Alana Nunes Pereira

DETERMINAÇÃO DE FOLHEAÇÕES PROJETIVAS PELO SEU CONJUNTO SINGULAR

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T
P436d
2013

Pereira, Alana Nunes, 1987-
Determinação de folheações projetivas pelo seu conjunto singular / Alana Nunes Pereira. – Viçosa, MG, 2013.
viii, 71f. : il. ; 29cm.

Orientador: Maurício Barros Corrêa Júnior
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 70-71

1. Geometria algébrica 2. Folheações (Matemática).
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 516.35

Alana Nunes Pereira

DETERMINAÇÃO DE FOLHEAÇÕES PROJETIVAS PELO SEU CONJUNTO SINGULAR

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 22 de fevereiro de 2013.

Sônia Maria Fernandes

Márcio Gomes Soares

Maurício Barros Correa Júnior
(Orientador)

"Toda a ciência precisa de matemática.
O conhecimento das coisas matemáticas é quase inato em nós...
é a ciência mais simples, um facto evidente porque nenhum cérebro a rejeita;
porque não iniciados e iletrados completos sabem calcular e contar."
Roger Bacon.

Agradecimentos

Inicio agradecendo a Deus, pois sem Sua proteção eu não teria conseguido caminhar e chegar até aqui. Agradeço aos meus pais, Neuza Maria e Lucas Maurício, pessoas de total importância em minha vida que sempre colocaram meus sonhos e de minhas irmãs em primeiro lugar. Muito obrigada pelo apoio, orações e por serem estes exemplos de integridade, ética e humildade. Às minhas irmãs queridas: Ananda e Adriane. Obrigada pela torcida, incentivo e por serem tão especiais nos momentos que mais precisei. Ao Marcos Paulo, que com total paciência, compreensão e amor acompanhou-me durante estes dois anos de trabalho sempre entendendo toda minha correria.

Não poderia deixar de agradecer aos amigos que ganhei durante estes anos em Viçosa: turma de 2011, Anna Paula, Robledo, Gustavo, Fernanda, Alana e Michely. Jamais esquecerei nossos momentos de MUITO estudo, diversão e do companheirismo de vocês. Agradeço à Alana por dividir comigo seus momentos de estudo e de alegrias, a Anna Paula por sua imensa disponibilidade e carinho, ao Robledo pelos toques matemáticos e pelas risadas, ao Gustavo por estar sempre paciente e por ser um amigo tão dedicado, a Fernanda pelos momentos de amizade e muita alegria e, finalmente, à Michely, minha irmãzinha tão solícita, amiga e grande incentivadora. Amo todos vocês! Agradeço também aos demais colegas do mestrado: Samara, Victor, Michele Fidélis, Serginei, Guemael, Débora, Luis, Tilú, Renno, Carlos, Aline, Priscila, Maísa, Thiago, Rondinei e Lívia. Nossos momentos juntos foram maravilhosos. Meu obrigado, também, à turma de 2010 pela excelente acolhida.

Meu muito obrigado às companheiras de casa pela torcida, paciência e amizade: Thaís, Gabi, Lorena, Renata, Lhaíza e Isabela. Conviver com vocês foi maravilhoso e sempre lembrarei de vocês com muito carinho! Obrigado também à Mírian e ao Paulo pelo profissionalismo. Ao senhor Jair pela simpatia, alegria e pelo cafezinho de cada dia. Aos professores que deram grandiosa contribuição à minha formação no mestrado: Anderson, Simone e em especial, professora Sônia, pelo auxílio e atenção voltados a este trabalho.

Finalmente, agradeço ao responsável maior pela realização deste trabalho: meu professor-orientador Maurício Corrêa. Agardeço-lhe, acima de tudo, por me dar a oportunidade de conhecer uma área tão maravilhosa que é a Teoria de Folheações. O conhecimento que adquiri durante este tempo de trabalho é um dos meus maiores bens. Qualquer palavra minha não será suficiente para agradecer sua paciência, ética, dedicação e humildade para comigo. Obrigada por ter me acolhido, tirado todas as minhas dúvidas e acreditado em mim quando nem mesmo eu acreditava.

À CAPES e ao REUNI pelo apoio financeiro. Enfim, à coordenação do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Viçosa pela oportunidade.

Sumário

Resumo

PEREIRA, Alana Nunes. Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2013. **Determinação de Folheações Projetivas pelo seu Conjunto Singular**. Orientador: Maurício Barros Corrêa Júnior.

Neste trabalho, estudamos o Teorema de Gómez-Mont e Kempf sobre a determinação de folheações unidimensionais, de grau $d > 1$, sobre espaços projetivos complexos $\mathbb{P}^n$, pelo seu conjunto singular. Mais precisamente, seja s uma seção global do fibrado $T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k)$, $k > 0$, tal que o conjunto singular, $Sing(s) = (s = 0)$, seja isolado. Seja s' outra seção global de $T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k)$ com $Sing(s') \supset Sing(s)$. Então, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $s' = \lambda s$. Isto implica que as folheações induzidas por s e s' são iguais.

Abstract

PEREIRA, Alana Nunes. Universidade Federal de Viçosa, February 2013. **Determinação de Folheações Projetivas pelo seu Conjunto Singular**. Adiviser: Maurício Barros Corrêa Júnior.

In this work, we study the Gómez-Mont-Kempf's Theorem of determination of one-dimensional foliations, of degree $d > 1$, on complex projective spaces $\mathbb{P}^n$, by its singular set. More precisely, let s be a global section of the bundle $T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k)$, $k > 0$, such that the singular set $Sing(s) = (s = 0)$ is isolated. Let s' be another global section of $T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k)$ with $Sing(s') \supset Sing(s)$. Then, there exist $\lambda \in \mathbb{C}^*$ such that $s' = \lambda s$. This implies that the foliations induced by s and s' are the same.

Introdução

O estudo geométrico das Folheações teve sua origem nos trabalhos de Ehresmann, [6] e [7], e Reeb, [19] e [20]. Por ser uma área de grande aplicação e por utilizar técnicas de diversas áreas da Matemática como Topologia, Geometria, Álgebra Homológica, Análise e Sistemas Dinâmicos para demonstrar seus resultados, a Teoria Geométrica de Folheações auxilia no aumento da compreensão de diversos problemas em Matemática.

O estudo de Folheações Holomorfas é mais recente e grande parte da pesquisa neste campo tangem aos aspectos locais da teoria como, por exemplo, estudo do conjunto dos pontos singulares destas folheações. Tal estudo é trabalhoso, porém é de extrema utilidade e relevância.

Neste trabalho, voltaremos nossos olhares, de certa forma, para o conjunto singular de folheações unidimensionais sobre espaços projetivos complexos de dimensão n, denotados aqui por $\mathbb{P}^n$. Este espaço pode ser visto, intuitivamente, como o conjunto de retas que passam pela origem de $\mathbb{C}^{n+1}$. Este estudo tem origem no estudo de espaços de folheações e possui importância no campo da geometria complexa. Como objetivo principal iremos chamar atenção para o problema de determinação de folheações holomorfas unidimensionais em espaços projetivos complexos pelo seu conjunto singular.

Folheações unidimensionais, $\mathcal{F}$, sobre variedades complexas são induzidas por campos polinomiais de vetores, $v = \sum_{j=1}^{n} v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, definidos sobre esta mesma variedade e que podem ser vistos como seções globais de fibrados holomorfos. Por outro lado, ao campo v, podemos associar uma equação diferencial ordinária cujas soluções definem as trajetórias de v. Neste sentido, as folhas de uma folheação holomorfa unidimensional são induzidas por estas trajetórias. Quanto ao conjunto singular de $\mathcal{F}$, temos que este é dado pelo conjunto dos pontos em $\mathbb{P}^n$ tais que o campo v, que induz $\mathcal{F}$, se anula. Isto é

$$Sing(\mathcal{F}) = \{p \in \mathbb{P}^n \text{ tais que } v(p) = 0\}.$$

O que demonstraremos nesta dissertação é que não existem folheações holomorfas unidimensionais distintas, de grau $d > 1$, sobre $\mathbb{P}^n$, com mesmo conjunto singular. Em outras palavras, uma folheação unidimensional, projetiva, de grau $d > 1$, é unicamente determinada por seu conjunto singular.

Para desenvolver nosso trabalho, nos apoiamos nos trabalhos de Gómez-Mont e Kempf, os quais levantaram a questão de nosso interesse. Em [12], estes autores estudaram as propriedades de estabilidade no sentido de Munford da ação do grupo de automorfismos $PGL(n)$ sobre o espaço de folheações holomorfas não-degeneradas, de grau fixado d em $\mathbb{P}^n$. Eles provaram que se $d > 0$, então a folheação é determinada pelo seu conjunto singular. Isto é, fixado $d > 0$, não existem duas folheações projetivas distintas com o mesmo conjunto singular. Para folheações por curvas sobre variedades compactas e *Kähler* de dimensão $n \geq 2$, o problema de determinação de folheações pelo conjunto singular proposto por Gómez-Mont e Kempf foi resolvido por Campillo e Olivares em [4] e [5], porém sem a hipótese do conjunto singular ser não-degenerado. Nesta dissertação vamos estudar e demonstrar o seguinte teorema de Gómez- Mont e Kempf:

Teorema: *Seja $\mathcal{F}_s$ uma folheação unidimensional sobre $\mathbb{P}^n$, de grau $d > 1$, induzida por $s \in H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k))$, com $k > 0$. Se $s' \in H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k))$ é tal que $Sing(s') \supset Sing(s)$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que*

$$s' = \lambda s.$$

Isto é, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s'}$.

A fim de estudar e demonstrar o resultado desejado, esta dissertação conta com três capítulos. No Capítulo 1, daremos as definições e resultados preliminares necessários ao desenvolvimento da dissertação. Os conceitos nele presentes, nos darão os ambientes sobre os quais trabalharemos tais como fibrados holomorfos, feixes localmente livres, entre outros conceitos, nos permitindo um melhor entendimento das discussões futuras.

No capítulo 2, nosso foco são as folheações holomorfas. Nele, iremos definí-las e apresentar resultados concernentes a esta teoria que darão base para prosseguirmos com nosso objetivo. Um dos resultados relevantes que veremos neste capítulo é a proposição que diz que uma folheação holomorfa unidimensional sobre uma variedade complexa M é induzida por um campo polinomial de vetores.

Em seguida, no Capítulo 3, enunciaremos e provaremos o teorema de Gómez-Mont e Kempf de determinação de folheações projetivas unidimensionais por seu conjunto singular. Usaremos conceitos de fibrados holomorfos e feixes localmente livres bem como anulamentos de certos grupos de cohomologia de Čech para mostrarmos o desejado.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, trataremos dos conceitos preliminares necessários para desenvolvimento desta dissertação. Começamos abordando conceitos básicos da análise complexa em várias variáveis.

Prosseguindo, abordaremos a teoria de *Variedades Complexas* que nos será de grande importância tendo em vista que estas formam nosso ambiente de trabalho. Faremos um estudo dos *Fibrados Vetoriais*, sua caracterização e construção, bem como a obtenção de novos fibrados como fibrado dual, soma direta de fibrados, produto tensorial, produto exterior, pullback e subfibrados. Os conceitos concernentes aos fibrados vetoriais serão amplamente utilizados nos capítulos 2 e 3.

Exploraremos um pouco a *Teoria de Feixes*, enfatizando a correspondência entre *Feixes Localmente Livres* e *Fibrados Vetoriais Holomorfos.* Adentraremos também em alguns conceitos referentes a *Esquemas.* Passaremos ao estudo de alguns conceitos da teoria de *Cohomologia de Čech*, onde mostraremos a construção dos seus grupos e suas sequências exatas longas.

Finalizamos o capítulo apresentando o *Complexo Koszul* de uma sequência regular de funções holomorfas.

1.1 Funções Holomorfas de Várias Variáveis

1.1.1 Funções Holomorfas

Nesta seção introduziremos a noção de função holomorfa em várias variáveis complexas e estudaremos as suas propriedades básicas. A finalidade maior desta seção é dar ao leitor deste trabalho o suporte necessário ao entendimento das funções holomorfas bem como suas propriedades e resultados, tendo em vista que as mesmas serão citadas no decorrer deste texto.

Definição 1.1 *Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto aberto e $f : U \to \mathbb{C}^m$ uma aplicação. Dizemos que f é* ***diferenciável*** *no ponto $p \in U$, no sentido complexo, se existe uma aplicação $\mathbb{C}$-linear $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ tal que*

$$f(z) = f(p) + L(z-p) + \rho(z)$$

onde $\lim_{z \to p} \left(\frac{\rho(z)}{\|z-p\|} \right) = 0$.

Analogamente ao caso real em várias variáveis, a aplicação linear L é única e é denominada **diferencial de f em p**. Desta forma, denotamos $L = df(p)$.

Com base na definição acima, podemos passar a uma definição mais ampla acerca das aplicações diferenciáveis sob o ponto de vista complexo. Tal definição concerne ao estudo de funções holomorfas e segue na definição abaixo:

Definição 1.2 *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto aberto. Dizemos que uma aplicação $f : U \to \mathbb{C}^m$ é* ***holomorfa no ponto*** *$p \in U$ se esta é diferenciável em todo ponto de uma vizinhança de p. Diremos que f é* ***holomorfa*** *em U se esta for holomorfa para todo ponto de U.*

Definição 1.3 *Definimos o* ***polidisco*** *de centro $p \in \mathbb{C}^n$ e multi-raio $r \in \mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto: $\Delta(p; r) = \Delta(p; r_1, \ldots, r_n) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i - p_i| < r_i, 1 \leq i \leq n\}$.*

Definição 1.4 *Uma* ***série de potências*** *em $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ é uma soma da forma:*

$$\sum_{k_1=0,\ldots,k_n=0}^{\infty} \lambda_{k_1}(z_1 - p_1)^{k_1} \ldots \lambda_{k_n}(z_n - p_n)^{k_n},$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que a série de potências é *convergente* se existe um polidisco $\Delta(p;r) \subset \mathbb{C}^n$ tal que a série converge em cada ponto de $\Delta(p;r)$.

É interessante ressaltar que uma função holomorfa definida num subconjunto $U - V$, onde $V \subset U$ são polidiscos, pode ser estendida a U. Este fato nos é garantido pelo teorema que se segue.

Teorema 1.5 *(Teorema de Extensão de Hartogs). Sejam $U = \Delta(p;\, r)$ e $U' = \Delta(p;\, r')$ polidiscos com $r' < r$. Uma função holomorfa definida em $U - U'$ se estende para uma função holomorfa em U.*

Demonstração: Ver [11], página 7. $\square$

Definição 1.6 *Sejam $p \in U \subset \mathbb{C}^n$ e $f : U \to \mathbb{C}^m$ uma aplicação. Dizemos que f é* ***analítica em*** *$p = (p_1, \dots, p_n)$ se existe uma série de potências*

$$\sum_{k=0,\dots,k_n=0}^{\infty} \lambda_{k_1}(z_1 - p_1)^{k_1} \dots \lambda_{k_n}(z_n - p_n)^{k_n},$$

onde $\lambda_{k_i} \in \mathbb{C}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, que converge em um polidisco $\Delta(p;r) \subset \mathbb{C}^n$ e tal que

$$f = \sum_{k_1=0,\dots,k_n=0}^{\infty} \lambda_{k_1}(z_1 - p_1)^{k_1} \dots \lambda_{k_n}(z_n - p_n)^{k_n}$$

em $\Delta(p;r)$. Dizemos que $f : U \to \mathbb{C}^m$ é ***analítica*** *se esta é analítica em todo ponto de U.*

A série de potências assim definida é única e é denominada *série de Taylor de f em p.*

Lema 1.7 *Se f é analítica em $p \in \mathbb{C}^n$, então f é analítica em uma vizinhança de p.*

Demonstração: Consideremos $p = (p_1, \dots, p_n) \in U \subset \mathbb{C}^n$ e a aplicação $f : U \to \mathbb{C}^m$. Suponhamos que

$$f(p) = \sum_{k_1=0,\dots,k_n=0}^{\infty} \lambda_{k_1}(z_1 - p_1)^{k_1} \dots \lambda_{k_n}(z_n - p_n)^{k_n},$$

onde $i \in \{1, \dots, n\}$, em um polidisco $\Delta(p;r) \subset \mathbb{C}^n$.

Seja $q = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta(p;r)$. Provemos que f é analítica em q, para tanto considere $s_i > 0$ tal que

$$s_i + |q_i - p_i| < r_i, \quad (1 \le i \le n).$$

Então

$$(p_1 + s_1 + |q_1 - p_1|, \ldots, p_n + s_n + |q_n - p_n|) \in \Delta(p; r).$$

Logo, a série converge absolutamente neste ponto. Isto é,

$$\sum \|\lambda_{1,\ldots,n}\| \cdot (s_1 + |q_1 - p_1|)^{k_1} \cdots (s_n + |q_n - p_n|)^{k_n}$$

é convergente. Desenvolvendo os binômios acima, segue que

$$\sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{0 \leq \alpha_i \leq k_i} \|\lambda_i\| \prod \binom{k_i}{\alpha_i} |q_i - p_i|^{k_i - \alpha_i} s_i^{\alpha_i},$$

onde $i \in \{1, \ldots, n\}$, é convergente.

Considere $z \in \Delta(q; s)$, então a série

$$\sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{0 \leq \alpha_i \leq k_i} \|\lambda_i\| \prod \binom{k_i}{\alpha_i} |q_i - p_i|^{k_i - \alpha_i} (z_i - q_i)^{\alpha_i},$$

onde $i \in \{1, \ldots, n\}$, converge absolutamente.

Observe que se realizarmos a soma primeiro em α_i para $i \in \{1, \ldots, n\}$ e depois em k_i para $i \in \{1, \ldots, n\}$, obtemos $f(z)$. Invertendo esta ordem de soma obtemos uma série de potências em q. Segue, então, que f é analítica em q e temos o resultado. $\square$

Uma observação importante a se fazer, é que se f é analítica em p, então f é diferenciável em p. Para formalizar esta observação, temos o seguinte corolário:

Proposição 1.8 *Se f é uma aplicação analítica em $p \in \mathbb{C}^n$, então f é holomorfa em p. Se $U \subset \mathbb{C}^n$ é aberto e $f : U \to \mathbb{C}^m$ é analítica, então f é holomorfa.*

Seria interessante verificarmos se é válida a recíproca para a proposição acima. Isto é, desejamos verificar se uma aplicação holomorfa é analítica.

Teorema 1.9 *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto e seja $f : U \to \mathbb{C}^m$ uma aplicação contínua. Suponhamos que f seja holomorfa em U. Então, f é analítica em U.*

Demonstração: Ver [22], páginas 10-11. $\square$

Comentário 1.10 *A composição de aplicações analíticas é analítica. Em verdade, a soma, o produto e o quociente de funções analíticas, onde definidas, são também funções analíticas.*

Definição 1.11 *Seja V um conjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ e seja X um subconjunto de V. Dizemos que X é um* ***conjunto analítico em*** *V* ***para todo ponto*** *$p \in V$ se para toda vizinhança U de p, existirem funções analíticas $f_1, \ldots, f_r$ definidas em U, tais que*

$$X \cap U = \{p \in U \ \textit{tais que} \ f_1(p) = \ldots = f_n(p) = 0\}.$$

1.1.2 Germes de Funções Holomorfas

Sejam M e N espaços topológicos e um ponto $p \in M$. Consideremos F a família de todas as aplicações definidas em alguma vizinhança de p e com valores em N. Isto é, consideremos F como sendo a família das aplicações do tipo $f_{U_p} : U_p \to N$, com U_p uma vizinhança de p. Em F definamos a seguinte relação de equivalência:

$$f_{U_p} \text{ é equivalente a } f_{V_p} \text{ se estas coincidem em alguma vizinhança de } p.$$

Definição 1.12 *As classes de equivalência definidas como acima, são denominadas **germes de aplicação em** p. A classe de equivalência que contém uma certa aplicação f, é chamada de **germe em** p **da aplicação** f.*

Duas aplicações terão o mesmo germe se, e somente se, elas coincidem em alguma vizinhança de p. Em particular, dizemos que elas terão o mesmo valor em p.

Definição 1.13 *O valor comum (em p) de todas as aplicações que pertencem a um mesmo germe é chamado **valor do germe**.*

Retornaremos ao conceito de germes de funções holomorfas na seção 1.2 após definirmos uma Variedade Complexa.

1.1.3 Funções Meromorfas

Informalmente, uma função meromorfa em várias variáveis complexas é, localmente, o quociente de duas funções holomorfas.

Definição 1.14 *Dizemos que uma função f é **meromorfa** num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ se, para cada $p \in U$, tivermos uma vizinhança aberta e conexa V_p de p e um par de funções holomorfas, f_p, g_p, com $g_p \neq 0$, definidas em V_p, tais que*

$$f = \frac{f_p}{g_p} \ \text{ em } V_p \text{ qualquer que seja o ponto } p \text{ de } U.$$

Além disso, devemos ter

$$\frac{f_p}{g_p} = \frac{f_q}{g_q} \text{ em } V_p \cap V_q.$$

Observação 1.15 *Se na vizinhança de um ponto $p \in U$ existem funções analíticas φ e ψ tais que $\varphi g_p = \psi f_p$ temos:*

1. *Se* $\psi(p) \neq 0$*, então* $f = \frac{f_p}{g_p}$ é analítica *em* p*;*

2. *Se* $\psi(p) \neq 0$ *e* $\varphi(p) = 0$*, então* p *é um zero de* f*;*

3. *Se* $\psi(p) = 0$ *e* $\varphi(p) \neq 0$*, então dizemos que* p *é um pólo de* f*.*

Se p *não for um ponto de analiticidade ou um pólo de* f*, então dizemos que* p *é um ponto de* ***indeterminação*** *de* f*.*

Teorema 1.16 *(Teorema de Extensão de Levi). Seja* $U \subset \mathbb{C}^n$ *um aberto e* f *uma função meromorfa definida em* $V \subset U$*, tal que* V *possua codimensão* ≥ 2*. Então,* f *pode ser estendida a uma função meromorfa em todo* U*.*

Demonstração: Ver [11], página 396. □

1.2 Variedades Complexas

Iniciaremos esta seção apresentando o conceito de Variedades Complexas. Após as definições iniciais, passaremos ao estudo do Espaço Tangente de uma variedade complexa em um ponto p desta variedade.

Definição 1.17 *Uma* ***Variedade Complexa*** *em* $\mathbb{C}^n$*, dimensão* n*, é um espaço topológico* M*, Hausdorff, com base enumerável e munido de uma estrutura analítica definida da seguinte forma: existem uma cobertura de* M*,* $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$*, com* Λ *um conjunto de índices e* U_γ *um subconjunto aberto de* M*, e homeomorfismos*

$$\varphi_\gamma : U_\gamma \to V_\gamma \subset \mathbb{C}^n,$$

onde V_γ *é um aberto, tais que dados dois abertos* $U_\alpha, U_\beta \in \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$*, com* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$*, teremos que*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

são aplicações holomorfas.

Para simplificarmos nossa notação, faremos $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta}$.

Definição 1.18 *Uma* ***carta local de dimensão*** n *é um homeomorfismo*

$$\varphi : U \subset M \to V \subset \mathbb{C}^n,$$

onde U *e* V *são abertos de* M *e* $\mathbb{C}^n$*, respectivamente.*

Definição 1.19 *Um* ***Atlas*** $\mathfrak{A}$ *de* M *é um conjunto de cartas* $\{(\varphi_\gamma, U_\gamma)\}_{\gamma\in\Lambda}$.

Dizemos que dois atlas, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, são equivalentes se $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ formar um atlas.

Dada uma variedade complexa M, podemos encontrar subconjuntos nesta variedade que possuam estrutura de subvariedade complexa. A definição a seguir nos informa quando um subconjunto de M possui tal estrutura.

Definição 1.20 *Seja* M *uma variedade complexa de dimensão* m. *Um subconjunto conexo,* $N\subset M$, *é uma* ***subvariedade*** *de dimensão* n *de* M *desde que, para cada* $x\in N$, *exista uma carta* $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}\in\mathfrak{A}$, *com* $\mathfrak{A}$ *o atlas de* M, *tal que* φ_α *seja um homeomorfismo entre* $U_\alpha\cap N$ *e um aberto de* $\mathbb{C}^m\times\{0\}\subset\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{m-n}\cong\mathbb{C}^m$.

Veremos agora a possibilidade de definirmos aplicações holomorfas entre Variedades Complexas.

Definição 1.21 *Dadas duas variedades complexas* M *e* N, *uma aplicação* $f: M\to N$ *é dita holomorfa se a composta* $\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha$ *for holomorfa, onde* φ_α *e* ψ_β *são as cartas locais em* M *e* N, *respectivamente.*

Antes de passarmos aos próximos resultados, vejamos exemplos de variedades complexas.

Exemplo 1.22 *O primeiro exemplo de variedade complexa que podemos citar é o espaço topológico* $n-$ *dimensional* $\mathbb{C}^n$. *Um atlas a ser considerado é* $\{\mathbb{C}^n, Id\}$.

Exemplo 1.23 *Outro exemplo importante a ser considerado neste trabalho é a variedade projetiva complexa n-dimensional denotada por* $\mathbb{P}^n$. *Esta variedade é definida pelo quociente de* $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ *pela seguinte relação de equivalência:*

Sejam $z, w\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$; *então* $z\sim w$ *se, e somente se, existe* $\lambda\in\mathbb{C}^*$ *tal que* $z=\lambda w$.

Definimos uma topologia para $\mathbb{P}^n$ *através da aplicação quociente*

$$\pi:\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^n$$

definida por $\pi(z)=[z]$. *Para cada* $[z]=[z_1:\ldots:z_{n+1}]\in\mathbb{P}^n$, *dizemos que* $z_1,\ldots,z_n$ *são suas coordenadas homogêneas. Munimos* $\mathbb{P}^n$ *da topologia quociente pela aplicação* π *de forma que* $U_\gamma\subset\mathbb{P}^n$ *é aberto se, e somente se,* $\pi^{-1}(U_\gamma)$ *é aberto em* $\mathbb{C}^{n+1}$. *Um atlas adotado para* $\mathbb{P}^n$ *é* $\{U_\gamma,\varphi_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, *com* $U_\gamma=\{[z]\in\mathbb{P}^n\,:\,z_\gamma\neq 0\}$ *e cada aplicação* $\varphi_\gamma: U_\gamma\to\mathbb{C}^n$ *é definida de maneira que*

$$\varphi_\gamma([z_1 : \ldots : z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_\gamma}, \ldots, \frac{\hat{z_\gamma}}{z_\gamma}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\gamma}\right).$$

Nas interseções $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, as aplicações de transição ficam definidas por

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}([z_0 : \ldots : z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_\alpha}, \ldots, \frac{1}{z_\alpha}, \ldots, \frac{z_{\alpha-1}}{z_\alpha}, \frac{z_{\alpha+1}}{z_\alpha}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha}\right).$$

De forma intuitiva podemos olhar $\mathbb{P}^n$ como um conjunto de retas que passam pela origem de $\mathbb{C}^{n+1}$.

O próximo conceito abordado nos dará suporte para a definição posterior.

Definição 1.24 *Seja R um anel. R é dito um **anel local** se possui um único ideal maximal.*

Definição 1.25 *Seja M uma variedade complexa e seja $p \in M$. O conjunto dos germes em p de funções analíticas definidas numa vizinhança deste ponto é denotado por $\mathcal{O}_{M,p}$ e denominado **anel local de M em p**.*

Neste caso, o único ideal maximal de $\mathcal{O}_{M,p}$ é gerado por todos os germes de funções analíticas que se anulam em p.

Teorema 1.26 *$\mathcal{O}_{M,p}$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra comutativa, com unidade, sem divisores de zero e com um único ideal maximal.*

Demonstração: Ver [22], página 22. □

Passaremos agora às definições concernentes ao Espaço Tangente a uma Variedade Complexa, uma vez que tal conceito é de grande relevância no estudo de variedades e além disso será mencionado neste trabalho.

Uma variedade complexa M de dimensão n pode ser vista como uma variedade real de dimensão $2n$ e de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Portanto, dado um ponto $p \in M$, tomemos $\{U_\gamma, \varphi_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma carta em torno de p, onde tal carta pertence ao atlas analítico de M e obteremos as seguintes coordenadas

$$\begin{aligned}
\varphi_\gamma(p) &= ((x_1(p), y_1(p)), \ldots, (x_n(p), y_n(p))) \\
&= (x_1(p) + iy_1(p), \ldots, x_n(p) + iy_n(p)) \\
&= (z_1(p), \ldots, z_n(p)), p \in U_\gamma.
\end{aligned}$$

Consideremos o espaço vetorial das funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ sobre M, digamos $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Dizemos que $v : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma **derivação** se satisfaz as seguintes propriedades:

1. v é $\mathbb{R}$-linear.
2. $v(fg)(p) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$

Observe que se $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi_\gamma^{-1})}{\partial x_i}(\varphi_\gamma(p))$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi_\gamma^{-1})}{\partial y_i}(\varphi_\gamma(p)),$$

com $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definamos as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p),\ \frac{\partial f}{\partial y_i}(p)\right) & : \ \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \frac{\partial f}{\partial y_i}(p) \end{array}$$

como vetores tangentes a M em p. Agora, consideremos o conjunto

$$\beta = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial y_1}(p) \right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}(p), \frac{\partial}{\partial y_n}(p) \right) \right).$$

Logo, podemos definir:

Definição 1.27 *O **espaço real tangente a** M **em um ponto** p, denotado por T_pM, é o espaço vetorial das funções v como definidas aqui. E mais, β é uma base para T_pM.*

Consideremos o espaço complexificado de T_pM, definido por

$$T_pM \otimes \mathbb{C} = (T_pM)^{\mathbb{C}}.$$

Por meio da carta φ_γ escolheremos para $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ a base

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1}(p), \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}(p) \right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n}(p), \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}(p) \right) \right),$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}(p) \right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}(p) \right),$$

para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

1.3 Fibrados Vetorias

Nesta seção trataremos dos Fibrados Vetorias sobre uma dada variedade complexa M, conceito este que, frequentemente, será usado neste trabalho. Além das definições e resultados preliminares concernentes a este assunto consideraremos, em particular, alguns fibrados vetorias sobre $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.28 *Seja M um espaço topológico. Um **fibrado vetorial** de posto k sobre M é um espaço topológico E junto com uma projeção contínua $\pi : E \to M$ satisfazendo:*

1. *$\pi^{-1}(x) := E_x$ possui estrutura de espaço vetorial k-dimensional sobre $\mathbb{C}$, para todo $x \in M$.*
2. *Existem uma cobertura por abertos de M a qual denotaremos por $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ e homeomorfismos $\varphi_\gamma : \pi^{-1}(U_\gamma) \to U_\gamma \times \mathbb{C}^k$, tais que para todo $\gamma \in \Lambda$ e todo $x \in U_\gamma$ as aplicações:*
$$\varphi_\gamma : E_x \to \{x\} \times \mathbb{C}^k \cong \mathbb{C}^k$$
são isomorfismos entre espaços vetorias.

Equivalentemente à condição 2 da Definição 1.28, podemos dizer que para cada $\gamma \in \Lambda$ existem difeomorfismos φ_γ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\gamma) \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & U_\gamma \times \mathbb{C}^k \arrow[d, "p_1"] \\
& U_\gamma
\end{tikzcd}$$

seja comutativo.

Observação 1.29 *p_1 é a projeção canônica na primeira coordenada.*

Definição 1.30 *Para cada $x \in M$, denominamos $\pi^{-1}(x) = E_x$ como a **fibra** do fibrado E sobre x.*

Deste momento em diante designaremos pela terna $\eta = (E, \pi, M)$ o fibrado vetorial com espaço total E, projeção π e base M. As aplicações φ_γ serão denominadas **trivializações locais** do fibrado E.

Definição 1.31 *Sejam $\eta = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial de posto k, $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma cobertura trivializadora e $\{\varphi_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ trivializações locais de E. Sejam U_α e U_β abertos nesta cobertura tais que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Para cada $x \in U_{\alpha\beta}$, definamos*

$$\varphi_{\alpha x}, \varphi_{\beta x} : E_x \to \mathbb{C}^k$$

isomorfismos lineares, logo

$$\varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1} \in Gl_k(\mathbb{C}).$$

Munidos destas informações, podemos definir aplicações

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_{\alpha\beta} & : & U_{\alpha\beta} & \to & Gl_k(\mathbb{C}) \\ & & x & \mapsto & \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1} = \varphi_{\alpha\beta x} \end{array}.$$

Estas aplicações são denominadas ***funções de transição*** *do fibrado E.*

Proposição 1.32 *As funções de transição $\varphi_{\alpha\beta}$ definidas acima satisfazem as seguintes condições:*

$$\varphi_{\alpha\beta}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha} \;\; em \;\; U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$$

e

$$\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = Id \;\; em \;\; U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset.$$

Tais condições são denominadas ***condições de cociclo****.*

Demonstração: De fato, como temos $\varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1}$, então

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha\beta}(x))^{-1} &= (\varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1})^{-1} \\ &= \varphi_{\beta x} \circ \varphi_{\alpha x}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}(x) \\ &= \varphi_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha})(x) &= \varphi_{\alpha\beta}(x) \circ \varphi_{\beta\gamma}(x) \circ \varphi_{\gamma\alpha}(x) \\ &= \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1} \circ \varphi_{\beta x} \circ \varphi_{\gamma x}^{-1} \circ \varphi_{\gamma x} \circ \varphi_{\alpha x}^{-1} \qquad (1.1) \end{aligned}$$

De (1.1), vemos que $(\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha})(x) = Id$, em $U_{\alpha\beta\gamma}$. □

O resultado a seguir nos garante que é possível construirmos um fibrado vetorial partindo da existência de uma família de funções que satisfazem as condições de cociclo. Então, um fibrado vetorial é determinado, a menos de isomorfismo, por suas funções de transição.

Proposição 1.33 *Seja M uma variedade complexa e $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma cobertura por abertos de M. Consideremos a coleção de aplicações $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to Gl_r(\mathbb{C})$ satisfazendo as condições de cociclo. Consideremos, também, o espaço topológico*

$$\mathcal{F} := \coprod_{\gamma\in\Lambda} (U_\gamma \times \mathbb{C}^r)$$

com a relação de equivalência:

$$(x,u) \sim (y,v) \Leftrightarrow x = y \;\; e \;\; \varphi_{\alpha\beta}(x)v = u.$$

Então $\mathcal{F}/\sim$ é um fibrado vetorial de posto k sobre M, único a menos de isomorfismos e com funções de transição $\varphi_{\alpha\beta}$.

Demonstração: Definamos a projeção contínua:

$$\begin{aligned} p \quad : \quad E = \mathcal{F}/\sim &\to M \\ [(x,v)] &\mapsto x \end{aligned}$$

Note que, $p^{-1}\{x\} = [(x,v)] \simeq \mathbb{C}^k$, logo cada fibra E_x possui estrutura de espaço vetorial k-dimensional sobre $\mathbb{C}^k$. Por outro lado,

$$p^{-1}(U_\alpha) \simeq (U_\alpha \times \mathbb{C}^k)/\sim = [U_\alpha, \mathbb{C}^k].$$

Daí, definamos

$$\begin{array}{cccc} \psi_\alpha & : & p^{-1}(U_\alpha) & \to & (U_\alpha \times \mathbb{C}^k) \\ & & [x,u] & \mapsto & (x,u) \end{array}$$

A aplicação ψ_α definida é um isomomorfismo, pois é um homomorfismo injetor já que temos que

$$(x_1,u_1) = (x_2,u_2) \Rightarrow [x_1,u_1] = [x_2,u_2].$$

Temos que ψ_α é também sobrejetora uma vez que dado (y,v) em $U_\alpha \times \mathbb{C}^k$, com $y \in U_\alpha$, podemos defnir

$$\begin{array}{ccccc} \psi_{\alpha y} & : & E_y = p^{-1}(y) & \to & \{y\} \times \mathbb{C}^k \\ & & [y,v] & \mapsto & (y,v) \end{array}$$

Assim o quociente definido possui, de fato, estrutura de espaço vetorial. $\square$

Abaixo, um exemplo de fibrado vetorial a fim de ilustrar um pouco do que dissemos até aqui.

Exemplo 1.34 *O fibrado trivial de posto k sobre M, denotado por $\underline{\mathbb{C}^k}$ é definido por*

$$M \times \mathbb{C}^k := \underline{\mathbb{C}^k}.$$

De fato, definamos

$$\begin{array}{ccccc} \pi & : & \underline{\mathbb{C}^k} & \to & M \\ & & (p,v) & \mapsto & p \end{array}$$

Como para cada $U_\alpha \subset M$, temos $\pi^{-1}(U_\alpha)$ homeomorfo a $U_\alpha \times \mathbb{C}^k$. Sendo assim, definamos

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \pi^{-1}(U_\alpha) & \rightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^k \\ & & (x,y) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

Claramente, φ é um difeomorfismo que satisfaz $(p_1 \circ \varphi)(x,y) = x = \pi(x,y)$, onde p_1 é a projeção canônca na primeira coordenada.

Definição 1.35 *Uma* ***seção*** *de um fibrado $\eta = (E, \pi, M)$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^\infty$*

$$s : M \rightarrow E$$

tal que $\pi \circ s = Id_M$, ou seja, $s(x) \in E_x$ para todo $x \in M$.

Observamos que localmente toda seção é o gráfico de alguma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. De fato, se temos

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \pi^{-1}(U_\alpha) & \rightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \\ & & x & \mapsto & (\pi(x), \varphi_\alpha \circ \pi^{-1}(x)) \end{array}$$

e s uma seção do fibrado η, segue que

$$(\varphi_\alpha \circ s)|_{U_\alpha}(x) = (x, s_\alpha(x))$$

Exemplo 1.36 *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}^k)$, então a aplicação gráfico*

$$\begin{array}{rccc} s & : & M & \rightarrow & \underline{\mathbb{C}^k} \simeq M \times \mathbb{C}^k \\ & & x & \mapsto & s(x) = (x, f(x)) \end{array}$$

é uma seção do fibrado trivial.

Exploraremos de forma breve, conceitos tais como aplicações entre fibrados e operações com os mesmos. Este último item mencionado nos permitirá verificar de que formas podemos obter novos fibrados a partir de fibrados pré-existentes.

Definição 1.37 *Sejam $\eta = (E, \pi_\eta, M)$ e $\zeta = (F, \pi_\zeta, M)$ fibrados vetoriais de posto k e r, respectivamente, sobre uma variedade complexa M. Um* ***morfismo*** *entre estes fibrados, digamos $\varphi : E \rightarrow F$ é uma aplicação contínua tal que*

$$\varphi(E_x) \subset (F_x) \;\; e \;\; \varphi|E_x : E_x \rightarrow F_x \text{ é linear}, \;\; \text{para todo } x \in M.$$

Caso φ seja bijetora e φ^{-1} um morfismo, dizemos que φ será um isomorfismo entre os fibrados em questão.

Observação 1.38 *É possível mostrar, porém não o faremos aqui, que se $\psi : E \to F$ é um morfismo de fibrados, então existe uma cobertura trivializadora $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ comum a E e F e uma coleção de aplicações $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ contínuas satisfazendo a relação*

$$\theta_{\alpha\beta} \cdot a_\beta = a_\alpha \cdot \varphi_{\alpha\beta}.$$

As aplicações $\varphi_{\alpha\beta}$ e $\theta_{\alpha\beta}$ são as funções de transição de E e F, respectivamente. De forma recíproca, se E e F são fibrados de posto k e r, respectivamente, sobre uma mesma base M para os quais existem uma cobertura trivializadora $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ comum e uma coleção $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ de aplicações, como dito nesta observação, então existe um morfismo entre estes fibrados

$$\psi : E \to F.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11].

É possível obtermos fibrados vetoriais a partir de outros pré-existentes. Isto se dará através de operações sobre espaços vetorias como soma direta, produto tensorial, entre outras que mostraremos a seguir. Como as fibras de um fibrado vetorial possuem estrutura de espaço vetorial, as operações realizadas nas fibras induzirão estas mesmas operações nos respectivos fibrados:

1. **Soma Direta**

   O fibrado resultante desta operação é o fibrado $E \oplus F$ tal que suas fibras sobre cada $x \in M$ serão dadas por
   $$(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x.$$

   Suas funções de transição serão dadas por

   $$g_{\alpha\beta}(x) := (j_{\alpha\beta} \oplus h_{\alpha\beta})(x) \in Gl_{k+l}(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l).$$

   Observe que a dimensão do fibrado resultante será $k + l$.

2. **Produto Tensorial**

   O fibrado resultante desta operação é o fibrado $E \otimes F$ cujas fibras sobre cada $x \in M$ serão dadas por

   $$(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x.$$

   Suas funções de transição ficarão da seguinte maneira:

   $$g_{\alpha\beta}(x) := (j_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta})(x) \in Gl_{k+l}(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l).$$

   Já a dimensão do fibrado resultante será $k \cdot l$.

3. **Produto Exterior**

   O q-ésimo produto exterior do fibrado E de posto r, é o fibrado $\bigwedge^r E$ e possui como funções de transição

$$(\bigwedge^q E)_{IJ} = \sum_{\sigma} \epsilon_\sigma a_{i_1 j_{\sigma(1)}} \dots a_{i_q j_{\sigma(q)}},$$

   onde

$$I = (i_1, \dots, i_q), 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_q \leq r$$

   e

$$J = (j_1, \dots, j_q), 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q \leq r,$$

   são multi-índices, a soma é sobre todas as permutações σ de $\{1, \dots, q\}$ e ϵ é o sinal da permutação σ. A dimensão do novo fibrado obtido após a operação será $\binom{r}{q}$.

4. **Fibrado Dual**

   Seja $\eta = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial de posto r, cujas funções de transição são $g_{\alpha\beta}$. O fibrado dual a $\eta = (E, \pi, M)$ é dado pela união das fibras duais das fibras E_x, isto é

$$E^* := \bigcup_{x \in M} E_x^*.$$

   As funções de transição do fibrado dual serão dadas por $j_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^T)^{-1}$.

5. **Pull-Back**

   Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades complexas e $\eta = (E, \pi, N)$ um fibrado de posto k sobre N cujas funcões de transição são $g_{\alpha\beta}$. A aplicação f induz sobre M um fibrado de posto k que representaremos por $f^{-1}E$ denominado fibrado **pull-back** de E. Explicitamente temos

$$f^*E = \{(x, e) \in M \times E; f(x) = \pi(e)\}.$$

   Este é o único subconjunto maximal de $M \times E$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(f^*E) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

   comuta.

Se E for o fibrado trivial, ou seja, se tivermos $E = N \times \mathbb{C}^n$, então teremos

$$f^*E = \{(x,(y,v)) : \ f(x) = \pi(y,v) = y\} \simeq \{(x,v) : \ x \in M \text{ e } v \in \mathbb{C}^n\} \simeq M \times \mathbb{C}^n.$$

Logo, utilizando as trivializações de E, concluímos que as fibras de f^*E sobre x são isomorfas às fibras de E sobre $f(x)$. Já as funções de transição do fibrado f^*E são dadas pela composição $(g_{\alpha\beta} \circ f)$.

6. **Subfibrados**

   Seja $\eta = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial. Um **subfibrado** de E consiste em um subconjunto $F \subset E$ tal que a projeção π e as trivializações locais de E conferem a F uma estrutura de fibrado vetorial. As fibras de F, digamos F_x, são subespaços vetoriais das fibras de E, E_x.

A partir de agora, faremos menção a um dos mais importantes exemplos da teoria de fibrados vetoriais: o Fibrado Tangente a uma variedade M. Após fazermos um estudo destes fibrados sobre uma variedade real M, mostraremos o processo de complexificação destes, ou seja, mostraremos como são caracterizados os fibrados tangentes a variedades complexas.

1.3.1 Fibrado Tangente a uma Variedade

Seja M uma variedade real. O **Fibrado Tangente** à M, denotado por TM, é dado pela união

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Como já mencionamos na seção anterior, um vetor tangente a M em um ponto p está relacionado a um vetor de $\mathbb{R}^{2n}$ logo, numa vizinhança U_α de p, teremos

$$TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM = \{(p, v_\alpha) : p \in U_\alpha, v_\alpha \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

Assim, concluímos que TU_α possui estrutura de um produto $U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$ e portanto podemos escrever

$$TM = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} TU_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}.$$

Segue então que se U_α e U_β são abertos em M tais que $p \in U_{\alpha\beta}$, teremos que $(p, v_\alpha) = (p, v_\beta)$ em TM se, e somente se $v_\alpha = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p))v_\beta$.

Concluímos então que TM é uma variedade real obtida pela colagem dos produtos $U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$.

As funções de transição do fibrado TM são dadas por:

$$\phi_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})).$$

Pela regra da cadeia, temos que as funções de transição acima definidas satisfazem as condições de cociclo. Agora, notemos que as projeções

$$\pi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n} \to U_\alpha \text{ e } \pi_\beta : U_\beta \times \mathbb{R}^{2n} \to U_\beta$$

coincidem na intersecção $U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n} \cap U_\beta \times \mathbb{R}^{2n}$. Logo, podemos definir a projeção

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & TM & \to & M \\ & & (p, v_\alpha) & \mapsto & p \end{array}$$

obtida pela colagem das projeções π_α e π_β.

Como foi definido na seção 1.2, denotamos por $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ o espaço vetorial complexificado do espaço tangente à variedade M no ponto p. Definamos para cada ponto $p \in M$, os seguintes subespaços vetoriais

$$T'_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_1}(p) \right\rangle \subset (T_pM)^{\mathbb{C}}$$

e

$$T''_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}(p) \right\rangle \subset (T_pM)^{\mathbb{C}}$$

como o *espaço tangente holomorfo a M em p* e o *espaço tangente anti-holomorfo a M em p*, respectivamente.

Repare que $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$(T_pM)^{\mathbb{C}} = T'_pM \oplus T''_pM \text{ para cada } p \in M.$$

Desta forma, obtemos que

$$TM^{\mathbb{C}} = T'M \oplus T''M,$$

ou seja, o Fibrado Tangente a M, em sua forma complexificada, pode ser obtido como uma soma direta dos fibrados tangente a M holomorfo e anti-holomorfo.

1.3.2 Fibrados associados à Hipersuperfícies Analíticas

Aqui mostraremos como a cada hipersuperfície analítica podemos associar um fibrado holomorfo em retas, ou seja, fibrados de posto 1.

Seja V uma hipersuperfície sobre uma variedade complexa compacta M, definida por

$$V = \{f_\gamma = 0\}, \text{ onde } f_\gamma : U_\gamma \to \mathbb{C}, \ \gamma \in \Lambda.$$

Considere uma cobertura de M definida pelos subconjuntos $\{U_\gamma\}$. Sejam $U_\alpha, U_\beta \in \{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ tais que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Nesta interseção, está definida uma função holomorfa $\varphi_{\alpha\beta}$, não nula para algum ponto $p \in U_{\alpha\beta}$, tal que

$$f_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} \circ f_\beta.$$

Repare que se $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, então

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} &= f_\alpha \circ f_\beta^{-1} \circ f_\beta \circ f_\alpha^{-1} \\ &= Id \text{ em } U_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha} \\ &\quad = f_\alpha \circ f_\beta^{-1} \circ f_\beta \circ f_\gamma^{-1} \circ f_\gamma \circ f_\alpha^{-1} \\ &\quad = Id \end{aligned}$$

em $U_{\alpha\beta\gamma}$.

O que acabamos de verificar é que as funções definidas nas interseções não vazias dos abertos da cobertura $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ satisfazem as condições de cociclo. Associaremos à hipersuperfície V o fibrado holomorfo, em retas sobre M cujas funções de transição são definidas por:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$$

e o denotaremos por $\mathcal{O}(V)$.

Suponhamos que V seja determinada por outras funções analíticas $g_\gamma : U_\gamma \to \mathbb{C}$. Isto é, suponhamos que $V = \{g_\gamma = 0\}$. Assim, definiremos as seguintes funções holomorfas não nulas

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{g_\alpha}{g_\beta}.$$

A partir destas novas funções, teremos um novo fibrado sobre V, que denotaremos por $\mathcal{O}'(V)$. Mas, como

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{g_\alpha}{g_\beta} = \frac{f_\alpha\left(\frac{f_\beta}{g_\beta}\right)}{f_\beta\left(\frac{f_\alpha}{g_\alpha}\right)} = \varphi_{\alpha\beta}\frac{\dfrac{f_\beta}{g_\beta}}{\dfrac{f_\alpha}{g_\alpha}}$$

temos as seguintes relações:

$$\frac{f_\alpha}{g_\alpha}\psi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}\frac{f_\beta}{g_\beta}.$$

Sendo assim, o fibrado $\mathcal{O}'(V)$ é isomorfo ao fibrado $\mathcal{O}(V)$ e isto significa que à uma hipersuperfície V está associado um único fibrado em retas, a menos de isomorfismo.

1.3.3 Fibrado Tautológico e Fibrado Hiperplano

Faremos um breve estudo sobre alguns fibrados induzidos sobre a espaços projetivos complexos, $\mathbb{P}^n$. Falaremos acerca do fibrado tautológico e seu dual, o chamado fibrado hiperplano.

Tomemos o fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}^{n+1} = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Definimos como **fibrado tautológico** o subfibrado de posto 1 de $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}$, e denotamos por $\mathcal{O}(-1)$, o seguinte conjunto

$$\mathcal{O}(-1) = \{([w], z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}; \text{existe } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } z = \lambda w\}.$$

Considerando-se um aberto U_γ sobre $\mathbb{P}^n$ tal que $U_\gamma = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_\gamma : \ldots : z_n),\ z_\gamma \neq 0\}$, teremos que

$$\mathcal{O}(-1)|_{U_\gamma} = \{((z_0 : z_1 : \ldots : z_\gamma : \ldots : z_n),\ \lambda(z_0 : z_1 : \ldots : z_\gamma : \ldots : z_n); \lambda \in \mathbb{C})\}.$$

As aplicações de transição do fibrado tautológico são dadas da seguinte maneira:

$$U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C} \xleftarrow{\theta\alpha} \mathcal{O}(-1)|_{U_\gamma} \xrightarrow{\theta\beta} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}$$

$$([z], t) \longmapsto ([z], \theta_{\alpha\beta}([z])t)$$

Além disso, na intersecção $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ temos que

$$\left(\frac{z_0}{z_\beta} : \ldots : \frac{z_\alpha}{z_\beta} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{z_n}{z_\beta}\right) = \frac{z_\alpha}{z_\beta}\left(\frac{z_0}{z_\alpha} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{z_\beta}{z_\alpha} : \ldots : \frac{z_n}{z_\alpha}\right)$$

Portanto, temos que $\theta_{\alpha\beta} = \dfrac{z_\alpha}{z_\beta}$.

O fibrado dual ao fibrado tautológico é chamado de **Fibrado Hiperplano** e o denotaremos por $\mathcal{O}(1)$. Exploremos um pouco sobre o fibrado Hiperplano.

Seja H um hiperplano em $\mathbb{P}^n$, ou seja, temos $H = \{p(z) = 0\}$, onde $p : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ é um polinômio homogêneo de grau 1 com $p(0) = 0$. Por uma mudança linear de coordenadas, se necessária, suponhamos que $H = \{z_0 = 0\}$, isto é, suponhamos que $p(z) = z_0$.

No aberto $U_\alpha = \{(z_0 : \ldots : z_\alpha : \ldots : z_n); z_\alpha \neq 0\}$, podemos definir o hiperplano H da seguinte forma

$$H = \left\{ f_\alpha = \frac{z_0}{z_\alpha} = 0 \right\}.$$

O fibrado associado ao hiperplano H é definido pelas funções de transição:

$$\varphi_{\alpha\beta} := \frac{f_\alpha}{f_\beta} = \frac{z_\beta}{z_\alpha}.$$

Tal fibrado é conhecido **como fibrado hiperplano de** $\mathbb{P}^n$. Repare que $\varphi_{\alpha\beta} = \left(\dfrac{z_\alpha}{z_\beta}\right)^{-1} = \theta_{\alpha\beta}^{-1}$, ou seja, o fibrado hiperplano é, de fato, dual ao fibrado tautológico e daí o denotaremos por $\mathcal{O}(1)$.

A partir do fibrado hiperplano de $\mathbb{P}^n$ é possível obtermos outos fibrados de posto 1 sobre esta variedade. Vejamos como se dá a construção destes novos fibrados.

Dado $k \in \mathbb{Z}$, podemos definir o fibrado $\mathcal{O}(k)$ da seguinte maneira:

1. Se $k \geq 0$
$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k} = \underbrace{\mathcal{O}(1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{O}(1)}_{k-\text{vezes}}$$
2. Se $k < 0$
$$\mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k} = \underbrace{\mathcal{O}(-1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{O}(-1)}_{k-\text{vezes}}$$

Consideremos $p : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ um polinômio homogêneo de grau $d > 0$. Nas coordenadas do aberto U_α, consideremos o conjunto $D = p^{-1}(0) \subset \mathbb{P}^n$ da seguinte forma

$$p\left(\frac{z_0}{z_\alpha} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{z_\beta}{z_\alpha} : \ldots : \frac{z_n}{z_\alpha}\right) = \frac{1}{z_\alpha^k} p(z_0 : \ldots : z_\alpha : \ldots : z_\beta : \ldots : z_n) = 0.$$

Em U_β, teremos

$$p\left(\frac{z_0}{z_\beta} : \ldots : \frac{z_\alpha}{z_\beta} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{z_n}{z_\beta}\right) = \frac{1}{z_\beta^k} p(z_0 : \ldots : z_\alpha : \ldots : z_\beta : \ldots : z_n) = 0.$$

As funções de transição que determinam o fibrado $\mathcal{O}(k)$ são da forma

$$\frac{\frac{p}{z_\alpha^k}}{\frac{p}{z_\beta^k}} = \left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)^k = (\varphi_{\alpha\beta})^k.$$

Sendo assim, o fibrado associado ao conjunto D é o fibrado $\mathcal{O}(k)$ definido acima. E mais, todo fibrado em retas sobre a variedade projetiva complexa $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a algum fibrado $\mathcal{O}(k)$.

1.4 Feixes de Grupos Abelianos

Nesta seção trataremos as definições e resultados concernentes à teoria de Feixes de Grupos Abelianos que são mais releventes ao nosso trabalho.

Definição 1.39 *Seja X um espaço topológico. Um* ***pré-feixe de grupos abelianos*** *em X, denotado aqui por $\mathscr{F}$, consiste de:*

1. *Para todo aberto $U \subset X$, associamos um grupo abeliano $\mathscr{F}(U)$;*
2. *Se $V \subseteq U$ são abertos de X, existe um homomorfismo de grupos abelianos denominado* ***mapa restrição*** *$\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ sujeito às seguintes condições:*
    - *$\mathscr{F}(\emptyset) = 0$;*
    - *$\rho_{U,U} = Id|_{\mathscr{F}(U)}$;*
    - *Se $W \subseteq V \subseteq U$ são abertos, então $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$.*

Se $\mathscr{F}$ é um pré-feixe, então nos referimos à $\mathscr{F}(U)$ como sendo o conjunto das seções de $\mathscr{F}$ em U.

Observação 1.40 *Para os próximos resultados, faremos uso da seguinte notação:*

$$\rho_{U,V}(s) = s|_V.$$

Definição 1.41 *Um pré-feixe é dito um* ***feixe*** *em X se são válidas as seguintes condições:*

1. *Se $U \subset X$ é aberto, $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de U e se $s \in \mathscr{F}(U)$ é tal que $s|_{V_\gamma} \equiv 0$, então $s \equiv 0$ em U.*
2. *Seja U um aberto com $U = \bigcup_{\gamma\in\Lambda} V_\gamma$. Se tivermos $s_\gamma \in \mathscr{F}(V_\gamma)$, para cada γ, satisfazendo que*
$$s_\gamma|_{V_\gamma \cap V_\alpha} \equiv s_\alpha|_{V_\gamma \cap V_\alpha},$$
então existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que
$$s|_{V_\gamma} \equiv s_\gamma.$$

Observação 1.42 *A condição 1 da Definição 1.41 implica na unicidade da seção $s \in \mathscr{F}(U)$ abordada na condição 2.*

Para ilustrar os conceitos até então mencionados, daremos alguns exemplos:

Exemplo 1.43 *Um primeiro exemplo de feixe a ser citado é o* conjunto das funções holomorfas *sobre uma variedade complexa* M *o qual denotamos por* $\mathcal{O}(M)$.

Exemplo 1.44 *Seja* X *um espaço topológico e* A *um grupo abeliano. Definimos o* feixe constante *denotado por* A, *em* X *da seguinte forma:*

Para cada $U \subset X$, *consideremos* $A(U) = \mathcal{C}(U, A)$ *o conjunto das funções contínuas em* A *tal que este seja munido da topologia discreta em* A. *Definamos*

$$A(U) = \bigoplus_{\gamma} A(U_\gamma),$$

onde $U = \bigcup U_\gamma$ *e cada* U_γ *é aberto e conexo.*

Antes de passarmos às próximas definições e resultados referentes a teoria de feixe, visitaremos alguns resultados sobre Limite Direto, conceito este que nos auxiliará no entendimento de algumas definições aqui presentes.

1.4.1 Limite Direto

Definição 1.45 *Seja* I *um conjunto munido de uma ordem parcial* $\leq$ *satisfazendo a propriedade de que para todo* $i, j \in I$, *existe* $k \in I$, *tal que* $i \leq k$ *e* $j \leq k$. *O conjunto* I *é chamado de* ***conjunto direto***.

Definição 1.46 *Seja* A_i *um grupo abeliano, para cada* $i \in I$ *e para cada* $i \leq j$ *consideremos um mapa*

$$\varphi_{i,j} : A_i \to A_j,$$

onde $\varphi_{i,i} = Id_{A_i}$ *e sempre que* $i \leq j \leq k$, *tenhamos* $\varphi_{i,k} = \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j}$. *O conjunto* $\{A_i, \varphi_{i,j}\}$ *é denominado* ***sistema direto de grupos***.

A partir destas definições, passemos à seguinte definição:

Definição 1.47 *O* ***limite direto***, $\varinjlim A_i = L$, *é o único grupo, a menos de isomorfismos, que satisfaz a seguinte propriedade universal:*

Existem aplicações $\varphi_i : A_i \to L$ *tais que* $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$ *para todo par* $i \leq j$ *e, se existir um outro grupo abeliano, digamos* C, *com mapas* $\tau_i : A_i \to C$ *tais que* $\tau_i = \tau_j \circ \varphi_{ij}$, *para cada* $i \leq j$, *então existe um único homomorfismo de grupos*

$$\tau : L \to C$$

com $\tau = \tau_i \circ \varphi_i^{-1}$.

Em outras palavras, o limite direto de um grupo abeliano A_i é o menor grupo abeliano tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & C \\
& A_i \arrow[ul, "\varphi_i"'] \arrow[ur, "\tau_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & \\
& A_j \arrow[uul, "\varphi_j"] \arrow[uur, "\tau_j"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Afirmação: O limite direto de qualquer sistema direto $\{A_i, \varphi_{i,j}\}$ de grupos abelianos sobre um conjunto parcialmente ordenado existe.

De fato, consideremos um sistema direto de grupos abelianos $\{A_i, \varphi_{i,j}\}$ e pares (A_i, a_i), onde a_i é um elemento de A_i. Definamos uma relação de equivalência, $\sim$, de forma que:

$$(A_i, a_i) \sim (A_j, a_j)$$

se existe $k \geq i, j$ tal que $\varphi_{i,k}(a_i) = \varphi_{j,k}(a_j)$. Segue da definição de limite direto que $\sim$ é, de fato, uma relação de equivalência sobre o conjunto dos pares (A_i, a_i).

Considere $G = \{[A_i, a_i] : (A_i, a_i) \sim (A_j, a_j)$ se existe $k \geq i, j$ tal que $\varphi_{i,k}(a_i) = \varphi_{j,k}(a_j)\}$ o conjunto destas classes de equivalência.

Definamos em G a seguinte operação:

$$[A_i, a_i] + [A_j, a_j] = [A_k, \varphi_{ik}(a_i) + \varphi_{jk}(a_j)],$$

onde $k \geq i, j$. Esta operação está bem definida em G. De fato, a operação independe da escolha de $k \geq i, j$. Sejam $k_1,\ k_2 \geq i,\ j$ e suponhamos que $k_1 > k_2$. Observe que desta ultima suposição temos que se $[A_{k_1},\ \varphi_{ik_1}(a_i) + \varphi_{jk_1}(a_j)] = [A_{k_2},\ \varphi_{ik_2}(a_i) + \varphi_{jk_2}(a_j)]$ e $k > k_1$, então $\varphi_{k_1k}(\varphi_{ik_1}(a_i)+\varphi_{jk_1}(a_j)) = \varphi_{ik}(a_i)+\varphi_{jk}(a_j) = \varphi_{k_2k}(\varphi_{ik_2}(a_i)+\varphi_{jk_2}(a_j))$. Além disso, é possível mostrar que se $[A_i, a_i] = [A_t, a_t]$ e $[A_j, a_j] = [A_s, a_s]$, então $[A_k, \varphi_{ik}(a_i) + \varphi_{jk}(a_j)] = [A_s, \varphi_{ts}(a_t) + \varphi_{ls}(a_l)]$. E mais, G é um grupo abeliano com esta operação.

Considere a aplicação $\sigma_i : A_i \to G$ definida por $\sigma_i(a_i) = [A_i, a_i]$. Temos que σ_i é um homomorfismo de grupos.

Além disso, temos que $\sigma_i = \sigma_j \circ \varphi_{ij}$ para todo par $i \leq j$. De fato

$$(\sigma_j \circ \varphi_{ij})(a) = \sigma_j \varphi_{ij}(a) = [A_j, \varphi_{ij}(a)] = [A_i, a] = \sigma_i(a).$$

Provemos que o grupo G é isomorfo ao limite direto de A_i, ou seja, vejamos que o grupo G como definido acima possui a mesma propriedade universal do limite direto bem como existe uma aplicação entre G e $\lim_{\longrightarrow} A_i$ a qual nos garanta que

$$G \cong \varinjlim A_i.$$

Suponhamos que B seja um grupo abeliano e que para cada i exista um homomorfismo $\tau_i : A_i \to B$ tal que $\tau_i = \tau_j \circ \varphi_{ij}$ para cada $i \leq j$. Definamos uma aplicação

$$\tau : G \to B,$$

por $\tau([A_i, a_i]) = \tau_i(a_i)$. Temos que τ está bem definida uma vez que se $[A_i, a_i] = [A_j, a_j]$, então existe k, com $i, j \leq k$ e $\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}(a_j)$ e daí teremos que

$$\tau_i(a_i) = \tau_k(\varphi_{ik}(a_i)) = \tau_k(\varphi_{jk}(a_j)) = \tau_j(a_j).$$

Além disso, τ é claramente um homomorfismo de grupos e satisfaz

$$\tau \circ \sigma_i(a) = \tau(\sigma_i(a)) = \tau([A_i, a_i]) = \tau_i(a) = \tau_i(a).$$

Finalmente, se $\tau' : G \to B$ é outra aplicação que satisfaz $\tau_i = \tau' \circ \sigma_i$, para cada i, então

$$\tau'(\sigma_i(a_i)) = \tau_i(a_i) = \tau([A_i, a]) = \tau(\sigma_i(a_i)) \Longrightarrow \tau' = \tau.$$

Segue que G satisfaz a propriedade universal do limite direto.

Com base nas discussões anteriores, enunciemos o seguinte resultado:

Lema 1.48 *Seja $L = \varinjlim A_i$ o limite direto de um sistema direto de grupos e considere a aplicação $\varphi_i : A_i \to L$.*

1. *Todo elemento de $\varinjlim A_i$ pode ser escrito na forma $\varphi_i(a)$, para algum $a \in A_i$.*
2. *Se $a \in A_i$ é tal que $\varphi_i(a) = 0$, então existe um $j \geq i$ com $\varphi_{ij}(a) = 0$.*

Finalizada nossa discussão acerca do limite direto de grupos abelianos, retornemos aos resultados da teoria de feixes. Passemos à seguinte definição:

Definição 1.49 *Sejam $\mathscr{F}$ um feixe sobre um espaço topológico X e p um ponto sobre este espaço. Definimos o* **talo de $\mathscr{F}$ em** *p como sendo o limite direto*

$$\varinjlim \mathscr{F}(U),$$

com $x \in U$. Denotamos o talo de $\mathscr{F}$ em p por $\mathscr{F}_p$.

Pela definição acima, temos que um elemento de $\mathscr{F}_p$ é representado por um par $\langle U, s\rangle$, onde U é uma vizinhança aberta de p e s um elemento de $\mathscr{F}(U)$. Dois pares $\langle U, s\rangle$ e $\langle V, t\rangle$ definem o mesmo elemento de $\mathscr{F}_p$ se, e somente se, existe uma vizinhança aberta de p, digamos W, com $W \subseteq U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$.

Desta forma, podemos dizer que um elemento do talo $\mathscr{F}_p$ são germes de seções de $\mathscr{F}$ no ponto p.

Exemplo 1.50 *Seja M uma variedade complexa. Temos que $\mathcal{O}_p(M)$ é o conjunto dos germes de funções holomorfas em p. Este conjunto é um talo do feixe das funções holomorfas $\mathcal{O}(M)$ sobre o ponto p.*

1.4.2 Morfismos entre feixes

A partir de agora trataremos das aplicações induzidas entre feixes e daremos alguns resultados relacionados a estas aplicações.

Definição 1.51 *Sejam $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ feixes em um espaço topológico X. Um morfismo entre estes feixes, $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, consiste de um homomorfismo de grupos abelianos*

$$\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U),$$

para cada $U \subset X$ aberto.

Para cada aberto $U \subset X$ tal que sempre que $V \subseteq U$ seja uma inclusão, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho"] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

comuta, onde ρ e ρ' são os mapas restrições de $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$, respectivamente.

Com respeito aos morfismos definidos acima faremos a seguinte observação:

Observação 1.52 *O morfismo φ é um isomorfismo se $\varphi(U)$ é um isomorfismo, para todo $U \subseteq X$. E mais, φ induz um homomorfismo $\varphi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$, para todo ponto $p \in X$.*

A proposição que se segue nos fornece um importante resultado que diz que um morfismo entre feixes é um isomorfismo se este o for talo a talo.

Proposição 1.53 *Seja $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ um morfismo de feixes sobre um espaço topológico X. Então φ é um isomorfismo se, e somente se, os mapas induzidos nos talos, φ_p, são isomorfismos para todo $p \in X$.*

Demonstração: Se φ é um isomorfismo, temos claramente que o morfismo induzido em p, φ_p, é um isomorfismo. Inversamente, suponhamos que φ_p seja um ismorfismo, para todo $p \in X$. Seja $U \subset X$. Para mostrarmos que $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ é um isomorfismo, iniciemos mostrando que este é um mapa injetivo.

Seja $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\varphi(s) = 0$. Para todo ponto $p \in U$, a imagem $\varphi_p(s_p) \equiv 0$ em $\mathscr{G}_p$. Da injetividade de φ_p segue que $s_p = 0$. Como temos que $s_p = s|_V$ para V uma vizinhança de p tal que $V \subset U$, então $s|_V \equiv 0$. Pelo axioma (1) da definição de feixes, segue que $s \equiv 0$ e temos a injetividade de $\varphi(U)$, para todo $U \subset X$.

Vejamos agora que $\varphi(U)$ é um mapa sobrejetivo. Para tanto, suponhamos que t seja uma seção em $\mathscr{G}(U)$, com $U \subset X$. Para cada $p \in U$, considere $t_p \in \mathscr{G}_p$. Como φ_p é sobrejetiva, existe $s_p \in \mathscr{F}_p$ tal que $\varphi_p(s_p) \equiv t_p$. Temos que $s_p = s(p)$, onde $s \in \mathscr{F}(V)$ com $V \subset U$ uma vizinhança de p que por questões de simplificarmos a notação, denotaremos V_p. Então, $\varphi(s(p)) \equiv t|_{V_p}$ é um elemento de $\mathscr{G}(V_p)$.

Se p e q são pontos tais que $s(p)|_{V_p \cap V_q}$ e $s(q)|_{V_p \cap V_q}$ são seções de $\mathscr{F}(V_p \cap V_q)$ teremos que $\varphi(s(p)) = \varphi(s(q)) = t|_{V_p \cap V_q}$. Como $\varphi(U)$ é injetiva, teremos que $s(p) = s(q)$ em $V_p \cap V_q$. Então, para cada $p \in U$, existe $s(p) \in V_p$ tal que $s(p) = s(q)$ em $V_p \cap V_q$. Pelo axioma (2) da definição de feixes, existe $s \in \mathscr{F}(U)$, tal que $s|_{V_p} = s(p)$.

Portanto, $\varphi(s) = t$ e segue que o morfismo $\varphi(U)$ é sobrejetor e em consquência do que mostramos aqui, segue que $\varphi(U)$ é um isomorfismo. $\square$

Definição 1.54 *Seja $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ um morfismo de feixes em um espaço topológico X e considere $U \subset X$. Então, o núcleo deste morfismo denotado por $ker(\varphi)$ é o feixe dado por $ker(\varphi) : U \to ker(\varphi(U))$. A imagem de φ, $Im(\varphi)$, é o feixe dado por $Im(\varphi) : U \to Im(\varphi(U))$.*

Definição 1.55 *Um **subfeixe** $\mathscr{H}$ de um feixe $\mathscr{F}$ sobre um espaço topológico X é um feixe tal que para todo $U \subseteq X$, $\mathscr{H}(U)$ é um subgrupo de $\mathscr{F}(U)$.*

Exemplo 1.56 *Seja $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ um morfismo de feixes. O feixe $ker(\varphi)$ é um subfeixe de $\mathscr{F}(U)$.*

Dados feixes sobre um espaço topológico X, podemos construir sequências exatas de mapas destes feixes. Antes de passarmos à definição referente a tal assunto, recordemos alguns conceitos.

Definição 1.57 *Seja A um anel. Uma sequência de $A-$ módulos*

$$\ldots \longrightarrow M_{n-1} \stackrel{f_{n-1}}{\longrightarrow} M_n \stackrel{f_n}{\longrightarrow} M_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

é dita exata se a imagem do homomorfismo f_{n-1} coincida com o núcleo do homomorfismo f_n, isto é, se $Im(f_{n-1}) = \ker(f_n)$, para todo n.

Observação 1.58

1. *Se uma sequência do tipo $0 \longrightarrow M_{n-1} \stackrel{f_{n-1}}{\longrightarrow} M_n \stackrel{f_n}{\longrightarrow} M_{n-1} \longrightarrow 0$ é exata, a denominamos **sequência exata curta**.*

2. *Uma sequência $0 \longrightarrow M_{n-1} \stackrel{f}{\longrightarrow} M_n \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é um isomorfismo.*

3. *Uma sequência $0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, $N = 0$.*

Definição 1.59 *Uma sequência de mapas de feixes*

$$\ldots \longrightarrow \mathscr{F}_n \stackrel{\alpha_n}{\longrightarrow} \mathscr{F}_{n+1} \stackrel{\alpha_{n+1}}{\longrightarrow} \mathscr{F}_{n+2} \stackrel{\alpha_{n+2}}{\longrightarrow} \ldots$$

é exata se $Im(\alpha_n) = \ker(\alpha_{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.60 *Seja X um espaço topológico. A sequência de feixes*

$$\ldots \longrightarrow \mathscr{F} \stackrel{\phi}{\longrightarrow} \mathscr{G} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \mathscr{H} \longrightarrow \ldots$$

é exata se, e somente se, para cada $p \in X$, a sequência induzida nos talos

$$\ldots \longrightarrow \mathscr{F}_p \stackrel{\phi_p}{\longrightarrow} \mathscr{G}_p \stackrel{\psi_p}{\longrightarrow} \mathscr{H}_p \longrightarrow \ldots$$

é exata.

Exemplo 1.61 ***Sequência Exponencial:***
Para ilustrarmos a discussão acerca das sequências de mapas de feixes, apresentaremos aqui a chamada Sequência Exponencial. Consideremos a variedade $M = \mathbb{C}^*$ e a aplicação

$$exp : \mathcal{O}(M) \longrightarrow \mathcal{O}(M)^* \text{ definida por } exp(f) = e^{2\pi i f},$$

onde $\mathcal{O}(M)$ é o feixe das funções holomorfas sobre M.

Observe que exp é sobrejetora, pois se $g \in \mathcal{O}(M)^*$ for um germe de uma função holomorfa em $\mathcal{O}(M)$, digamos f, então podemos definir um ramo do logaritmo para g, sendo este a função f, tal que $e^{2\pi i f} = g$. Note que $\ker(exp) = \{f \in \mathcal{O}(M) : e^{2\pi i f} = 1\} = \{2\pi i f = 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Logo, podemos induzir a seguinte sequência de feixes denominada Sequência Exponencial

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}(M) \xrightarrow{exp} \mathcal{O}(M)^* \longrightarrow 0,$$

a qual é exata levando-se em consideração a construção feita acima.

A seguir, daremos alguns importantes exemplos presentes na teoria de feixes.

Exemplo 1.62 ***(Feixes Skyscraper):***
Sejam X um espaço topológico e $p \in X$ um ponto. Consideremos, também, um grupo abeliano A e definamos neste grupo um feixe da seguinte maneira:

$$\mathscr{F}(A)|_U = A, \text{ se } p \in U \subseteq X, \text{ ou } \mathscr{F}(A)|_U = 0, \text{ caso contrário.}$$

Temos que cada talo $\mathscr{F}_p(A)$, do feixe $\mathscr{F}(A)|_U$ em $p \in U$, é igual a A para pontos $p \in U$ e igual a 0, fora destes pontos. Ao feixe $\mathscr{F}(A)|_U$ denominamos ***feixe skyscraper****.*

Exemplo 1.63 ***(Feixes de Anéis):***
Seja M uma variedade complexa. Para cada conjunto aberto $U \subseteq M$, seja $\mathcal{O}(U)$ o feixe das funções holomorfas definidas em U, ou seja, se $f \in \mathcal{O}(U)$, então $f : U \to \mathbb{C}$. Para cada $V \subset U$, seja $\rho_{U,V} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ o mapa restrição. Dizemos então que $\mathcal{O}$ é o ***feixe de anéis dos germes de funções holomorfas*** *em M. As condições de feixes podem ser verificadas pela definição de função holomorfa.*

Comentário 1.64 ***(Feixes de Ideais):***
Sejam M uma variedade complexa, $\mathcal{O}(M)$ o feixe de anéis das funções holomorfas sobre a variedade M e V um seu subconjunto fechado. Para cada conjunto aberto $U \subset M$, seja $\mathcal{I}_{M,U}$ o ideal no anel $\mathcal{O}_{M,U}$. Dizemos que $\mathcal{I}(V)$ é o ***feixe de ideais*** *de V e que este é um subfeixe do feixe de anéis $\mathcal{O}(M)$. Ao feixe de anéis $\mathcal{O}(M)$ e ao feixe de ideais $\mathcal{I}(V)$, temos associada a seguinte sequência exata curta de feixes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(M) \longrightarrow \mathcal{O}(V) \longrightarrow 0,$$

onde $\mathcal{O}(V)$ é o feixe de funções holomorfas em V.

1.4.3 Feixes Localmente Livres e Fibrados Holomorfos

Aqui objetivamos dar uma breve noção da definição de feixes localmente livres e a possibilidade de associarmos estes a fibrados holomorfos.

Definição 1.65 *Seja $\mathcal{O}(X)$ um feixe de anéis sobre um espaço topológico X e seja $\mathscr{F}$ um feixe de módulos sobre $\mathcal{O}(X)$. O feixe $\mathscr{F}$ é dito* ***localmente livre*** *de posto r sobre $\mathcal{O}(X)$, se é localmente isomorfo a $\mathcal{O}(X)^{\oplus r}$ em uma vizinhança de todo ponto de X. Em outras palavras, $\mathscr{F}$ é localmente livre se, para todo $p \in X$, for possível encontrar uma vizinhança U de p e seções $s_1, \ldots, s_r \in \mathscr{F}(U)$ tais que o homomorfismo de feixes*

$$\varphi : \mathcal{O}^{\oplus r}(U) \to \mathscr{F}(U)$$

seja um isomorfismo.

Pela Definição 1.65, percebemos que se $\mathscr{F}$ é um feixe localmente livre, existe uma cobertura por abertos de X, digamos $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, na qual o feixe $\mathscr{F}$ admite geradores livres $s^1_\gamma, s^2_\gamma, \ldots, s^r_\gamma$, onde cada $s^k_\gamma \in \mathscr{F}(U_\gamma)$.

E mais, na interseção não vazia de abertos $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, com $U_\alpha, U_\beta \in \{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, existe uma matriz de ordem $r \times r$

$$G_{\alpha\beta} = (G^{ij}_{\alpha\beta})_{1\leq j,i\leq r}, \text{ onde } G^{ij}_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta),$$

tal que

$$s^i_\beta = \sum_{1\leq j\leq r} s^j_\alpha G^{ij}_{\alpha\beta} \text{ em } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Logo, temos que as matrizes $G_{\alpha\beta}$ são dadas por $G_{\alpha\beta} = s_\alpha^{-1} \circ s_\beta$ e além disso, estas satisfazem as condições de cociclo. Denominaremos estas matrizes por **matrizes de transição**.

O que acabamos de constatar é que dado um feixe localmente livre, temos a ele associado uma matriz de transição satisfazendo as condições de cociclo. Veremos que, inversamente, dado um sistema de matrizes $G_{\alpha\beta}$ cujos coeficientes estejam em $\mathcal{O}(U_{\alpha\beta})$ e que satisfaçam as condições de cociclo, podemos definir um feixe localmente livre $\mathscr{F}$ de posto r sobre $\mathcal{O}$. Para tanto, tomemos $\mathscr{F} \simeq \mathcal{O}^{\oplus r}$, sobre cada aberto U_γ. Uma seção de $\mathscr{F}$, digamos s, sobre um conjunto aberto Ω de X pode ser vista como uma coleção de seções

$$s_\gamma = (s^1_\gamma, \ldots, s^r_\gamma) \text{ em } \mathcal{O}^{\oplus r}(\Omega \cap U_\gamma) \text{ tais que } s_\alpha = G_{\alpha\beta}s_\beta \text{ sobre } \Omega \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

A noção de feixes localmente livre está relacionada à noção de fibrados vetoriais. A observação que se segue faz menção a esta relação.

Observação 1.66 *A um feixe localmente livre de posto r sobre um espaço topológico X, digamos $\mathscr{F}$, está relacionado um fibrado vetorial, digamos E, também de posto r, sobre o mesmo espaço topológico.*

Vejamos como esta relação se dá. Consideremos o feixe de anéis $\mathcal{O}(X)$ como um subfeixe do feixe de anéis das funções contínuas sobre um espaço topológico X e com valores num corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $= \mathbb{C}$.

Desta forma, para cada $x \in X$, existe uma aplicação $f : \mathcal{O}_x \to \mathbb{K}$ tal que para cada função contínua $w \in \mathcal{O}_x$ temos $w \mapsto w(x) \in \mathbb{K}$. O núcleo da aplicação f é um ideal maximal, que denotaremos $\mathcal{M}_x$, do anel $\mathcal{O}_x$ e daí, por argumentos algébricos, temos que

$$\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{M}_x} \simeq \mathbb{K}.$$

Seja $\mathscr{F}$ um feixe localmente livre de posto r sobre o anel $\mathcal{O}_x$. Para cada $x \in X$, podemos associar $E_x = \dfrac{\mathscr{F}_x}{\mathcal{M}_x \mathscr{F}_x}$, o qual é um $\mathbb{K}-$ espaço vetorial. De fato, como $\mathscr{F}_x \simeq \mathcal{O}_x^{\oplus r}$, teremos $E_x = \left(\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{M}_x}\right)^{\oplus r} = \mathbb{K}^r$, logo cada E_x possui estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Assim, podemos definir o seguinte conjunto

$$E = \coprod_{x \in X} E_x$$

com a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi & : E & \to & X \\ & \xi & \mapsto & \pi(\xi) := x \end{array}$$

Como cada $E_x = \pi^{-1}(x)$ possui estrutura de $\mathbb{K}-$ espaço vetorial $r-$ dimensional, podemos dizer que o espaço E, definido como acima, é um fibrado $\mathbb{K}-$ vetorial de posto r sobre X cujas fibras são os espaços vetoriais E_x.

Notemos que toda seção $s \in \mathscr{F}(U)$ pode ser elevada a uma seção de E_x, isto é, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} s & : U & \to & E \\ & x & \mapsto & s(x) \end{array}$$

é tal que para $U \subset X$, temos $s(x) = s_x \mod \mathcal{M}_x$ e $(\pi \circ s)(x) = \pi(s(x)) = \pi(\xi) = x$, onde $\xi \in E_x$. Isto nos diz que $\pi \circ s = Id_U$.

Podemos considerar $\mathscr{F}(U)$ como um $\mathcal{O}(U)$-submódulo do $\mathbb{K}$-espaço vetorial de funções

$$\begin{array}{rccc} s & : U & \to & E \\ & x & \mapsto & E_x \end{array}$$

Visto como acima, $\mathscr{F}(U)$ será um subfeixe do feixe de seções E-valuadas. E mais, $\mathscr{F}(U)$ é um $\mathcal{O}$-submódulo isomorfo a $\mathscr{F}$. Denotaremos o referido subfeixe por $\mathcal{O}(E)$ e o denominaremos por *feixe das $\mathcal{O}$-seções em E*. Se E é um fibrado vetorial sobre X e $\mathcal{O}(E)$ um subfeixe do feixe das seções de E dizemos que o par $(E, \mathcal{O}(E))$ é um fibrado vetorial sobre X.

Agora, vejamos como definir as funções de transição do fibrado E. Como o feixe $\mathcal{O}(E)$ é localmente livre, de posto r, sobre algum conjunto aberto $U_\alpha \subset \{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ cobertura de X, é possível fazer uma escolha de geradores para o feixe $\mathcal{O}(E)|_{U_\alpha}$ e consequentemente encontraremos um sistema de geradores $(e^1_\alpha(x), \ldots, e^r_\alpha(x))$ para as fibras E_x de E. Tal sistema de geradores é denominado *estrutura $\mathcal{O}$- admissível de E sobre U_α*.

Considere o homeomorfismo:

$$\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r,$$

no qual cada $\xi \in E_x$ é associado ao par $(x, (\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^r_\alpha)) \in U_\alpha \times \mathbb{K}^r$. As componentes $(\xi^j_\alpha)_{1\leq j\leq r}$ são tomadas na base $(e^1_\alpha(x), \ldots, e^r_\alpha(x))$ de E_x. Repare que se tivermos $E = X \times \mathbb{K}$, então podemos que dizer que E é o fibrado trivial e isto significa dizer que o feixe $\mathcal{O}(E)$ é igual à soma direta $\mathcal{O}^{\oplus r}$.

Sendo assim, diremos que os homeomorfismos do tipo θ_γ, para cada aberto U_γ da cobertura $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, são as trivializações locais de E sobre U_γ. Em consequência disto, dados dois abertos em $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ tais que a interseção $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \theta_{\alpha\beta} & : & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{K}^r & \to & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{K}^r \\ & & (x, \xi) & \mapsto & (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot \xi) \end{array}$$

serão chamadas *aplicações de transição*, onde $g_{\alpha\beta} \in GL_r(\mathcal{O})(U_{\alpha\beta})$ são matrizes de transição (como descritas anteriormente) consideradas, agora, com coeficientes no feixe $\mathcal{O}$. Como já descrito nesta discussão, as matrizes $g_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo.

Reciprocamente, dadas uma coleção de matrizes $\{g_{\alpha\beta} \in GL_r(\mathcal{O})(U_{\alpha\beta})\}$ satisfazendo as condições de cociclo, podemos definir um fibrado vetorial

$$E := \coprod_{\gamma\in\Lambda} \frac{U_\gamma \times \mathbb{K}^r}{\sim},$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência:

$$(x_\alpha, \xi_\alpha) \sim (x_\beta, \xi_\beta) \text{ se, e somente se, } x_\alpha = x_\beta \in U_{\alpha\beta} \neq \emptyset \text{ e } g_{\alpha\beta}(x).\xi_\beta = \xi_\alpha.$$

Logo, o fibrado E definido como acima é obtido pela colagem dos conjuntos $U_\gamma \times \mathbb{K}^r$ via a relação de equivalência $\sim$.

O que acabamos de ver, em suma, é que existe uma correspondência um a um entre feixes localmente livres e fibrados vetoriais. A cada fibrado vetorial temos associado seu feixe de seções, o qual é localmente livre, assim como para cada feixe localmente livre temos associado um fibrado vetorial.

Neste trabalho, por uma questão de praticidade, não faremos distinção entre as notações de fibrados holomorfos e feixes localmente livres. Logo, dado um fibrado vetorial holomorfo, este será denotado seja como fibrado vetorial holomorfo de posto r, seja como feixe localmente livre de posto r, sem distinção.

1.4.4 Esquemas

Faremos um breve estudo acerca da teoria de *Esquemas e Subesquemas*. Daremos a definição principal referente ao assunto, mas antes daremos ênfase a alguns resultados e definições preliminares como Espectros e Espaços Anelados.

A primeira construção aqui apresentada se refere a um tipo especial de espaço topológico associado a um anel qualquer R.

Definição 1.67 *Definimos por* $Spec(R)$ *o conjunto constituído de todos os ideais primos do anel* R*.*

Se I é um ideal de R, dizemos que o conjunto $\mathcal{V}(I) \subseteq Spec(R)$ é o conjunto de todos os ideais primos contendo I. Com respeito a tal subconjunto, temos o seguinte resultado:

Lema 1.68 *Sejam* R *um anel,* I *e* J *ideais deste mesmo anel. Temos:*

1. *Se* I *e* J *são ideais do anel* A*, então* $\mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$*;*
2. *Se* $\{I_j\}_{j\in\Lambda}$ *é um conjunto de ideais de* R*, então* $\mathcal{V}(\sum_{j\in\Lambda} I_j) = \cap\mathcal{V}(I_j)_{j\in\Lambda}$*;*
3. $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(J)$ *se, e somente se,* $\sqrt{I} \supseteq \sqrt{J}$*.*

Demonstração:

1. Consideremos $P \subset I$ ou $P \subset J$, com P um ideal primo. Então $P \subset IJ$ e assim temos que $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(IJ)$. Por outro lado, considere $P \supseteq IJ$ com J não pertencente ao ideal P. Então, existe $J' \in J$ tal que $J' \notin P$. Mas, para algum $I' \in I$ temos $I'J' \in P$. Logo, $I' \in P$ um vez que P é primo e segue que $I \subseteq P$. Portanto, $\mathcal{V}(IJ) \subseteq \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$ e concluímos a igualdade desejada.
2. Repare que $P \subseteq \sum_{j\in\Lambda} I_j \Leftrightarrow P \subseteq I_j$, para cada $j \in \Lambda$ já que $\sum_{j\in\Lambda} I_j$ é o menor ideal que contém todos os ideais I_j.
3. O radical $\sqrt{I}$ é a interseção do conjunto de todos os ideais primos contendo o ideal I. Portanto, temos o resultado desejado.

□

O Lema 1.68 nos garante a existência de uma topologia em $Spec(R)$ chamada *Topologia de Zarisk*. Em tal topologia tomamos os subconjuntos $\mathcal{V}(I)$ como fechados em $Spec(R)$. Note que $\mathcal{V}(R) = \emptyset$ e $\mathcal{V}(\emptyset) = Spec(R)$. Denotamos por $\mathcal{D}(I)$ os conjuntos abertos complementares aos fechados $\mathcal{V}(I)$ e diremos que estes formam uma base para a topologia de $Spec(R)$. De fato, de $\mathcal{V}(I)$ é um conjunto fechado e $P \notin \mathcal{V}(I)$, então $I \not\subseteq P$. Logo, existe $J \subseteq I$ tal que $J \subseteq P$. Portanto, $P \in \mathcal{D}(J)$ e segue que $\mathcal{D}(J) \cap \mathcal{V}(I) = \emptyset$.

Ainda sobre um anel R, construiremos um feixe de anéis utilizando o espaço topológico $Spec(R)$. Para cada ideal primo $P \subseteq R$, seja R_P a localização de R em P. Para um conjunto aberto $U \subseteq Spec(R)$ definamos $\mathcal{O}_U$ como o conjunto das funções

$$s : U \to \coprod_{P \in U} R_P$$

tais que $s(P) \in R_P$, para cada ideal P e tal que s seja localmente um quociente de elementos de R.

Resumidamente, desejamos que para cada $P \in U$, existam uma vizinhança V de P, com $V \subset U$, e elementos I, $J \in R$ tais que para cada $Q \in V$ tenhamos $s(Q) = \frac{I}{J} \in R_Q$.

Com tal estrutura, $\mathcal{O}_U$ será um anel com soma e e produto das funções s bem definidos. A identidade será a mesma considerada para cada R_P.

Notemos que se $V \subseteq U$ são dois conjuntos abertos, então o mapa restrição natural $\mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_V$ é um homomorfismo de anéis. Portanto, $\mathcal{O}$ é um pré-feixe e consequentemente, via definição, segue que $\mathcal{O}$ é um feixe.

Definição 1.69 *Seja R um anel. O **espectro de** R é o par consistindo do espaço topológico, $Spec(R)$, com o feixe de anéis definido anteriormente: $(Spec(R), \mathcal{O}(U))$.*

Definição 1.70 *Um **espaço anelado** é um par $(X, \mathcal{O}(X))$ consistindo de um espaço topológico X e um feixe de anéis $\mathcal{O}(X)$ em X.*

Antes de passarmos à próxima definição, daremos a noção de **imagem direta de um feixe de anéis**. Seja $f : X \to Y$ um morfismo entre espaços topológicos e $\mathcal{O}(X)$ e $\mathcal{O}(Y)$ seus respectivos feixes de anéis. Definimos por imagem direta do feixe $\mathcal{O}(X)$ em Y por:

$$f_*(\mathcal{O}(X))(V) = \mathcal{O}(X)(f^{-1}(V)),$$

onde $V \subseteq Y$ é um aberto em Y.

Definição 1.71 *Um **morfismo entre espaços anelados**, $(X, \mathcal{O}(X))$ e $(Y, \mathcal{O}(Y))$, é um par $(f, \tilde{f})$ onde f é o mapa contínuo $f : X \to Y$ e $\tilde{f}$ é o mapa $\tilde{f} : \mathcal{O}(Y) \to f_*\mathcal{O}(X)$.*

Definição 1.72 *Um espaço anelado $(X, \mathcal{O}(X))$ é dito um* ***espaço localmente anelado*** *se, para cada ponto $p \in X$, tivermos o talo $\mathcal{O}(X)_p$ como um anel local. Um* ***morfismo de espaços localmente anelados*** *é um morfismo $(f, \tilde{f})$ de espaços anelados, tal que para cada ponto $p \in X$, o mapa de anéis locais*

$$\tilde{f}_p : \mathcal{O}(Y)_{f(p)} \to \mathcal{O}(X)_p$$

seja um homomorfismo de anéis locais.

Exploremos um pouco mais a ideia fornecida pela definição acima. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ um morfismo entre tais espaços. Note que dado um ponto $p \in X$ temos que o morfismo de feixes $\tilde{f} : \mathcal{O}(Y) \to f_*\mathcal{O}(X)$ induz um homomorfismo de anéis

$$\mathcal{O}(Y)(V) \to \mathcal{O}(X)(f^{-1}(V)), \text{ para todo } V \subset Y, \text{ V aberto} \tag{1.2}$$

Para cada ponto $f(p) \in Y$ tomemos um aberto V como sua vizinhaça. Teremos que cada pré-imagem $f^{-1}(V)$ varia sobre um subconjunto de uma vizinhança, digamos U, de p.

Tomemos o limite direto na aplicação (1.2):

$$\mathcal{O}(Y)_{f(p)} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ V}} \mathcal{O}(Y)(V) \longrightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ V}} \mathcal{O}(X)(f^{-1}(V)). \tag{1.3}$$

Repare que $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ V}} \mathcal{O}(X)(f^{-1}(V))$ tende a valores no talo $\mathcal{O}(X)_p$. Sendo assim é possível induzir, a partir de (1.3) e deste último fato, um morfismo

$$\tilde{f}_p : \mathcal{O}(Y)_{f(p)} \to \mathcal{O}(X)_p.$$

Mas, desejamos que este seja um homomorfismo. De fato, $\tilde{f}$ o será, pois se X e Y são anéis locais, então um morfismo entre estes, digamos φ, é um homomorfismo se $\varphi^{-1}(m_Y) = m_X$, onde m_X e m_Y são os ideiais maximais de X e Y, respectivamente. Pelo que vimos acima, temos

$$(\tilde{f})^{-1}(p) = f(p)$$

e segue que $\tilde{f}_p$ é um homomorfismo.

Finalmente, passaremos à principal definição referente à presente seção.

Definição 1.73 *Um* ***esquema afim*** *é um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}(X))$ o qual é isomorfo ao espectro de algum anel. Um* ***esquema*** *é um espaço localmente anelado no qual todo ponto possui uma vizinhança U a qual possui estrutura de espaço vetorial e junto com o feixe $\mathcal{O}(X)|_U$ formam um esquema afim $(U, \mathcal{O}(X)|_U)$.*

A defnição de morfismo entre esquemas é análoga à definição de morfismos entre espaços anelados, a qual já foi explicitada nesta seção. Já um isomorfismo de esquemas trata-se de um morfismo de esquemas munido de um morfismo inverso.

Definição 1.74 *Sejam um $(X, \mathcal{O}(X))$ um esquema e $U \subseteq X$ um subconjunto aberto no espaço topológico X. Temos que $(U, \mathcal{O}(X)|_U$ é também um esquema e o denominamos um* ***subesquema*** *de X.*

1.4.5 Cohomologia de Čech

Nesta seção daremos a noção e as definições gerais da teoria de cohomologia de feixes de grupos abelianos a qual é conhecida como Cohomologia de Čech. Faremos a construção de um grupo de cohomologia de um feixe $\mathscr{F}$ com respeito a uma cobertura $U = \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ de um espaço topológico X e após esta construção, daremos a noção das sequências exatas longas de cohomologia de Čech bem como veremos que estas podem ser induzidas através de sequências exatas curtas de feixes.

Seja $\mathscr{F}$ um feixe sobre um espaço topológico X. Consideremos $U = \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ uma cobertura de X e denotemos $U_{\gamma_0, \ldots, \gamma_q} = \bigcap_{k=1}^{q} U_{\gamma_k}$, com $\gamma_0, \ldots, \gamma_q \in \Lambda^q$.

Definição 1.75 *Uma q-**cocadeia** de U com coeficientes em $\mathscr{F}$ é uma função que a cada $(q+1)$-upla ordenada $(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in \Lambda^{q+1}$, associa uma seção $s_{\gamma_0, \ldots, \gamma_q} \in \mathscr{F}(U_{\gamma_0, \ldots, \gamma_q})$.*

Denotaremos uma q-cocadeia de U com coeficientes em $\mathscr{F}$ por $(s_{\gamma_0, \ldots, \gamma_q})$ e ao conjunto destas q-cocadeias designaremos por $\mathcal{C}^q(U, \mathscr{F})$. Note que $\mathcal{C}^q(U, \mathscr{F})$ possui, naturalmente, estrutura de grupo abeliano. Observe também, que um elemento da cocadeia $\mathcal{C}^0(U, \mathscr{F})$ associa cada aberto da cobertura U a uma seção de $\mathscr{F}(U)$.

Além das considerações acima, podemos observar que um homomorfismo de feixes $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induz um homomorfismo

$$\phi^\bullet : \mathcal{C}^q(U, \mathscr{F}) \to \mathcal{C}^q(U, \mathscr{G})$$

o qual está definido de forma que tenhamos $(s_{\gamma_0, \ldots, \gamma_q}) \mapsto (\phi^\bullet s_{\gamma_0, \ldots, \gamma_q})$ e $\phi^\bullet$ é uma aplicação induzida entre grupos de seções.

Definição 1.76 *O **operador de cobordo** é a aplicação*

$$d_q : \mathcal{C}^q(U, \mathscr{F}) \to \mathcal{C}^{q+1}(U, \mathscr{F})$$

definida de forma que

$$d_q((s_{\gamma_0, \ldots, \gamma_q})) = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho_k(s_{\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma_k}, \ldots, \gamma_q})|_{U_{\gamma_0} \cap \ldots \cap U_{\gamma_q}},$$

com $\hat{\gamma}_k$ indicando a omissão do termo γ_k e

$$\rho_k : \mathscr{F}(U_{\gamma_0} \cap \ldots \cap \hat{U}_{\gamma_k} \cap \ldots \cap U_{\gamma_{q+1}}) \to \mathscr{F}(U_{\gamma_0} \cap \ldots \cap U_{\gamma_k} \cap \ldots \cap U_{\gamma_{q+1}})$$

o mapa restrição.

Com relação ao operador de cobordo, temos o seguinte resultado:

Lema 1.77 $d_{q+1} \circ d_q = 0$

Demonstração: Seja $(s_{\gamma_0,\ldots,\gamma_q}) \in \mathcal{C}^q(U, \mathscr{F})$ uma cocadeia. Pela definição do operador de cobordo temos que

$$d_q((s_{\gamma_0,\ldots,\gamma_q})) = (f_{\gamma_0}, \ldots, f_{\gamma_{q+1}}).$$

Por outro lado, temos

$$d_{q+1}((f_{\gamma_0,\ldots,\gamma_{q+1}})) = (h_{\gamma_0}, \ldots, h_{\gamma_{q+2}}) \in \mathcal{C}^{q+2}(U, \mathscr{F})$$

onde $h_{\gamma_0}, \ldots, h_{\gamma_{q+2}} = \sum_{l=0}^{q+2} (-1)^l \rho_l (f_{\gamma_0,\ldots,\hat{\gamma}_l,\ldots,\gamma_{q+2}})$.

Como temos

$$f_{\gamma_0,\ldots,\hat{\gamma}_l,\ldots,\gamma_{q+2}} = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \rho_k (s_{\gamma_0,\ldots,\hat{\gamma}_k,\ldots,\hat{\gamma}_l\ldots,\gamma_{q+2}}) + \sum_{k=l+1}^{q+2} (-1)^{k+1} \rho_k (s_{\gamma_0,\ldots,\hat{\gamma}_k,\ldots,\hat{\gamma}_l\ldots,\gamma_{q+2}})$$

segue que

$$h_{\gamma_0}, \ldots, h_{\gamma_{q+2}} = \sum_{l=0}^{q+2} (-1)^l \rho_l (\sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \rho_k (s_{\gamma_0,\ldots,\hat{\gamma}_k,\ldots,\hat{\gamma}_l\ldots,\gamma_{q+2}})) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{q+2} (-1)^l \rho_l (\sum_{k=l+1}^{q+2} (-1)^k \rho_k (s_{\gamma_0,\ldots,\hat{\gamma}_k,\ldots,\hat{\gamma}_l,\ldots,\gamma_{q+2}})) = 0$$

□

Definição 1.78 *Definimos*

$$\mathscr{Z}^q(U, \mathscr{F}) = \{s \in \mathcal{C}^q(U, \mathscr{F}) \text{ tais que } d_q(s) = 0\}$$

o núcleo do operador $d_q : \mathcal{C}^q(U, \mathscr{F}) \to \mathcal{C}^{q+1}(U, \mathscr{F})$. Os elementos de $\mathscr{Z}^q(U, \mathscr{F})$ são denominados $q -$ ***cociclos****. Ainda, para $q \geq 1$ definimos a imagem de d_{q-1} como sendo o conjunto*

$$\mathscr{B}^q(U, \mathscr{F}) = Im_{d_q} = \{s \in \mathcal{C}^q(U, \mathscr{F});\ \exists f \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathscr{F}) \text{ tal que } d_{q-1}(f) = s\}.$$

Os elementos de $\mathscr{B}^{q-1}(U, \mathscr{F})$ são chamados de ***q -cobordos****.*

No caso em que $q = 0$, fica convencionado que $\mathcal{B}^0(U, \mathscr{F}) = 0$.

Segue do Lema 1.77 que $\mathcal{B}^q(U, \mathscr{F}) \subset \mathcal{Z}^q(U, \mathscr{F})$, logo podemos definir um quociente

$$\frac{\mathcal{Z}^q(U, \mathscr{F})}{\mathcal{B}^q(U, \mathscr{F})} = \frac{\ker d_q}{Im_{d_{q-1}}} := H^q(U, \mathscr{F}).$$

Definição 1.79 *O quociente*

$$H^q(U, \mathscr{F}) = \frac{\mathcal{Z}^q(U, \mathscr{F})}{\mathcal{B}^q(U, \mathscr{F})}$$

é denominado ***q -ésimo grupo de cohomologia de Čech de*** $\mathscr{F}$ ***com relação a*** U.

Temos que o grupo $H^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$. Observe que um elemento $s = (s_0) \in \mathcal{C}^0(U, \mathscr{F})$ pertence a $\mathcal{Z}^0(U, \mathscr{F})$ se, e somente se, $d_0(s) = (f_{\gamma_0\gamma_1}) = 0$. Uma vez que

$$0 = (f_{\gamma_0\gamma_1}) = (s_{\gamma_1}|_{U_{\gamma_0}\cap U_{\gamma_1}}) - (s_{\gamma_0}|_{U_{\gamma_0}\cap U_{\gamma_1}})$$

teremos

$$(s_{\gamma_1}|_{U_{\gamma_0}\cap U_{\gamma_1}}) \equiv (s_{\gamma_0}|_{U_{\gamma_0}\cap U_{\gamma_1}}), \text{ para todo } \gamma_0, \gamma_1 \in \Lambda.$$

O que acabamos de ver é que para todo $\gamma_0, \gamma_1 \in \Lambda$, as seções $s_{\gamma_0} \in \mathscr{F}(U_{\gamma_0})$ e $s_{\gamma_1} \in \mathscr{F}(U_{\gamma_1})$ coincidem nas interseções não vazias U_{γ_0,γ_1}. Portanto, estas seções definem uma **seção global** o que nos permite fazer a identificação $H^0(U, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$.

Até o presente momento, construímos os grupos de cohomologia dependendo da cobertura U do espaço topológico X. Contudo, podemos construir estes grupos livres de escolha de uma cobertura, para isto basta utilizarmos os conceitos de limite direto. Para explorarmos melhor estas ideias, passemos às seguintes definições.

Definição 1.80 *Dadas duas coberturas para o espaço topológico X, $U = \{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ e $V = \{V_\xi\}_{\xi\in\Theta}$, dizemos que U é um* ***refinamento*** *de V se existe uma aplicação $r : \Lambda \to \Theta$ denominada aplicação de refinamento e tal que $U_\gamma \subset V_{r(\Theta)}$, $\forall \gamma \in \Lambda$.*

Nas condições da Definição 1.80, denotamos $U \prec V$ e teremos que $\prec$ estabelece uma relação de ordem parcial na família das coberturas abertas do espaço topológico X uma vez que sempre existe a possibilidade de se obter uma cobertura aberta U tal que $U \prec V$ e $U \prec W$ com ambas, V e W, coberturas abertas de X.

A aplicação de refinamento $r : \Lambda \to \Theta$ induz um homomorfismo

$$\delta : \mathcal{C}^q(V, \mathscr{F}) \to \mathcal{C}^q(U, \mathscr{F})$$

dado por $(t_{\xi_0}, \ldots, t_{\xi_q}) \mapsto (s_{\gamma_0}, \ldots, s_{\gamma_q})$. Tal homomorfismo comuta com os operadores de cobordo aqui definidos e portanto induzem um homomorfismo entre grupos de cohomologia de Čech que por abuso de notação ainda denotaremos por δ

$$\delta : H^q(V, \mathscr{F}) \to H^q(U, \mathscr{F}).$$

Afirmamos que estes homomorfismos independem da escolha da aplicação de refinamento e o afirmado está demonstrado em [16], páginas 63, 64.

Os grupos de cohomologia $H^q(U, \mathscr{F})$ indexados pela família de coberturas abertas de X com a relacão de ordem parcial definida por $\prec$ e os homomorfismos

$$\delta : H^q(V, \mathscr{F}) \to (U, \mathscr{F}), \text{ onde } U \prec V,$$

constituem o que chamamos de *sistema direto de grupos abelianos.*

Definição 1.81 *O q-**ésimo grupo de cohomologia de Čech** do espaço topológico X é dado pelo limite direto do sistema direto de grupos abelianos:*

$$H^q(X, \mathscr{F}) = \varinjlim H^q(U, \mathscr{F}).$$

Desta forma, conseguimos uma definição para os grupos de cohomologia de Čech de forma que estes independam da escolha de coberturas para X.

1.4.6 Sequências Exatas Longas de Cohomologia de Čech

Um dos problemas existente na teoria de feixes é exatamente a existência de objetos globais, ou seja, a existência de seções globais. Uma das formas de se resolver tal problema são as sequências exatas longas de cohomologia de Čech que apresentaremos a seguir.

Lema 1.82 *Seja $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\phi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de feixes sobre o espaço topológico X. Então, dado um aberto $U \subset X$, a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\phi^*} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\psi^*} \mathscr{H}(U) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração: Ver [11], página 37. □

Lema 1.83 *Seja* $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\phi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta de feixes sobre um espaço topológico* X*. Então, existem homomorfismos* δ_q *de forma que a sequência induzida*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathscr{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{G}) \\ &\longrightarrow H^1(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta_1} \ldots \xrightarrow{\delta_{q-1}} H^q(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_q} \ldots \end{aligned}$$

seja exata. Esta sequência é denominada ***sequência exata longa de cohomologia de Čech****.*

Corolário 1.84 *Seja* $0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\phi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de feixes sobre um espaço topológico* X *e suponha que* $H^q(X,\mathscr{E}) = H^q(X,\mathscr{H}) = 0$*, para todo* $q > 0$*. Então*

$$H^q(X,\mathscr{F}) \simeq H^q(X,\mathscr{G}).$$

Demonstração: Ver [14], página 29. □

1.5 O Complexo Koszul

Nesta seção trataremos do *Complexo Koszul*. Iniciaremos a seção com as definições de complexos de cadeia e cocadeia os quais são vistos como sequências de grupos abelianos e terminaremos mostrando a construção do Complexo Koszul para sequências regulares de funções holomorfas. Tal complexo desempenhará um importante papel no Capítulo 3.

1.5.1 Complexos de Cadeia e de Cocadeia

Definição 1.85 *Um* ***complexo de cadeia*** *é uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos* d_i*, com* $i \in \mathbb{Z}$*:*

$$\mathcal{C} : \ldots \longrightarrow \mathcal{C}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{C}_i \xrightarrow{d_i} \ldots$$

com a propriedade de que $d_i \circ d_{i+1} = 0, \forall i$*. Os homomorfismos* d_i*, para* $i \in \mathbb{Z}$*, são denominados* ***diferenciais****.*

Similarmente à definição de um complexo de cadeia, temos a definição de seu dual da seguinte maneira:

Definição 1.86 *Um **complexo de cocadeia** é uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos d_i, com $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathcal{C}' : \ldots \longrightarrow \mathcal{C}^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{C}^i \xrightarrow{d^i} \ldots$$

tal que $d^i \circ d^{i-1} = 0, \ \forall i \geq 1$.

Observação 1.87 *Todo complexo de cadeia pode ser visto como um complexo de cocadeia, basta identificarmos*

$$\mathcal{C}^i = \mathcal{C}_{-i} \text{ e } d^i = d_{-i-1}.$$

Observação 1.88 *Como temos $d_i \circ d_{i+1} = 0$ e $d^i \circ d^{i-1} = 0$, segue que $Im(d_{i+1}) \subset \ker(d_i)$ e $Im(d_{i-1}) \subset \ker(d_i)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

A seguir, daremos importantes definições na teoria de álgebra homológica e cohomológica envolvendo complexos de cadeia e de cocadeia, respectivamente.

Definição 1.89 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ complexos de cadeia e cocadeia, respectivamente. Definimos o **i-ésimo grupo de homologia** do complexo $\mathcal{C}$ como sendo:*

$$H_i = \frac{\ker d_i}{Imd_{i+1}}.$$

*Similarmente, definimos o **i-ésimo grupo de cohomologia** do complexo $\mathcal{C}'$ como sendo:*

$$H^i = \frac{\ker d^i}{Imd^{i-1}}.$$

Os elementos de $\ker(d_i)$ são denominados i-ciclos. Já os elementos de $Im(d_i)$ são denominados i-bordos. Similarmente, os elementos de $\ker(d^i)$ são denominados i-cociclos e os elementos de $Im(d^{i-1})$ i-cobordos.

Definição 1.90 *Seja*

$$\mathcal{C} : \ldots \longrightarrow \mathcal{C}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{C}_i \xrightarrow{d_i} \ldots$$

*um complexo de cadeia. Considere $H_i(\mathcal{C})$ seu $i-$ésimo grupo de homologia. Dizemos que $\mathcal{C}$ é **acíclico** se $H_i(\mathcal{C}) = 0$, para todo $i \geq 1$. Caso isto ocorra, $\mathcal{C}$ será uma sequência exata. Esta definição ocorre, de forma análoga, considerando-se $H^i(\mathcal{C}')$ o $i-$ésimo grupo de cohomologia de $\mathcal{C}'$, para $i \geq 1$.*

De certa forma, podemos dizer que a homologia e a cohomologia de complexos de cadeia e cocadeia, respectivamente, podem ser vistas como uma medida para a falta de exatidão destes.

Definição 1.91 *Dados dois complexos de cadeia, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, uma aplicação de cadeia, $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, é uma família de homomorfismos $f = \{f_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}'_i\}$, com $i \in \mathbb{Z}$, que satisfaz a condição*

$$d' \circ f_i = f_{i-1} \circ d, \ \ \textit{para todo} \ \ i \in \mathbb{Z}.$$

Com tal definição, podemos dizer que f é uma aplicação de cadeia se o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}: \dots \arrow[r] & \mathcal{C}_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \mathcal{C}_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & \mathcal{C}_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \dots \\
\mathcal{C}': \dots \arrow[r] & \mathcal{C}'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & \mathcal{C}'_i \arrow[r, "d'_i"] & \mathcal{C}'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Munidos da Definição 1.91, temos que dados complexos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}: \dots \arrow[r] & \mathcal{A}_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \mathcal{A}_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"] & \mathcal{A}_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \dots, \\
\mathcal{B}: \dots \arrow[r] & \mathcal{B}_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{i+1}"] & \mathcal{B}_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"] & \mathcal{B}_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{i-1}"] & \dots \\
\mathcal{C}: \dots \arrow[r] & \mathcal{C}_{i+1} \arrow[r] & \mathcal{C}_i \arrow[r] & \mathcal{C}_{i-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

então as sequências curtas

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{B}_i \xrightarrow{g_i} \mathcal{C}_i \longrightarrow 0$$

são exatas, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

O lema que se segue nos dá um interessante resultado envolvendo diagramas de complexos de cadeia.

Lema 1.92 ***(Lema da Serpente)*** *Dado um diagrama de sequências exatas curtas*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r] & \mathcal{B}' \arrow[r] & \mathcal{C}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

então existe uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \ker g \longrightarrow \ker h \xrightarrow{\delta} \mathit{coker} f \longrightarrow \mathit{coker} g \longrightarrow \mathit{coker} h \longrightarrow 0.$$

Demonstração: Ver [21], página 826. □

Teorema 1.93 *Seja $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ uma sequência exata de complexos. Então, para cada $q \in \mathbb{Z}$, podemos definir um homomorfismo $\delta_q : H_q(\mathcal{C}'') \to H_{q-1}(\mathcal{C})$ tal que a sequência longa de cohomologia*

$$\ldots \longrightarrow H_q(\mathcal{C}) \longrightarrow H_q(\mathcal{C}') \longrightarrow H_q(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \ldots$$

é exata.

Demonstração: Ver [15], páginas 335, 336. □

Observação 1.94 *Os resultados enunciados para complexos de cadeia podem ser enunciados, de forma análoga, para complexos de cocadeia.*

1.5.2 Complexo de Koszul

Seja $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}$ o anel dos germes de funções holomorfas, $f_1, \ldots, f_r$, definidas em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$. Denotemos por $f = (f_1, \ldots, f_r)$ o conjunto formado pelas funções f_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Ao conjunto de funções $f = (f_1, \ldots, f_r)$ asociamos o chamado *Complexo de Koszul*. No caso em que este conjunto é uma sequência regular, temos um importante resultado com respeito ao complexo de Koszul a ele associado, resultado este que iremos detalhar mais adiante bem como a definição de sequências regulares.

Vejamos como se dá a construção do complexo de Koszul associado ao conjunto de funções $f = (f_1, \ldots, f_r)$. Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ base canônica para $\mathbb{C}^r$ e definamos

$$E_k = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r} \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^r$$

um $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}$ $-$ módulo com base $e_J = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}$, onde $J = (j_1, \ldots, j_k) \subset (1, \ldots, r)$. Para os $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}$ $-$ módulos definidos, definamos aplicações $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}$ $-$ lineares

$$d_k : E_k \to E_{k-1}$$

tais que

$$d_k(e_J) = \sum_{v=1}^{k} (-1)^{v-1} f_{jv} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{j_v} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}.$$

Para $k = 1$, teremos $E_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r} \otimes \bigwedge \mathbb{C}^r = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}$ e $d_1(e_i) = f_i$, para $i = j_1$. Munidos destas considerações, passemos à seguinte definição:

Definição 1.95 *O **complexo de Koszul**, denotado por $\mathcal{K}(f)$, associado ao conjunto de funções $f = (f_1, \ldots, f_r)$ definidas em $\mathbb{C}^r$, é a sequência de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ − módulos*

$$\mathcal{K}(f) : 0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{d_k} E_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0,$$

onde a aplicação d_k é definida por

$$d_k(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}) = \sum_{v=1}^{k} (-1)^{v-1} f_{jv} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{j_v} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, \ \ \text{para todo} \ \ k \in \{1, \ldots, r\},$$

onde $\hat{e}_{j_v}$ indica a omissão do termo e_{j_v}. Com tal definição, teremos que $d_{k-1} \circ d_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Como vimos, um complexo de cadeia ou cocadeia nem sempre é uma sequência exata. O complexo de Koszul associado a uma sequência f será acíclico, e assim uma sequência exata, sob uma certa condição sobre f a qual veremos mais adiante. Antes de explicitarmos tal condição vejamos a seguinte definição:

Definição 1.96 *Sejam $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}$ e denotemos por $I_k =< f_1, \ldots, f_k >$ o ideal gerado pelas funções $f_1, \ldots, f_k$. Denotaremos o ideal gerado por $f_1, \ldots, f_r$ por $I = I_r = =< f_1, \ldots, f_r >$. Dizemos que o conjunto $f = (f_1, \ldots, f_r)$ é uma **sequência regular** se f_k <u>não</u> for um divisor de zero em $\dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}}{I_{k-1}}$, para $k \in \{1, \ldots, r\}$.*

A proposição seguinte nos diz quando um conjunto de zeros de funções holomorfas isolado é uma sequência regular. Embora este resultado seja aplicado apenas no Capítulo 3, o enunciaremos logo a seguir.

Proposição 1.97 *Sejam U uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$ e $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa. Então,*

$$f^{-1}\{0\} = (f_1(p) = \ldots = f_n(p) = 0) = \{0\} \Leftrightarrow (f_1, \ldots, f_n) \ \ \text{é uma sequência regular.}$$

O teorema abaixo nos diz, explicitamente, a condição necessária para que um complexo de Koszul seja acíclico e portanto, uma sequência exata.

Teorema 1.98 *Seja $f = (f_1, \ldots, f_r)$, definida em $\mathbb{C}^r$, uma sequência regular. Então, o complexo de Koszul*

$$\mathcal{K}(f) : 0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{d_k} E_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata.

Demonstração: Inicialmente, provemos que $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}}{I} \simeq H_0(\mathcal{K}(f))$. Para tanto, basta notarmos que a imagem da aplicação $E_1 \xrightarrow{d_1} E_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}$ é exatamente o ideal I. Logo, $H_0(\mathcal{K}(f)) \simeq \frac{\mathcal{O}}{I}$.

Provemos agora, que $H_q(\mathcal{K}(f)) = 0$ para todo $q > 0$. Faremos indução sobre r.

Iniciemos supondo $r = 1$. Neste caso, teremos

$$\mathcal{K}(f) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{f_1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow 0.$$

Logo, $H_q = \frac{0}{Im(f_1)} = 0$ e temos o resultado.

Assumiremos como hipótese de indução que para $r-1$ o resultado desejado seja válido. Consideremos espaços vetoriais $F_k = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^k \mathbb{C}^{r-1}$ de forma que tenhamos $F_k \subset E_k$. Tal inclusão é induzida pelo fato de termos $\wedge^k \mathbb{C}^{r-1} \subset \wedge^k \mathbb{C}^r$. Consideremos, também, $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_{r-1}}\}$ uma base para $\mathbb{C}^{r-1}$ e $\{e_{J'}\} = (e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k})$ uma base para F_k, onde $J' = (j_1, \ldots, j_{k-1}) \subset (1, \ldots, r-1)$. Munidos destas considerações, podemos construir o seguinte diagrama comutativo de complexos

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
F : & & 0 \arrow[r] & F_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & F_{r-2} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
E : & 0 \arrow[r] & E_r \arrow[r] & E_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & E_{r-2} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Q : & 0 \arrow[r] & Q_r \arrow[r, "d_r"] \arrow[d] & Q_{r-1} \arrow[r, "d_{r-1}"] \arrow[d] & Q_{r-2} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & \frac{I_r}{I_{r-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Identificaremos

$$Q_k \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(e_r \otimes \wedge^{k-1}\mathbb{C}^{r-1}),$$

para cada k. Então, para $J' = (j_1, \ldots, j_{k-1}) \subset (1, \ldots, r-1)$, podemos definir

$$d_k(e_r \otimes e_{J'}) = f_r e_{J'} \pm e_r \otimes d_k(e_{J'}) = e_r \otimes d_k(e_{J'}) \operatorname{mod} F_k,$$

com $k \in \{1, \ldots, r\}$. Sob estas identificações, Q será um complexo de Koszul para o qual a hipótese de indução é válida.

Para concluirmos que o diagrama (1.4) é exato, devemos verificar que o diagrama menor

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & \frac{I_r}{I_{r-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

é comutativo.

No diagrama (1.5), temos que:

1. $Q_2 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(e_r \otimes \mathbb{C}^{r-1}),$ logo $d_2(e_r \otimes e'_J) = f_j e_r,$ e
2. $Q_1 \simeq \mathcal{O}.e_r,$ logo $d_1(ge_r) = gf_r.$

Por estas identificações, vemos que o diagrama (1.5) é comutativo e além disso se $d_1(ge_r) = gf_r = 0$, teremos que $gf_r \in I_{r-1}$, ou seja, $g = f_j$, para algum $j = 1, \ldots, r-1$. Daí que

$$ge_r = f_j e_r \in d_2(Q_2)$$

e segue que $\ker(d_1) = Im(d_2)$ o que nos dá a exatidão do diagrama (1.5). Segue, então que o diagrama (1.4) é exato. Aplicando o Teorema 1.93 a sequência exata de complexos $0 \to F \to Q \to E \to 0$ obtemos que $H_q(E) = 0$, para todo $q > 0$, como desejávamos. $\square$

Capítulo 2

Folheações Holomorfas

O objetivo maior deste capítulo é introduzir ao leitor deste trabalho as principais ideias sobre folheações holomorfas sobre espaços projetivos complexos. Iniciaremos tratando das definições e resultados concernentes ao estudo das folheações holomorfas sobre M onde esta é uma variedade complexa arbitrária de dimensão $n \geq 2$. Podemos dizer, em linguagem informal, que uma folheação holomorfa não singular sobre uma variedade complexa M é uma partição desta em subvariedades de mesma dimensão e duas a duas disjuntas.

Inicialmente, nossos resultados serão válidos para folheações holomorfas com dimensão arbitrária $n \geq 2$, porém mais adiante nos ateremos às folheações holomorfas de dimensão 1, uma vez que estas nos serão de grande interesse. Veremos que estas folheações unidimensionais podem ser induzidas por campos vetoriais holomorfos sobre $\mathbb{P}^n$.

Prosseguindo este capítulo, falaremos de fibrados holomorfos associados a folheações holomorfas unidimensionais. Em seguida, trataremos de folheações holomorfas singulares e unidimensionais sobre $\mathbb{P}^n$. Faremos um breve estudo sobre a Sequência de Euler e na seção seguinte mostraremos a representação de uma folheação holomorfa unidimensional sobre $\mathbb{P}^n$ em coordenadas homogêneas.

2.1 Folheações Holomorfas Regulares

Definição 2.1 *Uma **folheação holomorfa não singular** de dimensão k, com $1 \leq k \leq n-1$, numa variedade M é um atlas holomorfo $\mathcal{F} = \{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma\in\Lambda}$ tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *$\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ é uma cobertura por abertos de M;*
2. *Para cada $\gamma \in \Lambda$, a aplicação $\varphi_\gamma : U_\gamma \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ é um biholomorfismo, onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é um disco unitário centrado na origem;*
3. *Dados dois abertos U_α e U_β em $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ tais que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação mudança de coordenadas, $\varphi_{\alpha\beta}$*

$$\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta},)$$

   satisfaz que

$$\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})(x,y) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y)),$$

   onde h_1 e h_2 são funções holomorfas.

Os abertos da cobertura $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, são chamamos *abertos trivializadores* da folheaação $\mathcal{F}$.

Pelo item 2 da Definição 2.1 podemos perceber que cada aberto U_γ pode ser decomposto em variedades $k-$ dimensionais dadas por $\varphi_\gamma^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{y_0\})$, com $y_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$. Isto é

$$U_\gamma = \bigcup \varphi_\gamma^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{y_0\}).$$

A estas variedades chamamos de *placas* da folheação $\mathcal{F}$. Dadas duas placas $p \in U_\alpha$ e $q \in U_\beta$, segue da propriedade 3 da Definição 2.1, que se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, então ou $p \cap q = \emptyset$, ou $p \cap q = p \cap U_\beta = U_\alpha \cap q$. Com base nesta discussão, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.2 *As placas definidas como acima, se sobrepõem nas interseções dos abertos trivializadores.*

Pela Proposição 2.2, podemos definir a seguinte relação de equivalência em M: sejam p e q placas de uma folheação $\mathcal{F}$ sobre uma variedade complexa M. Dizemos que

$$p \sim q,$$

isto é, p e q se relacionam, se existem placas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_n$ tais que

$$\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset,$$

para $i = 1, \ldots, n-1$.

Em decorrência destas afirmações, temos a seguinte definição:

Definição 2.3 *Uma **folha** da folheação holomorfa $\mathcal{F}$, é uma classe de equivalência de uma placa $p \in M$ com respeito a relação de equivalência explicitada anteriormente.*

Considerando-se as folhas de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ com a topologia gerada pelos abertos U_γ de suas placas, temos que estas possuirão estrutura de variedade complexa $k-$dimensional e imersa em M. Sendo assim, uma folheação proporciona à variedade M uma decomposição em sub-variedades imersas $k-$dimensionais. Desta forma, podemos dizer que duas folheações, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$, são iguais se todas as suas folhas coincidem.

Definição 2.4 *O **espaço tangente à folheação** $\mathcal{F}$ **num ponto** $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$, é o espaço tangente à folha que passa por este ponto. $T_p\mathcal{F}$ possui dimensão k, para todo $p \in M$.*

A partir deste momento, nos ateremos às folheações holomorfas singulares.

Definição 2.5 *Uma **folheação holomorfa singular** de dimensão k, $1 \leq k \leq n-1$, em uma variedade complexa M é uma folheação holomorfa não singular $k-$dimensional em $M \setminus Sing(\mathcal{F})$. O conjunto $Sing(\mathcal{F})$ é denominado **conjunto singular** de $\mathcal{F}$ e é um subconjunto analítico, de codimensão maior ou igual a dois, da variedade M.*

$Sing(\mathcal{F})$ será definido como um conjunto minimal, no sentido de que não existirá subconjunto analítico próprio, $Sing'(\mathcal{F}) \subset Sing(\mathcal{F})$, tal que a folheação $\mathcal{F}$, regular em $M \setminus Sing(\mathcal{F})$, se estenda à $M \setminus Sing'(\mathcal{F})$.

Observação 2.6 *Mais a frente, daremos a definição formal do conjunto $Sing(\mathcal{F})$. Em especial, definiremos o conjunto singular de $\mathcal{F}$, quando esta é uma folheação holomorfa de dimensão 1, pois é o que nos interessa.*

Definição 2.7 *As folhas de uma folheação singular $\mathcal{F}$, são as folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{M\setminus Sing(\mathcal{F})}$.*

Definição 2.8 *Dizemos que duas folheações singulares $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são iguais se:*

1. *$Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;*
2. *As folheações regulares $\mathcal{F}|_{M\setminus Sing(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'|_{M\setminus Sing(\mathcal{F}')}$ são iguais.*

Neste trabalho, estamos interessados em um resultado que se refere a folheações cuja dimensão é igual a 1. Os resultados que se seguem estão relacionados a estas folheações, de forma a atender nossos interesses futuros. Para prosseguir com nosso estudo, já nos atendo a folheações unidimensionais, enunciaremos o seguinte teorema.

Teorema 2.9 *(Teorema do Fluxo Tubular Holomorfo) Seja v um campo de vetores holomorfos não singular numa variedade complexa M. Para todo ponto $p \in M$, tal que $v(p) \neq 0$, existe um aberto $U \subset M$ e um sistema de coordenadas holomorfo $(\phi = (z_1, \ldots, z_n), U)$, onde*

$$\phi : U \to \phi(U) = A \times B \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \ \ e \ \ v = \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

O Teorema 2.9 encontra-se com mais detalhes em [16] na página 13.

Com este teorema em mãos, enunciemos o seguinte resultado.

Proposição 2.10 *Seja v um campo de vetores holomorfo não singular definido em um aberto $U \subset M$. Então, o campo v induz uma folheação holomorfa singular unidimensional no aberto U. Além disso, se tivermos outro aberto $U' \subset M$ tal que $U \cap U' \neq \emptyset$ e um campo de vetores holomorfo v', não singular, definido em U', tal que para alguma função holomorfa*

$$f : U \cap U' \to \mathbb{C}^*,$$

tenhamos

$$v|_{U \cap U'} = f v^*|_{U \cap U'},$$

então os campos v e v^* induzem sobre $U \cap U'$ a mesma folheação holomorfa.

De fato, como as trajetórias do campo v são soluções da equação diferencial $\frac{dz}{dt} = v(z)$ e $v|_U = \frac{\partial}{\partial z_1}$, o Teorema do Fluxo Tubular Holomorfo e a definição de folheações holomorfas nos dão que o campo v induz uma folheação holomorfa de dimensão 1 em M cujas folhas são as trajetórias de v.

Deste ponto em diante trataremos apenas de folheações holomorfas singulares e omitiremos este último termo, deixando subentendido que as folheações consideradas a partir de agora poderão ser singulares. O próximo resultado nos diz que toda folheações holomorfa unidimensional pode ser obtida, localmente, através de campos de vetores holomorfos.

Proposição 2.11 *Toda folheação holomorfa de dimensão 1 é induzida, localmente, por um campo de vetores holomorfo.*

Demonstração: Como devemos resolver o problema localmente, consideremos um polidisco $\Delta \in \mathbb{C}^n$. Assim, seja $\mathcal{F}$ a folheação holomorfa, nas condições do enunciado, em $\Delta \in \mathbb{C}^n$. Temos que $\mathcal{F}_{|_{\Delta \setminus Sing(\mathcal{F})}}$ é uma folheação holomorfa não - singular. Pela Proposição 2.10, existem uma cobertura por abertos, $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$, de $\Delta \setminus Sing(\mathcal{F})$ e campos vetoriais v_γ definidos em $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$, os quais induzem folheações $\mathcal{F}_{|_{U_\gamma}}$ e satisfazem que

$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}},$$

com $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ e
$$f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$$
onde $\mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ é o feixe de funções holomorfas não nulas definidas em $U_{\alpha\beta}$.

Para cada campo v_γ, escrevamos
$$v_\gamma = (v_1^{(\gamma)}, \dots, v_n^{(\gamma)}),$$
com $\gamma \in \Lambda$.

Como $\Delta \setminus Sing(\mathcal{F})$ é um conjunto conexo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n^{(\gamma)} \neq 0$, para todo $\gamma \in \Lambda$. Sendo assim, definamos para cada $\gamma \in \Lambda$ funções meromorfas
$$g_1^{(\gamma)} := \frac{v_1^{(\gamma)}}{v_n^{(\gamma)}}, \dots, g_{n-1}^{(\gamma)} := \frac{v_{n-1}^{(\gamma)}}{v_n^{(\gamma)}},$$
para cada aberto U_γ definido.

Mas, sabemos que dados dois campos v_α e v_β definidos nos abertos U_α e U_β, respectivamente, tais que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, então temos
$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}},$$
com $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ e $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$.

Logo, em $U_{\alpha\beta}$, temos as seguintes igualdades
$$g_1^{(\alpha)} := \frac{f_{\alpha\beta} v_1^\beta}{f_{\alpha\beta} v_n^\beta}, \dots, g_{n-1}^{(\alpha)} := \frac{f_{\alpha\beta} v_{n-1}^\beta}{f_{\alpha\beta} v_n^\beta}$$
e daí segue que
$$g_1^{(\alpha)} = g_1^{(\beta)}, \dots, g_{n-1}^{(\alpha)} = g_{n-1}^{(\beta)}.$$

Portanto, as funções meromorfas locais definidas anteriormente, definem funções meromorfas globais em $\Delta \setminus Sing(\mathcal{F})$, as quais, por um abuso de notação, denotaremos por
$$g_1, \dots, g_{n-1}.$$

Como $Sing(\mathcal{F})$ tem codimensão maior ou igual a dois, o Teorema de Extensão de Levi (Teorema 1.16) nos diz que as funções meromorfas $g_1^{(\alpha)} = g_1^{(\beta)}, \dots, g_{n-1}^{(\alpha)} = g_{n-1}^{(\beta)}$ podem ser estendidas ao polidisco Δ. Novamente, por um abuso de notação, denotaremos as novas funções meromorfas defnidas, agora em Δ, por
$$g_1, \dots, g_{n-1}.$$

Sabemos que em Δ as funções meromorfas $g_1, \ldots, g_{n-1}$ são quocientes de funções holomorfas, ou seja, em Δ temos

$$g_i = \frac{h_i}{h'_i},$$

onde h'_i e h_i são funções holomorfas definidas em Δ e $i = 1, \ldots, n-1$. Denotemos por h o mínimo múltiplo comum entre as funções h'_i. Então, teremos que o campo de vetores holomorfos definido por

$$v = (hg_1, \ldots, hg_{n-1}, h)$$

será holomorfo no polidisco Δ. E mais, seu conjunto singular está contido no conjunto singular $Sing(\mathcal{F})$. Portanto, o campo de vetores v induzirá a folheação $\mathcal{F}$ em Δ. $\square$

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação unidimensional em uma variedade complexa M. Dada uma cobertura por abertos de M, $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, sejam U_α e U_β abertos nesta cobertura tais que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Então, teremos que a folheação $\mathcal{F}$ é induzida, nos abertos U_α e U_β, por campos holomorfos v_α e v_β, respectivamente. Sendo assim, existe uma função holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*,$$

tal que $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}\setminus Sing(\mathcal{F})} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}\setminus Sing(\mathcal{F})}$.

A partir da discussão acima, vemos que para uma dada folheação holomorfa unidimensional $\mathcal{F}$ em uma variedade complexa M, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.12 *Dada uma cobertura por abertos $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ de uma variedade complexa M, para cada $\gamma \in \Lambda$ existe um campo de vetores holomorfo não singular v_γ em U_γ cujo conjunto singular tem codimensão pelo menos 2. Além disso, se U_α e U_β são abertos da cobertura $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ tais que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, então existe uma função holomorfa*

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*,$$

tal que

$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}.$$

Da Proposição 2.12 e das discussões realizadas nesta seção, podemos sintetizar que uma folheação holomorfa de dimensão 1 numa variedade complexa M pode ser caracterizada pelo seguinte conjunto de informações:

1. Existe uma cobertura por abertos, $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, de M;
2. Para cada $\gamma \in \Lambda$, existe um campo de vetores holomorfos não singular v_γ em U_γ;
3. Sempre que tivermos $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, existirá uma função

   $$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*,$$

   holomorfa tal que

   $$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}.$$

Dado um campo de vetores holomorfo v_α, definido em um aberto $U_\alpha \subset M$, definamos seu conjunto singular por

$$Sing(v_\alpha) = \{p \in U_\alpha |\, v_\alpha(p) = 0\}.$$

Claramente este é um subconjunto analítico de U_α. Pelo que discutimos até aqui, concluímos que se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, então $Sing(v_\alpha) \cap U_\alpha \cap U_\beta = Sing(v_\beta) \cap U_\alpha \cap U_\beta$. Assim, a união destes conjuntos singulares formam um subconjunto analítico de M. Isto nos induz à seguinte definição:

Definição 2.13 *A união $\bigcup_{\gamma\in\Lambda} Sing(v_\gamma)$ nos dá o conjunto singular da folheação unidimensional $\mathcal{F}$ induzida por v_γ e caracterizada pelo conjunto de informações 1, 2 e 3. Este conjunto singular será denotado por $Sing(\mathcal{F})$.*

2.2 Fibrados Associados a uma Folheação

Seja M uma variedade complexa. Mostraremos a construção de fibrados de posto 1 (ou em retas) holomorfos em M, a partir de uma folheação holomorfa unidimensional. Esta construção nos permite ver uma folheação como um morfismo de um fibrado em retas no fibrado tangente de M.

Considere $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa unidimensional sobre uma variedade complexa M. Seja $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma cobertura por abertos de M tal que para cada $\gamma \in \Lambda$, tenhamos a folheação $\mathcal{F}|_{U_\gamma}$ induzida por um campo vetorial holomorfo v_γ. Vimos que se $U_\alpha, U_\beta \in \{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ são tais que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, então existe uma função holomorfa $f_{\alpha\beta}$ definida em $U_{\alpha\beta}$ tal que

$$v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta.$$

Faremos a seguinte afirmação: $\{f_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo que falamos na seção sobre Fibrados Holomorfos. De fato, temos que

1. $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta$ em $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \neq \emptyset$;
2. $v_\beta = f_{\beta\zeta} v_\zeta$ em $\mathrm{U}_{\beta\zeta} \neq \emptyset$;
3. $v_\zeta = f_{\zeta\alpha} v_\alpha$ em $\mathrm{U}_{\zeta\alpha} \neq \emptyset$;
4. $v_\beta = f_{\beta\alpha} v_\alpha$ em $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \neq \emptyset$.

Daí, teremos que $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta = f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} v_\alpha$. Logo, $f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} = I$ em $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Por outro lado, em $U_{\alpha\beta\zeta} \neq \emptyset$, temos

$$v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta = f_{\alpha\beta} f_{\beta\zeta} v_\zeta = f_{\alpha\beta} f_{\beta\zeta} f_{\zeta\alpha} v_\alpha.$$

Logo, $f_{\alpha\beta}f_{\beta\zeta}f_{\zeta\alpha} = I$ em $U_{\alpha\beta\zeta} \neq \emptyset$.

Portanto, a família de funções holomorfas $\{f_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo e por sua vez induz um fibrado em retas holomorfo em M. Denominamos este fibrado por **fibrado cotangente à folheação** $\mathcal{F}$ e denotamos por $T\mathcal{F}^*$. O seu fibrado dual, é chamado **fibrado tangente** a $\mathcal{F}$ e o denotamos por $(T\mathcal{F}^*)^* = T\mathcal{F}$.

Uma observação aqui pertinente é que o fibrado $T\mathcal{F}$ é único, a menos de isomorfismo. Isto é, se $\{V_\xi\}_{\xi\in\Sigma}$ é outra cobertura da variedade M de forma que para cada $\xi \in \Sigma$, a folheação $\mathcal{F}|_{V_\xi}$ é induzida por um campo holomorfo v_ξ em V_ξ, então o fibrado tangente $T'\mathcal{F}$ induzido a partir de V_ξ e v_ξ é isomorfo ao fibrado $T\mathcal{F}$.

O resultado que segue nos garante que existe uma única aplicação entre os fibrados $T\mathcal{F}$ e TM, a menos de uma multiplicação desta por uma aplicação holomorfa não nula, onde TM é o fibrado tangente à variedade complexa M.

Proposição 2.14 *Existe uma aplicação entre fibrados $f : T\mathcal{F} \to TM$, tal que:*

1. *Para todo $p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$, $f|_{(T\mathcal{F})_p}$ é injetiva e $f((T\mathcal{F})_p)$ é a reta tangente à folheação $\mathcal{F}$ em p.*
2. *$p \in Sing(\mathcal{F})$ se, e somente se, $f|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv 0$.*

Além disso, se $f' : T\mathcal{F} \to TM$ é outra aplicação entre fibrados satisfazendo 1, então existe $h \in \mathcal{O}^*(M)$ tal que $f' = h.f$. Em particular, f' também satisfaz o item 2.

Demonstração: Seja $\{U_\gamma\}_{\gamma\Lambda}$ uma cobertura por abertos de M tal que, para todo $\gamma \in \Lambda$, exista um campo holomorfo v_γ que induza a folheação $\mathcal{F}|_{U_\gamma}$. Definamos o conjunto

$$\Lambda_0 = \{\gamma_0 \in \Lambda; U_{\gamma_0} \cap Sing(\mathcal{F}) \neq \emptyset\} \subset \Lambda$$

Definamos também $V_{\gamma_0} = U_{\gamma_0} \cap Sing(\mathcal{F})$ para cada $\gamma_0 \in \Lambda_0$ e para $\gamma \notin \Lambda_0$ definamos $V_\gamma := U_\gamma$. Desta forma, conseguimos definir $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ como uma cobertura aberta de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$. Pela definição de fibrados, podemos tomar, para cada $\gamma \in \Lambda$, uma trivialização local

$$T\mathcal{F}|_{V_\gamma} \cong V_\gamma \times \mathbb{C}.$$

Com esta trivialização, dado um ponto $x \in T\mathcal{F}$, podemos dizer que $x \cong (p, t)$, com $t \in \mathbb{C}$. Definamos, para cada $\gamma \in \Lambda$

$$f_\gamma(p) = tv_\gamma(p) \text{ em } V_\gamma.$$

Note que, se V_α e V_β são abertos em $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ tais que $V_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, teremos

$$\begin{aligned} f_\alpha(p) &= tv_\alpha(p) \\ &= f_{\alpha\beta}(p)v_\beta(p) = f_{\alpha\beta}tv_\beta(p) \\ &= f_{\alpha\beta}f_\beta(p) \end{aligned}$$

Logo, a aplicação f_α pode ser definida globalmente como

$$f : T\mathcal{F}|_{M\setminus Sing(\mathcal{F})} \to TM$$

Pelo Teorema de Extensão de Hartogs (Teorema 1.5), podemos estender a aplicação acima a uma aplicação que, por abuso de notação, iremos ainda denotar por f:

$$f : T\mathcal{F} \to TM.$$

Observe que se tomarmos p no conjunto $M \setminus Sing(\mathcal{F})$, então teremos $v_\alpha(p) \neq 0$ e logo a condição (1) é satisfeita.

Agora, note que nas vizinhanças do tipo $U_{\gamma_0} \setminus Sing(\mathcal{F})$, $\gamma_0 \in \Lambda_0$, f é definida de forma que esta leva cada fibra sobre $p \in U_{\gamma_0} \setminus Sing(\mathcal{F})$ à TM por meio de v_{γ_0}. Por outro lado, temos que v_{γ_0} se anula em pontos de $U_{\gamma_0} \cap Sing(\mathcal{F})$, logo, nesta intersecção, a extensão de f é identicamente nula, ou seja, para todo $p \in U_{\gamma_0} \cap Sing(\mathcal{F})$, temos

$$f|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv 0,$$

e segue o item (2) da proposição.

Seja $f' : T\mathcal{F} \to TM$ outra aplicação entre fibrados satisfazendo o item (1). Dessa forma, como as aplicações f e f' são lineares nas fibras de $T\mathcal{F}$ sobre p, temos que existe uma aplicação $h \in \mathcal{O}^*(M \setminus Sing(\mathcal{F}))$ tal que

$$f'|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv h(p)f|_{(T\mathcal{F})_p},$$

para todo $p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$.

Novamente, pelo Teorema de Extensão de Hartogs, podemos estender a aplicação h à variedade M de forma que esta aplicação seja não nula em todos os pontos de M. Portanto, podemos reescrever a relação acima de forma que tenhamos

$$f' = hf,$$

para todo $p \in M$. □

Corolário 2.15 *$\mathcal{F}$ é uma folheação não singular, isto é, $Sing(\mathcal{F}) = \emptyset$ se, e somente se, o fibrado $T\mathcal{F}$ é um subfibrado do fibrado tangente à variedade M.*

2.3 Folheações Holomorfas sobre $\mathbb{P}^n$

Nesta seção, trataremos das folheações holomorfas sobre espaços projetivos complexos. Começaremos com o conceito de grau de uma folheação em $\mathbb{P}^n$.

Definição 2.16 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação sobre $\mathbb{P}^n$ e $M \subset \mathbb{P}^n$ uma subvariedade algébrica. Dado um ponto $p \in M$, dizemos que $\mathcal{F}$ é* ***tangente*** *à M em p se $p \in Sing(\mathcal{F})$ ou se $p \notin Sing(\mathcal{F})$ e $T_p\mathcal{F} \subset TM$. Dizemos que M é* ***invariante*** *por $\mathcal{F}$ se todo ponto $p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$ é um ponto de tangência de $\mathcal{F}$ em M.*

Definição 2.17 *O* ***conjunto de tangência*** *de $\mathcal{F}$ com uma variedade não invariante M é dado por*

$$Tang(M, \mathcal{F}) = \{p \in M : p \in Sing(\mathcal{F}) \ \text{ ou } \ T_p\mathcal{F} \subset T_pM\}.$$

O resultado que se segue, nos diz a relação existente entre polinômios homogêneos de grau k e seções globais de fibrados em retas $\mathcal{O}(k)$, $k > 0$. Este resultado nos será útil, pois falaremos em momentos próximos de seções globais de fibrados em retas como sendo polinômios homogêneos.

Proposição 2.18 *Considere $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ o espaço das seções globais de um fibrado em retas $\mathcal{O}(k)$. Então, existe um isomorfismo entre tal espaço e o espaço dos polinômios homogêneos de grau k em $\mathbb{C}^{n+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, denotado por $\mathcal{S}_k$.*

Demonstração: Ver [11], páginas 164-165. $\square$

Faremos agora os cálculos para determinarmos explicitamente o grau de uma folheação unidimensional $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^n$.

Sejam V uma hipersuperfície, não singular, não invariante por $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^n$ e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão 1 também não singular sobre $\mathbb{P}^n$.

Sabemos que a hipersuperfície V é tal que $V = (f_\gamma = 0)_{\gamma \in \Lambda}$, onde cada função f_γ é uma função holomorfa definida sobre um aberto da cobertura $(U_\gamma)_{\gamma \in \Lambda}$, para cada $\gamma \in \Lambda$. Isto é, $f_\gamma \in \mathcal{O}(U_\gamma)$ com $\mathcal{O}(U_\gamma)$ o feixe das funções holomorfas definidas sobre a cobertura $(U_\gamma)_{\gamma \in \Lambda}$. Além disso, dados dois abertos U_α e U_β da cobertura $(U_\gamma)_{\gamma \in \Lambda}$ tais que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos

$$f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta.$$

A função $g_{\alpha\beta}$ é a função de transição do fibrado em retas associado à hipersuperfície V, o qual denotaremos por $\mathcal{O}(V)$.

Uma vez que a folheação unidimensional $\mathcal{F}$ é induzida em U_α e U_β por campos holomorfos v_α e v_β, respectivamente, então, existe uma função holomorfa $h_{\alpha\beta}$ definida em $U_{\alpha\beta}$ para a qual vale:

$$v_\alpha = h_{\alpha\beta} v_\beta.$$

E mais, tal função holomorfa $h_{\alpha\beta}$ é a função de transição relacionada ao fibrado cotangente à folheação $\mathcal{F}$, o qual foi definido aqui por $\mathcal{O}(k) = T^*\mathcal{F}$.

Sabemos que se $p \in U_\alpha$, então T_pV é igual ao núcleo da aplicação $df_\alpha(p)$, logo pela definição do conjunto de tangência de uma folheação, teremos:

$$Tang(V, \mathcal{F}) = \{p \in V : T_p\mathcal{F} \subset T_pV\} = \{p \in V : df_\alpha(p).(v_\alpha) = 0\}.$$

Pela definição acima e pelas igualdades anteriores podemos inferir que $\mathcal{F}$ será tangente à V se

$$df_\alpha(p)(v_\alpha) = [d(g_{\alpha\beta} f_\beta)(h_{\alpha\beta})](p).v_\beta) = 0,$$

para todo $p \in V$. Logo, pela linearidade da derivada

$$df_\alpha(p)(v_\alpha) = [h_{\alpha\beta} d(g_{\alpha\beta} f_\beta)](p).v_\beta.$$

Pela regra da cadeia, temos

$$df_\alpha(p)(v_\alpha) = [(g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} df_\beta)](p).v_\beta + [h_{\alpha\beta} f_\beta(dg_{\alpha\beta})](p).v_\beta$$

Mas, para pontos $p \in V$, sabemos que $f_\beta(p) = 0$, então teremos $h_{\alpha\beta} f_\beta(dg_{\alpha\beta}).v_\beta = 0$ e daí que

$$df_\alpha(p)(v_\alpha) = [(g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) df_\beta](p).v_\beta$$

em V.

Note que as funções de transição $g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}|_V$ induzem o fibrado $(\mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(k))|_V$. Teremos, então, que o conjunto $Tang(V, \mathcal{F})$ é dado por uma seção global (polinômio homogêneo) deste fibrado, restrita à hipersuperfície V.

Suponhamos agora que V seja um hiperplano em $\mathbb{P}^n$. Desta forma, teremos que V será isomorfo à $\mathbb{P}^{n-1}$. Sob estas hipóteses, teremos que o fibrado em retas associado a V será o fibrado hiperplano que definimos no Capítulo 1. Isto é

$$\mathcal{O}(V) \simeq \mathcal{O}(1).$$

Estas novas hipóteses nos dirão que o conjunto $Tang(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{F})$ será uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^{n-1}$ dada por uma seção global, restrita à $\mathbb{P}^{n-1}$, do fibrado $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(k) \simeq \mathcal{O}(1+k)$. Portanto, o grau do novo conjunto de tangência, $Tang(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}, \mathcal{F})$, será dado pelo grau do polinômio homogêneo que define $Tang(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{F})$. Em suma, teremos

$$deg(Tang(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}, \mathcal{F})) := d = 1 + k.$$

Evidentemente, para este caso, temos que $k = d - 1$.

2.3.1 Sequência de Euler

Veremos aqui a *Sequência de Euler*. Esta sequência nos será útil para verificarmos que uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ pode ser representada em coordenadas homogêneas, em $\mathbb{C}^{n+1}$, por um campo homogêneo polinomial de vetores cujo grau é igual ao grau da folheação $\mathcal{F}$.

Iniciaremos definindo nosso objeto de interesse. Isto é, mostraremos que existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0$$

denominada **Sequência de Euler**.

Recordemos que $\underline{\mathbb{C}}$ é o fibrado trivial de posto 1 de $\mathbb{P}^n$ e $\mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} = \mathcal{O}(1)\oplus\ldots\oplus\mathcal{O}(1)$.

Consideremos a aplicaçao quociente

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n,$$

definida por

$$\pi((z_0, z_1, \ldots, z_n)) = [z_0 : z_1 : \ldots : z_n].$$

Seja $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ um aberto em $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ e façamos a restrição

$$\pi|_{U_0}(z_0, z_1, \ldots, z_n) = [1 : \frac{z_1}{z_0} : \ldots : \frac{z_n}{z_0}].$$

Consideremos a aplicação linear tal que:

$$\pi_* v(q) = D_\pi(\pi^{-1}(q)).v(\pi^{-1}(q)),$$

onde v é um campo de vetores sobre $\mathbb{P}^n$ e $q \in \mathbb{P}^n$. A aplicação π_*, de forma intuitiva, induz uma campo vetorial em $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, a partir do campo vetorial v definido sobre $\mathbb{P}^n$.

Como $\pi^{-1}(q) = z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$, teremos

$$\pi_* v(q) = D_\pi(z).v(z).$$

Mas, $D_\pi(z)$ pode ser representada pela seguinte matriz:

$$D_\pi(z) = \begin{pmatrix} \frac{-z_1}{z_0^2} & \frac{1}{z_0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{-z_n}{z_0^2} & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{z_0} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, teremos

$$D_\pi(z)e_i = \begin{pmatrix} \frac{-z_1}{z_0^2} & \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{-z_n}{z_0^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{z_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde o 1 encontra-se na i-ésima posição. Logo,

$$D_\pi(z).e_i = \begin{cases} \dfrac{1}{z_0}\dfrac{\partial}{\partial z_i}, & \text{se } i \neq 0; \\ -\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \dfrac{z_i}{z_0^2}\dfrac{\partial}{\partial z_i}, & \text{se } i = 0. \end{cases}$$

Portanto, no ponto $p = \pi(z)$ teremos que $T_p\mathbb{P}^n$ é gerado por $\pi_*(z)\frac{\partial}{\partial z_i}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$ submetidos à *relação de Euler*

$$\pi_*(z) = \sum_{i=0}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} = 0,$$

onde $\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ é o *campo radial.*

Consideremos agora um funcional linear

$$\lambda : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C},$$

então o campo de vetores sobre z, definido por $v(z) = \lambda(z)\frac{\partial}{\partial z_i}$ induz um campo holomorfo em $\mathbb{P}^n$. De fato, temos que para $i \neq 0$,

$$\pi_* v(z) = \pi_*(\lambda(z)\frac{\partial}{\partial z_i}) = \lambda(z)\pi_*(\frac{\partial}{\partial z_i}) = \frac{\lambda(z)}{z_0}\frac{\partial}{\partial z_i}$$

e para $t \in \mathbb{C}^*$

$$\pi_* v(tz) = \pi_*(\lambda(tz)\frac{\partial}{\partial z_i}) = \lambda(tz)\pi_*(\frac{\partial}{\partial z_i}) = \frac{\lambda(tz)}{tz_0}\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{t\lambda(z)}{tz_0}\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\lambda(z)}{z_0}\frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Para $i = 0$, temos

$$\pi_* v(z) = \pi_*(\lambda(z)\frac{\partial}{\partial z_i}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(z)}{z_0^2}\frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Logo, para $t \in \mathbb{C}^*$ teremos que

$$\pi_* v(tz) = \pi_*(\lambda(tz)\frac{\partial}{\partial z_i}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(tz_i)}{tz_0^2}\frac{\partial}{\partial z_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{t(\lambda(z_i))}{tz_0^2}\frac{\partial}{\partial z_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(z_i)}{z_0^2}\frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\pi_* v(z) = \pi_* v(tz), \forall t \in \mathbb{C}^*, \forall z \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Isto significa que um campo de vetores de grau 1 é levado à $\mathbb{P}^n$ pela aplicação π_*.

Temos que a fibra de $\mathcal{O}(1)$ sobre o ponto $p = \pi(z)$ é o espaço gerado pelo vetor z e a denotaremos por $\mathcal{O}_p(1)$. Assim, por dualidade, teremos $\mathcal{O}_p(1) = \langle z \rangle^*$. Então, uma seção de $\mathcal{O}^{\oplus(n+1)}$ é dada por $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, com cada λ_i um funcional linear.

Definamos um morfismo de fibrados

$$\begin{array}{cccc} \xi & : & \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} & \rightarrow & T\mathbb{P}^n \\ & & s & \mapsto & \pi_*(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial z_i}) \end{array}$$

Observe que ξ é sobrejetiva, pois $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial z_i})$ define um campo holomorfo sobre $\mathbb{P}^n$ e além disso $\pi_*(\frac{\partial}{\partial z_i})$ geram $T\mathbb{P}^n$. Além disso, o núcleo de ξ é o fibrado trivial sobre $\mathbb{P}^n$, gerado pela seção $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ uma vez que é válida a relação de Euler.

Portanto, a sequência de Euler definida no início desta seção é exata como afirmamos.

2.4 Representação de Folheações Holomorfas em Coordenadas Homogêneas

Falaremos sobre a representação de folheações holomorfas unidimensionais em coordenadas homogêneas.

Como calculado na seção 2.3, se $\mathcal{F}$ for uma folheação unidimensional, de grau $d > 0$, tangente à $\mathbb{P}^n$, então $k = d - 1$ em $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$. Logo, pela Proposição 2.18, teremos que

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \simeq \mathcal{S}_{d-1}.$$

Proposição 2.19 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa unidimensional, de grau d, em $\mathbb{P}^n$. Então, $\mathcal{F}$ pode ser representada em coordenadas homogêneas em $\mathbb{C}^{n+1}$ por um campo polinomial homogêneo v de grau d, módulo a multiplicação de um polinômio homogêneo de grau $d-1$ pelo campo radial $R = \sum_{i=0}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Em outras palavras, dois campos polinomiais homogêneos v e v' representam a mesma folheação unidimensional $\mathcal{F}$ se*

$$v = v' + gR.$$

Demonstração: Consideremos a Sequência de Euler:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0.$$

Consideremos também, uma folheação holomorfa unimensional $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}^n$, cujo grau seja igual a $d > 0$. Façamos o produto tensorial da sequência acima pelo fibrado em retas $\mathcal{O}(d-1)$ associado à folheação $\mathcal{F}$. Após tal operação, a sequência acima ficará

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(d-1) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(d)^{\oplus n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(d-1) \longrightarrow 0.$$

Sabemos que uma folheação $\mathcal{F}$ com de grau $d > 0$, em $\mathbb{P}^n$, induz uma seção global no fibrado $T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(d-1)$. Representaremos tal seção por $s \in H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(d-1))$. O que veremos agora é que a folheação $\mathcal{F}$ de grau $d > 0$ sobre $\mathbb{P}^n$ pode ser representada, em coordenadas homogêneas, por uma classe de campos homogêneos com respeito a seção s. De fato, definamos a aplicação

$$\varphi : \mathcal{O}(d-1) \to \mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}$$

presente na sequência acima de forma que, para g uma seção global do fibrado $\mathcal{O}(d-1)$, que pode ser vista como um polinômio homogêneo de grau $d-1$, tenhamos

$$\varphi(g) = gR,$$

com $R = \sum_{i=0}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ o campo radial. Por outro lado, como a sequência de Euler é uma sequência exata teremos que

$$T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(d-1) \simeq \frac{\mathcal{O}(d)^{\oplus n+1}}{\mathcal{O}(d-1)}.$$

Desta afirmação e do isomorfismo acima, concluimos que a folheação $\mathcal{F}$ pode ser representada em coordenadas homogêneas por um campo homogêneo polinomial de vetores em $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)^{\oplus n+1})$, digamos $v = \sum_{i=0}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, módulo a multiplicação de um polinômio $g \in \mathcal{O}(d-1)$ pelo campo radial R.

Isto é, dois campos de vetores, v e v', com respeito a s, $s' \in H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(d-1)$, respetivamente, representam a mesma folheação $\mathcal{F}$ de grau $d > 0$ em $\mathbb{P}^n$ se, e somente se existe um polinômio de grau $d-1$ em $\mathcal{O}(d-1)$ tal que $v_s = v' + gR$. $\square$

Capítulo 3

Determinação de Folheações Projetivas pelo seu Conjunto Singular

Neste capítulo vamos demonstrar o teorema de determinação de folheações holomorfas projetivas pelo seu conjunto singular alcançando o objetivo principal de nosso trabalho.

Em 1989, Gómez-Mont e Kempf em [12] provaram que uma folheação de grau igual a $d > 0$, em $\mathbb{P}^n$, é unicamente determinada por seu subesquema de pontos singulares, sendo este degenerado. Isto é, fixado $d > 0$, não existem duas folheações diferentes com o mesmo conjunto singular. Mais tarde, Antônio Campillo e Jorge Olivares provaram, em [5], o resultado de Gómez-Mont e Kempf para folheações por curvas sobre variedades compactas e *Kähler* de dimensão $n \geq 2$, retirando-se a hipótese de que o conjunto singular destas é não degenerado.

O teorema a ser provado neste capítulo (Teorema (3.3)) se refere ao resultado de Gómez-Mont e Kempf nos restringindo a folheações projetivas unidimensionais. Mostraremos que estas são unicamente determinadas por seu conjunto singular e, assim como Campillo e Olivares, não nos apoiaremos na hipótese de que este conjunto singular é não degenerado. Faremos uso dos conceitos até aqui explorados e utilizaremos técnicas cohomológicas para a obtenção do resultado desejado.

Recentemente, Corrêa Júnior e Araújo em [1], apresentam uma generalização do resultado provado neste capítulo provando que sob certas condições uma folheação projetiva é unicamente determinada por seu esquema singular.

Antes de enunciarmos e provarmos o teorema de determinação de folheações projetivas por seu conjunto singular, vejamos alguns resultados relevantes.

Recordemos que neste trabalho não faremos distinção de notação entre fibrados holomorfos e feixes localmente livres. A fim de simplicarmos nossa notação, façamos as seguintes identificações:

1. $T\mathbb{P}^n = \mathcal{E}$;
2. $T^*\mathbb{P}^n = \Omega^1$.

Ainda sobre $\mathbb{P}^n$, consideremos o fibrado hiperplano $\mathcal{O}(1)$ e façamos o produto tensorial de $\mathcal{E}$ por $\mathcal{O}(1)^{\otimes k}$ da seguinte maneira:

$$T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes k} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes k} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(k) = \mathcal{E}(k), \text{ onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Definição 3.1 *Sejam $k \in \mathbb{Z}^*$ e $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k))$ uma seção global do fibrado $\mathcal{E}(k)$. O conjunto dos pontos $p \in \mathbb{P}^n$ tais que $s(p) = 0$ é denominado **conjunto singular da seção** s e o identificaremos por*

$$Sing(s) = \{p \in \mathbb{P}^n \textit{ tais que } s(p) = (s_1(p) = \ldots = s_n(p) = 0)\}.$$

*Para nosso estudo, $Sing(s)$ será considerado um conjunto **isolado**.*

Seja $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n)$ o feixe de anéis dos germes das funções holomorfas definidas sobre $\mathbb{P}^n$ e $I \subset \mathcal{O}(\mathbb{P}^n)$ o feixe de ideais gerado localmente pelos coeficientes da seção s. Isto é, considerando-se $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma cobertura por abertos de $\mathbb{P}^n$ e $\mathcal{O}(U_\gamma)$ o feixe de anéis dos germes das funções holomorfas definidas sobre os abertos desta cobertura, teremos que

$$s|_{U_\gamma} = (s_1^\gamma, \ldots, s_1^\gamma) : \mathcal{O}(U_\gamma) \to \mathcal{E}(k) \text{ e } I = \langle s_1^\gamma, \ldots, s_1^\gamma \rangle.$$

Ao ideal I temos associada a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\tilde{s_0}} \frac{\mathcal{O}(\mathbb{P}^n)}{I} \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Mas, temos que $\frac{\mathcal{O}(\mathbb{P}^n)}{I} \simeq \mathcal{O}_{Sing(s)}$, onde $\mathcal{O}_{Sing(s)}$ denota o feixe de germes de funções holomorfas sobre $Sing(s)$. Logo, a sequência (3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\tilde{s_0}} \mathcal{O}_{Sing(s)} \longrightarrow 0.$$

A sequência exata acima nos garante que a aplicação $\tilde{s_0}$ é sobrejetora, fato que nos será útil mais adiante.

A proposição seguinte nos fornecerá anulamentos de certos grupos de cohomologia importantes para a finalização desta dissertação.

Proposição 3.2 *Seja* $\wedge^q \mathcal{E}^*(k) = \Omega^q \otimes \mathcal{O}((1-q)(k))$*, onde* $k > 0$*,* $0 \leq q \leq n$ *e* $n \geq 2$*. Então,* $H^p(\mathbb{P}^n, \wedge^q \mathcal{E}^*(k)) = 0$ *se* $p < q$*, exceto para* $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E})$ *que é isomorfo a* $\mathbb{C}$*.*

Demonstração: Ver [12], página 473. □

A seguir, enunciaremos e provaremos o teorema de determinação de folheações projetivas unidimensionais por seu conjunto singular. Informalmente, temos o seguinte: sejam s e s' seções globais do fibrado $T\mathbb{P}^n$. Estas seções induzem folheações unidimensionais sobre $\mathbb{P}^n$, digamos $\mathcal{F}_s$ e $\mathcal{F}_{s'}$, respectivamente. Caso tenhamos que $Sing(s') \supset Sing(s)$, então as folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_{s'}$ serão iguais. Em linhas gerais, o teorema nos diz que não existem folheações projetivas unidimensionais distintas com mesmo conjunto singular.

Teorema 3.3 *Seja* $\mathcal{F}_s$ *uma folheação unidimensional sobre* $\mathbb{P}^n$*, de grau* $d > 1$*, induzida pela seção* $s \in H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k))$*, com* $k > 0$*. Suponhamos que o conjunto singular de s,* $Sing(s) = (s = 0)$*, seja isolado. Se* $s' \in H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(k))$ *é tal que* $Sing(s') \supset Sing(s)$*, então existe* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *tal que*

$$s' = \lambda s.$$

Isto é, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s'}$*.*

Demonstração: Dualizando o fibrado $\mathcal{E}(k)$, teremos

$$\mathcal{E}^*(k) = \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{O}(-1)^{\otimes k} = \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{O}(-k),$$

onde $k > 0$, uma vez que pelos cálculos realizados na seção 2.3, temos $k = d-1$ e estamos supondo $d > 1$.

Consequentemente, teremos que o j-ésimo produto exterior do fibrado $\mathcal{E}^*(k)$ ficará

$$\wedge^j \mathcal{E}^*(k) = \wedge^j \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes -jk} = \wedge^j \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{O}(-jk) \text{ com } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Como $\mathcal{E}^* = \Omega^1$, temos

$$\wedge^j \mathcal{E}^*(k) = \Omega^j \otimes \mathcal{O}(-jk) \text{ com } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Fixemos uma seção $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k))$

$$s : \mathcal{O}(\mathbb{P}^n) \to \mathcal{E}(k),$$

com $Sing(s) = (s = 0)$ isolado. Dualizando a seção global acima teremos

$$s^* : \varepsilon^*(k) \to \mathcal{O}(\mathbb{P}^n).$$

Restringindo s a abertos de uma cobertura $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ de $\mathbb{P}^n$, teremos

$$s^*|_{U_\gamma} : \varepsilon^*(k)|_{U_\gamma} \to \mathcal{O}(U_\gamma).$$

Considerando o complexo de Koszul com respeito a $s|_{U_\gamma} = (s_1^\gamma, \ldots, s_n^\gamma)$ teremos

$$\mathcal{K}(s|_{U_\gamma}) : 0 \longrightarrow \wedge^n \mathcal{E}^*(-nk) \xrightarrow{\tilde{s_n}} ... \xrightarrow{\tilde{s_2}} \wedge^1 \mathcal{E}^*(-k) \xrightarrow{\tilde{s_1}} \mathcal{O}(U_\gamma) \xrightarrow{\tilde{s_0}} \mathcal{O}_{Sing(s)} \longrightarrow 0 \quad (3.2)$$

Fazendo o produto tensorial $\mathcal{K}(s|_{U_\gamma}) \otimes \mathcal{E}(k)$, teremos para cada elemento de $\mathcal{K}(s|_{U_\gamma})$ a seguinte operação:

$$\wedge^j \mathcal{E}^*(-jk) \otimes \mathcal{E}(k), \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

A fim de simplificarmos a notação dos elementos acima coloquemos

$$\mathcal{G}^j = \wedge^j \mathcal{E}^*(-jk) \otimes \mathcal{E}, \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sob esta nova notação, tensorizando a sequência de Koszul por $\mathcal{E}(k)$ obtemos a sequência

$$\mathcal{K}(s|_{U_\gamma}) : 0 \longrightarrow \mathcal{G}^n(k) \xrightarrow{\tilde{s_n}} \ldots \xrightarrow{\tilde{s_2}} \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{s_1}} \mathcal{E}(k) \xrightarrow{\tilde{s_0}} \mathcal{E}(k)|_{Sing(s)} \longrightarrow 0 \quad (3.3)$$

uma vez que

$$\mathcal{G}^1((k)) = \wedge^1 \mathcal{E}^*(-k) \otimes \mathcal{E}(k) = \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$$

e

$$\mathcal{O}_{Sing(s)} \otimes \mathcal{E}(k) = \mathcal{E}(k)|_{Sing(s)}.$$

Como $Sing(s)$ é um conjunto isolado, segue da proposição 1.96 que $s|_{U_\gamma} = (s_1^\gamma, \ldots, s_n^\gamma)$ é uma sequência regular. Logo, o complexo (3.3) é uma sequência exata. Mas, a proposição 1.60 nos diz que o complexo (3.3) é uma sequência exata se, e somente se, é uma sequência globalmente exata. Logo, teremos que o complexo de Koszul com respeito a s

$$\mathcal{K}(s) : 0 \longrightarrow \mathcal{G}^n(k) \xrightarrow{\tilde{s_n}} \ldots \xrightarrow{\tilde{s_2}} \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{s_1}} \mathcal{E}(k) \xrightarrow{\tilde{s_0}} \mathcal{E}(k)|_{Sing(s)} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata.

Com a finalidade de induzirmos uma sequência longa de cohomologia para $\mathcal{K}(s)$, façamos a seguinte decomposição deste em sequências exatas curtas:

$$0 \longrightarrow K^0(k) \longrightarrow \mathcal{E}(k) \xrightarrow{\tilde{s_0}} \mathcal{E}(k)|_{Sing(s)} \longrightarrow 0; \quad (3.4)$$

$$0 \longrightarrow K^1(k) \longrightarrow \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{s_1} K^0(k) \longrightarrow 0; \quad (3.5)$$

$$0 \longrightarrow K^p(k) \longrightarrow \mathcal{G}^p(k) \xrightarrow{s_p} K^{p-1}(k) \longrightarrow 0, \ p = 2, ..., n-2; \quad (3.6)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^n(k) \xrightarrow{s_n} \mathcal{G}^{n-1}(k) \xrightarrow{s_p} K^{n-2}(k) \longrightarrow 0,\ p = n-1. \tag{3.7}$$

Os elementos $K^j(k),\ j \in \{1, \ldots, p\}$ denotam os núcleos das aplicações $\tilde{s_j}$, $j \in \{0, \ldots, n-2\}$, respectivamente.

Para as sequências exatas curtas acima, é possível induzirmos sequências exatas longas de Cohomologia de Čech. Abaixo, seguem estas sequências.

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, K^0(k)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) \xrightarrow{\tilde{s}_0^0} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)|_{Sing(s)}) \longrightarrow \ldots \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, K^1(k)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{s_1^0} H^0(\mathbb{P}^n, K^0(k)) \xrightarrow{\delta_1^0} \\ \xrightarrow{\delta_1^0} H^1(\mathbb{P}^n, K^1(k)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, K^0(k)) \longrightarrow \ldots \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow H^{p-2}(\mathbb{P}^n, K^p(k)) \longrightarrow H^{p-2}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^p(k)) \xrightarrow{s_p^{p-2}} H^{p-2}(\mathbb{P}^n, K^{p-1}(k)) \xrightarrow{\delta_p^{p-2}} \\ \xrightarrow{\delta_p^{p-2}} H^{p-1}(\mathbb{P}^n, K^p(k)) \longrightarrow H^{p-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^p(k)) \xrightarrow{s_{p-1}^p} H^{p-1}(\mathbb{P}^n, K^{p-1}(k)) \xrightarrow{\delta_p^{p-1}} \\ \xrightarrow{\delta_p^{p-1}} H^p(\mathbb{P}^n, K^p(k)) \longrightarrow H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^p(k)) \longrightarrow H^p(\mathbb{P}^n, K^{p-1}(k)) \longrightarrow \ldots \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow H^{n-3}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^n(k)) \longrightarrow H^{n-3}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^{n-1}(k)) \xrightarrow{s_{n-1}^{n-3}} H^{n-3}(\mathbb{P}^n, K^{n-2}(k)) \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-3}} \\ \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-3}} H^{n-2}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^n(k)) \longrightarrow H^{n-2}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^{n-1}(k)) \xrightarrow{s_{n-1}^{n-2}} H^{n-2}(\mathbb{P}^n, K^{n-2}(k)) \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-2}} \\ \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-2}} H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^n(k)) \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^{n-1}(k)) \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, K^{n-2}(k)) \longrightarrow \ldots \end{aligned} \tag{3.11}$$

Antes de prosseguirmos, observamos que o mapa $\widetilde{s_0^0}$ é o mapa de restrição ao conjunto $Sing(s)$. Isto é, se $g \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k))$, então $\widetilde{s_0^0}(g) = g|_{Sing(s)}$.

Seja $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k))$, cujo conjunto singular, $Sing(s)$, é isolado. Considere s' outra seção tal que $s' \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k))$ e suponhamos que $Sing(s') \supset Sing(s)$.

Por construção, as seções s e s' pertencem ao núcleo da aplicação $\tilde{s}_0^0$, a saber, $H^0(\mathbb{P}^n, K^0(k))$. Ora, como estamos supondo que $Sing(s') \supset Sing(s)$, então temos que $\tilde{s}_0^0(s') = s'|_{Sing(s)} = 0$.

Por outro lado, segue da Proposição 3.2 que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \simeq \mathbb{C}$. Então, se provarmos que o mapa s_1^0 é um isomorfismo, teremos que o grupo $H^0(\mathbb{P}^n, K^0(k))$, ao qual pertencem s e s', será isomorfo à $\mathbb{C}$ e daí teremos que existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$s' = \lambda s.$$

Sabemos que as seções globais s e s' são campos de vetores em $\mathbb{P}^n$, logo cada uma destas seções induzem folheações unidimensionais, digamos $\mathcal{F}_s$ e $\mathcal{F}_{s'}$, respectivamente, em $\mathbb{P}^n$. Portanto, provando o argumento discutido no parágrafo anterior, provaremos que as seções s e s' induzem a mesma folheação unidimensional. Isto é,

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s'}.$$

Para provar que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \simeq H^0(\mathbb{P}^n, K^0(k))$ é suficiente provarmos que

$$H^0(\mathbb{P}^n, K^1(k)) = H^1(\mathbb{P}^n, K^1(k)) = 0. \tag{3.12}$$

Contudo, obter esta igualdade é equivalente a provarmos que

$$H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^q(k)) = 0, \text{ para } 2 \leq q \leq n, \; q-2 \leq p \leq q-1 \tag{3.13}$$

que segue da Proposição 3.1.

De fato, por (3.13), obtemos os seguintes anulamentos:

$$\begin{aligned} H^{n-3}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^{n-1}(k)) &= H^{n-2}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^n(k)) = H^{n-2}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^{n-1}(k)) \\ &= H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^n(k)) = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $p = n-1$. Pelos anulamentos (3.14), teremos

$$H^{n-3}(\mathbb{P}^n, K^{n-2}(k)) = H^{n-2}(\mathbb{P}^n, K^{n-2}(k)) = H^{n-1}(\mathbb{P}^n, K^{n-2}(k)) = 0 \tag{3.15}$$

na sequência (3.11).

Por (3.13) teremos que

$$H^{p-2}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^p(k)) = H^{p-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^p(k)) = 0 \tag{3.16}$$

para $p = 2, \ldots, n-2$.

Assim, na sequência (3.10) segue que

$$H^{p-2}(\mathbb{P}^n, K^{p-1}(k)) = H^{p-1}(\mathbb{P}^n, K^p(k)) \tag{3.17}$$

onde $p = 2, \ldots, n-2$. Observe que para $p = 2$, teremos

$$H^0(\mathbb{P}^n, K^1(k)) = H^1(\mathbb{P}^n, K^2(k)). \tag{3.18}$$

Considerando os anulamentos (3.15) e a igualdade (3.17), podemos verificar que

$$H^{p-1}(\mathbb{P}^n, K^p(k)) = 0 \ \text{ e } \ H^p(\mathbb{P}^n, K^p(k)) = 0 \tag{3.19}$$

para todo $p = 2, \ldots, n-2$. Em particular, para $p = 2$, teremos que

$$H^1(\mathbb{P}^n, K^2(k)) = 0 \ \text{ e } \ H^2(\mathbb{P}^n, K^2(k)) = 0. \tag{3.20}$$

Logo, $H^0(\mathbb{P}^n, K^1(k)) = 0$ uma vez que temos a igualdade (3.18).

Agora, basta mostrarmos que $H^1(\mathbb{P}^n, K^1(k)) = 0$. Mas, considerando-se $p = 2$ na sequência (3.10)

$$\begin{aligned} \ldots \to H^0(K^p(2)) \to H^0(\mathcal{G}^2(k)) &\stackrel{s_2^0}{\to} H^0(K^1(k)) \\ \stackrel{\delta_2^0}{\to} H^1(K^2(k)) \to H^1(\mathcal{G}^2(k)) &\stackrel{s_1^2}{\to} H^1(K^1(k)) \stackrel{\delta_2^1}{\to} \\ \stackrel{\delta_2^1}{\to} H^2(K^2(k)) \to H^2(\mathcal{G}^2(k)) &\to H^2(K^1(k)) \to \ldots \end{aligned}$$

e levando-se em conta os anulamentos até então encontrados, teremos a igualdade desejada. Assim, concluímos a prova de (3.12).

Logo,

$$\mathbb{C} \simeq H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \simeq H^0(\mathbb{P}^n, K^0(k)).$$

O isomorfismo acima nos diz que se s e s' são seções em $H^0(\mathbb{P}^n, K^0(k))$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$s' = \lambda s.$$

Portanto, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s'}$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ARAUJO C., & CORRÊA JR., M., *On degeneracy schemes of maps of vector bundles and applications to holomorfic foliations*, arXiv: 1207.5009v1 [math.AG], 20 Jul 2012.

[2] BAUM P., & BOTT R., *Singularities of Holomorphic Foliations*, Jour. of Diff. Geom. 7, (1972), 279-342

[3] CAMACHO, C. & LINS NETO, A. Geometric theory of foliations, Birkhäuser Boston, Inc., 1985.

[4] CAMPILLO A., OLIVARES J., *Polarity with respecto to a foliation and Cayley-Bacharach Theorems*, J. reine angew. Math. 534 (2001), 95-118.

[5] CAMPILLO, A. & OLIVARES, J., *On sections with idolated singularities of twisted bundles and application to foliations by curves*, Mathematical Research Letters 10, (2003), 651 - 658.

[6] EHRESMANN C., REEB G., *Sur les champs d eléments de contact complétement intégrables d ans une varieté continuement différentiable*, C.R. Acad. Sci. Paris, 218, 1944, p. 955-957.

[7] EHRESMANN C., SHIH W. *C.R. Acad.* Sci. Paris 243, (1956).

[8] EISENBUD, D., *Comutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1995).

[9] GELFAND, S. I.& MANIN, Y. I., *Methods of Homological Algebra*, Springer, Moscow, (1988).

[10] GIRALDO L., PAN-COLLANTES A. J., *On the singular scheme of codimension one holomorphic foliations in* $\mathbb{P}^3$, Internat. J. Math, 7 (2010), 843-858.

[11] GRIFFITHS, Ph. & HARRIS, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience (John Wiley & Sons, Inc), New York, (1978).

[12] GÓMEZ-MONT, X. & KEMPF, G., *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*, Comment. Math. Helvetici 64, (1989), 462 - 473.

[13] HARTSHORNE R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, (1977)

[14] HIZEBRUCH F., *Topological Methods in Algebraic Geometry.* Second corrected printing of the third edition. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 131. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1978).

[15] JACOBSON N., *Basic Algebra II.* Second edition. W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York, (1989).

[16] LINS NETO, A. & SCÁRDUA, A. B. *Folheações algébricas complexas*, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1997).

[17] MÓL, R. S. & SOARES, M. G., *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*, Notas de aula, maio de 2001.

[18] OKONEK C., SCHNEIDER M. & SPINDLER H., *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics, 3. *Birkhaüser* (1980).

[19] REEB G., *Sur les varietés intégrables de champs delements de contact complétement intégrables*, C.R. Acad. Sci. Paris, 220, 1945 pg. 236-237.

[20] REEB G., *Sur les points singuliers dune forme de Pfaff complétement intégrable ou d une fonction numérique*, C.R. Acad. Sci. Paris, 222, 1946 pg. 847-849.

[21] ROTMAN, J., *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall; 1st edition (2002); 2nd printing (2003), ISBN: 0130878685

[22] SEBASTIANI, M., *Introdução à Geometria Analítica Complexa*, 2 ed. Rio de Janeiro: Publicações Matemáticas do IMPA, ISBN: 978-85-244-0218-0, (2010).

[23] TU, W.L., *An introduction to manifolds*, 2ed. Springer, (2010).