que dispensam comentários!

A todos, muito obrigado!!!

SUMÁRIO

RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
INTRODUÇÃO	1
1 Preliminares	3
1.1 Variedades diferenciáveis	3
1.2 Vetores tangentes em $\mathbb{C}^n$ como derivações	4
1.2.1 Derivação em um ponto	5
1.2.2 Campo de vetores e derivações em $\mathbb{C}^n$	7
1.3 Formas k -lineares Alternadas	9
1.3.1 Permutações	9
1.3.2 Funções Multilineares	10
1.3.3 O Produto Tensorial de formas k -lineares	10
1.3.4 O Produto Exterior	11
1.3.5 Uma Base para k -Covetores	12
1.4 Formas Diferenciais em $\mathbb{C}^n$	13
1.4.1 1-formas Diferenciais e a Diferencial de uma Função	13
1.4.2 k -Formas Diferenciáveis	13

2	Variedades Algébricas, Funções polinomiais e racionais	15
2.1	Variedades algébricas	15
2.1.1	Polinômios e Espaço Afim	15
2.2	Variedades Afins	16
2.2.1	Ideais	17
2.2.2	Teorema da base de Hilbert	19
2.2.3	Teorema dos zeros de Hilbert (Hilbert's Nullstellensatz) . . .	20
2.3	Funções polinomiais e racionais em uma variedade	20
2.3.1	Quociente de anéis polinomiais	22
2.3.2	Funções racionais em uma variedade	23
3	Folheações e Teorema de Frobenius	25
3.1	Folheações Holomorfas	25
3.2	Teorema de Frobenius	27
3.2.1	Distribuição	27
3.2.2	Distribuição de k -planos definidos por formas diferenciais . .	27
4	Hipersuperfícies invariantes por endomorfismos polinomiais	29
4.1	Hipersuperfícies Totalmente Invariantes	30
4.1.1	Sobre formas logarítmicas	34
4.2	Adaptação do Teorema de Cantat para Endomorfismos polinomiais . .	35
5	Integrabilidade de Darboux para campos	38
5.1	Campos de vetores polinomiais e Integrais primeiras racionais	39
5.2	Prova do Teorema 5.0.3	44
5.3	Curva Extactica	46

6	Integrabilidade Algébrica de r-formas polinomiais diferenciais	52
6.1	r -formas diferenciais polinomiais em $\mathbb{C}^n$	54
6.2	Hipersuperfícies invariantes e integral primeira racional	56
6.3	Prova do Teorema 6.0.7	60
	Referências Bibliográficas	65

RESUMO

REIS, Vinícius Soares dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2012.
Hipersuperfícies invariantes em dinâmica complexa. Orientador: Maurício Barros
Correa Júnior. Coorientadores: Kennedy Martins Pedroso e Alexandre Miranda Alves.

Dissertamos sobre versões do teorema de integrabilidade de Darboux - Jouanolou para endomorfismos, campos ou r -formas diferenciais polinomiais. Tais versões dizem essencialmente que existem infinitas hipersuperfícies algébricas invariantes se, e somente se, o sistema dinâmico em questão preserva um pencil de hipersuperfícies.

ABSTRACT

REIS, Vinícius Soares dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2012.
Invariant hypersurfaces in complex dynamics. Adviser: Maurício Barros Correa Júnior. Co-advisers: Kennedy Martins Pedroso and Alexandre Miranda Alves.

We talk about versions the theorem of integrability Darboux - Jouanolou for endomorphisms, fields, or r -polynomial differential forms. These versions say essentially that there are infinitely many algebraic hypersurfaces invariant if and only if the dynamical system in question preserves a pencil of hypersurfaces.

INTRODUÇÃO

Um importante assunto na pesquisa na teoria dos campos vetoriais polinomiais é a caracterização de campos algebricamente integráveis, ou seja, campos que admitem uma integral primeira racional. A existência de uma integral primeira para um campo vetorial definido em $\mathbb{R}^2$ determina completamente seu retrato de fase.

Darboux, em 1878, encontrou uma conexão entre curvas algébricas invariantes e a existência de integrais primeiras para campos polinomiais em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$. Ele mostrou que curvas algébricas invariantes por um campo de vetores polinomial podem ser usadas para determinar uma integral primeira. Isto baseado na existência de um número suficientemente grande dessas curvas invariantes.

Jouanolou em [16] apresenta um melhoramento da teoria de Darboux provando que um campo de vetores polinomial, de grau d , em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$, com pelo menos

$$\binom{d+1}{2} + 2$$

curvas algébricas invariantes, possui uma integral primeira racional. Este resultado é hoje conhecido como teorema de integrabilidade de Darboux-Jouanolou.

No presente trabalho dissertamos sobre versões do teorema de integrabilidade de Darboux-Jouanolou para endomorfismos, campos ou r -formas diferenciais polinomiais.

Primeiramente, dissertamos sobre uma adaptação do teorema de Cantat [6] para endomorfismos polinomiais em $\mathbb{C}^n$. Este teorema diz que um endomorfismo polinomial f de $\mathbb{C}^n$, com $k > n$ hipersuperfícies totalmente invariantes, preserva um pencil de hipersuperfícies algébricas.

Em seguida, utilizando [9], passamos a estudar o teorema de integrabilidade de Darboux-Jouanolou para campos polinomiais em $\mathbb{C}^n$. Este teorema garante que um campo, de grau d em $\mathbb{C}^n$, admitindo

$$\binom{d-1+n}{n} + n$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, possui uma integral primeira racional. Isto quer dizer que, nessas condições, o campo será tangente a um pencil de hipersuperfícies.

Por fim, apresentamos um resultado obtido em [7] por M. Corrêa, L. G. Maza e M. Soares, onde os autores provam um teorema do tipo Darboux-Jouanolou para r -formas diferenciais polinomiais. O resultado diz que uma r -forma diferencial polinomial, de grau d em $\mathbb{C}^n$, possuindo

$$\binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{r+1} + r + 1$$

hipersuperfícies algébricas invariantes, admite uma integral primeira racional.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos e resultados que são fundamentais para esse trabalho. Iniciaremos definindo variedades diferenciáveis e variedades complexas. Em seguida, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos relacionados a campo de vetores. Apresentaremos também as formas diferenciáveis em $\mathbb{C}^n$. Para mais detalhes sobre o assunto veja [2], [3],[4], [11], [18], [23] e [25].

1.1 Variedades diferenciáveis

Variedades diferenciáveis

Seja $(M, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Em $\mathbb{R}^n$, considere a topologia usual. Dado $U \in \mathcal{T}$, um homeomorfismo entre U e um aberto de $\mathbb{R}^n$ é chamado de *carta local de dimensão n* . Caso M possa ser coberto por domínios de cartas locais de dimensão n , então M é um *espaço topológico localmente euclidiano*. Uma *variedade topológica de dimensão n* é um espaço topológico:

1. localmente euclidiano de dimensão n ;
2. Hausdorff;
3. com base enumerável.

Duas cartas locais de dimensão n , (U, φ) e (V, ψ) , são C^∞ compatíveis quando $U \cap V = \emptyset$ ou $U \cap V \neq \emptyset$ e

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) &\rightarrow \varphi(U \cap V) \\ \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V)\end{aligned}$$

são de classe C^∞ .

Um atlas C^∞ de dimensão n para um espaço topológico M é uma cobertura de M por domínios de cartas locais de dimensão n que são C^∞ - compatíveis entre si. Daqui em diante, cartas C^∞ - compatíveis serão chamadas apenas compatíveis e um atlas C^∞ de dimensão n será chamado apenas atlas.

Considere todos os atlas que contém um dado atlas $\mathcal{A}$ de um espaço topológico M . Dentre esses, existe apenas um que é *maximal*, ou seja, que não está contido propriamente em nenhum outro atlas que contém $\mathcal{A}$ (veja Proposição 5.10, pag. 150, [25]). Dizemos que um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável é uma *variedade diferenciável* quando pode ser coberto por domínios de cartas locais de um atlas maximal.

Definição 1.1.1 *Uma variedade complexa de dimensão n é uma variedade munida de uma estrutura analítica. Isto é, existe uma cobertura de M por abertos, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, e homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, onde $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ é aberto, tais que as funções de transição $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ são holomorfas.*

1.2 Vetores tangentes em $\mathbb{C}^n$ como derivações

Definição 1.2.1 *Sejam M um espaço topológico, N um conjunto e $a \in M$. Consideremos a família de todas as aplicações definidas em alguma vizinhança de a e com valores em N . Nesta família definimos uma relação de equivalência. Dizemos que duas aplicações são equivalentes se elas coincidem em alguma vizinhança de a . As classes de equivalência são chamadas germes de aplicação em a (com valores em N). Chamamos germe em a de uma aplicação f à classe de equivalência que contém f .*

Vamos denotar por C_p^∞ a germificação de $C^\infty(\mathbb{C}^n)$, ou seja,

$$C_p^\infty = \{[u] : u \in C^\infty(\mathbb{C}^n)\}$$

onde $[u] = \{v \in C^\infty(\mathbb{C}^n) : v \sim u\}$ e $v \sim u$ se, e somente se, existem abertos $V, U \subset \mathbb{C}^n$ contendo a de forma que

$$v|_V \equiv u|_U$$

em um aberto $W \subset V \cap U$ que contém a .

Sabendo que C_p^∞ tem uma estrutura de álgebra e que o conjunto de todos os funcionais lineares sobre C_p^∞ que satisfazem a Regra de Leibniz, denotado por $\mathfrak{D}_p(\mathbb{C}^n)$ e chamado *derivações no ponto p* , é um espaço vetorial. Na seção que segue vamos provar que $\mathfrak{D}_p(\mathbb{C}^n)$ e $T_p(\mathbb{C}^n)$ são espaços vetoriais isomorfos.

1.2.1 Derivação em um ponto

Seja a aplicação $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, definida por $\gamma(t) = p + tv$, onde $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ são fixos em $\mathbb{C}^n$.

As retas parametrizadas $\gamma = \gamma(p, v)$ caracterizam o conjunto dos vetores v que tem origem no ponto p , ao qual chamaremos de *espaço tangente* ao $\mathbb{C}^n$ no ponto p e denotaremos por $T_p(\mathbb{C}^n)$. Dai, $T_p(\mathbb{C}^n) = \{u \in \mathbb{C}^n : u = p + vt; v \in \mathbb{C}^n\}$ e vale ressaltar que $T_p(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}^n$.

Para cada vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$ em um ponto $p \in \mathbb{C}^n$, a derivada direcional em p nos dá uma aplicação

$$D_v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{C},$$

definida por $D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$. Claramente D_v é $\mathbb{C}$ -linear e satisfaz a regra de Leibniz

$$D_v(fg) = (D_v f)g(p) + f(p)D_v g. \quad (1)$$

Em geral, uma aplicação linear $D_v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo a regra de Leibniz (1) é chamada uma *derivação em p* . Denote o conjunto de todas as derivações em p por $\mathfrak{D}_p(\mathbb{C}^n)$. Este conjunto é de fato um espaço vetorial, pois a soma de duas derivações em p e a multiplicação por escalar de uma derivação em p são ainda derivações.

Sabemos que as derivadas direcionais em p são derivações em p , então a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : T_p(\mathbb{C}^n) &\rightarrow \mathfrak{D}_p(\mathbb{C}^n), \\ v &\mapsto D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\end{aligned}\tag{2}$$

é uma aplicação linear.

Lema 1.2.2 Se D é uma **derivação**, então $D(c) = 0$ para toda função constante c .

Demonstração: Pela $\mathbb{C}$ -linearidade, $D(c) = cD(1)$. Pela regra de Leibniz

$$D(1) = D(1 \times 1) = D(1) \times 1 + 1 \times D(1) = 2D(1) \Rightarrow D(1) = 0$$

segue assim o resultado. □

Teorema 1.2.3 A aplicação linear $\phi : T_p(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathfrak{D}_p(\mathbb{C}^n)$ definida em (2) é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração: Para provar a injetividade, suponha $D_v = 0$ para $v \in T_p(\mathbb{C}^n)$. Aplicando D_v à função coordenada x^j teremos

$$0 = D_v(x^j) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p x^j = \sum_i v^i \delta_i^j = v^j.$$

Portanto, $v = 0$ e ϕ é injetiva.

Sejam D uma derivação em $p = (p^1, \dots, p^n)$ e (f, V) um representante do germe de f em p . Fazendo V menor se necessário, podemos assumir que V é uma bola aberta. Pelo Teorema de Taylor existem funções C^∞ $g_i(x)$ em uma vizinhança de p tal que

$$f(x) = f(p) + \sum (x^i - p^i) g_i(x), \quad g_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Aplicando D na igualdade acima; observando que $D(f(p)) = 0$ e $D(p^i) = 0$ usando o lema 1.2.2 e a regra de Leibniz resulta

$$\begin{aligned}
Df(x) &= \sum (Dx^i)g_i(p) + \sum (p^i - p^j)Dg_i(x) \\
&= \sum (Dx^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).
\end{aligned}$$

Isto prova que $D = D_v$ para $v = \langle Dx^1, \dots, Dx^n \rangle$. □

1.2.2 Campo de vetores e derivações em $\mathbb{C}^n$

Um campo de vetores X em um subconjunto aberto U de $\mathbb{C}^n$ é uma função que associa para cada ponto p em U um vetor tangente X_p em $T_p(\mathbb{C}^n)$. Como $T_p(\mathbb{C}^n)$ tem bases $\{\partial/\partial x^i|_p\}$, o vetor X_p é uma combinação linear

$$X_p = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad p \in U.$$

Dizemos que o campo de vetores X é C^∞ em U , se as funções coeficientes a^i são C^∞ em U .

Podemos identificar campos de vetores em U com vetores colunas de funções C^∞ em U :

$$X = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $C^\infty(U)$ o anel das funções C^∞ em U . Como podemos multiplicar um campo de vetores C^∞ por uma função C^∞ e ainda obter um campo de vetores C^∞ , o conjunto de todos campos vetoriais C^∞ em U , denotado por $\mathfrak{X}(U)$, não é só um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, mas também um *módulo* sobre o anel $C^\infty(U)$.

Se X é um campo de vetores C^∞ em um subconjunto aberto U de $\mathbb{C}^n$ e f é uma função C^∞ em U , definimos a nova função $X(f)$ em U por

$$X(f)(p) = X_p f \text{ para todo } p \in U.$$

Escrevendo $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, temos

$$X(f)(p) = X_p f = \sum a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

ou

$$X(f) = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

mostrando-nos assim que Xf é uma função C^∞ em U . Assim, um campo de vetores C^∞ induz uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear

$$\begin{aligned} C^\infty(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ f &\mapsto Xf. \end{aligned}$$

Proposição 1.2.4 (Regra de Leibniz para campo de vetores). *Se X é um campo de vetores C^∞ e f e g são funções C^∞ em um subconjunto aberto U de $\mathbb{C}$, então $X(fg)$ satisfaz a regra do produto:*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Demonstração: Ver [25]. □

Em geral, se A é uma álgebra sobre um corpo K , uma *derivação* de A é uma aplicação K -linear $D : A \rightarrow A$ tal que

$$D(ab) = (Da)b + a(Db) \text{ para todo } a, b \in A.$$

O conjunto de todas as derivações de A é fechado sobre a adição e a multiplicação por escalar e forma um espaço vetorial, denotado por $Der(A)$. Um campo de vetores C^∞ em um conjunto aberto U induz uma derivação da álgebra $C^\infty(U)$. Então temos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{X}(U) &\rightarrow Der(C^\infty(U)) \\ X &\mapsto (f \mapsto Xf). \end{aligned}$$

Assim como os vetores tangentes em um ponto p podem ser identificados com os pontos derivações, os campos de vetores em um aberto U podem ser identificados com as derivações da álgebra $C^\infty(U)$, isto é, a aplicação φ é um isomorfismo de módulos sobre $\mathbb{C}^\infty(U)$.

Note que uma derivação em p não é uma derivação da álgebra $C_p^\infty(U)$. Uma derivação em um ponto p é uma aplicação de $C_p^\infty(U)$ em $\mathbb{C}$, enquanto uma derivação na álgebra $C_p^\infty(U)$ é uma aplicação de $C_p^\infty(U)$ em $C_p^\infty(U)$.

1.3 Formas k -lineares Alternadas

Se V e W são espaços vetoriais complexos, denotaremos por $Hom(V, W)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $f : V \rightarrow W$. Defina o *espaço dual* V^* sendo o espaço vetorial de todas as funções lineares com valores complexos em V .

Os elementos de V^* são chamados de *covetores* em V . Nesta seção, assumiremos que V é um espaço vetorial de dimensão finita. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para V . Cada elemento $v \in V$ é uma combinação linear unicamente determinada da seguinte forma, $v = \sum v^i e_i$ com $v^i \in \mathbb{C}$. Seja $\alpha^i : V \rightarrow \mathbb{C}$ uma função linear tal que a i -ésima coordenada $\alpha^i(v) = v^i$. Note que α^i é caracterizada por

$$\alpha^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Proposição 1.3.1 *As funções $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ formam uma base de V^* .*

Demonstração: Ver [25]. □

Corolário 1.3.2 *O espaço dual V^* de um espaço vetorial de dimensão finita V tem a mesma dimensão de V .*

Demonstração: Ver [25]. □

1.3.1 Permutações

Fixe um inteiro k . Uma *permutação* de um conjunto $A = \{1, \dots, k\}$ é uma bijeção $\sigma : A \rightarrow A$. Uma permutação cíclica $(a_1 a_2 \dots a_r)$ é a permutação σ tal que $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_r) = a_1$, e de forma que σ fixa todos os outros elementos de A . A permutação cíclica $(a_1 a_2 \dots a_r)$ é também chamada de um *r -ciclo*.

Uma *transposição* é um ciclo da forma (ab) que alterna a e b , mantendo os outros elementos de A fixos.

Seja S_k o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, \dots, k\}$. Uma permutação é *par* ou *ímpar* dependendo se ela é o produto de um número par ou ímpar de transposições.

1.3.2 Funções Multilineares

Denote por $V^k = V \times \dots \times V$ o produto cartesiano de k cópias do espaço vetorial complexo V . Uma forma $f : V^k \rightarrow \mathbb{C}$ é k -linear se ela é linear em cada um dos k argumentos

$$f(\dots, av + bw, \dots) = af(\dots, v, \dots) + bf(\dots, w, \dots)$$

para todo $a, b \in \mathbb{C}$ e $v, w \in V$. Uma forma k -linear em V é também chamada de um k -tensor em V . Denotaremos o espaço vetorial de todos k -tensores em V por $L_k(V)$. Se f é um k -tensor em V , também chamaremos de k o *grau* de f .

Definição 1.3.3 Uma forma k -linear $f : V^k \rightarrow \mathbb{C}$ é *simétrica* se

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = f(v_1, \dots, v_k)$$

para toda permutação $\sigma \in S_k$; ela é *alternada* se

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) f(v_1, \dots, v_k)$$

para todo $\sigma \in S_k$. Aqui $\text{sgn}(\sigma)$ denota o sinal da permutação.

Denotaremos o espaço das formas k -lineares alternadas em um espaço vetorial V por, $A_k(V)$, para $k > 0$.

1.3.3 O Produto Tensorial de formas k -lineares

Seja f uma forma k -linear e g uma forma l -linear em um espaço vetorial V . O *produto tensorial* entre f e g é a forma $(k + l)$ -linear $f \otimes g$ definida por

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k)g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Proposição 1.3.4 *Se f, g e h são formas multilineares em V , então*

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

Demonstração: Ver [25]. □

1.3.4 O Produto Exterior

Definimos o *produto exterior* entre formas multilineares por,

$$\begin{aligned} \wedge : A_k(V) \times A_l(V) &\rightarrow A_{k+l}(V) \\ (f, g) &\mapsto f \wedge g = \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g); \end{aligned}$$

onde $A(f) = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) f$.

As demonstrações das proposições e corolários abaixo podem ser encontradas em [11], [18] ou [25].

A seguinte proposição mostra que o produto exterior é anticomutativo.

Proposição 1.3.5 *Se $f \in A_k(V)$ e $g \in A_l(V)$, então*

$$f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f.$$

Segue diretamente da proposição acima o seguinte

Corolário 1.3.6 *Se f é um k -covetor em V e k é ímpar, então $f \wedge f = 0$.*

A seguinte proposição mostra que o produto exterior é associativo.

Proposição 1.3.7 *Sejam V um espaço vetorial complexo e f, g, h formas multilineares alternadas em V de graus k, l, m respectivamente. Então*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

Corolário 1.3.8 *Com as mesmas hipóteses da proposição (1.3.7),*

$$f \wedge g \wedge h = \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes g \otimes h).$$

Proposição 1.3.9 *Se $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ são formas lineares em um espaço vetorial V e $v_1, \dots, v_k \in V$, então*

$$(\alpha^1, \dots, \alpha^k)(v_1, \dots, v_k) = \det[\alpha^i(v_j)].$$

1.3.5 Uma Base para k -Covetores

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para o espaço vetorial complexo V , e seja $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ a base dual para V^* . Introduzindo a notação multi-índice

$$I = (i_1, \dots, i_k)$$

escreva e_I para $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ e α^I para $\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}$.

Uma forma k -linear f em V é completamente determinada pelos seus valores em toda k -upla $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. Se f é alternada, então ela é completamente determinada por seus valores em $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Suponha I, J multi-índices ascendentes de comprimento k . Pela proposição (1.3.9).

$$\alpha^I(e_J) = \begin{cases} 1, & I = J; \\ 0, & I \neq J. \end{cases}$$

As demonstrações da proposição e corolários abaixo podem ser encontradas em [25] ou [18].

Proposição 1.3.10 *As formas k -lineares alternadas α^I , $I = (i_1 < \dots < i_k)$, formam uma base para o espaço $A_k(V)$ das formas k -lineares alternadas em V .*

Corolário 1.3.11 *Se o espaço vetorial V tem dimensão n , então o espaço vetorial $A_k(V)$ de k -covetores em V tem dimensão $\binom{n}{k}$.*

Corolário 1.3.12 *Se $k > \dim V$, então $A_k(V) = 0$.*

1.4 Formas Diferenciais em $\mathbb{C}^n$

1.4.1 1-formas Diferenciais e a Diferencial de uma Função

De qualquer função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ , podemos construir uma 1-forma df , chamada a *diferencial* de f como segue. Para $p \in U$ e $X_p \in T_p\mathbb{C}^n$, defina

$$(df)_p(X_p) = X_p f.$$

Proposição 1.4.1 *Se $z^1, \dots, z^n$ são as coordenadas canônicas de $\mathbb{C}^n$, então em cada ponto p em U , $\{(dz^1)_p, \dots, (dz^n)_p\}$ é a base para o espaço cotangente $T_p^*(\mathbb{C}^n)$ dual a base $\{\partial/\partial z^1|_p, \dots, \partial/\partial z^n|_p\}$ para o espaço tangente $T_p(\mathbb{C}^n)$.*

Demonstração: Por definição,

$$(dz^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial z^j} \Big|_p z^i = \delta_j^i.$$

□

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função C^∞ em um conjunto aberto U em $(\mathbb{C}^n)$, então a diferencial de f é definida por

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j. \quad (1.1)$$

1.4.2 k -Formas Diferenciáveis

Mais geralmente, uma *forma diferencial* ω de grau k ou uma k -forma em um conjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ é uma aplicação que associa para cada ponto p em U uma forma k -linear alternada no espaço tangente $T_p(\mathbb{C}^n)$, isto é, $\omega_p \in A_k(T_p\mathbb{C}^n)$. Como $A_1(T_p\mathbb{C}^n) = T_p^*(\mathbb{C}^n)$, a definição de uma k -forma generaliza a de uma 1-forma.

Uma base para $A_k(T_p\mathbb{C}^n)$ é

$$dz_p^I = dz_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dz_p^{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Assim, em cada ponto p em U , ω_p é uma combinação linear

$$\omega_p = \sum a_I(p) dz_p^I, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Portanto uma k -forma ω em U é uma combinação linear

$$\omega = \sum a_I dz^I,$$

com funções coeficientes $a_I : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que uma k -forma ω é C^∞ em U se todos os coeficientes a_I são funções C^∞ em U .

Denotemos por $\Omega^k(U)$ o espaço vetorial de k -formas C^∞ em U . Uma 0-forma em U associa em cada ponto p em U , elemento de $A_0(T_p\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}$. Daí, uma 0-forma em U é simplesmente uma função em U , e $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Uma vez que se pode multiplicar uma k -forma C^∞ por funções C^∞ , o conjunto $\Omega^k(U)$ de k -formas C^∞ em U é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e um módulo sobre $C^\infty(U)$. Com o produto exterior como multiplicação, a soma direta

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$$

torna-se uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, bem como um módulo sobre $C^\infty(U)$.

Capítulo 2

Variedades Algébricas, Funções polinomiais e racionais

Neste capítulo vamos estudar polinômios e variedades algébricas afins. Veremos a definição de variedades algébricas, de ideais de uma variedade e a forma como se relacionam.

O foco central será a exposição do célebre Teorema dos Zeros de Hilbert que será usado fortemente em demonstrações dos capítulos 4, 5 e 6, os principais desta dissertação. Apresentaremos uma das versões do teorema citado.

Veremos uma exposição sobre funções polinomiais e racionais em uma variedade. A importância desse assunto, é pelo fato de termos a necessidade de trabalhar nos capítulos 4, 5 e 6 com funções com essas características. Para este capítulo sugerimos a leitura de [10] para mais detalhes.

2.1 Variedades algébricas

Nesta seção estudamos curvas, conjuntos dados por zeros de sistemas de equações polinomiais. Utilizaremos um pouco de álgebra e, em particular, precisaremos estudar os ideais do anel de polinômios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

2.1.1 Polinômios e Espaço Afim

Para fazer a ligação entre álgebra e geometria estudaremos polinômios sobre $\mathbb{C}$.

Definição 2.1.1 Um monômio em $x_1, \dots, x_n$ é um produto da forma

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

onde os expoentes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são inteiros não negativos. O grau total desse monômio é $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Observação 2.1.2 Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ uma n -upla de inteiros não-negativos. Então $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, temos $x^\alpha = 1$. Temos também que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ denota o grau do monômio x^α .

Definição 2.1.3 Um polinômio f em $x_1, \dots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ é uma combinação linear finita de monômios. Denotaremos um polinômio f na forma

$$f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \in \mathbb{C},$$

onde a soma é sobre um número finito de n -uplas $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Como usual, o conjunto de todos os polinômios em $x_1, \dots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ será denotado por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Definição 2.1.4 Seja $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ um polinômio em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

1. a_{α} é chamado coeficiente de x^{α} ;
2. Se $a_{\alpha} \neq 0$, então chamamos $a_{\alpha} x^{\alpha}$ um termo de f ;
3. O grau de f , denotado por $\deg(f)$, é $\max\{|\alpha|; a_{\alpha} \neq 0\}$.

2.2 Variedades Afins

Definição 2.2.1 Sejam $f_1, \dots, f_s$ polinômios em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Então temos

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, s\}.$$

Chamamos $V(f_1, \dots, f_s)$ a **variedade afim** definida por $f_1, \dots, f_s$.

Assim, uma variedade afim $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$ é o conjunto de todas as soluções do sistema de equações $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Exemplo 2.2.2 Se $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, um ponto $P = (a_1, \dots, a_n)$ pertencente ao espaço afim de dimensão n é um zero de F se $F(P) = F(a_1, \dots, a_n) = 0$. Se F não é constante, o conjunto de zeros de F é chamado de **hipersuperfície** definida por F , e denotada por $V(F)$.

Lema 2.2.3 Se $V, W \subset \mathbb{C}^n$ são variedades afins, então $V \cup W$ e $V \cap W$ também são.

Demonstração: Considere $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ e $W = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_t)$, então

$$V \cup W = \mathbf{V}(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t),$$

$$V \cap W = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t).$$

□

A demonstração deste lema implica que interseções finitas e uniões de variedades afins são ainda variedades afins. Portanto, podemos definir uma topologia em $\mathbb{C}^n$ chamada *topologia de Zariski* em que os abertos são os complementares de $V(f_1, \dots, f_n)$.

2.2.1 Ideais

Definição 2.2.4 Um subconjunto $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal se satisfaz:

1. $0 \in I$;
2. Se $f, g \in I$, então $f + g \in I$;
3. Se $f \in I$ e $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, então $hf \in I$.

A importância dos ideais é que eles nos darão ferramentas para fazer os cálculos com variedades.

Definição 2.2.5 Sejam $f_1, \dots, f_s$ polinômios em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Definimos o ideal gerado por $f_1, \dots, f_s$ por

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \{ \sum_{i=1}^s h_i f_i : h_1, \dots, h_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \}.$$

Veja que $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ é de fato um ideal como sugere a definição.

Proposição 2.2.6 *Se $f_1, \dots, f_s$ e $g_1, \dots, g_t$ são tais que $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, então*

$$V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_t)$$

Definição 2.2.7 *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade afim. Então temos*

$$I(V) = \{ f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in V \}$$

A observação crucial aqui é que $I(V)$ é um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Chamamos $I(V)$ de ideal de V ;

Exemplo 2.2.8 *Considere a variedade $\{(0, 0)\}$ consistindo da origem de $\mathbb{C}^2$. Então o ideal $I(\{(0, 0)\})$ consiste de todos os polinômios que se anulam na origem, e afirmamos que*

$$I(\{(0, 0)\}) = \langle x, y \rangle$$

1. $\langle x, y \rangle \subset I(\{(0, 0)\})$

Seja $A(x, y)x + B(x, y)y \in \langle x, y \rangle$, obviamente este polinômio se anula em $(0, 0)$.

2. $I(\{(0, 0)\}) \subset \langle x, y \rangle$

Seja $f \in I$, então $f = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ anula-se na origem, daí $a_{00} = f(0, 0) = 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} f &= a_{00} + \sum_{(i,j) \neq (0,0)} a_{ij} x^i y^j \\ &= 0 + \left(\sum_{(i,j): i>0} a_{ij} x^{i-1} y^j \right) x + \left(\sum_{j>0} a_{0j} y^{j-1} \right) y \in \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Lema 2.2.9 *Se $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, então*

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(V(f_1, \dots, f_s))$$

Embora a igualdade não precise ocorrer, como mostra o exemplo.

Exemplo 2.2.10 $\langle x^2, y^2 \rangle \subset I(V(x^2, y^2))$ mas $I(V(x^2, y^2)) \not\subset \langle x^2, y^2 \rangle$.
 $x^2 = 0$ e $y^2 = 0 \Rightarrow V(x^2, y^2) = \{(0, 0)\}$, mas o ideal de $\{(0, 0)\}$ é $\langle x, y \rangle$, então $I(V) = \langle x, y \rangle$. Note que $x \notin \langle x^2, y^2 \rangle$.

Proposição 2.2.11 *Sejam V e W variedades afim em $\mathbb{C}^n$. Então*

1. $V \subset W \Leftrightarrow I(V) \supset I(W)$;
2. $V = W \Leftrightarrow I(V) = I(W)$.

Demonstração: Basta demonstrar 1. Seja $f \in I(W)$, temos que $f(p) = 0$ para todo $p \in W$. Como $V \subset W$, $f(q) = 0$ para todo $q \in V$. Portanto $f \in I(V)$ e daí $I(W) \subset I(V)$.

Considere $p \in V$, por definição $f(p) = 0$ para todo $f \in I(V)$. Como $I(V) \subset I(W)$, então $g(p) = 0$ para todo $g \in I(W)$, logo $p \in W$. $\square$

2.2.2 Teorema da base de Hilbert

Teorema 2.2.12 *Todo ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é finitamente gerado. Isto é, existem $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tais que*

$$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle.$$

O teorema da base de Hilbert nos mostra que, todo subconjunto algébrico é a interseção de um número finito de hipersuperfícies.

Definição 2.2.13 *Seja $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Denotemos o conjunto*

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \ \forall f \in I\}.$$

Proposição 2.2.14 *$V(I)$ é uma variedade afim. Em particular, se $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, então $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$.*

2.2.3 Teorema dos zeros de Hilbert (Hilbert's Nullstellensatz)

O Teorema dos zeros de Hilbert identifica ideais que correspondem a variedades, permitindo “construir” um dicionário entre álgebra e geometria.

Definição 2.2.15 *Seja V uma variedade afim. O ideal de V é definido por*

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : f(x) = 0 \quad \forall x \in V\}.$$

Proposição 2.2.16 *Se $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, então $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(V(f_1, \dots, f_s))$.*

Demonstração: Se $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle \Rightarrow f \in \sum_{i=1}^s h_i f_i$, $h_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Como $f_1, \dots, f_s$ se anulam em $V(f_1, \dots, f_s) \Rightarrow f \in I(V(f_1, \dots, f_s))$. $\square$

Seja I um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ o radical de I é definido por

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^m \in I\}$$

O Teorema dos Zeros de Hilbert diz que o ideal de uma variedade $V(I)$ é o radical de I .

Teorema 2.2.17 (Teorema dos Zeros de Hilbert) *Se $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ são tais que $f \in I(V(f_1, \dots, f_s))$, então existe $m \geq 1$ tal que $f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ (e reciprocamente).*

2.3 Funções polinomiais e racionais em uma variedade

Definição 2.3.1 *Sejam $V \subset \mathbb{C}^m$ e $W \subset \mathbb{C}^n$ variedades. Uma função $\phi : V \rightarrow W$ é dita uma **aplicação polinomial** (ou **aplicação regular**) se existem polinômios $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ tais que*

$$\phi(a_1, \dots, a_m) = (f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$$

para todo $(a_1, \dots, a_m) \in V$.

Dizemos que a n -upla de polinômios

$$(f_1, \dots, f_n) \in (\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n])^n$$

representa ϕ .

Proposição 2.3.2 *Seja $V \subset \mathbb{C}^m$ uma variedade afim. Então*

1. *f e $g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ representam as mesmas funções polinomiais em V se, e somente se, $f - g \in \mathbf{I}(V)$.*
2. *$(f_1, \dots, f_n)$ e $(g_1, \dots, g_n)$ representam as mesmas aplicações polinomiais de V em $\mathbb{C}^n$ se, e somente se, $f_i - g_i \in \mathbf{I}(V)$ para todo i , com $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração: Se $f - g = h \in \mathbf{I}(V)$, então para todo $p = (a_1, \dots, a_m) \in V$, $f(p) - g(p) = h(p) = 0$. Portanto f e g representam a mesma função, então, em todo $p \in V$, $f(p) - g(p) = 0$. Assim, $f - g \in \mathbf{I}(V)$ por definição. A parte (2) segue da parte (1). $\square$

Denotaremos por $\mathbb{C}[V]$ a coleção de funções polinomiais $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$.

Uma variedade $V \subset \mathbb{C}^m$ é dita **redutível** se ela pode ser escrita como uma união de duas subvariedades próprias não vazias: $V = V_1 \cup V_2$, onde $V \neq V_1$ e $V \neq V_2$.

Exemplo 2.3.3 *Considere a variedade em $\mathbb{C}^3$ dada por $V(x^3 + xy - xz, yx^2 + y^3 - yz)$. Não é difícil ver que*

$$V(x^2 + y^2 - z) \cup V(x, y).$$

Portanto, V é redutível.

A seguinte proposição caracteriza variedades irredutíveis.

Proposição 2.3.4 *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade afim. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *V é irredutível;*
2. *$\mathbf{I}(V)$ é um ideal primo;*
3. *$\mathbb{C}[V]$ é um domínio de integridade.*

Demonstração: Veja [10] pag. 219. $\square$

2.3.1 Quociente de anéis polinomiais

Definição 2.3.5 *Seja $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ um ideal, e sejam $f, g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Dizemos que f e g são **congruentes módulo I** se $f - g \in I$, denotando como segue*

$$f \equiv g \text{ mod. } I.$$

Seja $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ um ideal. A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Funções polinomiais $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ estão em correspondência biunívoca com as classes de equivalência de polinômios em congruência módulo $I(V)$. Veja [10] pag.223.

Definição 2.3.6 *O quociente de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ módulo I , é o conjunto de classes de equivalência para congruência módulo I*

$$\frac{\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]}{I} = \{[f] : f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]\}.$$

Onde $[f] = \{g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] : g \equiv f \text{ mod. } I\}$.

Por $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ ser um anel, dadas duas classes $[f], [g] \in \frac{\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]}{I}$, podemos definir soma e produto *em classes* usando as operações correspondentes sobre os elementos de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Isto é, as operações induzidas

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f + g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \cdot g], \end{aligned} \tag{1}$$

estão bem definidas.

Teorema 2.3.7 *Seja I um ideal em $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. O quociente $\frac{\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]}{I}$ é um anel comutativo.*

Proposição 2.3.8 *Seja I um ideal em $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Os ideais no anel quociente $\frac{\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]}{I}$ estão em correspondência biunívoca com os ideais de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ contendo I*

Demonstração: Veja [10] pag.226

□

O seguinte corolário é uma consequência do teorema da base de Hilbert e da proposição 2.3.8.

Corolário 2.3.9 *Todo ideal no anel quociente $\frac{\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]}{I}$ é finitamente gerado.*

2.3.2 Funções racionais em uma variedade

O anel dos números inteiros pode ser imerso em muitos corpos. O menor deles é o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$, pois $\mathbb{Q}$ é formado pela construção de frações m/n , onde $m, n \in \mathbb{Z}$. Apenas números inteiros foram usados. Da mesma forma, o anel de polinômios $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ é incluído como um subanel no corpo das funções racionais.

$$\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n) = \left\{ \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{g(z_1, \dots, z_n)} : f, g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], g \neq 0 \right\}.$$

Este é o chamado *corpo das frações* de $\mathbb{C}[z]$.

Definição 2.3.10 *Seja V uma variedade irredutível afim em $\mathbb{C}^n$. Chamamos $\mathbb{C}(V)$ de *corpo de funções racionais* em V .*

Escrevemos o corpo de funções racionais $\mathbb{C}(V)$ explicitamente como

$$\mathbb{C}(V) = \left\{ \frac{\phi}{\psi} : \phi, \psi \in \mathbb{C}[V], \psi \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{[f]}{[g]} : f, g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], g \notin \mathbf{I}(V) \right\}.$$

Definição 2.3.11 *Sejam $V \subset \mathbb{C}^m$ e $W \subset \mathbb{C}^n$ variedades irredutíveis afins. Uma *aplicação racional* de V em W é uma função ϕ representada por*

$$\phi(z_1, \dots, z_m) = \left(\frac{f_1(z_1, \dots, z_m)}{g_1(z_1, \dots, z_m)}, \dots, \frac{f_n(z_1, \dots, z_m)}{g_n(z_1, \dots, z_m)} \right),$$

onde $f_i/g_i \in \mathbb{C}(V)$.

Note que uma aplicação racional ϕ de V para W pode não ser uma função de V para W no sentido usual, ou seja, ϕ pode não estar definida em todos os pontos de V . Por esta razão, utilizaremos a seguinte notação para indicar uma aplicação racional

$$\phi : V \dashrightarrow W.$$

Capítulo 3

Folheações e Teorema de Frobenius

Para este capítulo sugerimos a leitura de [5] e [24]. Veremos as definições de folheações holomorfas não singular e singular, os conceitos de distribuição de k -planos e algumas de suas propriedades. Enunciaremos o teorema de Frobenius. Sabemos que toda folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k induz uma distribuição de planos k -dimensional. O teorema de Frobenius nos garante a recíproca desta afirmação. Isto é, nos dá uma condição necessária e suficiente para uma distribuição de planos k -dimensional seja tangente a uma folheação.

Vale ressaltar que nos capítulos 5 e 6 estudaremos teoremas que nos fornecem algumas condições para a existência de integral primeira racional para campos de vetores polinomiais e r -formas polinomiais respectivamente. E como veremos neste capítulo, as distribuições possuem uma forte ligação com os campos de vetores e as formas.

3.1 Folheações Holomorfas

Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$.

Definição 3.1.1 *Uma folheação holomorfa não singular de dimensão k (ou codimensão $n - k$) em M , onde $1 \leq k \leq n - 1$, é dada pelo seguinte conjunto de informações:*

1. *uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;*
2. *para cada $\alpha \in A$, um biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário na origem;*

3. sempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha\beta} : \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) &\longrightarrow \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (z, w) &\longmapsto \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z, w) = (\varphi_1, \varphi_2).\end{aligned}$$

satisfaz $\Phi_{\alpha\beta}(z, w) = (\varphi_1(z, w), \varphi_2(w))$.

Cada aberto U_α é chamado de *aberto trivializador* da folheação. Por (2), U_α é decomposto em variedades de dimensão k da forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{w_0\})$, onde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$, chamadas de *placas*. Por (3), as placas se sobrepõem nas interseções de abertos trivializadores da seguinte forma: se $P_\alpha \subset U_\alpha$ e $P_\beta \subset U_\beta$ são placas, ou $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$, ou $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

Definimos a seguinte relação de equivalência em M : $p \sim q$ se existem placas $P_1, \dots, P_n$, com $p \in P_1$ e $q \in P_n$ tais que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, n-1$. A classe de equivalência de $p \in M$ por essa relação é chamada de *folha* passando por p . Cada folha, com a topologia gerada pelos abertos de suas placas, possui estrutura de variedade complexa de dimensão k imersa em M , veja [5].

Uma folheação de dimensão k proporciona uma decomposição da variedade em subvariedades imersas de dimensão k , duas a duas disjuntas.

O *espaço tangente* à folheação $\mathcal{F}$ em $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$, é definido como o espaço tangente, no ponto p , à folha passando por esse ponto. Dizemos que duas folheações são iguais se todas as suas folhas coincidem.

Definição 3.1.2 *Uma folheação holomorfa singular de dimensão k (ou codimensão $n - k$), onde $1 \leq k \leq n - 1$, em uma variedade complexa M é uma folheação não singular de dimensão k em $M \setminus S$, onde S é um conjunto analítico em M de codimensão maior ou igual a 2.*

Exigiremos ainda que o conjunto S da definição acima seja minimal no seguinte sentido: não existe subconjunto analítico próprio $S' \subset S$ tal que a folheação regular em $M \setminus S$ se estenda a $M \setminus S'$. Nessas condições, S é chamado de *conjunto singular* da folheação.

O conjunto singular da folheação $\mathcal{F}$ é denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Os elementos de $Sing(\mathcal{F})$ são chamados de *pontos singulares* ou *singularidades*, enquanto os elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ são chamados de *pontos regulares*.

As folhas de $\mathcal{F}$ são, por definição, as folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$. Duas folheações singulares $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são iguais se:

1. $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;

2. as folhas regulares $\mathcal{F}|_{M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'|_{M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ são iguais.

3.2 Teorema de Frobenius

As demonstrações das proposições e dos teoremas desta seção podem ser encontradas em [5].

3.2.1 Distribuição

Uma distribuição de k -planos em uma variedade M é uma aplicação D que associa à cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de $T_q M$. Dizemos que uma distribuição de k -planos é de classe C^r se para todo $q \in M$ existem k campos de vetores $X^1, \dots, X^k$ de classe C^r , definidos em uma vizinhança V de q tais que para todo $x \in V$, $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ é uma base para $D(x)$.

Um fato relevante segue

Proposição 3.2.1 *Toda folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r ($r \geq 1$) de dimensão k em M define uma distribuição de k -planos de classe C^{r-1} em M denotado por $T\mathcal{F}$.*

Definição 3.2.2 *Dados dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, podemos produzir um terceiro $[X, Y] = XY - YX$ que é denominado o **colchete de Lie** de X, Y .*

Definição 3.2.3 *Dizemos que uma distribuição de planos D é **involutivo** se, dados dois campos de vetores X e Y tais que, para cada $q \in M$, $X(q)$ e $Y(q)$ pertencem a $D(q)$, então $[X, Y](q) \in D(q)$.*

Uma distribuição de k -planos D é dita completamente integrável se para todo $p \in U \subset M$ tal que $D(p) = \langle X_1(p), \dots, X_k(p) \rangle$ existe uma subvariedade $\mathcal{F}_p$ tal que $T_p \mathcal{F}_p = D(p)$.

Teorema 3.2.4 (Frobenius) *Seja D uma distribuição de k -planos de classe C^∞ . Então, D é completamente integrável se, e somente se, é involutivo.*

3.2.2 Distribuição de k -planos definidos por formas diferenciais

Sejam $\omega^1, \dots, \omega^k$ C^r ($r \geq 0$) 1-formas definidas e linearmente independentes em um conjunto aberto $U \subset M^m$. Para cada $q \in U$ defina

$$D(q) = \{v \in T_q M; \omega_q^1(v) = \cdots = \omega_q^k(v) = 0\}$$

Como $\omega_q^1, \dots, \omega_q^k$ são elementos linearmente independentes do dual $(T_q M)^*$, $D(q)$ é um subespaço de codimensão k de $T_q(M)$.

Proposição 3.2.5 *Uma distribuição de planos de classe C^r ($r \geq 0$) de codimensão k pode ser definido localmente como o núcleo das k C^r 1-formas linearmente independentes. Reciprocamente, se $\omega^1, \dots, \omega^k$ são C^r 1-formas linearmente independentes então*

$$D(q) = \{v \in T_q M; \omega_q^1(v) = \cdots = \omega_q^k(v) = 0\}$$

define uma distribuição de planos de codimensão k .

Segue a versão do teorema de Frobenius para formas.

Teorema 3.2.6 *Seja D um C^r ($r \geq 1$) distribuição de planos de codimensão k definido em um aberto $U \subset M$ por $\omega^1, \dots, \omega^k$ 1-formas linearmente independentes. Então D é completamente integrável se, e somente se, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ temos*

$$d\omega^j \wedge (\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = 0.$$

Capítulo 4

Hipersuperfícies invariantes por endomorfismos polinomiais

Neste capítulo vamos estudar um teorema devido a S. Cantat, extraído de [6]. Este teorema nos diz que um endomorfismo holomorfo sobre uma variedade complexa compacta preserva uma fibração meromorfa não trivial se, e somente se, possui infinitas hipersuperfícies totalmente invariantes. Nosso objetivo é apresentar uma adaptação desse teorema para endomorfismos polinomiais em $\mathbb{C}^n$ e demonstrá-la.

Antes da demonstração, apresentaremos alguns resultados importantes sobre endomorfismos polinomiais e hipersuperfícies totalmente invariantes por esses endomorfismos. Faremos uso direto do Teorema dos Zeros de Hilbert para demonstrar algumas proposições fundamentais na prova da adaptação que fizemos.

Falaremos um pouco sobre formas logarítmicas apresentando um lema devido a Jouanolou.

Precisamente, o teorema de S. Cantat diz o seguinte.

Teorema 4.0.7 (Cantat) *Seja M uma variedade complexa compacta, e f um endomorfismo de M . Se existem k hipersuperfícies totalmente invariantes $W_i \subset M$; com*

$$(*) \quad k > \dim(M) + \dim(H^1(M; \Omega_M^1));$$

Então existe uma função meromorfa Φ e um número complexo não nulo α tal que $\Phi \circ f = \alpha\Phi$.

$H^1(M; \Omega_M^1)$ é o 1º grupo de cohomologia de Čech com coeficientes no feixe Ω_M^1 . Pela teoria de Hodge, este grupo de Cohomologia é um espaço vetorial complexo de dimensão finita. O número k na desigualdade $(*)$ pode ser substituído pelo número total de

componentes irredutíveis W_i . Mais sobre cohomologia de Čech pode ser visto em [12].

4.1 Hipersuperfícies Totalmente Invariantes

Definição 4.1.1 *Seja $V(f)$ uma hipersuperfície com $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, dizemos que V é totalmente invariante por um endomorfismo polinomial $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ se $G^{-1}(V) = V$.*

Proposição 4.1.2 *Seja V uma hipersuperfície totalmente invariante por um endomorfismo $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, então $G(V) = V$.*

Demonstração: Mostremos que $G^{-1}(V) = V \Rightarrow G(V) = V$. Vamos mostrar que $G(V) \subset V$. De fato, seja $b \in G(V)$, então existe $a \in V$ tal que $G(a) = b$. Como $G^{-1}(V) = V$, temos $G(a) \in V$, ou seja, $b \in V$. O caso $G(V) \supset V$ segue de forma análoga. $\square$

Definição 4.1.3 *Uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é dita **própria** quando a imagem inversa $f^{-1}(K)$ de todo compacto $K \subset N$ é um conjunto compacto.*

Teorema 4.1.4 (Teorema da aplicação própria). *Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa e própria. Se $V \subset U$ é uma variedade algébrica irredutível então $f(V)$ é uma variedade algébrica irredutível.*

Demonstração: Ver [12] pag.34. $\square$

Seja $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ uma hipersuperfície, com V_j irredutível, para todo $j = 1, \dots, r$. Se G é um endomorfismo polinomial, tal que $G(V) = V$. O lema abaixo nos garantirá que para $i, j = 1, \dots, r$ temos $G(V_i) = V_j$. Isto é, G envia componentes irredutíveis de V em componentes irredutíveis de V .

Lema 4.1.5 *Toda aplicação polinomial homogênea é própria.*

Demonstração: Mostremos primeiramente que dada a aplicação polinomial $p = (p_1, \dots, p_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, p_i homogêneo de mesmo grau d , existem m e n tais que $n\|z\|^d \leq \|p(z)\| \leq m\|z\|^d$. Considere

$$m = \sup\{\|p(z)\|; \|z\| = 1\} \text{ e } n = \inf\{\|p(z)\|; \|z\| = 1\}.$$

Note que $\frac{z}{\|z\|} \in S(0, 1)$ esfera centrada na origem de raio 1. Daí, usando a homogeneidade de p resulta

$$n\|z\|^d \leq \|p(z)\| = \|z\|^d \|p(\frac{z}{\|z\|})\| \leq m\|z\|^d.$$

Verifiquemos com isso que p é uma aplicação própria. Seja K um conjunto compacto, e defina $L = p^{-1}(K)$. Suponha por absurdo que L não é compacto. Temos que L é fechado, pois p é contínua. Resta mostrar que L é limitado. Seja

$$z_0 \in L \text{ tal que } \|z_0\| > \sup_{z \in K} \left(\sqrt[d]{\frac{\|z\|+1}{m}} \right),$$

como $z_0 \in p^{-1}(K)$ temos $p(z_0) \in K$. Ainda

$$\left[\sup_{z \in K} \sqrt[d]{\frac{\|z\|+1}{m}} \right]^d < \|z_0\|^d \Rightarrow \sup(\|z\| + 1) < \|z_0\|^d m \leq |p(z_0)|.$$

Absurdo, pois $z_0 \in p^{-1}(K)$. □

Considere G um endomorfismo polinomial em $\mathbb{C}^n$. Sejam $V \subset \mathbb{C}^n$ uma hipersuperfície totalmente invariante e $V_1, \dots, V_r$ suas componentes irredutíveis. Como V é uma hipersuperfície totalmente invariante, segue da proposição 4.1.2 que

$$G(V) = V.$$

Portanto,

$$G(V_1 \cup \dots \cup V_r) = V_1 \cup \dots \cup V_r.$$

Utilizando o teorema da aplicação própria temos que $G(V_i) = V_j$, para $i, j \in \{1, \dots, r\}$.

Proposição 4.1.6 *Se $V(f)$ é uma hipersuperfície irredutível totalmente invariante, então*

$$f \circ G = \lambda f^k, \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Demonstração: Por definição

$$I(V) = \{g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] : g(z) = 0 \quad \forall z \in V\}.$$

Dado $p \in V$, como V é totalmente invariante $(f \circ G)(p) = f(G(p)) = 0$, ou seja, $(f \circ G) \in I(V)$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert temos

$$(f \circ G) \in I(V) = \sqrt{I} = \langle f \rangle.$$

Como $(f \circ G) \in I(V) = \sqrt{I} = \langle f \rangle$ segue que $f \circ G = hf$. Pelo fato de $G^{-1}(V) = V$, teremos que hf se anula exatamente em V , e pela irredutibilidade de V segue que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f \circ G = \lambda f^k$. $\square$

Definição 4.1.7 *Seja $f : N \rightarrow M$ uma aplicação e h uma função em M . O pullback de h por f , denotado por f^*h , é a função composta $h \circ f$.*

Proposição 4.1.8 *Sejam $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ polinômios irredutíveis cujo conjunto de zeros definem uma hipersuperfície totalmente invariante por um endomorfismo polinomial $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Então*

$$G^* \frac{df_i}{f_i} = r_i \frac{df_j}{f_j},$$

onde $j = k(i)$, k é uma permutação dos elementos $\{1, \dots, r\}$ e $r_i \in \mathbb{N}$ para todo $i = 1, \dots, r$.

Demonstração: Como $G(V_i) = V_{k(i)}$, segue da proposição 4.1.6 que

$$f_i \circ G = \lambda_i f_{k(i)}^{r_i}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}^*.$$

Utilizando a propriedade do pullback $G^*d = dG^*$ segue

$$d(f_i \circ G) = d(\lambda_i f_{k(i)}^{r_i}) = \lambda_i r_i f_{k(i)}^{r_i-1} df_{k(i)}.$$

Logo

$$\frac{d(f_i \circ G)}{f_i \circ G} = \frac{d(\lambda_i f_{k(i)}^{r_i})}{\lambda_i f_{k(i)}^{r_i}} = \frac{\lambda_i r_i f_{k(i)}^{r_i-1} df_{k(i)}}{\lambda_i f_{k(i)}^{r_i}} = \frac{r_i df_{k(i)}}{f_{k(i)}} \Leftrightarrow G^* \frac{df_i}{f_i} = r_i \frac{df_{k(i)}}{f_{k(i)}}$$

□

Considere o espaço $E = \langle df_i/f_i, i = 1, \dots, r \rangle_{\mathbb{C}}$. Pela proposição (4.1.8) temos

$$G^* : E \longrightarrow E$$

$$\frac{df_i}{f_i} \longmapsto r_i \frac{df_j}{f_j}.$$

Note que a matriz de G^* é uma matriz permutação e portanto diagonalizável. De fato, temos pela proposição 4.1.8

$$G^* \frac{df_j}{f_j} = r_i \frac{df_i}{f_i}.$$

Considere a permutação $k : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ com $k(j) = i$. Seja $G^* : E \rightarrow E$, onde $E = \langle df_i/f_i, i = 1, \dots, r \rangle$, temos pelo lema de Jouanolou (4.1.9) df_i/f_i linearmente independentes, segue que

$$[G^*] = [G_{ij}] = \begin{cases} r_i, & j = k(i); \\ 0, & j \neq k(i). \end{cases}$$

Daí, $[G^*]$ é uma matriz permutação, em particular diagonalizável.

4.1.1 Sobre formas logarítmicas

Lema 4.1.9 (Jouanolou). *Sejam $f_1, \dots, f_r$ polinômios irreduzíveis. Então as 1-formas logarítmicas df_i/f_i são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Sejam $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ e f_i como no teorema tais que

$$\sum_{i=1}^r a_i \frac{df_i}{f_i} = 0. \quad (4.1)$$

Defina para $i = \{1, \dots, r\}$, $V_i = \{f_i = 0\}$. Pelo Nullstellensatz de Hilbert, podemos escolher $p_j \in V_j \setminus \bigcup_{i \neq j} V_i$.

Agora, seja L_j uma reta afim passando por p_j não contida em V_j e $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma parametrização de L_j com $u(0) = p_j$. Coloque $g_i = f_i \circ u$, para todo $i = \{1, \dots, r\}$ $i \neq j$, a função g_i/g_j é regular em 0 e g'_i/g_j tem um polo simples em 0 com $\text{Res}(g'_i/g_j, 0) = \rho_i$, que é a multiplicidade de 0 como um zero de g_j . Por outro lado, segue de (4.1) que

$$a_1 \frac{g'_1}{g_1} + \dots + a_r \frac{g'_r}{g_r} = 0$$

Tomando resíduo em 0 na equação acima obtemos $a_i \rho_i = 0$, pois as g'_i/g_i são holomorfas e, como $\rho_i \neq 0$, temos que $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, r$. $\square$

O lema acima nos diz que $\dim_{\mathbb{C}} E = r$.

4.2 Adaptação do Teorema de Cantat para Endomorfismos polinomiais

Teorema 4.2.1 *Seja f um endomorfismo polinomial de $\mathbb{C}^n$. Se existem k hipersuperfícies totalmente invariantes com*

$$k > n,$$

então existem uma função racional não constante Φ e um número complexo não nulo α tal que $\Phi \circ f = \alpha\Phi$.

Este teorema significa que f preserva o pencil de hipersuperfícies induzido pela função racional Φ . De fato, escreva $\Phi = P/Q$ e considere o pencil de hipersuperfícies induzido por Φ dado por $V_\lambda = \{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Dado $z \in V_\lambda$, então

$$\Phi(z) = P(z)/Q(z) = \lambda.$$

Como $\Phi \circ f = \alpha\Phi$, com $\alpha \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} (\Phi \circ f)(z) &= (\alpha\Phi)(z) \\ &= \alpha\Phi(z) \\ &= \alpha \frac{P(z)}{Q(z)} \\ &= \alpha\lambda. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que $\Phi(f(z)) \in V_{\alpha\lambda}$. Isto mostra que $f(V_\lambda) \subseteq V_{\alpha\lambda}$. Portanto, as fibras da função racional Φ são preservadas por f .

Demonstração: Defina a 1-forma racional $\eta_i = df_i/f_i$ com $i = 1, \dots, k$. Como f^* é diagonalizável, temos

$$f^*\eta_i = \mu_i\eta_i, i = 1, \dots, k, \quad (4.2)$$

onde $\mu_i \in \mathbb{C}^*$.

Se f possui $k > n$ hipersuperfícies totalmente invariantes, então η_i são linearmente dependentes sobre o corpo de funções racionais em $\mathbb{C}^n$.

De fato, por ser $k > n$ então $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k = 0$. Como $\eta_1, \dots, \eta_k$ são 1-formas lineares sobre $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$ e $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k = 0$, então elas são linearmente dependentes.

Suponha que o espaço vetorial E sobre $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$, gerado por $\eta_1, \dots, \eta_m$ tenha dimensão igual a m . Temos então que

$$\eta_{m+1} = \sum_{i=1}^m R_i \eta_i, R_i \in \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n). \quad (4.3)$$

Pelo menos um dos R_i 's é não constante pois pelo lema de Jouanolou lema(4.1.9), as 1-formas η_i 's são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.

Aplicando f^* na equação (4.3) e usando (4.2) segue

$$f^* \eta_{m+1} = \sum_{i=1}^m f^*(R_i \eta_i) = \sum_{i=1}^m (R_i \circ f) \cdot f^* \eta_i = \sum_{i=1}^m (R_i \circ f) \cdot \mu_i \eta_i. \quad (4.4)$$

Por outro lado

$$f^* \eta_{m+1} = \mu_{m+1} \eta_{m+1}. \quad (4.5)$$

Note que $\mu_{m+1} \neq 0$. Caso contrário, teríamos

$$0 = \mu_{m+1} \eta_{m+1} = f^* \eta_1 = \sum_{i=1}^m (R_i \circ f) \cdot \mu_i \eta_i. \quad (4.6)$$

Isto contraria o fato de $\eta_1, \dots, \eta_m$ serem linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$, pois pelo menos um dos R_i é não constante. Daí,

$$\mu_{m+1} \eta_{m+1} = \sum_{i=1}^m (R_i \circ f) \cdot \mu_i \eta_i. \quad (4.7)$$

Como $\mu_{m+1} \neq 0$, segue, usando as equações (4.4) e (4.5)

$$\eta_{m+1} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\mu_i}{\mu_{m+1}} \right) (R_i \circ f) \eta_i. \quad (4.8)$$

Subtraindo (4.3) de (4.8), temos

$$\sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\mu_i}{\mu_{m+1}} \right) (R_i \circ f) - R_i \right] \eta_i = 0.$$

Utilizando independência linear dos η_i 's sobre $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$ segue

$$\frac{\mu_i}{\mu_{m+1}}(R_i \circ f) = R_i.$$

Obtendo assim o resultado esperado pois pelo menos uma das funções racionais R_i é não constante. $\square$

Exemplo 4.2.2 *Considere o endomorfismo*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2, y^2, z^2). \end{aligned}$$

Observe que os eixos coordenados $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{z = 0\}$ são totalmente invariantes por g . De fato, considere $W = \{x = 0\}$, observe que

$$g^{-1}(W) = \{x \in \mathbb{C}^3 : g(x) \in W\}.$$

Daí, dado $p \in g^{-1}(W)$, temos

$$g(p) \in W \Rightarrow g(p) = (0, y, z) \Rightarrow p = (0, y_1, z_1), \text{ onde } y_1^2 = y \text{ e } z_1^2 = z.$$

Portanto, $g^{-1}(W) \subset W$.

Seja $q = (0, y_2, z_2) \in W$, temos então $g(q) = (0, y_2^2, z_2^2)$, ou seja, $g(q) \in W$. Daí, por definição $q \in g^{-1}W$. Concluindo assim que $W \subset g^{-1}(W)$. Portanto temos $g^{-1}(W) = W$.

Para os eixos $\{y = 0\}$ e $\{z = 0\}$ o raciocínio é análogo.

Neste caso o número de hipersuperfícies totalmente invariantes é 3, e todas as funções racionais Φ tais que $\Phi \circ g = \alpha \Phi$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ são de fato constantes.

Capítulo 5

Integrabilidade de Darboux para campos

Neste capítulo estudamos o teorema de integrabilidade de Darboux. Estudamos as condições para a existência de uma integral primeira racional para um dado campo de vetores polinomiais. A demonstração que apresentaremos do teorema de Darboux foi feita por M. Corrêa Jr em [9]. J. Llibre e Zhang em [20] mostraram esse resultado usando técnicas diferentes.

Após essa discussão, veremos a definição e alguns resultados sobre Curva extática, conceito este introduzido por J. V. Pereira, C. Christopher e J. Llibre em [22]. Apresentaremos um exemplo de duas cotas, ótimas, sobre o número de hipersuperfícies invariantes por um campo polinomial. Essas cotas estão em função dos graus da folheação e das curvas. Utilizamos para isso as referências [8] e [22].

O resultado principal desse capítulo segue abaixo:

Teorema 5.0.3 *Seja X um campo de vetores polinomiais em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ de grau d . Se X admite*

$$\binom{d+n-1}{n} + n$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então X admite uma integral primeira racional.

Antes de prová-lo veremos algumas definições e alguns resultados importantes.

5.1 Campos de vetores polinomiais e Integrais primeiras racionais

Um campo de vetores polinomiais em $\mathbb{C}^n$ de grau d é da forma

$$\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

onde $P_i \in \mathbb{C}[z]$ e $d = \max\{\deg(P_i), i = 1, \dots, n\}$. Escreveremos por simplicidade $\mathbb{C}[z]$ ao invés de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

Definição 5.1.1 *Seja $V(f)$ uma hipersuperfície algébrica em $\mathbb{C}^n$ e X um campo de vetores polinomiais. Dizemos que V é invariante por X se $df(X)|_V \equiv 0$.*

A invariância de V por X significa que $X(p) \subset T_p V_{reg}$, onde $V_{reg} = V \setminus \text{Sing}(V)$ é a parte regular de V .

Proposição 5.1.2 *Seja $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$ e X um campo de vetores polinomiais invariantes de grau d . Então, V é invariante por X se, e somente se, existe um polinômio $h_f \in \mathbb{C}[z]$, de grau $d - 1$ tal que $X(f) = h_f f$.*

Demonstração: Esta proposição é uma consequência do teorema dos zeros de Hilbert.

Com efeito, seja $X = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ um campo de vetores polinomiais, onde $P_i \in \mathbb{C}[z]$. Temos então que

$$df(X) = X(f) = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial f}{\partial z_i}. \quad (5.1)$$

Suponha que V é invariante por X . Assim

$$0 = df(X)|_V = \left(\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) |_V. \quad (5.2)$$

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert e pela irreduzibilidade de V resulta que

$$\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \in \langle f \rangle. \quad (5.3)$$

Logo,

$$X(f) = h_f \cdot f.$$

Observe que se o grau de f igual a m então

$$\begin{aligned} d + (m - 1) &= \text{grau}(X(f)) \\ &= \text{grau}(h_f \cdot f) \\ &= \text{grau}(h_f) + \text{grau}(f) \\ &= \text{grau}(h_f) + m. \end{aligned}$$

Segue que $\text{grau}(h_f) = (d - 1)$. □

Definição 5.1.3 *Seja $R = P/Q \in \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$ uma função racional. Considere o pencil de hipersuperfícies induzido por R dado por $\{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Dizemos que R é uma integral primeira racional para X se $V_\lambda = \{P - \lambda Q = 0\}$ é invariante por X para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Corolário 5.1.4 *Seja R uma função racional. Então R é uma integral primeira de X se, e somente se, $X(R) \equiv 0$.*

Demonstração: Considere $X(R) = S/T$, onde $S, T \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Temos então

$$\begin{aligned}
\frac{S}{T} &= X(R) \\
&= X(R - \lambda) \\
&= X\left(\frac{P}{Q} - \lambda\right) \\
&= X\left(\frac{P - \lambda Q}{Q}\right) \\
&= \frac{QX(P - \lambda Q) - (P - \lambda Q)X(Q)}{Q^2} \\
&= \frac{(P - \lambda Q)h_\lambda Q - X(Q)(P - \lambda Q)}{Q^2} \\
&= (P - \lambda Q) \left(\frac{Qh_\lambda - X(Q)}{Q^2} \right). \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Logo, teremos $S = T \cdot (P - \lambda Q) \left(\frac{Qh_\lambda - X(Q)}{Q^2} \right)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Como existem infinitos λ 's, temos que S é o polinômio identicamente nulo. Segue então que $X(R) \equiv 0$. Reciprocamente se $X(R) \equiv 0$ temos

$$\begin{aligned}
X(R) \equiv 0 &\Rightarrow X(R - \lambda) = 0 \\
&\Rightarrow X\left(\frac{P}{Q} - \lambda\right) = 0 \\
&\Rightarrow X\left(\frac{P - \lambda Q}{Q}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{QX(P - \lambda Q) - (P - \lambda Q)X(Q)}{Q^2} = 0 \\
&\Rightarrow X(P - \lambda Q) = (P - \lambda Q) \frac{X(Q)}{Q}.
\end{aligned}$$

Logo, pela proposição 5.1.2 V_λ é invariante por X , para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Proposição 5.1.5 *Seja $X = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ e considere a n -forma $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n$. Então*

$$i_X(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} P_i \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_n.$$

Onde $\hat{\eta}_i$ significa a omissão do termo η_i .

Demonstração: Faremos essa demonstração por indução. Sejam o campo $X = P_1\eta_1 + P_2\eta_2$ e a 2-forma $\eta_1 \wedge \eta_2$. Segue então pelas propriedades de produto interior que

$$i_X(\eta_1 \wedge \eta_2) = (i_X(\eta_1)) \wedge \eta_2 + (-1)\eta_1 \wedge (i_X(\eta_2)) = P_1\eta_2 - P_2\eta_1.$$

Suponha que o resultado seja válido para $X = \sum_{i=1}^{k-1} P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ e para a $(k-1)$ -forma $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{k-1}$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$i_X(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} P_i \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_{k-1}.$$

Então, para k

$$\begin{aligned} i_X(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) &= (i_X(\eta_1)) \wedge (\eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k) + (-1)\eta_1 \wedge (i_X(\eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k)) \\ &= (i_X(\eta_1)) \wedge (\eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k) + \eta_1 \wedge \left(\sum_{i=2}^k (-1)^i P_i \eta_2 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_k \right) \\ &= P_1\eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k + (-1)\eta_1 \wedge \left(\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} P_i \eta_2 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} P_i \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_k. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução segue o resultado. $\square$

Lema 5.1.6 *Seja X um campo de vetores polinomiais em $\mathbb{C}^n$ e $\eta_1, \dots, \eta_n$ 1-formas racionais tais que $\eta_i(X) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$. Então $\eta_1, \dots, \eta_n$ são $\mathbb{C}(z)$ -linearmente dependentes.*

Demonstração: Suponha $\eta_1, \dots, \eta_n$ são $\mathbb{C}(z)$ -linearmente independentes. Então existe uma função racional $R \neq 0$ tal que

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n = R dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

De fato, $\eta_i = \sum R_{ij} dz_j$, onde $R_{ij} \in \mathbb{C}(z)$. Fazendo o produto exterior de $\eta_1, \dots, \eta_n$, temos

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n = R dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \text{ onde } R = \det[R_{ij}].$$

Contraindo $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n$ na direção de $X = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ resulta

$$i_X(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n) = \underbrace{i_X(\eta_1) \wedge (\widehat{\eta_1} \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_n)}_0 + (-1)^1 \eta_1 \wedge \underbrace{i_X(\widehat{\eta_1} \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_n)}_{(*)}.$$

Observe que (*) será igual a zero. Basta usar indução de forma semelhante ao que foi feito na proposição (5.1.5).

Utilizando a linearidade da contração,

$$(i_X R dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) = R i_X(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n).$$

Daí

$$R i_X(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Como $R \neq 0$ e utilizando a proposição 5.1.5, temos

$$(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1 \Rightarrow}^n (-1)^{i-1} P_i dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_n = 0.$$

Isto significa, que

$$P_1 = \dots = P_n = 0.$$

Isto é, $X \equiv 0$. Absurdo. □

5.2 Prova do Teorema 5.0.3

Relembrando o teorema:

Teorema 5.0.3: *Seja X um campo de vetores polinomiais em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ de grau d . Se X admite*

$$\binom{d-1+n}{n} + n$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então X admite uma integral primeira racional.

Demonstração: Denote por $\mathbb{C}_{d-1}[z]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau $d-1$. A dimensão de $\mathbb{C}_{d-1}[z]$ é dada por

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{d-1}[z] = N := \binom{d-1+n}{n}.$$

Sejam $f_1, \dots, f_{N+n}$ equações definindo hipersuperfícies irredutíveis invariantes por X . Segue da proposição 5.1.2 que

$$\frac{df_j}{f_j}(X) = h_{f_j} \in \mathbb{C}_{d-1}[z], j = 1, \dots, N+n.$$

Como $N = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{d-1}[z])$ seguem as seguintes relações

$$\sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} h_{f_j} = 0, i = 1, \dots, n, \quad (5.4)$$

onde $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. Além disso, podemos supor que $\lambda_{ii} \neq 0$. Definamos as 1-formas racionais

$$\eta_i = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} \frac{df_j}{f_j}, i = 1, \dots, n.$$

Denotemos por $|\eta_i|_\infty$ o conjunto de polos de η_i . Por construção

$$|\eta_i|_\infty \subset \bigcup_{j=i}^{N+i} \{f_j = 0\}.$$

Contraindo na direção de X e usando (5.4) temos

$$\eta_i(X) = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} \frac{df_j}{f_j}(X) = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} h_{f_j} = 0; i = 1, \dots, n.$$

Segue do lema (5.1.6) que as 1-formas invariantes racionais $\eta_1, \dots, \eta_n$ são linearmente dependentes sobre as funções racionais $\mathbb{C}(z)$. Seja V o espaço $\mathbb{C}(z)$ -linear gerado por $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$. Suponha que $\dim_{\mathbb{C}(z)} V = k$ e que

$$V = \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle_{\mathbb{C}(z)}.$$

Existem funções racionais $R_1, \dots, R_k \in \mathbb{C}(z)$, tais que

$$\eta_{n+1} = R_1 \eta_1 + \dots + R_k \eta_k. \quad (5.5)$$

Diferenciando a equação (5.5)

$$0 = dR_1 \wedge \eta_1 + \dots + dR_k \wedge \eta_k$$

pois $d\eta_i = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} d\left(\frac{df_j}{f_j}\right) = 0$. Contraindo por X temos

$$0 = X(R_1)\eta_1 + \dots + X(R_k)\eta_k$$

Assim $X(R_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, k$. Isto é, as funções racionais $R_i, i = 1, \dots, k$, ou são integrais primeiras para o campo de vetores X ou são constantes. Resta observar que pelo menos uma função racional R_i é não constante. Se R_i , para todo $i = 1, \dots, k$, é constante segue de (5.5) que

$$|R_1\eta_1 + \dots + R_k\eta_k|_\infty = |\eta_{n+1}|_\infty.$$

Mas

$$\bigcup_{i=1}^k \{f_i = 0\} \subset |R_1\eta_1 + \dots + R_k\eta_k|_\infty \text{ e } \bigcup_{i=1}^k \{f_i = 0\} \not\subset |\eta_{n+1}|_\infty,$$

uma contradição. □

5.3 Curva Extactica

O método adotado aqui advém de um trabalho de J. V. Pereira, C. Christopher e J. Llibre [22], onde a noção de curva extactica é explorada. Temos como objetivo descrever os pontos de inflexão de ordem superior de soluções de campos de vetores.

Definição 5.3.1 *Se X é um campo de vetores em $\mathbb{C}^2$ a n -ésima curva extactica de X , $\mathcal{E}_n(X)$, é dada pela equação*

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \dots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \dots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

onde $v_1, v_2, \dots, v_l$ é uma base de $\mathbb{C}_n[x, y]$, o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial dos polinômios em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau no máximo n , e $l = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $X^0(v_i) = v_i$ e $X^j(v_i) = X^{j-1}(X(v_i))$. Um ponto onde $\mathcal{E}_n(X) = 0$ é chamado um *ponto de n -inflexão* do campo de vetores X .

Pelas propriedades do determinante notamos que a definição de curva extactica é independente da escolha da base de $\mathbb{C}_n[x, y]$, o espaço de polinômios sobre $\mathbb{C}$ de grau no máximo n . Um ponto de 1-inflexão ou é um ponto crítico do campo de vetores, ou a trajetória no ponto tem um ponto de inflexão no sentido usual. Isto é, ele tem um ponto de interseção tripla com alguma reta. Em geral, dada uma trajetória de um campo de vetores genérico em um ponto não singular, podemos encontrar uma curva de grau n que tem $\frac{n(n+3)}{2}$ interseções com a trajetória naquele ponto (i.e. o número de parâmetros efetivos de uma curva plana geral de grau n).

Um ponto de n -inflexão ou é um ponto crítico de um campo de vetores ou um ponto

onde o campo de vetores tem uma tangencia com uma curva de grau n naquele ponto que é maior que $\frac{n(n+3)}{2}$. Isto pode ser visto se considerarmos a expansão em série de Taylor para a evolução no tempo de uma função de x e y ao longo da trajetória iniciada no ponto (x_0, y_0) :

$$F(x(t), y(t)) = F(x_0, y_0) + X(F)|_{(x_0, y_0)}t + X^2(F)|_{(x_0, y_0)}\frac{t^2}{2} + \cdots \quad (5.7)$$

No nosso caso, a função F é uma curva de grau n e portanto uma combinação linear da primeira linha da matriz extactica no ponto (x_0, y_0) . De fato, os outros coeficientes da série de Taylor (5.7) são dados por alguma combinação linear de outras linhas da matriz extactica em (x_0, y_0) . Assim o determinante da matriz extactica anula-se em (x_0, y_0) se, e somente se, podemos encontrar uma combinação linear de suas colunas que é zero, e isto é o mesmo que encontrar uma combinação linear de monômios de grau n ou menor para que os primeiros $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ termos na série acima se anule.

Proposição 5.3.2 *Toda curva algébrica de grau n invariante pelo campo de vetores X é um fator de $\mathcal{E}_n(X)$.*

Demonstração: Seja f uma curva algébrica invariante de grau n . Como a definição de curva extactica é independente da escolha da base de $\mathbb{C}_n[x, y]$, consideremos $v_1 = f$. Note que $X^i(f) = h_i f$ para todo i , onde $h_i \in \mathbb{C}[x, y]$ e o grau de h_i é no máximo $n-1$ pois f é invariante por X . Dessa forma, temos f um fator de $\mathcal{E}_n(X)$ pois f divide todo elemento na primeira coluna da matriz correspondente. $\square$

Teorema 5.3.3 *Seja X um campo de vetores em $\mathbb{C}^2$. Então $\mathcal{E}_n(X) = 0$ e $\mathcal{E}_{n-1}(X) \neq 0$ se, e somente se, X admite uma integral primeira racional.*

Demonstração: Seja $R = \frac{P}{Q}$ tal integral primeira, então as curvas de nível da integral primeira, $\left\{ \frac{P}{Q} = \lambda \right\}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, são curvas invariantes por X . Pela proposição (5.3.2), elas são fatores da extactica $\mathcal{E}_n(X)$. Como existem um número infinito destas curvas, temos $\mathcal{E}_n(X) \equiv 0$.

Reciprocamente, se $\mathcal{E}_n(X) \equiv 0$ então as linhas da matriz extactica são linearmente dependentes, e assim existem funções racionais $\alpha_i \in \mathbb{C}(x, y)$ tais que

$$\mathcal{N}_j := \sum_{i=1}^k \alpha_i X^j(v_i) = 0, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad (5.8)$$

com $k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Agora, tome k o menor valor tal que existem funções racionais α_i para $i = 1, \dots, k$,

não todas nulas, e $v_i \in \mathbb{C}_n[x, y]$ para $i = 1, \dots, k$ linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, tais que (5.8) acontece. Observando que a dimensão de $\mathbb{C}_n[x, y]$ é $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ teremos $k \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ e $k > 1$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\alpha_k = 1$.

Agora, notemos que $\mathcal{N}_{j+1} := \sum_{i=1}^k \alpha_i X^{j+1}(v_i) = 0$, $j = 0, \dots, k-2$, daí

$$\begin{aligned} X(\mathcal{N}_j) - \mathcal{N}_{j+1} &= \sum_{i=1}^k [X(\alpha_i)X^j(v_i) + \alpha_i X^{j+1}(v_i)] - \sum_{i=1}^k \alpha_i X^{j+1}(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^k X(\alpha_i)X^j(v_i) = 0 \quad j = 0, \dots, k-2. \end{aligned}$$

Da minimalidade de k , vemos que os termos $X(\alpha_i)$ são todos nulos. Portanto, cada um dos α_i ou são uma integral primeira racional ou constantes. Porém, se todos os α_i são constantes, então

$$\mathcal{N}_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \dots + \alpha_k v_k = 0$$

é uma relação não trivial em x e y que não é possível. Assim, pelo menos um dos α_i será uma integral primeira racional do campo de vetores X . $\square$

A demonstração do Teorema acima pode ser adaptada para campos de vetores em $\mathbb{C}^n$.

A prova dos resultados abaixo podem ser encontradas em [8]. As estimativas são calculadas usando a proposição 5.3.2 e o grau da extactica.

Teorema 5.3.4 *Suponha o campo de vetores polinomial afim $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, com $\text{grau} Y_i = d$, $1 \leq i \leq n$, tendo finitas hipersuperfícies invariantes. Então*

1. O número de hipersuperfícies invariantes de Y , contando multiplicidade, é no máximo

$$nd + \binom{n}{2}(d-1) \quad (5.9)$$

Teorema 5.3.5 *Seja $\mathcal{F}_X$ uma folheação holomorfa 1-dimensional em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ com $\text{grau} \mathcal{F}_X = d$. Suponha que $\mathcal{F}_X$ não admite integral primeira racional. Então:*

1. O número de hipersuperfícies irredutíveis invariantes por $\mathcal{F}_X$ de grau k , contando multiplicidades, é no máximo

$$\binom{n+k}{k} + \frac{1}{k} \binom{n+k}{2} (d-1)$$

2. Para o caso de $k = 1$

$$(n+1) + \binom{n+1}{2} (d-1) = \left[nd + \binom{n}{2} (d-1) \right] + 1 = (5.9) + 1 \quad (5.10)$$

Corolário 5.3.6 Seja $\mathcal{F}_X$ uma folheação holomorfa 1-dimensional em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de grau $\mathcal{F}_X = d$ e suponha que $\mathcal{F}_X$ não admite integral primeira racional. Então o número de hipersuperfícies invariantes por $\mathcal{F}_X$ que contém um l -plano fixo, $0 \leq l \leq n-1$, é limitado por

$$n-l + \binom{n-l}{2} (d-1). \quad (5.11)$$

Exemplo: Este exemplo mostrará que as cotas

$$(n+1) + \binom{n+1}{2} (d-1) = \left[nd + \binom{n}{2} (d-1) \right] + 1$$

e

$$n-l + \binom{n-l}{2} (d-1),$$

respectivamente, [5.10] e [5.11] são optimais. Considere os campos de vetores definidos em coordenadas afim $z_0 = 1$, por

$$X_0 = \sum_{i=1}^n z_i (z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (5.12)$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n z_i (z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (5.13)$$

$$X_l = \sum_{j=1}^l (z_1^d + \cdots + \hat{z_j^d} + \cdots + z_l^d) \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{i=l+1}^n z_i (z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_i}, 2 \leq l \leq n-1. \quad (5.14)$$

Observemos que

$$z_i^{d-1} - z_j^{d-1} = (z_i - z_j)(z_i + z_j\xi) \cdot \dots \cdot (z_i + z_j\xi^{d-2}), \quad (5.15)$$

onde $\xi^d = 1$ e $1 \leq i < j \leq n$.

Como

$$\begin{aligned} X_0(z_j) &= \sum_{i=1}^n z_i (z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial z_j}{\partial z_i} \\ &= z_j (z_j^{d-1} - 1), \end{aligned}$$

para $0 \leq j \leq n$, e

$$\begin{aligned} X_0(z_i + z_j\xi^k) &= X_0(z_i - z_j(-\xi^k)) \\ X_0(z_i - z_j(-\xi^k)) &= \sum_{l=1}^n z_l (z_l^{d-1} - 1) \frac{\partial (z_i - z_j(-\xi^k))}{\partial z_l} \\ &= z_i(z_i^{d-1} - 1) - z_j(z_j^{d-1} - 1)(-\xi^k) \\ &= (z_i^d - z_i) - (z_j^d - z_j)(-\xi^k) \\ &= [(z_i^d - z_j^d(-\xi^k)) - (z_i^d - z_j^d(-\xi^k))] \\ &= (z_i - z_j(-\xi^k))(z_i^{(d-1)} + z_i^{(d-2)}z_j(-\xi^k) + \dots + \\ &\quad + z_i z_j^{(d-2)}(-\xi)^{(d-2)k} + z_j^{(d-1)}) - (z_i - z_j(-\xi^k)) \\ &= (z_i - z_j(-\xi^k))[(z_i^{(d-1)} + z_i^{(d-2)}z_j(-\xi^k) + \dots + \\ &\quad + z_i z_j^{(d-2)}(-\xi)^{(d-2)k} + z_j^{(d-1)}) - 1] \end{aligned} \quad (5.16)$$

para $1 \leq i < j \leq n$ e $0 \leq k \leq d-1$, temos $n+1 + \binom{n+1}{2}(d-1)$ hipersuperfícies invariantes pelo campo X_0 . Isto mostra que a cota dada em (5.10) é optimal.

O campo de vetores X_0 deixa invariante as $n + \binom{n}{2}(d-1)$ hipersuperfícies

$$z_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad z_i^{d-1} - z_j^{d-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (5.17)$$

Basta um cálculo semelhante ao feito em (5.16) para verificar esse fato. X_1 deixa invariante a reta $\mathbb{L}^1 = \{z_2 = \dots = z_n = 0\}$, que é a base local do sistema linear

$\sum_{j=2}^n \lambda_j z_j$. Com efeito,

$$\begin{aligned} X_1(z_i) &= \frac{\partial z_i}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n z_i (z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial z_i}{\partial z_i} \\ &= z_i (z_i^{d-1} - 1), \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Além disso, as $n - 1 + \binom{n-1}{2}(d-1)$ hipersuperfícies listadas abaixo são invariantes por X_1 e contém $\mathbb{L}^1$:

$$z_j = 0, \quad 2 \leq j \leq n, \quad z_i^{d-1} - z_j^{d-1} = 0, \quad 2 \leq i < j \leq n. \quad (5.18)$$

Novamente utilizando um cálculo semelhante ao feito em (5.16) verifica-se a invariância por X_1 .

Quanto a X_l , $2 \leq l \leq n - 1$ o l -plano $\mathbb{L}^l = \{z_{l+1} = \dots = z_n = 0\}$ é deixado invariante, assim como as $n - l + \binom{n-l}{2}(d-1)$ hipersuperfícies, que contém todos $\mathbb{L}^l$:

$$z_j = 0, \quad l + 1 \leq j \leq n, \quad z_i^{d-1} - z_j^{d-1} = 0, \quad l + 1 \leq i < j \leq n. \quad (5.19)$$

Assim (5.17), (5.18) e (5.19) mostram que (5.11) é optimal para, $0 \leq l \leq n - 1$.

Capítulo 6

Integrabilidade Algébrica de r -formas polinomiais diferenciais

Este capítulo é dedicado ao estudo do artigo [7], no qual, M. Corrêa Jr, L. G. Maza e M. G. Soares demonstram um teorema de integrabilidade algébrica do tipo Darboux-Jouanolou para as r -formas diferenciais polinomiais. Definiremos a álgebra exterior das r -formas diferenciais polinomiais e veremos algumas propriedades da mesma. Em seguida, utilizaremos novamente o Teorema dos Zeros de Hilbert para demonstrar importantes resultados para a conclusão do teorema principal deste capítulo. Apresentaremos também a definição de integral primeira para uma r -forma e uma caracterização da mesma. Finalizamos este capítulo com a demonstração do teorema principal.

Teorema 6.0.7 *Considere o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ e ω uma r -forma polinomial de grau d em $\mathbb{C}^n$. Se ω admite*

$$\binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{r+1} + r + 1$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então ω admite uma integral primeira racional.

Como corolários temos,

Corolário 6.0.8 (Jouanolou). *Seja ω uma 1-forma polinomial de grau d em $\mathbb{C}^n$. Se ω admite*

$$\binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{2} + 2$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então ω admite uma integral primeira racional.

Mostraremos em seguida que o teorema 5.0.3 do capítulo anterior segue como um corolário do teorema 6.0.7.

Corolário 6.0.9 *Seja X um campo de vetores polinomiais de grau d em $\mathbb{C}^n$. Se X admite*

$$\binom{d-1+n}{n} + n$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então X admite uma integral primeira racional.

Demonstração: Em $\mathbb{C}^n$, tome um campo de vetores polinomiais $X = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ de grau d . Seja a n -forma $\omega = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. Fazendo a contração de ω na direção de X , temos a $(n-1)$ -forma

$$i_X(\omega) = \omega_X = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} P_i dz_1 \wedge \dots \widehat{dz_i} \dots \wedge dz_n.$$

Considere $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície invariante por X . Temos então que

$$\begin{aligned} \omega_X \wedge df &= \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} P_i dz_1 \wedge \dots \widehat{dz_i} \dots \wedge dz_n \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \right) \\ &= (-1)^{i-1} \left(P_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + P_n \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) dz_1 \wedge \dots \widehat{dz_i} \dots \wedge dz_n \\ &= (-1)^{n-1} X(f) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n. \end{aligned}$$

Esta forma tem a propriedade que uma hipersuperfície algébrica $V = \{f = 0\}$ é invariante por X se, e somente se, ela é ω_X -invariante.

De fato, $V = \{f = 0\}$ é invariante por X se, e somente se,

$$X(f) = h \cdot f.$$

Segue que

$$(\omega_X \wedge df) = f \cdot (h \cdot dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n).$$

Observe que ω_X admite

$$\begin{aligned} \binom{d-1+n}{n} + n &= \binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{n} + n \\ &= \binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{(n-1)+1} + (n-1) + 1 \end{aligned}$$

hipersuperfícies algébricas invariantes. Portanto, utilizando o teorema (3.1) segue o resultado. $\square$

6.1 r -formas diferenciais polinomiais em $\mathbb{C}^n$

Considere a álgebra exterior de r -formas polinomiais em $\mathbb{C}^n$ dada por

$$\Omega^r(n) := A_r(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}[z],$$

onde $A_r(\mathbb{C}^n)$ é o espaço das formas r -lineares alternadas em $\mathbb{C}^n$. Seja S_d o subespaço de $\mathbb{C}[z]$ de polinômios de grau $\leq d$. A álgebra $\Omega^r(n)$ é naturalmente graduada:

$$\Omega^r(n) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Omega_d^r(n),$$

onde $\Omega_d^r(n) = A_r(\mathbb{C}^n) \otimes S_d$. Note que $\Omega_d^r(n)$ é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão finita com

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_d^r(n)) = \binom{d+n}{n} \cdot \binom{n}{r}$$

De fato, note que $A_r(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}^{\binom{n}{r}}$, daí

$$\begin{aligned} \Omega_d^r(n) &= A_r(\mathbb{C}^n) \otimes S_d \\ &\simeq \mathbb{C}^{\binom{n}{r}} \otimes S_d \\ &\simeq S_d^{\oplus \binom{n}{r}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_d^r(n) = \dim_{\mathbb{C}} S_d^{\oplus \binom{n}{r}} = \binom{n}{r} \cdot \dim_{\mathbb{C}} S_d.$$

Como $\dim_{\mathbb{C}} S_d = \binom{d+n}{n}$, temos

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_d^r(n)) = \binom{d+n}{n} \cdot \binom{n}{r}.$$

Tomando uma r -forma polinomial ω ,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} P_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r},$$

definamos o grau de ω por

$$\text{grau}(\omega) = \max\{\text{grau}(P_{i_1, \dots, i_r}), 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}.$$

Se $\omega \in \Omega_d^r(n)$, então $P_{i_1, \dots, i_r} \in S_d$.

Definição 6.1.1 *Seja $\omega \in \Omega^r(n)$. Defina o $\mathbb{C}(z)$ -subespaço vetorial $\mathcal{E}^*(\omega)$ de $\Omega^1(n) \otimes \mathbb{C}(z)$ por*

$$\mathcal{E}^*(\omega) = \{\eta \in \Omega^1(n) \otimes \mathbb{C}(z); \omega \wedge \eta = 0\}.$$

Lema 6.1.2 *Seja $\omega \in \Omega^r(n)$. Se existem r elementos $\eta_1, \dots, \eta_r \in \mathcal{E}^*(\omega)$ que são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$, então existe $R \in \mathbb{C}(z)$ tal que*

$$\omega = R\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r.$$

Demonstração: Considere a $\mathbb{C}(z)$ -base $\{\eta_1, \dots, \eta_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_M\}$ de $\Omega^1(n) \otimes \mathbb{C}(z)$ obtida pelo complemento de $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ para uma $\mathbb{C}(z)$ -base, onde $M = \dim_{\mathbb{C}(z)} \Omega^1(n) \otimes \mathbb{C}(z)$. Escreva

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq M} R_{i_1, \dots, i_r} \eta_{i_1} \wedge \dots \wedge \eta_{i_r},$$

pois $\omega \in \Omega^r(n)$. Como $\omega \wedge \eta_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, r$, temos assim $\omega = R_{1, \dots, r} \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r$.

□

6.2 Hipersuperfícies invariantes e integral primeira racional

Definição 6.2.1 *Seja $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície algébrica em $\mathbb{C}^n$ e $\omega \in \Omega^r(n)$ uma r -forma polinomial. V é invariante por ω se $(\omega \wedge df)|_V \equiv 0$.*

Suponha que $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$, com $\omega_i \in \Omega^1(n)$, $i = 1, \dots, r$. ω induz uma (possivelmente singular) distribuição de $(n - r)$ -planos $\mathfrak{D}_\omega^{n-r}$ por $\bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\omega_i)$, $i = 1, \dots, r$. Como

$$\text{Ker}(\omega_i) = \{v \in T_p \mathbb{C}^n; \omega_i(v) = 0\}$$

segue que

$$Ker(\omega) = \bigcap_{i=1}^r Ker(\omega_i).$$

A invariância de V por ω significa que $\mathfrak{D}_\omega(x) \subset T_x V_{reg}$, onde $V_{reg} = V \setminus Sing(V)$ é a parte regular de V .

Proposição 6.2.2 *Uma hipersuperfície V é invariante por ω se, e somente se, existe $\Theta_f \in \Omega_{d-1}^{r+1}$ tal que $\omega \wedge df = f\Theta$.*

Demonstração: Como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq r} P_{i_1, \dots, i_r} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{i_r}$$

temos

$$\omega \wedge df = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1, \dots, i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}}.$$

Daí,

$$(\omega \wedge df)|_V \equiv 0 \Rightarrow a_{i_1, \dots, i_r}|_V = 0 \Rightarrow a_{i_1, \dots, i_r} \in \langle f \rangle.$$

Portanto,

$$\omega \wedge df = \sum f h \cdot dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{r+1} = f \sum h \cdot dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{r+1} = f \cdot \Theta_f,$$

onde $h \in S_{d-1}$. Logo, existe $\Theta_f \in \Omega_{d-1}^{r+1}$ que satisfaz a igualdade desejada. A recíproca é imediata. $\square$

Definição 6.2.3 *Seja $R = P/Q \in \mathbb{C}(z)$ uma função racional não constante e considere o pencil $\{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Chamamos R uma integral primeira racional para ω se $V_\lambda = \{P - \lambda Q = 0\}$ é invariante por ω para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Segue uma caracterização para integral primeira.

Lema 6.2.4 *Seja $R \in \mathbb{C}(z)$ uma função racional não constante. Então R é uma integral primeira de ω se, e somente se, $dR \in \mathcal{E}^*(\omega)$.*

Demonstração: Considere

$$\omega \wedge dR = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} a_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}},$$

onde $a_{i_1 \dots i_r} \in \mathbb{C}[z]$. Seja $R = P/Q$ uma integral primeira para ω . Então

$$\begin{aligned} \sum a_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}} &= \omega \wedge dR \\ &= \omega \wedge d(R - \lambda) \\ &= \omega \wedge d\left(\frac{P}{Q} - \lambda\right) \\ &= \omega \wedge d\left(\frac{P - \lambda Q}{Q}\right) \\ &= \frac{\omega \wedge d(P - \lambda Q)Q - (P - \lambda Q)dQ}{Q^2} \\ &= \frac{\omega \wedge d(P - \lambda Q)Q - (\omega \wedge dQ)(P - \lambda Q)}{Q^2} \\ &= \frac{(P - \lambda Q)\Theta_\lambda Q - (\omega \wedge dQ)(P - \lambda Q)}{Q^2} \\ &= (P - \lambda Q) \frac{(Q\Theta_\lambda - \omega \wedge dQ)}{Q^2}. \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\Theta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} b_{i_1 \dots i_{r+1}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}}.$$

com $b_{i_1 \dots i_{r+1}} \in \mathbb{C}[z]$. Assim

$$\omega \wedge dQ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} c_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r},$$

onde $c_{i_1 \dots i_r} \in \mathbb{C}[z]$. Temos

$$\begin{aligned}\omega \wedge dR &= \sum a_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}} \\ &= \frac{(P - \lambda Q) [(\sum Q b_{i_1, \dots, i_{r+1}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}}) - (\sum c_{i_1, \dots, i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}})]}{Q^2}.\end{aligned}$$

Segue que, para $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

$$a_{i_1 \dots i_r} = (P - \lambda Q) \cdot \frac{\sum Q b_{i_1 \dots i_{r+1}} - \sum c_{i_1, \dots, i_r}}{Q^2}$$

Portanto $a_{i_1 \dots i_r} = 0$, para $1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n$, pois $P - \lambda Q$ são fatores de $a_{i_1 \dots i_r}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo

$$\omega \wedge dR = \sum a_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{r+1}} \equiv 0.$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned}\omega \wedge dR = 0 &\Rightarrow \omega \wedge d(R - \lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \omega \wedge d\left(\frac{P}{Q} - \lambda\right) = 0 \\ &\Rightarrow \omega \wedge d\left(\frac{P - \lambda Q}{Q}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\omega \wedge d(P - \lambda Q)Q - (P - \lambda Q)dQ}{Q^2} = 0 \\ &\Rightarrow \omega Q \wedge d(P - \lambda Q) = (P - \lambda Q)dQ \\ &\Rightarrow \omega \wedge d(P - \lambda Q) = (P - \lambda Q)\frac{dQ}{Q}.\end{aligned}$$

Segue da proposição 6.2.2 que V_λ é invariante por ω para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Isto mostra que R é integral primeira. $\square$

6.3 Prova do Teorema 6.0.7

Demonstração: Seja

$$N = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{d-1}^{r+1}(n) = \binom{d-1+n}{n} \binom{n}{r+1}.$$

Suponha que $\omega \in \Omega^r(n)$ admite $N + r + 1$ hipersuperfícies irredutíveis invariantes definidas em $\mathbb{C}^n$ pelos polinômios, $f_1, \dots, f_{N+r+1}$. Então pela proposição 6.2.2, para cada $i \in I_{N+r+1} = \{1, \dots, N + r + 1\}$, existem $\Theta_{f_i} \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$ tais que

$$\omega \wedge df_i = f_i \cdot \Theta_{f_i}. \quad (6.1)$$

Como $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{d-1}^{r+1}(n) = N$, para cada $k = 1, \dots, r + 1$, podemos escolher números $\lambda_k^k, \dots, \lambda_{k+l}^k, \dots, \lambda_{k+N}^k \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda_k^k \neq 0$, $\lambda_{N+r+1}^{r+1} \neq 0$ e

$$\sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \cdot \Theta_{f_j} = 0. \quad (6.2)$$

De fato, como $\Theta_{f_i} \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$, os $\{\Theta_{f_k}, \dots, \Theta_{f_{N+k}}\}$ são linearmente dependentes em $\mathbb{C}$ para todo $k = 1, \dots, r + 1$. Daí se $\sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \cdot \Theta_{f_j} = 0$, existe $\lambda_i^k \in \mathbb{C}^*$, $i \in \{k, \dots, N + k\}$, que satisfaz a equação citada. Logo, podemos rearranjar os termos de tal forma que $\lambda_k^k \neq 0$ e $\lambda_{N+r+1}^{r+1} \neq 0$.

Agora, para cada $k = 1, \dots, r + 1$, defina a forma racional

$$\eta_k = \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \cdot \frac{df_j}{f_j}$$

Segue de (6.1) e (6.2) que,

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta_k &= \omega \wedge \left(\sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \frac{df_j}{f_j} \right) \\
&= \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \omega \wedge \frac{df_j}{f_j} \\
&= \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \cdot f_j \cdot \Theta_{f_j} \frac{1}{f_j} \\
&= \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \cdot \Theta_{f_j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\omega \wedge \eta_k = 0, k = 1, \dots, r + 1 \quad (6.3)$$

implicando que $\eta_k \in \mathcal{E}^*(\omega)$, para todo $k = 1, \dots, r + 1$.

Defina $\alpha_1 = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r$ e $\alpha_2 = \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{r+1}$. Temos as seguintes possibilidades:

Caso 1. $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$.

Caso 2. $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$.

Caso 1:

Observemos que $|\alpha_1|_\infty \neq |\alpha_2|_\infty$. De fato,

$$|\alpha_1|_\infty \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} \{f_i = 0\} \text{ e } |\alpha_2|_\infty \subset \bigcup_{j=2}^{k+2} \{f_j = 0\}$$

e como $\lambda_k^k \neq 0$, temos

$$\{f_1 = 0\} \subset |\alpha_1| \text{ e } \{f_1 = 0\} \not\subset |\alpha_2|.$$

onde $|\cdot|_\infty$ denota o conjunto de polos. Isto diz que α_1 e α_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$. Caso contrário, $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, implicando assim em $|\alpha_1|_\infty = |\alpha_2|_\infty$, absurdo.

Como $\omega \wedge \eta_k = 0$, $k = 1, \dots, r+1$ e utilizando o lema 6.1.2 existem $R_1, R_2 \in \mathbb{C}(z)$ tais que $\alpha_i = R_i\omega$, $i = 1, 2$. Portanto $\alpha_1 = \frac{R_1}{R_2}\alpha_2$.

Note que as r -formas α_1 e α_2 são fechadas, pois, para todo $k = 1, \dots, r+1$ temos $d\eta_k = \sum \lambda_j^k d\left(\frac{df_i}{f_i}\right) = 0$ e daí $d\alpha_1 = d(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) = 0$, análogamente $d\alpha_2 = 0$. Segue então

$$\underbrace{d\alpha_1}_0 = d\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\alpha_2\right)\right] = d\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \wedge \alpha_2 + \underbrace{\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \wedge d\alpha_2}_0 \Rightarrow d\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \wedge \alpha_2 = 0$$

e com isso segue que $d\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \wedge \omega = 0$. Além disso, como α_1 e α_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, $R = \frac{R_1}{R_2}$ não é constante. Dessa forma temos que a função racional R uma integral primeira para ω .

Caso 2:

Suponha que $\alpha_1 = 0$. Seja m o maior natural tal que $\eta_1, \dots, \eta_m$ sejam linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Seja,

$$\eta_{m+1} = \sum_{i=1}^m R_i \cdot \eta_i \quad (6.4)$$

com $R_1, \dots, R_m \in \mathbb{C}(z)$. Como η_i é fechado para todo $i = 1, \dots, m+1$, diferenciando a equação (6.4)

$$0 = \sum_{i=1}^m dR_i \wedge \eta_i. \quad (6.5)$$

Então, para cada $j \in I_m = \{1, \dots, m\}$, multiplicando (6.5) por $\eta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \dots \wedge \eta_m$ teremos

$$0 = \left(\sum_{i=1}^m dR_i \wedge \eta_i \right) \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \dots \wedge \eta_m = (-1)^{j+1} dR_j \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_m. \quad (6.6)$$

Como $\eta_1, \dots, \eta_m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$, a igualdade (6.6) nos diz que existem $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}(z)$ tais que $dR_j = \sum_{i=1}^m g_i \cdot \eta_i$. Por (6.3) temos

$$dR_j \wedge \omega = \sum_{i=1}^m g_i \cdot \eta_i \wedge \omega = 0.$$

Além disso, de (6.4) e do lema de Jouanolou, que afirma que as $\eta_{i's}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que R_{i_0} não é constante. Isto é, R_{i_0} é uma integral primeira racional para ω . O caso $\alpha_2 = 0$ é análogo. $\square$

Suponha $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \neq 0$. Segue da prova do teorema 6.0.7 que $\omega/R = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r$ é integrável pois, como vimos, existe i_0 tal que

$$dR_{i_0} \wedge (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) = 0.$$

Daí,

$$dR_{i_0} \in \mathcal{E}^*\left(\frac{\omega}{R}\right).$$

As folhas da folheação induzida por ω/R são as interseções dos níveis de funções multivaluadas $F_k = \log(f_k^{\lambda_k} \dots f_{N+k}^{\lambda_{N+k}})$, $k = 1, \dots, r$, onde $N = \binom{d+n}{n}$ $\binom{n}{r}$.

Note que $\eta_k = dF_k$. De fato, seja $F_k = \log f_k^{\lambda_k} \dots f_{N+k}^{\lambda_{N+k}}$ com $k = \{1, \dots, r\}$. Então,

$$\begin{aligned}
dF_k &= d(\log f_k^{\lambda_k^k} \cdots f_{N+k}^{\lambda_{N+k}^k}) \\
&= d(\log f_k^{\lambda_k^k} + \dots + \log f_{N+k}^{\lambda_{N+k}^k}) \\
&= d(\log f_k^{\lambda_k^k}) + \dots + d(\log f_{N+k}^{\lambda_{N+k}^k}) \\
&= \frac{\lambda_k^k f_k^{\lambda_k^k-1}}{f_k^{\lambda_k^k}} df_k + \dots + \frac{\lambda_{N+k}^k f_{N+k}^{\lambda_{N+k}^k-1}}{f_{N+k}^{\lambda_{N+k}^k}} df_{N+k} \\
&= \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \cdot \frac{df_j}{f_j} \\
&= \eta_k.
\end{aligned}$$

Neste caso, R é o que chamamos de fator de integração para ω , pois $d(\frac{\omega}{R}) = 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] *L. Ahlfors*. Complex Analysis, Third edition, McGraw-Hill, 1979.
- [2] *W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven*. Compact Complex Surfaces, Springer-Verlag, 1984.
- [3] *R. Bott; L. W. Tu*. Differential Forms in Algebraic Topology. Springer-Verlag 1982.
- [4] *R. L. Bryant, S.S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, P.A. Griffiths*. Exterior Differential Systems (Mathematical Sciences Research Institute Publications), 1991 Springer-Verlag.
- [5] *C. Camacho, A. L. Neto*. Geometric Theory of Foliations (translation of Teoria Geométrica das folheações, IMPA, 1979) Birkäuser Boston, 1985.
- [6] *S. Cantat*. Invariant hypersurfaces in holomorphic dynamics. Math. Res. Lett. 17 (2010), nº 05,833-841.
- [7] *M. Corrêa JR ; L.G. Maza ; M. G. Soares*. Algebraic integrability of polynomial differential r-forms. Journal of Pure and Applied Algebra (Print), v. 215, p. 2290-2294, 2011.
- [8] *M. Corrêa JR ; M. G. Soares*. Counting hypersurfaces invariant by one-dimensional complex foliations. London Mathematical Society Lecture Note Series, v. 308, p. 104-113, 2010.
- [9] *M. Corrêa JR*. Darboux Jouanolou Ghys integrability for one-dimensional foliations on toric varieties. Bulletin des Sciences Mathématiques (Paris. 1885), p. 693-704, 2010.
- [10] *D. Cox; J. Little; D. O'shea*. Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1991 . - 513 p.

- [11] *C. Godbillon*. Geometrie Differentielle et Mecanique Analytique. Hermann, Paris (1969).
- [12] *P. Griffiths; J. Harris*. Principles of Algebraic Geometry. Wiley Classics Library. Wiley Interscience (1978).
- [13] *R. Hartshorne*. Algebraic Geometry. Springer. 1977.
- [14] *A. Hatcher*. Algebraic Topology. Cambridge U.P., 2001.
- [15] *K. Hoffman and R. Kunze*. Linear Algebra. Prentice Hall.
- [16] *J. P. Jouanolou*. Equations de Pfaff algébriques, Lect. Notes in Math., 708, Springer-Verlag (1979).
- [17] *S. Lang*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 211 Algebra, (Rev. 3rd ed.), Springer-Verlag (2002).
- [18] *E. L. Lima*. Álgebra exterior, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [19] *E. L. Lima*. Álgebra Linear/ Elon Lages Lima. 7ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. Coleção Matemática Universitária.
- [20] *J. Llibre, X. Zhang*. Rational first integral in Darboux theory of integrability in $\mathbb{C}^n$. Bull. Sci. Math. 2010.
- [21] *J. V. Pereira*. Integrabilidade de Equações Diferenciais no Plano Complexo. LIMA: IMCA - Instituto de Matematicas y Ciencias Afines, 2001. 50 p.
- [22] *J. V. Pereira; C. Christopher ; J. Llibre*. Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields. Pacific Journal of Mathematics, v. 229, p. 63-117, 2007.
- [23] *M. Sebastiani*. Introdução à Geometria Analítica Complexa. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. ISBN 85-244-0218-0.
- [24] *M. G. Soares; R. S. Mol*. Indices de Campos Holomorfos e Aplicações. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001. v. 01. 197 p.
- [25] *L. W. Tu*. An introduction to manifolds. 2ed. Springer, 2010.