

MICHELE RIBEIRO FIDÉLIS

TEOREMA DE MORITA PARA CATEGORIA DERIVADA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

F451t Fidélis, Michele Ribeiro, 1988-
2013 Teorema de Morita para categoria derivada / Michele
Ribeiro Fidélis. – Viçosa, MG, 2013.
v, 119f. ; 29 cm.

Orientador: Sônia Maria Fernandes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 118-119.

1. Categorias (Matemática). 2. Teorema de Rickard .
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 512.62

MICHELE RIBEIRO FIDÉLIS

TEOREMA DE MORITA PARA CATEGORIA DERIVADA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de julho de 2013.

Flávio Ulhoa Coelho

Abílio Lemos Cardoso Júnior

Rogério Carvalho Picanço
(Coorientador)

Sônia Maria Fernandes
(Orientadora)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas bênçãos derramadas em todos os momentos.

Aos meus pais, José Márcio e Neusa, pelo apoio incondicional e paciência infinita.

As minhas irmãs, Marcela e Meilene, pelo carinho e incentivo.

Ao Cacado, pelo companherismo e paciência nos momentos de inquietação e cansaço.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática, com os quais muito aprendi e recebi apoio.

A minha orientadora, professora Sônia, pela orientação desde a graduação, apoio, aprendizado incauculável e amizade.

Ao professor Rogério, pela coorientação, sugestões e incentivos constantes.

Aos membros da banca, por aceitarem o convite, pelas sugestões e comentários.

Aos colegas do mestrado, as meninas da república e aos amigos que fiz em Viçosa pelos momentos vividos juntos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
INTRODUÇÃO	1
1 Conceitos Básicos	4
1.1 Categorias e Funtores	4
1.1.1 A categoria dos Λ -módulos	10
1.1.2 A categoria dos complexos	14
1.1.3 A categoria dos Bicomplexos	16
1.2 Localização de categorias aditivas	20
1.3 Limite Inverso	22
1.4 Álgebras e Quivers	23
2 Categorias trianguladas	28
2.1 Categorias Trianguladas	28
2.2 Localização de categorias trianguladas	37
2.3 Exemplo: Categoria Homotópica $\mathcal{K}(\mathcal{A})$	41
3 Categoria Derivada	56
3.1 Categoria Derivada	56
3.2 Complexos de objetos projetivos	67
4 Teorema de Morita para categoria derivada	79
4.1 Construção do funtor F entre $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$ e $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$	80
4.2 O funtor F é fiel e pleno	96
4.3 Um adjunto à direita do funtor F	99
4.4 A prova do Teorema de Morita para categoria derivada	106
5 Aplicação	113
Referências Bibliográficas	118

RESUMO

FIDÉLIS, Michele Ribeiro, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2013. **Teorema de Morita para categoria derivada.** Orientadora: Sônia Maria Fernandes. Coorientador: Rogério Carvalho Picanço.

Neste trabalho apresentamos conceitos e resultados de categorias trianguladas e derivadas. O principal objetivo é demonstrar o Teorema de Rickard, também conhecido como Teorema de Morita para categorias derivadas. Como aplicação deste resultado mostramos que a dimensão finitística é preservada por equivalência derivada, conforme o artigo “*Finiteness of finitistic dimension is invariant under derived equivalences*” de Shengyong Pan e Changchang Xi.

ABSTRACT

FIDÉLIS, Michele Ribeiro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, july, 2013.
Morita theorem for category derived. Adviser: Sônia Maria Fernandes.
Co-advisers: Rogério Carvalho Picanço.

In this work we present concepts and results of triangulated and derived categories. The main objective is to prove Rickard's theorem, also known as Morita's theorem for derived categories. As an application of this result we show that finiteness of finitistic dimension is invariant under derived equivalences, as it is proved in "*Finiteness of finitistic dimension is invariant under derived equivalences*" by Shengyong Pan and Changchang Xi.

INTRODUÇÃO

Para se estudar uma Álgebra Λ com frequência procura-se os invariantes associados, como por exemplo seu centro $Z(\Lambda)$, o seu grupo de Grothendick $K_0(\Lambda)$, seus grupos de cohomologia de Hochschild $HH^i(\Lambda), \dots$. Ao final da década de 50, uma condição necessária e suficiente para a equivalência entre as categorias de módulos foi estabelecida pelo Teorema de Morita [12]. Duas categorias de módulos $Mod\text{-}\Lambda$ e $Mod\text{-}\Gamma$ são equivalentes se, e somente se, existe um Λ -módulo finitamente gerado projetivo e gerador P_Λ tal que $\Gamma \simeq End(P_\Lambda)$. Este teorema é bastante importante quando procuramos os invariantes de uma álgebra pois se duas álgebras Λ e Γ são Morita equivalentes, ou seja, suas respectivas categorias de módulos são equivalentes, então seus respectivos invariantes são isomorfos.

Categorias derivadas de categorias abelianas foram introduzidas no início dos anos 60 por Grothendieck e Verdier no âmbito da Geometria Algébrica e da Álgebra Homológica. Rapidamente suas aplicações se estenderam a outras áreas da Matemática tais como Equações Diferenciais Parciais e Topologia (veja [1]).

Happel em [3] introduziu o conceito de categorias trianguladas e, mais especificamente, de categorias derivadas da categoria de módulos de uma álgebra, na Teoria de Representações. O passo determinante nesta direção foi a prova obtida pelo próprio Happel de que categorias derivadas são invariantes na teoria da inclinação, mais especificamente: Se Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e T é um Λ -módulo inclinante, então as categorias derivadas $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(End_\Lambda(T))$ são equivalentes como categorias trianguladas (veja [1]).

Generalizando a noção de módulo inclinante para complexo inclinante, Rickard generalizou o teorema de Happel. Uma condição necessária e suficiente para a equivalência derivada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\Gamma)$ de duas álgebras Λ e Γ foi provada por Rickard em [11]. Neste caso existe um complexo limitado $T^\bullet$ de Λ -módulos projetivos finitamente gerados, chamado complexo inclinante, tal que: para todo $n \neq 0$, $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T^\bullet, T^\bullet[n]) = 0$, $add\text{-}T^\bullet$ gera $\mathcal{K}^b(proj\text{-}\Lambda)$ com categoria triangular e $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T^\bullet) \simeq \Gamma$. Pela semelhança com o Teorema de Morita costuma-se dizer que Rickard desenvolveu uma teoria de Morita para categorias derivadas.

Como existe um “mergulho” da categoria $mod\text{-}\Lambda$ na categoria $\mathcal{D}(\Lambda)$, a categoria derivada aparece como um “lugar” maior onde $Z(\Lambda)$, $K_0(\Lambda)$, $HH^i(\Lambda), \dots$ são invariantes possuindo um importante papel em problemas de classificação. Informações homológicas de uma álgebra também são fornecidas pela categoria derivada $\mathcal{D}(\Lambda)$ de sua categoria de Λ -módulos. Por exemplo temos o isomorfismo entre $Ext_\Lambda^i(X, Y)$ e $Hom_{\mathcal{D}(\Lambda)}(X, T^i Y)$, onde T^i é o funtor translação.

Se T_Λ é um módulo inclinante para Λ , então a equivalência de categorias

derivadas é dada pelo funtor derivado à direita $Hom(T, -)$; no caso de complexo inclinante, no entanto, Γ age no complexo a menos de homotopia mas não em cada componente separadamente, assim este funtor não envia um complexo de Λ -módulos em um complexo de Γ -módulos. No artigo [10], Rickard provou, pelo menos para “álgebras suficientemente boas” (por exemplo, álgebras sobre um corpo), que ainda podemos descrever a equivalência de categorias derivadas como um funtor derivado. No entanto, para esta demonstração utiliza a construção feita em [11] (veja [10]). O principal resultado deste trabalho é o Teorema de Rickard. Para sua demonstração, optamos em estudar o artigo [11] com o intuito de escrever seus resultados com maiores detalhes. Além disso, com este artigo é possível provar que $Z(\Lambda)$, $K_0(\Lambda)$, $HH^i(\Lambda)$ são invariantes por equivalência derivada.

Dado uma álgebra Λ , a dimensão finitística de Λ denotada por $fin.dim \Lambda$ é o supremo da dimensão projetiva dos Λ -módulos finitamente gerados de dimensão projetiva finita. A conjectura da dimensão finitística da década de 60, o qual ainda está em aberto, afirma que toda álgebra de dimensão finita sobre um corpo deve ter dimensão finitística finita. Essa conjectura está intimamente relacionada com várias outras conjecturas homológicas na Teoria de Representações de Álgebras. Com o propósito de caminhar na direção da sua demonstração vários conceitos e técnicas vem sendo desenvolvidos. Em 2009, Shengyong Pan e Changchang Xi no artigo [16], provaram que a equivalência derivada preserva a finitude da dimensão finitística.

O texto está organizado da seguinte forma: No capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos e resultados de Teoria de Categorias, Álgebra Homológica e Teoria de Representações utilizados ao longo do trabalho.

No capítulo 2 nos dedicamos ao estudo das categorias trianguladas. Na literatura encontramos a definição de categorias trianguladas por meio de quatro axiomas conhecidos como $(TR1)$, $(TR2)$, $(TR3)$ e $(TR4)$. Em 2001, J.P. May no artigo [9] provou que um dos axiomas $((TR3))$ provém dos outros três. Utilizando o artigo [9] definimos categoria triangulada por meio de três axiomas. Neste capítulo também estudamos propriedades importantes que essa estrutura triangulada fornece a uma categoria. Como exemplo de categoria triangulada citamos a categoria homotópica de complexos. Tal categoria será bastante útil para a construção da categoria derivada que definiremos no próximo capítulo.

No capítulo 3 definimos a construção da categoria derivada de uma categoria abeliana. Provamos que a categoria derivada, em geral, não é abeliana mas tem estrutura de categoria triangulada e vemos propriedades básicas dessa categoria.

O principal resultado desse trabalho se encontra no capítulo 4. O teorema 4.39 trata do Teorema de Rickard. Ao longo do capítulo nos dedicamos a demonstração desse teorema. Para a demonstração, construímos um funtor entre as categorias $K^-(Proj-\Gamma)$ e $K^-(Proj-\Lambda)$. A construção desse funtor envolve várias categorias tal como a categoria $C^-(Sum-T^\bullet)$ para quem associamos algo como uma generalização de um bicomplexo de modo que podemos tomar o complexo total. Mostramos que tal funtor é fiel e pleno e tem adjunto à direita. Na seção 4 finalizamos a prova deste teorema.

Por fim, reservamos o capítulo 5 para uma aplicação do Teorema de Rickard. Utilizando o artigo [16] provamos que a finitude da dimensão finitística é preser-

vada por equivalência derivada.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos um resumo das noções básicas de Teoria de Categorias, Álgebra Homológica e Teoria de Representações de Álgebras que serão utilizados ao longo desse trabalho. Nosso objetivo aqui é fixar as notações utilizadas. As demonstrações serão omitidas mas daremos referências de textos onde maiores detalhes e demonstrações podem ser encontradas.

1.1 Categorias e Funtores

Nesta seção introduzimos a noção de Categorias, Funtores e Transformações Naturais. Em particular, a categoria dos módulos, a categoria dos complexos e a categoria dos bicomplexos. Uma exposição detalhada desses resultados podem ser encontrada em [7],[6], [8],[2] e [17].

Definição 1.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:*

1. *Uma classe de objetos $Ob\mathcal{C}$ que denotamos por A, B, C , etc.*
2. *Para todo par de objetos (A, B) existe um conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cujos elementos são chamados de morfismos. Se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um morfismo, então denotaremos por $f : A \rightarrow B$.*
3. *Para todo $A, B, C \in Ob\mathcal{C}$, temos uma composição*

$$\begin{array}{ccc} \circ : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Às vezes denotaremos a composta $g \circ f$ simplesmente por gf .

Além disso, temos:

(C1) *Se $(A, B) \neq (C, D)$ então $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$.*

(C2) *A composição de morfismos é associativa.*

(C3) *Para todo objeto A , existe $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$, chamado morfismo unidade ou identidade, tal que, $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$ para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$. O morfismo 1_A é único.*

Exemplo 1.2 1. A categoria dos conjuntos, denotado por *Sets*, tem como objetos os conjuntos e como morfismos as funções entre conjuntos.

2. A categoria dos grupos abelianos, denotada por *Ab*, tem como objetos os grupos abelianos e como morfismos os homomorfismos de grupos abelianos;

Definimos a *categoria oposta* de uma categoria $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{C}^{op}$, do seguinte modo: $Ob\mathcal{C}^{op} = Ob\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(M, N) = Hom_{\mathcal{C}}(N, M)$. E ainda se temos os morfismos $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(M, N)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(N, L)$, então $f \circ g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(M, L)$.

Em Teoria de Categorias, um *diagrama* em uma categoria $\mathcal{C}$ é um grafo cujos vértices são os objetos da categoria $\mathcal{C}$ e as flechas são os morfismos em $\mathcal{C}$. Por exemplo, dado $X \in Ob\mathcal{C}$, representaremos o morfismo identidade como o diagrama $1_X : X \longrightarrow X$ ou apenas como o diagrama $X \xlongequal{\quad} X$.

Um diagrama comutativo é um diagrama de objetos (também conhecidos vértices) e morfismos (flechas) tal que todos os seus caminhos com o mesmo início e fim levam ao mesmo resultado por composição.

Definição 1.3 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma categoria $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ se as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) A classe $Ob\mathcal{C}'$ de objetos de $\mathcal{C}'$ é uma subclasse da classe $Ob\mathcal{C}$ de objetos de $\mathcal{C}$;
- (b) Se X e Y são objetos de $\mathcal{C}'$, então $Hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
- (c) A composição de morfismos em $\mathcal{C}'$ é a mesma de $\mathcal{C}$;
- (d) Para cada objeto X de $\mathcal{C}'$, o morfismo identidade $1'_X$ em $Hom_{\mathcal{C}'}(X, X)$ coincide com o morfismo identidade 1_X em $Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é dita *plena* se $Hom_{\mathcal{C}'}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathcal{C}'$.

Um morfismo $f : A \longrightarrow B$ em $\mathcal{C}$ é um *isomorfismo* se existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$.

Um morfismo $f : A \longrightarrow B$ é chamado *monomorfismo* (respectivamente *epimorfismo*) se é cancelável à esquerda (respectivamente à direita) em $\mathcal{C}$, isto é, se $g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$ é tal que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, então $g_1 = g_2$ ($g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$, com $g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$).

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $P \in Ob\mathcal{C}$ é *projetivo* se para qualquer epimorfismo $h : M \longrightarrow N$ e qualquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(P, N)$, existe $f' \in Hom_{\mathcal{C}}(P, M)$ tal que $f = hf'$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow f' & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De maneira dual, um objeto $E \in Ob\mathcal{C}$ é *injetivo* se para qualquer monomorfismo $u : L \longrightarrow M$ e qualquer $g \in Hom_{\mathcal{C}}(L, E)$, existe $g' \in Hom_{\mathcal{C}}(M, E)$ tal

que $g = g'u$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M \\ & & \downarrow g & \searrow g' & \\ & & E & & \end{array}$$

Uma categoria $\mathcal{C}$ tem *suficientes projetivos* se, para todo objeto M em $\mathcal{C}$, existe um objeto projetivo P e um epimorfismo $\varphi : P \longrightarrow M$. De maneira dual, uma categoria $\mathcal{C}$ tem *suficientes injetivos* se, para todo objeto M em $\mathcal{C}$, existe um objeto injetivo E e um monomorfismo $\psi : E \longrightarrow M$.

Sejam A_1 e A_2 objetos da categoria $\mathcal{C}$. Um *produto* de A_1 e A_2 em $\mathcal{C}$ é uma tripla $(A_1 \times A_2, p_1, p_2)$, onde $A_1 \times A_2$ é um objeto em $\mathcal{C}$ e $p_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1 \times A_2, A_i)$ tal que se B é um objeto qualquer em $\mathcal{C}$ e $f_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A_i)$, $i = 1, 2$, então existe um único $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A_1 \times A_2)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A_1 \times A_2 \\ & \searrow f_i & \downarrow p_i \\ & & A_i \end{array}$$

é comutativo, para todo $i = 1, 2$. De maneira dual a definição de produto podemos definir *coproduto* de A_1 e A_2 denotado por $A_1 \sqcup A_2$ e de forma semelhante podemos definir coproduto e produto para uma coleção finita de objetos.

Definimos *objeto zero* de uma categoria $\mathcal{C}$ como o objeto $0 \in \text{Ob}\mathcal{C}$ tal que, para todo $M \in \text{Ob}\mathcal{C}$, existe um único morfismo $0 \longrightarrow M$ e um único morfismo $M \longrightarrow 0$ em $\mathcal{C}$. Vamos supor que tal objeto $0 \in \text{Ob}\mathcal{C}$ existe.

Sejam $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$. Suponhamos que existam o coproduto $A \xrightarrow{j_1} A \sqcup B$ e $B \xrightarrow{j_2} A \sqcup B$ e o produto $A \times B \xrightarrow{\pi_1} A$ e $A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$. Então os diagramas abaixo produzem os morfismos $A \sqcup B \xrightarrow{p_1} A$ e $A \sqcup B \xrightarrow{p_2} B$ satisfazendo as igualdades $p_1 \circ j_1 = 1_A$, $p_1 \circ j_2 = 0$, $p_2 \circ j_1 = 0$ e $p_2 \circ j_2 = 1_B$

$$\begin{array}{ccccc} & & A \sqcup B & & \\ & \nearrow j_1 & \downarrow p_1 & \nwarrow j_2 & \\ A & & & & B \\ & \searrow 1_A & & \swarrow 0 & \\ & & A & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & A \sqcup B & & \\ & \nearrow j_1 & \downarrow p_2 & \nwarrow j_2 & \\ A & & & & B \\ & \searrow 0 & & \swarrow 1_B & \\ & & B & & \end{array}$$

Assim obtemos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & A \sqcup B & & \\ & \nearrow p_1 & \downarrow i & \nwarrow p_2 & \\ A & & & & B \\ & \nwarrow \pi_1 & & \swarrow \pi_2 & \\ & & A \times B & & \end{array}$$

ou seja, $\pi_1 \circ i = p_1$ e $\pi_2 \circ i = p_2$. Se i indicado é um isomorfismo, então dizemos que $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ possuem *biproduto (ou soma direta)*. Assim temos $p_1 = \pi_1$, $p_2 = \pi_2$ e

$$\pi_1 \circ j_1 = 1_A, \quad \pi_1 \circ j_2 = 0, \quad \pi_2 \circ j_1 = 0, \quad \pi_2 \circ j_2 = 1_B, \quad j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2 = 1_{A \times B} \quad (*)$$

A última igualdade é válida pelas propriedades de produto $A \times B$. Podemos verificar que os morfismos j_1, j_2, π_1 e π_2 satisfazendo $(*)$ definem um biproduto.

De forma semelhante, podemos definir o biproduto de qualquer coleção finita de objetos. Vamos denotar o biproduto por $\oplus$.

Definição 1.4 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é aditiva se verifica as seguintes condições:*

- Possui objeto zero 0 em $\mathcal{C}$;
- Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ temos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um grupo abeliano tal que a composição é bilinear, ou seja,

$$f(g + h) = fg + fh$$

$$(g + h)f = gf + hf$$

- Dados $X, Y \in \mathcal{C}$ existe o biproduto, isto é,

$$X \begin{matrix} \xrightarrow{i_1} \\ \xleftarrow{p_1} \end{matrix} X \oplus Y \begin{matrix} \xleftarrow{i_2} \\ \xrightarrow{p_2} \end{matrix} Y$$

tal que $p_1 i_1 = 1_X$, $p_2 i_2 = 1_Y$, $p_1 i_2 = p_2 i_1 = 0$ e $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_{X \oplus Y}$.

Definição 1.5 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de uma categoria $\mathcal{C}$. O núcleo de f é o objeto $\text{Ker } f$ tal que o morfismo $u : \text{Ker } f \longrightarrow X$ satisfaz:*

$$(i) \quad fu = 0$$

- (ii) *Se $u' : Z \longrightarrow X$ é um morfismo tal que $fu' = 0$, existe um único morfismo $g : Z \longrightarrow \text{Ker } f$ tal que $u' = ug$*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{u} & X \xrightarrow{f} Y \\ \uparrow g & \nearrow u' & \\ Z & & \end{array}$$

De maneira dual, define-se conúcleo denotado por $\text{Coker } f$.

Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita uma categoria *abeliana* se todo morfismo tem núcleo e conúcleo e o morfismo j indicado no seguinte diagrama é isomorfismo

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & \text{Coker } f \\ & & \downarrow u & \nearrow h & \uparrow v & & \\ & & \text{Coker } k & \xrightarrow{j} & \text{Ker } c & & \end{array}$$

Um funtor *covariante* (*contravariante*) $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ de uma categoria $\mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{C}'$ é definido atribuindo a cada objeto X de $\mathcal{C}$ um objeto $T(X)$ de $\mathcal{C}'$ e cada morfismo $h : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ um morfismo $T(h) : T(X) \longrightarrow T(Y)$ em $\mathcal{C}'$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) Para todo objeto X de $\mathcal{C}$ temos $T(1_X) = 1_{T(X)}$;
- (b) Para todo par de morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ na categoria $\mathcal{C}$, temos $T(gf) = T(g)T(f)$ ($T(gf) = T(f)T(g)$).

Sejam $T, T' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ funtores. Uma *transformação natural* é uma família $\Psi = \{\Psi_X\}_{X \in \text{Ob}\mathcal{C}}$ de morfismos $\Psi_X : T(X) \longrightarrow T'(X)$ tal que, para qualquer morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\Psi_X} & T'(X) \\ T(f) \downarrow & & \downarrow T'(f) \\ T(Y) & \xrightarrow{\Psi_Y} & T'(Y) \end{array}$$

em $\mathcal{C}'$ é comutativo. Dizemos que Ψ é uma *equivalência natural* de funtores se, para qualquer objeto $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, o morfismo $\Psi_X : T(X) \longrightarrow T'(X)$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}'$.

Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma *equivalência de categorias* se existe um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ e isomorfismos funtoriais

$$\Psi : 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\simeq} FT \quad \text{e} \quad \Phi : 1_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\simeq} TF$$

onde $1_{\mathcal{C}'}$ e $1_{\mathcal{C}}$ são funtores identidade em $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Nesse caso, o funtor F é chamado quase inverso de T .

Se existe uma equivalência $\Psi : T \longrightarrow T'$ de categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, então dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são categorias equivalentes, e escrevemos $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}'$.

Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é *denso* se, para qualquer objeto A de $\mathcal{C}'$, existe um objeto C em $\mathcal{C}$ tal que $T(C)$ é isomorfo a A , ou seja, $T(C) \simeq A$.

Dizemos que T é *pleno* (respectivamente *fiel*), se a aplicação

$$\begin{array}{ccc} T_{XY} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(X), T(Y)) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

é sobrejetora (respectivamente injetora), para todos objetos X e Y de $\mathcal{C}$.

O funtor T é *aditivo* se preserva somas diretas, e, para quaisquer objetos $X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$, a aplicação T_{XY} satisfaz $T(f + g) = T(f) + T(g)$, para quaisquer $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Lema 1.6 *Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, T é fiel, pleno e denso.*

Definiremos o funtor Hom de $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ na categoria dos conjuntos *Sets* especificando que este leva o objeto (A, B) no conjunto $\text{Hom}(A, B)$ (que é um objeto

de *Sets*), e o morfismo $(f, g) : (A, B) \rightarrow (A', B')$ na aplicação de $Hom(A, B)$ em $Hom(A', B')$ definida por:

$$\begin{array}{ccc} Hom(f, g) : Hom(A, B) & \rightarrow & Hom(A', B') \\ k & \mapsto & gkf \end{array} \quad (1)$$

Agora fixemos um objeto A em $\mathcal{C}$ e definimos um funtor $Hom(A, -)$ de $\mathcal{C}$ em *Set* do seguinte modo:

$$Hom(A, -)B = Hom(A, B)$$

E $Hom(A, -)(g)$, para $g : B \rightarrow B'$, a aplicação:

$$Hom(A, g) : k \longrightarrow gk$$

de $Hom(A, B)$ em $Hom(A, B')$. Chamamos esse funtor de *funtor Hom (covariante) determinado pelo objeto A em $\mathcal{C}$* . De forma análoga, definimos o *funtor Hom contravariante $Hom(-, B)$ determinado por B em $\mathcal{C}$* . Sempre que necessário para simplificar a notação, denotaremos o funtor $Hom(A, -)$ simplesmente por $(A, -)$. Analogamente para o funtor $Hom(-, B)$.

Determinaremos as transformações naturais de um funtor $Hom_{\mathcal{C}}(A, -)$, que é um funtor de $\mathcal{C}$ em *Set*, para qualquer funtor F de $\mathcal{C}$ em *Set*. Sejam a um elemento qualquer do conjunto FA , $B \in Ob\mathcal{C}$ e $k \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Então $F(k)$ é uma aplicação do conjunto FA no conjunto FB , e $F(k)(a) \in FB$. Assim temos a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} a_B : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) & \rightarrow & FB \\ k & \mapsto & F(k)(a) \end{array}$$

Lema 1.7 (Lema de Yoneda): *Sejam F um funtor de $\mathcal{C}$ em *Set*, A um objeto de $\mathcal{C}$ e a um elemento do conjunto FA . Para qualquer $B \in Ob\mathcal{C}$, seja a_B a aplicação de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ em FB tal que $k \rightarrow F(k)(a)$. Então $B \rightarrow a_B$ é uma transformação natural $\eta(a)$ de $Hom_{\mathcal{C}}(A, -)$ em F . Além disso, $a \rightarrow \eta(a)$ é uma bijeção do conjunto FA no conjunto de transformações naturais de $Hom(A, -)$ em F . A inversa de $a \rightarrow \eta(a)$ é a aplicação $\eta \rightarrow \eta_A(1_A) \in FA$.*

Dois funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ são ditos *adjuntos* (F é adjunto a G à esquerda e G adjunto a F à direita) se temos o isomorfismo natural $Hom(F-, -) \simeq Hom(-, G-)$.

Se F e G são adjuntos com um isomorfismo natural

$$\varphi_{-, -} : Hom(F-, -) \longrightarrow Hom(-, G-)$$

podemos mostrar que temos as transformações naturais (chamadas de unidade e counidade)

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF \quad \varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathcal{D}} \quad (1)$$

definidas pelas regras $\eta_C = \varphi_{C, FC} 1_{FC}$ e $\varepsilon_D = \varphi_{GD, D}^{-1} 1_{GD}$ para C em $\mathcal{C}$ e D em $\mathcal{D}$. As composições

$$G \xrightarrow{\eta \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ \varepsilon} G \quad F \xrightarrow{F \circ \eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon \circ F} F \quad (2)$$

são iguais a 1_G e 1_F , respectivamente.

Reciprocamente, dadas as transformações naturais definidas em (1) tais que as composições (2) são iguais a 1_G e 1_F , respectivamente. Então $\varphi_{C,D}$ definido pela regra $\varphi_{C,D}f = Gf \circ \eta_C$ para $f: FC \longrightarrow D$ é um isomorfismo natural $\varphi_{-, -} : \text{Hom}(F-, -) \longrightarrow \text{Hom}(-, G-)$.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias abelianas e seja $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ um par de funtores aditivos covariantes tal que F é adjunto à esquerda de G . Então F é exato à direita e G é exato à esquerda. Funtores adjuntos preservam somas diretas.

A seguir daremos exemplos de algumas categorias importantes neste trabalho. Enunciaremos propriedades homológicas, definiremos funtores dessas categorias úteis ao longo do texto.

1.1.1 A categoria dos Λ -módulos

Definição 1.8 *Seja Λ um anel. Um Λ -módulo à direita é o par $(M, \cdot)$, onde M é um K -espaço vetorial e*

$$\begin{aligned} \cdot : M \times \Lambda &\longrightarrow M \\ (m, a) &\longmapsto ma \end{aligned}$$

é uma operação binária satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} (a) \quad &(x + y)a = xa + ya; & (d) \quad &x1 = x; \\ (b) \quad &x(a + b) = xa + xb; & (e) \quad &(x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa)\lambda; \\ (c) \quad &x(ab) = (xa)b; \end{aligned}$$

De forma similar definimos Λ -módulos à esquerda.

Denotaremos por $\text{Mod-}\Lambda$ a categoria onde os objetos são os Λ -módulos à direita e os morfismos são os Λ -homomorfismos de módulos.

Um módulo M tem dimensão finita se a dimensão $\dim_K M$ como K -espaço vetorial de M é finita.

Um K -subespaço M' de um Λ -módulo à direita M é dito um Λ -submódulo de M se $ma \in M'$ para todo $m \in M'$ e todo $a \in \Lambda$.

Um Λ -módulo à direita M é dito *gerado* pelos elementos $m_1, m_2, \dots, m_s$ de M se qualquer elemento $m \in M$ tem a forma $m = m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_sa_s$, com $a_1, a_2, \dots, a_s \in \Lambda$. Neste caso escrevemos $M = m_1\Lambda + \dots + m_s\Lambda$. Um módulo M é dito *finitamente gerado* se é gerado por um subconjunto finito de elementos de M . Denotaremos por $\text{mod-}\Lambda$ a categoria dos Λ -módulos finitamente gerados.

Sejam M e N Λ -módulos à direita. Uma aplicação K -linear é dita um Λ -homomorfismo se $h(ma) = h(m)a$, para todo $m \in M$ e $a \in \Lambda$. Um Λ -homomorfismo $h: M \longrightarrow N$ é dito *monomorfismo* (ou *epimorfismo*) se é injetora (ou sobrejetora, respectivamente). Um Λ -homomorfismo bijetor é chamado *isomorfismo*. Dois Λ -módulos à direita M e N são ditos isomorfos se existe um Λ -isomorfismo $h: M \longrightarrow N$. Neste caso, escrevemos $M \simeq N$. Um Λ -homomorfismo $h: M \longrightarrow M$ é dito um endomorfismo de M .

O conjunto $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$ de todos os Λ -homomorfismos de M a N é um K -espaço vetorial com respeito a multiplicação escalar $(f, \lambda) \mapsto f\lambda$ dada por

$(f\lambda)(m) = f(m\lambda)$, para $f \in \text{Hom}_\Lambda(M, N)$, $\lambda \in K$ e $m \in M$. Se os módulos M e N são de dimensão finita, então o K -espaço vetorial $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$ é de dimensão finita. O K -espaço vetorial $\text{End } M = \text{Hom}_\Lambda(M, M)$ de todos Λ -homomorfismos de qualquer Λ -módulo M é uma K -álgebra associativa com respeito a composição de aplicações. O morfismo identidade 1_M em M é a identidade de $\text{End } M$.

Um Λ -módulo à direita S é *simples* se S é não nulo e qualquer submódulo de S é zero ou S .

Um Λ -módulo F é *livre* se F é isomorfo a somas diretas de cópias de Λ .

Se F é um Λ -módulo livre, então dados M e N Λ -módulos, um epimorfismo $f : M \longrightarrow N$ e um homomorfismo $g : F \longrightarrow N$ sempre existe $\bar{g} : F \longrightarrow M$ tal que $f\bar{g} = g$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow \bar{g} & \downarrow g & \\ M & \xrightarrow{f} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dessa forma, todo módulo livre é um módulo projetivo.

Lema 1.9 *Todo Λ -módulo pode ser coberto por um Λ -módulo livre, ou seja, dado um Λ -módulo M , existe um epimorfismo $\varphi : M \longrightarrow L$ com L um módulo livre.*

A categoria dos módulos é uma categoria com suficientes módulos projetivos e injetivos.

Lema 1.10 *Um Λ -módulo P é projetivo se, e somente se, existe um Λ -módulo livre F e um Λ -módulo à direita P' tal que $P \oplus P' \simeq F$.*

Lema 1.11 *Um módulo projetivo $P \in \text{mod-}\Lambda$ é finitamente gerado se, e somente se, o funtor $\text{Hom}_\Lambda(P, -)$ preserva somas diretas quaisquer.*

Sejam $h : M \longrightarrow N$ e $u : L \longrightarrow M$ homomorfismos de Λ -módulos à direita. Dizemos que um Λ -homomorfismo $s : N \longrightarrow M$ é uma *seção* de h se $hs = 1_N$ e dizemos que um Λ -homomorfismo $r : M \longrightarrow L$ é uma *retração* de u se $ru = 1_L$. Se s é uma seção de h , então h é sobrejetora, s é injetora, h é uma retração de s e existe uma decomposição em soma direta $M = \text{Im } s \oplus \text{Ker } h \simeq N \oplus \text{Ker } h$. Similarmente, se r é uma retração de u , então r é sobrejetora, u é injetiva, u é seção de r e existe uma decomposição em soma direta $M = \text{Im } u \oplus \text{Ker } r \simeq L \oplus \text{Ker } r$.

Um Λ -homomorfismo $h : M \longrightarrow N$ é uma seção (ou uma retração) se h admite uma retração (ou uma seção, respectivamente)

Uma sequência

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X^n \xrightarrow{d_n} X^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

(infinita ou finita) de Λ -módulos conectados por Λ -homomorfismos é chamada *exata* se $\text{Ker } d_n = \text{Im } d_{n-1}$ para todo n . Em particular

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{r} N \longrightarrow 0$$

é chamada sequência exata curta se u é monomorfismo, r é epimorfismo e $\text{Ker } r = \text{Im } u$.

Notemos que o homomorfismo u admite uma retração $p : M \longrightarrow L$ se, e somente se, r admite uma seção $v : N \longrightarrow M$. Neste caso existe uma decomposição em soma direta $M = \text{Im } u \oplus \text{Ker } p = \text{Im } v \oplus \text{Ker } r$ de M , e dizemos que a sequência exata curta *cinde*.

Definição 1.12 Definimos a resolução projetiva de um Λ -módulo à direita M como a sequência

$$P_M^\bullet : \dots \longrightarrow P^m \xrightarrow{h^m} P^{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^1 \xrightarrow{h^1} P^0 \longrightarrow 0$$

de Λ -módulos projetivos e com um epimorfismo $h^0 : P^0 \longrightarrow M$ de Λ -módulos tal que a sequência

$$\dots \longrightarrow P^m \xrightarrow{h^m} P^{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^1 \xrightarrow{h^1} P^0 \xrightarrow{h^0} M \longrightarrow 0$$

é exata. De maneira dual, define-se resolução injetiva de M .

Sejam K um corpo e Λ uma K -álgebra. A *dimensão projetiva* de um Λ -módulo à direita M é o inteiro não negativo $pd(M) = m$ tal que existe uma resolução projetiva de M de comprimento m como no diagrama:

$$0 \longrightarrow P^m \xrightarrow{h^m} P^{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^1 \xrightarrow{h^1} P^0 \longrightarrow 0$$

e M não tem uma resolução projetiva de comprimento $m-1$, se tal número existe. Tal resolução projetiva é dita resolução projetiva minimal. Se M não admite resolução projetiva de comprimento finito, definimos a dimensão projetiva de M $pd(M)$ como sendo infinito. De maneira análoga, define-se dimensão injetiva de M , $id(M)$.

Seja $P_M^\bullet : 0 \longrightarrow P^m \xrightarrow{h^m} P^{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva minimal de um Λ -módulo M . Aplicando o funtor $\text{Hom}_\Lambda(-, N)$ a essa resolução projetiva identificamos um elemento de $\text{Ext}_\Lambda^n(M, N)$ como a classe de $f \in \text{Hom}_\Lambda(P^n, N)$ tal que $f d_{n-1} = 0$. Disso temos $\text{Ext}_\Lambda^n(M, N) = 0$, para todo $n < 0$ e $\text{Ext}_\Lambda^0(M, N) = \text{Hom}_\Lambda(M, N)$.

Proposição 1.13 As seguintes condições são equivalentes para um Λ -módulo à direita M :

- (a) $pd(M) \leq n$
- (b) $\text{Ext}_\Lambda^k(M, N) = 0$, para todos Λ -módulos à direita N e todo $k \geq n+1$.

Lema 1.14 (5-lema) Considere o diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

Se h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos, então h_3 é isomorfismo.

Lema 1.15 (Lema da Serpente) *Assuma que temos o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' \longrightarrow 0 \end{array}$$

em $\text{mod-}\Lambda$ com linhas seqüências exatas. Então existe um homomorfismo de conexão $\delta : \text{Ker } h \longrightarrow \text{Coker } f$ tal que a seqüência induzida

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{u} \text{Ker } g \xrightarrow{v} \text{Ker } h \xrightarrow{\delta} \text{Coker } f \xrightarrow{u'} \text{Coker } g \xrightarrow{v'} \text{Coker } h \longrightarrow 0$$

é exata.

Sejam $f_1 : M_1 \rightarrow M$, $f_2 : M_2 \rightarrow M$ dois morfismos de $\text{Mod-}\Lambda$. Um *pullback* de f_1 e f_2 é um módulo P e dois morfismos $p_1 : P \rightarrow M_1$ e $p_2 : P \rightarrow M_2$, tais que:

- (i) $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$;
- (ii) Para todo módulo N e todo par de morfismos $g_1 : N \rightarrow M_1$ e $g_2 : N \rightarrow M_2$ tais que $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, existe um único morfismo $g : N \rightarrow P$ tal que $p_1 \circ g = g_1$ e $p_2 \circ g = g_2$.

$$\begin{array}{ccccc} N & & & & \\ & \searrow^{g_2} & & \searrow^{g_2} & \\ & & P & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\ & \swarrow_{g_1} & \downarrow p_1 & & \downarrow f_2 \\ & & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M \end{array}$$

Segue da definição que se tal produto existe, ele é único a menos de isomorfismo. De maneira dual, define-se *push-out* de f_1 e f_2 .

Lema 1.16 *Em $\text{Mod-}\Lambda$ consideremos o pullback de f_1 e f_2 como no diagrama*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f_1} & M \end{array}$$

Então

- (i) Se f_1 é um monomorfismo, p_2 também o é.
- (ii) Se f_1 é um epimorfismo, p_2 também o é.

1.1.2 A categoria dos complexos

Nesta subseção $\mathcal{A}$ denotará uma categoria abeliana.

Um *complexo* é o par $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ onde $X^\bullet$ é uma família $\{X^n : n \in \mathbb{Z}\}$ de objetos de $\mathcal{A}$ e $d_X^\bullet$ é uma família de morfismos $\{d_X^n : X^n \longrightarrow X^{n+1}\}$ tal que $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$. O morfismo $d_X^\bullet$ chama-se diferencial do complexo.

Podemos representar um complexo como um diagrama a seguir:

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

Exemplo 1.17 *Toda sequência exata*

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

é um complexo, uma vez que da igualdade $\text{Im } d_X^{n-1} = \text{Ker } d_X^n$, temos $d_X^n d_X^{n-1} = 0$ para todo n .

Sejam $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ e $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ complexos em $\mathcal{A}$. Um *morfismo* de complexos $f^\bullet : (X^\bullet, d_X^\bullet) \longrightarrow (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ é uma família de morfismos $\{f^n : X^n \longrightarrow Y^n\}$ tal que, para todo n , temos $f^n \circ d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ f^{n-1}$, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

é comutativo. Um *isomorfismo* entre complexos é um morfismo de complexos $f^\bullet : (X^\bullet, d_X^\bullet) \longrightarrow (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ tal que $\{f^n : X^n \longrightarrow Y^n\}$ é um isomorfismo em $\mathcal{A}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definimos a *categoria dos complexos* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ como a categoria que tem como objetos os complexos e morfismos, os morfismos de complexos.

Um complexo $(X'^\bullet, d_{X'}^\bullet)$ é um *subcomplexo* de um complexo $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ na categoria dos módulos se X'^n é um submódulo de X^n e a diferencial $d_{X'}^\bullet$ é a restrição da diferencial $d_X^\bullet$ ao complexo $X'^\bullet$, ou seja, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos $d_{X'}^n = d_X^n|_{X'^n}$.

Dizemos que um complexo $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ tem comprimento n se é da forma

$$0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0$$

onde $X^0 \neq 0$ e $X^n \neq 0$.

Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma categoria abeliana onde o complexo zero é o complexo onde cada termo é o zero de $\mathcal{A}$. A soma direta $(X^\bullet, d_X^\bullet) \oplus (X'^\bullet, d_{X'}^\bullet)$ é, por definição, o complexo cujo n -ésimo termo é $X^n \oplus X'^n$ e cuja n -ésima diferencial é $d_X^n \oplus d_{X'}^n$, tal que $(d_X^n \oplus d_{X'}^n)(x, x') = d_X^n(x) + d_{X'}^n(x')$.

Se $f^\bullet : (X^\bullet, d_X^\bullet) \longrightarrow (X'^\bullet, d_{X'}^\bullet)$ é um morfismo de complexos, definimos o *núcleo* de $f^\bullet$ por:

$$\text{Ker } f^\bullet : \dots \longrightarrow \text{Ker } f^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \text{Ker } f^n \xrightarrow{\delta^n} \text{Ker } f^{n-1} \longrightarrow \dots,$$

onde a diferencial $\delta^\bullet$ é a restrição da diferencial $d_X^\bullet$ ao núcleo de $f^\bullet$, ou seja, para todo n , $\delta^n = d_X^n|_{\text{Ker } f^n}$. De maneira análoga temos o complexo *Coker* $f^\bullet$.

Exemplo 1.18 Seja M um objeto em $\mathcal{A}$. Associamos M a um complexo com $X^0 = M$ e $X^i = 0$, para $i \neq 0$ e todas as diferenciais sendo zero. Este complexo é chamado complexo concentrado no nível zero. Além disso, isto nos fornece um mergulho fiel e pleno de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Notação: $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Definição 1.19 Para um complexo $X^\bullet$,

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{n-2} \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} \dots$$

definimos os seguintes truncamentos:

$$\begin{aligned} \tau_{\leq n}(X^\bullet) : & \dots \longrightarrow X^{n-2} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ \tau_{\geq n}(X^\bullet) : & \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^n \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2} \longrightarrow \dots \\ \sigma_{\leq n}(X^\bullet) : & \dots \longrightarrow X^{n-2} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \text{Ker } d^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ \sigma'_{\geq n}(X^\bullet) : & \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Coker } d^{n-1} \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Sejam $X^\bullet$ um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, com $\mathcal{A}$ a categoria dos módulos, e $n \in \mathbb{Z}$. Definimos o n -ésimo objeto cohomológico do complexo $X^\bullet$ como:

$$H^n(X^\bullet) = \frac{\text{Ker } d_X^n}{\text{Im } d_X^{n-1}}.$$

Como $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$, ou seja, $\text{Im } d_X^{n-1} \subset \text{Ker } d_X^n$, o n -ésimo objeto cohomológico está bem definido para todo n .

Proposição 1.20 Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(-) : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ é um funtor.

Demonstração: Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \longrightarrow & H^n(X^\bullet) = \frac{\text{Ker } d_X^n}{\text{Im } d_X^{n-1}} \\ \downarrow f^\bullet & & \downarrow H^n(f^\bullet) \\ Y^\bullet & \longrightarrow & H^n(Y^\bullet) = \frac{\text{Ker } d_Y^n}{\text{Im } d_Y^{n-1}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \bar{x} \\ \downarrow \\ \overline{f^n(x)} \end{array}$$

Definimos

$$H^n(f^\bullet)(\bar{x}) = \overline{f^n(x)}$$

$H^n(f^\bullet)$ está bem definida, pois

- (a) $f^n(x) \in \text{Ker } d_Y^n$ visto que $d_Y^n f^n(x) = f^{n+1} d_X^n(x) = 0$ e $x \in \text{Ker } d_X^n$.
- (b) $\bar{x} = \bar{x'} \Rightarrow \overline{f^n(x)} = \overline{f^n(x')}$, pois

$$\bar{x} = \bar{x'} \Rightarrow x - x' \in \text{Im } d_X^{n-1} \Rightarrow \text{Existe } z \in X^{n-1} \text{ tal que } d_X^{n-1}(z) = x - x'.$$

Logo,

$$f^n(x) - f^n(x') = f^n d_X^{n-1}(z) \Rightarrow f^n(x) - f^n(x') = d_Y^{n-1} f^{n-1}(z) \in \text{Im } d_Y^{n-1}.$$

Portanto, $\overline{f^n(x)} = \overline{f^n(x')}$. Claramente segue que $H^n(1^\bullet)(\bar{x}) = \bar{x}$, para todo $\bar{x} \in H^n(X^\bullet)$ e que $H^n(g^\bullet \circ f^\bullet) = H^n(g^\bullet) \circ H^n(f^\bullet)$. ■

Esses funtores são chamados *funtores de cohomologia*. Assim observemos que $\text{Ext}_\Lambda^n(M, N) = H^n(\text{Hom}(P_M^\bullet, N))$.

1.1.3 A categoria dos Bicomplexos

Um *módulo graduado* é uma família indexada $M^\bullet = (M^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de Λ -módulos, para algum anel Λ .

Exemplo 1.21 Se $(X^\bullet, d_X^\bullet) : \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$ é um complexo em Λ , então $X^\bullet = (X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é um Λ -módulo graduado.

Sejam $M^\bullet$ e $N^\bullet$ módulos graduados e $a \in \mathbb{Z}$. Um *morfismo graduado de grau a* é uma família de morfismos $f^\bullet = (f^p : M^p \longrightarrow N^{p+a})_{p \in \mathbb{Z}}$. O grau de $f^\bullet$ é a , e denotamos por $\partial(f^\bullet) = a$.

Exemplo 1.22 (i) Se $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ é um complexo em Λ , então sua diferencial $d_X^\bullet : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ é um morfismo graduado de grau 1.

(ii) Se $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow X'^\bullet$ é um morfismo de complexos, então $f^\bullet$ é um morfismo graduado de grau 0.

Proposição 1.23 Se $M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} P^\bullet$ são morfismos graduados de grau a e b , respectivamente, então a composição é um morfismo de grau $a + b$.

Um Λ -*módulo bigraduado* é uma família de Λ -módulos indexada duplamente $M^{\bullet,\bullet} = (M^{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.

Sejam $M^{\bullet,\bullet}$ e $N^{\bullet,\bullet}$ módulos bigraduados, e seja $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Um *morfismo bigraduado de bigrau (a, b)* , denotado por $f^{\bullet,\bullet} : M^{\bullet,\bullet} \longrightarrow N^{\bullet,\bullet}$, é uma família de morfismos $f^{\bullet,\bullet} = (f^{p,q} : M^{p,q} \longrightarrow N^{p+a,q+b})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. O bigrau de $f^{\bullet,\bullet}$ é (a, b) e denotamos por $\partial(f^{\bullet,\bullet}) = (a, b)$.

Como na proposição 1.23, se $f^{\bullet,\bullet} : M^{\bullet,\bullet} \longrightarrow N^{\bullet,\bullet}$ e $g^{\bullet,\bullet} : N^{\bullet,\bullet} \longrightarrow P^{\bullet,\bullet}$ são morfismos bigraduados de bigrau (a, b) e (a', b') , respectivamente, então o morfismo bigraduado $(gf)^{\bullet,\bullet} : M^{\bullet,\bullet} \longrightarrow P^{\bullet,\bullet}$ tem bigrau $(a + a', b + b')$.

Todos os módulos bigraduados (sobre um anel Λ) e morfismos bigraduados formam uma categoria.

Um *bicomplexo* é uma tripla ordenada $(M^{\bullet,\bullet}, d_1^{\bullet,\bullet}, d_2^{\bullet,\bullet})$, onde $M^{\bullet,\bullet} = (M^{p,q})$ é um Λ -módulo bigraduado, $d_1^{\bullet,\bullet}, d_2^{\bullet,\bullet} : M^{\bullet,\bullet} \longrightarrow M^{\bullet,\bullet}$ são diferenciais de bigrau $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente (ou seja, $d_1^{\bullet,\bullet} d_1^{\bullet,\bullet} = 0$ e $d_2^{\bullet,\bullet} d_2^{\bullet,\bullet} = 0$), e $d_1^{\bullet,\bullet} d_2^{\bullet,\bullet} + d_2^{\bullet,\bullet} d_1^{\bullet,\bullet} = 0$.

Assim, um bicomplexo pode ser visto da forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \longrightarrow & M^{n-1,m} & \xrightarrow{d_1^{n-1,m}} & M^{n,m} & \xrightarrow{d_1^{n,m}} & M^{n+1,m} \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow d_2^{n-1,m} & & \downarrow d_2^{n,m} & & \downarrow d_2^{n+1,m} & \\
\cdots & \longrightarrow & M^{n-1,m+1} & \xrightarrow{d_1^{n-1,m+1}} & M^{n,m+1} & \xrightarrow{d_1^{n,m+1}} & M^{n+1,m+1} \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow d_2^{n-1,m+1} & & \downarrow d_2^{n,m+1} & & \downarrow d_2^{n+1,m+1} & \\
\cdots & \longrightarrow & M^{n-1,m+2} & \xrightarrow{d_1^{n-1,m+2}} & M^{n,m+2} & \xrightarrow{d_1^{n,m+2}} & M^{n+1,m+2} \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

De maneira natural temos morfismo entre bicomplexos, e assim definimos a categoria $\mathcal{C}^2(\Lambda)$ cujos objetos são os bicomplexos.

Seja $M^{\bullet,\bullet} = (M^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ um módulo bigraduado, e assuma que existam morfismos bigraduados $d_1^{\bullet,\bullet} : M^{\bullet,\bullet} \longrightarrow M^{\bullet,\bullet}$, com bigrau $(1,0)$ e $d_2^{\bullet,\bullet} : M^{\bullet,\bullet} \longrightarrow M^{\bullet,\bullet}$, com bigrau $(0,1)$ tal que as linhas e colunas de $M^{\bullet,\bullet}$ são complexos. Dessa forma temos $d_1^{\bullet,\bullet} d_1^{\bullet,\bullet} = 0$, $d_2^{\bullet,\bullet} d_2^{\bullet,\bullet} = 0$ e $d_1^{\bullet,\bullet} d_2^{\bullet,\bullet} = d_2^{\bullet,\bullet} d_1^{\bullet,\bullet}$. Podemos obter um bicomplexo fazendo uma mudança de sinal. De fato, definimos $\Delta^{p,q} = (-1)^p d_2^{p,q}$. Isso não altera núcleos e imagens e assim $\Delta^2 = 0$. E ainda,

$$\begin{aligned}
d_1^{p,q} \Delta^{p,q} + \Delta^{p-1,q} d_1^{p,q} &= (-1)^p d_1^{p,q-1} d_2^{p,q} + (-1)^{p-1} d_2^{p-1,q} d_1^{p,q} \\
&= (-1)^p (d_1^{p,q-1} d_2^{p,q} - d_2^{p-1,q} d_1^{p,q}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Agora dado um bicomplexo $(M^{\bullet,\bullet}, d_1^{\bullet,\bullet}, d_2^{\bullet,\bullet})$, definimos o complexo X_I^n cuja n -ésima entrada é o complexo vertical

$$\cdots \longrightarrow M^{n,m-1} \xrightarrow{d_2^{n,m-1}} M^{n,m} \xrightarrow{d_2^{n,m}} M^{n,m+1} \longrightarrow \cdots$$

e cuja diferencial é dada por $d_1^{\bullet,\bullet}$. De maneira análoga, existe um outro complexo X_{II}^n cujas entradas são os complexos horizontais. Esta construção nos dá uma equivalência entre as categorias $\mathcal{C}^2(\Lambda)$ e $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Lambda))$.

Ao longo deste texto assumiremos que o bicomplexo satisfaz a seguinte propriedade de finitude: Para qualquer $l \in \mathbb{Z}$ há apenas um número finito n e m com $n + m = l$ e $M^{n,m} \neq 0$. Nessas condições, definimos:

Definição 1.24 Se $M^{\bullet,\bullet}$ é um bicomplexo, então o complexo total, denotado por $tot(M)^{\bullet}$, é o complexo com n -ésimo termo dado por:

$$tot(M)^n = \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

e com diferencial $d_{tot(M)}^n : tot(M)^n \longrightarrow tot(M)^{n+1}$ dada por:

$$d_{tot(M)}^n = \sum_{p+q=n} (d_1^{p,q} + d_2^{p,q})$$

Além disso, morfismos entre bicomplexos satisfazendo a condição de finitude acima podem ser transformados de maneira análoga em morfismos entre complexos totais.

Observação 1.25 Se $M^{\bullet,\bullet}$ é um bicomplexo, então $(\text{tot}(M)^\bullet, d_{\text{tot}(M)}^\bullet)$ é um complexo. De fato,

$$\begin{aligned} d_{\text{tot}(M)}^{n+1} d_{\text{tot}(M)}^n &= \sum_{p+q=n+1} (d_1^{p,q} + d_2^{p,q}) \sum_{p+q=n} (d_1^{p,q} + d_2^{p,q}) \\ &= \sum_{p+q=n} (d_1^{p,q-1} + d_2^{p,q-1}) \sum_{p+q=n} (d_1^{p,q} d_2^{p,q}) \\ &= \sum_{p+q=n} d_1^{p,q-1} d_1^{p,q} + \sum_{p+q=n} (d_1^{p,q-1} d_2^{p,q} + d_2^{p,q-1} d_2^{p,q}) + \sum_{p+q=n} d_2^{p,q-1} d_2^{p,q} \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

A seguir daremos um exemplo de bicomplexo e consequentemente, definiremos seu complexo total que será importante ao longo desse texto.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e sejam $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ complexos em $\mathcal{A}$,

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{-2} \xrightarrow{d_X^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \longrightarrow \dots$$

$$Y^\bullet : \dots \longrightarrow Y^{-2} \xrightarrow{d_Y^{-2}} Y^{-1} \xrightarrow{d_Y^{-1}} Y^0 \xrightarrow{d_Y^0} Y^1 \longrightarrow \dots$$

obtemos o bicomplexo $\text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet)$ dado por:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}(X^2, Y^{-1}) & \xrightarrow{d_1^{2,-1}} & \text{Hom}(X^2, Y^0) & \xrightarrow{d_1^{2,0}} & \text{Hom}(X^2, Y^1) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow d_2^{2,-1} & & \downarrow d_2^{2,0} & & \downarrow d_2^{2,1} \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}(X^1, Y^{-1}) & \xrightarrow{d_1^{1,-1}} & \text{Hom}(X^1, Y^0) & \xrightarrow{d_1^{1,0}} & \text{Hom}(X^1, Y^1) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow d_2^{1,-1} & & \downarrow d_2^{1,0} & & \downarrow d_2^{1,1} \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}(X^0, Y^{-1}) & \xrightarrow{d_1^{0,-1}} & \text{Hom}(X^0, Y^0) & \xrightarrow{d_1^{0,0}} & \text{Hom}(X^0, Y^1) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

onde, para todo i e j , $d_1^{i,j}$ e $d_2^{i,j}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} d_1^{i,j} : \text{Hom}(X^i, Y^j) &\longrightarrow \text{Hom}(X^i, Y^{j+1}) \\ \varphi &\longmapsto d_1^{i,j}(\varphi) = d_Y^j \varphi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_2^{i-1,j} : \text{Hom}(X^{i-1}, Y^j) &\longrightarrow \text{Hom}(X^i, Y^j) \\ \varphi &\longmapsto d_2^{i-1,j}(\varphi) = \varphi d_X^{i-1} \end{aligned}$$

Note que o grau das aplicações $d_1^{\bullet,\bullet}$ e $d_2^{\bullet,\bullet}$ são $(0,1)$ e $(-1,0)$, respectivamente. E ainda temos a comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(X^{i+1}, Y^j) & \xrightarrow{d_1^{i+1,j}} & \text{Hom}(X^{i+1}, Y^{j+1}) \\ d_2^{i+1,j} \downarrow & & \downarrow d_2^{i+1,j+1} \\ \text{Hom}(X^i, Y^j) & \xrightarrow{d_1^{i,j}} & \text{Hom}(X^i, Y^{j+1}) \end{array}$$

De fato, para todo i e j , seja $\alpha : X^{i+1} \longrightarrow Y^j$

$$d_2^{i+1,j+1} d_1^{i+1,j}(\alpha) = d_2^{i+1,j+1}(d_Y^j \alpha) = d_Y^j \circ \alpha \circ d_X^{i+1} = d_1^{i,j}(\alpha \circ d_X^{i+1}) = d_1^{i,j} d_2^{i+1,j}(\alpha).$$

Agora que verificamos que temos realmente um bicomplexo, podemos definir o complexo total desse bicomplexo.

Definição 1.26 Dados $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ complexos em $\mathcal{A}$, definimos o complexo total $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}(X^p, Y^q) \\ d^n = \sum_{p+q=n} (d_1^{p,q} - (-1)^n d_2^{p,q}) \end{array} \right.$$

O complexo pode ser visualizado abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} & n = -1 & & n = 0 & & n = 1 & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(X^2, Y^1) & \xrightarrow{d_1^{2,1}} & \text{Hom}(X^2, Y^2) & \xrightarrow{d_1^{2,2}} & \text{Hom}(X^2, Y^3) \longrightarrow \cdots \\ & & \searrow & & \searrow & & \\ & \oplus & & \oplus & & \oplus & \\ & & -d_2^{2,1} & & d_2^{2,2} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(X^1, Y^0) & \xrightarrow{d_1^{1,0}} & \text{Hom}(X^1, Y^1) & \xrightarrow{d_1^{1,1}} & \text{Hom}(X^1, Y^2) \longrightarrow \cdots \\ & & \searrow & & \searrow & & \\ & \oplus & & \oplus & & \oplus & \\ & & -d_2^{1,0} & & d_2^{1,1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(X^0, Y^{-1}) & \xrightarrow{d_1^{0,-1}} & \text{Hom}(X^0, Y^0) & \xrightarrow{d_1^{0,0}} & \text{Hom}(X^0, Y^1) \longrightarrow \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Observação 1.27 Generalizando a definição de bicomplexo podemos definir uma categoria de forma que os objetos são (M, d) , onde $M = (M^{p,q})$ é um Λ -módulo bigraduado e d é uma coleção $\{d_i\}$ de endomorfismos de M de bigrau $(1-i, i)$ tal que, para cada n ,

$$\sum d_i d_{n-1} = 0$$

Um morfismo α entre os objetos (M, d) e (N, e) é uma coleção de endomorfismos graduados $\{\alpha_i\}$ de $M^{\bullet,\bullet} \rightarrow N^{\bullet,\bullet}$ tal que α_i tem bigrau $(-i, i)$ e, para todo n , temos

$$\sum \alpha_i d_{n-i} = \sum d_i \alpha_{n-i}$$

1.2 Localização de categorias aditivas

A idéia de localização de uma categoria $\mathcal{A}$ é transformar esta categoria em outra categoria na qual certas classes de morfismos se convertam em isomorfismos. Os sistemas multiplicativos que vamos definir são classes de morfismos em $\mathcal{A}$ que vão nos garantir a existência da localização. Omitiremos alguns detalhes e demonstrações. Como referência citamos [2], [15].

Definição 1.28 Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $\mathcal{S}$ uma classe de morfismos em $\mathcal{A}$. Diremos que $\mathcal{S}$ é um sistema multiplicativo se satisfaz:

- (S1) Para todo objeto M em $\mathcal{A}$, o morfismo Id_M está em $\mathcal{S}$. Se os morfismos s e t estão em $\mathcal{S}$, então a composição ts também está em $\mathcal{S}$.
- (S2) Para qualquer par de morfismo f e s em $\mathcal{A}$ tal que $s \in \mathcal{S}$, existem morfismos g e t em $\mathcal{A}$, com $t \in \mathcal{S}$ de forma que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & M \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ L & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

é comutativo. De maneira dual, para qualquer par de morfismo f e s em $\mathcal{A}$ tal que $s \in \mathcal{S}$, existem morfismos g e t em $\mathcal{A}$, com $t \in \mathcal{S}$ de forma que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & N \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ L & \xrightarrow{t} & K \end{array}$$

é comutativo.

- (S3) Sejam $f, g : M \rightarrow M$ morfismos em $\mathcal{A}$. Então existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $sf = sg$ se, e somente se, existe $t \in \mathcal{S}$ tal que $ft = gt$.

$$Z' \xrightarrow{t} M \xrightleftharpoons[f]{g} M \xrightarrow{s} Z$$

Definição 1.29 *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo em $\mathcal{A}$. A localização de $\mathcal{A}$ com respeito a $\mathcal{S}$ é uma categoria aditiva $\mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}]$ e um funtor (de localização) $Q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}]$ tal que*

1. $Q(s)$ é um isomorfismo, para todo $s \in \mathcal{S}$.
2. Se $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um funtor tal que $F(s)$ é um isomorfismo, para todo $s \in \mathcal{S}$, então existe um único funtor $G : \mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\ Q \downarrow & \nearrow G & \\ \mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}] & & \end{array}$$

é comutativo.

Lema 1.30 *Seja $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo de morfismos em uma categoria $\mathcal{A}$. Se existe a categoria $\mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}]$, então os objetos de $\mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}]$ são os mesmos objetos de $\mathcal{A}$ e os morfismos em $\mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}]$ entre X e Y são classes fs^{-1} ou $\frac{f}{s}$. Também representaremos essas classes como o diagrama*

$$X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y \quad \text{ou} \quad (X', s, f),$$

com $s \in \mathcal{S}$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y)$ módulo a relação de equivalência $\sim$, onde $\frac{f}{s} \sim \frac{f'}{s'}$ se, e somente se, existem $U \in \text{Ob}\mathcal{A}$, $p : U \longrightarrow X'$ e $q : U \longrightarrow X''$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & \swarrow s & \uparrow p & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{t} & U & \xrightarrow{b} & Y \\ & \nwarrow s' & \downarrow q & \nearrow f' & \\ & & X'' & & \end{array}$$

com $t \in \mathcal{S}$.

Observemos que:

- (i) A identidade em $\mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}]$ é a classe $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{1} X$
- (ii) A composição de $\frac{f}{s} \circ \frac{g}{t}$ é a classe $\frac{gf'}{st'}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & X'' & & \\ & \swarrow t' & & \searrow f' & \\ & X' & & X' & \\ \swarrow s & & \searrow f & \swarrow t & \searrow g \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

onde $t' \in S$ e f' são dados pelo item (b) da definição de sistema multiplicativo para morfismo.

Lema 1.31 *Dado o quadrado comutativo em $\mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}]$*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{Q(u)} & B \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ A' & \xrightarrow{Q(u')} & B' \end{array}$$

então existe um representante (R, s, a) de φ , um representante (S, t, b) de ψ e um morfismo $m : R \longrightarrow S$ tal que o diagrama em $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xleftarrow{a} & R & \xrightarrow{s} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow m & & \downarrow u \\ B' & \xleftarrow{b} & S & \xrightarrow{t} & B \end{array}$$

é comutativo.

Proposição 1.32 *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva, $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo em $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ uma subcategoria plena de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} = \mathcal{S} \cap \text{Mor}(\mathcal{B})$ um sistema multiplicativo em $\mathcal{B}$. Considere o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & \mathcal{A} \\ \downarrow Q_{\mathcal{B}} & & \downarrow Q \\ \mathcal{B}[\mathcal{S}^{-1}] & \xrightarrow[-F]{} & \mathcal{A}[\mathcal{S}^{-1}] \end{array}$$

Então F é fiel e pleno se uma das condições a seguir for satisfeita:

- (i) *Para cada morfismo $s : N \longrightarrow M$, com $s \in \mathcal{S}$ e $M \in \text{Ob}\mathcal{B}$, existe um morfismo $u : P \longrightarrow N$ tal que $su \in \mathcal{S}$ e $P \in \text{Ob}\mathcal{B}$.*
- (ii) *Para cada morfismo $s : N \longrightarrow M$, com $s \in \mathcal{S}$ e $N \in \text{Ob}\mathcal{B}$, existe um morfismo $u : M \longrightarrow P$ tal que $us \in \mathcal{S}$ e $P \in \text{Ob}\mathcal{B}$.*

1.3 Limite Inverso

Nesta seção apenas apresentamos o conceito de limite inverso com o propósito de fixar a notação de resultados utilizados no capítulo 4. Para uma exposição mais detalhada deixamos como referência [8], [2] e [17].

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e I um conjunto parcialmente ordenado. Um *sistema inverso* em $\mathcal{C}$ é o par ordenado $((M_i)_{i \in I}, (\psi_i^j)_{j \succeq i})$, ou simplesmente, (M_i, ψ_i^j) , onde $(M_i)_{i \in I}$ é uma família indexada de objetos em $\mathcal{C}$ e $(\psi_i^j : M_j \longrightarrow M_i)_{j \succeq i}$ é uma

família indexada de morfismos o qual $\psi_i^i = 1_{M_i}$, para todo i e tal que o seguinte diagrama comuta sempre que $k \succeq j \succeq i$

$$\begin{array}{ccc} M_k & \xrightarrow{\psi_i^k} & M_i \\ & \searrow \psi_j^k & \nearrow \psi_i^j \\ & M_j & \end{array}$$

Sejam I um conjunto parcialmente ordenado, $\mathcal{C}$ uma categoria e (M_i, ψ_i^j) um sistema inverso de $\mathcal{C}$ sobre I . O *limite inverso* (também chamado de limite projetivo ou limite) é o objeto $\varprojlim M_i$ e uma família de projeções $\alpha_i : \varprojlim M_i \longrightarrow M_i$, com $i \in I$ tal que

- (i) $\psi_i^j \alpha_j = \alpha_i$, quando $i \preceq j$.
- (ii) Para todo $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ e todo morfismo $f_i : X \longrightarrow M_i$ satisfazendo $\psi_i^j f_j = f_i$, para todo $i \preceq j$, existe um único morfismo $\theta : X \longrightarrow \varprojlim M_i$ tal que o diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim M_i & \xleftarrow{\theta} & X \\ & \searrow \alpha_i & \nearrow f_i \\ & M_i & \\ & \uparrow \psi_i^j & \nearrow f_j \\ & M_j & \end{array}$$

1.4 Álgebras e Quivers

Nesta seção abordaremos um pouco sobre Teoria de Representações. Para detalhes e demonstrações citamos [7].

Seja K um corpo. Uma K -álgebra Λ é um anel $(\Lambda, +, \cdot)$ com unidade que possui uma estrutura de K -espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, isto é, tal que para todo $k \in K$, e para todos $x, y \in \Lambda$, temos $k(x \cdot y) = (xk) \cdot y = x \cdot (ky) = (x \cdot y)k$.

Uma K -álgebra Λ é dita de *dimensão finita* se ela possui dimensão finita como espaço vetorial e de *dimensão infinita* caso contrário. Um *homomorfismo* $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ entre duas K -álgebras Λ e Γ é um homomorfismo de anéis que é linear sobre K .

Um *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ consiste de um conjunto de *vértices* Q_0 , um conjunto de *flechas* Q_1 e duas aplicações $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$. Assim toda flecha $\alpha \in Q_1$ tem um “começo” num vértice $s(\alpha)$ e um “final” num vértice $t(\alpha)$ bem definidos. Graficamente uma flecha é denotada por $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$. Desta maneira podemos denotar o quiver simplesmente por $Q = (Q_0, Q_1)$. O quiver é dito *finito* se Q_0 e Q_1 são finitos. O quiver é dito *conexo* se o grafo obtido pelo “esquecimento” da orientação das flechas é conexo. Neste texto todos os quivers são finitos e conexos.

Um *caminho não trivial* σ de comprimento $r \geq 1$ num quiver Q é uma sequência de flechas $\sigma = \alpha_r \alpha_{r-1} \dots \alpha_1$ tais que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, para todo $1 \leq j \leq r$. Graficamente um caminho σ é denotado na forma:

$$i \xrightarrow{\alpha_1} t(\alpha_1) \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{r-1}} t(\alpha_{r-1}) \xrightarrow{\alpha_r} j$$

Definimos o começo de um caminho $\sigma = \alpha_r \dots \alpha_1$ pelo vértice $s(\sigma) = s(\alpha_1)$ e o término por $t(\sigma) = t(\alpha_r)$. Um caminho com mesmo começo e fim $s(\sigma) = t(\sigma)$ é chamado *ciclo* se for de comprimento maior que 1 e *loop* se for de comprimento 1. Para cada vértice $i \in Q_0$, definimos o *caminho trivial* ε_i , de comprimento zero, com $s(\varepsilon_i) = t(\varepsilon_i) = i$. Para todo par de vértices $i, j \in Q_0$ denotamos $Q(i, j)$ o conjunto de todos os caminhos σ tais que $s(\sigma) = i$ e $t(\sigma) = j$. Dados um vértice $i \in Q_0$ e um caminho σ a justaposição de caminhos induz a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} Q(i, \sigma) : & Q(i, s(\sigma)) & \longrightarrow & Q(i, t(\sigma)) \\ & \mu & \longmapsto & \sigma\mu \end{array}$$

e a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} Q(\sigma, j) : & Q(t(\sigma), j) & \longrightarrow & Q(s(\sigma), j) \\ & \mu & \longmapsto & \mu\sigma \end{array}$$

que são chamadas *composição de caminhos*.

Sejam Q um quiver e K um corpo. Consideremos o conjunto $\mathbf{Pa}$ de todos os caminhos, triviais e não triviais, do quiver Q . Denotamos $KQ = K[\mathbf{Pa}]$ o espaço vetorial gerado pelo conjunto de caminhos em Q , ou seja, elementos de KQ são combinações lineares formais $\sum_j \lambda_j C_j$ tais que $\lambda_j \in K$, $C_j \in \mathbf{Pa}$ e $\lambda_j \neq 0$ para um número finito de índices j .

Sejam $C = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1$ e $D = \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_1$ dois caminhos não triviais em Q . Se $t(D) = s(C)$ denotamos $CD = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1 \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_1$ ao caminho formado pela justaposição deles. Se $C = \varepsilon_{t(D)}$ ou $D = \varepsilon_{s(C)}$ são os caminhos triviais definimos $\varepsilon_{t(D)}D = D$ e $C\varepsilon_{s(C)} = C$, respectivamente. Vamos definir sobre o conjunto de caminhos $\mathbf{Pa}$ uma multiplicação induzida por estas justaposições. Para todo par de caminhos $C, D \in \mathbf{Pa}$, definimos $C \cdot D = CD$, se $t(D) = s(C)$ e $C \cdot D = 0$, se $t(D) \neq s(C)$.

Estendemos esta multiplicação para o espaço vetorial KQ por linearidade e distributividade. Uma verificação direta mostra que esta multiplicação é associativa e possui unidade $1 = \sum_{i \in Q_0} \varepsilon_i$. Com esta multiplicação o espaço vetorial

KQ é uma K -álgebra, chamada *álgebra de caminhos* do quiver Q . Se Q é um quiver sem ciclos, segue que o conjunto de caminhos $\mathbf{Pa}$ é finito e daí KQ é uma K -álgebra de dimensão finita. Prova-se que se Q é um quiver finito, a álgebra de caminho KQ é conexa se, e somente se, Q é um quiver conexo.

Seja $Q = (Q_0, Q_1)$ um quiver finito. Denotamos por R_Q o ideal da álgebra de caminhos KQ gerado pelas flechas $\alpha \in Q_1$. Um ideal bilateral $\mathcal{I}$ de KQ é dito *admissível* se existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$. Uma *relação* em Q com coeficientes em K é uma combinação K -linear de caminhos de comprimento maior ou igual a 2 com mesmo início e mesmo fim. Assim, a relação ρ é um

elemento de KQ tal que

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i,$$

onde λ_i são escalares (não todos nulos) e w_i são caminhos em Q de comprimento maior ou igual a 2 tais que, se $i \neq j$, então o início (ou o final, respectivamente) de w_i coincide com w_j .

Prova-se que se Q é um quiver finito todo ideal admissível $\mathcal{I}$ de KQ é finitamente gerado. Se $\mathcal{I} = \langle \rho_i \rangle$ é um ideal admissível, denotamos $(Q, \mathcal{I})$ o quiver com relações (ρ_i) e a álgebra $KQ/\mathcal{I}$ é chamada álgebra de caminhos sobre o quiver com relações e denotada $\Lambda = K(Q, \mathcal{I})$.

Sejam Λ uma K -álgebra e tomemos $\{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. Dizemos que a álgebra é *básica* se os Λ -módulos projetivos $e_i\Lambda$ e $e_j\Lambda$ não são isomorfos para todos $i \neq j$. Prova-se que a álgebra de caminhos $\Lambda = K(Q, \mathcal{I})$ de um quiver com relações é básica e de dimensão finita

Nem sempre os elementos e as operações de uma álgebra são fáceis de manipular. Podem ocorrer exemplos muito “abstratos”. A realização “concreta” de uma álgebra é um dos objetivos da Teoria de Representações de Álgebras. Dessa forma, encontrar uma maneira de relacionar álgebra com “objetos” mais fáceis de serem estudados torna-se conveniente. O teorema seguinte mostra que, sob certas condições, podemos visualizar uma álgebra como uma álgebra de caminhos de um quiver.

Teorema 1.33 (Gabriel) *Seja Λ uma K -álgebra básica, conexa e de dimensão finita, então existe um quiver Q e um ideal admissível $\mathcal{I}$ da álgebra de caminho KQ tal que $\Lambda \simeq \frac{KQ}{\mathcal{I}}$.*

Através desse teorema toda a álgebra Λ é uma álgebra de caminhos de um quiver com relações $\Lambda = K(Q, \mathcal{I})$.

Seja $Q = (Q_0, Q_1)$ um quiver finito. Uma K -representação M de Q é definido como segue:

- (a) A cada vértice $a \in Q$ é associado um K -espaço vetorial M_a .
- (b) A cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ é associada uma K -aplicação linear $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$.

Uma representação é dita de *dimensão finita* se todo espaço vetorial M_a com $a \in Q_0$, é de dimensão finita.

Sejam $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ e $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ representações de Q . Um *morfismo de representações* $f : M \rightarrow M'$ é uma família $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de aplicações K -lineares $(f_a : M_a \rightarrow M'_a)_{a \in Q_0}$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ f_a \downarrow & & \downarrow f_b \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array}$$

é comutativo, para toda flecha $\alpha \in Q_1$. Denotamos por $\text{rep}_K Q$ a categoria de representações do quiver Q .

Prova-se que se Q é um quiver finito, então a categoria $\text{rep}_K(Q)$ é abeliana. O núcleo, o conúcleo, objeto nulo e a soma se definem de maneira natural. Uma representação $M \in \text{rep}_K(Q)$ não nula é dita *indecomponível* se, para toda decomposição $M = M_1 \oplus M_2$, então $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$. As representações indecomponíveis em $\text{rep}_K(Q)$ são de grande importância em virtude do seguinte teorema:

Teorema 1.34 (*Krull-Schmidt*) *Seja $M = (M_i, \varphi_\alpha) \in \text{rep}_K(Q)$ uma representação de um quiver Q sobre um corpo K . Então existe uma decomposição*

$$M = M_1^{d_1} \oplus M_2^{d_2} \oplus \dots \oplus M_r^{d_r},$$

onde M_i , $i = 1, 2, \dots, r$, são representações indecomponíveis, duas a duas não isomorfas. Além disso, esta decomposição é única a menos de ordem e isomorfismos.

Podemos mostrar que temos uma equivalência entre as categorias $\text{mod-}\Lambda$ e $\text{rep}_K(Q)$. Através desta equivalência podemos descrever os módulos simples, projetivos e injetivos indecomponíveis como representações do quiver $(Q, \mathcal{I})$. Seja $a \in Q_0$ um vértice de Q . O módulo simples $S(a)$ corresponde a representação $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ de Q definida por:

$$S(a)_b = \begin{cases} 0, & \text{se } b \neq a \\ K, & \text{se } b = a \end{cases} \quad \varphi_\alpha = 0, \text{ para toda flecha } \alpha \in Q_1.$$

O Λ -módulo projetivo à direita $P(a)$ corresponde a representação

$$(P(a)_b, \varphi_\beta),$$

onde $P(a)_b$ é o K -espaço vetorial cuja base é o conjunto $\{\bar{w} = w + \mathcal{I}\}$, com w caminho de a até b e, para qualquer flecha $\beta : b \longrightarrow c$, a aplicação K -linear $\varphi_\beta : P(a)_b \longrightarrow P(a)_c$ é dada pela multiplicação à direita por $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$.

O Λ -módulo injetivo à direita $I(a)$ corresponde a representação

$$(I(a)_b, \varphi_\beta),$$

onde $I(a)_b$ é o dual do K -espaço vetorial com base o conjunto $\{\bar{w} = w + \mathcal{I}\}$, com w caminho de a até b e, para qualquer flecha $\beta : b \longrightarrow c$, a aplicação K -linear $\varphi_\beta : I(a)_b \longrightarrow I(a)_c$ é dada pelo dual da multiplicação à esquerda por $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$.

Exemplo 1.35 *Seja a álgebra Λ , representada pelo quiver Q abaixo com a relação comutatividade*

$$Q : \quad \begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \longrightarrow & d \end{array}$$

Os módulos simples são dados por:

$$\begin{array}{cccc}
 S(a) : K \longrightarrow 0 & S(b) : 0 \longrightarrow K & S(c) : 0 \longrightarrow 0 & S(d) : 0 \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 0 \longrightarrow 0 & 0 \longrightarrow 0 & K \longrightarrow 0 & 0 \longrightarrow K
 \end{array}$$

Os módulos injetivos indecomponíveis são dados por:

$$\begin{array}{cccc}
 I(a) : K \longrightarrow K & I(b) : 0 \longrightarrow K & I(c) : 0 \longrightarrow 0 & I(d) : 0 \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 K \longrightarrow K & 0 \longrightarrow K & K \longrightarrow K & 0 \longrightarrow K
 \end{array}$$

Os módulos projetivos indecomponíveis são dados por:

$$\begin{array}{cccc}
 P(a) : K \longrightarrow 0 & P(b) : K \longrightarrow K & P(c) : K \longrightarrow 0 & P(d) : K \longrightarrow K \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 0 \longrightarrow 0 & 0 \longrightarrow 0 & K \longrightarrow 0 & K \longrightarrow K
 \end{array}$$

Capítulo 2

Categorias trianguladas

No próximo capítulo iremos definir a categoria derivada de uma categoria abeliana. Em geral, esta categoria não é abeliana. Esta deficiência se compensa, pois provaremos que a categoria derivada tem estrutura de categoria triangulada. Os triângulos, que iremos definir neste capítulo, vão ser de certa forma “substitutos” das sequências exatas curtas das categorias abelianas.

2.1 Categorias Trianguladas

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ um automorfismo de $\mathcal{C}$. O funtor T é usualmente chamado funtor translação. O inverso de T é denotado por T^{-1} .

Definição 2.1 *Um triângulo em $\mathcal{C}$ é uma tripla (u, v, w) de morfismos em $\mathcal{C}$ na forma abaixo:*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$$

A sequência acima muitas vezes é encontrada na literatura em um diagrama da forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Daí o uso da palavra triângulo.

Definição 2.2 *Um morfismo entre dois triângulos (u, v, w) e (u', v', w') é uma tripla (Φ_1, Φ_2, Φ_3) de morfismos em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_3 & & \downarrow T(\Phi_1) \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & T(X') \end{array}$$

é comutativo. Um morfismo de triângulos é um isomorfismo de triângulos se Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 são isomorfismos.

Definição 2.3 Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita triangulada se existe uma classe de triângulos distinguidos τ , também chamados de triângulos exatos, satisfazendo as seguintes condições:

- (T1) (a) τ é fechada para isomorfismos.
 (b) Para todo objeto $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $(1, 0, 0)$ é um triângulo distinguido.
 (c) Para todo morfismo u em $\mathcal{C}$ existe um triângulo distinguido (u, v, w) .
- (T2) Se (u, v, w) é um triângulo distinguido, então $(v, w, -T(u))$ é um triângulo distinguido. Esta condição é conhecida como rotação do triângulo o que se justifica pelos diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & T(X) & \\ -T(u) \swarrow & & \nwarrow w \\ Y & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

(T3) (O axioma do octaedro) Dados os triângulos distinguidos

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u_1} & Y & \xrightarrow{u_2} & U & \xrightarrow{u_3} & T(X) \\ Y & \xrightarrow{w_1} & Z & \xrightarrow{w_2} & W & \xrightarrow{w_3} & T(Y) \end{array}$$

temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u_1} & Y & \xrightarrow{u_2} & U & \xrightarrow{u_3} & T(X) \\ \parallel & & \downarrow w_1 & & \downarrow \delta_1 & & \parallel \\ X & \xrightarrow{w_1 u_1} & Z & \xrightarrow{v_2} & V & \xrightarrow{v_3} & T(X) \\ & & \downarrow w_2 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow T(u_1) \\ & & W & \xrightarrow{w_3} & W & \xrightarrow{w_3} & T(Y) \\ & & \downarrow w_3 & & \downarrow T(u_2)w_3 & & \\ & & T(Y) & \xrightarrow{T(u_2)} & T(U) & & \end{array} \quad (*)$$

Então existem δ_1 e δ_2 tal que $U \xrightarrow{\delta_1} V \xrightarrow{\delta_2} W \xrightarrow{T(u_2)w_3} T(U)$ é um triângulo distinguido e o diagrama $(*)$ é comutativo. Este axioma está vinculado a um diagrama que pode ser apresentado na forma tridimensional de um octaedro, daí a justificativa do nome utilizado na nomenclatura.

Denotaremos uma categoria triangulada pela tripla $(\mathcal{C}, T, \tau)$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria aditiva, T um automorfismo em $\mathcal{C}$ e τ a classe de triângulos que satisfazem (T1) e (T2) e (T3).

Definição 2.4 Sejam $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, T, \tau)$ e $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', T', \tau')$ categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é dito exato se existe uma transformação natural invertível $\alpha : FT \rightarrow T'F$ tal que $(Fu, Fv, \alpha_X Fw)$ está em τ' sempre que (u, v, w) está em τ .

Definição 2.5 Dizemos que o funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é uma equivalência triangular se o funtor F é exato e uma equivalência de categorias.

Lema 2.6 Se $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é uma equivalência triangular e G é o quase inverso de F , então G é uma equivalência triangular.

Definição 2.7 Um funtor aditivo $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ de uma categoria triangulada em uma categoria abeliana é dito funtor cohomológico(covariante) se dado um triângulo distinguido (u, v, w) , temos que a sequência longa

$$\dots H(T^n X) \xrightarrow{H(T^n u)} H(T^n Y) \xrightarrow{H(T^n v)} H(T^n Z) \xrightarrow{H(T^n w)} H(T^{n+1} X) \dots$$

é exata.

Um funtor aditivo $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ é dito funtor cohomológico(contravariante) se dado um triângulo distinguido (u, v, w) , temos que a sequência longa

$$\dots H(T^{n+1} X) \xrightarrow{H(T^n u)} H(T^n Z) \xrightarrow{H(T^n v)} H(T^n Y) \xrightarrow{H(T^n w)} H(T^n X) \dots$$

é exata.

Definição 2.8 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada. Uma subcategoria (ou mais geralmente uma classe de objetos) $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ gera $\mathcal{C}$ como categoria triangulada se não existe uma subcategoria própria plena de $\mathcal{C}$, fechada para isomorfismos, que contém $\mathcal{B}$.

Na literatura encontramos a definição de categoria triangulada definindo quatro axiomas, denotados por $(TR1)$, $(TR2)$, $(TR3)$ e $(TR4)$ como podemos ver em [3]. Nosso $(T1)$ refere-se ao $(TR1)$, $(T2)$ refere-se ao $(TR2)$, $(T3)$ refere-se a $(TR4)$. Utilizando o artigo [9] provaremos que o axioma $(TR3)$ (lema a seguir) provém dos outros axiomas citados.

Lema 2.9 $(TR3)$ Se as linhas são triângulos distinguidos e o quadrado da esquerda é comutativo no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow Ti \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

então existe um morfismo $k : Z \longrightarrow Z'$ tal que (i, j, k) é um morfismo de triângulos.

Demonstração: Isto segue de parte do 3×3 lema que enunciaremos e provaremos a seguir. ■

Lema 2.10 Seja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ um triângulo distinguido. Então:

$$(a) \quad g \circ f = h \circ g = 0.$$

(b) Se $u : U \longrightarrow Y$ é tal que $g \circ u = 0$, então existe $v : U \longrightarrow X$ tal que $u = f \circ v$.

(c) Se $s : Y \longrightarrow W$ é tal que $s \circ f = 0$, então existe $t : Z \longrightarrow W$ tal que $s = t \circ g$.

Demonstração: (a) Por (T2) basta mostrarmos que $g \circ f = 0$. Usando (T1) temos o diagrama onde as linhas são triângulos distinguidos:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow f & & & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \end{array}$$

Se aplicarmos o lema 2.9, temos que existe $s : 0 \longrightarrow Z$ tal que

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow f & & \downarrow s & & \downarrow T(1_X) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \end{array}$$

o diagrama é comutativo e portanto $g \circ f = s \circ 0 = 0$.

(b) Aplicando (T2) aos triângulos distinguidos

$$U \xrightarrow{1_U} U \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(U) \quad \text{e} \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$$

obtemos o diagrama comutativo com linhas triângulos distinguidos

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(U) & \xrightarrow{-T(1_U)} & T(U) \\ \downarrow u & & \downarrow 0 & & & & \downarrow T(u) \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) & \xrightarrow{-T(f)} & T(Y) \end{array}$$

Pelo lema 2.9 existe $s : T(U) \longrightarrow T(X)$ tal que $T(u) \circ (-T(1_U)) = -T(f) \circ s$. Logo

$$T(u \circ 1_U) = T(u) \circ T(1_U) = T(f) \circ s = T(f) \circ T(T^{-1}(s)) = T(f \circ T^{-1}(s)).$$

Como T é um automorfismo temos $u \circ 1_U = f \circ T^{-1}(s)$. E então existe $v = T^{-1}(s)$ tal que $u = f \circ v$.

(c) Análogo a letra (b). ■

Proposição 2.11 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada, (u, v, w) um triângulo distinguido e $M \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Então*

(a) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ são funtores cohomológicos.

(b) Se (f, g, h) é um morfismo de triângulos distinguidos de (u, v, w) em (u', v', w') tal que f e g são isomorfismos, então h também o é.

Demonstração:

(a) Vamos mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ é funtor cohomológico. A outra afirmação segue por dualidade.

Aplicando o funtor covariante $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ em um triângulo distinguido

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

obtemos a seguinte sequência de grupos abelianos:

$$\dots \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n X) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n u)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n v)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n Z) \dots$$

Pelo lema 2.10 (a) é suficiente verificarmos a exatidão em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n Y)$. Se $\alpha : M \longrightarrow T^n X$, temos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n v) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n u)(\alpha) = T^n v T^n u \alpha = T^n (vu)(\alpha) = 0$$

pelo lema 2.10(a). Logo temos $\text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n u)) \subset \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n v))$. Resta mostrarmos que $\text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n v)) \subset \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n u))$. Seja então $g : M \longrightarrow T^n Y$ um morfismo tal que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n v)(g) = 0$.

Por (T2) temos $(v, w, -T(u))$ é um triângulo distinguido e por (T1), temos o triângulo distinguido $M \xrightarrow{1} M \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow TM$. Novamente por (T2), temos $M \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TM \longrightarrow TM$ é um triângulo distinguido. Assim temos o diagrama tal que $T^n v g = 0$,

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TM & \longrightarrow & TM \\ \downarrow g & & \downarrow 0 & & \downarrow Tf & & \downarrow Tg \\ T^n Y & \xrightarrow{T^n v} & T^n Z & \xrightarrow{T^n w} & T^{n+1} X & \xrightarrow{T^{n+1}(u)} & T^{n+1} Y \end{array}$$

Pelo lema 2.9, existe $Tf : TM \longrightarrow T^{n+1} X$ tal que $-T^{n+1}(u)T(f) = T(g)$. Como T é automorfismo, existe um morfismo $f : M \longrightarrow T^n X$ tal que $T^n u f = g$, ou seja, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n u)(f) = g$. Logo $g \in \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n u))$. Portanto $\text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n v)) = \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^n u))$.

(b) Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow T(f) \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

com f e g isomorfismos. Aplicando o funtor cohomológico $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', -)$, que para simplificar a notação denotaremos esse funtor apenas por $(Z', -)$, obtemos o diagrama comutativo onde as linhas são sequências exatas pela letra (a).

$$\begin{array}{ccccccccc} (Z', X) & \longrightarrow & (Z', Y) & \longrightarrow & (Z', Z) & \longrightarrow & (Z', TX) & \longrightarrow & (Z', TY) \\ \downarrow (Z', f) & & \downarrow (Z', g) & & \downarrow (Z', h) & & \downarrow (Z', T(f)) & & \downarrow (Z', Tg) \\ (Z', X') & \longrightarrow & (Z', Y') & \longrightarrow & (Z', Z') & \longrightarrow & (Z', TX') & \longrightarrow & (Z', TY') \end{array}$$

Como $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', f)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', g)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tf)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tg)$ são isomorfismos, segue do 5-lema (lema 1.14) que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', h)$ é um isomorfismo. Logo existe $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z')$ tal que $h \circ \varphi = 1_{Z'}$.

Repetindo o mesmo procedimento, porém aplicando o funtor cohomológico $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$, obtemos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(h, Z) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z)$ é um isomorfismo. Logo existe $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ tal que $\psi \circ h = 1_Z$.

Assim temos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(h, Z)(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', h)(\varphi - \psi)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(h, Z)(h\varphi - h\psi) = h\varphi h - h\psi h = 0.$$

Como $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(h, Z)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', h)$ são injetoras, obtemos $\varphi = \psi$. Portanto h é um isomorfismo. ■

O seguinte lema mostra que a “recíproca” de (T2) é satisfeita.

Lema 2.12 *Se $(v, w, -T(u))$ é um triângulo distinguido, então (u, v, w) é um triângulo distinguido.*

Demonstração: Dado o morfismo $X \xrightarrow{u} Y$, temos por (T1) o triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX$. Aplicando (T2) obtemos o triângulo distinguido $TX \xrightarrow{-Tu} TY \xrightarrow{-Tv'} TZ' \xrightarrow{-Tw'} T^2X$.

Aplicando (T2) no triângulo distinguido da hipótese temos o triângulo distinguido $TX \xrightarrow{-Tu} TY \xrightarrow{-Tv} TZ \xrightarrow{-Tw} T^2X$.

Assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} TX & \xrightarrow{-Tu} & TY & \xrightarrow{-Tv} & TZ & \xrightarrow{-Tw} & T^2X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ TX & \xrightarrow{-Tu} & TY & \xrightarrow{-Tv'} & TZ' & \xrightarrow{-Tw'} & T^2X \end{array}$$

Pelo lema 2.9 existe o morfismo h o qual é um isomorfismo pela proposição 2.11. Aplicando o funtor exato $-T^{-1}$ ao diagrama acima temos,

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow T^{-1}h & & \parallel \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \end{array}$$

Assim temos que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ é isomorfo ao triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX$. Por (T1), segue que

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

é um triângulo distinguido. ■

Lema 2.13 (3 × 3 lema) *Assuma que $j \circ f = f' \circ i$ e que as duas linhas superiores e as duas colunas à esquerda são triângulos distinguidos no seguinte*

diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow Ti \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \\
 \downarrow i' & & \downarrow j' & & \downarrow k' & & \downarrow Ti' \\
 X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{g''} & Z'' & \xrightarrow{h''} & TX'' \\
 \downarrow i'' & & \downarrow j'' & & \downarrow k'' & & \downarrow -Ti'' \\
 TX & \xrightarrow{Tf} & TY & \xrightarrow{Tg} & TZ & \xrightarrow{-Th} & T^2X
 \end{array}
 \quad (*)$$

Então existe um objeto Z'' e existem morfismos tracejados $f'', g'', h'', k, k', k''$ tais que todos os quadrados são comutativos exceto o último quadrado à direita que satisfaz $-T(h)k'' = T(i)h''$, e todas as quatro linhas e quatro colunas são triângulos distinguidos.

Demonstração: Como $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ é triângulo distinguido, por (T2) temos que $TX \xrightarrow{-Tf} TY \xrightarrow{-Tg} TZ \xrightarrow{-Th} T^2X$ é triângulo distinguido.

Notemos que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ & \xrightarrow{-Th} & T^2X \\
 \downarrow Id & & \downarrow -Id & & \downarrow Id & & \downarrow Id \\
 TX & \xrightarrow{Tf} & TY & \xrightarrow{Tg} & TZ & \xrightarrow{-Th} & T^2X
 \end{array}$$

Como o morfismo Id é um isomorfismo e $TX \xrightarrow{-Tf} TY \xrightarrow{-Tg} TZ \xrightarrow{-Th} T^2X$ é um triângulo distinguido, segue que $TX \xrightarrow{Tf} TY \xrightarrow{Tg} TZ \xrightarrow{-Th} T^2X$ é um triângulo distinguido.

Da mesma forma segue $TX \xrightarrow{Ti} TX' \xrightarrow{Ti'} TX'' \xrightarrow{-Ti''} T^2X$ é triângulo distinguido.

Aplicando (T1) ao morfismo $j \circ f : X \longrightarrow Y'$ construímos o triângulo distinguido $X \xrightarrow{j \circ f} Y' \xrightarrow{p} V \xrightarrow{q} TX$. Assim temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \parallel & & \downarrow j & & \downarrow s & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{j \circ f} & Y' & \xrightarrow{p} & V & \xrightarrow{q} & TX \\
 \downarrow j' & & \downarrow j' & & \downarrow t & & \downarrow Tf \\
 Y'' & \xlongequal{\quad} & Y'' & \xrightarrow{j''} & TY & & \\
 \downarrow j'' & & \downarrow Tg \circ j'' & & & & \\
 TY & \xrightarrow{Tg} & TZ & & & &
 \end{array}$$

Por (T3) obtemos o triângulo distinguido $Z \xrightarrow{s} V \xrightarrow{t} Y'' \xrightarrow{Tg \circ j''} TZ$ tal que:

$$p \circ j = s \circ g \quad (1)$$

$$t \circ p = j' \quad (2)$$

$$j'' \circ t = Tf \circ q \quad (3)$$

$$q \circ s = h \quad (4)$$

Também temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{i'} & X'' & \xrightarrow{i''} & TX \\ \parallel & & \downarrow f' & & \downarrow s' & & \parallel \\ X & \xrightarrow{j \circ f} & Y' & \xrightarrow{p} & V & \xrightarrow{q} & TX \\ & & \downarrow g' & & \downarrow t' & & \downarrow Ti \\ & & Z' & \xlongequal{\quad} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \\ & & \downarrow h' & & \downarrow Ti' \circ h' & & \\ & & TX' & \xrightarrow{Ti'} & TX'' & & \end{array}$$

Por (T3) obtemos o triângulo distinguido: $X'' \xrightarrow{s'} V \xrightarrow{t'} Z' \xrightarrow{Ti' \circ h'} TX''$ tal que

$$p \circ f' = s' \circ i' \quad (5)$$

$$t' \circ p = g' \quad (6)$$

$$q \circ s' = i'' \quad (7)$$

$$h' \circ t' = Ti \circ q \quad (8)$$

Definimos $k = t' \circ s : Z \longrightarrow Z'$. Assim pelas igualdades acima temos:

$$k \circ g = t' \circ s \circ g \stackrel{(1)}{=} t' \circ p \circ j \stackrel{(6)}{=} g' \circ j \quad (9)$$

$$h' \circ k = h' \circ t' \circ s \stackrel{(8)}{=} Ti \circ q \circ s \stackrel{(4)}{=} Ti \circ h \quad (10)$$

Disso já temos a prova de (TR3) (lema 2.9).

Definimos $f'' = t \circ s' : X'' \longrightarrow Y''$. Aplicando (T1) ao morfismo f'' obtemos

o triângulo distinguido $X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' \xrightarrow{h''} TX''$.

Observemos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X'' & \xrightarrow{s'} & V & \xrightarrow{t'} & Z' & \xrightarrow{Ti \circ h'} & TX'' \\ \parallel & & \downarrow t & & \downarrow k' & & \parallel \\ X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{g''} & Z'' & \xrightarrow{h''} & TX'' \\ & & \downarrow Tg \circ j'' & & \downarrow k'' & & \downarrow Ts' \\ & & TZ & \xlongequal{\quad} & TZ & \xrightarrow{-Ts} & TV \\ & & \downarrow -Ts & & \downarrow Tt' \circ -Ts & & \\ & & TV & \xrightarrow{Tt'} & TZ' & & \end{array}$$

Por (T3) obtemos o triângulo distinguido $Z' \xrightarrow{k'} Z'' \xrightarrow{k''} TZ \xrightarrow{Tt' \circ (-Ts)} TZ'$ uma vez que $V \xrightarrow{t} Y'' \xrightarrow{Tg \circ j''} TZ \xrightarrow{-Ts} TV$ é triângulo distinguido por (T2).

E ainda temos as comutatividades:

$$g'' \circ t = k' \circ t' \quad (11)$$

$$(-Ts) \circ k'' = Ts' \circ h'' \quad (12)$$

$$h'' \circ k' = Ti \circ h' \quad (13)$$

$$Tg \circ j'' = k'' \circ g'' \quad (14)$$

Como $k = t' \circ s$ então $-Tt' \circ Ts = -T(t' \circ s) = -Tk$ e ainda como temos o triângulo distinguido $Z' \xrightarrow{k'} Z'' \xrightarrow{k''} TZ \xrightarrow{-Tk} TZ'$ segue de (T2) que

$$Z \xrightarrow{k} Z' \xrightarrow{k'} Z'' \xrightarrow{k''} TZ$$

é um triângulo distinguido.

Para finalizar a prova, precisamos checar as comutatividades e a anticomutatividade do diagrama (*):

$$\begin{array}{llll} k \circ g & \stackrel{(9)}{=} & g' \circ j & \\ h' \circ k & \stackrel{(10)}{=} & Ti \circ h & \\ f'' \circ i' & \stackrel{\text{def}}{=} & t \circ s' \circ i' & \stackrel{(5)}{=} & t \circ p \circ f' & \stackrel{(2)}{=} & j' \circ f' \\ g'' \circ j' & \stackrel{(2)}{=} & g'' \circ t \circ p & \stackrel{(11)}{=} & k' \circ t' \circ p & \stackrel{(6)}{=} & k' \circ g' \\ h'' \circ k' & \stackrel{(13)}{=} & Ti \circ h' & \\ j'' \circ f'' & \stackrel{\text{def}}{=} & j'' \circ t \circ s' & \stackrel{(3)}{=} & Tf \circ q \circ s' & \stackrel{(7)}{=} & Tf \circ i'' \\ Tg \circ j'' & \stackrel{(14)}{=} & k'' \circ g'' & \end{array}$$

E ainda temos $(-Th) \circ k'' \stackrel{(4)}{=} -T(q \circ s) \circ k'' = Tq \circ (-Ts) \circ k'' \stackrel{(12)}{=} Tq \circ (Ts') \circ h'' = T(q \circ s') \circ h'' \stackrel{(7)}{=} Ti'' \circ h'' = -((-Ti'') \circ h'')$. ■

Observação 2.14 *O artigo [9] demonstra que dado (T1), (T2) e o 3×3 lema temos o axioma do octaedro.*

Lema 2.15 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada e (u, v, w) um triângulo distinguido. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $w = 0$
- (ii) u é seção.
- (iii) v é retração.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Por (T1) temos $(1_X, 0, 0)$ é um triângulo distinguido. Consideremos o seguinte diagrama com as linhas sendo triângulos distinguidos:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ \downarrow 1_X & & \downarrow u' & & \downarrow 0 & & \downarrow 1_{T(X)} \\ X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X) \end{array}$$

Pelo lema 2.9 (após aplicarmos (T2)), existe $u' : Y \longrightarrow X$ tal que o diagrama é comutativo, uma vez que $w = 0$ e assim temos a comutatividade do quadrado à direita. Logo $u' \circ u = 1_X$, e consequentemente temos que u é seção.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por hipótese u é seção, logo existe u' tal que $(1_X, u', 0)$ é um morfismo do triângulo distinguido (u, v, w) no triângulo distinguido $(1_X, 0, 0)$. Ou seja, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ \downarrow 1_X & & \downarrow u' & & \downarrow 0 & & \downarrow 1_{T(X)} \\ X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X) \end{array}$$

Logo $w = 1_{T(X)} \circ w = 0$.

Analogamente podemos mostrar que as afirmações (i) e (iii) são equivalentes. ■

Lema 2.16 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada. A tripla $(u, 0, 0)$ é um triângulo distinguido se, e somente se, u é um isomorfismo.*

Demonstração: Se $(u, 0, 0)$ é um triângulo distinguido, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow 1_Y & & \downarrow 0 & & \downarrow T(u) \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(Y) \end{array}$$

Como $(u, 1_Y, 0)$ é um morfismo entre triângulos distinguidos e 1_Y e 0 são isomorfismos segue que u é isomorfismo.

Reciprocamente, considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow 1_Y & & \downarrow 0 & & \downarrow T(u) \\ X & \xrightarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(Y) \end{array}$$

onde $(1_Y, 0, 0)$ é um triângulo distinguido por (T1). Como u , 1_Y e 0 são isomorfismos segue que $(u, 0, 0)$ é isomorfo ao triângulo distinguido $(1_Y, 0, 0)$. Por (T1) temos que $(u, 0, 0)$ é um triângulo distinguido. ■

2.2 Localização de categorias trianguladas

Nesta seção provaremos que a localização de uma categoria triangulada com respeito a um certo tipo de sistema multiplicativo é também triangulada.

Definição 2.17 *Seja $(\mathcal{C}, T, \tau)$ uma categoria triangulada. Um sistema multiplicativo $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ é compatível com a estrutura triangulada se satisfaz:*

(a) *Para todo morfismo $s \in \mathcal{S}$, temos que $T(s) \in \mathcal{S}$.*

(b) Dado um morfismo de triângulos distinguidos:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_3 & & \downarrow T(\Phi_1) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

Se $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{S}$, então Φ_3 também pertence a $\mathcal{S}$.

Teorema 2.18 *Sejam $(\mathcal{C}, T, \tau)$ uma categoria triangulada e $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ um sistema multiplicativo compatível com a estrutura triangulada de $\mathcal{C}$. Então a localização $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ é triangulada e o funtor de localização leva triângulo distinguido em triângulo distinguido.*

Demonstração: Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{T} & \mathcal{C} \\ Q \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}] & \xrightarrow{\bar{T}} & \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}] \end{array}$$

Como $\mathcal{S}$ é compatível com a estrutura triangulada, dado $s \in \mathcal{S}$ temos $T(s) \in \mathcal{S}$. Logo $Q(T(s))$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$. Pela propriedade universal da localização 1.29 existe $\bar{T} : \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ tal que $\bar{T} \circ Q = Q \circ T$. Como para objetos $Q(X) = X$ temos da comutatividade que $\bar{T}(X) = T(X)$ e assim $\bar{T}$ é automorfismo pois T o é.

Definimos:

$$\bar{\tau} = \{(f, g, h) \in \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}] \mid (f, g, h) \simeq (Q(u), Q(v), Q(w)), \text{ com } (u, v, w) \in \tau\}$$

Vamos verificar que $\bar{\tau}$ é uma classe de triângulos distinguidos de $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$, ou seja, que $\bar{\tau}$ satisfaz os axiomas da triangulação.

(T1) (a) Claramente qualquer triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é distinguido.

(b) Como $\mathcal{C}$ é triangulada, $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X) \in \tau$. Vamos mostrar que $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \bar{T}(X) \in \bar{\tau}$. Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{Q(1)=1} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 0 & & \downarrow 1 \\ X & \xrightarrow{1} & X & \xrightarrow{1} & 0 & \xrightarrow{0} & \bar{T}(X) \end{array}$$

Como 1 e 0 são isomorfismos em $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$, temos $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \bar{T}(X)$ é um triângulo distinguido.

(c) Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ e consideremos um representante de f dado por $f : X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{g} Y$, com $s \in \mathcal{S}$.

Como $\mathcal{C}$ é uma categoria triangulada podemos considerar o triângulo distinguido $U \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{v} V \xrightarrow{w} T(U)$ em $\mathcal{C}$. Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{Q(g)} & Y & \xrightarrow{Q(v)} & V & \xrightarrow{Q(w)} & \bar{T}(U) \\ \downarrow Q(s) & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow \bar{T}(Q(s)) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{Q(v)} & V & \xrightarrow{\bar{T}(Q(s)) \circ Q(w)} & \bar{T}(X) \end{array}$$

Note que os dois últimos quadrados são comutativos e o primeiro comuta, pois

$$f \circ Q(s) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & U & \\ 1 \swarrow & & \searrow 1 \\ U & & U \\ 1 \swarrow & s \searrow & \swarrow s \\ U & X & U \\ & & \searrow g \\ & & Y \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & U & \\ 1 \swarrow & & \searrow g \\ U & & Y \end{array} \end{array} = Q(g)$$

Portanto o diagrama é um morfismo de triângulos. Como $s \in \mathcal{S}$, temos $Q(s)$ é um isomorfismo. Logo $(Q(s), 1, 1)$ é um isomorfismo de triângulos em $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$. Portanto

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Q(v)} V \xrightarrow{\bar{T}(Q(s)) \circ Q(w)} \bar{T}(X)$$

é um triângulo distinguido.

(T2) Seja $\bar{\Delta} : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \bar{T}(X) \in \bar{\tau}$. Então $\bar{\Delta} \cong Q(\Delta)$, onde $\Delta : U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} W \xrightarrow{w} T(U) \in \tau$

Ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo, com (α, β, γ) isomorfismo de triângulos em $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{Q(u)} & V & \xrightarrow{Q(v)} & W & \xrightarrow{Q(w)} & \bar{T}(U) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \bar{T}(\alpha) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \bar{T}(X) \end{array}$$

Como $\mathcal{C}$ é uma categoria triangulada, podemos aplicar (T2) ao triângulo distinguido Δ e obtemos o triângulo distinguido

$$V \xrightarrow{v} W \xrightarrow{w} T(U) \xrightarrow{-T(u)} T(V)$$

Assim temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{Q(v)} & W & \xrightarrow{Q(w)} & T(U) & \xrightarrow{-Q(T(u))} & T(V) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow T(\alpha) & & \downarrow T(\beta) \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \bar{T}(X) & \xrightarrow{\bar{T}(f)} & \bar{T}(Y) \end{array}$$

E como $(\beta, \gamma, T(\alpha))$ é um isomorfismo de triângulos em $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$, temos que

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \bar{T}(X) \xrightarrow{-\bar{T}(f)} \bar{T}(Y)$$

é um triângulo distinguido em $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$.

(T3) É suficiente verificar para $Q(\Delta)$, onde $\Delta \in \tau$. Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{Q(u)} & B & \xrightarrow{Q(v)} & C & \xrightarrow{Q(w)} & \bar{T}(A) \\
 \parallel & & \downarrow Q(m) & & & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{Q(mu)} & D & \xrightarrow{Q(d)} & F & \xrightarrow{Q(f)} & \bar{T}(A) \\
 & & \downarrow Q(n) & & & & \downarrow \bar{T}(Q(u)) \\
 & & E & \xlongequal{\quad} & E & \xrightarrow{Q(p)} & \bar{T}(B) \\
 & & \downarrow Q(p) & & \downarrow Q(T(v)p) & & \\
 & & \bar{T}(B) & \xrightarrow[Q(T(v))]{\quad} & \bar{T}(C) & &
 \end{array} \quad (*)$$

Como o seguinte quadrado é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{Q(u)} & B \\
 \parallel & & \downarrow Q(m) \\
 A & \xrightarrow{Q(mu)} & D
 \end{array}$$

pelo lema 1.31 existem um representante (R, s, a) da 1_A , um representante (S, t, b) de $Q(m)$ e um morfismo $m' : R \longrightarrow S$ tal que o diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & T(A) \\
 \uparrow s & & \uparrow t & & & & \uparrow T(s) \\
 R & \xrightarrow{m'} & S & & & & TR \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & & & \downarrow T(a) \\
 A & \xrightarrow{mu} & D & \xrightarrow{d} & F & \xrightarrow{f} & T(A)
 \end{array}$$

Como $m' : R \longrightarrow S$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é uma categoria triangulada, por (T1), existe um triângulo distinguido começando por m' , dado por $R \xrightarrow{m'} S \longrightarrow M \longrightarrow TR$. Logo temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & T(A) \\
 \uparrow s & & \uparrow t & & \uparrow k & & \uparrow T(s) \\
 R & \xrightarrow{m'} & S & \longrightarrow & M & \longrightarrow & TR \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow T(a) \\
 A & \xrightarrow{mu} & D & \xrightarrow{d} & F & \xrightarrow{f} & T(A)
 \end{array}$$

Pelo lema 2.9, existem $k : M \longrightarrow C$ e $c : M \longrightarrow F$ tais que o diagrama é comutativo. Como o sistema é compatível com a estrutura triangulada e $s, t \in \mathcal{S}$, então $k \in \mathcal{S}$. Logo tome δ_1 representado por (M, k, c) . Assim existe $\delta_1 : C \longrightarrow F$ tal que o diagrama (*) comuta.

Analogamente, existe $\delta_2 : F \longrightarrow E$ tal que o diagrama (*) comuta. ■

2.3 Exemplo: Categoria Homotópica $\mathcal{K}(\mathcal{A})$

A categoria homotópica de complexos, que definiremos a seguir, é um exemplo de uma categoria triangulada. Além disso, a definição da categoria de homotopia de complexos é o primeiro passo para a construção da categoria derivada que definiremos no capítulo a seguir.

Definição 2.19 Um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é homotopicamente nulo ($f^\bullet \sim 0$) se existem morfismos $k^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, tais que no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^{n-1} & \swarrow k^n & \downarrow f^n & \swarrow k^{n+1} & \downarrow f^{n+1} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

temos $f^n = d_Y^{n-1}k^n + k^{n+1}d_X^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dois morfismos $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são ditos homotópicos se, e somente se, $f^\bullet - g^\bullet \sim 0$.

Proposição 2.20 O conjunto $I(X^\bullet, Y^\bullet)$ de morfismos homotopicamente nulos é um subgrupo de $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Demonstração: O morfismo nulo $0^\bullet \in I(X^\bullet, Y^\bullet)$ pois, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o morfismo $0 : X^n \longrightarrow Y^{n-1}$ é tal que $0 = d_Y^{n-1}0 + 0d_X^n$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 0 & \swarrow 0 & \downarrow 0 & \swarrow 0 & \downarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Sejam $f^\bullet, g^\bullet \in I(X^\bullet, Y^\bullet)$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existem morfismos $k^n, t^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1}$ tais que:

$$f^n = d_Y^{n-1}k^n + k^{n+1}d_X^n$$

$$g^n = d_Y^{n-1}t^n + t^{n+1}d_X^n$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos $f^n - g^n = d_Y^{n-1}(k^n - t^n) + (k^{n+1} - t^{n+1})d_X^n$. Disso segue que $f^\bullet - g^\bullet \in I(X^\bullet, Y^\bullet)$. Portanto, $I(X^\bullet, Y^\bullet)$ é um subgrupo de $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. ■

Definição 2.21 Definimos a categoria homotópica $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ como a categoria que tem como objetos os complexos em $\mathcal{A}$ e como morfismos, os morfismos de complexos a menos de homotopia.

Observação 2.22 Temos as seguintes subcategorias plenas de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$

$$\mathcal{K}^+(\mathcal{A}) = \{X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A}); X^i = 0 \text{ para } i \leq m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{K}^-(\mathcal{A}) = \{X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A}); X^i = 0 \text{ para } i \geq m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{K}^b(\mathcal{A}) = \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}^-(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{A}) = \{X^\bullet \in \mathcal{K}^-(\mathcal{A}), \text{ com } H^i(X^\bullet) = 0 \text{ para todo } i \leq m, m \in \mathbb{Z}\}$$

Observação 2.23 Dado o complexo $P^\bullet : \dots 0 \longrightarrow P \xrightarrow{1} P \longrightarrow 0 \dots$, com P projetivo, temos que o morfismo $h^\bullet : P^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ é homotópico a zero. De fato, existem morfismos (tracejados) tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{1} & P & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \nearrow 0 & \downarrow 1 & \nearrow 1 & \downarrow 1 & \nearrow 0 & \downarrow 0 & \nearrow 0 & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{1} & P & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

ou seja, $h^\bullet \sim 0^\bullet$ em $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$.

Seja $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ e $g^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ morfismos de complexos. Se $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são homotópicos a zero, então $g^\bullet f^\bullet$ é homotópico a zero. Dessa forma a aplicação composição

$$\begin{array}{ccc} \circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet) \\ (g^\bullet, f^\bullet) & \longmapsto & g^\bullet f^\bullet \end{array}$$

induz a aplicação biaditiva

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \times \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \times \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet) \end{array}$$

Disso e pelo fato de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ser uma categoria aditiva, temos que a categoria $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é aditiva.

Observação 2.24 Em geral, a categoria $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ não é abeliana.

Com efeito, seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com extensões não triviais, ou seja, nem toda sequência exata cinde. Considere $u \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ monomorfismo. Sejam $X^\bullet, Y^\bullet$ complexos concentrados no nível zero e $u^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ com $u^0 = u$ e $u^n = 0$, para todo $n \neq 0$.

Suponha $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ seja abeliana. Logo $Z^\bullet = \text{Coker } u^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$. Assim temos a sequência exata $0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Considere o complexo $\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Coker } u \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$. Como $Z^\bullet$ é único a menos de isomorfismo e o complexo acima satisfaz a propriedade de conúcleo podemos assumir

$$Z^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Coker } u \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Seja $T^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ da seguinte forma: $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$
e tomemos $q^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow T^\bullet$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow q^\bullet & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ T^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Consideremos a composição:

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow u^\bullet & & & \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow u & & \downarrow & & \\ Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow q^\bullet & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ T^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Observemos que do diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow 0 & \downarrow 0 & \swarrow 1 & \downarrow u & \swarrow 0 & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

temos $q^\bullet u^\bullet = 0$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Assim pela propriedade universal do conúcleo, existe um morfismo $n^\bullet : Z^\bullet \longrightarrow T^\bullet$ tal que $n^\bullet \pi^\bullet = q^\bullet$, ou seja, o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & Y^\bullet & \xrightarrow{\pi^\bullet} & Z^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow q^\bullet & \nearrow n^\bullet & & & \\ & & & & T^\bullet & & & & \end{array}$$

Por outro lado, consideremos: $m^\bullet : T^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ definido por:

$$\begin{array}{ccccccc} T^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow m^\bullet & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow & & \\ Z^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Coker } u & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Logo, $m^\bullet n^\bullet \pi^\bullet = m^\bullet q^\bullet = \pi^\bullet$. Como $\pi^\bullet$ é epimorfismo, segue que $m^\bullet n^\bullet = 1$. Daí, $n^\bullet$ é seção, consequentemente $Z^\bullet$ é somando de $T^\bullet$, ou seja, $\text{Coker } u$ é somando de Y . Logo a sequência

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\pi} \text{Coker } u \longrightarrow 0$$

cinde. Portanto toda sequência exata cinde em $\mathcal{A}$, o que é uma contradição.

Lema 2.25 *Sejam $H^n(-) : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ o funtor definido em 1.20, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\varphi^\bullet, \psi^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ morfismos homotópicos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Então temos $H^n(\varphi^\bullet) = H^n(\psi^\bullet)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Pela definição temos:

$$H^n(\varphi^\bullet)(\bar{x}) = \overline{\varphi^n(x)} \quad e \quad H^n(\psi^\bullet)(\bar{x}) = \overline{\psi^n(x)}.$$

Vamos verificar que $\varphi^n(x) - \psi^n(x) \in \text{Im } d_Y^{n-1}$.

Como $\varphi^\bullet$ é homotópico a $\psi^\bullet$, existem aplicações $\{k^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1}, n \in \mathbb{Z}\}$ tais que

$$\varphi^n(x) - \psi^n(x) = (\varphi^n - \psi^n)(x) = d_Y^{n-1}k^n(x) + k^{n+1}d_X^n(x) = d_Y^{n-1}k^n(x),$$

pois $x \in \text{Ker } d_X^n$. Assim, $\varphi^n(x) - \psi^n(x) \in \text{Im } d_Y^{n-1}$. Logo, $\overline{\varphi^n(x)} = \overline{\psi^n(x)}$ e portanto, $H^n(\varphi^\bullet) = H^n(\psi^\bullet)$. ■

A recíproca é falsa. De fato, consideremos o seguinte complexo em $\text{mod-}\mathbb{Z}$ e morfismo de complexos como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{2^\bullet} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{2^\bullet} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{2^\bullet} & \cdots \\ 1^\bullet \downarrow & & & 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & \\ & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{2^\bullet} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{2^\bullet} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{2^\bullet} & \cdots \end{array}$$

onde $2^\bullet$ é o morfismo tal que $2^\bullet(\bar{x}) = \overline{2x}$, para todo $\bar{x} \in \mathbb{Z}_4$.

Observemos que $H^n(X^\bullet) = \frac{\text{Ker } 2^\bullet}{\text{Im } 2^\bullet} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, $H^n(1^\bullet) = H^n(0^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, porém $1^\bullet$ não é homotópico a $0^\bullet$. De fato, precisaríamos ter $\{k^n : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 : n \in \mathbb{Z}\}$ tal que

$$2^\bullet k^n(x) + k^{n+1}2^\bullet(x) = (1^\bullet - 0^\bullet)(x) = x,$$

o que não ocorre.

Notemos que pelo lema 2.25, se $f^\bullet \sim g^\bullet$, temos $H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet)$. Logo, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(-) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ dado por:

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \longrightarrow & H^n(X^\bullet) = \frac{\text{Ker } d_X^n}{\text{Im } d_X^{n-1}} \\ \downarrow f^\bullet & & \downarrow H^n(f^\bullet) \\ Y^\bullet & \longrightarrow & H^n(Y^\bullet) = \frac{\text{Ker } d_Y^n}{\text{Im } d_Y^{n-1}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \bar{x} \\ \downarrow \\ \overline{f^n(\bar{x})} \end{array}$$

está bem definida.

Assim temos o seguinte corolário:

Corolário 2.26 Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(-) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ é um funtor.

Definição 2.27 Seja $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ um morfismo de complexos. Definimos o cone de $f^\bullet$ como o complexo $(C_f^\bullet, d_{C_f}^\bullet)$ tal que $C_f^n = X^{n+1} \oplus Y^n$ e $d_{C_f}^n : C_f^n \longrightarrow C_f^{n-1}$ é dado por $d_{C_f}^n = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observemos que $(C_f^\bullet, d_{C_f}^\bullet)$ é um complexo pois, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$d_{C_f}^{n+1} \circ d_{C_f}^n = \begin{pmatrix} d_X^{n+2} d_X^{n+1} & 0 \\ -f^{n+2} d_X^{n+1} + d_Y^{n+1} f^{n+1} & d_Y^{n+1} d_Y^n \end{pmatrix} = 0.$$

Proposição 2.28 *Sejam $f^\bullet, g^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Se $f^\bullet \sim g^\bullet$, então $C_f^\bullet \simeq C_g^\bullet$.*

Demonstração: Como $f^\bullet \sim g^\bullet$, existem $k^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1}$, tais que, no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^{n-1}-g^{n-1} & \nearrow k^n & \downarrow f^n-g^n & \nearrow k^{n+1} & \downarrow f^{n+1}-g^{n+1} \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

$f^n - g^n = d_Y^{n-1} k^n + k^{n+1} d_X^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definimos $\gamma : C_f^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} C_f^\bullet : & \dots \longrightarrow X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}} X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow \gamma & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+1} & 1 \end{pmatrix} \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+2} & 1 \end{pmatrix} \\ C_g^\bullet : & \dots \longrightarrow X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}} X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Observemos que:

$$\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} + d_Y^n k^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^n & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} - k^{n+2} d_X^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

Como $f^{n+1} - g^{n+1} = d_Y^n k^{n+1} + k^{n+2} d_X^{n+1}$, pois $f^\bullet \sim g^\bullet$, temos $f^{n+1} - k^{n+2} d_X^{n+1} = g^{n+1} + d_Y^n k^{n+1}$. Logo o diagrama é comutativo e γ é morfismo de complexos.

Como $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+1} & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, segue que γ é isomorfismo. Portanto $C_f^\bullet \simeq C_g^\bullet$.

■

Lema 2.29 *Para todo $X^\bullet$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, o cone $C_{1_X}^\bullet$ é homotópico ao complexo nulo.*

Demonstração: Precisamos mostrar que o morfismo $1_X^\bullet : C_{1_X}^\bullet \longrightarrow C_{1_X}^\bullet$ é homotópico a zero. De fato, definimos $k^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : C_1^n \longrightarrow C_1^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} C_1^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus X^{n-1} & \xrightarrow{d_{C_1}^{n-1}} & X^{n+1} \oplus X^n & \xrightarrow{d_{C_1}^n} & X^{n+2} \oplus X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow & \swarrow k^n & \downarrow & \swarrow k^{n+1} & \parallel & & \\ C_1^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus X^{n-1} & \xrightarrow{d_{C_1}^{n-1}} & X^{n+1} \oplus X^n & \xrightarrow{d_{C_1}^n} & X^{n+2} \oplus X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} d_{C_{1_X}}^{n-1} \circ k^n + k^{n+1} \circ d_{C_{1_X}}^n &= \begin{pmatrix} -d_X^n & 0 \\ 1 & d_X^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ 1 & d_X^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{C_1} - 0. \end{aligned}$$

Portanto $1_{C_1}^\bullet$ é homotópico a zero, e consequentemente, $C_1^\bullet \simeq 0^\bullet$. ■

Consideremos o funtor translação

$$\begin{aligned} T : \quad \mathcal{K}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A}) \\ (X^\bullet, d_X^\bullet) &\longmapsto (T(X^\bullet), d_{T(X)}^\bullet), \end{aligned}$$

onde $T(X^\bullet)^n = X^{n+1}$ e $d_{T(X)}^n = -d_X^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Denotamos $T(X^\bullet)$ por $X^\bullet[1]$. Os morfismos são definidos naturalmente. Observe que T é um automorfismo.

Sejam a inclusão $i_f^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet$ e a projeção $p_f^\bullet : C_f^\bullet \longrightarrow T(X^\bullet)$ e consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow i_f^{n-1} & & \downarrow i_f^n & & \downarrow i_f^{n+1} & & \\ C_f^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{d_{C_f}^{n-1}} & X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{d_{C_f}^n} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow p_f^{n-1} & & \downarrow p_f^n & & \downarrow p_f^{n+1} & & \\ X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{-d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{-d_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Observemos que:

$$d_{C_f}^n \circ i_f^n = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{Y^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^{n+1}} \end{pmatrix} \circ d_Y^n = i_f^{n+1} \circ d_Y^n.$$

e

$$\begin{aligned} p_f^{n+1} \circ d_{C_f}^n &= \begin{pmatrix} 1_{X^{n+2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \end{pmatrix} = d_{T(X)}^n \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= d_{T(X)}^n \circ p_f^n. \end{aligned}$$

Assim $i_f^\bullet$ e $p_f^\bullet$ são morfismos de complexos. Além disso, temos $p_f^\bullet \circ i_f^\bullet = 0$, $p_f^\bullet$ é epimorfismo e $i_f^\bullet$ é monomorfismo. Dessa forma, temos o triângulo

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{i_f^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{p_f^\bullet} X^\bullet[1]$$

Vejamos que a categoria homotópica de complexos tem estrutura de categoria triangulada.

Teorema 2.30 *A categoria homotópica de complexos $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada com funtor translação T .*

Demonstração: Um triângulo $M^\bullet \longrightarrow N^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow T(M^\bullet)$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é distinguido se é isomorfo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ a um triângulo da forma

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1].$$

(T1) (a) É imediata.

(b) Para verificarmos que $X^\bullet \xrightarrow{1_X} X^\bullet \longrightarrow 0^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido vejamos que é isomorfo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ ao triângulo distinguido

$$X^\bullet \xrightarrow{1_X} X^\bullet \longrightarrow C_{1_X}^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1].$$

Para isso precisamos verificar que o seguinte diagrama é comutativo e além disso, que é um isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{1^\bullet} & X^\bullet & \longrightarrow & 0^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[1] \\ \downarrow 1^\bullet & & \downarrow 1^\bullet & & \downarrow 0^\bullet & & \downarrow 1^\bullet \\ X^\bullet & \xrightarrow{1^\bullet} & X^\bullet & \longrightarrow & C_1^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[1] \end{array}$$

Claramente o primeiro e o terceiro quadrado do diagrama comutam. Pelo lema 2.29, temos $C_1^\bullet \simeq 0^\bullet$, logo o segundo quadrado também é comutativo. Assim temos um morfismo de triângulos que é um isomorfismo.

Logo $X^\bullet \xrightarrow{1} X^\bullet \longrightarrow 0^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido.

(c) Pela construção, qualquer morfismo $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ pode ser completado ao triângulo distinguido $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$

(T2) É suficiente verificarmos para o triângulo distinguido

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{q^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} X^\bullet[1].$$

Vamos mostrar que $Y^\bullet \xrightarrow{q^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} X^\bullet[1] \xrightarrow{-T(f)} Y^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido. Para mostrarmos que $Y^\bullet \xrightarrow{q^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} X^\bullet[1] \xrightarrow{-Tf} Y^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido mostraremos que ele é isomorfo ao triângulo distinguido

$$Y^\bullet \xrightarrow{q^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{j^\bullet} C_q^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} Y^\bullet[1].$$

O complexo $C_q^\bullet$ é dado por:

$$C_q^\bullet : \quad \dots Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_Y^n & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^n & 0 \\ 0 & f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix}} Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \dots$$

Definimos:

$$\begin{array}{c} X^\bullet[1] : \quad \dots \longrightarrow X^n \xrightarrow{-d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ t^\bullet \quad \quad \quad (0 \ 1 \ 0) \quad \quad \quad (0 \ 1 \ 0) \quad \quad \quad (0 \ 1 \ 0) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ C_q^\bullet : \quad \dots \longrightarrow Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_{C_q}^n} Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \longrightarrow \dots \end{array}$$

Como

$$(0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -d_Y^n & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^n & 0 \\ 1 & f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} = (0 \ -d_X^n \ 0) = -d_X^n (0 \ 1 \ 0).$$

e

$$\begin{pmatrix} -d_Y^n & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^n & 0 \\ 1 & f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_Y^n f^n \\ -d_X^n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n+1} d_X^n \\ -d_X^n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f^n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-d_X^n).$$

temos que $r^\bullet$ e $t^\bullet$ são morfismos de complexos. Observemos ainda que

$$t^n r^n = (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -f^n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$r^n t^n = \begin{pmatrix} -f^n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & -f^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos verificar que $r^\bullet t^\bullet$ é homotópico a $1_{C_q^\bullet}$. Para isso vejamos que o morfismo

$k^\bullet$ tal que $k^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a homotopia buscada.

$$\begin{aligned} d_{C_q}^{n-1} k^n + k^{n+1} d_{C_q}^n &= \begin{pmatrix} -d_Y^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{n-1} & 0 \\ 1 & f^{n-1} & d_Y^{n-2} \end{pmatrix} k^n + k^{n+1} \begin{pmatrix} -d_Y^n & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^n & 0 \\ 1 & f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_Y^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & f^n & d_Y^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{C_q} - r^n t^n. \end{aligned}$$

Logo $r^\bullet t^\bullet$ é homotópico a $1_{C_q^\bullet}$ e portanto $r^\bullet$ é um isomorfismo.

Assim temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
Y^\bullet & \xrightarrow{q^\bullet} & C_f^\bullet & \xrightarrow{\pi^\bullet} & X^\bullet[1] & \xrightarrow{-Tf} & Y^\bullet[1] \\
\parallel & & \parallel & & \begin{array}{c} t^\bullet \uparrow \\ \downarrow r^\bullet \end{array} & & \parallel \\
Y^\bullet & \xrightarrow{q^\bullet} & C_f^\bullet & \xrightarrow{j^\bullet} & C_q^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & Y^\bullet[1]
\end{array}$$

Resta verificarmos que temos um morfismo de triângulos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Claramente o primeiro quadrado é comutativo. O segundo comuta salvo homotopia, pois como

$$t^n j^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \pi^n,$$

então $r^\bullet \pi^\bullet = r^\bullet t^\bullet j^\bullet \sim j^\bullet$ uma vez que $r^\bullet t^\bullet$ é homotópico a $1_{C_q^\bullet}$. O terceiro também comuta, pois

$$p^n r^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -f^{n+1} = -T(f)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(T3) Novamente é suficiente verificar para triângulos distinguidos. Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
X^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & Y^\bullet & \xrightarrow{q^\bullet} & C_f^\bullet & \xrightarrow{\pi^\bullet} & X^\bullet[1] \\
\parallel & & \downarrow g^\bullet & & & & \parallel \\
X^\bullet & \xrightarrow{h^\bullet} & Z^\bullet & \xrightarrow{t^\bullet} & C_h^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[1] \\
& & \downarrow j^\bullet & & & & \downarrow \\
& & C_g^\bullet & \xlongequal{\quad} & C_g^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & Y^\bullet[1] \\
& & \downarrow p^\bullet & & \downarrow T(q^\bullet)p^\bullet & & \\
& & Y^\bullet[1] & \xrightarrow{T(q^\bullet)} & C_f^\bullet[1] & &
\end{array}$$

Do quadrado à esquerda do diagrama acima temos $h^\bullet \sim g^\bullet f^\bullet$. Logo existem morfismos $k^n : X^n \longrightarrow Z^{n-1}$ tais que:

$$h^n - g^n f^n = d_Z^{n-1} k^n + k^{n+1} d_X^n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definimos $\delta_1^\bullet : C_f^\bullet \longrightarrow C_h^\bullet$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
C_f^\bullet : & X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{d_{C_f}^n} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \\
\delta_1^\bullet \downarrow & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ k^{n+1} & g^n \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ k^{n+2} & g^{n+1} \end{array} \right) \\
C_h^\bullet : & X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{d_{C_h}^n} & X^{n+2} \oplus Z^{n+1}
\end{array}$$

Observemos que $\delta_1^\bullet$ é um morfismo de triângulos, pois

$$\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ h^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+1} & g^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ h^{n+1} + d_Z^n k^{n+1} & d_Z^n g^n \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} f^{n+1} - k^{n+2} d_X^{n+1} & g^{n+1} d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+2} & g^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

Observemos ainda que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y^\bullet & \xrightarrow{q^\bullet} & C_f^\bullet \\ g^\bullet \downarrow & & \downarrow \delta^\bullet \\ Z^\bullet & \xrightarrow{t^\bullet} & C_h^\bullet \end{array}$$

De fato, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\delta_1^n q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{n+1} & g^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g^n = t^n g^n$$

Podemos definir $\delta_2^\bullet : C_h^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} C_h^\bullet : & \dots & \longrightarrow & X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{d_{C_h}^n} & X^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \longrightarrow \dots \\ & & & \downarrow \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ k^{n+1} & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} f^{n+2} & 0 \\ k^{n+2} & 1 \end{pmatrix} & \\ \delta_2^\bullet \downarrow & & & & & & \\ C_g^\bullet : & \dots & \longrightarrow & Y^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{d_{C_g}^n} & Y^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Como

$$\begin{pmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ k^{n+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_Y^{n+1} f^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} f^{n+1} + d_Z^n k^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -f^{n+2} d_X^{n+1} & 0 \\ -k^{n+2} d_X^{n+1} + h^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n+2} & 0 \\ k^{n+2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ h^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix}$$

segue que $\delta_2^\bullet$ é um morfismo de complexos. E ainda temos a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} Z^\bullet & \xrightarrow{t^\bullet} & C_h^\bullet \\ j^\bullet \downarrow & & \downarrow \delta_2^\bullet \\ C_g^\bullet & \xlongequal{\quad} & C_g^\bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_h^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[1] \\ \delta_2^\bullet \downarrow & & \downarrow Tf \\ C_g^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet[1] \end{array}$$

De fato, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ k^{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ k^{n+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \end{pmatrix} = f^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resta verificarmos que $C_f^\bullet \xrightarrow{\delta_1^\bullet} C_h^\bullet \xrightarrow{\delta_2^\bullet} C_g^\bullet \xrightarrow{w^\bullet} C_f^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido. Para isso veremos que é isomorfo ao triângulo distinguido

$$C_f^\bullet \xrightarrow{\delta_1^\bullet} C_h^\bullet \longrightarrow C_{\delta_1}^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet[1]$$

Definimos as aplicações $r^\bullet : C_g^\bullet \longrightarrow C_{\delta_1}^\bullet$ e $s^\bullet : C_{\delta_1}^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet$ tais que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$r^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{d_{C_g}^n} & Y^{n+2} \oplus Z^{n+1} \\ \uparrow s^n \quad \downarrow r^n & & \uparrow s^{n+1} \quad \downarrow r^{n+1} \\ X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{d_{C_{\delta_1}}^n} & X^{n+3} \oplus Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Z^{n+1} \end{array}$$

Observemos que $r^\bullet$ e $s^\bullet$ são morfismos de complexos. De fato,

$$\begin{pmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & h^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d_Y^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & f^{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & h^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & -d_Y^{n+1} & -f^{n+2}d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & h^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_Y^{n+1} & -d_Y^{n+1}f^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1}f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos também:

$$s^n r^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}.$$

$$r^n s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim I_{4 \times 4}.$$

De fato, existe homotopia $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & h^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} E_{13} + E_{13} \begin{pmatrix} d_X^{n+3} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+3} & -d_Y^{n+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d_X^{n+2} & 0 \\ 0 & g^{n+2} & h^{n+2} & d_Z^{n+1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{13} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $r^\bullet$ é isomorfismo, e portanto $C_f^\bullet \longrightarrow C_h^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet[1]$ é isomorfo ao triângulo distinguido $C_f^\bullet \xrightarrow{\delta_1^\bullet} C_h^\bullet \longrightarrow C_{\delta_1}^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet[1]$. Assim completamos a prova de (T3). De (T1), (T2) e (T3), segue que $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é triangulada. ■

Exemplo 2.31 *Seja o complexo*

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{-m+1} \xrightarrow{d_X^{-m+1}} X^{-m} \xrightarrow{d_X^{-m}} \dots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \longrightarrow \dots.$$

E consideremos o morfismo entre os complexos truncados como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X^{-m}[m-1] \dots 0 & \longrightarrow & X^{-m} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \dots \\ \downarrow & & \downarrow d_X^{-m} & & \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\geq -m+1}(X^\bullet) : \dots 0 & \longrightarrow & X^{-m+1} & \xrightarrow{d_X^{-m+1}} & X^{-m+2} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \dots \end{array}$$

O cone desse morfismo é dado por:

$$\tau_{\geq -m}(X^\bullet) : \dots X^{-m} \longrightarrow X^{-m+1} \longrightarrow X^{-m+2} \longrightarrow \dots \longrightarrow X^0 \longrightarrow 0 \dots$$

Logo $X^{-m}[m-1] \longrightarrow \tau_{\geq -m+1}(X^\bullet) \longrightarrow \tau_{\geq -m}(X^\bullet) \longrightarrow X^{-m}[m]$ é um triângulo distinguido:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{-m} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow d_X^{-m} & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{-m+1} & \xrightarrow{d_X^{-m+1}} & X^{-m+2} \longrightarrow \dots \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ \dots & \longrightarrow & X^{-m} & \longrightarrow & X^{-m+1} & \longrightarrow & X^{-m+2} \longrightarrow \dots \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & X^{-m} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Lema 2.32 *Seja $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. O morfismo $f^\bullet$ é isomorfismo se, e somente se, $C_f^\bullet = 0$.*

Demonstração: Consideremos o triângulo distinguido:

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

Se $C_f^\bullet = 0$, segue do lema 2.16 que se $C_f^\bullet = 0$, então f é um isomorfismo. Reciprocamente, se f é isomorfismo, pelo lema 2.16 temos $(f, 0, 0)$ um triângulo distinguido. Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^\bullet[1] \\ \downarrow 1_X & & \downarrow 1_Y & & & & \downarrow 1_X \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \longrightarrow & C_f^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[1] \end{array}$$

Por 2.9, existe $k : 0 \longrightarrow C_f^\bullet$ tal que $(1_X, 1_Y, k)$ é um morfismo de triângulos. Como 1_X e 1_Y são isomorfismos, segue que k é um isomorfismo e portanto $C_f^\bullet = 0$. ■

Lema 2.33 *Seja F um funtor exato e pleno em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ tal que se $FX^\bullet = 0$, então $X^\bullet = 0$. Então F é fiel.*

Demonstração: Seja $\alpha^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ tal que $F(\alpha^\bullet) = 0$. Queremos mostrar que F é fiel, ou seja, $\alpha^\bullet = 0$. Dado $\alpha^\bullet$, como a categoria homotópica é triangulada, temos o triângulo distinguido $X^\bullet \xrightarrow{\alpha^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} C_\alpha^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$. Aplicando o funtor F , que é um funtor exato, temos o triângulo distinguido:

$$FX^\bullet \xrightarrow{F\alpha^\bullet} FY^\bullet \xrightarrow{Fv^\bullet} FC_\alpha^\bullet \longrightarrow FX^\bullet[1].$$

Pelo lema 2.15, como $F\alpha^\bullet = 0$ segue que $Fv^\bullet$ é seção. Como o funtor F é pleno, existe $v'^\bullet : C_\alpha^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ tal que $Fv'^\bullet Fv^\bullet = F(v'^\bullet v^\bullet) = 1_{FY^\bullet}$.

Tomando o triângulo distinguido $Y^\bullet \xrightarrow{v'^\bullet v^\bullet} Y^\bullet \longrightarrow C_{v'^\bullet v^\bullet}^\bullet \longrightarrow Y^\bullet[1]$ e aplicando o funtor exato F , temos o triângulo distinguido

$$FY^\bullet \xrightarrow{F(v'^\bullet v^\bullet)} FY^\bullet \longrightarrow FC_{v'^\bullet v^\bullet}^\bullet \longrightarrow FY^\bullet[1]$$

Como $F(v'^\bullet v^\bullet) = F(v'^\bullet)F(v^\bullet) = 1^\bullet$ é um isomorfismo, segue do lema 2.32, que $FC_{v'^\bullet v^\bullet}^\bullet = 0$. E então, por hipótese, $C_{v'^\bullet v^\bullet}^\bullet = 0$. Como $C_{v'^\bullet v^\bullet}^\bullet = 0$, novamente pelo lema 2.32, segue que $v'^\bullet v^\bullet$ é um isomorfismo. Assim $v^\bullet$ é seção e pelo lema 2.15 temos $\alpha^\bullet = 0$. ■

No capítulo 1 definimos o complexo total $Hom^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ como podemos ver em 1.26. A seguir caracterizaremos a cohomologia desse complexo. Esse resultado será bastante útil nos capítulos seguintes.

Lema 2.34 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos*

$$H^n(Hom_{\mathcal{A}}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) \simeq Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$$

Demonstração: Vamos calcular a n -ésima cohomologia $H^n \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$. Temos

$$\text{Ker } d^n = \left\{ \varphi \in \bigoplus_j \text{Hom}(X^j, Y^{j+n}) : d^n(\varphi) = 0 \right\}.$$

Note que $\varphi = (\dots, \varphi^{-1}, \varphi^0, \varphi^1, \dots)$, com $\varphi^j \in \text{Hom}(X^j, Y^{j+n})$ e

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 & \xrightarrow{d_X^1} & X^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \varphi^{-1} & & \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \xrightarrow{d_Y^{n+1}} & Y^{n+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Para n par, temos $d^n = d_1 - d_2$. Logo, em cada componente, como $d^n(\varphi) = 0$, temos

$$d_1(\varphi^i) - d_2(\varphi^{i+1}) = 0 \Rightarrow d_Y^{n-i} \varphi^i - \varphi^{i+1} d_X^i = 0 \Rightarrow d_Y^{n-i} \varphi^i = \varphi^{i+1} d_X^i.$$

Logo, em níveis pares, $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$.

Para n ímpar, temos $d^n = d_1 + d_2$. Logo, em cada componente, como $d^n(\varphi) = 0$, temos

$$d_1(\varphi^i) + d_2(\varphi^{i+1}) = 0 \Rightarrow d_Y^{n-i} \varphi^i + \varphi^{i+1} d_X^i = 0 \Rightarrow -d_Y^{n-i}(-\varphi^i) = \varphi^{i+1} d_X^i.$$

Logo, em níveis ímpares, $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$.

Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\varphi = \{\varphi^i\} \in \text{Ker } d^n$ é um morfismo de complexos, ou seja, $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$.

Calculemos $\text{Im } d^{n-1}$. Seja $\varphi = d^{n-1}(r)$, onde $r = (r_i)$ com $r_i : X^i \longrightarrow Y^{i+n-1}$.

Como $d^2 = 0$, $\varphi \in \text{Im } d^{n-1} \subset \text{Ker } d^n$. Logo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$.

Pela definição de d^{n-1} , temos $d^{n-1}(r) = (d_1 - (-1)^{n-1} d_2)(r) = (d_1(r) + (-1)^n d_2(r))$. Logo, em cada componente temos $\varphi^j = d_Y^{j+n+1} r_j + (-1)^n r_{j+1} d_X^j$, ou seja, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X^{j-1} & \xrightarrow{d_X^{j-1}} & X^j & \xrightarrow{d_X^j} & X^{j+1} \\ & \swarrow \text{---} r_j & \downarrow \varphi^j & \nwarrow \text{---} r_{j+1} & \\ Y^{j+n-1} & \xrightarrow{(-1)^n d_Y^{j+n-1}} & Y^{j+n} & \xrightarrow{\quad} & Y^{j+n+1} \end{array}$$

Assim temos $\varphi \sim 0$, onde r é a homotopia. Dessa forma, temos

$$H^n \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) = \frac{\text{Ker } d^n}{\text{Im } d^{n-1}} = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])}{\{\varphi \sim 0\}} = \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$$

■

Lema 2.35 *Sejam Γ uma álgebra e $Q^\bullet$ o complexo em $\text{mod-}\Gamma$*

$$\dots \longrightarrow Q^{-2} \xrightarrow{d_Q^{-2}} Q^{-1} \xrightarrow{d_Q^{-1}} Q^0 \xrightarrow{d_Q^0} Q^1 \longrightarrow \dots$$

Existe um isomorfismo entre $H^n(Q^\bullet)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[n])$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Consideremos o morfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad Hom_{K^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[n]) &\longrightarrow H^n(Q^\bullet) \\ \bar{f} &\longmapsto \varphi(\bar{f}) = f^n(1_\Gamma) + Im \, d_Q^{n-1} \end{aligned}$$

Como $\bar{f} \in Hom_{K^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[n])$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f^n & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q^{n-2} & \xrightarrow{d_Q^{n-2}} & Q^{n-1} & \xrightarrow{d_Q^{n-1}} & Q^n & \xrightarrow{d_Q^n} & Q^{n+1} & \xrightarrow{d_Q^{n+1}} & Q^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

φ está bem definida:

- $f^n \in Ker d_Q^n$, pois como o diagrama acima é comutativo temos $d_Q^n f^n = 0$.
- Sejam $\bar{f}, \bar{g} \in Hom_{K^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[n])$ tais que $\bar{f} = \bar{g}$. Como $f \sim g$ existe um morfismo $k : \Gamma \longrightarrow Q^{n-1}$ tal que $d_Q^{n-1} k = f^n - g^n$. Logo $f^n - g^n \in Im \, d_Q^{n-1}$. Em particular, $f^n(1_\Gamma) - g^n(1_\Gamma) \in Im \, d_Q^{n-1}$ e portanto $\varphi(\bar{f}) = \varphi(\bar{g})$.

φ é sobrejetora pois:

Dado $\bar{x}_0 \in H^n(Q^\bullet)$, podemos definir $f : \Gamma \longrightarrow Q^\bullet[n]$ tal que $f^n(1_\Gamma) = x_0$ e $f^j = 0$ se $j \neq n$. Logo, $\varphi(f) = f^n(1_\Gamma) + Im \, d_Q^{n-1} = \bar{x}_0$.

φ é injetora pois:

Sejam $\bar{f}, \bar{g} \in Hom_{K^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[n])$ tais que $\varphi(\bar{f}) = \varphi(\bar{g})$. Logo $f^n(1_\Gamma) - g^n(1_\Gamma) \in Im \, d_Q^{n-1}$, ou seja, existe y_0 tal que $(f^n - g^n)(1_\Gamma) = d_Q^{n-1}(y_0)$. Assim dado $a \in \Gamma$, temos $(f^n - g^n)(a) = (f^n - g^n)(a \cdot 1_\Gamma) = a(f^n - g^n)(1_\Gamma) = a d_Q^{n-1}(y_0) = d_Q^{n-1}(a y_0)$. Assim $f^n - g^n \in Im \, d_Q^{n-1}$. Consideremos então o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ & \downarrow f^n - g^n & \\ Q^{n-1} & \xrightarrow{d_Q^{n-1}} Im \, d_Q^{n-1} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como Γ é projetivo, existe um morfismo $k : \Gamma \longrightarrow Q^{n-1}$ tal que o diagrama anterior é comutativo, ou seja, $f^n - g^n = d_Q^{n-1} k$. Logo $f \sim g$, pois existe homotopia h , com $h^n = k$ e $h^j = 0$, para $j \neq n$. Portanto $\bar{f} = \bar{g}$. ■

Capítulo 3

Categoria Derivada

Neste trabalho estamos interessados na categoria de Λ -módulos finitamente gerados de uma álgebra Λ , assim assumimos que a categoria $\mathcal{A}$ tem suficientes objetos injetivos e projetivos. A categoria derivada é uma categoria que nos permite estudar um objeto da categoria $\mathcal{A}$ via sua resolução projetiva. A vantagem de fazer essa “troca” é que os objetos projetivos tem propriedades boas e conhecidas.

3.1 Categoria Derivada

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Nesta seção queremos construir sua categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Em 2.26 definimos o funtor $H^n(-) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esse funtor será bastante importante neste capítulo uma vez que como veremos, complexos que tem cohomologias isomorfas serão isomorfos.

Um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um *quase isomorfismo* se, e somente se, $H^n(f^\bullet)$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.1 *Segue do lema 2.25 que se $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um quase isomorfismo e $g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um morfismo homotópico a $f^\bullet$, então $g^\bullet$ é um quase isomorfismo.*

Teorema 3.2 *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, o funtor $H^n(-) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico.*

Demonstração: É suficiente verificarmos para triângulos distinguidos. Seja

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} X^\bullet[1]$$

um triângulo distinguido. Devemos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que a sequência

$$\cdots \rightarrow H^n(X^\bullet) \xrightarrow{H^n(f^\bullet)} H^n(Y^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(C_f^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi^\bullet)} H^n(X^\bullet[1]) \rightarrow \cdots$$

é exata. Observemos que:

$$H^n(X^\bullet[1]) = \frac{\text{Ker } d_{X[1]}^n}{\text{Im } d_{X[1]}^{n-1}} = \frac{\text{Ker } d_X^{n+1}}{\text{Im } d_X^n} = H^{n+1}(X^\bullet).$$

Afirmação: Dado o triângulo distinguido $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} X^\bullet[1]$, temos a sequência exata de complexos $0 \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1] \longrightarrow 0$.

De fato, o diagrama abaixo é comutativo com linhas e colunas exatas.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Y^\bullet & \cdots \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
\downarrow & & \downarrow (0 \ 1)^t & & \downarrow (0 \ 1)^t & & \downarrow (0 \ 1)^t \\
C_f^\bullet & \cdots \longrightarrow & X^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{d_{C_f}^{n-1}} & X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{d_{C_f}^n} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
\downarrow & & \downarrow (1 \ 0) & & \downarrow (1 \ 0) & & \downarrow (1 \ 0) \\
X^\bullet[1] & \cdots \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2} \xrightarrow{d_X^{n+2}} \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Logo esta sequência exata de complexos induz uma sequência exata longa de cohomologia

$$\cdots H^n(Y^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(C_f^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi^\bullet)} H^n(X^\bullet[1]) \xrightarrow{H^{n+1}(f^\bullet)} H^{n+1}(Y^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(C_f^\bullet) \cdots$$

onde $H^{n+1}(f^\bullet)$ é o morfismo de conexão definido utilizando o lema da Serpente 1.15. ■

Dizemos que um objeto $X^\bullet$ na categoria homotópica $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é *acíclico* ou *exato* se $H^n(X^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.3 *Seja um triângulo distinguido $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} X^\bullet[1]$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Então $f^\bullet$ é quase isomorfismo se, e somente se, $Z^\bullet$ é acíclico.*

Demonstração: Aplicando o funtor cohomológico $H^n(-)$, temos a sequência exata longa

$$\cdots H^n(X^\bullet) \xrightarrow{H^n(f^\bullet)} H^n(Y^\bullet) \xrightarrow{H^n(g^\bullet)} H^n(Z^\bullet) \xrightarrow{H^n(h^\bullet)} H^{n+1}(X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(f^\bullet)} H^{n+1}(Y^\bullet) \cdots$$

Como $f^\bullet$ é quase isomorfismo segue que $H^n(f^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e conseqüentemente $H^n(Z^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto $Z^\bullet$ é acíclico. Reciprocamente, se $Z^\bullet$ é acíclico, então $H^n(Z^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, conseqüentemente $H^n(f^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto $f^\bullet$ é um quase isomorfismo. ■

Para construir a categoria derivada vamos considerar como os objetos os complexos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e os morfismos são obtidos a partir de morfismos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ de modo que os quase isomorfismos se transformem em isomorfismos. Para isso vamos aplicar o funtor de localização em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e vamos mostrar o conjunto formado pelos quase isomorfismos formam um sistema multiplicativo.

Teorema 3.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e*

$$\mathcal{S} = \{f^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) : f^\bullet \text{ é quase isomorfismo}\}.$$

Então $\mathcal{S}$ é um sistema multiplicativo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Demonstração: Precisamos verificar as três condições (S1), (S2) e (S3) da definição de sistema multiplicativo.

(S1) Para todo objeto $X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, temos $1_X^\bullet : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ é um quase isomorfismo.

Sejam $f^\bullet, g^\bullet \in \mathcal{S}$ então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(f^\bullet)$ e $H^n(g^\bullet)$ são isomorfismos. Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$H^n(f^\bullet g^\bullet) = H^n(f^\bullet) H^n(g^\bullet)$$

é um isomorfismo e portanto $f^\bullet g^\bullet$ é quase isomorfismo.

(S2) Dado o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ & \downarrow s^\bullet & \\ X^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & Y^\bullet \end{array}$$

com $s^\bullet \in \mathcal{S}$. Como $s^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ podemos completar $s^\bullet$ em um triângulo distinguido como segue:

$$Z^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet[1]$$

Aplicando (T2) no triângulo acima temos o triângulo distinguido

$$Y^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet[1] \xrightarrow{-T(s^\bullet)} Y^\bullet[1]$$

e completando $f^\bullet u^\bullet$ em um triângulo distinguido obtemos o triângulo distinguido

$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet u^\bullet} N^\bullet \longrightarrow W^\bullet \xrightarrow{t^\bullet} X^\bullet[1]$. Pelo lema 2.9 obtemos $v^\bullet : W^\bullet \longrightarrow Z^\bullet[1]$ tal que o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet u^\bullet} & N^\bullet & \longrightarrow & W^\bullet & \xrightarrow{t^\bullet} & X^\bullet[1] \\ u^\bullet \downarrow & & \parallel & & v^\bullet \downarrow & & Tu^\bullet \downarrow \\ Y^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & N^\bullet & \xrightarrow{g^\bullet} & Z^\bullet[1] & \xrightarrow{-T(s^\bullet)} & Y^\bullet[1] \end{array}$$

é comutativo. Pelo lema 3.3, como $s^\bullet$ é quase isomorfismo temos $N^\bullet$ acíclico e consequentemente, $t^\bullet$ é quase isomorfismo. Aplicando T^{-1} ao quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} W^\bullet & \xrightarrow{-v^\bullet} & Z^\bullet[1] \\ t^\bullet \downarrow & & \downarrow -Ts^\bullet \\ X^\bullet[1] & \xrightarrow{-Tu^\bullet} & Y^\bullet[1] \end{array}$$

obtemos o quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} W^\bullet[-1] & \xrightarrow{-T^{-1}(v^\bullet)} & Z^\bullet \\ -T^{-1}(t^\bullet) \downarrow & & \downarrow s^\bullet \\ X^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & Y^\bullet \end{array}$$

que completa o diagrama inicial. Como $t^\bullet$ é quase isomorfismo, temos que $T^{-1}(t^\bullet)$ também é.

Analogamente, se temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z^\bullet & \xrightarrow{s^\bullet} & Y^\bullet \\ u^\bullet \downarrow & & \\ X^\bullet & & \end{array}$$

com $s \in \mathcal{S}$ podemos completá-lo de forma a obter o seguinte diagrama comutativo, com $t^\bullet \in \mathcal{S}$:

$$\begin{array}{ccc} Z^\bullet & \xrightarrow{s^\bullet} & Y^\bullet \\ u^\bullet \downarrow & & \downarrow v^\bullet \\ X^\bullet & \xrightarrow{t^\bullet} & W^\bullet \end{array}$$

(S3) Vamos mostrar a seguinte equivalência: existe $t^\bullet : X'^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ em $\mathcal{S}$ tal que $f^\bullet t^\bullet = g^\bullet t^\bullet$ se, e somente se, existe $s^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Y'^\bullet$ em $\mathcal{S}$ tal que $s^\bullet f^\bullet = s^\bullet g^\bullet$.

$$X'^\bullet \xrightarrow{t^\bullet} X^\bullet \xrightleftharpoons[g^\bullet]{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} Y'^\bullet$$

Basta mostrarmos uma das implicações, a outra é análoga. Seja $w^\bullet = f^\bullet - g^\bullet$ e suponhamos que exista $s^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Y'^\bullet$ tal que $s^\bullet w^\bullet = 0$.

Por (T1), podemos completar o morfismo $s^\bullet$ em um triângulo distinguido e em seguida aplicando (T2) temos o triângulo distinguido:

$$Z^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} Y'^\bullet \xrightarrow{y^\bullet} Z^\bullet[1] \quad (*)$$

Como $s^\bullet$ é quase isomorfismo, pelo lema 3.3, temos que $Z^\bullet$ é acíclico.

Aplicando o funtor cohomológico $Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, -)$ no triângulo distinguido (*), obtemos a sequência exata longa

$$\dots Hom(X^\bullet, Z^\bullet) \xrightarrow{Hom(X^\bullet, h^\bullet)} Hom(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{Hom(X^\bullet, s^\bullet)} Hom(X^\bullet, Y'^\bullet) \dots$$

Como $s^\bullet w^\bullet = 0$ temos $w^\bullet \in Ker(Hom(X^\bullet, s^\bullet))$. Como a sequência acima é exata $Ker(Hom(X^\bullet, s^\bullet)) = Im(Hom(X^\bullet, h^\bullet))$ e assim $w^\bullet \in Im(Hom(X^\bullet, h^\bullet))$. Logo obtemos $j^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ tal que $h^\bullet j^\bullet = w^\bullet$.

Aplicando (T1) ao morfismo $j^\bullet$ podemos completá-lo a um triângulo distinguido e aplicando (T2) nesse triângulo obtemos:

$$X'^\bullet \xrightarrow{t^\bullet} X^\bullet \xrightarrow{j^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{m^\bullet} X'^\bullet[1] \quad (**)$$

Pelo lema 3.3, como $Z^\bullet$ é acíclico temos que $t^\bullet$ é quase isomorfismo.

Aplicando o funtor cohomológico $Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(-, Y^\bullet)$ ao triângulo distinguido (**), obtemos a sequência exata longa

$$\dots Hom(Z^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{Hom(j^\bullet, Y^\bullet)} Hom(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{Hom(t^\bullet, Y^\bullet)} Hom(X'^\bullet, Y^\bullet) \dots$$

Como a sequência é exata, temos:

$$0 = \text{Hom}(t^\bullet, Y^\bullet) \circ \text{Hom}(j^\bullet, Y^\bullet)(h^\bullet) = (h^\bullet j^\bullet)t^\bullet = w^\bullet t^\bullet$$

Logo existe $t^\bullet : X'^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ em $\mathcal{S}$ tal que $0 = w^\bullet t^\bullet = (f^\bullet - g^\bullet)t^\bullet$, ou seja, $f^\bullet t^\bullet = g^\bullet t^\bullet$. ■

Definição 3.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. A categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria tal que existe um funtor (de localização) $Q : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ que leva quase isomorfismos em isomorfismos, ou seja, $Q(f^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $f^\bullet$ quase isomorfismo e satisfaz a seguinte propriedade universal: Se $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}$ é um funtor para uma categoria qualquer $\mathcal{C}$ tal que $F(f^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $f^\bullet$ quase isomorfismo, então F fatora por Q , ou seja, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

é comutativo para um único funtor $G : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}$.

Sendo assim, os objetos da categoria $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ são os mesmos objetos da categoria $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, ou seja, são os complexos em $\mathcal{A}$ e os morfismos são classes $\frac{f}{s}$ do tipo

$$X^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} X'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet$$

onde $s^\bullet$ é um quase isomorfismo e $f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X', Y)$ e ainda $\frac{f^\bullet}{s^\bullet} \sim \frac{f'^\bullet}{s'^\bullet}$ se e somente se, o seguinte diagrama é comutativo sendo $t^\bullet$ um quase isomorfismo.

$$\begin{array}{ccccc} & & X'^\bullet & & \\ & \swarrow s^\bullet & \uparrow m^\bullet & \searrow f^\bullet & \\ X^\bullet & \xleftarrow{t^\bullet} & P^\bullet & \xrightarrow{b^\bullet} & Y^\bullet \\ & \swarrow s'^\bullet & \downarrow n^\bullet & \searrow f'^\bullet & \\ & & X''^\bullet & & \end{array}$$

Propriedades: (Objetos e Morfismos nulos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$)

1. $X^\bullet \simeq 0^\bullet$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow X^\bullet$ é exato.

De fato, como $X^\bullet \simeq 0^\bullet$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ então existe um morfismo $s^\bullet : X^\bullet \longrightarrow 0^\bullet$ que é um quase isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, e assim $H^n(s^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Daí $H^n(X^\bullet) \simeq H^n(0^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto $X^\bullet$ é exato. Reciprocamente, se $X^\bullet$ é exato, então $H^n(X^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo $H^n(X^\bullet) \simeq H^n(0^\bullet)$ e assim $X^\bullet \simeq 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

2. $f^\bullet \sim 0^\bullet \Rightarrow f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. A recíproca é falsa.

De fato, como $f^\bullet \sim 0^\bullet$ existem morfismos tais que o diagrama abaixo é comutativo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X^\bullet & & \\
 & \swarrow & \parallel & \searrow f^\bullet & \\
 X^\bullet & \xlongequal{\quad} & X^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & Y^\bullet \\
 & \swarrow & \parallel & \nearrow 0^\bullet & \\
 & & X^\bullet & &
 \end{array}$$

E se temos esse diagrama comutativo, então $f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

A recíproca, porém, é falsa. Considere o morfismo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 1_X^\bullet \downarrow & & & & & \parallel & \nearrow k & \parallel & & \parallel & & & & \\
 X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

onde $2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é dada por $2(x) = 2x$ e $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é a projeção canônica. Como o complexo $X^\bullet$ é exato temos pela propriedade 1 que $1_X^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Porém $1_X^\bullet$ não é homotópico a zero, pois precisaríamos ter $k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $2k = 1_X$, o que não ocorre.

3. Seja $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$
- (ii) Existe $s^\bullet : X'^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ quase isomorfismo tal que $f^\bullet s^\bullet \sim 0^\bullet$.
- (iii) Existe $s^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Y'^\bullet$ quase isomorfismo tal que $s^\bullet f^\bullet \sim 0^\bullet$

Demonstraremos $(i) \Leftrightarrow (ii)$. A demonstração da equivalência $(i) \Leftrightarrow (iii)$ é dual.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Se $f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, então existe um complexo $X'^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ e um quase isomorfismo $s^\bullet : X'^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X^\bullet & & \\
 & \swarrow & \uparrow s^\bullet & \searrow f^\bullet & \\
 X^\bullet & \xlongequal{\quad} & X'^\bullet & \xrightarrow{0^\bullet} & Y^\bullet \\
 & \swarrow & \downarrow s^\bullet & \nearrow 0^\bullet & \\
 & & X^\bullet & &
 \end{array}$$

E assim temos que $f^\bullet s^\bullet \sim 0^\bullet$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Se existe $s^\bullet : X'^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ quase isomorfismo tal que $f^\bullet s^\bullet \sim 0^\bullet$

podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X^\bullet & & \\
 & \nearrow & \uparrow s^\bullet & \searrow f^\bullet & \\
 X^\bullet & \xleftarrow{s^\bullet} & X'^\bullet & \xrightarrow{0^\bullet} & Y^\bullet \\
 & \nwarrow & \downarrow s^\bullet & \nearrow 0^\bullet & \\
 & & X^\bullet & &
 \end{array}$$

E portanto segue que $f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

4. Se $f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $H^n(f^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. A recíproca, no entanto, é falsa.

De fato, como $f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, pela propriedade 3 temos que existe um quase isomorfismo $s^\bullet : X'^\bullet \rightarrow X^\bullet$ tal que $f^\bullet s^\bullet \sim 0^\bullet$. Assim, para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos:

$$0 = H^n(f^\bullet s^\bullet) = H^n(f^\bullet) H^n(s^\bullet).$$

Como $H^n(s^\bullet)$ é isomorfismo segue que $H^n(f^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A recíproca, no entanto, não é verdadeira. De fato, consideremos o morfismo dado por:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^\bullet & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow f^\bullet & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow 2\pi \\
 Y^\bullet & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Estamos supondo que $X^0 = X^1 = \mathbb{Z}$ e $X^n = 0$, para $n \neq 0, 1$ e que $Y^0 = \mathbb{Z}$, $Y^1 = \mathbb{Z}_3$ e $Y^n = 0$, para $n \neq 0, 1$. Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ já temos que $H^n(f^\bullet) = 0$. Resta verificarmos para $n = 0$ e $n = 1$. Observe que $H^0(X^\bullet) = 0$ e $H^0(Y^\bullet) = 3\mathbb{Z}$, logo $H^0(f) = 0$. De forma análoga, $H^1(X^\bullet) = \mathbb{Z}_2$ e $H^1(Y^\bullet) = 0$, logo $H^1(f^\bullet) = 0$. Portanto $H^n(f^\bullet) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Porém mostraremos que $f^\bullet \neq 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Suponhamos que $f^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Assim pela propriedade 3 existe $s^\bullet : W^\bullet \rightarrow X^\bullet$ quase isomorfismo tal que $f^\bullet s^\bullet \sim 0^\bullet$ como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 W^\bullet & \cdots \longrightarrow & W^0 & \xrightarrow{d_W^0} & W^1 & \xrightarrow{d_W^1} & W^2 \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow s^\bullet & & \downarrow s^0 & & \downarrow s^1 & & \\
 X^\bullet & \cdots 0 \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow f^\bullet & & \downarrow 1 & & \downarrow 2\pi & & \\
 Y^\bullet & \cdots 0 \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_3 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array} \quad (*)$$

Como $f^\bullet s^\bullet \sim 0$ então existe $h : W^1 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $h d_W^0 = s^0$.

Como $s^\bullet$ é quase isomorfismo temos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(s^\bullet)$ é isomorfismo. Em particular $H^1(s^\bullet) : H^1(W^\bullet) \rightarrow H^1(X^\bullet)$ é um isomorfismo, ou

seja, $H^1(W^\bullet) \simeq H^1(X^\bullet) = \mathbb{Z}_2$. Como $H^1(X^\bullet) = \mathbb{Z}_2$, se $w + \text{Im} d_W^0$, com $w \in \text{Ker } d_W^1$ é um gerador de $H^1(W^\bullet)$ segue que $s^1(w) \in 1 + 2\mathbb{Z}$.

Como $2w \in \text{Im } d_W^0$, existe $w' \in W^0$ tal que $d_W^0(w') = 2w$. Assim, $s^0(w') = h \circ d_W^0(w') = h(2w) = 2h(w)$, ou seja, $s^0(w') \in 2\mathbb{Z}$.

Pela comutatividade do diagrama $(*)$, temos:

$$2^\bullet s^0(w') = s^1 d_W^0(w') = s^1(2w) = 2s^1(w) \Rightarrow s^0(w') = s^1(w),$$

o que é uma contradição uma vez que $s^0(w')$ é par e $s^1(w)$ é ímpar.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e considere $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cap \mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ onde $*$ $\in \{+, -, b\}$.

De forma similar como a $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, obtemos que $\mathcal{S}^*$ é um sistema multiplicativo em $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$. Assim temos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^*(\mathcal{A}) & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{K}(\mathcal{A}) \\ \downarrow Q^* & & \downarrow Q \\ \mathcal{K}^*(\mathcal{A})[\mathcal{S}^{*-1}] & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{K}(\mathcal{A})[\mathcal{S}^{-1}] \end{array}$$

Como $Q \circ i(s)$ é isomorfismo, para todo $s \in \mathcal{S}^*$, pela propriedade universal de localização 1.29, existe $F^* : \mathcal{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $F^* \circ Q^* = Q \circ i$.

Teorema 3.6 *O funtor $F^* : \mathcal{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ é fiel e pleno.*

Demonstração: Como $\mathcal{S}^*$ é um sistema multiplicativo para $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$. Pelo lema 1.32 é suficiente verificar a seguinte condição: Para cada morfismo $s : N \longrightarrow M$, com $s \in \mathcal{S}$ e $N \in \text{Ob } \mathcal{K}^*(\mathcal{A})$, existe $u : M \longrightarrow P$ tal que $us \in \mathcal{S}$ e $P \in \text{Ob } \mathcal{K}^*(\mathcal{A})$. Façamos isto para os três casos: (i) $\mathcal{K}^*(\mathcal{A}) = \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$, (ii) $\mathcal{K}^*(\mathcal{A}) = \mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ e (iii) $\mathcal{K}^*(\mathcal{A}) = \mathcal{K}^b(\mathcal{A})$.

(i) Sejam $X^\bullet \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ e $s^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \cap \mathcal{S}$. A menos de uma translação, podemos considerar $X^i = 0$, para $i < 0$. Como $s^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ está em $\mathcal{S}$, temos que $H^i(s^\bullet)$ é um isomorfismo e assim $H^i(Y^\bullet) = 0$, para $i < 0$.

Consideremos $Z^\bullet$ e $f^\bullet$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc} Y^\bullet & & \cdots & \longrightarrow & Y^{-2} & \xrightarrow{d_Y^{-2}} & Y^{-1} & \xrightarrow{d_Y^{-1}} & Y^0 & \xrightarrow{d_Y^0} & Y^1 & \xrightarrow{d_Y^1} & Y^2 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow f^\bullet & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow \pi & & \downarrow 1 & & \parallel & & \\ \sigma'_{\geq 0}(Z^\bullet) : & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Coker } d_Y^{-1} & \longrightarrow & Y^1 & \xrightarrow{d_Y^1} & Y^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Observemos que $Z^\bullet \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ e $f^\bullet \in \mathcal{S}$. Disso segue $f^\bullet s^\bullet \in \mathcal{S}$ uma vez que $s^\bullet, f^\bullet \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{S}$ é um sistema multiplicativo. Logo existe $f^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$, com $Z^\bullet \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ tal que $f^\bullet s^\bullet \in \mathcal{S}$. Portanto $F^+ : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ é fiel e pleno.

(ii) Análogo ao item (i).

(iii) Basta considerar um dos casos acima. ■

Deste teorema podemos considerar as categorias derivadas $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ como subcategorias plenas de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Lema 3.7 *Seja $0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de complexos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Então existe um isomorfismo $m^\bullet : C_f^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & C_f^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[1] \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ 0 \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & Y^\bullet & \xrightarrow{g^\bullet} & Z^\bullet & \longrightarrow 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (*) \\ (**) \end{array}$$

Observando em cada nível e respeitando a comutatividade do diagrama podemos definir $m^\bullet : C_f^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} Y^\bullet & \cdots \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow (0 \ 1)^t & & \downarrow (0 \ 1)^t & & \downarrow (0 \ 1)^t \\ C_f^\bullet & \cdots \longrightarrow & X^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^n & 0 \\ f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ \downarrow m^\bullet & & \downarrow (0 \ g^{n-1}) & & \downarrow (0 \ g^n) & & \downarrow (0 \ g^{n+1}) \\ Z^\bullet & \cdots \longrightarrow & Z^{n-1} & \xrightarrow{d_Z^{n-1}} & Z^n & \xrightarrow{d_Z^n} & Z^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

O triângulo (*) e a sequência (**) induzem as sequências exatas de cohomologia

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & H^n(X^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Y^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Z^\bullet) & \longrightarrow H^{n+1}(X^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow H^n(m^\bullet) & \downarrow 1 \\ \cdots \longrightarrow & H^n(X^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Y^\bullet) & \longrightarrow & H^n(C_f^\bullet) & \longrightarrow H^{n+1}(X^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Pelo 5-lema (lema 1.14), segue que $H^n(m^\bullet)$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e consequentemente $m^\bullet$ é isomorfismo em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. ■

Lema 3.8 *Se $u^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ monomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, então $Q(u^\bullet) : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é monomorfismo em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Sejam $\alpha^\bullet, \beta^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(Z^\bullet, X^\bullet)$ tais que $Q(u^\bullet)\alpha^\bullet = Q(u^\bullet)\beta^\bullet$. Vamos mostrar que $\alpha^\bullet = \beta^\bullet$. Sejam os representantes de $\alpha^\bullet$ e $\beta^\bullet$:

$$\begin{array}{l} \alpha^\bullet : Z^\bullet \xleftarrow{s'^\bullet} W'^\bullet \xrightarrow{a'^\bullet} X^\bullet \\ \beta^\bullet : Z^\bullet \xleftarrow{s''^\bullet} W''^\bullet \xrightarrow{a''^\bullet} X^\bullet \end{array}$$

Temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & W'^\bullet & \\ & \downarrow s'^\bullet & \\ W''^\bullet & \xrightarrow{s''^\bullet} & Z^\bullet \end{array}$$

Por (S2) podemos completá-lo e obtemos o seguinte diagrama comutativo, com $r^\bullet, v^\bullet \in \mathcal{S}$:

$$\begin{array}{ccc} W^\bullet & \xrightarrow{v^\bullet} & W'^\bullet \\ r^\bullet \downarrow & & \downarrow s'^\bullet \\ W''^\bullet & \xrightarrow{s''^\bullet} & Z^\bullet \end{array}$$

E assim temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccccc} & & W''^\bullet & & \\ & s'^\bullet \swarrow & \uparrow v^\bullet & \searrow a'^\bullet & \\ Z^\bullet & \xleftarrow{s'^\bullet v^\bullet} & W^\bullet & \xrightarrow{a'^\bullet v^\bullet} & X^\bullet \\ & s'^\bullet v^\bullet \swarrow & \parallel & \searrow a'^\bullet v^\bullet & \\ & & W^\bullet & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & W''^\bullet & & \\ & s''^\bullet \swarrow & \uparrow r^\bullet & \searrow a''^\bullet & \\ Z^\bullet & \xleftarrow{s''^\bullet r^\bullet} & W^\bullet & \xrightarrow{a''^\bullet r^\bullet} & X^\bullet \\ & s''^\bullet r^\bullet \swarrow & \parallel & \searrow a''^\bullet r^\bullet & \\ & & W^\bullet & & \end{array}$$

Segue desses diagramas que :

$$\alpha^\bullet = (W^\bullet, s'^\bullet v^\bullet, a'^\bullet v^\bullet) := (W^\bullet, s^\bullet, a^\bullet)$$

e

$$\beta^\bullet = (W^\bullet, s''^\bullet r^\bullet, a''^\bullet r^\bullet) := (W^\bullet, s^\bullet, b^\bullet).$$

Ou seja, $\alpha^\bullet = Q(a^\bullet)Q(s^\bullet)^{-1}$ e $\beta^\bullet = Q(b^\bullet)Q(s^\bullet)^{-1}$. Disso temos:

$$Q(u^\bullet)\alpha^\bullet = Q(u^\bullet)\beta^\bullet \Rightarrow Q(u^\bullet)Q(a^\bullet)Q(s^\bullet)^{-1} = Q(u^\bullet)Q(b^\bullet)Q(s^\bullet)^{-1}.$$

Multiplicando por $Q(s^\bullet)$ temos,

$$Q(u^\bullet)Q(a^\bullet) = Q(u^\bullet)Q(b^\bullet) \Rightarrow Q(u^\bullet a^\bullet - u^\bullet b^\bullet) = 0.$$

Logo existe um $t^\bullet : V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ tal que $(u^\bullet a^\bullet - u^\bullet b^\bullet)t^\bullet = 0$, uma vez que $u^\bullet a^\bullet - u^\bullet b^\bullet \sim 0^\bullet$. Assim,

$$(u^\bullet a^\bullet - u^\bullet b^\bullet)t^\bullet = 0 \Rightarrow u^\bullet a^\bullet t^\bullet = u^\bullet b^\bullet t^\bullet.$$

Como $u^\bullet$ é monomorfismo segue que $a^\bullet t^\bullet = b^\bullet t^\bullet$. Daí segue que $Q(a^\bullet) = Q(b^\bullet)$, pois temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & W^\bullet & & \\ & \parallel & \uparrow t^\bullet & \searrow a^\bullet & \\ W^\bullet & \xleftarrow{t^\bullet} & V^\bullet & \xrightarrow{a^\bullet t^\bullet} & X^\bullet \\ & \parallel & \downarrow t^\bullet & \searrow b^\bullet & \\ & & W^\bullet & & \end{array}$$

Portanto $\alpha^\bullet = Q(a^\bullet)Q(s^\bullet)^{-1} = Q(b^\bullet)Q(s^\bullet)^{-1} = \beta^\bullet$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. ■

Observação 3.9 De maneira dual, podemos mostrar que se $u^\bullet$ é um epimorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, então $Q(u^\bullet)$ é epimorfismo em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Como veremos a seguir, em geral $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ não é uma categoria abeliana. Assim não podemos aplicar a $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ a definição usual de exatidão. No entanto, veremos que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada.

Proposição 3.10 *A categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada, com o automorfismo T dado pelo funtor translação.*

Demonstração: Sabemos que $(\mathcal{K}(\mathcal{A}), T, \tau)$ é uma categoria triangulada e o conjunto $\mathcal{S}$ dos quase isomorfismos é um sistema multiplicativo.

Pela definição $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{K}(\mathcal{A})[\mathcal{S}^{-1}]$. Assim, para verificarmos que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada, pelo teorema 2.18 basta verificarmos que $\mathcal{S}$ é um sistema compatível com a estrutura triangulada (Definição 2.17). Façamos isto.

(a) Se $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é quase isomorfismo, então $H^n(f^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e daí $T(f^\bullet) : X^\bullet[1] \longrightarrow Y^\bullet[1]$ é quase isomorfismo.

(b) Consideremos o diagrama com linhas formadas por triângulos distinguidos

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[1] \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_1 \\ X'^\bullet & \longrightarrow & Y'^\bullet & \longrightarrow & Z'^\bullet & \longrightarrow & X'^\bullet[1] \end{array}$$

com $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}$. Devemos mostrar que $\phi_3 \in \mathcal{S}$. Aplicando o funtor cohomológico $H^n(-)$ ao diagrama acima temos o diagrama de seqüências exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & H^n(X^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Y^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Z^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(X^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(Y^\bullet) & \dots \\ & \downarrow H^n(\phi_1) & & \downarrow H^n(\phi_2) & & \downarrow H^n(\phi_3) & & \downarrow H^{n+1}(\phi_1) & & \downarrow H^{n+1}(\phi_2) & \\ \dots & H^n(X'^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Y'^\bullet) & \longrightarrow & H^n(Z'^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(X'^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(Y'^\bullet) & \dots \end{array}$$

Como $H^n(\phi_1)$, $H^n(\phi_2)$ são isomorfismos, para todo $n \in \mathbb{Z}$, pelo 5-lema (lema 1.14) segue que $H^n(\phi_3)$ é isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como o sistema multiplicativo é compatível com a estrutura triangulada segue que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada. ■

Como $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} C_f^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} X^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ então os triângulos distinguidos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ são:

$$\begin{array}{ccccccc} & & X^\bullet & & Y^\bullet & & C_f^\bullet \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ X^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & Y^\bullet & \xrightarrow{i^\bullet} & C_f^\bullet & \xrightarrow{\pi^\bullet} & X^\bullet[1] \end{array}$$

Observação 3.11 *A categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, em geral, não é abeliana.*

De fato, seja $u^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ um monomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Segue do lema 3.8 que $Q(u^\bullet)$ é monomorfismo. Suponha que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ seja uma categoria abeliana. Assim temos a seqüência exata curta:

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{Q(u^\bullet)} Y^\bullet \longrightarrow \text{Coker}(Q(u^\bullet)) \longrightarrow 0$$

Pelo lema 3.7 temos $Coker(Q(u^\bullet)) \simeq C_{Q(u^\bullet)}^\bullet$.

Aplicando o funtor cohomológico $Hom_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(Z^\bullet, -)$, com $Z^\bullet$ um complexo qualquer, ao triângulo distinguído

$$X^\bullet \xrightarrow{Q(u^\bullet)} Y^\bullet \longrightarrow C_{Q(u^\bullet)} \longrightarrow X^\bullet[1]$$

temos a sequência exata longa

$$(Z^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow (Z^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow (Z^\bullet, C_{Q(u^\bullet)}^\bullet) \longrightarrow (Z^\bullet, X^\bullet[1]) \longrightarrow (Z^\bullet, Y^\bullet[1])$$

Como $Q(u^\bullet)$ é monomorfismo, então $Hom(Z^\bullet, Q(u^\bullet))$ também é monomorfismo. Logo $Hom(Z^\bullet, C_{Q(u^\bullet)}^\bullet) = 0$. Como $Z^\bullet$ é um complexo qualquer, segue que $C_{Q(u^\bullet)}^\bullet = 0$ e consequentemente $Coker(Q(u^\bullet)) = 0$. Portanto $Q(u^\bullet)$ é isomorfismo, mas isto é falso. Tomando $Y^\bullet$ um complexo não exato e $0^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ que é monomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, temos que sua localização $0^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ não é isomorfismo em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, pois $Y^\bullet$ não é exato. Portanto, em geral, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ não é abeliana.

3.2 Complexos de objetos projetivos

Seja $Proj\text{-}\mathcal{A}$ a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ formada por todos objetos projetivos de $\mathcal{A}$. O objetivo desta seção é provar que a categoria derivada $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ é equivalente a categoria homotópica de complexos projetivos $\mathcal{K}^-(Proj\text{-}\mathcal{A})$ quando $\mathcal{A}$ tem suficientes objetos projetivos.

Lema 3.12 *Sejam $P^\bullet$ um complexo em $\mathcal{K}^-(Proj\text{-}\mathcal{A})$ e $X^\bullet$ um complexo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ acíclico. Então qualquer morfismo $f^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ é homotópico a zero.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que o complexo $P^\bullet$ é tal que $P^j = 0$, para todo $j > 0$. Seja $f^\bullet \in Hom(P^\bullet, X^\bullet)$ como no diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} P^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & P_{-3} & \xrightarrow{d_P^{-3}} & P_{-2} & \xrightarrow{d_P^{-2}} & P_{-1} & \xrightarrow{d_P^{-1}} & P_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow f^{-3} & & \downarrow f^{-2} & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow f^0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \\ X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X_{-3} & \xrightarrow{d_X^{-3}} & X_{-2} & \xrightarrow{d_X^{-2}} & X_{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X_0 & \xrightarrow{d_X^0} & X_1 & \longrightarrow & X^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Queremos construir, para todo $k \in \mathbb{Z}$, morfismos $h^k : P_k \longrightarrow X_{k-1}$ tais que $f^k = d_X^{k-1}h^k + h^{k+1}d_P^k$. Definimos $h^k = 0$, para todo $k > 0$. Seguimos indutivamente. Como $d_X^0 f^0 = 0$ e $X^\bullet$ é acíclico, temos $Im f^0 \subset Ker d_X^0 = Im d_X^{-1}$. Assim podemos considerar o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ & \downarrow f^0 & \\ X_{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & Im d_X^{-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como P_0 é projetivo, existe $h^0 : P_0 \longrightarrow X_{-1}$ tal que $d_X^{-1}h^0 = f^0$ e como $h^1 = 0$ temos

$$d_X^{-1}h^0 + h^1d_P^0 = f^0.$$

Suponha que tenhamos h^i , com $i \geq n$. Então temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_{n-2} & \xrightarrow{d_P^{n-2}} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_P^{n-1}} & P_n \xrightarrow{d_P^n} P_{n+1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f^{n-2} & & \downarrow f^{n-1} & \swarrow h^n & \downarrow f^n \swarrow h^{n+1} \downarrow f^{n+1} \\
 \cdots & \longrightarrow & X_{n-2} & \xrightarrow{d_X^{n-2}} & X_{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X_n \xrightarrow{d_X^n} X_{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} \cdots
 \end{array}$$

Consideremos o morfismo $\psi = f^{n-1} - h^n d_P^{n-1} : P^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$. Daí temos

$$\begin{aligned}
 d_X^{n-1} \psi &= d_X^{n-1} (f^{n-1} - h^n d_P^{n-1}) = d_X^{n-1} f^{n-1} - d_X^{n-1} h^n d_P^{n-1} = f^n d_P^{n-1} - d_X^{n-1} h^n d_P^{n-1} = \\
 &= (f^n - d_X^{n-1} h^n) d_P^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Como $f^n = d_X^{n-1} h^n + h^{n+1} d_P^n$, temos

$$d_X^{n-1} \psi = (f^n - d_X^{n-1} h^n) d_P^{n-1} = h^{n+1} d_P^n d_P^{n-1} = 0.$$

Assim ψ fatora pelo $\text{Ker } d_X^{n-1}$ e temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 P_{n-1} & \xrightarrow{\psi} & X_{n-1} \\
 & \searrow \varphi & \swarrow \\
 & \text{Ker } d_X^{n-1} &
 \end{array}$$

Como $X^\bullet$ é acíclico, temos $\text{Ker } d_X^{n-1} = \text{Im } d_X^{n-2}$. Como P_{n-1} é projetivo, existe um morfismo $h^{n-1} : P_{n-1} \longrightarrow X_{n+3}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & P_{n-1} & \\
 h^{n-1} \swarrow & \downarrow \varphi & \\
 X^{n-2} & \xrightarrow{d_X^{n-2}} & \text{Ker } d_X^{n-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

é comutativo. Então temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X^{n-2} & \xrightarrow{d_X^{n-2}} & X^{n-1} \\
 \pi \searrow & & \swarrow \\
 & \text{Ker } d_X^{n-1} & \\
 h^{n-1} \swarrow & \uparrow \varphi & \searrow \psi \\
 & P^{n-1} &
 \end{array}$$

e podemos deduzir que:

$$\psi = d_X^{n-2} h^{n-1} \Rightarrow f^{n-1} - h^n d_P^{n-1} = d_X^{n-2} h^{n-1} \Rightarrow f^{n-1} = h^n d_P^{n-1} + d_X^{n-2} h^{n-1}$$

como queríamos. ■

Nosso próximo lema nos diz que, em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, quase isomorfismo que chegam em complexo de projetivos é invertível à direita. E em seguida, veremos que quase isomorfismos em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$ são isomorfismos.

Lema 3.13 *Sejam $P^\bullet$ um complexo em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$ e $X^\bullet$ um complexo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$. Se o morfismo $s^\bullet : X^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ é um quase isomorfismo, então existe $k^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que $s^\bullet k^\bullet : P^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ é homotópico a $1_P^\bullet$.*

Demonstração: Aplicando (T1) ao morfismo $s^\bullet$ temos o triângulo distinguido

$$X^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} P^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} C_s^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

em $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$. Como $s^\bullet$ é quase isomorfismo, pelo lema 3.3, temos que $C_s^\bullet$ é acíclico e pelo lema anterior, temos $i^\bullet : P^\bullet \longrightarrow C_s^\bullet$ homotópico a zero. Seja $h^\bullet$ a homotopia correspondente:

$$h^n = \begin{pmatrix} k^n \\ t^n \end{pmatrix} : P^n \longrightarrow C_s^{n-1} = X^n \oplus P^{n-1}.$$

Assim, $i^n = h^{n+1}d_P^n + d_{C_s}^{n-1}h^n : P^n \longrightarrow X^{n+1} \oplus P^n$. Portanto,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{P^n} \end{pmatrix} = i^n = \begin{pmatrix} k^{n+1} \\ t^{n+1} \end{pmatrix} d_P^n + d_{C_s}^{n-1} \begin{pmatrix} k^n \\ t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^{n+1}d_P^n - d_X^n k^n \\ t^{n+1}d_P^n + s^n k^n + d_P^{n-1}t^n \end{pmatrix}.$$

Disso deduzimos que $k^{n+1}d_P^n = d_X^n k^n$ e então temos que k é um morfismo de complexos. E ainda,

$$1_{P^n} = t^{n+1}d_P^n + s^n k^n + d_P^{n-1}t^n \Rightarrow 1_{P^n} - s^n k^n = t^{n+1}d_P^n + d_P^{n-1}t^n.$$

Portanto $s^\bullet k^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ é homotópico a $1_P^\bullet$. ■

Proposição 3.14 *Sejam $P^\bullet, Q^\bullet$ complexos em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$ e $s^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ um quase isomorfismo. Então $s^\bullet$ é um isomorfismo em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$.*

Demonstração: Como $Q^\bullet$ é projetivo e $s^\bullet$ é quase isomorfismo então pelo lema anterior existe $k^\bullet : Q^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ tal que $s^\bullet k^\bullet$ é homotópico a $1_Q^\bullet$. Assim,

$$H^n(s^\bullet k^\bullet) = H^n(s^\bullet)H^n(k^\bullet) = H^n(1_Q^\bullet) = 1_{H^n(Q^\bullet)},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $s^\bullet$ é quase isomorfismo temos $H^n(s^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pela igualdade acima e como $H^n(s^\bullet)$ é isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos $H^n(k^\bullet)$ também é, e, conseqüentemente $k^\bullet$ é quase isomorfismo.

Agora, como $P^\bullet$ é projetivo e $k^\bullet$ é um quase isomorfismo, novamente pelo lema anterior existe $u^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ tal que $k^\bullet u^\bullet$ é homotópico a $1_P^\bullet$. Assim,

$$u^\bullet = 1_Q^\bullet u^\bullet = s^\bullet k^\bullet u^\bullet = s^\bullet 1_P^\bullet = s^\bullet$$

em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$. Concluimos então que $s^\bullet k^\bullet \sim 1_Q^\bullet$ e $k^\bullet s^\bullet \sim 1_P^\bullet$ e portanto $s^\bullet$ é um isomorfismo em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$. ■

Como vimos, a classe de quase isomorfismos em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$ coincide com a classe dos isomorfismos. Assim, a localização da categoria $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$ pelo sistema multiplicativo $\mathcal{S} \cap \text{Mor}(\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A}))$ coincide com $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$, onde $\text{Mor}(\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A}))$ são os morfismos na categoria $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$.

Teorema 3.15 *O funtor restrição $Q : \mathcal{K}^-(\text{Proj} - \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ do funtor localização $Q : \mathcal{K}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ é fiel e pleno.*

Demonstração: Seja $\mathcal{S}$ a classe dos quase isomorfismos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$. Pela proposição 3.14, temos que $\mathcal{S}_{\mathcal{K}^-(\text{Proj}-\mathcal{A})} = \mathcal{S} \cap \text{Mor}(\mathcal{K}^-(\text{Proj} - \mathcal{A}))$ é um sistema multiplicativo em $\mathcal{K}^-(\text{Proj}-\mathcal{A})$. E ainda, pelo lema 3.13, dado $s^\bullet : X^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ um quase isomorfismo, com $P^\bullet \in \mathcal{K}^-(\text{Proj}-\mathcal{A})$ e $X^\bullet \in \mathcal{K}^-(\mathcal{A})$, existe $k^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que $s^\bullet k^\bullet = 1_P$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$. Assim, pela proposição 1.32 temos que o funtor $\mathcal{K}^-(\text{Proj} - \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{K}^-(\mathcal{A})[\mathcal{S}^{-1}] = \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ é fiel e pleno. ■

Lema 3.16 *Qualquer diagrama da forma*

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{i_{\varphi'}\psi} & P & & \\ & & \downarrow \psi & & \\ & & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' \\ & & \downarrow t & & \downarrow h \\ Q & \xrightarrow{i_\varphi} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

com o quadrado um diagrama pullback, ψ um epimorfismo, $K = \text{Ker}(\varphi'\psi)$ e $Q = \text{Ker}(\varphi)$ pode ser completado com um epimorfismo $g : K \longrightarrow Q$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{i_{\varphi'}\psi} & P & & \\ \downarrow g & & \downarrow \psi & & \\ Q & \xrightarrow{i_\varphi} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Considerando o morfismo $0 : Q \longrightarrow B'$, temos $h \circ 0 = 0 = \varphi \circ i_\varphi$. Como o quadrado é pullback, existe $\lambda : Q \longrightarrow A'$ tal que $\varphi' \circ \lambda = 0$ e $t \circ \lambda = i_\varphi$, ou seja, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow \lambda & & \searrow 0 & \\ & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' & \\ & \downarrow t & & \downarrow h & \\ Q & \xrightarrow{i_\varphi} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Seja $i_{\varphi'} : K' \longrightarrow A'$, onde K' é o núcleo de φ' . Como $\varphi'\lambda = 0$, pela propriedade universal do núcleo, existe $\mu : Q \longrightarrow K'$ tal que $i_{\varphi'}\mu = \lambda$, ou seja,

temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xrightarrow{\lambda} & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' \\ & \searrow \mu & \uparrow i_{\varphi'} & & \\ & & K' & & \end{array}$$

E ainda, como $\varphi \circ t \circ i_{\varphi'} = h \circ \varphi' \circ i_{\varphi'} = 0$, novamente pela propriedade universal do núcleo, existe $\eta : K' \longrightarrow Q$ tal que $t \circ i_{\varphi'} = i_{\varphi} \eta$, ou seja, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{t} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ i_{\varphi'} \uparrow & & \uparrow i_{\varphi} & & \\ K' & \xrightarrow{\eta} & Q & & \end{array} \quad (*)$$

Disso temos $i_{\varphi} \eta \mu = t \circ i_{\varphi'} \mu = t \lambda = i_{\varphi}$. Como i_{φ} é monomorfismo, $\eta \mu = 1_Q$ e portanto, η é epimorfismo.

Agora, como $\varphi' \psi \circ i_{\varphi'} \psi = 0$, pela propriedade universal do núcleo, existe $f : K \longrightarrow K'$ tal que $i_{\varphi'} f = \psi \circ i_{\varphi'} \psi$, ou seja, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\psi} & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' \\ i_{\varphi'} \psi \uparrow & & \uparrow i_{\varphi'} & & \\ K & \xrightarrow{f} & K' & & \end{array} \quad (**)$$

Os diagramas (*) e (**) obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{i_{\varphi'} \psi} & P & & \\ \downarrow f & & \downarrow \psi & & \\ K' & \xrightarrow{i_{\varphi'}} & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' \\ \downarrow \eta & & \downarrow t & & \downarrow h \\ Q & \xrightarrow{i_{\varphi}} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Observemos que o diagrama superior é um pullback. De fato, sejam $T \in Ob \mathcal{A}$, $j : T \longrightarrow P$ e $j' : T \longrightarrow K'$ tais que $i_{\varphi'} j' = \psi \circ j$.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{j} & P \\ & \searrow j' & \downarrow \psi \\ & & K' \xrightarrow{i_{\varphi'}} A' \\ & & \uparrow i_{\varphi'} \psi \\ & & K \end{array}$$

Como $\varphi' \psi \circ j = \varphi' i_{\varphi'} j' = 0$, pela propriedade universal do núcleo, existe $\alpha : T \longrightarrow K$ tal que $i_{\varphi'} \psi \alpha = j$, ou seja, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{\psi} & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' \\ & \searrow \alpha & \uparrow i_{\varphi'} \psi & & & & \\ & & K & & & & \end{array}$$

E ainda temos:

$$\psi j = i_{\varphi'} j' \Rightarrow \psi i_{\varphi'} \psi \alpha = i_{\varphi'} j' \Rightarrow i_{\varphi'} f \alpha = i_{\varphi'} j'.$$

Como $i_{\varphi'}$ é monomorfismo, segue que $f \alpha = j'$. Logo o quadrado é um pullback.

Portanto como ψ é epimorfismo pelo lema 1.16 temos que f também o é. Finalmente, o epimorfismo g é definido como a composição $g = \eta f$. ■

Proposição 3.17 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes projetivos. Se $X^\bullet$ é um complexo tal que $X^n = 0$, para todo $n > 0$, então existe um complexo $P^\bullet$ tal que $P^n = 0$, para todo $n > 0$ e existe um quase isomorfismo $s : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$.*

Demonstração: Seja o complexo

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{-n-1} \xrightarrow{d_X^{-n-1}} X^{-n} \xrightarrow{d_X^{-n}} \dots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \longrightarrow 0.$$

Para todo $n > 0$, definimos $P^n = 0$. Como $\mathcal{A}$ tem suficientes projetivos temos o epimorfismo $\varphi_0 : P^0 \longrightarrow X^0$, com P^0 projetivo. Consideremos o pullback de d_X^{-1} e φ_0 como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T^0 & \longrightarrow & P^0 \\ \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 \end{array}$$

Como $T^0 \in \mathcal{A}$ temos um epimorfismo $P^{-1} \longrightarrow T^0$, com P^{-1} projetivo. Definimos $s_{-1} : P^{-1} \longrightarrow P^0$ como a composição $P^{-1} \longrightarrow T^0 \longrightarrow P^0$. Agora consideremos o núcleo de s_{-1} e construímos o diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} T^{-1} & \longrightarrow & \text{Ker } s_{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & P^{-1} \\ & & \downarrow \\ & & T^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{-2} & \xrightarrow{d_X^{-2}} & X^{-1} \end{array}$$

Como $\mathcal{A}$ tem suficientes objetos projetivos temos um epimorfismo $P^{-2} \longrightarrow T^{-1}$ e definimos $s_{-2} : P^{-2} \longrightarrow P^{-1}$ pela composição

$$P^{-2} \longrightarrow T^{-1} \longrightarrow \text{Ker } s_{-1} \longrightarrow P^{-1}.$$

Seguindo com essa construção temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & & P^{-3} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & T^{-2} \longrightarrow Ker\ s_{-2} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & P^{-2} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & T^{-1} \longrightarrow Ker\ s_{-1} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & P^{-1} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & T^0 \longrightarrow P^0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \dots & & X^{-3} \xrightarrow{d_X^{-3}} X^{-2} \xrightarrow{d_X^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \longrightarrow 0 & & & &
 \end{array}$$

Pela forma como foram construídas, as aplicações $s_{-k} : P^{-k} \longrightarrow P^{-k+1}$ fatoram pelo $Ker\ s_{-k+1}$. Consequentemente, $Im\ s_{-k} \subset Ker\ s_{-k+1}$. Assim obtemos um complexo de objetos projetivos:

$$P^\bullet : \quad \dots \longrightarrow P^{-k} \xrightarrow{s_{-k}} P^{-k+1} \xrightarrow{s_{-k+1}} \dots \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$$

Resta verificarmos que este complexo é quase isomorfo a $X^\bullet$. Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 Ker\ s_{-n-1} \hookrightarrow P^{-n-1} & & \\
 \downarrow & & \\
 T^{-n} \longrightarrow Ker\ s_{-n} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Ker\ d_X^{-n-1} \hookrightarrow X^{-n-1} \xrightarrow{d_X^{-n-1}} X^{-n} & &
 \end{array}$$

Pelo lema 3.16 existe um epimorfismo $g : Ker\ s_{-n-1} \twoheadrightarrow Ker\ d_X^{-n-1}$. Consideremos o pullback de g e α , com α sendo a inclusão da $Im\ d_X^{-n-2}$ no $Ker\ d_X^{-n-1}$

$$\begin{array}{ccc}
 Z \xrightarrow{\alpha'} Ker\ s_{-n-1} & & \\
 g' \downarrow & & \downarrow g \\
 Im\ d_X^{-n-2} \xrightarrow{\alpha} Ker\ d_X^{-n-1} & &
 \end{array}$$

Pelo lema 1.16 temos que α' é monomorfismo porque α o é e g' é epimorfismo porque g o é. Queremos provar que $Z = Im\ s_{-n-2}$. Para isso, consideremos o

seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 P^{-n-2} & & & & \\
 \searrow \lambda_1 & & & & \\
 T^{-n-1} & \xrightarrow{\lambda_2} & Ker s_{-n-1} & \xrightarrow{\lambda_3} & P^{-n-1} \\
 \downarrow \delta & \searrow w & \nearrow \alpha' & \downarrow g & \\
 & Z & & & \\
 & \downarrow g' & & & \\
 X^{-n-2} & \xrightarrow{\gamma} Im d_X^{-n-2} & \xrightarrow{\beta} & X^{-n-1} & \\
 & \nearrow \alpha & & \downarrow \mu & \\
 & & Ker d_X^{-n-1} & &
 \end{array}$$

onde o morfismo $w : T^{-n-1} \longrightarrow Z$ existe pois $\mu g \lambda_2 = \beta \gamma \delta = \mu \alpha \gamma \delta$ e como μ é monomorfismo, $g \lambda_2 = \alpha \gamma \delta$ e Z é um pullback. Observemos que:

$$\begin{array}{ccc}
 T^{-n-1} & \xrightarrow{w} & Z \\
 \downarrow \delta & & \downarrow g' \\
 X^{-n-2} & \longrightarrow & Im d_X^{-n-2}
 \end{array}$$

é um pullback, pois α' é monomorfismo e o quadrado exterior ao diagrama é pullback no passo $-n-1$. Assim, como γ é epimorfismo, então w também o é. Logo temos a fatorização de s_{-n-2} :

$$P^{-n-2} \xrightarrow{\lambda_1} T^{-n-1} \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{\alpha'} Ker s_{-n-1} \xrightarrow{\lambda_3} P^{-n-1}$$

com $w \lambda_1$ epimorfismo e $\lambda_3 \alpha'$ monomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
 P^{-n-2} & \xrightarrow{s_{-n-2}} & P^{-n-1} \\
 \searrow w \lambda_1 & & \nearrow \lambda_3 \alpha' \\
 & Z &
 \end{array}$$

Então como $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, temos $Z = Im s_{-n-2}$.

Assim consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Im s_{-n-2} & \xrightarrow{\alpha'} & Ker s_{-n-1} & \xrightarrow{v'} & H^{-n-1}(P^\bullet) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g' & & \downarrow g & & \downarrow \rho \\
 0 & \longrightarrow & Im d_X^{-n-2} & \xrightarrow{\alpha} & Ker d_X^{-n-1} & \xrightarrow{v} & H^{-n-1}(X^\bullet) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

onde as linhas são sequências exatas curtas e o primeiro quadrado é pullback.

Como g e v são epimorfismos temos que ρ também é um epimorfismo. Resta verificarmos que ρ é um monomorfismo. Como o primeiro quadrado do diagrama

anterior é um pullback entre monomorfismo e um epimorfismo podemos completá-lo ao diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \text{Ker } g' & \xrightarrow{1} & \text{Ker } g & \longrightarrow & \text{Ker } \rho \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Im } s_{-n-2} & \xrightarrow{\alpha'} & \text{Ker } s_{-n-1} & \xrightarrow{v'} & H^{-n-1}(P^\bullet) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow g' & & \downarrow g & & \downarrow \rho \\
0 & \longrightarrow & \text{Im } d_X^{-n-2} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ker } d_X^{-n-1} & \xrightarrow{v} & H^{-n-1}(X^\bullet) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Aplicando o lema da Serpente 1.15, obtemos $\text{Ker } \rho = 0$ e então ρ é monomorfismo. Portanto $s : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ é quase isomorfismo. ■

Corolário 3.18 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes projetivos. O funtor $Q : \mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ é uma equivalência de categorias.*

Demonstração: Pelo teorema 3.15 o funtor é fiel e pleno. Como $\mathcal{A}$ tem suficientes projetivos, pela proposição anterior, para todo complexo $X^\bullet$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ existe um complexo $P^\bullet$ em $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$ e um quase isomorfismo $s : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$. Assim $Q(s)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$. Portanto o funtor também é denso. ■

Corolário 3.19 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes projetivos. O funtor $\mathcal{K}^{-b}(\text{Proj-}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ é uma equivalência de categorias.*

Observação 3.20 *Analogamente podemos provar que a categoria $\mathcal{K}^+(\text{Proj-}\mathcal{A})$ é equivalente a categoria $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ e que a categoria $\mathcal{K}^b(\text{Proj-}\mathcal{A})$ é equivalente a categoria $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$*

Proposição 3.21 *Seja Λ uma álgebra. Se $Q^\bullet$ é um complexo de Λ -módulos projetivos finitamente gerados, onde $Q^i = 0$, para $i < -n$ e $i > 0$ e N é um Λ -módulo qualquer, então $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\Lambda)}(Q^\bullet, N[i]) = 0$, para $i > n$ e $i < 0$.*

Demonstração: De fato, seja $P_N^\bullet$ uma resolução projetiva do Λ -módulo N .

$$P_N^\bullet : \dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$$

Em $\mathcal{D}(\Lambda)$ temos o isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\Lambda)}(Q^\bullet, N[i]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}(\Lambda)}(Q^\bullet, P_N^\bullet[i]) \quad (*)$$

Como $\mathcal{K}^-(\text{Proj-}\Lambda)$ é uma categoria equivalente a $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ e $Q^\bullet$ e $P_N^\bullet$ são projetivos, pelo corolário 3.18 temos

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^-(\Lambda)}(Q^\bullet, P_N^\bullet[i]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{K}^-(\Lambda)}(Q^\bullet, P_N^\bullet[i]) = 0, \quad (**)$$

para $i > n$ e $i < 0$, pois como $Q^\bullet$ é um complexo da forma:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Q^{-n} \longrightarrow Q^{-n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

e considerando $P_N^\bullet[i]$, para $i > n$, teremos um diagrama da forma:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q^{-n} & \longrightarrow & Q^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

e em $\mathcal{K}^-(\Lambda)$, o único morfismo que podemos ter é o morfismo nulo. Agora se tivermos $P_N^\bullet[i]$, para $i < 0$, teremos um diagrama da forma:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Q^{-n} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P^{-n-2} & \longrightarrow & P^{-n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P^{j-1} & \longrightarrow & P^j & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

e em $\mathcal{K}^-(\Lambda)$, como $P_N^\bullet$ é um complexo exato, segue que o único morfismo que podemos ter é o morfismo nulo. Combinando (*) e (**) temos $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\Lambda)}(Q^\bullet, N[i]) = 0$, para $i > n$ e $i < 0$. ■

A seguinte proposição relaciona os morfismos da categoria derivada, entre um complexo de projetivos e um complexo qualquer, com os morfismos da categoria homotópica de complexos entre os mesmos objetos.

Proposição 3.22 *Seja o complexo $P^\bullet \in \mathcal{K}^-(\text{Proj-}\mathcal{A})$. Então para qualquer complexo $Y^\bullet$, a aplicação canônica*

$$\begin{array}{ccc} \phi : \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, Y^\bullet) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P^\bullet, Y^\bullet) \\ f & \longmapsto & \frac{f}{1} \end{array}$$

é bijetiva.

Demonstração: Vejamos primeiro que ϕ é sobrejetora: Dado um morfismo $\frac{f^\bullet}{s^\bullet}$ representado por $P^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet$ em $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P^\bullet, Y^\bullet)$. Como $s^\bullet$ é quase isomorfismo, pelo lema 3.13, existe um morfismo $s'^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que $s^\bullet s'^\bullet = 1_{P^\bullet}$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & X^\bullet & & \\ & \swarrow s^\bullet & \uparrow s'^\bullet & \searrow f^\bullet & \\ P^\bullet & \xlongequal{\quad} & P^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet s'^\bullet} & Y^\bullet \\ & \searrow & \parallel & \nearrow f^\bullet s'^\bullet & \\ & & P^\bullet & & \end{array}$$

Assim os morfismos $\frac{f^\bullet}{s^\bullet}$ e $\frac{f^\bullet s'^\bullet}{1}$ são isomorfos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Portanto, existe um morfismo $f^\bullet s'^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ cuja imagem por ϕ é $\frac{f^\bullet}{s^\bullet}$.

Agora vejamos que ϕ é injetora: Sejam $f_1^\bullet, f_2^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ morfismos tais que $\frac{f_1^\bullet}{1^\bullet}$ e $\frac{f_2^\bullet}{1^\bullet}$ são equivalentes. Então existe um complexo $X^\bullet$, um morfismo

$t^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ e um quase isomorfismo $s^\bullet : X^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P^\bullet & & \\
 & \nearrow s^\bullet & \uparrow & \searrow f_1^\bullet & \\
 P^\bullet & \xleftarrow{s^\bullet} & X^\bullet & \xrightarrow{t^\bullet} & Y^\bullet \\
 & \nwarrow s^\bullet & \downarrow s^\bullet & \nearrow f_2^\bullet & \\
 & & P^\bullet & &
 \end{array}$$

Portanto $f_1^\bullet s^\bullet = t^\bullet = f_2^\bullet s^\bullet$. Pelo lema 3.13 existe $k^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que $s^\bullet k^\bullet \sim 1_{P^\bullet}$. Portanto $f_1^\bullet = f_2^\bullet$. ■

Lema 3.23 *Para qualquer par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe um isomorfismo canônico $Ext_{\mathcal{A}}^n(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B)$ onde estamos identificando os objetos como complexos concentrados de grau zero.*

Demonstração: Seja

$$P_A^\bullet : \cdots \longrightarrow P^{n+1} \xrightarrow{d_n} P^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^2 \xrightarrow{d_1} P^1 \xrightarrow{d_0} P^0 \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva do objeto A . Assim, por definição,

$$Ext^n(A, B) = H^n(Hom_{\mathcal{A}}(P_A^\bullet, B)),$$

onde $Hom_{\mathcal{A}}(P_A^\bullet, B)$ é o complexo

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(P^0, B) \xrightarrow{Hom(d_0, B)} Hom_{\mathcal{A}}(P^1, B) \xrightarrow{Hom(d_1, B)} Hom_{\mathcal{A}}(P^2, B) \longrightarrow \cdots$$

com $Hom(d_i, B)(f) = f d_i$.

Vamos construir um isomorfismo entre $Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_A^\bullet, T^n B)$ e $Ext_{\mathcal{A}}^n(A, B)$.

Observemos primeiro que um morfismo $\tilde{f}$ de complexos entre $P_A^\bullet$ e $T^n B$ é uma família de morfismos f_i , com $i \in \mathbb{Z}$ tal que $f_i = 0$, para todo $i \neq n$ e $f_n = f : P^n \longrightarrow B$ de modo que $f d_n = 0$, como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 P_A^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & P^{n+1} & \xrightarrow{d_n} & P^n & \xrightarrow{d_{n-1}} & P^{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P^1 & \xrightarrow{d_0} & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 \downarrow \tilde{f} & & & \downarrow 0 & & \downarrow f & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
 T^n B : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Como $f d_n = 0$ temos $f \in Ker Hom(d_n, B)$ assim podemos considerar sua classe $[f]$ no quociente $\frac{Ker Hom(d_n, B)}{Im Hom(d_{n-1}, B)} = H^n(Hom_{\mathcal{A}}(P_A^\bullet, B))$. Vejamos que o morfismo

$$\begin{array}{ccc}
 \phi : Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_A^\bullet, T^n B) & \longrightarrow & Ext_{\mathcal{A}}^n(A, B) \\
 \tilde{f} & \longmapsto & [f]
 \end{array}$$

é um isomorfismo. Se $f \sim g$, então $H^i(f) = H^i(g)$. Logo $[f] = [g]$. Portanto ϕ está bem definida.

Provemos que ϕ é injetiva: sejam $\tilde{f}, \tilde{g} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_A^\bullet, T^n B)$ tal que $[f] = [g]$. Assim, $f - g \in \text{Im Hom}(d_{n-1}, B)$ e então existe $h : P^{n-1} \longrightarrow B$ tal que $f - g = hd_{n-1}$. Portanto $\tilde{f} - \tilde{g}$ é homotópico a zero.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & P^{n+1} & \xrightarrow{d_n} & P^n & \xrightarrow{d_{n-1}} & P^{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}} & P^{n-2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow 0 & \swarrow 0 & \downarrow f-g & \swarrow h & \downarrow 0 & \swarrow 0 & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Vejamos agora que ϕ é sobrejetora: dado $[f] \in \frac{\text{Ker Hom}(d_n, B)}{\text{Im Hom}(d_{n-1}, B)}$, temos $f : P^n \longrightarrow B$ tal que $fd_n = 0$. Assim, temos $\tilde{f}$ tal que $f_i = 0$, para todo $i \neq n$ e $f_n = f$ um morfismo de complexos entre $P_A^\bullet$ e $T^n B$ tal que $\phi(\tilde{f}) = [f]$. Portanto temos $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_A^\bullet, T^n B)$.

Pela proposição 3.22, temos $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_A^\bullet, T^n B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P_A^\bullet, T^n B)$. Como $P_A^\bullet$ e A são quase isomorfos, temos $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P_A^\bullet, T^n B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B)$. Disso, temos

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B).$$

■

Corolário 3.24 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ a respectiva categoria derivada, então temos a imersão $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Para cada objeto $X \in \mathcal{A}$, associamos a sua resolução projetiva, $X^\bullet \simeq P_X^\bullet$, onde vemos $X^\bullet$ como complexo concentrado no nível zero.

Para morfismos, usando o lema anterior temos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, T^0 Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

■

Capítulo 4

Teorema de Morita para categoria derivada

Neste capítulo iremos provar o teorema de Morita para categoria derivada e como referência usamos [11].

No que segue as categorias são aditivas e os funtores são funtores aditivos. Os anéis são associativos com unidade. Os módulos, a menos que afirmamos o contrário, são módulos à direita.

Associados com um objeto X de uma categoria Λ , temos as seguintes subcategorias plenas de Λ : $Sum\text{-}X$ consiste de todas as somas diretas de cópias de X ; $Add\text{-}X$ consiste de todos os somandos diretos de somas diretas de cópias de X ; $add\text{-}X$ consiste de todos os somandos diretos de somas finitas de cópias de X .

Associado com um anel Λ , temos as seguintes categorias: $Mod\text{-}\Lambda$ é a categoria de todos Λ -módulos à direita; $mod\text{-}\Lambda$ é a categoria dos Λ -módulos finitamente gerado; $Free\text{-}\Lambda$ é a categoria dos Λ -módulos livres; $Proj\text{-}\Lambda$ é a categoria dos Λ -módulos projetivos; $proj\text{-}\Lambda$ é a categoria dos Λ -módulos projetivos finitamente gerado.

Para anéis temos o teorema de Morita ([12]) que diz:

Teorema: Sejam Λ e Γ anéis. Então:

$$Mod\text{-}\Lambda \sim Mod\text{-}\Gamma \Leftrightarrow \exists P \in proj\text{-}\Lambda$$

tal que

- (1) $End_{\Lambda}P \simeq \Gamma$.
- (2) $add\text{-}P$ gera $mod\text{-}\Lambda$ (como categoria abeliana)

Para categoria derivada Rickard provou em [11] o seguinte teorema:

Teorema: Sejam Λ e Γ anéis. São equivalentes:

- (i) $K^-(Proj\text{-}\Lambda) \sim K^-(Proj\text{-}\Gamma)$
- (ii) $D^b(\Lambda) \sim D^b(\Gamma)$
- (iii) $K^b(Proj\text{-}\Lambda) \sim K^b(Proj\text{-}\Gamma)$
- (iv) $K^b(proj\text{-}\Lambda) \sim K^b(proj\text{-}\Gamma)$

(v) Existe um complexo $T^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$ tal que

(1) $\text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$, para $i \neq 0$.

(2) $\text{add-}T^\bullet$ gera $K^b(\text{proj-}\Lambda)$ (como categoria triangulada).

com $\text{End } T^\bullet \simeq \Gamma$.

A equivalência $(ii) \Leftrightarrow (v)$ é semelhante ao Teorema de Morita e devido essa semelhança, costuma-se dizer que Rickard desenvolveu uma teoria de Morita para categoria derivada.

Se Λ e Γ satisfazem as condições do teorema anterior dizemos que Λ e Γ são *derivadamente equivalentes*.

O complexo $T^\bullet$ que satisfaz as condições (1) e (2) da condição (v) do teorema anterior é chamado *complexo inclinante*. Se satisfaz apenas a condição (1), dizemos que $T^\bullet$ é *parcialmente inclinado*.

Nas próximas seções nos concentraremos na demonstração do Teorema de Rickard.

4.1 Construção do funtor F entre $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$ e $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$

Suponhamos que existe $T^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$ tal que $\text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$, para $i \neq 0$. Iremos construir um funtor exato aditivo

$$F : K^-(\text{Proj} - \Gamma) \longrightarrow K^-(\text{Proj} - \Lambda)$$

o qual é fiel e pleno.

Para a construção do funtor F , mostraremos primeiro que $K^-(\text{Proj-}\Gamma) \sim K^-(\text{Free-}\Gamma)$, em seguida mostraremos que $\text{Free-}\Gamma \simeq \text{Sum-}T^\bullet$ e consequentemente $K^-(\text{Proj-}\Gamma) \sim K^-(\text{Sum-}T^\bullet)$. Assim será suficiente construir um funtor entre as categorias $K^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ e $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$. Isso será feito explicitamente para objetos da categoria $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ (será definida a seguir) para quem associamos algo como uma generalização de um bicomplexo de tal modo que podemos definir o complexo total como em 1.24.

Este procedimento define um funtor $\phi : C^-(\text{Sum-}T^\bullet) \longrightarrow K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ o qual fatora pelo mergulho natural $C^-(\text{Sum-}T^\bullet) \longrightarrow K^-(\text{Sum-}T^\bullet)$. Isso juntamente com as equivalências acima nos dá o funtor F . Em seguida verificaremos que esse funtor F é aditivo e exato.

Vejamos o esquema:

$$\begin{array}{ccc}
& G(\Lambda) & \xleftarrow{\text{associação}} C^-(\text{Sum} - T^\bullet) \\
\text{complexo total} \swarrow & \searrow \phi & \downarrow \\
K^-(\text{Proj} - \Lambda) & \xleftarrow{\quad} & K^-(\text{Sum} - T) \\
& \searrow F & \downarrow \wr \\
& & K^-(\text{Free} - \Gamma) \\
& & \downarrow \wr \\
& & K^-(\text{Proj} - \Gamma)
\end{array}$$

Sejam então Λ um anel e $T^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$ tal que $\text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$, para $i \neq 0$ e $\text{End } T^\bullet \simeq \Gamma$.

Lema 4.1 *Se $X^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$, então $\text{Hom}(T^\bullet, -) : K^-(\text{Proj-}\Lambda) \rightarrow \text{Ab}$ comuta com soma direta arbitrária.*

Demonstração: veja [13] e [5]. ■

Lema 4.2 *O funtor $\text{Hom}(T^\bullet, -) : K^-(\text{Proj-}\Lambda) \rightarrow \text{Mod-}\Gamma$ induz uma equivalência entre $\text{Sum-}T^\bullet$ e $\text{Free-}\Gamma$.*

Demonstração: Seja $X \in \text{Sum-}T^\bullet$, ou seja, $X = \oplus T^\bullet$. Como $T^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$, pelo lema anterior, temos

$$\text{Hom}(T^\bullet, X) = \text{Hom}(T^\bullet, \oplus T^\bullet) \simeq \oplus \text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet) \simeq \oplus \Gamma \in \text{Free} - \Gamma$$

Portanto $\text{Sum} - T^\bullet \simeq \text{Free-}\Gamma$. ■

Lema 4.3 *O mergulho natural $K^-(\text{Free-}\Gamma) \hookrightarrow K^-(\text{Proj-}\Gamma)$ é denso (e consequentemente uma equivalência).*

Demonstração: Seja $P^\bullet : \dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ um complexo em $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$.

Como P^0 é um módulo projetivo, P^0 é um somando direto de um módulo livre, ou seja, $L_0 = P^0 \oplus Q_0$, onde L_0 é um módulo livre. Somando os complexos abaixo,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & P^{-2} & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
& & & & & & \oplus & & & & & & \\
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

temos o complexo

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \oplus Q_0 \longrightarrow P^0 \oplus Q_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Novamente, como $P^{-1} \oplus Q_0$ é projetivo, $P^{-1} \oplus Q_0$ é somando de um módulo livre, ou seja, $L_1 = P^{-1} \oplus Q_0 \oplus Q_1$, com L_1 módulo livre. Somando os complexos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & P^{-3} & \longrightarrow & P^{-2} & \longrightarrow & P^{-1} \oplus Q_0 & \longrightarrow & P^0 \oplus Q_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
& & & & & & \oplus & & & & & & \\
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

temos o complexo

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \oplus Q_1 \longrightarrow P^{-1} \oplus Q_0 \oplus Q_1 \longrightarrow P^0 \oplus Q_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Seguindo esse procedimento, obtemos:

$$\dots \longrightarrow L_3 \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \in K^-(Free - \Gamma)$$

Pela observação 2.23, temos que o complexo $Q_i^\bullet$ é zero em $K^-(Proj-\Gamma)$, onde $Q_i^\bullet$ é um complexo tal que $Q_i^j = Q_i$, se $j = i$ e $j = i - 1$ e $Q_i^j = 0$, caso contrário. Consequentemente, $P^\bullet \simeq P^\bullet \oplus (\oplus Q_i^\bullet)$. Logo o funtor é denso e temos uma equivalência entre as categorias $K^-(Free-\Gamma)$ e $K^-(Proj-\Gamma)$. ■

Pelos lemas 4.2 e 4.3, temos:

$$K^-(Proj-\Gamma) \simeq K^-(Free-\Gamma) \simeq K^-(Sum-T^\bullet)$$

Note que imagem de Γ por essa equivalência é $T^\bullet$.

Nosso próximo passo é construir um funtor de $K^-(Sum-T^\bullet)$ em $K^-(Proj-\Lambda)$. Para isso, definiremos a categoria $C^-(Sum-T^\bullet)$ e em seguida construiremos um funtor aditivo de $C^-(Sum-T^\bullet)$ em $K^-(Proj-\Lambda)$ provando que esse funtor fatora através do funtor natural de $C^-(Sum-T^\bullet)$ em $K^-(Sum-T^\bullet)$.

Definição 4.4 *Seja d_I a diferencial do complexo $T^\bullet$. A categoria $C^-(Sum-T^\bullet)$ tem como objeto uma sequência de complexos sobre $Proj-\Lambda$ que são somas diretas de cópias de $T^\bullet$, junto com uma sequência de classes de homotopia δ de funções entre elas tal que $d_I d_{II} = d_{II} d_I$ e a aplicação d_{II}^2 é homotópico a zero, onde d_{II} é um representante de δ . Um objeto de $C^-(Sum-T^\bullet)$ é denotado por (X, δ) .*

Sejam (X, δ) e (Y, δ') objetos em $C^-(Sum-T^\bullet)$. Um morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ é tal que $\alpha d_I = d_I \alpha$ e $\alpha d_{II} \sim d'_{II} \alpha$, onde d_{II} é um representante de δ e d'_{II} , um representante de δ' .

Seja (X, δ) um objeto de $C^-(Sum-T^\bullet)$. Escolhendo um representante d_{II} em cada classe de homotopia, então podemos visualizar esse objeto como:

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\lambda_j} T^\bullet & \longrightarrow & X^{i-1,j} & \xrightarrow{d_I^{i-1,j}} & X^{i,j} & \xrightarrow{d_I^{i,j}} & X^{i+1,j} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow d_{II}^{i-1,j} & & \downarrow d_{II}^{i,j} & & \downarrow d_{II}^{i+1,j} \\ \bigoplus_{\lambda_{j+1}} T^\bullet & \longrightarrow & X^{i-1,j+1} & \xrightarrow{d_I^{i-1,j+1}} & X^{i,j+1} & \xrightarrow{d_I^{i,j+1}} & X^{i+1,j+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow d_{II}^{i-1,j+1} & & \downarrow d_{II}^{i,j+1} & & \downarrow d_{II}^{i+1,j+1} \\ \bigoplus_{\lambda_{j+2}} T^\bullet & \longrightarrow & X^{i-1,j+2} & \xrightarrow{d_I^{i-1,j+2}} & X^{i,j+2} & \xrightarrow{d_I^{i,j+2}} & X^{i+1,j+2} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

onde $X^{i,j} = \bigoplus_{\lambda_j} T^i$, para todo i e j .

Observação 4.5 *Seja (X, δ) um objeto de $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$. Escolhendo um representante d_{II} em cada classe de homotopia, resulta que $(X^{\bullet,\bullet}, d_I, d_{II})$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $X^{\bullet,\bullet}$ é um objeto bigraduado;
- (ii) d_I tem grau $(1, 0)$ dado pelo complexo $T^\bullet$;
- (iii) d_{II} tem grau $(0, 1)$ dado pelas aplicações entre o complexo original.
- (iv) $X^{i,j} \neq 0$ para somente uma quantidade finita de índices i ou j ;
- (v) $d_I^2 = 0$;
- (vi) $d_I d_{II} = d_{II} d_I$
- (vii) Visto como complexo $(X^{\bullet,j}, d_I)$ é soma direta de cópias de $T^\bullet$, para cada j .
- (viii) Se $\alpha : X \longrightarrow Y$ é um morfismo em $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$, então α define, a menos de homotopia, um morfismo graduado $\alpha_0 : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ de grau $(0, 0)$.

Assim, os objetos de $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ são quase bicomplexos. Seja (X, δ) um objeto em $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$, com d_{II} um representante de δ . Tentaremos tomar o complexo total de $(X^{\bullet,\bullet}, d_I, d_{II})$ como definido no capítulo 1 em 1.24.

Temos que verificar que esta construção fornece um complexo. Vamos escolher $X^{i,j}$ e checar isso. Assim, o correspondente complexo total a partir de $X^{i,j}$ é:

$$X^{i,j} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_I^{i,j} & d_{II}^{i,j} \end{pmatrix}^t} X^{i+1,j} \oplus X^{i,j+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_I^{i+1,j} & d_{II}^{i+1,j} & 0 \\ 0 & d_I^{i,j+1} & d_{II}^{i,j+1} \end{pmatrix}^t} X^{i+2,j} \oplus X^{i+1,j+1} \oplus X^{i,j+2}$$

Precisamos verificar se realmente temos uma diferencial. Fazendo a composição temos,

$$\begin{pmatrix} d_I^{i+1,j} & 0 \\ d_{II}^{i+1,j} & d_I^{i,j+1} \\ 0 & d_{II}^{i,j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_I^{i,j} \\ d_{II}^{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_I^{i+1,j} d_I^{i,j} & d_I^{i+1,j} d_{II}^{i,j} \\ d_{II}^{i+1,j} d_I^{i,j} + d_I^{i,j+1} d_{II}^{i,j} & d_{II}^{i+1,j} d_{II}^{i,j} \\ d_{II}^{i,j+1} d_I^{i,j} & d_{II}^{i,j+1} d_{II}^{i,j} \end{pmatrix}$$

Observemos que a primeira componente é zero pois d_I é uma diferencial. A segunda componente não é zero, mas pode ser zero se escolhermos $(-1)^{i+j} d_{II}^{i,j}$ em vez de $d_{II}^{i,j}$ e pela observação 4.5 no item (vi), temos que a segunda componente é zero. Agora como $d_{II}^{i,j+1} d_{II}^{i,j} \sim 0$, a terceira componente, em geral, não é zero. Logo não temos um complexo.

Renomearemos $d_0 := d_I^{i,j}$ e $d_1 := (-1)^{i+j} d_{II}^{i,j}$.

Vejamos um exemplo para ver o que está acontecendo com o intuito de contornar esse problema.

Exemplo 4.6 Pelo exemplo 1.35 temos que o módulo simples $S(d)$ não tem auto extensões, ou seja, para $i \neq 0$, $\text{Ext}^i(S(d), S(d)) = 0$. De fato, como $S(d) = I(d)$ é injetivo segue que $\text{Ext}^i(S(d), S(d)) = 0$. Consideremos $S(d)$ como complexo concentrado e o representemos por sua resolução projetiva, a dizer $T^\bullet$ como segue:

$$T^\bullet : 0 \longrightarrow P(a) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_b & j_c \end{pmatrix}^t} P(b) \oplus P(c) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix}} P(d) \longrightarrow 0 ,$$

onde as inclusões de $P(b)$ e $P(c)$ em $P(d)$ são denotadas por i_b e i_c e as inclusões de $P(a)$ em $P(b)$ e $P(c)$ são denotadas por j_b e j_c . Considere o seguinte objeto em $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & P(a) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_b \\ -j_c \end{pmatrix}} & P(b) \oplus P(c) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix}} P(d) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & P(a) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -j_b \\ j_c \end{pmatrix}} & P(b) \oplus P(c) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix}} P(d) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P(a) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_b \\ -j_c \end{pmatrix}} & P(b) \oplus P(c) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix}} & P(d) \longrightarrow 0 \end{array}$$

É fácil checar que os quadrados são comutativos. Além disso, a composição de aplicações verticais consecutivas é homotópico a zero. De fato, o único nível que precisamos checar é a composição

$$P(a) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_b \\ j_c \end{pmatrix}} P(b) \oplus P(c) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix}} P(d) .$$

Mas pelo diagrama anterior existem as aplicações

$$P(a) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_b \\ j_c \end{pmatrix}} P(b) \oplus P(c) \quad e \quad P(b) \oplus P(c) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix}} P(d)$$

tais que:

$$\begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b \\ j_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b \\ j_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_b & i_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b \\ -j_c \end{pmatrix}$$

Agora vamos tomar o complexo total associado a esse objeto de $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$

$$0 \longrightarrow [P(a)]^3 \xrightarrow{\alpha} [P(b) \oplus P(c)]^3 \xrightarrow{\beta} [P(d)]^3 \longrightarrow 0 ,$$

$$\text{onde } \alpha = \begin{pmatrix} j_b & 0 & 0 \\ -j_c & 0 & 0 \\ j_b & -j_b & 0 \\ j_c & j_c & 0 \\ 0 & -j_b & j_b \\ 0 & j_c & -j_c \end{pmatrix} \quad e \quad \beta = \begin{pmatrix} i_b & i_c & i_b & -i_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i_b & -i_c & i_b & i_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i_b & i_c \end{pmatrix} . \text{ Note que}$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 2i_b j_b - 2i_c j_c & -i_b j_b - i_c j_c & 0 \\ -i_b j_b - i_c j_c & 0 & i_b j_b - i_c j_c \\ 0 & -i_b j_b + i_c j_c & i_b j_b - i_c j_c \end{pmatrix}.$$

Dessa forma $\beta\alpha$ não é zero e trocando sinais na definição das aplicações não resolve pois existem entradas de mesmo sinal. Logo não podemos tomar diretamente o complexo total.

O problema é que se d é a diferencial do complexo total, então d^2 é por definição a soma $d_0 d_0 + d_0 d_1 + d_1 d_0 + d_1 d_1$, onde d_0 é a diferencial do complexo $T^\bullet$ e d_1 as aplicações verticais do objeto de $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ considerado. O primeiro termo é zero pois trata-se de uma diferencial, o segundo e o terceiro cancelam, mas o último não é zero e sim, homotópico a zero. Isto significa que existe uma aplicação homotopia h de grau $(-1, 2)$ tal que $-d_1^2 = h d_0 + d_0 h$. Definindo $d_2 = h$ e tomando a nova diferencial como $d = d_0 + d_1 + d_2$, temos

$$d^2 = (d_0 + d_1 + d_2)^2 = \underbrace{d_0^2}_{=0} + \underbrace{d_0 d_1 + d_1 d_0}_{=0} + \underbrace{d_1 d_1 + d_0 d_2 + d_2 d_0}_{=0} + \underbrace{d_1 d_2}_{=0} + \underbrace{d_2 d_1}_{=0} + \underbrace{d_2^2}_{=0} = 0.$$

Em geral, isso ainda não resolve o problema. Quando se muda a diferencial adicionando d_2 , temos naturalmente que verificar em cada nível que temos uma diferencial. Em graus maiores do complexo total não existe uma garantia para isso. Em nosso exemplo não existem graus mais elevados para checar.

O que é feito, em geral, é ir produzindo endomorfismos d_i , $i \in \mathbb{N}$ de forma a corrigir cada nível da diferencial do complexo total. A medida que produzimos os endomorfismos d_i , o “defeito” do complexo total aparece em um nível mais elevado, mas com a suposição de $T^\bullet$ (o desaparecimento de morfismos deslocados a menos de homotopia) nos permite usar o mesmo “truque” para corrigir este próximo nível também. Como $T^\bullet$ é limitado, isto implica que o nosso problema eventualmente desaparece.

A diferença entre o que queremos (uma diferencial para o complexo total) e o que realmente temos é um endomorfismo de translação, consequentemente homotópico a zero (mas não necessariamente zero). Assim, a idéia para resolver o problema é: escolhendo uma homotopia, podemos mudar o problema para o grau seguinte. E então podemos transferi-lo novamente, e novamente e assim, transferimos para um nível onde $T^\bullet$ (complexo limitado) tem entrada zero, e assim a “aplicação problemática” é zero.

Iremos formalizar esta idéia introduzindo uma nova categoria. Essencialmente, isto é feito adicionando todos esses endomorfismos para o complexo dado, ou seja, iremos estender d_0, d_1 a uma sequência de endomorfismos graduados d_i , tendo grau $(1 - i, i)$ tal que

$$d_0 d_n + d_1 d_{n-1} + \dots + d_n d_0 = 0,$$

para todo n . Dessa forma iremos construir uma categoria $G(\Lambda)$ de modo a possibilitarmos a construção do complexo total.

Definição 4.7 A categoria $G(\Lambda)$ é definida da seguinte forma:

Os objetos de $G(\Lambda)$ são: $\{(X^{\bullet,\bullet}, d_i), i = 0, 1, 2, \dots\}$, onde $X^{\bullet,\bullet}$ é um objeto bi-graduado de $\text{Proj-}\Lambda$ tal que $X^{i,j} \neq 0$, para uma quantidade finita de índices i ou j , d_i é um endomorfismo de $X^{\bullet,\bullet}$ de grau $(1-i, i)$, para cada i , satisfazendo

$$d_0 d_n + d_1 d_{n-1} + \dots + d_n d_0 = 0,$$

para todo n .

Um morfismo α em $G(\Lambda)$ entre os objetos $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ e $(Y^{\bullet,\bullet}, e_i)$ é uma família de aplicações graduadas $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$, com $i = 0, 1, 2, \dots$ tal que α_i tem grau $(-i, i)$ e para todo n , temos

$$\alpha_0 d_n + \alpha_1 d_{n-1} + \dots + \alpha_n d_0 = e_0 \alpha_n + e_1 \alpha_{n-1} + \dots + e_n \alpha_0$$

com a composição de morfismos definida por

$$(\alpha\beta)_n = \alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_0,$$

onde $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ e $\{\beta_i\} : Y^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Z^{\bullet,\bullet}$.

Observação 4.8 Se $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ é um objeto de $G(\Lambda)$, então podemos tomar o complexo total $(\text{tot}(X^{\bullet,\bullet}), \sum d_i)$, onde $\text{tot}(X^{\bullet,\bullet})^n = \bigoplus X^{i,n-i}$. Note que $\sum d_i$ é realmente uma diferencial, pois

$$\begin{aligned} \sum d_i \sum d_i &= (d_0 + d_1 + d_2 + \dots)(d_0 + d_1 + d_2 + \dots) = \\ &= d_0^2 + (d_0 d_1 + d_1 d_0) + (d_0 d_2 + d_1 d_1 + d_2 d_0) + \dots + (d_0 d_n + \dots + d_n d_0) + \dots = 0 \end{aligned}$$

pela definição dos objetos de $G(\Lambda)$.

Pelo esquema do funtor F feito no início deste capítulo, para a construção do funtor F , precisamos agora construir os funtores entre $C^-(\text{Sum} - T^\bullet)$ e $G(\Lambda)$ e entre $G(\Lambda)$ e $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$.

Nosso próximo passo será construir o funtor de $G(\Lambda)$ em $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$, uma vez que já vimos que podemos tomar o complexo total de um objeto de $G(\Lambda)$.

Lema 4.9 Existe um funtor entre as categorias $G(\Lambda)$ e $C^-(\text{Proj-}\Lambda)$.

Demonstração: Pela observação 4.8, dado um objeto em $G(\Lambda)$ podemos tomar o complexo total. Se $\alpha : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ é um morfismo em $G(\Lambda)$, então $\sum \alpha_i$ define um morfismo entre o complexo total de $X^{\bullet,\bullet}$ e o complexo total de $Y^{\bullet,\bullet}$. De fato, isto vem da condição $e_0 \alpha_n + \dots + e_n \alpha_0 = \alpha_0 d_n + \dots + \alpha_n d_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus X^{i,-i} & \xrightarrow{\sum d_i} & \bigoplus X^{i,1-i} \\ \downarrow \sum \alpha_i & & \downarrow \sum \alpha_i \\ \bigoplus Y^{i,-i} & \xrightarrow{\sum e_i} & \bigoplus Y^{i,1-i} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum e_i \sum \alpha_i &= (e_0 + e_1 + e_2 + \dots)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots) = \\ &= e_0 \alpha_0 + (e_0 \alpha_1 + e_1 \alpha_0) + \dots + (e_0 \alpha_n + \dots + e_n \alpha_0) + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_0 d_0 + (\alpha_0 d_1 + \alpha_1 d_0) + \dots + (\alpha_0 d_n + \dots + \alpha_n d_0) + \dots = \\
&= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots)(d_0 + d_1 + d_2 + \dots) = \sum \alpha_i \sum d_i
\end{aligned}$$

Assim temos o funtor complexo total dado por:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi : & G(\Lambda) & \longrightarrow C^-(Proj-\Lambda) \\
& (X^{\bullet,\bullet}, d_i) & \longmapsto (tot^\bullet(X^{\bullet,\bullet}), \sum d_i) \\
& \downarrow \alpha & \downarrow \sum \alpha_i \\
& (Y^{\bullet,\bullet}, e_i) & \longmapsto (tot^\bullet(Y^{\bullet,\bullet}), \sum e_i)
\end{array}$$

■

Dessa forma temos um funtor entre $G(\Lambda)$ e $C^-(Proj-\Lambda)$. Porém, precisamos de um funtor entre as categorias $G(\Lambda)$ e $K^-(Proj-\Lambda)$. Para isso definiremos homotopia em $G(\Lambda)$.

Definição 4.10 *Seja $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ um morfismo em $G(\Lambda)$. Dizemos que $\{\alpha_i\}$ é homotópico a zero ($\{\alpha_i \sim 0\}$) se existe uma sequência de aplicações graduadas $\{h_i\}$ de $X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ tais que h_i tem grau $(-1-i, i)$ e tal que, para todo n ,*

$$\alpha_n = e_0 h_n + \dots + e_n h_0 + h_0 d_n + \dots + h_n d_0$$

Dois morfismos em $G(\Lambda)$ se dizem homotópicos se sua diferença é homotópico a zero.

Observação 4.11 *Está bem definida a categoria $\frac{G(\Lambda)}{\sim}$ cujos objetos são os mesmos objetos de $G(\Lambda)$ e os morfismos são os morfismos de $G(\Lambda)$ a menos de homotopia.*

Lema 4.12 *O funtor complexo total está bem definido de $\frac{G(\Lambda)}{\sim}$ em $K^-(Proj-\Lambda)$.*

Demonstração: Seja $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ um morfismo homotópico a zero ($\{\alpha_i\} \sim 0$) em $G(\Lambda)$ e consideremos o morfismo entre os complexos totais de $X^{\bullet,\bullet}$ e $Y^{\bullet,\bullet}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \oplus X^{i,-1-i} & \xrightarrow{\sum d_i} & \oplus X^{i,-i} & \xrightarrow{\sum d_i} & \oplus X^{i,1-i} \xrightarrow{\sum d_i} \oplus X^{i,2-i} \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow \sum \alpha_i & & \downarrow \sum \alpha_i & & \downarrow \sum \alpha_i \\
\dots & \longrightarrow & \oplus Y^{i,-1-i} & \xrightarrow{\sum e_i} & \oplus Y^{i,-i} & \xrightarrow{\sum e_i} & \oplus Y^{i,1-i} \xrightarrow{\sum e_i} \oplus Y^{i,2-i} \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Como $\{\alpha_i\} \sim 0$ segue que existe uma sequência de aplicações $\{h_i\}$ de grau $(-1-i, i)$ e tal que, para todo n ,

$$\alpha_n = e_0 h_n + e_1 h_{n-1} + \dots + e_n h_0 + h_0 d_n + \dots + h_n d_0$$

Pelas condições de $\{h_i\}$, segue que

$$\sum \alpha_i = \sum h_i \sum d_i + \sum e_i \sum h_i$$

ou seja, $\sum \alpha_i \sim 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
& \sum h_i \sum d_i + \sum e_i \sum h_i = \\
& = (h_0 + h_1 + h_2 + \dots)(d_0 + d_1 + d_2 + \dots) + (e_0 + e_1 + e_2 + \dots)(h_0 + h_1 + h_2 + \dots) = \\
& = (h_0 d_0 + e_0 h_0) + (e_0 h_1 + e_1 h_0 + h_0 d_1 + h_1 d_0) + \dots = \\
& = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \dots = \sum \alpha_i
\end{aligned}$$

■

Os próximos resultados auxiliarão na construção de um funtor entre as categorias $C^-(Sum-T^\bullet)$ e $G(\Lambda)$.

Lema 4.13 *Sejam $X^{\bullet,\bullet}$ e $Y^{\bullet,\bullet}$ objetos bigraduados de $Proj-\Lambda$, $X^{\bullet,\bullet}$ com um endomorfismo graduado d de grau $(1,0)$ tal que $d^2 = 0$ e $Y^{\bullet,\bullet}$ com um endomorfismo graduado e de grau $(1,0)$ tal que $e^2 = 0$. Suponha que, para cada i , $(X^{\bullet,i}, d)$ e $(Y^{\bullet,i}, e)$ sejam isomorfos a soma direta de cópias de $T^\bullet$. Então toda aplicação $\alpha : X^{\bullet,\bullet} \rightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ de grau (p,q) , $p \neq 0$ tal que $\alpha d = e \alpha$ é da forma $eh + hd$ sendo h uma aplicação graduada de grau $(p-1, q)$.*

Demonstração: Para cada i , temos

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^{-1,i} & \xrightarrow{d} & X^{0,i} & \xrightarrow{d} & X^{1,i} & \xrightarrow{d} & X^{2,i} & \xrightarrow{d} & \cdots \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \\
\cdots & \longrightarrow & Y^{p-1,i+q} & \xrightarrow{e} & Y^{p,i+q} & \xrightarrow{e} & Y^{p+1,i+q} & \xrightarrow{e} & Y^{p+2,i+q} & \xrightarrow{e} & \cdots
\end{array}$$

Como $\alpha d = e \alpha$, segue que α é um morfismo de complexos entre $X^{\bullet,i} \rightarrow Y^{\bullet,i+q}[p]$, ou seja, $\alpha \in Hom_{K-(Proj-\Lambda)}(X^{\bullet,i}, Y^{\bullet,i+q}[p])$. Por hipótese, $X^{\bullet,i}$ e $Y^{\bullet,i}$ são somas diretas de cópias de $T^\bullet$ e como $Hom_{K-(Proj-\Lambda)}(T^\bullet, T^\bullet[p]) = 0$, para $p \neq 0$ segue que $\alpha \sim 0$. Logo existe uma aplicação de homotopia h tal que $\alpha = hd + eh$, com grau de h igual a $(p-1, q)$. ■

Observação 4.14 *O lema anterior também é válido para toda aplicação $\alpha : X^{\bullet,\bullet} \rightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ de grau (p,q) , $p \neq 0$ tal que $-\alpha d = e \alpha$, uma vez que podemos considerar a diferencial de $X^{\bullet,i}$ como $-d$.*

Observação 4.15 *Para todo objeto em $G(\Lambda)$, o primeiro endomorfismo é sempre o mesmo, d_0 , que provém da diferencial do complexo $T^\bullet$. Dessa forma, sempre que necessário, usaremos esse fato.*

Definição 4.16 1. *Seja (X, δ) um objeto em $C^-(Sum-T^\bullet)$. Já vimos que temos um objeto bigraduado $X^{\bullet,\bullet}$ de $Proj-\Lambda$ e endomorfismos d_0 e $d_1 = (-1)^{i+j} d_{II}$ com graduação $(1,0)$ e $(0,1)$, respectivamente satisfazendo $d_0^2 = 0$ e $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0$, onde d_{II} é um representante de δ . Um objeto $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ de $G(\Lambda)$ é dito associado com (X, δ) se $(X^{\bullet,\bullet}, d_0, d_1)$ coincidem.*

2. Se $\alpha : X \longrightarrow Y$ é um morfismo em $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ e $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ e $(Y^{\bullet,\bullet}, e_i)$ são objetos de $G(\Lambda)$ associados com X e Y , respectivamente, então α define, a menos de homotopia, uma aplicação graduada $\alpha_0 : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ de grau $(0, 0)$. Uma aplicação $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ em $G(\Lambda)$ é associado com (α, α_0) se α_0 coincide.

Lema 4.17 Para qualquer objeto X de $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ e qualquer escolha de δ , existe um objeto $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ em $G(\Lambda)$ associado a (X, δ) .

Demonstração: Se $X \in C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ temos $(X^{\bullet,\bullet}, d_0, d_1)$, onde $d_1 = (-1)^{i+j}\delta$, com $d_0^2 = 0$ e $d_0d_1 + d_1d_0 = 0$. Precisamos definir os outros endomorfismos graduados para conseguirmos um objeto de $G(\Lambda)$.

Como $d_1^2 : X^{\bullet,i} \longrightarrow X^{\bullet,i+2}$ é homotópico a zero, para cada i , podemos escolher uma aplicação homotopia e obter uma aplicação graduada d_2 de grau $(-1, 2)$ tal que $d_0d_2 + d_1^2 + d_2d_0 = 0$.

Suponhamos que temos $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ tal que d_i tem grau $(1-i, i)$ e para cada $k < n$, temos

$$d_0d_k + d_1d_{k-1} + \dots + d_kd_0 = 0$$

Note que:

$$\begin{aligned} d_0(d_1d_{n-1} + d_2d_{n-2} + \dots + d_{n-1}d_1) &= (d_0d_1)d_{n-1} + \dots + (d_0d_{n-1})d_1 \\ &= (-d_1d_0)d_{n-1} + \dots + (-d_1d_{n-2} - \dots - d_{n-1}d_0)d_1 \\ &= d_1(-d_0d_{n-1} - \dots - d_{n-2}d_1) + \dots + d_{n-1}(-d_0d_1) \\ &= d_1(d_{n-1}d_0) + \dots + d_{n-1}(d_1d_0) = \\ &= (d_1d_{n-1} + \dots + d_{n-1}d_1)d_0 \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = d_1d_{n-1} + \dots + d_{n-1}d_1$, temos que α tem grau $(2-n, n)$ e $d_0\alpha = \alpha d_0$. Pelo lema 4.13, temos que existe uma aplicação graduada h de grau $(1-n, n)$ tal que $\alpha = d_0h + hd_0$. Fazendo $d_n = -h$, temos:

$$d_0d_n + d_1d_{n-1} + \dots + d_{n-1}d_1 + d_nd_0 = 0$$

Portanto temos um objeto $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ em $G(\Lambda)$ associado a (X, δ) de $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$.

■

Lema 4.18 Sejam $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ e $(Y^{\bullet,\bullet}, e_i)$ objetos de $G(\Lambda)$ associados com (X, δ) e (Y, δ') , respectivamente, onde X e Y são objetos de $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$. Sejam $\alpha : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ e $\alpha_0 : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ alguma escolha da aplicação graduada como descrito na definição. Então existe um morfismo $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ de $G(\Lambda)$ associado com (α, α_0) .

Demonstração: A aplicação $(-1)^{i+j}(\alpha_0d_1 - e_1\alpha_0) : X^{i,j} \longrightarrow Y^{i,j+1}$ define um morfismo de complexo $X^{\bullet,j} \longrightarrow Y^{\bullet,j+1}$ que é homotópico a zero. Assim existe uma aplicação graduada $h_1 : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ de grau $(-1, 1)$ obtida pela escolha de uma homotopia para cada j tal que

$$(-1)^{i+j}(\alpha_0d_1 - e_1\alpha_0) = e_0h_1 + h_1d_0$$

Definimos $\alpha_1 = (-1)^{i+j}h_1 : X^{i,j} \longrightarrow Y^{i-1,j+1}$

$$\begin{array}{ccc} X^{i,j} & \xrightarrow{d_0} & X^{i+1,j} \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_1 \\ Y^{i-1,j+1} & \xrightarrow{e_0} & Y^{i,j+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X^{i,j} & \xrightarrow{d_0} & X^{i+1,j} \\ (-1)^{i+j}h_1 \downarrow & & \downarrow (-1)^{i+j+1}h_1 \\ Y^{i-1,j+1} & \xrightarrow{e_0} & Y^{i,j+1} \end{array}$$

Assim,

$$(-1)^{i+j}(\alpha_0 d_1 - e_1 \alpha_0) = (-1)^{i+j+1} \alpha_1 d_0 + (-1)^{i+j} d_0 \alpha_1$$

$$\alpha_0 d_1 - e_1 \alpha_0 = -\alpha_1 d_0 + d_0 \alpha_1$$

$$e_0 \alpha_1 + e_1 \alpha_0 = \alpha_0 d_1 + \alpha_1 d_0$$

Suponhamos que temos aplicações graduadas $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ de graus apropriados tais que para cada $k < n$, temos:

$$\alpha_0 d_k + \alpha_1 d_{k-1} + \dots + \alpha_k d_0 = e_0 \alpha_k + e_1 \alpha_{k-1} + \dots + e_k \alpha_0$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} & d_0(\alpha_0 d_n + \alpha_1 d_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} d_1 - e_1 \alpha_{n-1} - \dots - e_n \alpha_0) = \\ &= (d_0 \alpha_0) d_n + (d_0 \alpha_1) d_{n-1} + \dots + (d_0 \alpha_{n-1}) d_1 - (d_0 e_1) \alpha_{n-1} - \dots - (d_0 e_n) \alpha_0 \\ &= (\alpha_0 d_0) d_n + (\alpha_0 d_1 + \alpha_1 d_0 - e_1 \alpha_0) d_{n-1} + \dots + \\ &\quad + (\alpha_0 d_{n-1} + \alpha_1 d_{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} d_0 - e_1 \alpha_{n-2} - \dots - e_{n-1} \alpha_0) d_1 + \\ &\quad + (e_1 d_0) \alpha_{n-1} + (e_1^2 + e_2 d_0) \alpha_{n-2} + \dots + (e_1 e_{n-1} + \dots + e_n d_0) \alpha_0 \\ &= \alpha_0 (d_0 d_n + d_1 d_{n-1} + \dots + d_{n-1} d_1) + \alpha_1 (d_0 d_{n-1} + \dots + d_{n-2} d_1) + \dots + \\ &\quad + \alpha_{n-1} (d_0 d_1) + e_1 (d_0 \alpha_{n-1} + \dots + e_{n-1} \alpha_0 - \alpha_0 d_{n-1} - \dots - \alpha_{n-2} d_1) + \\ &\quad + \dots e_{n-1} (-\alpha_0 d_1 + e_1 \alpha_0 + d_0 \alpha_1) + e_n (d_0 \alpha_0) \\ &= \alpha_0 (-d_n d_0) + \alpha_1 (-d_{n-1} d_0) + \dots + \alpha_{n-1} (-d_1 d_0) + e_1 (\alpha_{n-1} d_0) + \dots + \\ &\quad + e_{n-1} (\alpha_1 d_0) + e_n (\alpha_0 d_0) \\ &= (e_1 \alpha_{n-1} + \dots + e_{n-1} \alpha_1 + e_n \alpha_0 - \alpha_0 d_n - \alpha_1 d_{n-1} - \dots - \alpha_{n-1} d_1) d_0 \\ &= -(\alpha_0 d_n + \alpha_1 d_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} d_1 - d_1 \alpha_{n-1} - \dots - d_n \alpha_0) d_0 \end{aligned}$$

Pelo observação 4.14 e o lema 4.13, existe uma aplicação α_n de grau $(-n, n)$ tal que:

$$\alpha_0 d_n + \dots + \alpha_n d_0 = d_0 \alpha_n + \dots + d_n \alpha_0.$$

Portanto, temos um morfismo $\{\alpha_i\}$ em $G(\Lambda)$. ■

Lema 4.19 *Sejam $X, Y \in C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ e o morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$. Tome $(X^{\bullet,\bullet}, d_i)$ e $(Y^{\bullet,\bullet}, e_i)$ objetos de $G(\Lambda)$ associados com X e Y , respectivamente, e seja um morfismo $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ de $G(\Lambda)$ associado com (α, α_0) . Então*

$$\{\alpha_i\} \sim 0 \Leftrightarrow \alpha \sim 0$$

Demonstração: Seja $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ um morfismo em $G(\Lambda)$ associado a (α, α_0) tal que $\{\alpha_i\} \sim 0$. Logo existe uma aplicação graduada h_0 de grau $(-1, 0)$

de modo que $\alpha_0 = e_0 h_0 + h_0 d_0$. Assim, como α_0 é um representante de α , segue que $\alpha \sim 0$.

Reciprocamente, se $\alpha \sim 0$, então existe uma aplicação h_0 de grau $(-1, 0)$ tal que $\alpha_0 = e_0 h_0 + h_0 d_0$. Suponhamos que temos $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$ de graus apropriados tais que, para $k < n$, temos

$$\alpha_k = e_0 h_k + \dots + e_k h_0 + h_0 d_k + \dots + h_k d_0$$

Lembremos que, para todo n :

$$d_0 d_n + d_1 d_{n-1} + \dots + d_n d_0 = 0 \quad \text{e}$$

$$\alpha_0 d_n + \alpha_1 d_{n-1} + \dots + \alpha_n d_0 = e_0 \alpha_n + e_1 \alpha_{n-1} + \dots + e_n \alpha_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d_0(\alpha_n - h_0 d_n - h_1 d_{n-1} - \dots - h_{n-1} d_1 - e_n h_0 - e_{n-1} h_1 - \dots - e_1 h_{n-1}) &= \\ &= d_0 \alpha_n - (d_0 h_0) d_n - (d_0 h_1) d_{n-1} - \dots - (d_0 h_{n-1}) d_1 - (d_0 e_n) h_0 - \\ &\quad - (d_0 e_{n-1}) h_1 - \dots - (d_0 e_1) h_{n-1} \\ &= (\alpha_0 d_n + \alpha_1 d_{n-1} + \dots + \alpha_n d_0 - e_1 \alpha_{n-1} - \dots - e_n \alpha_0) + (h_0 d_0 - \alpha_0) d_n + \\ &\quad + (e_1 h_0 + h_0 d_1 + h_1 d_0 - \alpha_1) d_{n-1} + \dots + \\ &\quad + (e_1 h_{n-2} + \dots + e_{n-1} h_0 + h_0 d_{n-1} + \dots + h_{n-1} d_0 - \alpha_{n-1}) d_1 + \\ &\quad + (e_1 e_{n-1} + e_2 e_{n-2} + \dots + e_n d_0) h_0 + \dots + (e_1^2 + e_2 d_0) h_{n-2} + e_1 d_0 h_{n-1} \\ &= \alpha_n d_0 + e_1(-\alpha_{n-1} + h_0 d_{n-1} + \dots + h_{n-2} d_1 + e_{n-1} h_0 + \dots + d_0 h_{n-1}) + \\ &\quad + \dots + e_{n-1}(-\alpha_1 + h_0 d_1 + e_0 h_1 + e_1 h_0) + d_n(-\alpha_0 + d_0 h_0) + \\ &\quad + h_0(d_0 e_n + e_1 e_{n-1} + \dots + e_{n-1} e_1) + \dots + h_{n-1}(d_0 e_1) \\ &= \alpha_n d_0 + e_1(-h_{n-1} d_0) + \dots + e_{n-1}(-h_1 d_0) + e_n(-h_0 d_0) + h_0(-d_n d_0) + \\ &\quad + h_1(-d_{n-1} d_0) + \dots + h_{n-1}(-d_1 d_0) \\ &= (\alpha_n - h_0 d_n - h_1 d_{n-1} - \dots - h_{n-1} d_1 - e_n h_0 - e_{n-1} h_1 - \dots - e_1 h_{n-1}) d_0 \end{aligned}$$

Pelo lema 4.13, existe h_n de grau $(-1 - n, n)$ tal que:

$$\alpha_n = e_0 h_n + \dots + e_n h_0 + h_0 d_n + \dots + h_n d_0$$

Portanto, existe uma sequência $\{h_i\}$ de grau $(-1 - i, i)$ tal que, para todo n , temos:

$$\alpha_n = e_0 h_n + \dots + e_n h_0 + h_0 d_n + \dots + h_n d_0,$$

ou seja, $\{\alpha_i\} \sim 0$. ■

Teorema 4.20 *Existe um funtor entre as categorias $C^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ e $\frac{G(\Lambda)}{\sim}$.*

Demonstração: Segue dos lemas 4.17, 4.18 e 4.19. Observe que o lema 4.19 garante que a menos de isomorfismo, esse funtor independe da escolha dos representantes. ■

Resumindo, já temos as equivalências:

$$K^-(Proj-\Gamma) \simeq K^-(Free-\Gamma) \simeq K^-(Sum-T^\bullet)$$

e em seguida construímos os seguintes funtores tendo a composição ϕ

$$\begin{array}{ccccc} \phi : C^-(Sum - T^\bullet) & \xrightarrow{\quad} & \frac{G(\Lambda)}{\sim} & \xrightarrow{\quad} & K^-(Proj - \Lambda) \\ (X^{\bullet,\bullet}, d_0, d_1) & \longmapsto & (X^{\bullet,\bullet}, d_0, d_1, d_2, \dots) & \longmapsto & (\oplus X^{i,n-i}, \sum d_i) \\ \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \{\alpha_i\} & & \downarrow \sum \bar{\alpha}_i \\ (Y^{\bullet,\bullet}, e_0, e_1) & \longmapsto & (Y^{\bullet,\bullet}, e_0, e_1, e_2, \dots) & \longmapsto & (\oplus Y^{i,n-i}, \sum e_i) \end{array}$$

Dessa forma, para a construção do funtor F , precisamos verificar que a composição ϕ se fatora através do funtor natural $\pi : C^-(Sum-T^\bullet) \longrightarrow K^-(Sum-T^\bullet)$.

Proposição 4.21 *O funtor ϕ se fatora através do funtor natural*

$$\pi : C^-(Sum - T^\bullet) \longrightarrow K^-(Sum - T^\bullet)$$

como no diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^-(Sum - T^\bullet) & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & K^-(Proj - \Lambda) \\ & \searrow \pi & \nearrow F \\ & K^-(Sum - T^\bullet) & \end{array}$$

Demonstração: Pelo lema 4.19 temos que o funtor ϕ se fatora através do funtor natural $\pi : C^-(Sum-T^\bullet) \longrightarrow K^-(Sum-T^\bullet)$. ■

Exemplo 4.22 *Sejam $(X, \delta), (Y, \delta') \in C^-(Sum-T^\bullet)$ e o morfismo $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ como no diagrama:*

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \downarrow f^{n+2} & & \\ Y^\bullet : & \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \xrightarrow{d_Y^{n+1}} & Y^{n+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Vamos construir o associado do complexo $C_f^\bullet$ em $G(\Lambda)$. Sejam $(X^{\bullet,\bullet}, d_X^i) \in G(\Lambda)$ associado com (X, δ) e $(Y^{\bullet,\bullet}, d_Y^i) \in G(\Lambda)$ associado a (Y, δ') e $\{f_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ associado com (f, f_0) em $G(\Lambda)$. Tome $(Z^{\bullet,\bullet}, d_i) \in G(\Lambda)$ associado a $C_f^\bullet$. Dessa

forma $Z^{i,j} = X^{i,j}[1] \oplus Y^{i,j}$, para todo i e j , ou seja,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & X^{0,0} \oplus Y^{0,-1} & \longrightarrow & X^{1,0} \oplus Y^{1,-1} & \longrightarrow & X^{2,0} \oplus Y^{2,-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & X^{0,1} \oplus Y^{0,0} & \longrightarrow & X^{1,1} \oplus Y^{1,0} & \longrightarrow & X^{2,1} \oplus Y^{2,-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & X^{0,2} \oplus Y^{0,1} & \longrightarrow & X^{1,2} \oplus Y^{1,1} & \longrightarrow & X^{2,2} \oplus Y^{2,1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Tomando a diferencial com as aplicações naturais, ou seja, com a diferencial $d_k : Z^{i,j} \longrightarrow Z^{i-k+1,j+k}$ dada por:

$$d_k = \begin{pmatrix} d_X^k & 0 \\ f_{k-1} & d_Y^k \end{pmatrix},$$

com $f_{-1} = 0$, para que $(Z^{\bullet,\bullet}, d_i)$ seja um objeto de $G(\Lambda)$ devemos ter $d_0 d_n + d_1 d_{n-1} + \dots + d_{n-1} d_1 + d_n d_0 = 0$, para todo n . Vamos checar isso para $n = 2$. Pela definição dos endomorfismos, temos

$$d_0 = \begin{pmatrix} d_X^0 & 0 \\ 0 & d_Y^0 \end{pmatrix} \quad e \quad d_1 = \begin{pmatrix} d_X^1 & 0 \\ f_0 & d_Y^1 \end{pmatrix} \quad e \quad d_2 = \begin{pmatrix} d_X^2 & 0 \\ f_1 & d_Y^2 \end{pmatrix}$$

Assim, precisamos checar que $d_0 d_2 + d_1 d_1 + d_2 d_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} d_X^0 & 0 \\ 0 & d_Y^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^2 & 0 \\ f_1 & d_Y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_X^1 & 0 \\ f_0 & d_Y^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^1 & 0 \\ f_0 & d_Y^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_X^2 & 0 \\ f_1 & d_Y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^0 & 0 \\ 0 & d_Y^0 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} d_X^0 d_X^2 + d_X^1 d_X^1 + d_X^2 d_X^0 & 0 \\ d_Y^0 f_1 + d_Y^1 f_0 + f_0 d_Y^1 + f_1 d_Y^0 & d_Y^0 d_Y^2 + d_Y^1 d_Y^1 + d_Y^2 d_Y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(f_0 d_X^1 + f_1 d_X^0) & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

o que nem sempre é zero. Logo definindo os endomorfismos dessa forma não temos um objeto de $G(\Lambda)$. Para corrigi-lo vamos acrescentar um alternador de sinal nos morfismos f_i , ou seja, definimos $d_k : Z^{i,j} \longrightarrow Z^{i-k+1,j+k}$ dada por:

$$d_k = \begin{pmatrix} d_X^k & 0 \\ (-1)^{i+j} f_{k-1} & d_Y^k \end{pmatrix}$$

Dessa forma, para todo n , sempre que a composição $d_Y^{n-i} f_i$ for positiva, a composição $f_i d_X^{n-i}$ é negativa, ou vice-versa. Assim, supondo que a composição $d_Y^{n-i} f_i$ é positiva para todo n , temos

$$\begin{aligned}
 d_0 d_n + d_1 d_{n-1} + \dots + d_{n-1} d_1 + d_n d_0 &= \begin{pmatrix} d_X^0 & 0 \\ 0 & d_Y^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^n & 0 \\ (-1)^{i+j} f_{n-1} & d_Y^n \end{pmatrix} + \\
 & \begin{pmatrix} d_X^1 & 0 \\ (-1)^{i+j} f_0 & d_Y^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^{n-1} & 0 \\ (-1)^{i+j} f_{n-2} & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} d_X^n & 0 \\ (-1)^{i+j} f_{n-1} & d_Y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^0 & 0 \\ 0 & d_Y^0 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} d_X^0 d_X^n + \dots + d_X^n d_X^0 & 0 \\ d_Y^0 f_{n-1} - f_0 d_X^{n-1} + \dots + d_Y^{n-1} f_0 - f_{n-1} d_X^0 & d_Y^0 d_Y^n + \dots + d_Y^n d_Y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_Y^0 f_{n-1} + \dots + d_Y^{n-1} f_0 - f_0 d_X^{n-1} - \dots - f_{n-1} d_X^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto o objeto associado ao $C_f^\bullet$ em $G(\Lambda)$ é $Z^{i,j} = X^{i,j}[1] \oplus Y^{i,j}$, para todo i e j com diferencial $d_k : Z^{i,j} \longrightarrow Z^{i-k+1,j+k}$ dada por:

$$d_k = \begin{pmatrix} d_X^k & 0 \\ (-1)^{i+j} \alpha_{k-1} & d_Y^k \end{pmatrix}.$$

Proposição 4.23 *O funtor F resultante da proposição 4.21 é exato.*

Demonstração: Para provarmos que o funtor F é exato precisamos verificar que ele leva triângulo em triângulo. Sejam os complexos

$$\begin{aligned} X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \dots \\ Y^\bullet : \dots \longrightarrow Y^{n-1} \xrightarrow{d_Y^{n-1}} Y^n \xrightarrow{d_Y^n} Y^{n+1} \xrightarrow{d_Y^{n+1}} Y^{n+2} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Por (T1), para qualquer aplicação $\alpha : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ em $K^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ temos o triângulo distinguido:

$$X^\bullet \xrightarrow{\alpha} Y^\bullet \longrightarrow C_\alpha^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

Logo é suficiente checar que a imagem sob ϕ desse triângulo, ou seja,

$$\phi X^\bullet \xrightarrow{\phi\alpha} \phi Y^\bullet \longrightarrow \phi C_\alpha^\bullet \longrightarrow \phi X^\bullet[1]$$

é um triângulo distinguido.

O cone de α é dado por:

$$C_\alpha^\bullet : \dots \longrightarrow X^n \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^n & 0 \\ \alpha^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix}} X^{n+1} \oplus Y^n \longrightarrow \dots$$

Calculemos $\phi C_\alpha^\bullet$. Sejam $(X^{\bullet,\bullet}, d_X^i) \in G(\Lambda)$ associado com (X, δ) e $(Y^{\bullet,\bullet}, d_Y^i) \in G(\Lambda)$ associado a (Y, δ') e seja $\{\alpha_i\} : X^{\bullet,\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ em $G(\Lambda)$. Tomemos $(Z^{\bullet,\bullet}, d_i) \in G(\Lambda)$ associado a $C_\alpha^\bullet$.

Como vimos no exemplo 4.22, $Z^{i,j} = X^{i,j}[1] \oplus Y^{i,j}$, para todo i e j com diferencial $d_k : Z^{i,j} \longrightarrow Z^{i-k+1,j+k}$ dada por:

$$d_k = \begin{pmatrix} d_X^k & 0 \\ (-1)^{i+j} \alpha_{k-1} & d_Y^k \end{pmatrix},$$

com $\alpha_{-1} = 0$.

Calculando o complexo total de $Z^{\bullet,\bullet}$, ou seja, $\phi(Z^{\bullet,\bullet}) = (\Omega^\bullet, d)$, temos:

$$\Omega^0 = \oplus Z^{i,-i} = \oplus (X^{i,-i+1} \oplus Y^{i,-i})$$

$$\begin{aligned}
\Omega^1 &= \oplus Z^{i,1-i} = \oplus (X^{i,2-i} \oplus Y^{i,1-i}) \\
&\vdots \\
\Omega^n &= \oplus Z^{i,n-i} = \oplus (X^{i,n-i+1} \oplus Y^{i,n-i})
\end{aligned}$$

Assim, temos o complexo total de $Z^{\bullet,\bullet}$ da forma $\text{tot}(Z^{\bullet,\bullet})^n = \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})^{n+1} \oplus \text{tot}(Y^{\bullet,\bullet})^n$ e a diferencial é:

$$d = \sum d_k = \sum \begin{pmatrix} d_X^k & 0 \\ (-1)^{i+j} \alpha_{k-1} & d_Y^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum d_X & 0 \\ (-1)^n \sum \alpha_k & \sum d_Y \end{pmatrix}$$

Dado o morfismo $\phi X^\bullet \xrightarrow{\phi\alpha} \phi Y^\bullet$ em $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ temos o triângulo distinguido:

$$\phi X^\bullet \xrightarrow{\phi\alpha} \phi Y^\bullet \longrightarrow C_{\phi\alpha}^\bullet \longrightarrow \phi X^\bullet[1]$$

Como $\phi\alpha = \sum \alpha_i$. Vamos calcular agora $\theta^\bullet = C_{\sum \alpha_i}^\bullet$. Temos o triângulo distinguido,

$$\text{tot}(X^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \text{tot}(Y^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \theta^\bullet \longrightarrow \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})[1]$$

Dessa forma, $\theta^n = \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})^{n+1} \oplus \text{tot}(Y^{\bullet,\bullet})^n$ com a diferencial dada por:

$$\begin{pmatrix} -d_X & 0 \\ \sum \alpha_i & d_Y \end{pmatrix}$$

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{tot}(X^{\bullet,\bullet}) & \xrightarrow{\sum \alpha_i} & \text{tot}(Y^{\bullet,\bullet}) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \Omega^\bullet & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})[1] \\
\parallel & & \parallel & & \downarrow \eta & & \downarrow t \\
\text{tot}(X^{\bullet,\bullet}) & \xrightarrow{\sum \alpha_i} & \text{tot}(Y^{\bullet,\bullet}) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \theta^\bullet & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})[1]
\end{array}$$

onde $\eta^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \Omega^n \longrightarrow \theta^n$ e $t^n = (-1)^n : \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})^n \longrightarrow \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})^n$.

Observemos que o diagrama acima é comutativo e que $\eta : \Omega^\bullet \longrightarrow \theta^\bullet$ definido acima é um isomorfismo entre esses complexos.

Como $\text{tot}(X^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \text{tot}(Y^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \theta^\bullet \longrightarrow \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})[1]$ é um triângulo distinguido segue que $\text{tot}(X^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \text{tot}(Y^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow \Omega^\bullet \longrightarrow \text{tot}(X^{\bullet,\bullet})[1]$ é um triângulo distinguido, ou seja, $FX^\bullet \longrightarrow FY^\bullet \longrightarrow FC_\alpha^\bullet \longrightarrow FX^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido sempre que $X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow C_\alpha^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$ é um triângulo distinguido. Portanto F é exato. ■

Proposição 4.24 *Sejam Λ um anel e $T^\bullet$ um complexo limitado de Λ -módulos projetivos finitamente gerado tal que $\text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet[n]) = 0$, para $n \neq 0$ e $\Gamma \simeq \text{End } T^\bullet$. Existe um funtor exato $F : K^-(\text{Proj-}\Gamma) \longrightarrow K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ tal que $F(\Gamma) = T^\bullet$.*

Demonstração: A existência do funtor F é dada pelos lemas 4.2 e 4.3 e a proposição 4.21. E pela construção de F , segue que $F(\Gamma) = T^\bullet$ ■

Proposição 4.25 *O funtor F da proposição 4.24 leva complexos limitados em complexos limitados e complexos em $\text{proj-}\Lambda$ em complexos em $\text{proj-}\Gamma$.*

Demonstração: Segue da construção do funtor F . ■

4.2 O funtor F é fiel e pleno

Proposição 4.26 *A restrição do funtor F para $K^b(\text{Proj-}\Gamma)$*

$$F : K^b(\text{Proj-}\Gamma) \longrightarrow K^b(\text{Proj-}\Lambda)$$

é fiel e pleno.

Demonstração: Sejam $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ objetos de $K^b(\text{Proj-}\Gamma)$, devemos mostrar que a aplicação natural $\text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(FX^\bullet, FY^\bullet)$ é um isomorfismo.

Pelos lemas 4.2 e 4.3, podemos tomar $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ em $K^-(\text{Sum-}T^\bullet)$. Se os complexos $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ são concentrados, ou seja, se $X^i = \bigoplus_{\lambda} T^\bullet$ e $X^k = 0$, com $k \neq i$ e $Y^j = \bigoplus_{\mu} T^\bullet$ e $Y^k = 0$, com $k \neq j$, então, $FX^\bullet = \bigoplus_{\lambda} T^\bullet$ e $FY^\bullet = \bigoplus_{\mu} T^\bullet$.

Assim,

$$\text{Hom}(FX^\bullet, FY^\bullet) = \text{Hom}\left(\bigoplus_{\lambda} T^\bullet, \bigoplus_{\mu} T^\bullet\right) \simeq \bigoplus_{\lambda+\mu} \text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet).$$

Dessa forma, se $i \neq j$, $\text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet) = 0$ e como $\text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet[p]) = 0$, para $p \neq 0$ segue que $\text{Hom}(FX^\bullet, FY^\bullet) = 0$. Agora se $i = j$, temos que $\text{Hom}(FX^\bullet, FY^\bullet) = \text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet)$. E portanto segue que

$$\text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(FX^\bullet, FY^\bullet)$$

é um isomorfismo no caso em que $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ são concentrados.

Suponhamos que F induz um isomorfismo para todo $X^\bullet$ com comprimento menor ou igual a $n-1$ e para todo $Y^\bullet$ concentrado, ou seja, de comprimento 0. Seja $X^\bullet$ de comprimento n , ou seja,

$$X^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{d_0} X_1 \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Consideremos o morfismo de complexos

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\leq n-1}(X^\bullet) : & \cdots & 0 & \longrightarrow & X_0 & \xrightarrow{d_0} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & \cdots & \longrightarrow & X_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & X_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow d_{n-1} & & \downarrow 0 \\ X''^\bullet : & \cdots & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tomemos o triângulo distinguido

$$\tau_{\leq n-1}(X^\bullet) \xrightarrow{\alpha} X''^\bullet \longrightarrow C_\alpha^\bullet \longrightarrow \tau_{\leq n-1}(X^\bullet)[1]$$

Note que o $C_\alpha^\bullet = X^\bullet$, e então temos o triângulo distinguido

$$\tau_{\leq n-1}(X^\bullet) \xrightarrow{\alpha} X''^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow \tau_{\leq n-1}(X^\bullet)[1] \quad (*)$$

na qual $X''^\bullet$ tem comprimento 0 e $\tau_{\leq n-1}(X^\bullet)$, comprimento $n-1$. Como F é exato, aplicando os funtores cohomológicos $Hom(-, Y^\bullet)$ e $Hom(F-, FY^\bullet)$ no triângulo $(*)$, temos as sequências exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} (X''^\bullet[-1], Y^\bullet) & \longrightarrow & (\tau_{\leq n-1}(X^\bullet), Y^\bullet) & \longrightarrow & (X^\bullet, Y^\bullet) & \longrightarrow & (X''^\bullet, Y^\bullet) & \longrightarrow & (\tau_{\leq n-1}(X^\bullet)[1], Y^\bullet) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ (FX''^\bullet[-1], FY^\bullet) & \longrightarrow & (F\tau_{\leq n-1}(X^\bullet), FY^\bullet) & \longrightarrow & (FX^\bullet, FY^\bullet) & \longrightarrow & (FX''^\bullet, FY^\bullet) & \longrightarrow & (F\tau_{\leq n-1}(X^\bullet)[1], FY^\bullet) \end{array}$$

Pelo 5-lema 1.14, temos $Hom(X^\bullet, Y^\bullet)$ e $Hom(FX^\bullet, FY^\bullet)$ são isomorfos. A indução sobre o comprimento de $Y^\bullet$ é análoga, usando o funtor cohomológico $Hom(X^\bullet, -)$. ■

Para estender este resultado para complexos ilimitados procedemos considerando complexos ilimitados como um limite de complexos limitados. Assim, enunciaremos um lema e sua demonstração pode ser encontrada em [13].

Lema 4.27 *Seja $X^\bullet$ um objeto de $K^b(Proj-\Lambda)$.*

(i) *Seja $Y = (Y^\bullet, d)$ um objeto de $K^-(Proj-\Lambda)$ e $\tau_{\geq -n}(Y^\bullet)$ o complexo truncado da seguinte forma*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y^{-n} \longrightarrow Y^{1-n} \longrightarrow \cdots$$

Então para n grande, a aplicação natural

$$Hom(X^\bullet, \tau_{\geq -n}(Y^\bullet)) \longrightarrow Hom(X^\bullet, Y^\bullet)$$

é um isomorfismo.

(ii) *Seja $Z = (Z^\bullet, d)$ um objeto de $K^-(Proj-\Lambda)$. Então para n grande, a aplicação natural*

$$Hom(X^\bullet, F\tau_{\geq -n}(Z^\bullet)) \longrightarrow Hom(X^\bullet, FZ^\bullet)$$

é um isomorfismo.

Teorema 4.28 *O funtor $F : K^-(Proj-\Gamma) \longrightarrow K^-(Proj-\Lambda)$ é fiel e pleno.*

Demonstração: Mostremos que o funtor F é pleno. Sejam X e Y na categoria $C^-(Sum-T^\bullet)$. Uma aplicação $\{\alpha_i\}$ entre ϕX e ϕY , onde ϕ é o funtor entre as categorias $C^-(Sum-T^\bullet)$ e $K^-(Proj-\Lambda)$ dado pela composição dita anteriormente, não necessariamente imagem pela F , é dada pela coleção $\{\alpha_i\}$ de aplicações graduadas de grau $(-i, i)$ entre objetos $X^{\bullet, \bullet}$ e $Y^{\bullet, \bullet}$ associados com X e Y (onde i pode ser negativo), tal que, para cada n ,

$$\sum_i \alpha_i d_{n-i} = \sum_i d_i \alpha_{n-i}$$

Para mostrarmos que F é pleno, precisamos mostrar que para qualquer aplicação $\{\alpha_i\}$ é homotópico a uma aplicação $\{\beta_i\}$, onde $\beta_i = 0$ se $i < 0$.

Como $T^\bullet$ é limitado, $\alpha_i = 0$, para i suficientemente pequeno. Seja m o menor valor para o qual $\alpha_m \neq 0$. Assim, temos $\alpha_m d_0 = d_0 \alpha_m$.

Observemos que $\alpha_m : X^{i,j} \longrightarrow Y^{1-m,j+m}$, tem grau $(-m, m)$. Dessa forma, para cada j , α_m define uma aplicação de complexos

$$\alpha_m^\bullet : X^{\bullet,j} \longrightarrow Y^{\bullet,j+m}[-m].$$

Se $m < 0$, então $\alpha_m \sim 0$ uma vez que $\text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet[-m]) = 0$, para $m \neq 0$. Assim, $\{\alpha_i\} \sim \{\beta_i\}$, onde $\beta_i = 0$ se $i \leq m$.

Aplicando indução sobre m , temos $\{\alpha_i\} \sim \{\beta_i\}$, onde $\beta_i = 0$, para $i < 0$. Portanto F é pleno.

Resta provarmos que F é fiel. Já sabemos que F é exato e pleno. Pelo lema 2.33 é suficiente mostrarmos que se $FX^\bullet = 0$, então $X^\bullet = 0$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $X^i = 0$, para $i > 0$. Segue da proposição 4.26 que:

$$\text{Hom}(\tau_{\geq 0}(X^\bullet), \tau_{\geq -j}(X^\bullet)) \simeq \text{Hom}(F\tau_{\geq 0}X^\bullet, F\tau_{\geq -j}X^\bullet) \quad (*)$$

Pelo lema 4.27(ii) temos:

$$\text{Hom}(F\tau_{\geq 0}X^\bullet, F\tau_{\geq -j}X^\bullet) \simeq \text{Hom}(F\tau_{\geq 0}X^\bullet, F(X^\bullet)), \quad (**)$$

para j suficientemente grande. De (*) e (**), temos:

$$\text{Hom}(\tau_{\geq 0}(X^\bullet), \tau_{\geq -j}(X^\bullet)) \simeq \text{Hom}(F\tau_{\geq 0}X^\bullet, F(X^\bullet))$$

Por hipótese $FX^\bullet = 0$, logo $\text{Hom}(F\tau_{\geq 0}(X^\bullet), F(X^\bullet)) = 0$ e consequentemente, $\text{Hom}(\tau_{\geq 0}(X^\bullet), \tau_{\geq -j}(X^\bullet)) = 0$. Assim temos a homotopia:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow 0 & \swarrow & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & \swarrow & \downarrow 0 & \swarrow & \downarrow k^0 & \parallel & & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{-j} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Logo o morfismo $X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} X^0$ é uma retração, pois $d^{-1}k^0 = 1_{X^0}$, consequentemente temos $X^{-1} \simeq \text{Ker } d^{-1} \oplus X^0$ e então $X^\bullet \simeq \sigma_{\leq -1}(X^\bullet) \oplus X_0^\bullet$ como abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} X_0^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \xrightarrow{1} & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & & \oplus & & & & & & \\ \sigma_{\leq -1}(X^\bullet) : & \cdots & \longrightarrow & X^{-3} & \longrightarrow & X^{-2} & \longrightarrow & \text{Ker } d^{-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Repetindo o processo, com $\sigma_{\leq -1}(X^\bullet)$, para j suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\tau_{\geq 1}(\sigma_{\leq -1}(X^\bullet)), \tau_{\geq j}(\sigma_{\leq -1}(X^\bullet))) &\simeq \text{Hom}(F(\tau_{\geq 1}(\sigma_{\leq -1}(X^\bullet))), F(\tau_{\geq j}(\sigma_{\leq -1}(X^\bullet)))) \\ &\simeq \text{Hom}(F(\tau_{\geq 1}(\sigma_{\leq -1}(X^\bullet))), F(\sigma_{\leq -1}(X^\bullet))) = 0 \end{aligned}$$

pois $F\sigma_{\leq -1}(X^\bullet) = 0$ uma vez que $FX = 0$. Novamente temos a homotopia

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Ker } d^{-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow 0 & \swarrow & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & \swarrow & \downarrow \parallel & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{-j} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & \text{Ker } d^{-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Logo o morfismo $X^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} \text{Ker } d^{-1}$ é uma retração, e consequentemente temos $X^{-2} \simeq \text{Ker } d^{-2} \oplus \text{Ker } d^{-1}$. Assim $X^\bullet \simeq \sigma_{\leq -2}(X^\bullet) \oplus X_0^\bullet \oplus X_1^\bullet$, ou seja,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \xrightarrow{1} & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \oplus & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Ker } d^{-1} & \xrightarrow{1} & \text{Ker } d^{-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \oplus & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & X^{-3} & \longrightarrow & \text{Ker } d^{-2} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Seguindo com esse processo, temos que $X^\bullet$ é soma direta de complexos acíclicos homotópicos a zero e portanto $X^\bullet$ é homotópico a zero. Portanto F é fiel. ■

4.3 Um adjunto à direita do funtor F

Temos o funtor $F : K^-(\text{Proj-}\Gamma) \longrightarrow K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ exato, fiel e pleno, onde Λ e Γ são anéis e $T^\bullet \in K^b(\text{Proj-}\Lambda)$ tal que $\text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$, para $i \neq 0$ e $\text{End } T^\bullet \simeq \Gamma$.

Agora com a condição de $\text{add-}T^\bullet$ gerar $K^b(\text{proj-}\Lambda)$ iremos construir nessa seção um adjunto à direita para o funtor F . Para isso iremos descrever um processo que lembra a construção de uma resolução projetiva.

Lema 4.29 *Para algum $N \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de objetos $\{X_N, X_{N-1}, \dots\}$ em $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ e para $i < N$, existem triângulos distinguidos*

$$X_i \longrightarrow S^{i+1} \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow X_i[1]$$

tais que $\{S^N, S^{N-1}, S^{N-2}, \dots\}$ são objetos de $\text{Sum-}T^\bullet$. Além disso a aplicação induzida $\text{Hom}(T^\bullet, S^i) \longrightarrow \text{Hom}(T^\bullet, X_i)$ é sobrejetora.

Demonstração: Seja $X^\bullet$ um objeto de $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$. Para n suficientemente grande, a dizer $n > N$, temos $\text{Hom}(T^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$ pois $T^\bullet$ é um complexo limitado e $X^\bullet$ é limitado superiormente.

Tomemos N o maior valor tal que $\text{Hom}_{K^-(\text{Proj-}\Lambda)}(T^\bullet, X^\bullet[N]) \neq 0$. Definimos $X_N = X^\bullet[N]$. Aplicando o funtor $\text{Hom}(T^\bullet, -) : K^-(\text{Proj-}\Lambda) \longrightarrow \Gamma\text{-mod}$ temos $\text{Hom}(T^\bullet, X_N) \in \Gamma\text{-mod}$ e podemos cobri-lo por um módulo livre, ou seja, temos o epimorfismo

$$\Gamma^\mu \longrightarrow \text{Hom}(T^\bullet, X_N) \longrightarrow 0$$

Mas $\Gamma^\mu = \bigoplus_{\mu} \text{Hom}(T^\bullet, T^\bullet) \simeq \text{Hom}(T^\bullet, \bigoplus_{\mu} T^\bullet)$, pois $T^\bullet$ é finitamente gerado.

Logo temos $\text{Hom}(T^\bullet, \bigoplus_{\mu} T^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(T^\bullet, X_N) \longrightarrow 0$.

Denotemos $\oplus_\mu T^\bullet := S^N$.

Como o morfismo $Hom(A, B) \longrightarrow Hom(Hom(T, A), Hom(T, B))$ é um isomorfismo, para todo $A \in Sum-T^\bullet$ e $Hom(T^\bullet, X_N)$ é um Γ -módulo (veja [7], p.202), temos o morfismo $\oplus_\mu T^\bullet = S^N \longrightarrow X_N$ que podemos completá-lo a um triângulo distinguido e fazendo uma rotação, temos:

$$X_{N-1} \longrightarrow S^N \longrightarrow X_N \longrightarrow X_{N-1}[1],$$

com $Hom(T^\bullet, S^N) \longrightarrow Hom(T^\bullet, X_N)$ sobrejetora.

Similarmente, podemos construir $S^{N-1} \longrightarrow X_{N-1}$ e assim temos o triângulo distinguido

$$X_{N-2} \longrightarrow S^{N-1} \longrightarrow X_{N-1} \longrightarrow X_{N-2}[1],$$

com $Hom(T^\bullet, S^{N-1}) \longrightarrow Hom(T^\bullet, X_{N-1})$ sobrejetora.

Seguindo este processo, construímos os objetos $X_N, X_{N-1}, \dots$ e, para $i < N$, triângulos distinguidos $X_i \longrightarrow S^{i+1} \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow X_i[1]$ tais que $S^N, S^{N-1}, \dots$ são objetos de $Sum-T^\bullet$ e tal que a aplicação $Hom(T^\bullet, S^i) \longrightarrow Hom(T^\bullet, X_i)$ é sobrejetora. ■

Compondo os triângulos obtidos acima como no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} X_i & \longrightarrow & S^{i+1} & \longrightarrow & X_{i+1} \\ & \uparrow & \nearrow & & \\ & S^{i+1} & & & \\ & \uparrow & \nwarrow & & \\ X_{i-1} & \longleftarrow & S^{i-1} & \longleftarrow & X_{i-2} \end{array}$$

obtemos uma sequência de morfismos $d^i : S^i \longrightarrow S^{i+1}$ tal que $d^i d^{i+1} = 0$ pois envolve duas aplicações consecutivas em um triângulo distinguido. Assim, obtemos um objeto de $K^-(Sum-T^\bullet)$

$$\dots \longrightarrow S^{N-2} \longrightarrow S^{N-1} \longrightarrow S^N \longrightarrow 0 \in K^-(Sum-T^\bullet). \quad (*)$$

Lema 4.30 Com as notações do lema anterior, temos $Hom(T^\bullet, X_i[n]) = 0$, para todo $i \leq N$ e $n > 0$.

Demonstração: Utilizaremos indução inversa sobre i .

Seja $i = N$. Como $Hom(T^\bullet, S^N[n]) = 0$ pois $S^N \in Sum-T^\bullet$, $n > 0$ e como a aplicação $Hom(T^\bullet, S^N) \longrightarrow Hom(T^\bullet, X_N)$ é sobrejetora, temos que $Hom(T^\bullet, X_N[n]) = 0$.

Suponhamos o resultado válidos para $i < N$ e aplicando o funtor $Hom(T^\bullet, -)$ ao triângulo:

$$X_{i-1} \longrightarrow S^i \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i-1}[1]$$

obtemos a sequência exata longa

$$\dots Hom(T^\bullet, X_i[n-1]) \longrightarrow Hom(T^\bullet, X_{i-1}[n]) \longrightarrow Hom(T^\bullet, S^i[n]) \dots$$

Como $\text{Hom}(T^\bullet, X_i[n-1]) = 0$ por hipótese de indução e $\text{Hom}(T^\bullet, S^i[n]) = 0$ pois $S^i \in \text{Sum-}T^\bullet$ e $n > 0$ segue que $\text{Hom}(T^\bullet, X_{i-1}[n]) = 0$, para $n > 0$. Portanto, por indução sobre i , segue o resultado. ■

Definição 4.31 O objeto $(S^\bullet, d)$ de $K^-(\text{Sum-}T^\bullet)$ obtido em $(*)$ é chamado $T^\bullet$ -resolução de X . No caso de $\text{Hom}(T^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$, para todo n , a $T^\bullet$ -resolução é nula.

A proposição a seguir é um resultado que usaremos na demonstração do nosso próximo resultado. Sua demonstração pode ser encontrada em [13].

Proposição 4.32 Se $X = (X^\bullet, d)$ é um objeto de $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$, então para qualquer $Y^\bullet$ em $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$

$$\text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \varprojlim \text{Hom}(\tau_{\geq -n}(X^\bullet), Y^\bullet)$$

é sobrejetora e para qualquer $Z^\bullet \in K^-(\text{Proj-}\Lambda)$

$$\text{Hom}(FX^\bullet, Z^\bullet) \longrightarrow \varprojlim \text{Hom}(F\tau_{\geq -n}(X^\bullet), Z^\bullet)$$

é sobrejetora. Se $\text{Hom}(T^\bullet, Z^\bullet[i]) = 0$, para todo i , então esta última aplicação é um isomorfismo.

Nós veremos que uma $T^\bullet$ -resolução de um objeto $X^\bullet$ é unicamente determinado, a menos de isomorfismo. Isto seguirá da seguinte proposição.

Proposição 4.33 Sejam $X^\bullet \in K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ e $R^\bullet$ a imagem em $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$ de uma $T^\bullet$ -resolução de $X^\bullet$ pela equivalência $\text{Hom}(T^\bullet, -) : K^-(\text{Sum-}T^\bullet) \longrightarrow K^-(\text{Proj-}\Gamma)$. Então existe uma aplicação $F(R^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ tal que para qualquer $Q^\bullet$ em $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$ a aplicação induzida

$$\text{Hom}(F(Q^\bullet), F(R^\bullet)) \longrightarrow \text{Hom}(F(Q^\bullet), X^\bullet)$$

é um isomorfismo.

Demonstração: Sejam $X^\bullet$ em $K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ e $R^\bullet$ a imagem em $K^-(\text{Proj-}\Gamma)$ de uma $T^\bullet$ -resolução de $X^\bullet$ sobre a equivalência $\text{Hom}(T^\bullet, -) : K^-(\text{Sum-}T^\bullet) \longrightarrow K^-(\text{Proj-}\Gamma)$. A menos de translação, podemos assumir sem perda de generalidade, que $R^n = 0$, para $n > 0$. Isto é

$$R^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow R^{-2} \longrightarrow R^{-1} \longrightarrow R^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Afirmção: Para cada $n > 0$, existe um triângulo

$$X_{-n}[n-1] \xrightarrow{u} F\tau_{\geq -n+1}(R^\bullet) \xrightarrow{v} X^\bullet \longrightarrow X_{-n}[n]$$

tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} FR^{-n} & \xrightarrow{f} & X_{-n}[n-1] \\ & \searrow d & \downarrow u \\ & & F\tau_{\geq -n+1}(R^\bullet) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} F\tau_{\geq -n+2}(R^\bullet) & \xrightarrow{g} & F\tau_{\geq -n+1}(R^\bullet) \\ & \searrow & \downarrow v \\ & & X^\bullet \end{array}$$

comutam, onde f é a aplicação dada pela $T^\bullet$ -resolução, d é a aplicação induzida pela diferencial em $R^\bullet$ e g a aplicação natural induzida pela inclusão $\tau_{\geq -n+2}(R^\bullet) \longrightarrow \tau_{\geq -n+1}(R^\bullet)$.

De fato: aplicaremos indução sobre n . No caso $n = 1$, tomemos a construção da $T^\bullet$ -resolução de $X^\bullet$ (na qual obtemos S^0)

$$X_{-1} \longrightarrow S^0 \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow X_{-1}[1]$$

Note que $FR^0 = \phi S^0 = S^0$, pois $S^0 \in \text{Sum-}T^\bullet$. Logo temos o triângulo

$$X_{-1} \longrightarrow FR^0 \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow X_{-1}[1]$$

e os diagramas comutam pela construção da $T^\bullet$ -resolução

$$\begin{array}{ccc} S^{-1} = FR^{-1} & \longrightarrow & X_{-1} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & F\tau_{\geq 0}(R^\bullet) = S^0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} S^{-1} = F\tau_{\geq 1}(R^\bullet) & \longrightarrow & F\tau_{\geq 0}(R^\bullet) = S^0 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X^\bullet \end{array}$$

Assuma que já temos os triângulos para $n \leq m$. Vamos construir para $m+1$. Pela hipótese de indução temos o triângulo:

$$\triangle_1 : X_{-m}[m-1] \longrightarrow F\tau_{\geq -m+1}(R^\bullet) \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow X_{-m}[m]$$

Como $R^{-m}[m-1] \longrightarrow \tau_{\geq -m+1}(R^\bullet) \longrightarrow \tau_{\geq -m}(R^\bullet) \longrightarrow R^{-m}[m]$ é um triângulo e F é um funtor exato temos

$$\triangle_2 : FR^{-m}[m-1] \longrightarrow F\tau_{\geq -m+1}(R^\bullet) \longrightarrow F\tau_{\geq -m}(R^\bullet) \longrightarrow FR^{-m}[m]$$

também é um triângulo. Da construção da $T^\bullet$ -resolução, temos o triângulo

$$X_{-m-1} \longrightarrow S^{-m} \longrightarrow X_{-m} \longrightarrow X_{-m-1}[1]$$

que por rotação e translação, temos o triângulo:

$$\triangle_3 : FR^{-m}[m-1] \longrightarrow X_{-m}[m-1] \longrightarrow X_{-m-1}[m] \longrightarrow FR^{-m}[m]$$

Assim temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} FR^{-m}[m-1] & \longrightarrow & X_{-m}[m-1] & \longrightarrow & X_{-m-1}[m] & \longrightarrow & FR^{-m}[m] \\ \parallel & & \downarrow & & \vdots \delta_1 & & \parallel \\ FR^{-m}[m-1] & \longrightarrow & F\tau_{\geq -m+1}(R^\bullet) & \longrightarrow & F\tau_{\geq -m}(R^\bullet) & \longrightarrow & FR^{-m}[m] \\ & & \downarrow & & \vdots \delta_2 & & \downarrow \\ & & X^\bullet & \xlongequal{\quad} & X^\bullet & \longrightarrow & X_{-m}[m] \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X_{-m}[m] & \longrightarrow & X_{-m-1}[m+1] & & & & \end{array}$$

Note que o quadrado superior à esquerda comuta por hipótese de indução. Assim pelo axioma do octaedro, temos que existem $\delta_1 : X_{-m-1}[m] \longrightarrow F\tau_{\geq -m}(R^\bullet)$ e $\delta_2 : F\tau_{\geq -m}(R^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ tais que o diagrama anterior é comutativo e

$$X_{-m-1}[m] \xrightarrow{\delta_1} F\tau_{\geq -m}(R^\bullet) \xrightarrow{\delta_2} X^\bullet \longrightarrow X_{-m-1}[m+1]$$

é um triângulo.

A comutatividade dos diagramas:

$$\begin{array}{ccc} FR^{-m-1}[m] & \longrightarrow & X_{-m-1}[m] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & F\tau_{\geq -m}(R^\bullet) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} F\tau_{\geq -m+1}(R^\bullet) & \longrightarrow & F\tau_{\geq -m}(R^\bullet) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X^\bullet \end{array}$$

seguem da comutatividade do axioma do octaedro. Portanto segue a afirmação.

Voltemos a prova da proposição. Tomando o triângulo distinguido

$$X_{-i-1}[i] \xrightarrow{\delta_1} F\tau_{\geq -i}(R^\bullet) \xrightarrow{\delta_2} X^\bullet \longrightarrow X_{-i-1}[i+1]$$

e aplicando (T2) obtemos o triângulo

$$F\tau_{\geq -i}(R^\bullet) \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow X_{-i-1}[i+1] \longrightarrow F\tau_{\geq -i}(R^\bullet)[1]$$

Dado inteiro p , aplicando o funtor cohomológico $Hom(T^\bullet[p], -)$, obtemos a sequência longa exata

$$(T^\bullet[p], X_{-i-1}[i]) \longrightarrow (T^\bullet[p], F\tau_{\geq -i}(R^\bullet)) \longrightarrow (T^\bullet[p], X^\bullet) \longrightarrow (T^\bullet[p], X_{-i-1}[i+1])$$

Como $Hom(T^\bullet[p], X_{-i-1}[i+1]) = 0$, para i suficientemente grande pelo lema 4.30 obtemos que $Hom(T^\bullet[p], F\tau_{\geq -i}(R^\bullet)) \simeq Hom(T^\bullet[p], X^\bullet)$, para i suficientemente grande.

Pelo lema 4.27(ii), temos $Hom(T^\bullet[p], F\tau_{\geq -i}(R^\bullet)) \simeq Hom(T^\bullet[p], FR^\bullet)$, para i suficientemente grande. Combinando os isomorfismos acima obtemos

$$Hom(T^\bullet[p], FR^\bullet) \simeq Hom(T^\bullet[p], X^\bullet)$$

Pela proposição 4.32, temos que:

$$Hom(FR^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow \varprojlim Hom(F\tau_{\geq -n}(R^\bullet), X^\bullet)$$

é sobrejetora e como $\varprojlim Hom(F\tau_{\geq -n}(R^\bullet), X^\bullet) \neq 0$, existe $\phi : FR^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que

$$\begin{array}{ccc} F\tau_{\geq -n}(R^\bullet) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ FR^\bullet & \xrightarrow{\phi} & X^\bullet \end{array}$$

Dado $\phi : FR^\bullet \longrightarrow X^\bullet$, por (T1), obtemos o triângulo

$$FR^\bullet \xrightarrow{\phi} X^\bullet \longrightarrow C_\phi^\bullet \longrightarrow FR^\bullet[1]$$

e aplicando o funtor cohomológico $Hom(T^\bullet[p], -)$ obtemos a sequência longa exata

$$(T^\bullet[p], FR^\bullet) \longrightarrow (T^\bullet[p], X^\bullet) \longrightarrow (T^\bullet[p], C_\phi^\bullet) \longrightarrow (T^\bullet[p], FR^\bullet[1]) \longrightarrow (T^\bullet[p], X^\bullet[1])$$

Como $Hom(T^\bullet[p], FR^\bullet) \simeq Hom(T^\bullet[p], X^\bullet)$ segue que, para todo inteiro p ,

$$Hom(T^\bullet[p], C_\phi^\bullet) = 0 \quad (*)$$

Seja $Q^\bullet$ um objeto arbitrário em $K^-(Proj-\Gamma)$. Como $Hom(T^\bullet[p], C_\phi^\bullet[i]) = 0$ para todo i , temos pelo corolário 4.32(ii)

$$Hom(FQ^\bullet, C_\phi^\bullet) \simeq \varprojlim Hom(F\tau_{\geq -i}(Q^\bullet), C_\phi^\bullet)$$

Como o objeto $F(\tau_{\geq -i}(Q^\bullet))$ é gerado por $add-T^\bullet$, por (*), segue que

$$Hom(F\tau_{\geq -i}(Q^\bullet), C_\phi^\bullet[r]) = 0.$$

Logo $Hom(FQ^\bullet, C_\phi^\bullet) = 0$.

Usando o triângulo $FR^\bullet \xrightarrow{\phi} X^\bullet \longrightarrow C_\phi^\bullet \longrightarrow FR^\bullet[1]$ e aplicando o funtor cohomológico $Hom(FQ^\bullet, -)$ temos a sequência exata longa

$$\dots \longrightarrow (FQ^\bullet, C_\phi^\bullet[-1]) \longrightarrow (FQ^\bullet, FR^\bullet) \longrightarrow (FQ^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow (FQ^\bullet, C_\phi^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Como $Hom(FQ^\bullet, C_\phi^\bullet) = 0$ segue que $Hom(FQ^\bullet, FR^\bullet) \simeq Hom(FQ^\bullet, X^\bullet)$ como queríamos demonstrar. ■

Agora, vamos mostrar que a $T^\bullet$ -resolução é única a menos de isomorfismo.

Corolário 4.34 *A imagem da $T^\bullet$ -resolução de um objeto $X^\bullet$ em $K^-(Proj-\Lambda)$ sobre a equivalência induzida por $Hom(T^\bullet, -)$ é unicamente determinada a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Seja $X^\bullet$ um objeto em $K^-(Proj-\Lambda)$ e sejam $R^\bullet, R'^\bullet$ as imagens de duas $T^\bullet$ -resoluções de $X^\bullet$ em $K^-(Proj-\Lambda)$. Pela proposição anterior existe um morfismo $\phi : FR^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que $Hom(FQ^\bullet, FR^\bullet) \simeq Hom(FQ^\bullet, X^\bullet)$ para qualquer objeto $Q^\bullet$ em $K^-(Proj-\Gamma)$. Em particular, isto é válido para $Q^\bullet = R'^\bullet$ e $Q^\bullet = R^\bullet$, respectivamente, ou seja,

$$Hom(FR'^\bullet, FR^\bullet) \simeq Hom(FR'^\bullet, X^\bullet)$$

$$Hom(FR^\bullet, FR'^\bullet) \simeq Hom(FR^\bullet, X^\bullet)$$

Dados os morfismos $\phi : FR^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ e $\psi : FR'^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ existem morfismos $t_\psi : FR'^\bullet \longrightarrow FR^\bullet$ e $s_\phi : FR^\bullet \longrightarrow FR'^\bullet$ tais que $\psi = \phi t_\psi$ e $\phi = \psi s_\phi$, ou seja, os diagramas abaixo são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} FR^\bullet & \xrightarrow{\phi} & X^\bullet \\ t_\psi \uparrow & \nearrow \psi & \\ FR'^\bullet & & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} FR'^\bullet & \xrightarrow{\psi} & X^\bullet \\ s_\phi \uparrow & \nearrow \phi & \\ FR^\bullet & & \end{array}$$

Disso segue que

$$\psi = \psi s_\phi t_\psi \Rightarrow \psi(Id_{FR'} - s_\phi t_\psi) = 0$$

e

$$\phi = \phi t_\psi s_\phi \Rightarrow \phi(Id_{FR} - t_\psi s_\phi) = 0$$

Como temos os isomorfismos

$$Hom(FR'^\bullet, FR'^\bullet) \simeq Hom(FR'^\bullet, X^\bullet)$$

$$Hom(FR^\bullet, FR^\bullet) \simeq Hom(FR^\bullet, X^\bullet)$$

segue que $s_\phi t_\psi = Id_{FR'}$ e $t_\psi s_\phi = Id_{FR}$. Consequentemente s_ϕ é um isomorfismo e $FR^\bullet \simeq FR'^\bullet$. Como F é fiel e pleno, $R^\bullet \simeq R'^\bullet$. ■

O objetivo desta seção é construir um funtor $G : K^-(Proj-\Lambda) \longrightarrow K^-(Proj-\Gamma)$ tal que G é adjunto à direita do funtor F que definimos anteriormente. O resultado acima mostra que dado $X^\bullet \in K^-(Proj-\Lambda)$, se definimos $G(X^\bullet)$ como a imagem de uma $T^\bullet$ -resolução em $K^-(Proj-\Gamma)$ sobre a equivalência induzida por $Hom(T^\bullet, -)$, então isto é bem definido.

Como F é um funtor fiel e pleno, temos:

$$Hom(Q^\bullet, G(X^\bullet)) = Hom(Q^\bullet, R^\bullet) \simeq Hom(FQ^\bullet, FR^\bullet) \simeq Hom(FQ^\bullet, X^\bullet),$$

onde $Q^\bullet$ é um objeto qualquer em $K^-(Proj-\Gamma)$ e $R^\bullet$ é a imagem de uma $T^\bullet$ -resolução em $K^-(Proj-\Gamma)$ sobre a equivalência induzida por $Hom(T^\bullet, -)$. Seja θ o isomorfismo entre $Hom(Q^\bullet, GX^\bullet)$ e $Hom(FQ^\bullet, X^\bullet)$. O isomorfismo θ é natural em $Q^\bullet$. De fato, dado $f : Q_1^\bullet \longrightarrow Q_2^\bullet$, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Hom(Q_2^\bullet, GX^\bullet) & \xrightarrow{\theta_{Q_1}} & Hom(FQ_2^\bullet, X^\bullet) \\ Hom(f, GX^\bullet) \downarrow & & \downarrow Hom(Ff, X^\bullet) \\ Hom(Q_1^\bullet, GX^\bullet) & \xrightarrow{\theta_{Q_2}} & Hom(FQ_1^\bullet, X^\bullet) \end{array}$$

uma vez que

$$\theta(Hom(f, GX^\bullet)(h)) = \theta(hf) = \phi F(h)F(f)$$

e

$$Hom(Ff, X^\bullet)(\theta(h)) = Hom(Ff, X^\bullet)(\phi F(h)) = \phi F(h)F(f),$$

onde $h : Q_2^\bullet \longrightarrow GX^\bullet$ e $\phi : FGX^\bullet = FR^\bullet \longrightarrow X^\bullet$.

Usando o isomorfismo adjunto θ existe para qualquer $Y^\bullet$ em $K^-(Proj-\Lambda)$ um morfismo $\eta_Y : F \circ G(Y^\bullet) \longrightarrow Y^\bullet$ correspondente ao morfismo identidade em $G(Y^\bullet)$. De novo, usando o isomorfismo adjunto θ podemos definir, para qualquer $\phi : Y^\bullet \longrightarrow Y'^\bullet$ em $K^-(Proj-\Lambda)$, o morfismo

$$G(\phi) = \theta(\phi \circ \eta_Y) : G(Y^\bullet) \longrightarrow G(Y'^\bullet)$$

Note que temos o diagrama abaixo comutativo uma vez que θ é natural em $Q^\bullet$

$$\begin{array}{ccccc} FGY^\bullet & \xrightarrow{F(\theta(\phi\eta_Y))} & FGY'^\bullet & \xrightarrow{F(\theta(\psi\eta_{Y'}))} & FGY''^\bullet \\ \downarrow \eta_Y & & \downarrow \eta_{Y'} & & \downarrow \eta_{Y''} \\ Y^\bullet & \xrightarrow{\phi} & Y'^\bullet & \xrightarrow{\psi} & Y''^\bullet \end{array}$$

Disso temos:

$$\phi\eta_Y = \eta_{Y'}F(\theta(\phi\eta_Y)) \quad (1)$$

$$\psi\eta_{Y'} = \eta_{Y''}F(\theta(\psi\eta_{Y''})) \quad (2)$$

$$\psi\phi\eta_Y = \eta_{Y''}F(\theta(\psi\phi\eta_Y)) \quad (3)$$

De (3), temos

$$\eta_{Y''}F(\theta(\psi\phi\eta_Y)) = \psi\phi\eta_Y$$

De (1) e (2) e pelo fato de F ser funtor, temos

$$\psi\phi\eta_Y = \psi\eta_{Y'}F(\theta(\phi\eta_Y)) = \eta_{Y''}F(\theta(\psi\eta_{Y''}))F(\theta(\phi\eta_Y)) = \eta_{Y''}F(\theta(\psi\eta_{Y''})\theta(\phi\eta_Y))$$

Logo,

$$\eta_{Y''}F(\theta(\psi\phi\eta_Y)) = \eta_{Y''}F(\theta(\psi\eta_{Y''})\theta(\phi\eta_Y)) \Rightarrow F(\theta(\psi\phi\eta_Y)) = F(\theta(\psi\eta_{Y''})\theta(\phi\eta_Y))$$

Como o funtor F é fiel e pleno, temos

$$\theta(\psi\phi\eta_Y) = \theta(\psi\eta_{Y''})\theta(\phi\eta_Y).$$

Ou seja, $G(\psi\phi) = G(\psi)G(\phi)$. Analogamente, mostramos que $G(Id_Y) = Id_{G(Y^\bullet)}$. Portanto G é um funtor tal que $Hom(Q^\bullet, G(X^\bullet)) \simeq Hom(FQ^\bullet, X^\bullet)$, onde $Q^\bullet$ é um objeto qualquer em $K^-(Proj-\Gamma)$. Assim mostramos o seguinte corolário.

Corolário 4.35 *O funtor $F : K^-(Proj-\Gamma) \longrightarrow K^-(Proj-\Lambda)$ tem adjunto à direita $G : K^-(Proj-\Lambda) \longrightarrow K^-(Proj-\Gamma)$, e conseqüentemente F preserva todas somas diretas.*

4.4 A prova do Teorema de Morita para categoria derivada

Já temos um funtor exato $F : K^-(Proj-\Gamma) \longrightarrow K^-(Proj-\Lambda)$ fiel e pleno com adjunto à direita $G : K^-(Proj-\Lambda) \longrightarrow K^-(Proj-\Gamma)$. Nesta seção iremos finalizar a prova do Teorema de Rickard. Os lemas a seguir auxiliarão na demonstração do teorema.

Lema 4.36 *Um objeto $X^\bullet$ em $K^-(Proj-\Lambda)$ pertence, a menos de isomorfismo, a categoria $D^b(\Lambda)$ (ou seja, tem homologia limitada) se, e somente se, para qualquer objeto $Y^\bullet$ de $K^-(Proj-\Lambda)$, existe um número inteiro m tal que $Hom(Y^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$, para todo $n < m$.*

Demonstração: Pelo corolário 3.19 existe uma equivalência natural entre as categorias $K^{-,b}(Proj-\Gamma)$ e $D^b(\Gamma)$. Sejam $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ objetos de $K^-(Proj-\Lambda)$. Sem perda de generalidade, vamos supor $Y^i = 0$, se $i > 0$.

Seja $X^\bullet \in D^b(\Lambda)$. Como $D^b(\Lambda) \simeq K^{-,b}(Proj-\Lambda)$, podemos supor que $X^\bullet$ é um complexo de projetivos com homologia limitada. Assim, existe r tal que $H^i(X^\bullet) = 0$, para todo $i \leq -r$.

Tomemos $n = -r - 1$ e consideremos $f \in \text{Hom}(Y^\bullet, X^\bullet[n])$ como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} Y^\bullet : \dots & \longrightarrow & Y^{-1} & \longrightarrow & Y^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow f & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow f^0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \\ X^\bullet[-r-1] : \dots & \longrightarrow & X^{-r-2} & \xrightarrow{d_X^{-r-2}} & X^{-r-1} & \xrightarrow{d_X^{-r-1}} & X^{-r} & \xrightarrow{d_X^{-r}} & X^{-r+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

O morfismo f é homotópico a zero, pois podemos tomar as aplicações $k^i : Y^i \longrightarrow X^{r+1+i}$ como sendo zero se $i > 0$ e para $i < 0$, façamos o seguinte: como $d_X^{-r-1}f^0 = 0$ segue que $\text{Im } f^0 \subset \text{Ker } d_X^{-r-1} = \text{Im } d_X^{-r-2}$. Logo podemos considerar o seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} & & Y^0 \\ & \swarrow k^0 & \downarrow f^0 \\ X^{-r-2} & \longrightarrow & \text{Im } d_X^{-r-2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como Y^0 é projetivo, existe $k^0 : Y^0 \longrightarrow X^{-r-2}$ tal que $f^0 = d_X^{-r-2}k^0 = d_X^{-r-2}k^0 + k^1d_Y^0$. Como $H^i(X^\bullet) = 0$ para $i \leq -r$, e $Y^\bullet$ é projetivo, temos que existem as homotopias de maneira análoga a demonstração do lema 3.12. Portanto, existe um número $m = -r - 1$ tal que $\text{Hom}(Y^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$, para todo $n < m$.

Reciprocamente, se $X^\bullet \in K^-(\text{Proj-}\Lambda)$ e $X^\bullet \notin D^b(\Lambda)$, ou seja, se $X^\bullet$ tem homologias ilimitadas, temos que, para todo i , existe $\bar{x} \in \frac{\text{Ker } d_X^i}{\text{Im } d_X^{i-1}} = H^i(X^\bullet)$ tal que $\bar{x} \notin \text{Im } d_X^{i-1}$. Seja $Y^\bullet$ o complexo concentrado no nível zero como abaixo

$$Y^\bullet : \quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

e definimos $f \in \text{Hom}(Y^\bullet, X^\bullet[i])$ como sendo $f^0 : \Lambda \longrightarrow X^i$, $1 \mapsto \bar{x}$ e $f^n = 0$, para todo $n \neq 0$. Dessa forma, f não é homotópico a zero, pois caso contrário, existiria $k^0 : \Lambda \longrightarrow X^{i-1}$ tal que

$$\bar{x} = f^0(1) = d_X^{i-1}k^0(1) \Rightarrow \bar{x} \in \text{Im } d_X^{i-1}$$

uma contradição uma vez que $\bar{x} \notin \text{Im } d_X^{i-1}$. ■

Lema 4.37 *Um objeto $X^\bullet \in D^b(\Gamma)$ é isomorfo a um complexo em $K^b(\text{Proj-}\Gamma)$ se, e somente se, para qualquer $Y^\bullet \in D^b(\Gamma)$, existe um inteiro m tal que $\text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$, para todo $i > m$.*

Demonstração: Pelo corolário 3.19 existe uma equivalência natural entre as categorias $K^{-,b}(\text{Proj-}\Gamma)$ e $D^b(\Gamma)$. Se $X^\bullet \in K^b(\text{Proj-}\Gamma)$, segue que existe um inteiro m tal que $\text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$, para todo $i > m$ e $Y^\bullet \in D^b(\Gamma)$. Reciprocamente, seja $X^\bullet \in D^b(\Gamma)$ e $X^\bullet \notin K^b(\text{Proj-}\Gamma)$, ou seja, $X^\bullet$ não é isomorfo a um complexo limitado de projetivos. Como $K^{-,b}(\text{Proj-}\Gamma) \sim D^b(\Gamma)$, podemos supor que $X^\bullet$ é um complexo de projetivos com homologia limitada. Logo, existe r tal que $H^i(X^\bullet) = 0$, para todo $i \leq r$.

Dessa forma, $\text{Ker } d^{i+1}$ não é projetivo, se $i < r$. Caso contrário, como $\text{Ker } d^i = \text{Im } d^{i-1}$, para todo $i < r$, a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Ker } d^{i-1} \longrightarrow X^{i-1} \longrightarrow \text{Im } d^{i-1} \longrightarrow 0$$

cinde (pois $Im\ d^{i-1}$ é projetivo). Logo $X^{i-1} = Im\ d^{i-1} \oplus Ker\ d^{i-1}$ e, consequentemente o complexo $X^\bullet$ é isomorfo a seguinte soma direta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{i-2} & \longrightarrow & Ker\ d^{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \oplus & & \\ & & 0 & \longrightarrow & Im\ d^{i-1} & \longrightarrow & X^i \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como o complexo $\dots \longrightarrow X^{i-2} \longrightarrow Ker\ d^{i-1} \longrightarrow 0$ é zero em $D^b(\Gamma)$, para $i < r$ uma vez que é exato, para $i < r$, temos que $X^\bullet$ é isomorfo ao complexo limitado $0 \longrightarrow Im\ d^{i-1} \longrightarrow X^i \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0$, o que é uma contradição pois $X^\bullet \notin K^b(Proj-\Gamma)$.

Tomemos então $Y = \bigoplus_{i < r} Ker\ d^{i+1}$. Consideremos o complexo concentrado no nível zero

$$Y^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Queremos mostrar que $Hom(X^\bullet, Y^\bullet[i]) \neq 0$, para todo $i > r$. De fato, considere o seguinte morfismo f :

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & = & \dots \longrightarrow & X^{i-2} & \xrightarrow{d^{i-2}} & X^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d^i} & X^{i+1} & \longrightarrow \dots \\ \downarrow f & & & \downarrow 0 & & \downarrow \tilde{d}^{i-1} & & \downarrow 0 & & \downarrow & \\ Y^\bullet[i] & \supset & \dots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Ker\ d^i & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Como $Ker\ d^i = Im\ d^{i-1}$, para $i < r$, temos $\tilde{d}^{i-1}$ é a restrição de d^{i-1} a $Im\ d^{i-1}$. Suponhamos que f é homotópico a zero. Logo existe $k : X^i \longrightarrow Ker\ d^i$ tal que $kd^{i-1} = \tilde{d}^{i-1}$. Como $Ker\ d^i = Im\ d^{i-1} \simeq \frac{X^{i-1}}{Ker\ d^{i-1}}$ segue que $i \circ \tilde{d}^{i-1} = d^{i-1}$, onde i é a inclusão $i : Ker\ d^i \hookrightarrow X^i$. Assim,

$$k \circ i \circ \tilde{d}^{i-1} = k \circ d^{i-1} = \tilde{d}^{i-1}.$$

Como $\tilde{d}^{i-1}$ é epimorfismo, segue que $k \circ i = Id_{Ker\ d^i}$. Logo temos que a sequência exata abaixo cinde

$$0 \longrightarrow Ker\ d^i \xrightleftharpoons[k]{i} X^i \longrightarrow \frac{X^i}{Ker\ d^i} \longrightarrow 0$$

Logo $Ker\ d^i$ é um somando direto de X^i , que é projetivo. Consequentemente $Ker\ d^i$ é projetivo, uma contradição. Isso acontece para todo $i > r$, e portanto, $Hom(X^\bullet, Y^\bullet[i]) \neq 0$, para $i > r$. ■

Lema 4.38 *Um objeto $X^\bullet$ de $K^b(Proj-\Lambda)$ pertence a $K^b(proj-\Lambda)$ se, e somente se, o funtor $Hom(X^\bullet, -) : K^b(Proj-\Lambda) \longrightarrow Ab$ comuta com soma direta arbitrária.*

Demonstração: Se $X^\bullet \in K^b(proj-\Lambda)$, então pelo lema 4.1 o funtor $Hom(X^\bullet, -) : K^b(Proj-\Lambda) \longrightarrow Ab$ comuta com soma direta arbitrária. Reciprocamente, suponhamos que exista um objeto $X^\bullet$ de $K^b(Proj-\Lambda)$ não isomorfo a um objeto de

$K^b(proj-\Lambda)$, mas tal que $Hom(X^\bullet, -)$ preserva soma direta arbitrária. Escolhe-mos tal objeto $X^\bullet$ como sendo

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

de menor comprimento. Observemos que $n \neq 0$, pois se $n = 0$, como $X^\bullet \in K^b(proj-\Lambda)$ é um complexo concentrado que comuta com soma direta arbitrária, então $X^\bullet \in K^b(proj-\Lambda)$ pelo lema 4.1, uma contradição.

Como o funtor $Hom(X^\bullet, -)$ comuta com soma direta arbitrária, qualquer morfismo $f \in Hom(X^\bullet, \oplus_I \Lambda) \simeq \oplus_I Hom(X^\bullet, \Lambda)$ é homotópico a um morfismo cuja imagem está contido em $\oplus_{I_0} \Lambda$, para algum subconjunto finito $I_0 \subset I$.

Podemos supor que X^0 é um módulo livre finitamente gerado. De fato, como X^0 é projetivo, X^0 é um somando direto de um módulo livre, ou seja, $F = X^0 \oplus P^0$, com F módulo livre. Tomando a soma direta do complexo $X^\bullet$ com o complexo

$$P^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

e como $P^\bullet$ é homotópico a zero, segue que $X^\bullet \simeq X^\bullet \oplus P^\bullet$. Isso nos dá um módulo livre no nível zero.

Além disso, considere o morfismo $f : X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ dado por:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} X^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & X^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow f & & & & \downarrow & & \parallel Id_{X^0} & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ Z^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Pela hipótese, temos $X^0 = (\oplus_{I_0} \Lambda) \oplus Y$ tal que I_0 é um conjunto finito e f é homotópico a um morfismo cuja imagem está contido em $\oplus_{I_0} \Lambda$. A homotopia é dada pelo morfismo $s : X^1 \longrightarrow X^0$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \swarrow 0 & \parallel & \swarrow s & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & \swarrow 0 & \downarrow 0 & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Logo, $sd_X^0 = Id_{X^0}$ e assim d_X^0 é uma retração, e portanto

$$X^1 \simeq X^0 \oplus \tilde{X} \simeq (\oplus_{I_0} \Lambda) \oplus Y \oplus \tilde{X}.$$

Disso segue que existe um subcomplexo de $X^\bullet$ isomorfo ao complexo

$$0 \longrightarrow Y \xlongequal{\quad} Y \longrightarrow 0,$$

pois a composição

$$Y \xrightarrow{i_Y} X^0 \xrightarrow{sd_X^0} X^1 \xrightarrow{p_Y} Y^\bullet,$$

onde $X^0 = \oplus_{I_0} \Lambda \oplus Y$ e $X^1 \simeq X^0 \oplus \tilde{X}$ é dada por

$$p_Y \circ s \circ d_{X^0} \circ i_Y = p_Y \circ Id_{X^0} \circ i_Y = Id_Y.$$

Logo temos que o complexo $X^\bullet$ é dado pela soma direta:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \oplus_{I_0} \Lambda \longrightarrow \oplus_{I_0} \Lambda \oplus \tilde{X} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\oplus$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Como o complexo $0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ é homotópico a zero, segue que

$$X^\bullet \simeq \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \oplus_{I_0} \Lambda \longrightarrow \oplus_{I_0} \Lambda \oplus \tilde{X} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Consideremos uma família indexada $\{Y_i : i \in I\}$ de objetos de $K^b(Proj-\Lambda)$ qualquer e aplicando o morfismo $\oplus Hom(-, Y_i) \longrightarrow Hom(-, \oplus Y_i)$ de funtores cohomológicos ao triângulo distinguido

$$Z^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq 0}(X^\bullet) \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet[1]$$

temos

$$\begin{array}{ccccccccc} \oplus(X^\bullet[-1], Y_i) & \longrightarrow & \oplus(Z^\bullet, Y_i) & \longrightarrow & \oplus(\tau_{\geq 0}(X^\bullet), Y_i) & \longrightarrow & \oplus(X^\bullet, Y_i) & \longrightarrow & \oplus(Z^\bullet[1], Y_i) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ (X^\bullet[-1], \oplus Y_i) & \longrightarrow & (Z^\bullet, \oplus Y_i) & \longrightarrow & (\tau_{\geq 0}(X^\bullet), \oplus Y_i) & \longrightarrow & (X^\bullet, \oplus Y_i) & \longrightarrow & (Z^\bullet[1], \oplus Y_i) \end{array}$$

Pelo 5-lema 1.14, temos que $Hom(\tau_{\geq 0}(X^\bullet), -)$ comuta com soma direta arbitrária, o que é uma contradição com a minimalidade do comprimento do complexo $X^\bullet$. ■

Agora, estamos em condições para finalizar a prova do teorema de Rickard. Lembremos o teorema

Teorema 4.39 *Sejam Λ e Γ anéis. São equivalentes:*

- (i) $K^-(Proj-\Lambda) \sim K^-(Proj-\Gamma)$
- (ii) $D^b(\Lambda) \sim D^b(\Gamma)$
- (iii) $K^b(Proj-\Lambda) \sim K^b(Proj-\Gamma)$
- (iv) $K^b(proj-\Lambda) \sim K^b(proj-\Gamma)$
- (v) *Existe um complexo $T^\bullet \in K^b(proj-\Lambda)$ tal que*
 - (1) $Hom(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$, para $i \neq 0$.
 - (2) $add-T^\bullet$ gera $K^b(proj-\Lambda)$ (como categoria triangulada).

com $End T^\bullet \simeq \Gamma$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Pelo corolário 3.19 temos que existe uma equivalência natural entre as categorias $K^{-,b}(Proj-\Gamma)$ e $D^b(\Gamma)$. Por hipótese, temos que existe uma equivalência $F : K^{-}(Proj-\Gamma) \longrightarrow K^{-}(Proj-\Lambda)$. Seja $X^\bullet \in D^b(\Gamma)$. Pelo lema 4.36, para qualquer $Y^\bullet \in K^{-}(Proj-\Gamma)$ existe um número N tal que $Hom(Y^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$, para $n < N$.

Seja $Z^\bullet \in K^{-}(Proj-\Lambda)$. Como F é uma equivalência, qualquer $Z^\bullet \in K^{-}(Proj-\Lambda)$ é isomorfo a $FY^\bullet$, para algum $Y^\bullet \in K^{-}(Proj-\Gamma)$. Assim,

$$Hom(Z^\bullet, FX^\bullet[n]) = Hom(FY^\bullet, FX^\bullet[n]) \simeq Hom(Y^\bullet, X^\bullet[n]) = 0,$$

para $n < N$. Novamente pelo lema 4.36, $FX^\bullet \in D^b(\Lambda)$. Portanto, temos uma equivalência entre as categorias $D^b(\Gamma)$ e $D^b(\Lambda)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sejam uma equivalência $F : D^b(\Gamma) \longrightarrow D^b(\Lambda)$ e $X^\bullet \in K^b(Proj-\Gamma)$. Pelo lema 4.37, existe um número inteiro m tal que $Hom(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$, para $i > m$. Seja $Y^\bullet \in D^b(\Lambda)$ qualquer. Assim

$$Hom(FX^\bullet, Y^\bullet[i]) \simeq Hom(X^\bullet, GY^\bullet[i]) = 0,$$

para todo $i > m$. Logo, novamente pelo lema 4.37, segue que $FX^\bullet \in K^b(Proj-\Lambda)$. Portanto, temos uma equivalência entre as categorias $K^b(Proj-\Gamma)$ e $K^b(Proj-\Lambda)$ induzida pela equivalência entre as categorias $D^b(\Gamma)$ e $D^b(\Lambda)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sejam $F : K^b(Proj-\Gamma) \longrightarrow K^b(Proj-\Lambda)$ uma equivalência, G o seu funtor adjunto à direita e $X^\bullet \in K^b(proj-\Gamma)$. Pelo lema 4.38, como

$$Hom(FX^\bullet, \oplus Y_i) \simeq Hom(X^\bullet, \oplus GY_i) \simeq \oplus Hom(X^\bullet, GY_i) \simeq \oplus Hom(FX^\bullet, Y_i),$$

para qualquer família indexada $\{Y_i : i \in I\}$ segue que $FX^\bullet \in K^b(proj-\Lambda)$. Portanto as categorias $K^b(proj-\Gamma)$ e $K^b(proj-\Lambda)$ são equivalentes.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Seja $F : K^b(proj-\Gamma) \longrightarrow K^b(proj-\Lambda)$ uma equivalência tal que $F(\Gamma) = T^\bullet$. Assim, notemos que

$$End T^\bullet = Hom(T^\bullet, T^\bullet) = Hom(F(\Gamma), F(\Gamma)) = Hom(\Gamma, \Gamma) = \Gamma.$$

Se $i \neq 0$, como $F(\Gamma) = T^\bullet$ e F é um funtor exato, temos

$$Hom(T^\bullet, T^\bullet[i]) = Hom(F(\Gamma), F(\Gamma)[i]) = Hom(\Gamma, \Gamma[i]) = 0.$$

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de $K^b(proj-\Lambda)$ que contém $add-T^\bullet$ e é fechada para isomorfismo, translação e aplicação cone. Dessa forma, a equivalência F aplica $\mathcal{C}$ a uma subcategoria de $K^b(proj-\Gamma)$ fechada para as mesmas propriedades que contém $proj-\Gamma$, e portanto, igual a $K^b(proj-\Gamma)$. Consequentemente, $\mathcal{C} = K^b(proj-\Lambda)$. Logo, $add-T^\bullet$ gera $K^b(proj-\Lambda)$.

(v) $\Rightarrow$ (i) Já temos um funtor $F : K^{-}(Proj-\Gamma) \longrightarrow K^{-}(Proj-\Lambda)$ exato, fiel e pleno com adjunto à direita $G : K^{-}(Proj-\Lambda) \longrightarrow K^{-}(Proj-\Gamma)$ tal que $F(\Gamma) = T^\bullet$, onde $T^\bullet \in K^b(proj-\Lambda)$. Para provarmos que F é uma equivalência resta provarmos que F é denso. Para isso vamos mostrar que dado um complexo

qualquer $Y^\bullet \in K^-(\text{Proj-}\Lambda)$, o morfismo adjunto $\alpha_Y : FGY^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é um isomorfismo.

Observe primeiro que $G(\alpha_Y) : GFGY^\bullet \longrightarrow GY^\bullet$ é um isomorfismo uma vez que G é um funtor adjunto de F e α_Y é o morfismo adjunto. Além disso, o funtor G é exato, pois F é exato.

Por (T1), dado $\alpha_Y : FGY^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ podemos completá-lo em um triângulo distinguido

$$FGY^\bullet \xrightarrow{\alpha_Y} Y^\bullet \longrightarrow C_{\alpha_Y}^\bullet \longrightarrow FGY^\bullet[1].$$

Aplicando o funtor G que também é exato, temos o triângulo distinguido

$$GFGY^\bullet \xrightarrow{G(\alpha_Y)} GY^\bullet \longrightarrow GC_{\alpha_Y}^\bullet \longrightarrow GFGY^\bullet[1].$$

Como $G(\alpha_Y)$ é um isomorfismo temos $GC_{\alpha_Y}^\bullet = 0$ pelo lema 2.32. Assim,

$$\text{Hom}(T^\bullet, C_{\alpha_Y}^\bullet[i]) = \text{Hom}(F\Gamma, C_{\alpha_Y}^\bullet[i]) \simeq \text{Hom}(\Gamma[-i], GC_{\alpha_Y}^\bullet) = 0, \quad (*)$$

para todo i .

Consideremos agora uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $K^b(\text{proj-}\Lambda)$ consistindo dos objetos $C^\bullet$ tais que $\text{Hom}(C^\bullet, C_{\alpha_Y}^\bullet) = 0$, para todo i .

Note que, por (*), segue que $\mathcal{C}$ contém $\text{add-}T^\bullet$. Além disso, $\mathcal{C}$ é fechado para isomorfismos e translação.

Se $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é um morfismo com $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{C}$, segue que $C_f^\bullet = X^\bullet[1] \oplus Y^\bullet \in \mathcal{C}$, uma vez que

$$\text{Hom}(C_f^\bullet, C_{\alpha_Y}^\bullet) = \text{Hom}(X^\bullet[1] \oplus Y^\bullet, C_{\alpha_Y}^\bullet) \simeq \text{Hom}(X^\bullet[1], C_{\alpha_Y}^\bullet) \oplus \text{Hom}(Y^\bullet, C_{\alpha_Y}^\bullet) = 0,$$

pois $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{C}$. Portanto $\mathcal{C}$ também é fechado para aplicações cones.

Como $\text{add-}T^\bullet$ gera $K^b(\text{proj-}\Lambda)$ segue que $\mathcal{C} = K^b(\text{proj-}\Lambda)$. Dessa forma, em particular temos, para todo i , que $\text{Hom}(\Lambda, C_{\alpha_Y}^\bullet) = 0$. Consequentemente, $C_{\alpha_Y}^\bullet = 0$ e, disso segue que, α_Y é isomorfismo. Portanto o funtor F é uma equivalência. ■

Observação 4.40 *Se Λ é uma álgebra de dimensão finita e T é um Λ -módulo à direita finitamente gerado, então T é chamado **módulo inclinante** se, e somente se, as seguintes condições são equivalentes:*

- (I) $\text{pd}(T) \leq 1$;
- (II) $\text{Ext}_\Lambda^1(T, T) = 0$;
- (III) *Existe uma sequência exata curta $0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow 0$, com todo T_1, T_2 em $\text{add-}T$.*

Note que todo módulo inclinante produz um complexo inclinante(concentrado) e assim temos que o teorema de Happel:

Teorema (Happel) *Sejam Λ uma álgebra de dimensão finita, T um módulo inclinante e Γ o anel de endomorfismo $\Gamma := \text{End}_\Lambda T$. Então as categorias derivadas $D^b(\Lambda)$ e $D^b(\Gamma)$ são equivalentes como categorias trianguladas.*

é um caso particular do Teorema de Rickard.

Capítulo 5

Aplicação

Neste capítulo, utilizando o artigo [16], mostraremos que a equivalência derivada preserva a finitude da dimensão finitística de uma álgebra de dimensão finita, ou seja, se Λ e Γ são duas álgebras de dimensão finita derivadamente equivalentes, então a dimensão finitística de Λ é finita se, e somente se, o é a dimensão finitística de Γ . Ao longo deste capítulo denotaremos um módulo X e o complexo concentrado do X da mesma forma.

Definição 5.1 *Seja Λ um anel. A dimensão finitística de Λ , denotada por $\text{fin.dim}(\Lambda)$ é o supremo da dimensão projetiva de Λ -módulos à direita finitamente gerado de dimensão projetiva finita, ou seja,*

$$\text{fin.dim}(\Lambda) = \sup\{pd(M) : M \in \text{mod} - \Lambda \text{ e } pd(M) < \infty\}.$$

Os próximos lemas nos auxiliarão na demonstração do principal resultado.

Sejam $F : D^b(\Gamma) \longrightarrow D^b(\Lambda)$ uma equivalência de categorias trianguladas tal que $F(\Gamma) \simeq T^\bullet$, onde $T^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$ é um complexo inclinante com $\Gamma \simeq \text{End}_{D(\Lambda)}(T^\bullet)$ e $G : D^b(\Lambda) \longrightarrow D^b(\Gamma)$ o quase inverso de F .

Lema 5.2 *Seja $n \geq 0$ e $T^\bullet$ um complexo inclinante com $T^i = 0$, para $i > 0$ e $i < -n$. Então existe um complexo inclinante $Q^\bullet$ sobre Γ tal que $G(\Lambda) \simeq Q^\bullet$ e $Q^i = 0$, para todo $i > n$ e $i < 0$.*

Demonstração: Pelo teorema de Rickard (teorema 4.39) existe um complexo inclinante $Q^\bullet$ em $K^b(\text{proj-}\Gamma)$ tal que $G(\Lambda) \simeq Q^\bullet$. Pelo lema 2.35, temos

$$H^i(Q^\bullet) \simeq \text{Hom}_{K^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[i]) \quad (1)$$

Como Γ e $Q^\bullet$ são complexos de projetivos, onde Γ é visto como o complexo concentrado, pelo corolário 3.19, temos

$$\text{Hom}_{K^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[i]) \simeq \text{Hom}_{D^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[i]) \quad (2)$$

Como o funtor F é uma equivalência, $F(\Gamma) \simeq T^\bullet$ e $G(\Lambda) \simeq Q^\bullet$, temos

$$\text{Hom}_{D^b(\Gamma)}(\Gamma, Q^\bullet[i]) \simeq \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^\bullet, \Lambda[i]) \quad (3)$$

Novamente, como $T^\bullet$ e Λ são complexos de projetivos, pelo corolário 3.19, temos

$$Hom_{D^b(\Lambda)}(T^\bullet, \Lambda[i]) \simeq Hom_{K^b(\Lambda)}(T^\bullet, \Lambda[i]) \quad (4)$$

Pelo lema 2.34, temos

$$Hom_{K^b(\Lambda)}(T^\bullet, \Lambda[i]) \simeq H^i(Hom_\Lambda^\bullet(T^\bullet, \Lambda)) \quad (5)$$

Combinando os isomorfismos (1), (2), (3), (4) e (5), temos

$$H^i(Q^\bullet) \simeq H^i(Hom_\Lambda^\bullet(T^\bullet, \Lambda)).$$

E como $H^i(Hom_\Lambda^\bullet(T^\bullet, \Lambda)) = 0$, para $i > n$, pois o complexo $T^\bullet$ é tal que $T^i = 0$ se $i < -n$, temos que $H^i(Q^\bullet) = 0$, para $i > n$ e como $Q^\bullet$ é limitado, o correspondente complexo é exato

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Ker\ d^n \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d_Q^n} Q^{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Q^{t-1} \xrightarrow{d_Q^{t-1}} Q^t \longrightarrow 0$$

Como Q^t é projetivo, a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Kerd_Q^{t-1} \longrightarrow Q^{t-1} \xrightarrow{d_Q^{t-1}} Q^t \longrightarrow 0$$

cinde, logo $Q^{t-1} \simeq Kerd_Q^{t-1} \oplus Q^t$ e consequentemente $Kerd_Q^{t-1} = Imd_Q^{t-2}$ é projetivo e finitamente gerado. Como Imd_Q^{t-2} é projetivo, a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Kerd_Q^{t-2} \longrightarrow Q^{t-2} \xrightarrow{d_Q^{t-2}} Imd_Q^{t-2} \longrightarrow 0$$

cinde, logo $Q^{t-2} \simeq Kerd_Q^{t-2} \oplus Imd_Q^{t-2}$, consequentemente $Kerd_Q^{t-2} \simeq Imd_Q^{t-3}$ é projetivo. Seguindo com esse processo, como cada Q^i é projetivo temos $Ker\ d^n$ é projetivo e finitamente gerado uma vez que é somando direto de Q^n . Portanto $Q^\bullet \simeq \sigma_{\leq n}(Q^\bullet)$ em $K^b(proj-\Gamma)$. Analogamente temos

$$\begin{aligned} H^i(Hom_\Gamma^\bullet(Q^\bullet, \Gamma)) &\simeq Hom_{K(\Gamma)}(Q^\bullet, \Gamma[i]) && \text{(lema 2.34)} \\ &\simeq Hom_{D(\Gamma)}(Q^\bullet, \Gamma[i]) && \text{(corolário 3.19)} \\ &\simeq Hom_{D(\Lambda)}(\Lambda, T^\bullet[i]) && \text{(Aplicando o funtor } F) \\ &\simeq Hom_{K^b(\Lambda)}(\Lambda, T^\bullet[i]) && \text{(corolário 3.19)} \\ &\simeq H^i(T^\bullet) && \text{(lema 2.35)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $i > 0$. Assim $Hom_\Gamma^\bullet(Q^\bullet, \Gamma) \simeq \sigma_{\leq 0}(Hom_\Gamma^\bullet(Q^\bullet, \Gamma))$ em $K^b(proj-\Gamma^{op})$ e consequentemente $Q^\bullet \simeq \sigma'_{\geq 0}(Q^\bullet)$ em $K^b(proj-\Gamma)$.

Dessa forma, segue que $Q^\bullet \simeq \sigma'_{\geq 0}(\sigma_{\leq n}(Q^\bullet))$ em $K^b(proj-\Gamma)$, ou seja, $Q^i = 0$, para $i > n$ e $i < 0$. ■

Lema 5.3 *Sejam $m, n, d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$ e $X^\bullet, Y^\bullet \in K^b(\Lambda)$ tal que $X^p = 0$, para todo $p < m$, $Y^q = 0$, para todo $q > n$, e $Ext_\Lambda^i(X^r, Y^s) = 0$, para todo $r, s \in \mathbb{Z}$ e $i \geq d$. Então $Hom_{D^b(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$, para todo $i \geq d + n - m$.*

Demonstração:

Afirmção: Para todo $X \in \text{Mod } \Lambda$ tal que $\text{Ext}_\Lambda^i(X, Y^q) = 0$, para todo $q \in \mathbb{Z}$ e $i \geq d$, temos que $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, Y^\bullet[i]) = 0$, para $i \geq d + n$.

Para $k > n$, temos $\tau_{\geq k}(Y^\bullet) = 0$ pois $Y^k = 0$ para $k > n$. Para $k = n$, temos $\tau_{\geq k}(Y^\bullet) = Y^n[-n]$. Observe que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)[i]) &= \text{Ext}_\Lambda^i(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)) \\ &= \begin{cases} \text{Ext}_\Lambda^i(X, 0), & k > n \\ \text{Ext}_\Lambda^i(X, Y^n[-n]), & k = n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & k > n \\ \text{Ext}_\Lambda^{i-n}(X, Y^n), & k = n \end{cases} \end{aligned}$$

Por hipótese $\text{Ext}_\Lambda^i(X, Y^q) = 0$, para todo $q \in \mathbb{Z}$ e $i \geq d$, logo $\text{Ext}_\Lambda^{i-n}(X, Y^n) = 0$ se $i - n \geq d$, ou seja, se $i \geq d + n$. Logo, dado $k \geq n$, $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)[i]) = 0$, para $i \geq d + n$.

Por indução “inversa” vamos mostrar que $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)) = 0$, para $i \geq d + n$ e para todo $k \leq n$. Já vimos que para $k = n$ o resultado é válido.

Seja $k < n$ e assumamos que $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)[i]) = 0$, para $i \geq d + n$. Vamos provar que $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, \tau_{\geq k-1}(Y^\bullet)[i]) = 0$, para $i \geq d + n$. Aplicando o funtor $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, -[i])$ ao triângulo distinguido

$$Y^{k-1}[-k] \longrightarrow \tau_{\geq k}(Y^\bullet) \longrightarrow \tau_{\geq k-1}(Y^\bullet) \longrightarrow Y^{k-1}[-k+1]$$

temos

$$\dots \text{Ext}_\Lambda^i(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)) \longrightarrow \text{Ext}_\Lambda^i(X, \tau_{\geq k-1}(Y^\bullet)) \longrightarrow \text{Ext}_\Lambda^i(X, Y^{k-1}[-k+1]) \dots$$

ou seja,

$$\dots \text{Ext}_\Lambda^i(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)) \longrightarrow \text{Ext}_\Lambda^i(X, \tau_{\geq k-1}(Y^\bullet)) \longrightarrow \text{Ext}_\Lambda^{i-k+1}(X, Y^{k-1}) \dots$$

Para $i \geq d + n$ temos por hipótese de indução que

$$\text{Ext}_\Lambda^i(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)) = \text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, \tau_{\geq k}(Y^\bullet)[i]) = 0$$

e pela hipótese da nossa afirmação temos $\text{Ext}_\Lambda^{i-k+1}(X, Y^{k-1}) = 0$, pois

$$i - k + 1 \geq d + n - k + 1 > d + n - n + 1 > d + 1 \geq d.$$

Portanto $\text{Ext}_\Lambda^i(X, \tau_{\geq k-1}(Y^\bullet)) = \text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, \tau_{\geq k-1}(Y^\bullet)[i]) = 0$, para $i \geq d + n$.

Como $Y^\bullet = \tau_{\geq k-1}(Y^\bullet)$, para k suficientemente pequeno, por indução sobre k , temos que $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X, Y^\bullet[i]) = 0$, para $i \geq d + n$, concluindo a prova da afirmação.

Agora vamos provar que $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$, para $i \geq d + n - m$ tal que $\text{Ext}_\Lambda^i(X^p, Y^q) = 0$, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ e $i \geq d$.

Note que $\tau_{\leq k}(X^\bullet) = 0$, para $k < m$ pois $X^k = 0$, se $k < m$. Para $k = m$, temos $\tau_{\leq k}(X^\bullet) = X^m[-m]$. Observe que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{D(\Lambda)}(\tau_{\leq k}(X^\bullet), Y^\bullet[i]) &= \text{Ext}_\Lambda^i(\tau_{\leq k}(X^\bullet), Y^\bullet) \\ &= \begin{cases} \text{Ext}_\Lambda^i(0, Y^\bullet), & k < m \\ \text{Ext}_\Lambda^i(X^m[-m], Y^\bullet), & k = m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & k < m \\ \text{Ext}_\Lambda^{i+m}(X^m, Y^\bullet), & k = m \end{cases} \end{aligned}$$

Como $Ext_{\Lambda}^{i+m}(X^m, Y^q) = 0$, para $i + m \geq d$, segue pela afirmação que

$$Ext_{\Lambda}^{i+m}(X^m, Y^{\bullet}) = Hom_{D(\Lambda)}(X^m, Y^{\bullet}[m+i]) = 0,$$

para $m + i \geq d + n$, ou seja, para $i \geq d + n - m$. Logo dado $k \leq m$, $Hom_{D(\Lambda)}(\tau_{\leq k}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}[i]) = 0$, para $i \geq d + n - m$.

Vamos aplicar indução sobre k para provarmos que $Hom_{D(\Lambda)}(\tau_{\leq k}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}[i]) = 0$, para $i \geq d + n - m$ e para todo $k \geq m$. Já vimos que para $k = m$ o resultado é válido.

Seja $k > m$ e assumamos que $Hom_{D(\Lambda)}(\tau_{\leq k}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}[i]) = 0$, para $i \geq d + n - m$. Vamos provar que $Hom_{D(\Lambda)}(\tau_{\leq k+1}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}[i]) = 0$, para $i \geq d + n - m$. Aplicando o funtor $Hom_{D(\Lambda)}(-, Y^{\bullet}[i])$ ao triângulo distinguido

$$X^{k+1}[-k-1] \longrightarrow \tau_{\leq k+1}(X^{\bullet}) \longrightarrow \tau_{\leq k}(X^{\bullet}) \longrightarrow X^{k+1}[-k]$$

temos a sequência exata

$$\dots Ext_{\Lambda}^i(\tau_{\leq k}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}) \longrightarrow Ext_{\Lambda}^i(\tau_{\leq k+1}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}) \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{i+k+1}(X^{k+1}, Y^{\bullet}) \dots$$

Para $i \geq d + n - m$ temos, por hipótese de indução, que $Ext_{\Lambda}^i(\tau_{\leq k}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}) = Hom_{D(\Lambda)}(\tau_{\leq k}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}[i]) = 0$ e ainda como $Ext_{\Lambda}^i(X^{k+1}, Y^q) = 0$, para $i \geq d$ e para todo $k, q \in \mathbb{Z}$ por hipótese, e,

$$i + k + 1 \geq d + n - m + k + 1 > d + n - m + m + 1 = d + n + 1 \geq d + n.$$

pela afirmação segue que

$$Ext_{\Lambda}^{i+k+1}(X^{k+1}, Y^{\bullet}) = Hom_{D(\Lambda)}(X^{k+1}, Y^{\bullet}[k+1+i]) = 0.$$

Portanto $Hom_{D(\Lambda)}(\tau_{\leq k}, Y^{\bullet}[i]) = 0$, para $i \geq d + n - m$. Agora como $X^{\bullet} = \tau_{\leq k}(X^{\bullet})$ para k suficientemente grande, segue que $Hom_{D(\Lambda)}(X^{\bullet}, Y^{\bullet}[i]) = 0$, para $i \geq d + n - m$. ■

Teorema 5.4 *Se duas álgebras de dimensão finita Λ e Γ são derivadamente equivalente, então a dimensão finitística de Λ é finita se, e somente se, a dimensão finitística de Γ o é. Mais precisamente, se $T^{\bullet}$ é um complexo inclinante sobre Λ de comprimento n tal que $\Gamma \simeq End(T^{\bullet})$, então $fin.dim(\Lambda) - n \leq fin.dim(\Gamma) \leq fin.dim(\Lambda) + n$.*

Demonstração: Suponha $fin.dim(\Lambda) = d < \infty$. Sejam M_{Γ} um Γ -módulo de dimensão projetiva finita e N_{Γ} um Γ -módulo arbitrário. Observe que $H^i(FN) = 0$, para $i < -n$ e $i > 0$. De fato, pelo lema 5.2 existe um complexo inclinante $Q^{\bullet} \in K^b(proj-\Lambda)$ tal que $G(\Lambda) \simeq Q^{\bullet}$ e $Q^i = 0$, para $i > n$ e $i < 0$. Assim temos

$$\begin{aligned} H^i(FN) &\simeq Hom_{K^b(\Lambda)}(\Lambda, FN[i]) && \text{(lema 2.35)} \\ &\simeq Hom_{D^b(\Lambda)}(\Lambda, FN[i]) && \text{(corolário 3.19)} \\ &\simeq Hom_{D^b(\Gamma)}(Q^{\bullet}, N[i]) && \text{(Aplicando o funtor F)} \\ &\simeq Hom_{D^b(\Gamma)}(Q^{\bullet}, P_N^{\bullet}[i]) \\ &\simeq Hom_{K^b(\Gamma)}(Q^{\bullet}, P_N^{\bullet}[i]) && \text{(corolário 3.19)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $i < -n$ e $i > 0$, onde $P_N^\bullet$ é a resolução projetiva do Γ -módulo N . Consequentemente segue que o complexo FN é quase isomorfo ao complexo $Y^\bullet$:

$$0 \longrightarrow \text{Coker } d^{-n-1} \longrightarrow (FN)^{-n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow (FN)^{-1} \longrightarrow \text{Ker } d^0 \longrightarrow 0$$

Seja $P_M^\bullet$ a resolução projetiva do Γ -módulo M_Γ . Como F é uma equivalência entre $K^b(\text{proj-}\Gamma)$ e $K^b(\text{proj-}\Lambda)$, temos $FP_M^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$

Segue de $FM \simeq FP_M^\bullet$ em $D^b(\Lambda)$ que $H^i(FP_M^\bullet) = H^i(FM) = 0$, para $i < -n$ e $i > 0$. Assim, se escrevemos $Z^\bullet = (Z^i, d^i) = FP_M^\bullet$ com todo Z^i projetivo finitamente gerado, analogamente o que foi feito na demonstração do lema 5.2 temos que o complexo $Z^\bullet$ é quase isomorfo ao seguinte complexo $X^\bullet$ em $D^b(\Lambda)$:

$$\dots 0 \longrightarrow \text{Coker } d^{-n-1} \longrightarrow Z^{-n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Z^{-1} \longrightarrow \text{Ker } d^0 \longrightarrow 0 \dots$$

Como $H^i(Z^\bullet) = 0$, para $i < -n$ e $Z^\bullet \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$, vemos que a dimensão projetiva do módulo $\text{Coker } d^{-n-1}$ é finita uma vez que

$$0 \longrightarrow \dots \longrightarrow Z^{-n-2} \longrightarrow Z^{-n-1} \longrightarrow \text{Coker } d^{-n-1} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva para $\text{Coker } d^{-n-1}$.

Como a dimensão finitística $\text{fin.dim}(\Lambda) = d$ segue que $\text{pd}(\text{Coker } d^{-n-1}) \leq d$.

Assim, se trocarmos FN por $Y^\bullet$ e $FP_M^\bullet$ por $X^\bullet$, vemos que $X^p = 0$, para $p < -n$, $Y^q = 0$, para $q > 0$ e que $\text{Ext}_\Lambda^i(X^p, Y^q) = 0$, para $i \geq d+1$ e $p, q \in \mathbb{Z}$, pois $\text{pd} \text{Coker } d^{-n-1} \leq d$. Consequentemente $\text{Hom}_{D(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$, para $i \geq d+1+n$ pelo lema 5.3. Logo,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_\Lambda^i(M, N) &\simeq \text{Hom}_{D(\Gamma)}(M, N[i]) && \text{(lema 3.23)} \\ &\simeq \text{Hom}_{D(\Gamma)}(P_M^\bullet, N[i]) \\ &\simeq \text{Hom}_{D(\Lambda)}(FP_M^\bullet, FN[i]) && \text{(Aplicando o funtor } F) \\ &\simeq \text{Hom}_{D(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0, \end{aligned}$$

para $i \geq d+1+n$. Assim, pela proposição 1.13, temos $\text{pd}(M) \leq d+n$ e então

$$\text{fin.dim}(\Gamma) \leq d+n = \text{fin.dim}(\Lambda) + n.$$

Similarmente, usando o funtor $G : D(\Lambda) \longrightarrow D(\Gamma)$, quase inverso do funtor F , e o complexo inclinante $Q^\bullet$ do lema 5.2, onde $Q^i = 0$, para $i > n$ e $i < 0$ podemos mostrar que $\text{fin.dim}(\Lambda) \leq \text{fin.dim}(\Gamma) + n$. Portanto temos

$$\text{fin.dim}(\Lambda) - n \leq \text{fin.dim}(\Gamma) \leq \text{fin.dim}(\Lambda) + n.$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] B. Keller. *Derived categories and their uses*. In: M. Hazewinkel (ed), Handbook of Algebra. Elsevier (1996).
- [2] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press(1997)
- [3] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*. London Math. Soc. Lect. Notes **119**, Cambridge University Press, Cambridge(1988).
- [4] H.Cartan; S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, Princeton (1973)
- [5] H. Krause. *Resolutions and Brown Representability*. Notes of a Course at the Summer School - Interactions between Homotopy Theory and Algebras, Chicago. Disponível em arXiv:math/0511047 (2004).
- [6] H. Merklen; A. Jones. *Representações de álgebras, Métodos Diagramáticos*. Publicações do IME-USP, SP.
- [7] I. Assem; D. Simpson; A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Student Texts **65**, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [8] J. J. Rotman. *An introduction to Homological Algebra*. Academic Press, New York (1979)
- [9] J.P.May. *The additivity of traces in triangulated categories*. Advances in Mathematics **163**(2001), 34-73.
- [10] J. Rickard. *Derived equivalences as derived functors*. J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), 37-48.
- [11] J. Rickard. *Morita theory for derived categories*. J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), 436-456.
- [12] K. Morita. *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect **6** (1958).
- [13] *Lectures Fourth Summer School “Representation Theory”: Derived Equivalences*. Pappenheim(1994)

- [14] M. Auslander; I. Reiten; S. O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [15] P. Grivel. *Catégories dérivées et foncteurs dérivés*. In: Borel, A. (ed.) *Algebraic D-modules*. Academic Press, London (1987)
- [16] Pan, Shengyong; Xi, Changchang. *Finiteness of finitistic dimension is invariant under derived equivalences*. *Journal of Algebra* **322** (2009), 21-24.
- [17] S.Gelfand; Y.Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer, Berlin (1996)
- [18] S. Konig; A. Zimmermann. *Derived Equivalences for Group Rings*. Lecture notes in Mathematics **1685**. Springer, 1998
- [19] Y. Kato. *On derived equivalent coherent rings*. *Communications in Algebra* (9) **30** (2002), 4437-4454.