

**ADINELE GOMES GUIMARÃES**

**ANÁLISE INVERSA PARA DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS  
DE DEFORMABILIDADE DE SOLOS**

**Tese apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil,  
para obtenção do título de *Doctor  
Scientiae*.**

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2008**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

G963a  
2008

Guimarães, Adinele Gomes, 1976-  
Análise inversa para determinação de parâmetros de  
deformabilidade de solos / Adinele Gomes Guimarães.  
– Viçosa, MG, 2008.  
xxviii, 200f.: il. (algumas col.) ; 29cm.

Inclui anexos.

Orientador: Izabel Chistina d'Almeida Duarte de  
Azevedo.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 195-200.

1. Materiais - Deformação. 2. Modelos matemáticos.  
3. Otimização matemática. 4. Programação não-linear.  
5. Algoritmos genéticos. I. Universidade Federal de Viçosa.  
II. Título.

CDD 22.ed. 624.15136

**ADINELE GOMES GUIMARÃES**

**ANÁLISE INVERSA PARA DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS  
DE DEFORMABILIDADE DE SOLOS**

**Tese apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil,  
para obtenção do título de *Doctor  
Scientiae*.**

**APROVADA: 7 de março de 2008.**

---

**Prof. Roberto Francisco de Azevedo  
Co-orientador**

---

**Prof<sup>a</sup>. Rita de Cássia S. S. Alvarenga**

---

**Prof. Eurípedes do Amaral Vargas Jr.**

---

**Prof. Luiz Eloy Vaz**

---

**Prof<sup>a</sup>. Izabel Christina d'A. Duarte de Azevedo  
Orientadora**

*Dedico este trabalho à minha mãe,  
exemplo de vida e de mulher. Hoje  
compreendo a difícil tarefa de conciliar  
o trabalho e a família.*

---

---

## INDICE

<b>AGRADECIMENTOS</b>	vi
<b>BIOGRAFIA</b>	viii
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	ix
<b>LISTA DE TABELAS</b>	xx
<b>RESUMO</b>	xxiv
<b>ABSTRACT</b>	xxvi

### CAPÍTULOS

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	1
<b>1.1 Generalidades</b>	1
<b>1.2 Trabalhos Correlatos</b>	3
<b>1.3 Objetivos</b>	7
<b>1.4 Organização</b>	8
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	9
<b>2.1 Modelos Constitutivos</b>	9
<b>2.1.1 Modelo hiperbólico</b>	10
<b>2.1.2 Modelo Lade-Kim</b>	13
<b>2.1.3 Modelo Lade-Kim para solos não saturados</b>	17
<b>2.2 Análise Inversa</b>	21
<b>2.2.1 Problema matemático</b>	21
<b>2.2.2 Critérios de Identificação</b>	23
<b>2.3 Técnicas de Otimização</b>	25
<b>2.3.1 Problemas de otimização</b>	25
<b>2.3.2 Programação matemática</b>	30
<b>2.3.2.1 Método de Máximo Declive ou Gradiente</b>	33
<b>2.3.2.2 Método de Newton</b>	33
<b>2.3.2.3 Métodos quase-Newton</b>	35
<b>2.3.3 Otimização Global</b>	39
<b>2.3.4 Algoritmos Genéticos</b>	41

2.3.4.1 Terminologia	45
2.3.4.2 Mecanismos	47
2.3.4.3 Recombinação ou <i>crossover</i>	54
2.3.4.4 Mutação	57
2.3.4.5 Variáveis de influência e configuração	60
2.4. Análise de Sensibilidade	62
2.4.1 Matriz sensibilidade (Jacobiana)	63
2.4.2 Coeficientes de variação e correlação	65
2.4.3 Sensibilidade de escala comparada	67
3. MATERIAIS E MÉTODOS	69
3.1 Materiais	69
3.1.1 Areias do Rio Sacramento	69
3.1.2 Solo residual jovem de gnaisse	72
3.2 Procedimento Matemático	80
3.2.1 Função objetivo	81
3.2.2 Estratégia de otimização	84
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	91
4.1 Estudo da estratégia de otimização	91
4.1.1 Modelo Hiperbólico	91
4.1.1.1 Calibração tradicional	91
4.1.1.2 Análise sensibilidade	92
4.1.1.3 Otimização	94
4.1.2 Modelo Lade-Kim	103
4.1.2.1 Calibração tradicional	103
4.1.2.2 Análise sensibilidade	106
4.1.2.3 Otimização	108
4.2 Estudo da matriz de peso	130
4.3 Estudo dos tipos de ensaios	138
4.3.1 Análise inversa dos ensaios saturados	138
4.3.2 Análise inversa dos ensaios não-saturados	142
4.3.3 Simulação dos ensaios saturados e não-saturados	151
4.3.4 Simulação das trajetórias não convencionais	170
5. CONCLUSÕES	175

<b>Anexo A – Softwares sem registro ou patente</b>	180
<b>Anexo B – Calibração Tradicional do Modelo Hiperbólico</b>	182
<b>Anexo C – Calibração Tradicional do Modelo Lade-Kim</b>	185
<b>REFERÊNCIAS</b>	195

---

---

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida e por iluminar minha caminhada.

Ao meu filho, Heitor, razão da minha vida, que mesmo sem compreender me motiva.

Ao meu esposo, Paulo, pela cumplicidade, paciência e incentivo nos momentos difíceis.

Aos meus pais, pelo exemplo de dedicação e apoio indispensável para minhas realizações.

As minhas irmãs, Nádia e Denita, meu irmão Freddy, minha cunhada Andrezza e meus sobrinhos, Laira e Arthur, pelo estímulo. Em especial ao Freddy, pelos ensinamentos que tornaram possível a concretização desse trabalho.

À Zica e a todos os familiares pela torcida.

À Professora Izabel Azevedo, pelo profissionalismo e competência nas orientações, pela amizade e confiança em mim depositada.

Ao Professor Roberto Azevedo, pelos valiosos conselhos e ensinamentos.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da UFMG, que formaram a base da minha formação profissional.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFV que ampliaram a minha formação, em especial, ao Professor Enivaldo Minette, pela acolhida.

A todos os meus amigos e colegas da pós-graduação pelo companheirismo e momentos de descontração, em especial, Simone, Andréia, Thatiana, Rejane e Gisele.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Civil, em especial ao Julinho do Laboratório Engenharia Civil e à secretária da pós, Cristina, pelo auxílio em vários momentos desse trabalho.

Às funcionárias do LDI, que com carinho cuidaram do meu filho, para que eu pudesse me dedicar integralmente aos estudos.

À Universidade Federal de Viçosa – UFV, pela oportunidade de realizar esse trabalho.

À CAPES pela bolsa de estudo concedida.

A todos aqueles que contribuíram para este trabalho.

---

---

## BIOGRAFIA

ADINELE GOMES GUIMARÃES, filha de Saulo Fernandes Guimarães e Francisca Gomes Guimarães, nasceu em 13 de julho de 1976, em Belo Horizonte, Minas Gerais.

Em 1993, concluiu o Ensino Médio na Escola Estadual Governador Milton Campos, em Belo Horizonte - MG.

Em 1995, iniciou o curso de Decoração na Universidade do Estado de Minas Gerais, concluindo-o em dezembro de 1998.

Em 1997, iniciou o curso de Engenharia Civil na Universidade Federal de Minas Gerais, concluindo-o em setembro de 2002. Durante a graduação, teve a oportunidade de realizar estágio e de participar do Programa de Aprimoramento Discente (PAD – Departamento de Materiais e da Construção Civil) e do Programa de Bolsas de Extensão (Projeto CIPMOI – Curso Intensivo de Preparação de Mão-de-Obra Industrial). Em outubro de 2002, recebeu a homenagem do Departamento de Engenharia de Materiais e Construção Civil da Escola de Engenharia da UFMG pelo desempenho na ênfase de Construção Civil do curso de Engenharia Civil.

Em março de 2003, ingressou no Programa de Pós-Graduação em Geotecnia do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Viçosa, atuando na linha de pesquisa “Geotecnia analítica e experimental”. Em junho de 2004, foi aprovada a mudança de nível do mestrado para o doutorado sem a defesa de tese, submetendo-se à defesa de tese de doutorado em março de 2008.

---

---

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação hiperbólica de uma curva tensão-deformação	11
Figura 2.2 – Superfície de plastificação do modelo Lade-Kim	17
Figura 2.3 – Valores de poro-pressão equivalente	19
Figura 2.4 – Principais componentes de um problema de identificação de parâmetros	23
Figura 2.5 – Tipos de problemas de otimização	27
Figura 2.6 – Classificação geral dos métodos de otimização	28
Figura 2.7 – Fluxograma do algoritmo genético padrão	43
Figura 3.1 – Pontos experimentais da areia fofa ( $e = 0.87$ ) do Rio Sacramento (a) ensaios triaxiais convencionais e (b) ensaio de compressão isotrópica	70
Figura 3.2 - Pontos experimentais da areia densa ( $e = 0.61$ ) do Rio Sacramento (a) ensaios triaxiais convencionais e (b) ensaio de compressão isotrópica	71
Figura 3.3 – Curva Granulométrica do solo residual jovem de gnaiss	72
Figura 3.4 - Pontos experimentais do ensaio HC saturado	74
Figura 3.5 - Pontos experimentais do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa	74
Figura 3.6 - Pontos experimentais do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa	75
Figura 3.7 - Pontos experimentais do ensaio CTC saturado	75
Figura 3.8 - Pontos experimentais do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa	76

Figura 3.9 - Pontos experimentais do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa	76
Figura 3.10 - Pontos experimentais do ensaio saturado com tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 30°	77
Figura 3.11 - Pontos experimentais dos ensaios com sucção matricial de 80 kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode iguais a (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°	77/78
Figura 3.12 - Pontos experimentais dos ensaios com sucção matricial de 160 kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode iguais a (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°	79/80
Figura 3.13 – Ilustração de um procedimento de otimização usado para a calibração de parâmetros de modelos	81
Figura 3.14 – Definição dos erros da função objetivo	83
Figura 3.15 – Fluxograma do algoritmo desenvolvido para a abordagem da programação matemática	86
Figura 3.16 – Fluxograma do procedimento de análise inversa com o algoritmo genético proposto	90
Figura 4.1 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros obtidos pela calibração tradicional para areia fofa.	92
Figura 4.2 – Sensibilidade de escala comparada dos parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa.	94
Figura 4.3 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia fofa	96
Figura 4.4 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Gauss-Newton para areia fofa	97

Figura 4.5 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Levenberg-Marquart para areia fofa	98
Figura 4.6 – Convergência do AG para areia fofa com o modelo hiperbólico variando os limites dos parâmetros	100
Figura 4.7 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético com os limites a 40% da calibração tradicional para areia fofa	101
Figura 4.8 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético (40% CT) para areia fofa na tensão de confinamento de 200 kPa	102
Figura 4.9 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros obtidos pela calibração tradicional para areia fofa	104
Figura 4.10 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros obtidos pela calibração tradicional para areia densa	105
Figura 4.11 – Sensibilidade de escala comparada dos parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa	106
Figura 4.12 – Sensibilidade de escala comparada dos parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa	107
Figura 4.13 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia fofa	111
Figura 4.14 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método L-BFGS-B para areia densa	112

Figura 4.15 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia fofa	115
Figura 4.16 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Gauss-Newton para areia fofa	116
Figura 4.17 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Levenberg-Marquart para areia fofa	117
Figura 4.18 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método L-BFGS-B para areia fofa	118
Figura 4.19 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia densa	119
Figura 4.20 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Gauss-Newton para areia densa	120
Figura 4.21 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Levenberg-Marquart para areia densa	121
Figura 4.22 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método L-BFGS-B para areia densa	122
Figura 4.23 – Convergência do AG para areia fofa com o modelo Lade-Kim variando os limites dos parâmetros	125
Figura 4.24 – Convergência do AG para areia densa com o modelo Lade-Kim variando os limites dos parâmetros	125

Figura 4.25 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pela calibração tradicional e pelo algoritmo genético (50% CT) para areia fofa	126
Figura 4.26 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pela calibração tradicional e pelo algoritmo genético (50% CT) para areia densa	127
Figura 4.27 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético (50% CT) e por Lade e Kim (1995) para areia fofa	128
Figura 4.28 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético (50% CT) e por Lade e Kim (1995) para areia densa	129
Figura 4.29 – Porcentagem de mudança dos parâmetros em relação a calibração tradicional para solo residual jovem de gnaisse	134
Figura 4.30 (a) – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético para solo residual com a matriz de ponderação igual ao desvio padrão	135
Figura 4.30 (b) – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético para solo residual com a matriz de ponderação igual ao coeficiente de variação	136
Figura 4.30 (c) – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético para solo residual com a matriz de ponderação igual ao fator escalar máximo	137
Figura 4.31 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados	139

Figura 4.32 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados	140
Figura 4.33 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados	141
Figura 4.34 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados	142
Figura 4.35 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais	144
Figura 4.36 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais	144
Figura 4.37 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados	146
Figura 4.38 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados	146
Figura 4.39 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados	148
Figura 4.40 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados	148

Figura 4.41 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados	150
Figura 4.42 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados	150
Figura 4.43 – Valores médios dos coeficientes de sensibilidade de escala comparada dos ensaios triaxiais e hidrostáticos saturados e não saturados para os parâmetros do modelo Lade-Kim	151
Figura 4.44 – Regressão linear do parâmetro $m$	152
Figura 4.45 – Regressão linear do parâmetro $\eta_1$	153
Figura 4.46 – Regressão linear do parâmetro $\psi_2$	153
Figura 4.47 – Regressão linear do parâmetro $\mu$	153
Figura 4.48 – Regressão linear do parâmetro $C$	154
Figura 4.49 – Regressão polinomial do parâmetro $m$	154
Figura 4.50 – Regressão polinomial do parâmetro $\eta_1$	154
Figura 4.51 – Regressão polinomial do parâmetro $\psi_2$	155
Figura 4.52 – Regressão polinomial do parâmetro $\mu$ .	155
Figura 4.53 – Regressão polinomial do parâmetro $C$	155
Figura 4.54 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, regressão linear dos parâmetros sensíveis	158
Figura 4.55 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, regressão linear dos parâmetros sensíveis	158

Figura 4.56 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis	159
Figura 4.57 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis	159
Figura 4.58 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis	160
Figura 4.59 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis	160
Figura 4.60 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis	161
Figura 4.61 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis	161
Figura 4.62 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis	162
Figura 4.63 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis	162
Figura 4.64 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis	163

Figura 4.65 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis	163
Figura 4.66 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, parâmetros médios	164
Figura 4.67 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, parâmetros médios	164
Figura 4.68 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros médios	165
Figura 4.69 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros médios	165
Figura 4.70 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros médios	166
Figura 4.71 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros médios	166
Figura 4.72 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, parâmetros otimização dos ensaios saturados	167
Figura 4.73 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, parâmetros otimização dos ensaios saturados	167

Figura 4.74 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados	168
Figura 4.75 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados	168
Figura 4.76 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados	169
Figura 4.77 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados	169
Figura 4.78 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio saturado com tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode de 30°, parâmetros da otimização dos ensaios saturados	170
Figura 4.79 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual dos ensaios com sucção matricial de 80kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode de (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°, parâmetros da otimização dos ensaios com sucção matricial de 80 kPa	171/172
Figura 4.80 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual dos ensaios com sucção matricial de 160kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode de (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°, parâmetros da otimização dos ensaios com sucção matricial de 160 kPa	173/174
Figura B.1 – Planilha com os gráficos normalizados do modelo hiperbólico	183
Figura B.2 – Planilha para os parâmetros $C$ e $\phi$ do modelo hiperbólico	183

Figura B.3 – Planilha para os parâmetros $K$ , $n$ e $R_f$ do modelo hiperbólico	184
Figura B.4 – Planilha para os parâmetros $K_b$ e $m$ do modelo hiperbólico	184
Figura C.1 – Planilha para os parâmetros elásticos do modelo Lade-Kim	186
Figura C.2 – Planilha para os parâmetros de ruptura do modelo Lade-Kim	187
Figura C.3 – Planilha para os parâmetros de endurecimento do modelo Lade-Kim	188
Figura C.4 – Planilha para os parâmetros da função do potencial plástico do modelo Lade-Kim	190
Figura C.5 – Planilha para os parâmetros da função de plastificação do modelo Lade-Kim	192
Figura C.6 – Planilha para os parâmetros $a$ e $b$ para condições não saturadas do modelo Lade-Kim	194
Figura C.7 – Planilha para o parâmetro $k$ para condições não saturadas do modelo Lade-Kim	195

---

---

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Resultados dos ensaios de caracterização geotécnica	72
Tabela 3.2 – Ensaio realizado por BOTELHO (2007) no solo residual jovem de gnaiss	73
Tabela 3.3 – Limites superiores e inferiores adotados para os parâmetros do modelo hiperbólico na otimização no algoritmo L-BFGS-B	84
Tabela 3.4 – Limites superiores e inferiores adotados para os parâmetros do modelo hiperbólico na otimização no algoritmo L-BFGS-B	85
Tabela 4.1 – Parâmetros da calibração tradicional do modelo hiperbólico para areia fofa	91
Tabela 4.2 – Coeficientes de correlação entre os parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa	93
Tabela 4.3 – Estatísticas de ajuste do modelo hiperbólico para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	95
Tabela 4.4 – Parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	95
Tabela 4.5 – Estatísticas de ajuste do modelo hiperbólico para areia fofa com o AG	100
Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa com o AG	100
Tabela 4.7 – Parâmetros da calibração tradicional do modelo Lade-Kim para a areia fofa e a areia densa	103
Tabela 4.8 – Coeficientes de correlação entre os parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa	106

Tabela 4.9 – Coeficientes de correlação entre os parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa	107
Tabela 4.10 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	109
Tabela 4.11 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	109
Tabela 4.12 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	110
Tabela 4.13 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	110
Tabela 4.14 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	113
Tabela 4.15 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	113
Tabela 4.16 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	114
Tabela 4.17 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática	114
Tabela 4.18 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização pelo algoritmo genético	123

Tabela 4.19 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização pelo algoritmo genético	124
Tabela 4.20 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa com o AG	124
Tabela 4.21 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa com o AG	124
Tabela 4.22 – Estatísticas de ajuste do estudo paramétrico da matriz de ponderação	133
Tabela 4.23 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise do estudo paramétrico da matriz de ponderação	133
Tabela 4.24 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais saturado	138
Tabela 4.25 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios triaxiais saturados	139
Tabela 4.26 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios saturados	140
Tabela 4.27 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios saturados	141
Tabela 4.28 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa	143
Tabela 4.29 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa	143
Tabela 4.30 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa	145
Tabela 4.31 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa	145
Tabela 4.32 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa	147

Tabela 4.33 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaïsse na análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa	147
Tabela 4.34 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa	149
Tabela 4.35 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaïsse na análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa	149
Tabela 4.36 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaïsse nas diferentes retroanálises	152
Tabela 4.37 – Estatísticas de ajuste das análises inversas dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados e não-saturados	156
Tabela 4.38 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaïsse para análise inversa dos ensaios saturados e não-saturados	157

---

---

## RESUMO

GUIMARÃES, Adinele Gomes, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2008. **Análise Inversa para Determinação de Parâmetros de Deformabilidade de Solos**. Orientadora: Izabel Christina d' A. Duarte de Azevedo. Co-orientadores: Roberto Francisco de Azevedo e Enivaldo Minette

A previsão do comportamento mecânico de maciços de solos requer a utilização de modelos constitutivos que representem mais adequadamente sua relação tensão-deformação. Alguns modelos podem incluir parâmetros de difícil obtenção em laboratório e sua determinação, ao envolver julgamentos de engenharia, é mais bem consumada por usuários experientes de um modelo particular. Alternativamente, os parâmetros podem ser obtidos utilizando a análise inversa. O procedimento matemático consiste, basicamente, na formulação de uma função objetivo, que mede a diferença entre os valores medidos no laboratório e aqueles calculados pelo modelo, e a seleção de uma estratégia de otimização que possibilite a procura do mínimo da função objetivo. A fim de verificar a melhor estratégia foram utilizados alguns métodos de programação matemática (Newton-Modificado, Gauss-Newton, Levenberg-Marquart, L-BFGS-B) e um algoritmo genético, na calibração dos modelos hiperbólico e Lade-Kim, para um conjunto de ensaios triaxiais em amostras de areias. Um conjunto de ensaios triaxiais cúbicos em amostras saturadas de um solo residual jovem de gnaiss foi usado na calibração do modelo Lade-Kim, para verificar qual a melhor maneira de ponderar os dados na função objetivo, considerando fatores de ponderação baseados no desvio padrão, na covariância e num fator escalar máximo. Outros conjuntos de ensaios triaxiais e hidrostáticos cúbicos, em amostras saturadas e não saturadas de um solo residual jovem de gnaiss foram usados para estudar o emprego da análise inversa em diferentes conjuntos de resultados de laboratório. Ensaios com trajetórias de tensões não convencionais foram simulados com o objetivo de verificar a potencialidade dos

parâmetros determinados pela análise inversa. Comparações entre resultados numéricos e experimentais verificam a melhor estratégia de identificação, indicam a melhor forma da matriz de ponderação da função objetivo e mostram a capacidade e as vantagens da análise inversa na obtenção dos parâmetros de deformabilidade dos solos.

---

---

## ABSTRACT

GUIMARÃES, Adinele Gomes, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, march of 2008. **Inverse Analysis in the Determination of Soil Deformability Parameters.** Adviser: Izabel Christina d' A. Duarte de Azevedo. Co-advisers: Roberto Francisco de Azevedo e Enivaldo Minette

The prevision of soil mechanical behavior demands the use of constitutive models which represent more appropriately its stress-strain relationship. Some models may include parameters difficult to obtain in laboratory and their determination, when involving engineering judgment, is better accomplished by experienced users of a particular model. Alternatively, the parameters can be obtained using inverse analysis. The mathematical procedure consists basically in the formulation of an objective function, that determines the difference between measured laboratory values and those calculated by the model and the selection of an optimization strategy that makes possible the search for the minimum of the objective function. In order to verify the best strategy, some mathematical programming methods (Newton-modified, Gauss-Newton, Levemberg-Marquart, L-BFGS-B) and a genetic algorithm were used in the calibration of the hyperbolic and Lade-Kim models, for a group of triaxial tests in sand samples. A group of cubic triaxial tests in saturated samples of residual gneissic soil was used in the calibration of Lade-Kim model to verify the best way to consider the data in the objective function, considering factors based on the standard deviation, in the covariance and in a maximum scalar factor. Other sets of cubic triaxial and hydrostatic tests, in saturated and non saturated samples of residual gneissic soil, were used to study the use of the inverse analysis in different groups of laboratory results. Tests with unconventional paths of tensions were simulated in order to verify certain parameters of the potential for inverse analysis. Comparisons between numerical and experimental results verify the best identification strategy, indicate the best form of weighting matrix of the

objective function and show the capacity and advantages of the inverse analysis in the determination of soil deformability parameters.

---

---

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Generalidades

A previsão de movimentos em maciços de solo induzidos por construções como fundações, escavações, aterros, etc., geralmente, exige o emprego de métodos numéricos e a utilização de modelos constitutivos que descrevam adequadamente o comportamento tensão-deformação dos materiais envolvidos.

Contudo, antes que um modelo possa ser utilizado em um procedimento numérico, é necessário calibrá-lo, ou seja, encontrar parâmetros apropriados que produzam a melhor resposta do modelo em relação aos resultados experimentais disponíveis.

Há uma grande diversidade de modelos constitutivos para os materiais de engenharia, os mais simples são baseados na teoria da elasticidade linear e sua calibração é razoavelmente simples (DESAI & SIRIWARDANE,1984). No entanto, o comportamento da maioria dos geomateriais não obedece à teoria da elasticidade exigindo o uso de leis constitutivas sofisticadas e complexas, que incluem grande número de parâmetros, tornando a calibração do modelo mais difícil (LADE,1990; AZEVEDO & MELO, 1996). O procedimento para a determinação desses parâmetros envolve julgamentos e geralmente é mais bem consumado por usuários experientes de um modelo em particular. É desse modo, uma tarefa desafiadora calibrar grande número de parâmetros que satisfaçam simultaneamente todos os dados experimentais disponíveis.

O esforço empregado na calibração de um modelo pode, entretanto, ser facilitado pela utilização de técnicas de otimização, e é denominado de análise inversa. Um procedimento sistemático de otimização procura um conjunto de parâmetros do modelo que minimiza a diferença entre observações experimentais e os resultados correspondentes simulados pelo modelo (YANG & ELGAMAL, 2003).

O uso de técnicas de otimização na determinação de parâmetros de modelos constitutivos é vantajoso porque pode considerar o comportamento global de um material e não somente o comportamento de alguns estados específicos, como nos métodos tradicionais. Além disso, pode-se trabalhar com resultados de diversos tipos de ensaios, mesmo nos casos em que estão disponíveis apenas os resultados de ensaios não tradicionais, para os quais um método tradicional não pode ser usado, tornando o procedimento de calibração racional e objetivo (PAL ET AL., 1996).

De acordo com CALVELLO (2004), há uma série de fatores que afetam a calibração, incluindo o número de parâmetros a ser otimizado, que depende da estratigrafia do local e do número de parâmetros do modelo; a interdependência dos parâmetros dentro da estrutura do modelo constitutivo; o número de observações; e o tipo de sistema considerado. Vale ressaltar que uma solução racional de identificação de parâmetros, que garanta resultados numéricos satisfatórios, requer uma revisão crítica baseada na experiência e no mecanismo físico dos parâmetros e sua aceitabilidade deve ser avaliada segundo aspectos de engenharia.

Dessa forma, o problema de identificação de parâmetros consiste na determinação dos valores dos parâmetros que permita o melhor ajuste entre dados medidos experimentalmente e resultados calculados numericamente. Esse ajuste é caracterizado por uma função objetivo que avalia a discrepância entre os dados medidos nos ensaios e os prescritos pelo modelo constitutivo escolhido. Nesse contexto são tarefas importantes a formulação da função objetivo, geralmente definida por um critério de identificação, e a seleção da estratégia de otimização que possibilita a procura do mínimo desta função (CEKEREVAC ET AL., 2006). Os parâmetros do modelo selecionado assumem o papel de variáveis de otimização.

De acordo com a definição da função objetivo, a minimização pode ser realizada por meio de uma ampla variedade de algoritmos de otimização.

A maioria das técnicas de otimização, entretanto, não garante a obtenção de um ponto extremo global, ou seja, o algoritmo pode convergir para um extremo local

(ARORA, 2004). Por esta razão, alguns algoritmos são mais convenientes para problemas que apresentam apenas um extremo em um determinado intervalo. A aplicação desses algoritmos a problemas multimodais não é tão simples, já que a solução encontrada depende do ponto de partida inicial, podendo encontrar uma solução extrema local distante da solução ótima global procurada.

Os algoritmos genéticos (AGs) representam uma classe de ferramentas muito versátil e robusta a ser empregada na solução de problemas de otimização, embora não devam ser considerados *extremizadores* de funções. São úteis principalmente em problemas para os quais o espaço de busca é muito grande e o conjunto de restrições é numeroso, pois os AGs não se prendem facilmente a extremos locais, uma vez que trabalham com uma população de indivíduos e realizam a busca dentro de toda a região viável disponível (LACERDA & CARVALHO, 1999). Ao contrário de outros métodos de busca de valores ótimos, os algoritmos genéticos buscam soluções a partir de regras de probabilidade. Dessa forma, a busca não é feita somente na vizinhança, o que aumenta a chance de se encontrar um ponto de ótimo global. No entanto, quando a determinação da função objetivo e das restrições é muito trabalhosa e exige grande esforço computacional, os algoritmos genéticos podem se tornar inviáveis. Não é caso desse trabalho, por isso, eles são indicados.

## **1.2 Trabalhos Correlatos**

PAL ET AL. (1996) mostraram como uma técnica de procura aleatória, como o algoritmo genético (AG), pode ser usada para calibrar modelos constitutivos. A metodologia foi aplicada para calibrar o modelo  $\delta_1$ , com base no conceito hierárquico de simples superfície (HiSS) para materiais geológicos, desenvolvido por Desai e colaboradores (DESAI ET AL., 1986; FRANTZISKONIS ET AL., 1986; DESAI ET AL., 1987 e HASHMI, 1986). Três casos foram estudados, que diferiam pelo tipo de dados usados para calibrar o modelo: (1) dados de ensaios convencionais simulados; (2) dados de ensaios cíclicos simulados; e (3) dados de ensaios reais. Os autores demonstraram que a principal vantagem de usar o AG, ao invés dos métodos tradicionais, é que se levam em conta as características

globais dos resultados dos ensaios, ou seja, o comportamento de cada ponto nas trajetórias de tensão ou de deformação, e não somente as características dos resultados de ensaios em alguns pontos ou estados específicos. Além disso, o algoritmo genético pode ser usado para encontrar parâmetros do material quando somente resultados de ensaios não-tradicionais estão disponíveis, casos em que os métodos tradicionais não podem ser usados. Apresentaram também, uma comparação de dois diferentes esquemas de *crossover*.

ZENTAR (2001) apresentou uma metodologia para identificação de parâmetros de solo que pode ser empregada para diferentes equações constitutivas. O procedimento, baseado nas técnicas de análise inversa, consiste em minimizar uma função que represente a diferença entre dados experimentais e dados obtidos pela integração do modelo ao longo da fase de carregamento do ensaio *in-situ*, tendo sido aplicado para identificar os parâmetros do modelo Cam-Clay Modificado para uma curva pressiométrica. O método integrou dois códigos computacionais, o primeiro deles, SiDoLo, é uma ferramenta de otimização de parâmetros e o segundo, CESAR-LCPC, é um código de elementos finitos direcionado a geomateriais. Um estudo paramétrico de um ensaio pressiométrico, com o método dos elementos finitos, revelou a dificuldade na análise inversa para identificar parâmetros fortemente correlacionados. Observou-se que esse tipo de ensaio, ideal para análises inversas, deveria dispor de informações de poro-pressão da água (medições não comuns). Propôs-se, então, a utilização de dados de dois ensaios: uni-dimensional consolidado e pressiométrico. Concluiu-se que o método pode ser generalizado contanto que os valores dos parâmetros a serem determinados tenham influência significativa nos resultados do ensaio *in situ* calculados em elementos finitos. O número de parâmetros que pode ser obtido da análise inversa depende do número de ensaios *in situ* disponíveis no mesmo solo e do número de variáveis medidas em cada ensaio.

CALVELLO (2002) avaliou o uso de técnicas de análise inversa em diferentes tarefas de engenharia geotécnica. Em particular, calibrou modelos de solos (Duncan-Chang, Cam-Clay Modificado, Cam-Clay Modificado Anisotrópico e Solo-Endurecimento) para resultados experimentais de laboratório em amostras de argila de Chicago, e atualizou as previsões de projeto de um sistema de

suporte de escavação usando dados de monitoramento coletados durante a construção. Estudos paramétricos conduzidos para o modelo Cam-Clay Modificado em algumas variáveis de regressão mostraram que, para aqueles resultados, as variáveis mais sensíveis foram: (1) número e tipo de ensaios triaxiais usados como observações; (2) número de parâmetros de entrada estimados simultaneamente; e (3) pesos das observações. A metodologia desenvolvida e testada usando dados de uma escavação de, aproximadamente, 13 m de profundidade, em argilas glaciais de Chicago, mostrou que: (1) análise inversa baseada em dados de monitoramento de campo pode ser eficientemente usada para melhorar o desempenho predito pelo sistema de suporte de escavação; e (2) calibrações sucessivas do modelo nos estágios iniciais de construção afetam positivamente as previsões subseqüentes do comportamento do solo. Os resultados desse estudo, conduzido para avaliar o efeito das suposições da análise inversa do suporte de escavação, indicou três características principais para um problema de análise inversa “*bem posto*”: modelo numérico eficiente, parametrização aceitável e escolha apropriada das observações. As principais dificuldades relatadas foram quanto à complexidade da maioria dos modelos numéricos que, algumas vezes, causam problemas de não-unicidade (quando diferentes combinações dos valores dos parâmetros ajustam igualmente bem as previsões às observações), e instabilidade da solução (quando ligeiras mudanças nas variáveis do modelo radicalmente mudam os resultados da modelagem inversa) ou insensibilidade dos resultados (quando as observações não contêm todas as informações para suprir a estimação dos parâmetros) às mudanças nos valores dos parâmetros.

YANG (2003) empregou técnicas de otimização analíticas, semi-analíticas e numéricas para calibrar um modelo plástico multi-superfície para areias. A calibração baseou-se nos resultados de ensaios triaxiais drenados e dinâmico de liquefação centrífuga. As abordagens analíticas e semi-analíticas e análise de sensibilidade associada foram aplicadas na calibração das respostas tensão-deformação cisalhante do modelo não-linear. Os demais parâmetros do modelo, que controlam o efeito acoplado de cisalhamento e dilatância, são calibrados usando um programa em elementos finitos, com acoplamento fluido-sólido, em

conjunto com um código de otimização numérico avançado. Um estudo de sensibilidade revelou as mudanças geralmente encontradas na otimização de funções altamente não-lineares. Mostrou-se que, quando múltiplos mecanismos são incluídos em um modelo teórico, é possível otimizar um subgrupo dos parâmetros do modelo, associados a determinado mecanismo, com base em dados experimentais que representem, principalmente, esse mecanismo. Uma vantagem dessa abordagem é que cada otimização executada envolve somente um pequeno número de parâmetros e o foco pode ser mantido na identificação do efeito dos mecanismos, um de cada vez.

CEKEREVAC ET AL. (2006) desenvolveram uma rotina de otimização, denominada ParaID, para identificar um conjunto de parâmetros de modelos que minimizasse a diferença entre resultados experimentais e simulações numéricas, de maneira objetiva e racional, combinando os métodos quase-Newton e estocástico. A técnica de otimização restrita foi utilizada na calibração de um modelo constitutivo elasto-plástico multi-mecânico, desenvolvido por AUBRY ET AL. (1985) e HUJEUX (1985), que usaram os resultados de três ensaios de compressão triaxial drenados, consolidados isotropicamente. O procedimento foi testado em três exemplos numéricos, usando um, dois e três resultados experimentais para calibração do modelo. Comparações entre resultados numéricos e experimentais mostraram a capacidade do procedimento para obtenção de parâmetros. Os autores, entretanto, observaram que métodos rotacionais para calibração de modelo requerem avaliação dos resultados obtidos com base em julgamentos de engenharia.

COSTA (2006) desenvolveu um procedimento geral de identificação de parâmetros que pudesse ser aplicado a uma grande variedade de problemas em engenharia de estruturas e geotécnica. A partir de um problema de referência com resultados conhecidos, o autor estudou a influência de diversos fatores (critérios de identificação, algoritmos de minimização, número e precisão das medidas, refinamento da malha utilizada no modelo de elementos finitos e modelo matemático) na identificação dos parâmetros. Observou-se que todos os critérios de identificação forneceram bons resultados: o número de medidas não interferiu no resultado, mas sim a influência das medidas (ressaltando a

importância em se analisar os coeficientes de sensibilidade, identificando as medidas com maior coeficiente de sensibilidade e, conseqüentemente, com maior influência no processo), a malha deve ser a mais refinada possível para não introduzir erros associados com a discretização do modelo matemático e a escolha do modelo que represente o comportamento real da estrutura é de fato importante. No entanto, as conclusões estabelecidas para o problema de referência não devem ser imediatamente estendidas a outros problemas. O procedimento foi, então, aplicado em dois casos reais: o túnel Hudvudsta (Suécia) e a barragem de Machadinho (Brasil).

Em nenhum dos trabalhos mencionados utilizou-se o modelo elasto-plástico desenvolvido por Lade e Kim (1990), apesar de o modelo ter demonstrado ser capaz de representar razoavelmente bem o comportamento de diversos tipos de solo. Esse modelo tem, no entanto, um número elevado de parâmetros e um procedimento de calibração complicado, o que justificaria o emprego da análise inversa.

### **1.3 Objetivos**

Este trabalho pretende:

- (1) Avaliar o uso de técnicas de otimização na calibração de modelos de solos, em particular do modelo elasto-plástico de Lade-Kim (1990), a partir de resultados experimentais de laboratório;
- (2) Verificar qual a melhor maneira de ponderar os dados de entrada na função objetivo;
- (3) Estudar o emprego da análise inversa usando diferentes conjuntos de resultados de laboratório no procedimento de calibração;
- (4) Identificar os parâmetros que são mais significantes na modelagem;
- (5) Verificar a potencialidade dos parâmetros determinados pela análise inversa na representação de ensaios com trajetórias de tensões não convencionais;
- (6) Apresentar a base teórica para o tratamento de problema inverso de uma maneira geral, já que esta é a primeira tese desenvolvida no Departamento de

Engenharia Civil da Universidade Federal de Viçosa a abordar o estudo dos problemas inversos.

#### **1.4 Organização da tese**

A tese encontra-se dividida em cinco capítulos. A presente introdução corresponde-se ao Capítulo 1.

No Capítulo 2 expõem-se uma breve revisão dos modelos constitutivos estudados e os conceitos básicos envolvidos nos problemas de identificação de parâmetros. São apresentados os critérios de identificação e os alguns algoritmos de otimização. Cumprindo assim o objetivo de apresentar a base teórica da análise inversa.

No Capítulo 3 apresentam-se os materiais utilizados nas análises inversas e o procedimento matemático utilizado para identificação dos parâmetros dos modelos constitutivos.

No Capítulo 4 apresentam-se os estudos realizados de acordo com os objetivos a serem alcançados. O primeiro estudo refere-se à verificação da melhor estratégia de otimização, um conjunto de ensaios de triaxiais drenados em areias (LEE & SEED, 1967) é usado em diferentes procedimentos de calibração dos modelos hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1979) e Lade-Kim (LADE, 1990). No segundo estudo avaliou-se a melhor forma da matriz de ponderação da função objetivo, um conjunto de ensaios triaxiais cúbico em amostras de um solo residual jovem de gnaiss (BOTELHO, 2007) é usado na calibração do modelo Lade-Kim, considerando fatores de ponderação baseados no desvio padrão, no coeficiente de variação e num fator escalar máximo. Por fim, utilizaram-se diferentes tipos de ensaios são usados na calibração do modelo Lade-Kim, comparações entre resultados numéricos e experimentais de ensaios triaxiais e hidrostáticos cúbicos saturados e não saturados em amostras de um solo residual jovem de gnaiss (BOTELHO, 2007) mostram a capacidade e as vantagens da análise inversa na identificação dos parâmetros.

No Capítulo 5 são delineadas as conclusões sobre cada um dos estudos realizados.

---

---

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como a bibliografia sobre o assunto abordado é ampla, mas ao mesmo tempo dispersa, optou-se por apresentar a unificação dos conceitos, fundamentos e métodos numéricos envolvidos nos problemas de identificação de parâmetros. Apresentam-se tópicos relacionados a modelos constitutivos de solos, identificação de parâmetros dos modelos, algumas técnicas de otimização (programação matemática e algoritmos genéticos) e análise de sensibilidade dos parâmetros.

### 2.1 Modelos Constitutivos

Uma lei ou modelo constitutivo busca representar, matematicamente, o comportamento de um material, e em particular, nesse trabalho, a relação tensão-deformação-resistência de solos, observada experimentalmente.

A principal vantagem em se estabelecer um modelo matemático é o de aplicar idealizações, normalmente numéricas, para resolver (complexos) eventos quantitativamente. Por isso, a eficiência de um modelo constitutivo depende da extensão para o qual o fenômeno físico foi compreendido e simulado (DESAI & SIRIWARDANE, 1984). Um modelo não precisa ser igual à realidade, mas deve ser suficientemente similar para que as conclusões obtidas através de sua utilização possam ser estendidas à realidade.

Solo é um material altamente não linear com resistência e rigidez dependentes dos níveis de tensão e deformação. Um modelo constitutivo simples, que descreva todos os aspectos do comportamento do solo não existe. No entanto, vários modelos capazes de representar características importantes do comportamento do solo têm sido desenvolvidos nas últimas décadas.

Nesta seção apresenta-se uma revisão dos modelos de solos estudados: hiperbólico, Lade-Kim e adaptação do modelo Lade-Kim para solos não-saturados. O modelo hiperbólico é um modelo elástico não-linear em que os

parâmetros do material variam com níveis de tensão e deformação. Os demais são modelos elasto-plásticos, em que a superfície plástica define a fronteira entre comportamento plástico e elástico. Os três modelos foram escolhidos porque eles representam uma ampla faixa de soluções de modelagem constitutiva para análises numéricas em engenharia geotécnica.

### 2.1.1 Modelo hiperbólico

O modelo hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1979) pode ser utilizado para representar o comportamento tensão-deformação-resistência de solos coesivos ou não coesivos, saturados ou secos, em condições de carregamento drenado ou não drenado (BICALHO, 1992).

O modelo hiperbólico leva em conta características do comportamento dos solos como não-linearidade e influência da tensão de confinamento. Por outro lado, características como dilatância e influência da tensão principal intermediária não são consideradas. Essa última limitação faz com que o modelo apresente o mesmo comportamento em trajetórias de compressão, tração ou estado de deformação plana.

KONDNER (1983) sugeriu que a curva tensão-deformação dos solos poderia ser simulada por uma hipérbole representada pela equação (Figura 2.1 a):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (2.1)$$

em que  $a = \frac{1}{E_i}$  sendo que  $E_i$  é a inclinação inicial da curva  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  versus  $\varepsilon_1$ ,

ou módulo de elasticidade tangente inicial; e  $\frac{1}{b} = (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  sendo que  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  é o valor da assíntota à tensão desviadora  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  quando  $\varepsilon_1 \Rightarrow \infty$ , que pode ser relacionado à resistência do solo.

Duncan e Chang (1970) desenvolveram um procedimento para obter os parâmetros do modelo. Os parâmetros  $a$  e  $b$  são determinados por meio de um ajuste linear dos pontos experimentais desenhados em um gráfico em que, no

eixo vertical, se representam valores de  $\varepsilon_1/(\sigma_1 - \sigma_3)$  e, no eixo horizontal, os valores de  $\varepsilon_1$  (Figura 2.1b).

Como o parâmetro  $E_i$  varia com a tensão de confinamento,  $\sigma_3$ , JANBU (1963) propôs a seguinte equação para representar essa variação:

$$E_i = K \cdot p_a \cdot \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2.2)$$

em que  $p_a$  representa a pressão atmosférica e  $K$  e  $n$  são parâmetros do solo.

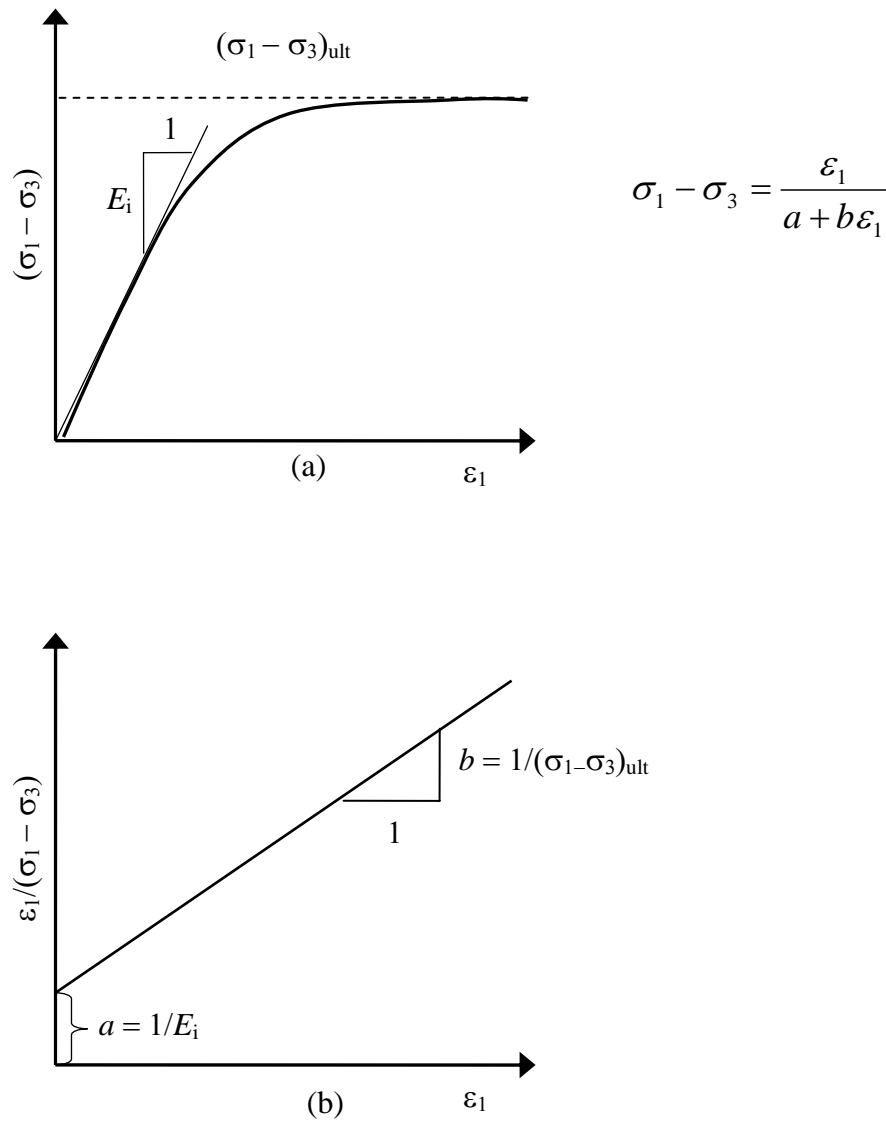


Figura 2.1 - Representação hiperbólica de uma curva tensão-deformação

A variação de  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  com  $\sigma_3$  é considerada por meio da taxa de ruptura,  $R_f$ , definida como:

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (2.3)$$

em que  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$  indica a resistência do solo definida pelo critério de ruptura de Mohr-Coulomb:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2.c.\cos\phi + 2.\sigma_3.\text{sen}\phi}{1 - \text{sen}\phi} \quad (2.4)$$

sendo  $c$  e  $\phi$ , respectivamente, a coesão e o ângulo de resistência ao cisalhamento do solo.

O modelo constitutivo hiperbólico utiliza um módulo de elasticidade diferente para representar o descarregamento e o recarregamento expresso por:

$$E_{ur} = K_{ur} \cdot p_a \cdot \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2.5)$$

em que  $K_{ur}$  é um parâmetro do solo. O valor de  $K_{ur}$  é sempre maior que o de  $K$ .

Como a maioria dos solos apresenta curvas de variação de volume não-lineares e dependentes do nível de tensão, DUNCAN (1980) propôs uma aproximação, em que a relação não-linear entre  $\varepsilon_v$  e  $\varepsilon_1$  é representada por um valor constante de módulo de expansão volumétrica,  $B$ , que, entretanto, é função da pressão de confinamento,  $\sigma_3$ :

$$B = K_b \cdot p_a \cdot \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (2.6)$$

em que  $K_b$  e  $m$  são parâmetros do solo.

Em resumo, o modelo hiperbólico tem 8 parâmetros:  $K$ ,  $K_{ur}$ ,  $n$ , e  $R_f$  definem a variação do módulo de elasticidade com a tensão de confinamento e o nível de tensão;  $c$  e  $\phi$  para definir ruptura; e,  $K_b$  e  $m$  que definem a variação do módulo de expansão volumétrica com a tensão de confinamento. Para obtê-los são necessários, no mínimo, dois ensaios de compressão triaxial consolidados (CTC),

drenados com medição de variação de volume e pelo menos um ciclo de descarregamento-recarregamento. Grande parte desses parâmetros apresenta significado físico.

### 2.1.2 Modelo Lade-Kim

O modelo de Lade-Kim (LADE E KIM, 1998 e LADE, 1990) é bastante semelhante ao modelo de LADE (1977). A principal diferença entre eles é o fato de o primeiro utilizar apenas uma superfície de plastificação (NOGUEIRA, 1998).

Como em todos os modelos elasto-plásticos, os incrementos de deformação total,  $\{d\varepsilon_t\}$ , são divididos em uma parcela elástica,  $\{d\varepsilon_e\}$ , e outra plástica  $\{d\varepsilon_p\}$ .

Os incrementos de deformação elástica são calculados utilizando a lei de Hooke,

$$\{d\varepsilon_e\} = [D]\{d\sigma\} \quad (2.7)$$

Em que  $[D]$  é a matriz de elasticidade, cujos coeficientes são definidos em função de  $E$ , módulo de Young e de  $\nu$ , coeficiente de Poisson, considerado constante e  $\{d\sigma\}$  é o incremento de tensão.

A variação não linear do módulo de Young com o estado de tensão é dada por:

$$E = M p_a \left[ \left( \frac{I'_1}{p_a} \right)^2 + R \left( \frac{J'_2}{p_a} \right)^\lambda \right] \quad (2.8)$$

em que,

$$R = 6 \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (2.9)$$

$I'_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensão, dado na Equação 2.14a, e  $J'_2$  é o segundo invariante do tensor de tensão desviadora (Equação 2.10), onde  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}$  e  $\tau'_{zx}$  representam os componentes do tensor de tensões.

$$J'_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 \right] + \tau'^2_{xy} + \tau'^2_{yz} + \tau'^2_{zx} \quad (2.10)$$

$p_a$  é pressão atmosférica, expressa nas mesmas unidades de  $E$ ,  $I'_1$  e  $\sqrt{J'_2}$ ;  $M$  e  $\lambda$  são constantes adimensionais. Os parâmetros do material  $\nu$ ,  $M$  e  $\lambda$  podem ser obtidos de ensaios triaxiais de compressão.

Um critério de ruptura geral, tridimensional, desenvolvido para solos, concreto e rochas (LADE, 1977, 1982, 1984, 1993; KIM & LADE, 1984) é expresso por:

$$\left[ \frac{I'_3}{I'_3} - 27 \left[ \frac{I'_1}{P_a} \right]^m \right] = \eta_1 \quad (2.11)$$

em que  $I'_3$  é o terceiro invariante do tensor de tensão, dado na Equação 2.14c, e  $\eta_1$  e  $m$  são constantes adimensionais que podem ser determinadas a partir de resultados de ensaios triaxiais de compressão.

Os incrementos de deformação plástica são calculados a partir da lei de fluxo, expressa pela Equação 2.12, utilizando-se uma função potencial plástico (Equação 2.13), uma função de plastificação (Equação 2.16) e uma lei de endurecimento (Equação 2.18).

$$\{d\varepsilon_p\} = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma'} \right\} \quad (2.12)$$

em que  $g_p$  é função potencial plástico e  $d\lambda$  é um fator de proporcionalidade escalar. Kim e Lade (1988) desenvolveram uma função potencial plástico, adequada a materiais granulares, expressa por:

$$g_p = \left[ \psi_1 \frac{I'_3}{I'_3} - \frac{I'^2_1}{I'_2} + \psi_2 \right] \left[ \frac{I'_1}{P_a} \right]^\mu \quad (2.13)$$

em que  $I'_1$ ,  $I'_2$  e  $I'_3$  são os invariantes do tensor de tensão definidos pelas equações:

$$I'_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z \quad (2.14a)$$

$$I'_2 = -(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) + \tau_{xy}^2 \quad (2.14b)$$

$$I'_3 = \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z - \sigma'_z \tau_{xy}^2 \quad (2.14c)$$

$\psi_2$  e  $\mu$  são constantes adimensionais e podem ser obtidas a partir de ensaios triaxiais de compressão. O parâmetro  $\psi_1$  é definido empiricamente em função do parâmetro de resistência  $m$  do critério de ruptura como:

$$\psi_1 = 0,00155 m^{-1,27} \quad (2.15)$$

Já que a função potencial plástico é homogênea de ordem  $\mu$ , então:

$$\{\sigma'\}^T \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma'} \right\} = \mu g_p \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os lados da lei de fluxo por  $\{\sigma'\}^T$  e substituindo esta expressão, o resultado é:

$$d\lambda = \frac{dW_p}{\mu g_p} \quad (2.17)$$

O critério de escoamento ou função de plastificação, é dado por:

$$F(\sigma', W_p) = F'(\sigma') - F''(W_p) = 0 \quad (2.18)$$

que define uma superfície convexa no espaço das tensões principais (Figura 2.2), em que:

$$F'(\sigma') = \left[ \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^h e^q \quad (2.19)$$

e,  $F''(W_p)$  é a lei de endurecimento, dada por:

$$F''(W_p) = \left( \frac{W_p}{p_a D} \right)^{1/\rho} \quad (2.20)$$

$h$  é uma constante,  $q$  varia de zero no eixo hidrostático a um na superfície de ruptura.  $\rho$  e  $D$  são definidos nas Equações 2.25 e 2.26.

O parâmetro  $h$  é definido com base no fato de que o trabalho plástico é constante ao longo da mesma superfície de plastificação. Desse modo, entre dois pontos de tensão um, A, sobre o eixo hidrostático e, o outro, B, na superfície de ruptura, pode-se determinar o valor de  $h$  utilizando a expressão:

$$h = \frac{\ln \left( \frac{\psi_1 \frac{I'_{1B}{}^3}{I'_{3B}} - \frac{I'_{1B}{}^2}{I'_{2B}} \right) e}{27\psi_1 + 3} \quad (2.21)$$

$$\ln \left[ \frac{I'_{1A}}{I'_{1B}} \right]$$

em que  $e$  é a base do logaritmo natural.

O valor de  $q$  varia com o nível de tensão,  $S$ , definido por:

$$S = \frac{f_n}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_1} \left[ \frac{I'_1{}^3}{I'_3} - 27 \right] \left[ \frac{I'_1}{p_a} \right]^m \quad (2.22)$$

em que  $f_n$  corresponde ao lado esquerdo da Equação 2.11 e  $\eta_1$  é o valor de  $f_n$  na ruptura. O nível de tensão  $S$  varia de zero no eixo hidrostático a um na superfície de ruptura. O valor de  $q$  pode ser determinado a partir dos dados de ensaio de acordo com a equação:

$$q = \ln \frac{(W_p)^{1/\rho}}{(D \cdot p_a)} \quad (2.23)$$

$$\left( \psi_1 \frac{I'_1{}^3}{I'_3} - \frac{I'_1{}^2}{I'_2} \right) \left( \frac{I'_1}{p_a} \right)^h$$

A variação de  $q$  com  $S$  é definida pela equação:

$$q = \frac{\alpha S}{1 - (1 - \alpha)S} \quad (2.24)$$

em que  $\alpha$  é uma constante.

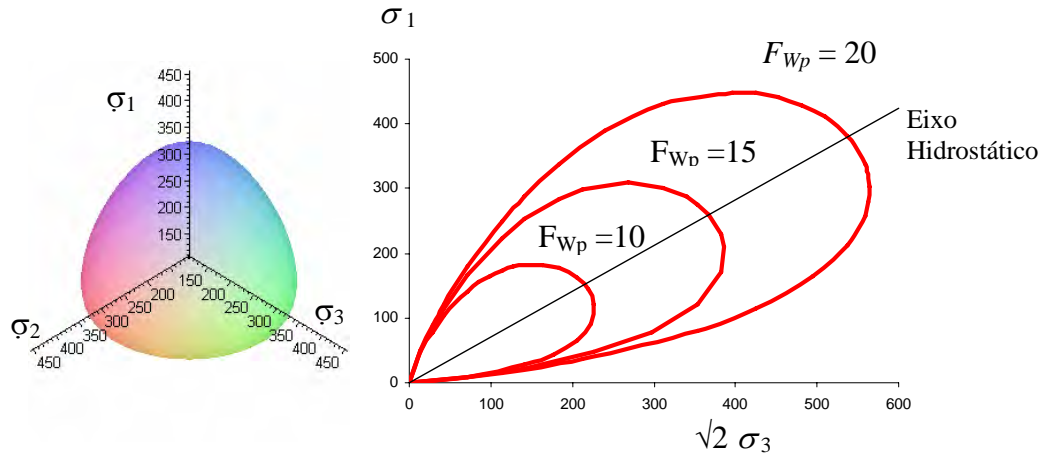
Os valores de  $D$  e  $\rho$  na Equação 2.20 são constantes do material e, portanto,  $F''(W_p)$  é função somente do trabalho plástico.  $\rho$  e  $D$  são dados por:

$$\rho = \frac{p}{h} \quad (2.25)$$

$$D = \frac{C}{(27\psi_1 + 3)^\rho} \quad (2.26)$$

em que  $C$  e  $p$  são parâmetros de endurecimento obtidos em função do trabalho plástico ocorrido durante a compressão isotrópica:

$$W_p = C p_a \left( \frac{I'_1}{p_a} \right)^p \quad (2.27)$$



(a) Plano de vista octaédrico. (b) Contornos no plano de Rendulic.

Figura 2.2 - Superfície de plastificação do modelo Lade-Kim (adaptado de LAQUINI ET AL., 2007)

Em resumo, o modelo de Lade-Kim tem 11 parâmetros:  $M$ ,  $\lambda$  e  $\nu$  são parâmetros que definem o comportamento elástico;  $\eta_1$  e  $m$  são parâmetros de resistência;  $\psi_2$  e  $\mu$  são parâmetros da função potencial plástico;  $h$  e  $\alpha$  são parâmetros da função de plastificação; e,  $C$  e  $p$  são parâmetros da função de endurecimento.

Para obtê-los são necessários, no mínimo, dois ensaios de compressão triaxial consolidados (CTC), drenados com medição de variação de volume e pelo menos um ciclo de descarregamento-recarregamento, e um ensaio de compressão hidrostática (HC).

### 2.1.3 Modelo Lade-Kim para solos não saturadas (LAQUINI ET AL., 2007)

A extensão do princípio das tensões efetivas para solos não-saturados foi formulada por BISHOP (1959) como:

$$\sigma' = (\sigma - u_a) + \chi \pi \quad (2.28)$$

em que  $\sigma'$  é a tensão efetiva;  $\sigma$  é a tensão total;  $\pi = u_a - u_w$  é a sucção matricial;  $u_a$  é a poro pressão do ar;  $u_w$  é a poro pressão da água; e  $\chi$  é um parâmetro do material.

No entanto, essa extensão do princípio da tensão efetiva, Equação 2.28, não descreve satisfatoriamente a mudança de volume que alguns solos não saturados experimentam quando são saturados (fenômeno de colapso) (JENNINGS & BURLAND, 1962). Devido a essa limitação, a maioria dos modelos constitutivos desenvolvidos para representar o comportamento de solos não-saturados não faz uso das tensões efetivas (WHEELER, 1995).

KOGHO ET AL. (1993), MODERASSI ET AL. (1995) e LAQUINI ET AL., (2007) formularam extensões do conceito de tensão efetiva que, junto com a teoria da elasto-plasticidade, são capazes de modelar importantes aspectos do comportamento de solos não-saturados, incluindo o fenômeno de colapso. A abordagem é muito interessante porque ele pode modelar o comportamento do solo nas várias condições (seca, não-saturada e saturada) com a mesma estrutura do conceito de tensão efetiva.

LAQUINI ET AL.(2007) adaptaram o modelo elasto-plástico de Lade-Kim para representar o comportamento de solos saturados e não-saturados, usando uma extensão do conceito de tensão-efetiva.

A extensão proposta do conceito de tensão efetiva é:

$$\sigma' = \sigma - u_{eq} \quad (2.29)$$

Na expressão acima,  $u_{eq}$  é a poro-pressão equivalente definida como:

$$\begin{cases} u_{eq} = u_w, & \text{se } \pi \leq \pi_e \\ u_{eq} = -\frac{\pi}{a + b\pi}, & \text{se } \pi > \pi_e \end{cases} \quad (2.30)$$

em que  $\pi_e$  é a sucção correspondente à entrada de ar no solo e  $a$  e  $b$  são parâmetros do material. A Figura 2.3 mostra a variação de  $u_{eq}$  com  $u_w$  para  $a = 1$ ,  $b = 0,00054$  e  $\pi_e = 50kPa$ , valores correspondentes a um solo residual jovem.

A função hiperbólica usada para relatar  $u_{eq}$  e  $\pi$  foi escolhida pela simplicidade, embora outras funções também possam ser utilizadas, dependendo do comportamento do solo (REIS, 2004 e KOGHO ET AL, 1993).

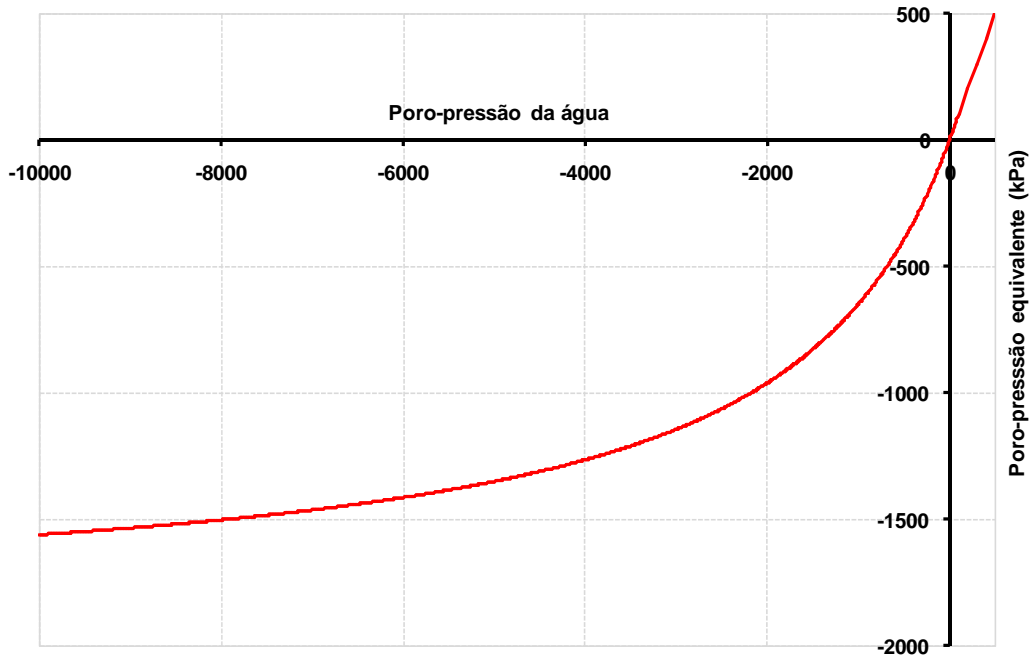


Figura 2.3 – Valores de poro-pressão equivalente

Os parâmetros  $a$  e  $b$  são obtidos pelo seguinte procedimento. Conhecidos os parâmetros de ruptura  $m$  e  $\eta_1$  e as tensões totais na ruptura,  $\sigma_1^{rup}$ ,  $\sigma_2^{rup}$ ,  $\sigma_3^{rup}$ , o critério de ruptura, Equação 2.11, é reescrita na Equação 2.31 e numericamente resolvida para obter  $u_{eq}$ .

$$\left( \frac{(\sigma_1^{rup} + \sigma_2^{rup} + \sigma_3^{rup} - 3u_{eq})^3}{(\sigma_1^{rup} - u_{eq})(\sigma_2^{rup} - u_{eq})(\sigma_3^{rup} - u_{eq})} - 27 \right) \cdot \left( \frac{(\sigma_1^{rup} + \sigma_2^{rup} + \sigma_3^{rup} - 3u_{eq})}{pa} \right) - \eta_1 = 0 \quad (2.31)$$

Usando, na Equação 2.31, as tensões totais na ruptura obtidas em um ensaio de cisalhamento triaxial com sucção controlada, é possível obter  $u_{eq}$  e, usando a Equação 2.30, determinar o valor dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

Para essa adaptação, a função de plastificação, local de pontos com mesmos valores de trabalho plástico, é dada por (Equação 2.32):

$$F(\{\sigma'\}, W_p, \pi) = F'(\sigma') - f_{W_p, \pi}(W_p, \pi) = f_{\sigma'}(\{\sigma'\}) - \left( \frac{W_p + k\pi}{D p_a} \right)^{\frac{1}{\rho}} = 0 \quad (2.32)$$

Na expressão 2.32,  $k$  é um parâmetro do material,  $q$  e  $\rho$  são dadas, respectivamente, pelas Equações 2.22 e 2.23 e  $F'(\sigma')$  pela Equação 2.19.

Da Equação 2.32, o trabalho plástico pode ser reescrito como:

$$W_p = f_{\sigma'}(\{\sigma'\})^{\rho} D p_a - k\pi \quad (2.33)$$

Assim, o trabalho plástico incremental é igual a:

$$dW_p = \frac{\partial W_p}{\partial f_{\sigma'}} df_{\sigma'} + \frac{\partial W_p}{\partial \pi} d\pi = \rho D p_a f_{\sigma'}(\{\sigma'\})^{\rho-1} df_{\sigma'} - k d\pi \quad (2.34)$$

Substituindo este resultado na Equação 2.17, tem-se:

$$d\lambda = \frac{\rho D p_a f_{\sigma'}(\{\sigma'\})^{\rho-1} df_{\sigma'} - k d\pi}{\mu g_p} \quad (2.35)$$

Durante uma trajetória de tensão de molhagem,  $df_{\sigma'} = 0$ . Entretanto,  $d\lambda > 0$  porque  $d\pi < 0$ . Assim, dependendo do comportamento do solo e, conseqüentemente, dos parâmetros do solo, a superfície plástica volumétrica pode modelar um comportamento colapsivo.

Os valores de  $C$  e  $p$  são obtidos com os resultados dos ensaios de compressão hidrostático no solo em condições saturadas. Com esses parâmetros conhecidos, alguns pontos de ensaios de compressão hidrostático não saturados com um valor constante de sucção,  $\pi$ , pode ser usado para encontrar o parâmetro  $k$  com a Equação 2.36:

$$k = \frac{C p_a \left( \frac{I'_1}{p_a} \right)^p - W_p}{\pi} \quad (2.36)$$

Destaca-se que os parâmetros dos modelos apresentados não são propriedades do solo, mas valores empíricos que representam as suas características constitutivas para as condições estabelecidas nos ensaios de laboratório utilizados na calibração do modelo, tais como, umidade e densidade do solo, condições de

drenagem e variação de tensões utilizadas nos ensaios. Portanto, os parâmetros serão representativos do comportamento do solo para as condições de campo se os ensaios utilizados na calibração do modelo corresponderem a essas condições.

## 2.2 Análise Inversa

A estimativa de parâmetros pode ser visualizada como o estudo de problemas inversos. No problema direto deseja-se conhecer a resposta de um sistema submetido a ações, escolhido o modelo constitutivo e conhecidos os seus parâmetros. Entretanto, se parte do sistema é desconhecido tem-se que considerar o problema inverso. Nesse caso, nenhuma informação sobre os parâmetros do modelo constitutivo está disponível. Em compensação, é necessário dispor de dados complementares a respeito da resposta para determinar as informações desconhecidas.

### 2.2.1 Problema matemático

O problema de identificação de parâmetros pode ser formulado como um problema de minimização, em que se deseja encontrar o vetor de parâmetros,  $\mathbf{p}$ , que torne mínima a diferença entre valores observados e calculados por determinado modelo matemático:

Determinar  $\mathbf{p} \in R^{np}$ , que

$$\text{Minimiza } f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{y}(\mathbf{p}), \mathbf{y}) \quad (2.37)$$

Sujeito às restrições  $\mathbf{p}_l \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_u$

em que  $np$  é o número de parâmetros,  $\mathbf{p}_l$  e  $\mathbf{p}_u$  são os vetores limites em  $R^{np}$ , que restringem o espaço de procura para o vetor  $\mathbf{p}$  e  $f(\mathbf{p})$  é a função objetivo, que representa o ajuste entre os valores observados,  $\mathbf{y}$ , e os valores calculados pelo modelo,  $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ .

Uma definição apropriada da função objetivo é crucial para o sucesso da otimização. Devido à variabilidade das respostas de um experimento é importante identificar e incluir na função objetivo os dados relevantes aos

parâmetros do modelo que vão ser otimizados. Este subconjunto de dados experimentais pode incluir diferentes variáveis de resposta, medidas em diferentes localizações e/ou intervalos de tempo. Mesmo dentro do conjunto de dados selecionados, pesos diferentes podem ser atribuídos às diferentes partes, proporcionalmente, à sua significância relativa percebida no problema de otimização como um todo (YANG & ELGAMAL, 2003).

No problema de identificação de parâmetros, a função objetivo para pode ser definida como uma função que avalia, para um dado conjunto de parâmetros ( $\mathbf{p}$ ), a discrepância entre dados preditos por um determinado modelo e dados experimentais.

Os diferentes critérios de identificação ou métodos de estimativa de parâmetros, dependendo do grau de informação prévia disponível sobre o problema, determinam as diferentes formas da função objetivo.

Posto o problema na forma da Equação 2.37, sua solução pode ser obtida por meio do uso de algoritmos de otimização que, a partir de uma estimativa inicial do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}_0$ , fornecem, por processos iterativos, o vetor de parâmetros estimados  $\mathbf{p}^*$  correspondente ao valor mínimo da função objetivo.

Na Figura 2.4 mostra-se o esquema dos principais componentes do problema de identificação de parâmetros.

Segundo VELLOSO (2000), alguns aspectos básicos dos problemas de estimativa de parâmetros devem ser considerados na escolha do método de otimização:

- Número relativamente pequeno de variáveis (os parâmetros), raramente mais do que dez parâmetros;
- Função objetivo altamente não-linear (embora contínua e diferenciável), cujo cálculo é freqüentemente muito demorado.
- Número pequeno de restrições, muitas vezes nenhuma. As restrições, geralmente, são de fronteiras (limite superior e limite inferior).

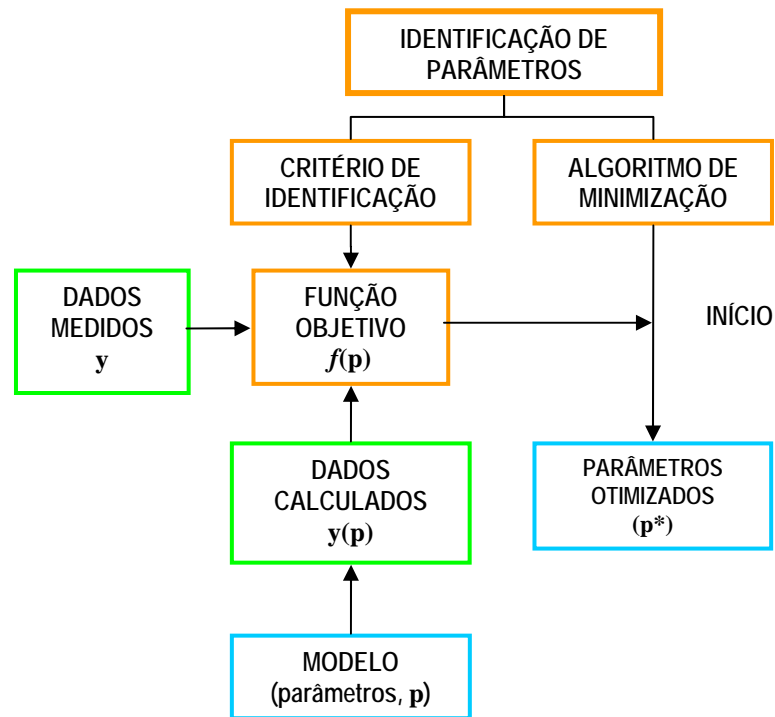


Figura 2.4 – Principais componentes de um problema de identificação de parâmetros

### 2.2.2 Critérios de Identificação

Os critérios de identificação são utilizados para definir a função objetivo, função dos dados efetivamente medidos e aqueles prescritos pelo modelo.

Os diversos critérios ou métodos de estimativa se distinguem, fundamentalmente, pelo grau de informação prévia disponível sobre o problema (COSTA ET AL., 2004). O método de estimativa de parâmetro mais simples e mais comum é o método dos mínimos quadrados. Este método é aplicado quando não se dispõe de nenhum tipo de informação adicional sobre os parâmetros ou medidas. Neste caso, a função objetivo  $f(\mathbf{p})$  é definida por:

$$f(\mathbf{p}) = [\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})]^T [\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})] = \sum_{i=1}^m r_i^2(\mathbf{p}) \quad (2.38)$$

em que  $r_i$  é o resíduo, ou seja, a diferença entre os valores medidos e calculados.

Quando o vetor de observações  $\mathbf{y}$  contém diversos tipos de dados expressos em diferentes unidades, ou quando algumas das medidas são mais confiáveis do que outras, a solução é ponderar os resíduos. Assim, os parâmetros não são

influenciados pelos resíduos relacionados aos dados de maior ordem de grandeza e pelas medidas menos precisas. Este é denominado *método dos mínimos quadrados ponderados* e a função objetivo é dada por:

$$f(\mathbf{p}) = [\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})]^T \mathbf{W}[\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})] = \sum_{i=1}^m w_{ii} r_i^2(\mathbf{p}) \quad (2.39)$$

em que  $\mathbf{W}$  é uma matriz diagonal de pesos com elementos não negativos.

Os elementos de  $\mathbf{W}$  são determinados com base no conhecimento do problema. Valores baixos são atribuídos aos elementos  $w_{ii}$  correspondentes às grandezas medidas em uma escala maior, ou aos que são menos confiáveis, e valores altos de  $w_{ii}$ , em caso contrário.

Como procedimentos subjetivos para a escolha dos pesos podem produzir resultados tendenciosos, podem-se utilizar considerações estatísticas para a escolha da matriz de pesos, como por exemplo, a adoção da inversa da matriz de covariância dos valores medidos,  $\mathbf{C}_y$ , como a matriz de peso:

$$f(\mathbf{p}) = [\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})]^T \mathbf{C}_y^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})] \quad (2.40)$$

Se as medidas forem não correlacionadas, a matriz de covariância,  $\mathbf{C}_y$ , é uma matriz diagonal, sendo seus elementos dados pelo quadrado do desvio padrão das medidas,  ${}_y \sigma^2$ , ou seja, a variância. Portanto, a função objetivo pode ser definida como:

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i^2(\mathbf{p})}{{}_y \sigma^2} \quad (2.41)$$

O desvio padrão,  ${}_y \sigma$ , pode ser estimado pela precisão do instrumento de medida. Terá mais peso na função objetivo aquele dado que tiver maior precisão, o mesmo acontecendo para dados de diferentes grandezas.

As informações adquiridas da experiência acumulada de alguns problemas podem ser introduzidas na função objetivo, contribuindo para o resultado da identificação dos parâmetros. O *método bayesiano* é caracterizado pela inclusão de informações prévias sobre os parâmetros a serem estimados:

$$f(\mathbf{p}) = [\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})]^T \mathbf{C}_y^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p})] + [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0]^T \mathbf{C}_{p_0}^{-1} [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0] \quad (2.42)$$

em que  $\mathbf{C}_{p_0}$  é a matriz de covariância das estimativas iniciais dos parâmetros,  $\mathbf{p}_0$ .

O segundo termo do lado direito da Equação 2.42 atua como uma função de penalidade, que mantém os parâmetros numa região próxima à estimativa inicial,  $\mathbf{p}_0$ . À medida que o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  se move para longe de  $\mathbf{p}_0$ , a contribuição do segundo termo cresce quadraticamente. Logo, a minimização de  $f(\mathbf{p})$  só será concluída com êxito se  $\mathbf{p}$  permanecer próximo a  $\mathbf{p}_0$  (VELLOSO, 2000).

## 2.3 Técnicas de Otimização

A otimização pode ser entendida como uma maneira hábil de se identificar a melhor solução dentre as inúmeras disponíveis para um dado problema. Encontrar a solução de um problema de otimização significa descobrir os pontos de máximo ou de mínimo da função que o descreve.

Nos últimos anos, os processos de otimização têm sido utilizados em diversas áreas. Os problemas encontrados são cada vez maiores, exigindo algoritmos cada vez mais eficientes para sua solução. A maior parte dos problemas de otimização é resolvida por meio de computadores, utilizando-se métodos numéricos iterativos, que geram soluções a cada passo. Isso acarreta algumas dificuldades, tal como, a obtenção de uma solução inicial para início do processo iterativo.

### 2.3.1 Problemas de otimização

Problemas de otimização são aqueles que procuram maximizar ou minimizar uma função numérica de um ou mais parâmetros sujeitos ou não a determinadas restrições. Na programação matemática estudam-se os problemas de otimização determinando-se o algoritmo mais adequado para sua solução, já que para diferentes tipos de problemas podem-se aplicar diferentes técnicas de otimização para resolvê-los.

O problema geral de otimização pode ser tratado como:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{p}) = f(p_1, \dots, p_{np}) = f(p_j) \quad j = 1, \dots, np \quad (2.43a)$$

$$\text{Sujeita a } \begin{cases} h_{l_h}(\mathbf{p}) = 0; & l_h = 1, 2, \dots, m_h \\ q_{l_q}(\mathbf{p}) \leq 0; & l_q = 1, 2, \dots, m_q \\ \mathbf{p} \in S \end{cases} \quad (2.43b)$$

Na formulação expressa pela Equação 2.43,  $\mathbf{p}$  é um vetor n-dimensional de parâmetros,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{np})$ , e  $f$ ,  $h_{l_h}$ ,  $q_{l_q}$  são funções avaliadas nos parâmetros  $p_1, \dots, p_{np}$ . O conjunto  $S$  é um subconjunto do espaço n-dimensional. A função  $f$  é a *função objetivo*. As equações  $h$  e as inequações  $q$  formam o conjunto de *restrições* e determinam o conjunto de *soluções viáveis*,  $S = \{\mathbf{p} / h_l(\mathbf{p}) = 0, l_h = 1 \text{ a } m_h; q_l(\mathbf{p}) \leq 0, l_q = 1 \text{ a } m_q\}$ . A solução viável que otimiza a função, ou seja, a melhor solução encontrada, denomina-se *solução ótima*.

Admite-se que a função  $f(\mathbf{p})$  seja contínua e possua derivadas parciais contínuas até segunda ordem, e as funções  $h_l(\mathbf{p})$  e  $q_l(\mathbf{p})$  sejam, também, contínuas e possuam derivadas parciais contínuas até primeira ordem e valores de  $m_h$  e  $m_q$  independentes.

Os parâmetros da função objetivo podem ser contínuos ou discretos. A otimização de parâmetros contínuos possui um número infinito de soluções, enquanto que a otimização de parâmetros discretos, em geral, tem somente um número finito de soluções possíveis resultante de certa combinação dos parâmetros.

Quando a função objetivo e as restrições são funções lineares dos parâmetros, o problema de otimização é conhecido como de *programação linear*. Quando a função objetivo, ou pelo menos uma das restrições, é uma função não-linear dos parâmetros, o problema passa a ser de *programação não-linear*.

Existem, ainda, os problemas de programação em que se deseja otimizar apenas uma função sem restrições. Neste caso, o problema é de *programação irrestrita ou sem restrição*.

Para os problemas com restrições tem-se a *programação restrita ou com restrição*. Em função da forma das restrições, os problemas ainda são

subdivididos em *restrições de igualdade* (quando as restrições aparecem na forma de equações), *restrições de desigualdade* (quando as restrições aparecem na forma de inequações) e *restrições mistas* (quando aparecem restrições na tanto na forma de equações quanto de inequações).

Na Figura 2.5 apresenta-se um diagrama com a definição dos tipos de problemas de otimização.

Inúmeros são os métodos desenvolvidos para tratamento de problemas de otimização, bem como inúmeras são as classificações realizadas pelos autores para estes métodos. Na Figura 2.6, apresenta-se uma classificação geral sucinta da vasta gama de métodos existentes.

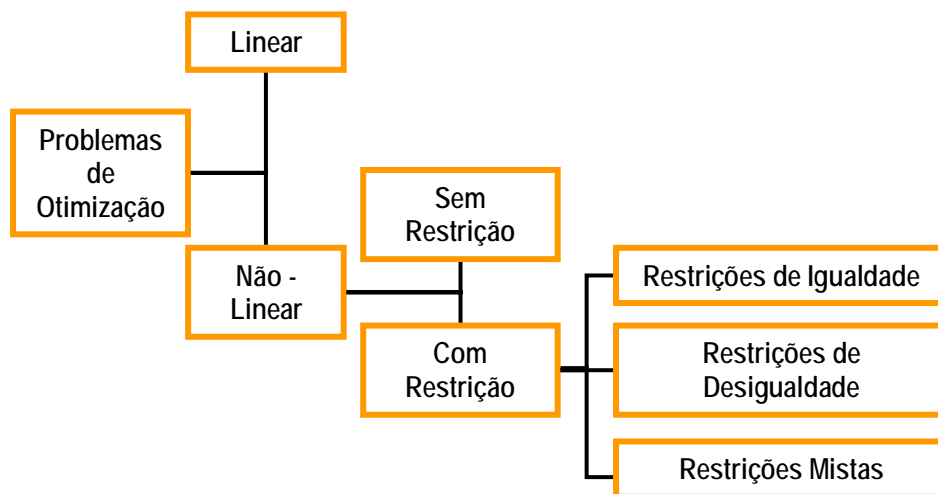


Figura 2.5 – Tipos de problemas de otimização

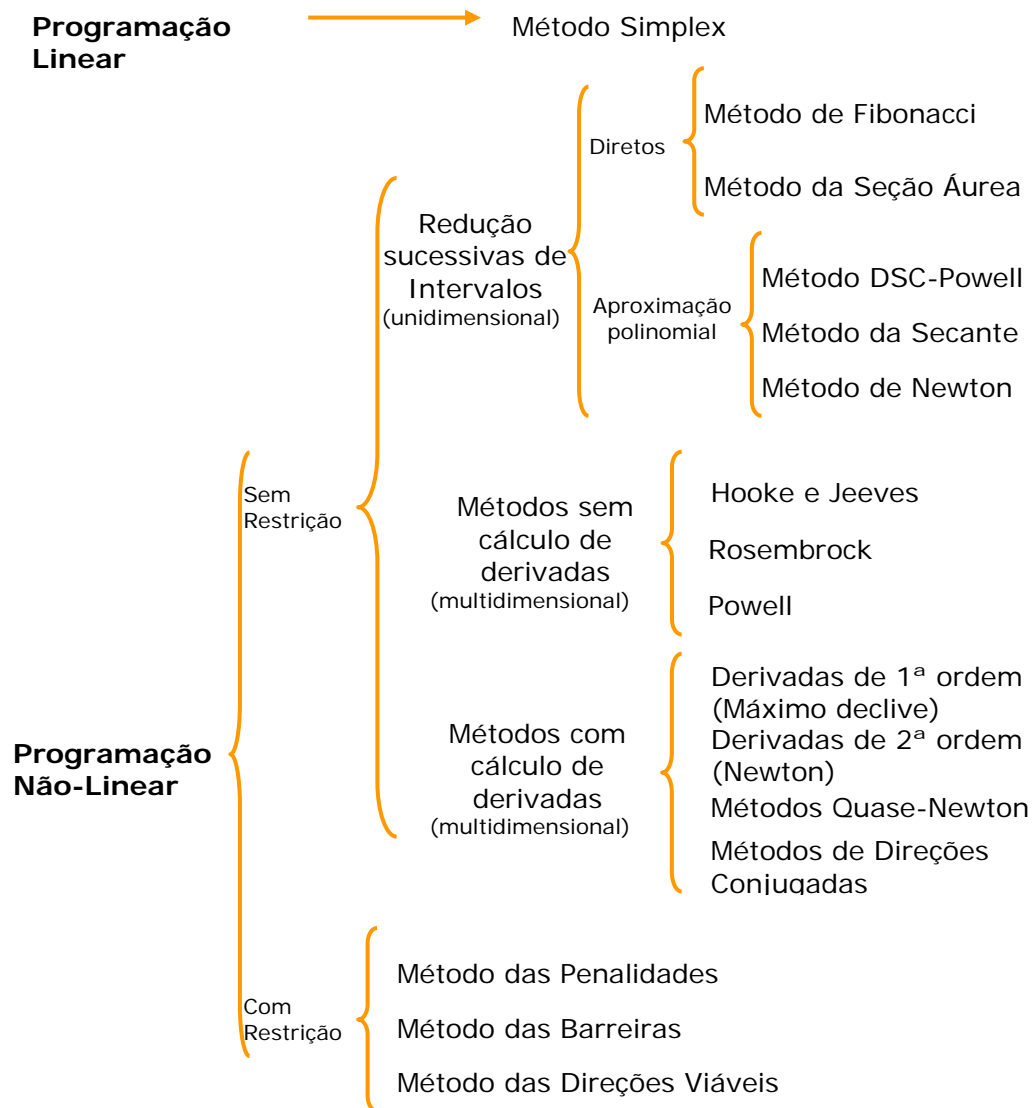


Figura 2.6 – Classificação geral dos métodos de otimização

Para que  $\mathbf{p}^*$  seja um mínimo é necessário e suficiente que se satisfaçam as seguintes condições:

(a) Condição de primeira ordem:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}^*) = 0 \quad (2.44)$$

em que  $\mathbf{g}$  indica o gradiente da função  $f(\mathbf{p})$ . O gradiente é um vetor construído pelas derivadas parciais da função em relação aos parâmetros  $p_j$ , ou seja,

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_{np}} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

(b) Condição de segunda ordem:

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}^*) \text{ é positiva definida} \quad (2.46)$$

em que  $\mathbf{H}$  é a matriz hessiana da função. A matriz hessiana é uma matriz simétrica formada pelas derivadas parciais de segunda ordem da função em relação aos parâmetros  $p_j$ , ou seja,

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{p})}{\partial p_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{p})}{\partial p_1 \partial p_{np}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{p})}{\partial p_{np} \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{p})}{\partial p_{np}^2} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Para a função objetivo dada pelo método dos mínimos quadrados ponderados (Equação 2.39), o vetor gradiente e a matriz hessiana são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{r} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \sum_{i=1}^m w_i r_i \frac{\partial^2 y_i(\mathbf{p})}{\partial p_j \partial p_k} \quad (2.49)$$

em que a matriz jacobiana ou matriz de sensibilidade,  $\mathbf{J}$ , e o vetor de resíduos,  $\mathbf{r}$ , são dados por:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_1(\mathbf{p})}{\partial p_{np}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_m(\mathbf{p})}{\partial p_{np}} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{p}) \quad (2.51)$$

Em geral, uma função objetivo,  $f(\mathbf{p})$ , pode possuir mais de um ponto de mínimo. Um ponto  $\mathbf{p}^*$  é denominado *mínimo local* para o problema se  $f(\mathbf{p}^*) < f(\mathbf{p})$  para todo  $\mathbf{p}$  em uma fronteira viável pequena do ponto  $\mathbf{p}^*$ . Um ponto  $\mathbf{p}^*_G$  é definido como *mínimo global* para o problema se  $f(\mathbf{p}^*_G) < f(\mathbf{p})$  para todo  $\mathbf{p}$  no conjunto viável de soluções. A função que apresenta apenas um ponto de mínimo/máximo é denominada *função unimodal*, e aquela que apresenta mais de um ponto de mínimo/máximo é dita *função multimodal*. Várias técnicas de otimização apresentam dificuldades para decidir se um dado ponto ótimo é local ou global.

Os métodos numéricos de otimização, de modo geral, apresentam teoremas matemáticos provando sua convergência. Entretanto, nenhum deles garante que a solução obtida seja o ponto de ótimo global, já que a solução depende, geralmente, do ponto de partida definido.

### 2.3.2 Programação matemática

De forma geral, os métodos numéricos ou algoritmos de otimização são descritos pela seguinte equação iterativa:

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \Delta\mathbf{p}^k \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

em que  $k$  representa a iteração,  $\mathbf{p}^k$  é o vetor de parâmetros e  $\Delta\mathbf{p}^k$  é a variação no vetor de parâmetros corrente. O processo iterativo descrito pela Equação 2.52 é repetido até que as condições de ótimo, ou algum outro critério de parada, sejam satisfeitos.

Existem diversos métodos para o cálculo de  $\Delta\mathbf{p}^k$ . De modo geral, este vetor é decomposto em duas parcelas: a direção de busca,  $\mathbf{d}^k$ , e o tamanho do passo,  $\alpha^k$ , conforme a Equação 2.53.

$$\Delta\mathbf{p}^k = \alpha^k \mathbf{d}^k \quad (2.53)$$

A exigência básica para a direção de busca,  $\mathbf{d}$ , é que a função objetivo seja reduzida quando se move de uma pequena distância nesta direção.

Os métodos de otimização podem ser classificados de acordo com a ordem da derivada da função objetivo utilizada na determinação da direção da busca,  $\mathbf{d}$ . Os

métodos de ordem zero utilizam somente informações da função objetivo, enquanto que os de primeira ordem fazem uso de seu gradiente (Equação 2.45) e os métodos de segunda ordem utilizam a matriz hessiana (Equação 2.47). Quanto maior a ordem da derivada, maior é a taxa de convergência.

Os algoritmos de otimização, normalmente, não atingem exatamente a solução, mas geram uma seqüência de pontos cujo limite converge ao ponto ótimo. Na prática, termina-se o processo da otimização quando o ponto está suficientemente perto da solução, levando em consideração algum critério de parada. Alguns desses critérios são apresentados a seguir:

$$1) \quad \nabla f(\mathbf{p}^k) = 0$$

$$2) \quad \|\nabla f(\mathbf{p}^k)\| \leq \xi \text{ (tolerância)}$$

$$3) \quad |f(\mathbf{p}^k) - f(\mathbf{p}^{k-1})| \leq \xi$$

$$4) \quad \left| \frac{f(\mathbf{p}^k) - f(\mathbf{p}^{k-1})}{f(\mathbf{p}^k)} \right| \leq \xi$$

$$5) \quad \|\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-1}\| \leq \xi$$

Os algoritmos de otimização consistem, geralmente, nos seguintes passos:

1. Determinar a estimativa inicial,  $\mathbf{p}_0$  ( $k=0$ );
2. Determinar a direção de busca,  $\mathbf{d}^k$ . Este cálculo geralmente requer os valores da função objetivo e do gradiente para problemas irrestritos, e das funções de restrição e seus gradientes para problemas restritos;
3. Verificar o critério de parada do algoritmo. Se satisfeito, interromper o processo iterativo, caso contrário, continuar;
4. Calcular o tamanho do passo  $\alpha^k$  na direção  $\mathbf{d}^k$ , utilizando algum método de busca unidimensional;
5. Calcular o vetor de novos parâmetros  $\mathbf{p}^{k+1}$  utilizando a Equação 2.54, executar uma nova iteração,  $k=k+1$ , e voltar ao passo 2.

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k \quad (2.54)$$

A busca unidimensional no passo 5 tem como objetivo resolver o seguinte problema:

$$\text{Minimizar } \varphi(\alpha) = f(\mathbf{p}^{k+1}) = f(\mathbf{p}^k - \alpha \cdot \mathbf{d}^k) \quad (2.55a)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \varphi(0) = f(\mathbf{p}^k) \\ \alpha = 1 \Rightarrow \varphi(1) = f(\mathbf{p}^k - \mathbf{d}^k) \end{cases} \quad (2.55b)$$

em que  $\varphi(\alpha)$  é a nova função com  $\alpha$  como único parâmetro independente, já que  $\mathbf{p}^k$  e  $\mathbf{d}^k$  são conhecidos. O escalar  $\alpha$  deve pertencer ao intervalo  $\alpha \in (0,1]$  de forma a garantir decréscimo suficiente. Se  $\alpha^k$  estiver fora do intervalo, adota-se o valor 1.

Se  $\varphi(\alpha)$  é uma função simples, pode-se usar o procedimento analítico para determinar  $\alpha^k$ . A condição necessária é  $\frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$  e a condição suficiente é

$$\frac{\partial^2 \varphi(\alpha)}{\partial \alpha^2} > 0. \text{ Note-se que a diferenciação de } f(\mathbf{p}^{k+1}) \text{ em relação a } \alpha, \text{ usando a}$$

regra da cadeia e igualando a zero, fornece:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}^{k+1})}{\partial \alpha} = \frac{\partial f^T(\mathbf{p}^{k+1})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}^{k+1}}{\partial \alpha} = \nabla f(\mathbf{p}^{k+1}) \cdot \mathbf{d}^k = \mathbf{g}^{k+1} \cdot \mathbf{d}^k = 0 \quad (2.56)$$

Visto que o produto escalar dos dois vetores é zero na Equação 2.56, o gradiente da função objetivo do novo ponto é ortogonal a direção de procura na  $k$ -ésima iteração, isto é  $\mathbf{g}^{k+1}$  é normal a  $\mathbf{d}^k$ . Essa condição expressa na Equação 2.56 é importante por duas razões: (1) pode ser usada diretamente para se obter uma equação em termos do tamanho do passo,  $\alpha$ , e (2) pode ser usada para verificar a precisão do tamanho do passo em um procedimento numérico vindo a ser um critério de parada de procura linear (ARORA, 2004).

Como o número de métodos de otimização é grande, a presente pesquisa de doutorado apresenta apenas as características básicas de alguns desses métodos. Maiores detalhes podem ser encontrados em (MARQUARDT, 1963), (LUENBERGER, 1973), (DENNIS & SCHNABEL, 1983), (MATEUS, 1986),

(LEDESMA, 1987), (VELLOSO, 2000), (DA SILVA, 2001), (ARORA, 2004 ) e (COSTA, 2006).

### 2.3.2.1 Método de Máximo Declive ou Gradiente

É um dos métodos mais antigos e conhecidos para minimização de uma função de várias variáveis. Devido à sua simplicidade, ainda é bastante aplicado. Porém, mesmo que a convergência do método seja garantida, um grande número de interações pode ser necessário, tornando a convergência muito lenta próxima ao mínimo. É um método de primeira ordem, já que utiliza apenas o gradiente da função objetivo para a determinação da direção de busca.

O método consiste em encontrar a direção  $\mathbf{d}$ , na iteração corrente, para a qual a função objetivo,  $f(\mathbf{p})$ , decresce mais rapidamente, ao menos localmente. A direção do máximo decréscimo da função objetivo é o negativo do seu gradiente. Qualquer pequeno movimento na direção contrária ao gradiente vai resultar na taxa local máxima de decréscimo da função objetivo. Portanto, o vetor que aponta na direção contrária à direção do gradiente representa a direção de máximo declive para a função objetivo:

$$\mathbf{d}^k = -\mathbf{g}^k \quad (2.57)$$

em que  $\mathbf{g}$  é o gradiente da função objetivo.

A experiência prática com o método demonstra que, para as primeiras iterações, é grande o decréscimo da função objetivo, enquanto que nas últimas iterações o decréscimo é bastante lento.

### 2.3.2.2 Método de Newton

O método de Newton aproxima a função  $f(\mathbf{p})$  por uma função quadrática, para uma pequena variação ( $\Delta\mathbf{p}$ ) em  $\mathbf{p}$ . Utilizando a expansão em série de Taylor até a segunda ordem da função objetivo em torno do ponto corrente e impondo as condições necessárias para a minimização desta função, obtém-se explicitamente a direção de busca,  $\mathbf{d}$ .

Expandindo em série de Taylor a função  $f(\mathbf{p})$  até a segunda ordem, obtém-se:

$$f(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + \mathbf{g}^T \Delta\mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}^T \mathbf{H} \Delta\mathbf{p} \quad (2.58)$$

em que  $\mathbf{g}$  é o gradiente ( $\nabla f$ ) e  $\mathbf{H}$  a matriz hessiana ( $\nabla^2 f$ ) da função objetivo.

Escrevendo a condição de estacionaridade, gradiente nulo ( $\partial f / \partial(\Delta\mathbf{p}) = 0$ ), para a função da Equação 2.58:

$$\mathbf{g} + \mathbf{H}\Delta\mathbf{p} = 0 \quad (2.59)$$

Admitindo que  $\mathbf{H}$  é não singular, a expressão para  $\Delta\mathbf{p}$  é dada por:

$$\Delta\mathbf{p} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} \quad (2.60)$$

Como a Equação 2.58 é somente uma aproximação de  $f$  no ponto  $\mathbf{p}^k$ , o ponto  $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \Delta\mathbf{p}^k$ , provavelmente, não vai ser o mínimo preciso de  $f(\mathbf{p})$ . Portanto, o processo deve ser repetido para se obter as melhores estimativas, até que o mínimo seja encontrado.

O método de Newton apresenta ótimas propriedades de convergência. Uma grande desvantagem, porém, é o custo do cálculo das derivadas de segunda ordem.

O método clássico de Newton não trabalha com um tamanho de passo associado à mudança dos parâmetros, este valor é tomado igual a um. Entretanto, isto não assegura que a função objetivo seja reduzida a cada iteração ( $f(\mathbf{p}^{k+1}) < f(\mathbf{p}^k)$ ). Essa situação pode ser contornada incorporando o tamanho do passo no cálculo da variação dos parâmetros. Em outras palavras, gera-se uma solução da Equação 2.52 com a direção de procura e utiliza-se algum método de procura unidimensional para calcular o tamanho do passo ( $\alpha^k$ ) na direção de busca. Este método é denominado Newton Modificado, e pode ser expresso pela Equação 2.61:

$$\Delta\mathbf{p} = -\alpha^k \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{g} \quad (2.61)$$

em que  $\alpha^k$  é um escalar positivo que minimiza  $f(\mathbf{p})$  na direção  $\mathbf{d}^k$ , dada por  $\mathbf{d}^k = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{g}$ . Próximo à solução tem-se  $\alpha^k \cong 1$ .

O método de Newton é pouco utilizado na solução de problemas de estimativa de parâmetros, pois as derivadas, geralmente, não podem ser obtidas analiticamente e a aproximação por diferenças finitas, por exemplo, exige um número significativo de cálculos da função objetivo, aumentando muito o custo computacional. A matriz hessiana não é somente dispendiosa para se calcular, como também pode vir a ser negativa-definida se o modelo é altamente não-linear, fazendo com que a convergência não seja garantida.

### 2.3.2.3 Métodos quase-Newton

São chamados métodos quase-Newton aqueles que não calculam a derivada de segunda ordem da função objetivo diretamente, mas utilizam alguma aproximação a partir de informações disponíveis da primeira derivada ou de iterações anteriores. Uma matriz positiva definida é construída e atualizada a cada iteração do algoritmo de otimização de forma a produzir uma aproximação de  $\mathbf{H}$  ou de  $\mathbf{H}^{-1}$  com muito menos esforço que o cálculo da hessiana exige.

Existem vários meios de aproximar a hessiana ou sua inversa. A idéia básica é atualizar a aproximação corrente da matriz usando duas fases de informação: variação nos parâmetros e no vetor gradiente entre duas iterações sucessivas. Quando atualizada, as propriedades de simetria e de definição positiva da matriz são preservadas. A característica da matriz em ser definida positiva é essencial para garantir que a direção de busca seja de descida.

Na solução de problemas de estimativa de parâmetros, com a função objetivo dada pelo método dos mínimos quadrados, os métodos quase-Newton mais conhecidos são de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt.

### Método de Gauss-Newton

No método de Gauss-Newton, admite-se que o segundo termo do lado esquerdo da Equação 2.49 é uma aproximação suficiente para a hessiana:

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} \quad (2.62)$$

Essa aproximação é razoável quando o resíduo,  $\mathbf{r}$ , é pequeno. Por outro lado, quando a solução está longe do mínimo ou os resíduos são significativos no mínimo, o método de Gauss-Newton pode não convergir.

### **Método de Levenberg-Marquardt.**

O método de Levenberg-Marquardt é uma modificação do método de Gauss-Newton e tem sido considerado bastante robusto na solução de problemas de estimativa de parâmetros. Nesse método a hessiana é aproximada por:

$$\mathbf{H} \approx (\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda \mathbf{D}) \quad (2.63)$$

em que  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal de ordem  $np$  com os elementos iguais aos elementos da diagonal da matriz  $(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J})$ . O escalar  $\lambda \geq 0$  é denominado parâmetro de Levenberg. Esse método apresenta diversas vantagens em relação ao método de Gauss-Newton. Para valores não nulos de  $\lambda$ , a aproximação da hessiana é sempre positiva-definida, o que garante a propriedade de descida do algoritmo mesmo se a estimativa inicial dos parâmetros for ruim.

O método de Levenberg-Marquardt pode ser visto como uma interpolação entre o método do máximo declive e o método de Gauss-Newton. Quando  $\lambda$  é grande, o resultado será um pequeno passo na direção do máximo declive, enquanto que, quando  $\lambda$  se aproxima de zero, o método se aproxima de Gauss-Newton. A estratégia usual é iniciar com um valor alto de  $\lambda$  e então diminuí-lo se há um decréscimo da função objetivo e aumentá-lo caso contrário.

### **Método BFGS**

O método *BFGS* (Broyden, Fletcher, Goldfard, Shanno) é um dos métodos mais populares na classe dos métodos quase-Newton e tem mostrado ser muito eficiente. Surgiu para melhorar o método de Newton em uma versão que também convergisse para valores iniciais distantes da solução. As principais diferenças entre este método e o método clássico Newton são a introdução da busca unidimensional e a aproximação da inversa da matriz hessiana.

O *BFGS* se enquadra em um grupo de métodos de decréscimo que geram seqüências de pontos a partir de um ponto inicial  $\mathbf{p}^0$ , e a solução ótima é calculada utilizando o método das secantes.

A condição quase-Newton, ou condição secante, que garante que  $\mathbf{B}^k \cong [\nabla^2 f(\mathbf{p}^k)]^{-1}$ , é definida por:

$$\mathbf{B}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k = \Delta \mathbf{p}^k \quad (2.64)$$

em que  $\Delta \mathbf{p}^k = \mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k$  e  $\boldsymbol{\gamma}^k = \nabla f(\mathbf{p}^{k+1}) - \nabla f(\mathbf{p}^k)$ .

Nesse caso, a direção de decréscimo é definida como:

$$\mathbf{d}^k = \mathbf{B}^k \cdot \nabla f(\mathbf{p}^k) \quad (2.65)$$

A atualização da matriz hessiana se dá a partir da geração de uma seqüência de matrizes  $\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^{k-1}, \mathbf{B}^k$ . Em cada iteração, a matriz  $\mathbf{B}^{k+1}$  é calculada a partir da matriz imediatamente anterior  $\mathbf{B}^k$ . Se não for possível obter as informações iniciais da matriz hessiana, adota-se como aproximação inicial de  $\mathbf{B}^0$  a matriz identidade. Determinado o ponto  $\mathbf{p}^{k+1}$ , uma nova aproximação  $\mathbf{B}^{k+1}$  é obtida atualizando-se  $\mathbf{B}^k$ , ou seja:

$$\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^k + \mathbf{U}^k \quad (2.66)$$

em que  $\mathbf{U}^k$  é uma matriz de atualização.

A fórmula para atualizar a matriz hessiana no método quase-Newton *BFGS* é dada por:

$$\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^k + \left( 1 + \frac{(\boldsymbol{\gamma}^k)^T \cdot \mathbf{B}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k}{(\Delta \mathbf{p}^k)^T \cdot \boldsymbol{\gamma}^k} \right) \cdot \frac{\Delta \mathbf{p}^k \cdot (\Delta \mathbf{p}^k)^T}{(\Delta \mathbf{p}^k)^T \cdot \boldsymbol{\gamma}^k} - \left( \frac{\Delta \mathbf{p}^k \cdot (\boldsymbol{\gamma}^k)^T \cdot \mathbf{B}^k + \mathbf{B}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot (\Delta \mathbf{p}^k)^T}{(\Delta \mathbf{p}^k)^T \cdot \boldsymbol{\gamma}^k} \right) \quad (2.67)$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathbf{B}^k = \left( \mathbf{I} + \mathbf{v}^k \cdot (\boldsymbol{\omega}^k)^T \right) \cdot \mathbf{B}^{k-1} \cdot \left( \mathbf{I} + \mathbf{v}^k \cdot (\boldsymbol{\omega}^k)^T \right) \quad (2.68)$$

em que:

$$\mathbf{v}^k = \frac{\Delta \mathbf{p}^k}{\Delta \mathbf{p}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k} \quad (2.69a)$$

$$\boldsymbol{\beta}^k = \sqrt{\frac{-\boldsymbol{\alpha}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \Delta \mathbf{p}^k}{\nabla f(\mathbf{p}^{k-1}) \cdot \Delta \mathbf{p}^k}} \quad (2.69b)$$

$$\boldsymbol{\omega}^k = -\boldsymbol{\gamma}^k + \boldsymbol{\beta}^k \cdot \nabla f(\mathbf{p}^{k-1}) \quad (2.69c)$$

Substituindo a Equação 2.68 em 2.65, que calcula a direção de busca, obtém-se:

$$\mathbf{d}^k = \left( \mathbf{I} + \mathbf{v}^k \cdot (\boldsymbol{\omega}^k)^T \right) \cdot \mathbf{B}^{k-1} \cdot \left( \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}^k \cdot (\mathbf{v}^k)^T \right) \cdot \nabla f(\mathbf{p}^k) \quad (2.70)$$

As principais características do método *BFGS* são:

- necessita-se apenas da primeira derivada da função  $f(\mathbf{p})$ ;
- a matriz  $\mathbf{B}^k$  é positiva definida;
- o número de multiplicações por iteração é menor do que no método de Newton.

### Algoritmo *L-BFGS-B*

A proposta do algoritmo *L-BFGS-B* é minimizar uma função não-linear de  $n$  variáveis com limites superiores e inferiores. Nem todas as variáveis necessitam ser limitadas, já que o algoritmo também é apropriado para problemas irrestritos. O usuário deve fornecer o gradiente ( $\mathbf{g}$ ) da função objetivo ( $f$ ), mas nenhum conhecimento da matriz hessiana ( $\mathbf{H}$ ) da função é exigido. É um algoritmo quase-Newton de memória limitada indicado para resolver grandes problemas de otimização não-lineares com limites simples nos parâmetros.

Esse algoritmo foi desenvolvido por ZHU ET AL. (1997) e implementado em FORTRAN, diferindo em poucos detalhes daquele descrito por BYRD ET AL. (1995), e não requer derivadas de segunda ordem ou conhecimento da estrutura da função objetivo. Além disso, faz uso de representações compactas das matrizes, diminuindo o custo computacional de cada iteração.

O algoritmo pode ser descrito, resumidamente, de acordo com o que se segue. Em cada iteração, uma aproximação *BFGS* de memória limitada para a matriz hessiana é atualizada. Essa matriz é usada para definir um modelo quadrático da função objetivo. Uma direção de busca é, então, calculada usando uma

aproximação em dois estágios: primeiramente, o método de projeção do gradiente é utilizado para identificar um conjunto de variáveis ativas, ou seja, variáveis que serão mantidas nos seus limites, então o modelo quadrático é aproximadamente minimizado em relação às variáveis livres. A direção de procura é definida como sendo o vetor condutor da iteração corrente para esse minimizador aproximado. Finalmente, uma procura linear é executada ao longo da direção de busca usando a sub-rotina descrita por MORE & THUENTE (1994). Uma característica peculiar do algoritmo é que as matrizes *BFGS* de memória limitada são representações de forma compacta, eficiente para problemas com restrições de fronteira.

As vantagens do *L-BFGS-B* são: (1) o código é fácil de usar e o usuário não fornece informações sobre a matriz hessiana ou a estrutura da função objetivo; (2) as armazenagens exigidas são modestas e podem ser controladas pelo usuário; (3) o custo de cada iteração é baixo e independe das propriedades da função objetivo. Por isso, o *L-BFGS-B* é recomendado para grandes problemas em que a hessiana não é esparsa ou é difícil de calcular.

Entretanto, o algoritmo *L-BFGS-B* sofre dos seguintes inconvenientes: (1) não converge rapidamente e em problemas complexos pode ser necessário um grande número de avaliações das funções para convergir; (2) em problemas altamente mal condicionados pode falhar na obtenção de alta precisão na solução; (3) não faz uso de conhecimento sobre a estrutura do problema para acelerar a convergência.

### **2.3.3 Otimização Global**

Há uma larga variedade de algoritmos de otimização. Entretanto, a maioria das rotinas de otimização é capaz somente de procurar por um mínimo local apesar de, para a maioria dos problemas práticos, ser importante encontrar a solução global.

Resolver um problema de otimização global é um desafio tanto do ponto de vista matemático como computacional, pois o esforço envolvido na resolução desse tipo de problema é substancial e aumenta enormemente com o aumento do

número de parâmetros. Além disso, não é simples definir um critério de parada preciso para um algoritmo computacional.

Na falta de condições de otimalidade global para problemas gerais, uma solução global pode ser obtida somente a partir de uma longa procura no domínio viável. O procedimento para tal procura é avaliar a função objetivo em alguns pontos amostrais do conjunto de pontos viáveis e o ponto em que a função tiver menor valor é tomado como ponto de mínimo global. Percebe-se que a localização e o valor do mínimo global dependem do tamanho da amostra. Uma solução exata para o problema exigiria um número infinito de cálculos, o que pode ser evitado aceitando-se como ponto de mínimo global a solução encontrada após longo tempo de procura. Em geral, a qualidade da solução depende de quão longa foi a corrida do algoritmo (ARORA, 2004).

Os métodos para os problemas de otimização global podem ser divididos em duas categorias, determinístico e estocástico. Essa classificação é baseada, principalmente, no fato de os métodos incorporarem algum elemento estocástico para resolver o problema de otimização global.

Os métodos determinísticos definem o mínimo global por meio de uma procura exaustiva no conjunto de soluções viáveis e o sucesso do método é garantido somente nas funções que satisfazem certas condições.

A maioria dos métodos estocásticos baseia-se em variações da procura aleatória pura. Alguns métodos são usados somente para problemas de otimização discreta, enquanto outros podem ser utilizados em ambos os problemas, discretos e contínuos. Todos os métodos estocásticos envolvem elementos aleatórios para determinar o ponto de mínimo global, mas cada um trilha uma maneira diferente para reduzir o esforço computacional da procura aleatória puramente.

As idéias estocásticas são usadas de duas maneiras: (1) para desenvolver o critério de parada; e (2) para desenvolver técnicas para escapar da *região de atração de um ponto de mínimo local* (quando a procura pelo mínimo local parte de um ponto dentro de determinada região e a convergência se dá sempre para o mesmo ponto de mínimo). O objetivo de vários métodos estocásticos é

desenvolver boas aproximações das regiões de atração para o mínimo local de modo que a procura por este valor seja executada somente uma vez.

Os métodos estocásticos, geralmente, têm duas fases: global e local. Na fase global, a função é avaliada em um número de pontos amostrados aleatoriamente. Na fase local, os pontos amostrados são manipulados, ou seja, pelos meios de procura local produz-se um candidato ao mínimo global. A fase global é necessária para garantir a convergência para o mínimo global. A fase global localiza um candidato a ponto de mínimo global em todo o subconjunto do conjunto viável, assegurando confiabilidade ao método. Técnicas de procura local são eficientes ferramentas para achar um ponto com um valor da função relativamente pequeno. Por isto a fase local é incorporada dentro do método estocástico para garantir sua eficiência mantendo sua confiabilidade. Existem muitos métodos estocásticos para otimização global como: *busca aleatória*, *aglomerado*, *busca aleatória controlada*, *integração estocástica*, *genético*, dentre outros.

Usualmente a maioria dos métodos estocásticos utiliza distribuições uniformes para amostrar o conjunto viável. Entretanto, mecanismos para modificar a distribuição das amostras com base nas informações obtidas em iterações anteriores são mais apropriados.

Os métodos estocásticos são mais apropriados para problemas em que a dimensão do espaço de busca é alta, caso do problema de estimativa de parâmetros, mas, no entanto, exigem alguns cálculos a mais da função objetivo em comparação com os métodos determinísticos.

### **2.3.4 Algoritmos Genéticos**

Os algoritmos genéticos (AGs) pertencem à classe dos métodos de otimização de procura estocástica, que utilizam regras probabilísticas e não determinísticas. São métodos de otimização global inspirados nos princípios relacionados à evolução de populações de seres vivos. Esses algoritmos seguem o princípio da seleção natural e sobrevivência do mais apto, proposto por Charles Darwin em 1859, que diz:

*“Quanto melhor um indivíduo se adaptar ao seu meio ambiente, maior será sua chance de sobreviver e gerar descendentes”.*

Os AGs foram introduzidos por John Holland, em meados dos anos 70, e popularizados por um de seus alunos, David Goldberg. O principal objetivo de Holland não foi desenvolver algoritmos para solucionar problemas específicos, mas dedicar-se ao estudo formal do fenômeno da evolução, como ocorre na natureza, e desenvolver maneiras de importá-lo aos sistemas de computação.

Estes algoritmos, apesar de serem computacionalmente muito simples, de fácil utilização e programação, são bastante poderosos. Além disso, eles não são limitados por suposições sobre o espaço de busca, relativos à continuidade e existência de derivadas. Os AGs são úteis em problemas em que o espaço de busca é muito grande e o conjunto de restrições é numeroso.

Inconvenientes desses algoritmos são: (1) requerem uma grande quantidade de cálculos para todo problema de tamanho razoável ou para problemas em que os cálculos das funções por si próprias exigem cálculos pesados; (2) não existe garantia absoluta de se obter uma solução global. O primeiro inconveniente pode ser superado com o processamento em computadores paralelos. Outra saída para esse problema seria utilizar redes neurais, por exemplo, para avaliar a resposta de problemas complexos. O segundo, pela execução do algoritmo repetidas vezes e por longo tempo.

Os métodos tradicionais operam com um único ponto e utilizam recursos matemáticos para tentar sempre encontrar uma solução ótima para o problema. Já os AGs operam sobre uma população de candidatos à solução do problema e cada indivíduo é avaliado dentro do contexto de toda a população, competindo com os demais pela oportunidade de se reproduzir. Nesse processo, os mais aptos, ou seja, aqueles que representam a melhor solução têm maior chance de perpetuar parte de suas características, aumentando a probabilidade de se obter uma maior adaptação da população geral. Assim, uma das vantagens deste método, sobre a grande parte dos demais, se deve à utilização das informações das soluções prévias para geração de novas soluções, aumentando a probabilidade de se encontrar o mínimo global.

Na figura 2.7 apresenta-se um algoritmo genético típico, seu primeiro passo é a geração de uma população inicial, formada por um conjunto aleatório de cromossomos que representam possíveis soluções do problema a ser resolvido. Durante o processo evolutivo, esta população é avaliada e cada cromossomo recebe um valor de adaptabilidade, denominado *aptidão*, que reflete a qualidade da solução que ele representa. Em geral, os cromossomos mais aptos são selecionados e os menos aptos são descartados (*Darwinismo*). Aqueles selecionados podem sofrer modificações em suas características fundamentais por meio dos operadores de recombinação (*crossover*) e mutação, gerando descendentes. Este processo é repetido até que uma solução satisfatória seja encontrada. Este método tem sido utilizado em diversas áreas do conhecimento, bem como em diversos campos da engenharia. Os algoritmos genéticos têm sido empregados em problemas complexos de otimização, para os quais, muitas vezes, os métodos tradicionais falham.

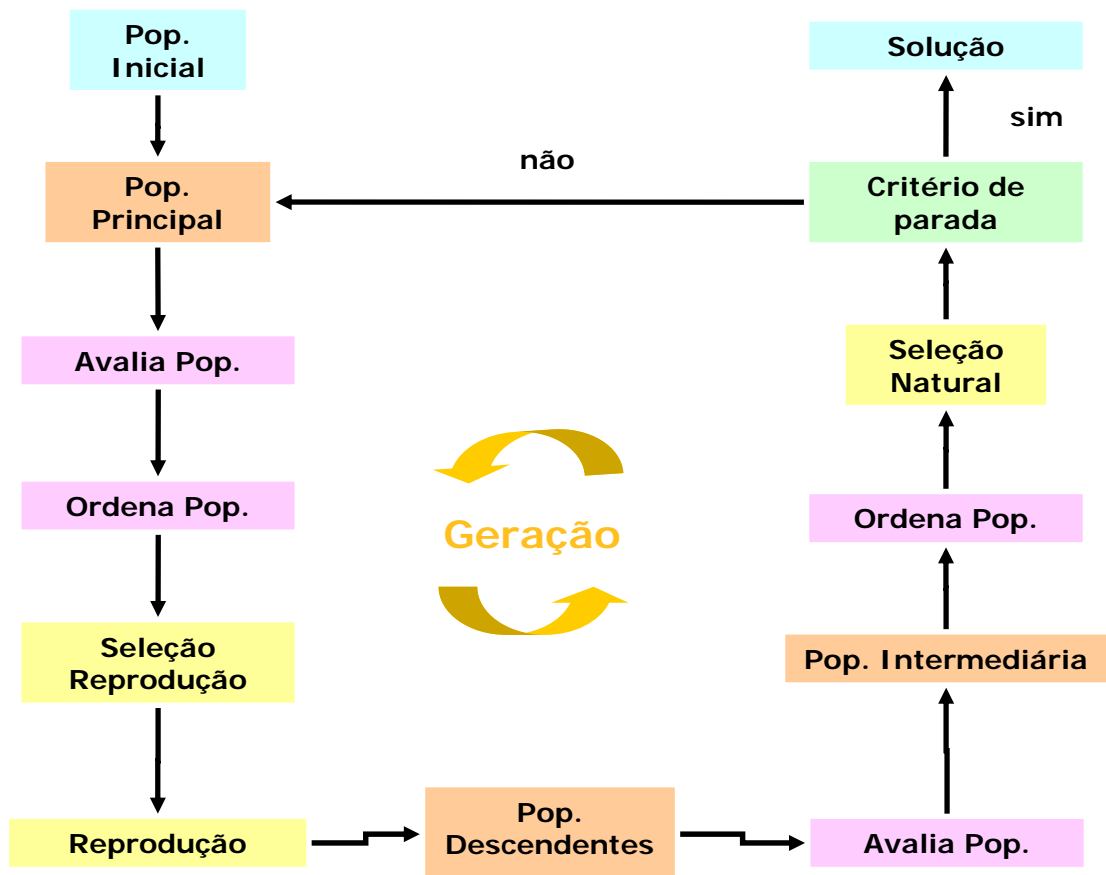


Figura 2.7 – Fluxograma do algoritmo genético típico

Algumas vantagens dos AGs podem ser resumidas com se segue (LACERDA & CARVALHO,1999):

- Funcionam tanto com variáveis contínuas como discretas ou uma combinação delas;
- Realizam buscas simultâneas em várias regiões do espaço de busca, pois trabalham com uma população e não com um único ponto;
- Utilizam informações de custo ou recompensa e não derivadas ou outro conhecimento auxiliar;
- Não é necessário conhecimento matemático aprofundado do problema considerado;
- Otimizam um grande número de variáveis;
- Otimizam variáveis de funções objetivo com superfícies complexas, reduzindo a incidência de mínimos locais;
- Adaptam-se bem a computadores paralelos;
- Trabalham com uma codificação do conjunto de variáveis e não com as próprias variáveis;
- Fornecem uma lista de variáveis ótimas e não uma simples solução;
- São fáceis de serem implementados computacionalmente;
- São modulares e portáteis, no sentido que o mecanismo de evolução é separado da representação particular do problema considerado. Assim, eles podem ser transferidos de um problema para outro;
- São flexíveis para trabalhar com restrições arbitrárias e otimizar múltiplas funções com objetivos conflitantes;
- São facilmente hibridados com outras técnicas e heurísticas.

Apesar dessas vantagens, os AGs não são eficientes para muitos problemas, sendo bastante lentos em alguns casos. O principal campo de aplicação dos AGs é em problemas complexos, com múltiplos mínimos/máximos e para os quais não existe um algoritmo de otimização eficiente para resolvê-lo.

### 2.3.4.1 Terminologia

Como os AGs baseiam-se nos mecanismos da teoria de evolução, para manter a analogia, empregam-se os termos originais da biologia nos sistemas artificiais.

Para facilitar o entendimento, apresentam-se a definição e descrição de alguns termos associados aos algoritmos genéticos:

*Geração*: Cada iteração do algoritmo genético é denominada geração. Uma geração, normalmente, apresenta uma população  $N$  que é manipulada no algoritmo.

*Gene*: É um elemento do vetor que representa o cromossomo, ou seja, um parâmetro codificado que faz parte da solução do problema. Tem mais importância o conjunto de genes que forma um indivíduo, e representa uma possível solução.

*Cromossomo*: Representa a estrutura de dados que codifica uma solução para um problema, ou seja, um cromossomo ou genoma representa um simples ponto no espaço de busca. O cromossomo é geralmente um vetor ou uma cadeia de bits (cadeia de bits é a estrutura mais tradicional, porém nem sempre é a melhor), representando uma possível solução do problema a ser otimizado. Se o cromossomo representa  $np$  parâmetros de uma função objetivo, então o espaço de busca é um espaço com  $np$  dimensões.

*População*: Conjunto de pontos de solução potencial na iteração corrente. Uma população no AG representa um grupo de  $N$  indivíduos, ou seja, um conjunto de possíveis soluções no espaço de busca. Matematicamente, a população é representada por uma matriz, em que cada vetor que a constitui corresponde a um indivíduo, quer dizer, uma solução potencial do problema.

*Indivíduo*: É um membro da população. Nos AGs, um indivíduo é formado pelo cromossomo e sua aptidão. É um conjunto de genes ou cromossomo que representa uma solução potencial dentro do espaço de busca. Um indivíduo pode ser representado matematicamente por um vetor, que pode ser um conjunto de valores (números) e, ou operadores e, ou variáveis matemáticas.

*Codificação*: É a forma escolhida para representar um gene do indivíduo. A codificação do gene deve ser feita usando o modo mais simples de se representar uma solução potencial do problema de interesse. Ela pode ser feita de várias maneiras, desde a forma binária, bem como, a codificação de valor (números reais ou inteiros), até a forma de permutação.

*Função fitness (desempenho)*: Define a importância relativa de uma solução por meio da avaliação de uma ou mais propriedades de cada cromossomo. Consiste em um procedimento matemático para avaliar a qualidade da solução obtida. A função *fitness* pode ser definida de várias maneiras, comumente usando o valor da função objetivo para problemas irrestritos ou a função penalidade para problemas restritos. A escolha do tipo de função a ser utilizada é uma das variáveis do AG. Por tentativa e erro testa-se a melhor função a ser usada comparando-se os resultados obtidos dos diferentes tipos de funções.

*Aptidão ou fitness*: A cada cromossomo é atribuída uma aptidão. Aptidão é uma nota que mede quão boa é a solução codificada em si. Várias alternativas têm sido propostas para definir a aptidão, a mais simples iguala a aptidão ao valor da função objetivo. Vale observar que a aptidão assim definida pode assumir valores negativos e alguns algoritmos de seleção não funcionam com aptidões negativas, ou assumir valores muito próximos, o que torna a seleção aleatória. Além disso, alguns valores podem ser muito elevados em relação ao resto da população causando problemas de convergência prematura. Outras formas de definir aptidão seriam pelo mapeamento da função objetivo e pelo ordenamento ou escalonamento do cromossomo na população. No ordenamento linear, a aptidão é

dada pela equação  $f_i = Min + (Max - Min) \cdot \frac{N - i}{N - 1}$ , em que  $i$  é o índice do

cromossomo na população em ordem decrescente de valor da função objetivo e  $N$  é o tamanho da população. Normalmente é utiliza-se  $1 \leq Max \leq 2$  e  $Max + Min = 2$ . No ordenamento exponencial, a aptidão é dada por

$f_i = q \cdot (1 - q)^{i-1}$ , em que  $q \in [0,1]$ . Alternativamente, a aptidão pode ser

normalizada dividindo a equação anterior pelo fator  $1 - (1 - q)^N$ . O ordenamento exponencial permite maior pressão de seleção (razão entre a maior aptidão e a

aptidão média) do que o ordenamento linear. No escalonamento linear, a aptidão é obtida pela equação,  $f = ag + b$ , em que  $g$  é o valor da função objetivo. Os coeficientes  $a$  e  $b$  são determinados de forma a limitar o número esperado de filhos dos cromossomos (filhos em excesso causam perda de diversidade). O escalonamento linear transforma as aptidões de modo que a aptidão média torne-se igual ao valor médio da função objetivo, e a aptidão máxima igual a  $C$  vezes a aptidão média. Tipicamente o valor de  $C$  está entre 1.2 e 2.0. Quando o escalonamento gera aptidões negativas, os coeficientes  $a$  e  $b$  são calculados de outro modo, impondo a aptidão mínima igual à zero.

*Genótipo*: Representa a informação contida no cromossomo ou genoma.

*Fenótipo*: Representa o objeto, estrutura ou organismo construído a partir das informações do genótipo. É o cromossomo decodificado.

*Alelo*: Em biologia representa uma das formas alternativas de um gene. Nos AGs, representa os valores que o gene pode assumir.

*Epistasia*: Interação entre genes do cromossomo, isto é, quando um valor de gene influencia o valor de outro. Problemas com alta epistasia são de difícil solução por AGs.

#### **2.3.4.2 Mecanismos**

Os mecanismos específicos dos algoritmos genéticos usam a linguagem da microbiologia e imitam operações genéticas. Apesar de os operadores em AGs terem nomes idênticos aos encontrados na genética e na teoria de evolução, isso não significa que atuem da mesma forma observada na natureza. Além disso, a definição matemática desses operadores e os conceitos em AGs podem ser adaptados ao tipo de problema, tornando-o mais eficiente e robusto.

A idéia básica é começar com um conjunto de soluções potenciais geradas por algum processo aleatório. A cada solução potencial é, também, associado um valor de aptidão. Processos aleatórios são usados para gerar novas soluções potenciais, misturando as soluções potenciais correntes dando preferência ao melhor membro. O tamanho do conjunto de soluções potenciais é mantido fixo,

já que a maioria dos membros ajustados do conjunto é usada para criar novas soluções, os sucessivos conjuntos de soluções têm mais alta probabilidade de ter soluções com melhor valor de aptidão. O processo é continuado até que um critério de parada seja satisfeito ou o número de iterações exceda um limite superior.

Os vários passos de um algoritmo genético podem ser implementados de diferentes maneiras. As decisões, realizadas na maioria dos passos computacionais, são baseadas na geração de números aleatórios. Alguns desses procedimentos são discutidos a seguir.

### **Representação das variáveis**

O ponto de partida é a representação dos parâmetros do problema de maneira que eles possam ser usados e manipulados adequadamente pelos algoritmos genéticos. Uma possível solução do problema necessita ser codificada. A codificação binária é a abordagem mais comum, sendo possíveis também a codificação de números reais e a codificação de números inteiros.

A codificação binária implica em uma cadeia de 0 e 1. Os elementos de uma cadeia binária são denominados bits.

A representação binária foi utilizada nos trabalhos pioneiros de HOLLAND (1975). É a representação tradicional, de fácil utilização e manipulação, como também, simples de analisar teoricamente. Contudo, se um problema tem parâmetros contínuos e pretende-se trabalhar com boa precisão numérica, precisará armazenar cromossomos longos na memória. Quando há muitos parâmetros, obtêm-se longas cadeias de bits que podem fazer o algoritmo convergir vagarosamente. Além disso, não existe uniformidade nos operadores, já que a manipulação nos primeiros bits pode afetar mais a aptidão do que a manipulação nos últimos bits do gene.

A representação real gera cromossomos menores e é compreendida mais naturalmente pelo ser humano do que cadeia de bits. Outra vantagem da representação real é a facilidade de criar novos operadores. Vários pesquisadores

têm discutido qual a melhor representação, a binária ou a real, e muitos deles têm mostrado experimentos favoráveis à representação real.

### **População inicial**

Com um esquema para representar as soluções tentativas definido, torna-se necessário criar a primeira população, aquela que será precursora de todos os indivíduos posteriores, gerados pelos operadores de reprodução. A população inicial pode ser gerada de várias maneiras, na maioria das vezes gerada aleatoriamente via o uso de geradores numéricos aleatórios. Diversas maneiras podem ser usadas com esta proposta, por exemplo, usando os valores limites de cada variável ou impondo alguma condição. Em outros casos, quando se conhece algum indivíduo interessante, como, por exemplo, uma solução aproximada, esta pode ser usada como solução germe para gerar o número requerido de soluções para a população usando algum procedimento aleatório.

Se uma população inicial pequena for gerada aleatoriamente, provavelmente, algumas regiões do espaço de busca não serão representadas. Este problema pode ser contornado gerando a população inicial de maneira uniforme, isto é, com pontos igualmente espaçados, como se preenchessem uma grade no espaço de busca. Alternativamente, pode-se gerar a primeira metade aleatoriamente e a segunda metade a partir da primeira.

Pode ser interessante usar uma população inicial maior que a utilizada nas gerações subseqüentes, visando melhorar a representação do espaço de busca.

Uma técnica denominada *seeding* pode ser útil em muitos problemas práticos. Consiste em colocar na população inicial as soluções encontradas por outros métodos de otimização. Isto garante que a solução gerada pelo AG seja tão boa quanto aquelas geradas por estes métodos.

### **Populações genéticas**

Em geral, os AGs trabalham com populações distintas: população inicial, população principal, população dos descendentes e população intermediária. A

população inicial é a precursora de todas as populações posteriores, podendo ser formada como mencionado no item anterior.

A população principal é passada de geração em geração e nela se encontram os indivíduos mais adaptados ao meio. A população dos descendentes é gerada pela ação dos operadores *recombinação* e *mutação*. A população intermediária é o conjunto formado pelas populações principal e dos descendentes, esta por sua vez, vai gerar, através do operador *seleção natural*, uma nova população principal.

A determinação do número de indivíduos de cada população é uma variável do algoritmo genético. Este fator é atribuído e definido segundo a necessidade do problema em questão e as peculiaridades do algoritmo proposto. Geralmente, o número de indivíduos da população principal iguala-se ao número de indivíduos da população inicial, e este é mantido fixo durante a otimização pela ação do operador seleção natural.

### **Avaliação da população**

O procedimento de avaliação é um passo muito importante, pois nele se encontra a ligação entre o algoritmo genético e o problema a ser solucionado. A avaliação é realizada por uma função de desempenho, responsável por classificar os indivíduos de acordo com o grau de adaptação e é específica para cada tipo de problema, avaliando as características presentes nos indivíduos consideradas importantes. É preciso lembrar, que a escolha da função de desempenho é, para a maioria das aplicações, a etapa crítica do processo, já que deverá ser avaliada para cada cromossomo de cada população durante todo o processo evolutivo.

Em problemas de otimização a função desempenho está intimamente ligada à função objetivo cujo extremo global deseja-se obter. Em alguns problemas, a função objetivo pode ser bastante complicada demandando alto custo computacional. Cuidados a serem tomados para que cromossomos idênticos não sejam avaliados mais de uma vez, reutilizando a avaliação efetuada, são propostos na literatura:

- evitar gerar cromossomos idênticos na população inicial;

- verificar se foi aplicada reprodução nos pais, pois, caso contrário, os filhos serão iguais aos pais;
- observar se o filho é igual a um dos pais;
- manter a população com todos os cromossomos distintos entre si, o que também ajuda na manutenção da diversidade;
- antes de avaliar o filho, verificar se já existe um cromossomo igual a este filho na população.

Em situações mais extremas, todos os cromossomos da geração atual e passada deverão ser armazenados, verificando se algum deles é igual ao novo filho gerado.

Percebe-se que tais abordagens também incorporam custo computacional extra ao AG. Deve-se analisar, porém, se esse custo compensa o tempo economizado na avaliação da função objetivo.

Uma abordagem é utilizar uma versão simplificada da função objetivo nas primeiras gerações para acelerar a busca por regiões promissoras do espaço. Nas gerações finais, a versão completa da função objetivo passa a ser utilizada para melhorar a precisão da solução.

Outra forma é usar o AG para localizar a encosta da solução global, e posteriormente, substituir o AG por um método de procura local que rapidamente encontre a solução. Os AGs são bons para localizar rapidamente as regiões promissoras do espaço de busca, porém são lentos para refinar as soluções.

### **Seleção para reprodução**

O princípio básico do funcionamento dos algoritmos genéticos é um critério de seleção que vai fazer com que depois de muitas gerações, o conjunto inicial de indivíduos gere indivíduos mais aptos. A maior parte dos métodos de seleção são projetados para escolher preferencialmente indivíduos com maiores aptidões, embora não exclusivamente, a fim de manter a diversidade da população.

Um método muito utilizado é o método da roleta, onde indivíduos de uma geração são escolhidos para fazer parte da próxima geração, através de um

sorteio de roleta. Neste método, cada indivíduo da população é representado na roleta proporcionalmente ao seu índice de aptidão. Assim, aos indivíduos com alta aptidão é dada uma porção maior da roleta, enquanto aos de aptidão mais baixa é dada uma porção relativamente menor da roleta. Finalmente, a roleta é girada um determinado número de vezes, dependendo do tamanho da população, e são escolhidos, como indivíduos que participarão da reprodução, aqueles sorteados na roleta. Esta técnica de seleção privilegia os indivíduos mais adaptados dentro da população, na tentativa de se obter soluções cada vez melhores.

Esta técnica resume-se ao seguinte procedimento prático: calculam-se as aptidões acumuladas de cada indivíduo. Em seguida, gera-se um número aleatório (tirado de uma distribuição uniforme) no intervalo entre zero e o maior ajuste acumulado, ou a soma de todas as aptidões. Por fim, o cromossomo selecionado é o primeiro que possui aptidão acumulada maior que o número aleatório.

Outro procedimento seria a seleção por torneio. Onde são escolhidos, aleatoriamente, (com probabilidades iguais)  $n$  cromossomos da população, e o cromossomo com maior aptidão é selecionado para a população intermediária. O processo repete-se até preencher a população intermediária. Utiliza-se geralmente, o valor de  $n=3$ .

### **Operadores de reprodução**

A idéia básica de um algoritmo genético é gerar uma nova população (conjunto de soluções) da população corrente tal que a adaptabilidade melhore com o tempo. Dois operadores genéticos são usados para acoplar essa tarefa: recombinação (*crossover*) e mutação.

Os operadores de *crossover* e a mutação são os principais mecanismos de busca dos AGs para explorar regiões desconhecidas do espaço de busca.

O operador *crossover* é geralmente aplicado a um par de cromossomos retirados da população intermediária, gerando cromossomos filhos, com uma dada probabilidade. Na prática, esta probabilidade, denominada de taxa de *crossover*,

varia entre 60% e 90%. Não ocorrendo o *crossover*, os filhos serão iguais aos pais (isto permite que algumas soluções sejam preservadas).

Após a operação de *crossover*, o operador de mutação é aplicado, com dada probabilidade, em cada gene. O operador mutação muda o valor do gene. A mutação melhora a diversidade dos cromossomos na população, no entanto por outro lado, destrói informação contida no cromossomo, logo, deve ser utilizada uma taxa de mutação pequena (normalmente entre 0,1% a 5%), mas suficiente para assegurar a diversidade.

### **Elitismo**

Nos AGs quando novos cromossomos são gerados pelos operadores *crossover* e mutação, em muitos casos o melhor indivíduo pode ser perdido de uma geração para outra. O elitismo é uma estratégia que permite transferir o melhor cromossomo de uma geração para outra sem alteração, sendo muito comum nos AGs tradicionais.

### **Seleção natural**

A seleção natural é o operador que impede o crescimento populacional e, portanto, permite que haja convergência do algoritmo para um mínimo global. A seleção dos indivíduos da população baseia-se no princípio de sobrevivência dos melhores indivíduos. Os cromossomos com maior probabilidade de sobrevivência são copiados para a próxima geração, em contrapartida, os indivíduos com baixa aptidão são descartados.

Após as operações de recombinação e mutação obtém-se uma população intermediária constituída pela população prévia somada aos novos indivíduos gerados pelos operadores de reprodução. Esta população terá um maior número de indivíduos que o número de indivíduos da população inicial. O operador seleção natural removerá os indivíduos com menor valor de adaptabilidade, fazendo com que a população principal tenha o mesmo número de indivíduos da população inicial.

## **Critério de parada**

Não há um critério exato para terminar a execução do AG. Alguns dos critérios de parada para os AGs são:

1. Quando o AG atingir um dado número de gerações (ou avaliações);
2. Chegada ao valor ótimo da função objetivo, se este é conhecido;
3. Convergência, isto é, quando não ocorrer melhoramento significativo no cromossomo de maior aptidão por um dado número de gerações;
4. Quando a maioria (90 a 95%) dos cromossomos representa o mesmo valor, também é possível dizer que o algoritmo convergiu.

## **Convergência prematura**

A convergência prematura é um conhecido problema dos AGs. Ocorre quando surgem cromossomos de alta aptidão (mas não ótima aptidão), e os cromossomos realmente ótimos ainda não estão presentes na população. Tais cromossomos (chamados superindivíduos) geram um número excessivo de filhos que dominam a população, uma vez que a mesma é finita. Estes cromossomos espalham seus genes por toda a população, enquanto outros genes desaparecem. Como consequência, o algoritmo converge para uma solução local.

Combate-se a convergência prematura, limitando o número de filhos por cromossomos. Esta limitação pode ser realizada através do escalonamento da aptidão, ordenamento e outras técnicas.

Manter a diversidade dos cromossomos na população também combate a convergência prematura, visto que é também causada pela perda de diversidade. O aumento da taxa de mutação também melhora a diversidade. Outra opção é evitar a inserção de filhos duplicados na população para melhorar a diversidade.

### **2.3.4.3 Recombinação ou *crossover***

A recombinação tem a função de gerar novas soluções através das soluções previamente encontradas. A atuação desse operador consiste basicamente em

misturar de forma sistemática os genes de dois indivíduos escolhidos aleatoriamente. O objetivo é manter informações previamente obtidas das soluções já conhecidas para gerar novas soluções.

O *crossover* é aplicado a um par de cromossomos retirados da população intermediária, gerando dois cromossomos filhos. Os tipos de operadores *crossover* mais conhecidos para cadeias de bits são o de corte em n pontos e o uniforme. No *crossover* de um ponto, cada um dos cromossomos pais tem sua cadeia de bits cortada em uma posição aleatória, produzindo duas cabeças e duas caudas. As caudas são trocadas, gerando dois novos cromossomos. O de corte duplo, 2 pontos de corte são escolhidos aleatoriamente, e as seções entre os dois pontos são trocadas entre os pais. O *crossover* de n pontos mais usado tem sido o de 2 pontos.

No *crossover* uniforme, para cada par de pais é gerada uma máscara de bits aleatórios. Se o primeiro bit da máscara possui o valor 1, então o primeiro bit do pai1 é copiado para o primeiro bit do filho1. Caso contrário, o primeiro bit do pai2 é copiado para o primeiro bit do filho1. Na geração do filho2 o procedimento é invertido, ou seja, se o bit da máscara é 1, então será copiado o bit do pai2, se o bit for igual a 0, então será copiado o bit do pai1. Vale notar que o *crossover* uniforme não é a mesma coisa que *crossover* de (m-1) pontos (m é o número de bits do cromossomo), uma vez que este sempre leva a metade dos bits de cada pai.

Existe uma série de operadores para representação real, alguns deles serão descritos a seguir. Os operadores convencionais são resultados das adaptações dos operadores utilizados para representação binária, eles funcionam bem na representação binária, mas na representação real eles basicamente trocam valores dos genes e, portanto, não criam informações novas. Melhor então usar operadores aritméticos. Os operadores aritméticos realizam algum tipo de combinação linear entre os cromossomos pais, tais como:

o *Crossover* média: dado dois cromossomos pais, um cromossomo filho é produzido tirando a média aritmética dos genes de cada cromossomo.

$$p'_i = (p_{1i} + p_{2i})/2 \quad (2.71)$$

em que  $p'_i$  é um gene do cromossomo filho,  $p_{1i}$  e  $p_{2i}$  são os genes dos cromossomos pais.

- *Crossover* média geométrica: variação do *crossover* média, onde cada gene do filho é dado pela média geométrica dos genes dos pais.

$$p'_i = \sqrt{p_{1i} p_{2i}} \quad (2.72)$$

em que  $p'_i$  é um gene do cromossomo filho,  $p_{1i}$  e  $p_{2i}$  são os genes dos cromossomos pais.

- *Crossover* BLX- $\alpha$  ou *crossover* mistura: na tentativa de evitar a perda de diversidade causada pelo *crossover* média, que leva os genes para o meio do intervalo, um cromossomo filho é produzido de dois cromossomos pais da seguinte forma:

$$p'_i = p_{1i} + \beta(p_{2i} - p_{1i}) \quad (2.73)$$

em que  $p'_i$  é um gene do cromossomo filho,  $p_{1i}$  e  $p_{2i}$  são os genes dos cromossomos pais e  $\beta \in U(-\alpha, 1 + \alpha)$  (distribuição uniforme no intervalo  $[-\alpha, 1 + \alpha]$ ). Para um único valor de  $\beta$  para todos os genes, quando  $\alpha = 0$  o filho situa-se sobre o intervalo entre os dois pontos que representam os pais. O parâmetro  $\alpha$  tem a finalidade de estender esse intervalo, balanceando a tendência de gerar filhos próximos ao centro do intervalo evitando a perda de diversidade. Se o filho for factível, então gera-se outro filho com novo  $\beta$ . O processo é repetido até obter um filho factível. Este método tem sido usado com sucesso em muitos trabalhos e talvez seja o operador mais utilizado para representação real.

- *Crossover* linear: dados dois cromossomos pais, obtem-se três filhos pelas expressões abaixo. Destes três filhos, apenas o melhor é escolhido, os outros dois são descartados.

$$\begin{aligned} p'_{1i} &= 0,5 p_{1i} + 0,5 p_{2i} \\ p'_{2i} &= 1,5 p_{1i} - 0,5 p_{2i} \\ p'_{3i} &= -0,5 p_{1i} + 1,5 p_{2i} \end{aligned} \quad (2.74)$$

em que  $p'_{1i}$ ,  $p'_{2i}$  e  $p'_{3i}$  são os genes dos cromossomos filhos,  $p_{1i}$  e  $p_{2i}$  são os genes dos cromossomos pais.

- *Crossover* aritmético: os cromossomos filhos são produzidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p'_{1i} &= \beta p_{1i} + (1 - \beta) p_{2i} \\ p'_{2i} &= (1 - \beta) p_{1i} + \beta p_{2i} \end{aligned} \quad (2.75)$$

em que  $p'_{1i}$  e  $p'_{2i}$  são os genes dos cromossomos filhos,  $p_{1i}$  e  $p_{2i}$  são os genes dos cromossomos pais e  $\beta \in U(0,1)$  (distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ ).

Este operador difere do BLX- $\alpha$  por não extrapolar o intervalo entre os cromossomos pais.

- o *Crossover* heurístico: realiza uma extrapolação linear entre os pais usando a informação aptidão.

$$p'_i = p_{1i} + r(p_{1i} - p_{2i}), \quad \text{em que } f(p_1) > f(p_2) \quad (2.76)$$

em que  $p'_i$  é um gene do cromossomo filho,  $p_{1i}$  e  $p_{2i}$  são os genes dos cromossomos pais,  $r \in U(0,1)$  (distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ ) e  $f$  é a função aptidão. Caso o *crossover* produza um filho inactível, gera-se outro número aleatório  $r$ , e obtém-se novo filho. Se em  $t$  tentativas o filho continuar inactível, então o *crossover* pára sem produzir filhos.

Existe uma larga variedade de operadores, alguns inclusive combinados com técnicas mais complicadas, e outros operadores específicos podem ser criados para melhorar a desempenho do algoritmo para um problema específico.

Usando a recombinação, as chances das características ideais se perpetuarem durante o processo aumentam, já que os pais com graus de adaptações maiores se reproduzem com maior frequência.

#### 2.3.4.4 Mutaçã

O operador mutaçã age sobre os indivíduos das populações modificando-os, de forma a gerar novos indivíduos. Estes novos seres gerados podem ser indivíduos mais ou menos adaptados, ou seja, soluções melhores ou piores para o problema. A mutaçã tem a finalidade de tentar evitar a estagnaçã do algoritmo em algum ponto da superfície.

A mutaçã pode agir sobre o aspecto de vários tipos de operações sobre parte dos genes ou até mesmo em todo o indivíduo, no último caso pode gerar um novo indivíduo.

Um procedimento prático para a mutação é: uma função dispara um número aleatório entre 0 e 1, se o número for menor ou igual a taxa de mutação estipulada, um componente da estrutura muda seu valor.

Numa representação binária, a mutação é realizada bit a bit. Selecionado o membro da população, determina-se uma localização na cadeia e substitui-se 0 por 1 ou vice e versa.

A mutação para a representação real pode ser realizada pelos seguintes meios:

- o Mutação uniforme: é a simples substituição de um gene por um número aleatório.

$$p'_i = \begin{cases} U(a_i, b_i), & \text{se } i = j \\ p_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.77)$$

onde  $p'_i$  é o gene do cromossomo produzido,  $p$  é o cromossomo com o  $j$ -ésimo gene selecionado para a mutação,  $U(a_i, b_i)$  representa uma distribuição uniforme no intervalo  $[a_i, b_i]$  e  $a_i$  e  $b_i$  são os limites do intervalo permitido para o gene  $p_i$ .

- o Mutação gaussiana: é a substituição de um gene por um número aleatório de uma distribuição normal.

$$p'_i = \begin{cases} N(p_i, \sigma), & \text{se } i = j \\ p_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.78)$$

onde  $p'_i$  é o gene do cromossomo produzido,  $p$  é o cromossomo com o  $j$ -ésimo gene selecionado para a mutação e  $N(p_i, \sigma)$  é uma distribuição normal com média  $p'_i$  e desvio padrão  $\sigma$ . Alternativamente, pode-se diminuir o valor de  $\sigma$ , à medida que aumenta o número de gerações.

- o Mutação *creep*: adiciona ao gene um pequeno número aleatório obtido de uma distribuição normal (com média zero e desvio padrão pequeno) ou de uma distribuição uniforme. Alternativamente, a mutação *creep* pode ser realizada, multiplicando o gene por um número aleatório próximo de um. O número aleatório deve ser pequeno o suficiente para que cause apenas pequena perturbação no cromossomo, porque estando perto do ponto máximo, tal perturbação pode movê-lo rapidamente ao topo. A taxa de mutação de *creep*

pode ser relativamente alta, visto que ela é usada apenas para explorar localmente o espaço de busca (a mutação *creep* não é muito destrutiva).

- Mutação limite: é substituição do gene por um dos limites do intervalo permitido para ele.

$$p'_i = \begin{cases} a_i, & \text{se } r < 0,5 \text{ e } i = j \\ b_i, & \text{se } r \geq 0,5 \text{ e } i = j \\ p_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.79)$$

em que  $p'_i$  é o gene do cromossomo produzido,  $p$  é o cromossomo com o  $j$ -ésimo gene selecionado para a mutação,  $a_i$  e  $b_i$  são os limites do intervalo permitido para o gene  $p_i$  e  $r \in U(0,1)$  (distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ ). Este operador leva os genes para os limites dos intervalos permitidos, para evitar a perda de diversidade dos filhos gerados pelo *crossover* aritmético que tende a trazer os genes para o centro dos intervalos permitidos.

- Mutação não-uniforme: é a simples substituição de um gene por um número extraído de uma distribuição não-uniforme.

$$p'_i = \begin{cases} p_i + (b_i - p_i)F(G), & \text{se } r_1 < 0,5 \text{ e } i = j \\ p_i - (p_i - a_i)F(G), & \text{se } r_1 \geq 0,5 \text{ e } i = j \\ p_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.80)$$

$$F(G) = \left( r_2 \left( 1 - \frac{G}{G_{\max}} \right) \right)^h$$

em que  $p'_i$  é o gene do cromossomo produzido,  $p$  é o cromossomo com o  $j$ -ésimo gene selecionado para a mutação,  $a_i$  e  $b_i$  são os limites do intervalo permitido para o gene  $p_i$ ,  $r_1$  e  $r_2 \in U(0,1)$  (distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ ),  $G$  é o número da geração corrente,  $G_{\max}$  é o número máximo de gerações e  $h$  é um parâmetro que determina a forma da função.

- Mutação não-uniforme múltipla: é a simples aplicação do operador mutação não-uniforme em todos os genes do cromossomo selecionado.

A mutação é necessária para a introdução e manutenção da diversidade genética da população, alterando arbitrariamente um ou mais componentes da estrutura escolhida, fornecendo assim meios para a introdução de novos elementos na população. Desta forma, assegura que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca nunca será zero, além de contornar o problema de

mínimos locais, pois com este mecanismo, altera-se levemente a direção de busca. O operador de mutação é aplicado aos indivíduos com uma probabilidade dada pela taxa de mutação; geralmente se utiliza uma taxa de mutação pequena, pois é um operador genético secundário.

#### **2.3.4.5 Variáveis de influência e configuração**

É importante analisar de que maneira algumas variáveis influem no comportamento dos algoritmos genéticos, para que se possa estabelecê-los conforme as necessidades do problema e dos recursos disponíveis.

A correta configuração das variáveis de influência é um aspecto muito relevante dentro da estratégia dos algoritmos genéticos, pois afeta diretamente o desempenho do mecanismo de busca. A eficiência e funcionamento de um algoritmo genético são altamente dependentes das suas variáveis de controle, cujos tipos básicos são descritos a seguir.

#### **Número de gerações**

O algoritmo genético na sua própria concepção é um método estocástico (determinado pelas leis da probabilidade). Devido a esse fato, muitas vezes este método leva a resultados inconsistentes com os resultados corretos. Deste modo, a real eficiência do método está relacionada ao número de vezes que a solução correta é encontrada. Este problema (a solução correta nem sempre ser obtida) não está apenas associado ao algoritmo genético, já que em diversos outros métodos de otimização a mesma dificuldade também é encontrada. A convergência desses métodos para a solução incorreta no espaço de procura é contornada pela aplicação sucessiva do algoritmo com a utilização de diferentes condições iniciais.

Os AGs tomam decisões em vários dos seus passos baseados em números gerados aleatoriamente, por isto, quando o mesmo problema é percorrido em diferentes tempos podem-se obter diferentes valores finais. Assim, um problema

particular precisa ser percorrido algumas vezes para assegurar que a melhor solução foi obtida.

### **Tamanho da população**

O tamanho da população indica o número de cromossomos em cada população, normalmente constante durante a evolução.

Uma grande população apresentará uma maior diversidade de soluções, contudo, computacionalmente será dispendioso efetuar tantas avaliações da função de desempenho. Assim, as principais influências deste parâmetro estão relacionadas com o desempenho global e com a eficiência dos AGs.

Com uma população pequena o desempenho pode diminuir, pois deste modo a população representaria apenas uma pequena parte do espaço de busca do problema. Uma população maior geralmente fornece uma cobertura representativa do domínio do problema, além de prevenir convergências prematuras para soluções locais ao invés de globais. No entanto, para se trabalhar com grandes populações, são necessários maiores recursos computacionais, ou que o algoritmo trabalhe por um período de tempo maior.

Uma idéia interessante é relacionar o tamanho da população com o tamanho do cromossomo, ou seja, quanto maior for o cromossomo maior deverá ser o tamanho da população para uma diversidade razoável. Muitos pesquisadores sugerem a título de grandeza, tamanhos de população entre 10 e 100 indivíduos.

### **Taxa ou probabilidade de recombinação**

Esta variável indica qual taxa ou probabilidade irá ocorrer a recombinação entre indivíduos selecionados na população.

Quanto maior for esta taxa, mais rapidamente novos indivíduos serão introduzidos na população, em contrapartida, se for muito alta, indivíduos com boas aptidões poderão ser retirados mais rapidamente da população, a maior parte da população será substituída e pode ocorrer perda de indivíduos de alta aptidão. Com valores baixos, a convergência do algoritmo pode tornar-se muito lenta.

Usualmente, a taxa de recombinação varia de 0,50 e 0,95, todavia, estes números indicam apenas uma ordem de grandeza, já que existem vários tipos possíveis de recombinação, limitados apenas pela capacidade criativa do pesquisador.

### **Taxa ou probabilidade de mutação**

Esta variável indica a probabilidade ou taxa em que haverá a mutação de genes nos indivíduos ao longo da evolução.

A mutação é empregada para fornecer novas informações dentro das populações, prevenindo que as mesmas tornem-se saturadas com cromossomos similares (na medida em que aumenta a diversidade populacional) e possibilitando ainda uma maior varredura do espaço de busca.

Uma baixa taxa de mutação previne que uma dada posição fique estagnada em um valor, além de possibilitar que se chegue a qualquer ponto do espaço de busca. Com uma taxa muito alta, a busca se torna essencialmente aleatória.

Assim como as demais variáveis, a taxa de mutação ideal dependerá da aplicação a ser resolvida, todavia, a maioria das taxas utilizadas varia entre 0,001 e 0,1.

## **2.4. Análise de Sensibilidade**

Além de se obter uma estimativa dos parâmetros que ajuste bem os dados dos ensaios, deseja-se que estes parâmetros sejam confiáveis para futuras aplicações. Uma análise de sensibilidade deve ser conduzida para avaliar a importância relativa de cada parâmetro, determinando o número de parâmetros relevantes e não correlacionados. É um meio conveniente de mostrar antecipadamente a convergência ou até mesmo a não convergência na estimativa de parâmetros, poupando tempo e despesas. O problema de investigação de condições sobre que parâmetros podem ser unicamente estimados é chamado problema de identificabilidade.

Algoritmos de otimização permitem a calibração simultânea de múltiplos parâmetros. Entretanto, identificar os parâmetros importantes para a análise pode ser problemático. De fato, na maioria dos problemas práticos não é possível usar

a otimização para estimar todos os parâmetros em uma dada simulação. O número e o tipo de parâmetros que podem ser estimados simultaneamente dependem de muitos fatores, incluindo as características do modelo do solo selecionado, como os parâmetros do modelo são combinados dentro da matriz de rigidez do elemento em uma formulação de elementos finitos, a estratigrafia do local, o número e tipos de observações disponíveis, as características do sistema simulado e assuntos de tempo computacional (CALVELLO & FINNO, 2004).

A análise de sensibilidade produz informações críticas sobre a importância relativa dos parâmetros estimados simultaneamente. É definida por variáveis estatísticas, como sensibilidade das previsões às mudanças nos valores dos parâmetros, matriz de covariância e coeficientes de variação. A falta de informação sobre algum parâmetro nas observações usadas durante a otimização pode resultar em estimativa incorreta do parâmetro.

Diferentes quantidades podem ser usadas para avaliar a sensibilidade das previsões a mudanças nos parâmetros. Percentagem de sensibilidade, coeficientes de sensibilidade e sensibilidade de escala comparada (*composite scaled sensibility*) podem ser usados com esse propósito. A percentagem de sensibilidade representa a variação nos valores simulados quando os valores dos parâmetros aumentam em um por cento. Coeficientes de sensibilidade são quantidades adimensionais que podem ser usados para comparar a importância de diferentes observações na estimação de um simples parâmetro, ou a importância de diferentes parâmetros no cálculo de um valor simulado. A sensibilidade de escala comparada indica a quantidade total de informação fornecida pelas observações na estimação de um parâmetro.

#### **2.4.1 Matriz de sensibilidade (Jacobiana)**

A matriz de sensibilidade (Equação 2.50) pode ser usada para analisar as incertezas associadas aos parâmetros estimados. Os elementos dessa matriz, chamados coeficientes de sensibilidade, são definidos por:

$$J_{ij} = \frac{\partial y_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} \quad (2.81)$$

Esses coeficientes mostram o impacto de uma pequena variação no parâmetro  $p_j$  na resposta calculada pelo modelo no ponto  $i$ ,  $y_i(\mathbf{p})$ .

Os coeficientes de sensibilidade fornecem informações relativas aos casos em que os parâmetros podem ou não ser estimados simultaneamente. No primeiro caso, os coeficientes de sensibilidade, no intervalo das medidas, não são linearmente dependentes (BECK & ARNOLD, 1977). Caso contrário, se os parâmetros são linearmente dependentes, a variação de um pode ser compensada pela variação de outro e a resposta do sistema continuará sendo a mesma, impossibilitando que esses parâmetros sejam estimados simultaneamente.

Uma prática recomendada (BECK & ARNOLD, 1977) é traçar um gráfico e proceder à análise cuidadosa dos coeficientes de sensibilidade, o que permite perceber se há dependência entre colunas da matriz de sensibilidade. Se o número de parâmetros é grande, a dependência linear entre dois ou mais parâmetros pode, algumas vezes, ser facilmente detectada com a ajuda dos gráficos.

Para que os coeficientes sejam comparáveis é necessário que sejam expressos nas mesmas unidades, sendo conveniente transformá-los, de modo que:

$$J_{ij} = \frac{\partial y_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} p_j \quad (2.82)$$

De modo geral, a análise de sensibilidade se reflete somente em um ponto do espaço dos parâmetros. No caso de problemas não lineares de estimativas de parâmetros, os coeficientes de sensibilidade variam se calculados para outras combinações de parâmetros. Logo, essas análises devem ser repetidas para diversas hipóteses sobre os parâmetros e, também, ao final do processo de otimização, para garantir a precisão dos parâmetros estimados, devido a incertezas nas estimativas originadas pela baixa sensibilidade ou alta correlação entre os parâmetros.

As sensibilidades podem ser aproximadas por diferenças finitas, de acordo com as seguintes fórmulas:

$$\frac{\Delta_f y_i(\mathbf{p})}{\Delta_f p_j} = \frac{y_i(\mathbf{p}_j + \Delta \mathbf{p}_j) - y_i(\mathbf{p}_j)}{(\mathbf{p}_j + \Delta \mathbf{p}_j) - (\mathbf{p}_j)} \quad \text{diferença a frente} \quad (2.83a)$$

$$\frac{\Delta_c y_i(\mathbf{p})}{\Delta_c p_j} = \frac{y_i(\mathbf{p}_j + \Delta \mathbf{p}_j) - y_i(\mathbf{p}_j - \Delta \mathbf{p}_j)}{(\mathbf{p}_j + \Delta \mathbf{p}_j) - (\mathbf{p}_j - \Delta \mathbf{p}_j)} \quad \text{diferença centrada} \quad (2.83b)$$

em que  $y_i(p)$  é o valor da  $i$ -ésimo resultado calculado;  $p_j$  é o valor do  $j$ -ésimo parâmetro;  $\Delta p_j$  é a perturbação em  $p_j$ ;  $\Delta_f$  é usado para denotar diferença a frente e  $\Delta_c$  diferença centrada. O tamanho da perturbação influencia o cálculo das sensibilidades.

## 2.4.2 Coeficientes de variação e correlação

A análise dos elementos da matriz de covariância dos parâmetros ( $\mathbf{C}_p$ ) fornece informações a respeito da dispersão dos parâmetros  $\mathbf{p}$  e da correlação linear entre esses. Para o método dos mínimos quadrados ponderados (Equação 2.39), a matriz de covariância dos parâmetros pode ser estimada por:

$$\mathbf{C}_p = s_0^2 [\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}]^{-1} \quad (2.84)$$

em que  $\mathbf{J}$  é a matriz de sensibilidade calculada com os parâmetros,  $\mathbf{W}$  é a matriz de pesos, que pode ser tomada como a inversa da matriz da covariância das medidas ( $\mathbf{W} = \mathbf{C}_y^{-1}$ ) e  $s_0^2$  a variância final do erro, estimada por:

$$s_0^2 = \frac{f(\mathbf{p})}{m - np} \quad (2.85)$$

em que  $f(\mathbf{p})$  é o valor da função objetivo,  $m$  é o número de dados e  $np$  é o número de parâmetros. A variância final do erro é um indicador da magnitude total do peso dos resíduos, comumente usado.

Em problemas de identificação de parâmetros assume-se que o modelo matemático descreve o mais fielmente possível o sistema real, ou seja, não existem erros de modelagem. Logo, a distribuição dos resíduos finais deve ser consistente com a distribuição dos erros de medidas. Se os erros de medidas

estão apropriadamente descritos pela matriz de covariância das medidas ( $C_y$ ) e se prevalece a hipótese de que não existem erros de modelagem e numéricos, a razão entre a variância final do erro ( $s_0^2$ ), Equação 2.85, e a variância das medidas ( ${}_y\sigma^2$ ) não deverá ser muito diferente de 1. A comparação entre esses dois valores fornece uma medida do ajuste do modelo. Se a diferença for grande, é provável que o modelo matemático não esteja representando bem o sistema, ou que a hipótese sobre os erros de medidas não foram muito realistas, ou até mesmo que o sistema resultante não é bem condicionado numericamente (COSTA, 2006).

Os coeficientes fora da diagonal,  $C_{pij}$ , são as covariâncias dos parâmetros estimados. Os elementos da diagonal da matriz,  $C_{pii}$ , contêm as variâncias dos parâmetros ( ${}_{pi}\sigma^2$ ), que permitem avaliar as dispersões absolutas dos parâmetros pelos desvios padrão ( ${}_{pi}\sigma$ ). As dispersões relativas são quantificadas pelos coeficientes de variação, dados por:

$$\rho_{ii} = \frac{\sqrt{C_{pii}}}{P_i} \quad (2.86)$$

A relação entre os elementos da matriz de covariância dos parâmetros, definida pela Equação 2.87, fornece o coeficiente de correlação adimensional, que estabelece medidas de correlação lineares entre os parâmetros:

$$\rho_{ij} = \frac{C_{pij}}{\sqrt{C_{pii}C_{pij}}} \quad (2.87)$$

Coefficientes de correlação assumem valores entre -1 e 1. O sinal aritmético associado com esse coeficiente indica a direção da relação entre os parâmetros (positivo = direta ; negativo = inversa). Os coeficientes de correlação são usados como medida de força da relação entre os parâmetros. Assim, um coeficiente de correlação igual a zero indica que não há correlação entre os parâmetros  $i$  e  $j$ ; um valor maior que 0,9 indica alta correlação, ou seja, os dois parâmetros não podem ser determinados independentemente com as observações usadas na regressão.

Parâmetros altamente correlacionados não podem ser otimizados simultaneamente, já que várias combinações podem levar ao mesmo resultado otimizado, mas, porém com valores não realísticos dos parâmetros ótimos.

Ao fim da regressão, se os valores de todos os coeficientes estiverem muito longe de 1,0 ou -1,0, as observações usadas na regressão suprem informação suficiente para todos os parâmetros estimados simultaneamente.

No caso de problemas não lineares, os coeficientes de sensibilidade variam se calculados para outras combinações de parâmetros, e, portanto, as análises devem ser repetidas admitindo-se diferentes hipóteses sobre os parâmetros.

### 2.4.3 Sensibilidade de escala comparada (*composite scaled sensitivity*)

De maneira geral, o que se quer é determinar o quão sensível é a resposta do modelo em relação às variações em seus parâmetros, já que com base em tais informações pode-se devotar mais esforço na otimização de parâmetros altamente sensíveis e parâmetros menos sensíveis podem ser tomados como constantes.

Os parâmetros relevantes são discernidos com base em um coeficiente denominado sensibilidade de escala comparada,  $css_j$ , definido como:

$$css_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \frac{\partial y_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} p_j w_{ii}^{1/2}}{m}} \quad (2.88)$$

em que  $y_i$  é o  $i$ -ésimo valor prescrito pelo modelo;  $p_j$  é o  $j$ -ésimo parâmetro estimado;  $\partial y_i / \partial p_j$  é a sensibilidade do  $i$ -ésimo valor prescrito com relação ao  $j$ -ésimo parâmetro;  $w_{ii}$  é o peso da  $i$ -ésima observação, e que pode ser definido como o inverso da variância; e,  $m$  é o número de observações.

A sensibilidade de escala comparada é, provavelmente, a estatística de parâmetro mais importante para detectar os parâmetros que mais afetam os resultados das simulações (CALVELLO, 2002). Essa medida indica o total equivalente de

informação sustentada pelas observações para estimar um dado parâmetro e medir a importância relativa dos parâmetros estimados simultaneamente.

Maiores valores de sensibilidade comparada indicam os parâmetros que mais afetam as previsões. Se esses valores são da mesma ordem de magnitude, todos os parâmetros têm mesmo efeito quantitativo nos resultados da modelagem e, nesse caso, os parâmetros menos sensíveis sofrem maiores variações na busca por seu valor ótimo. Se a sensibilidade de escala comparada é desprezível para algum parâmetro, as observações não fornecem informação suficiente para estimar este parâmetro, que pode ser excluído para que a otimização produza resultados satisfatórios.

Segundo CALVELLO (2002), um modelo pode ser calibrado com sucesso mesmo quando um parâmetro é excluído da otimização, contanto que sua estimativa inicial seja razoável. Se essa estimativa não é adequada, variações nos valores dos outros parâmetros não podem compensar a estimativa incorreta. Assim, para problemas com grande número de parâmetros, cuja maioria seja de estimativas razoáveis, a otimização pode ser, ainda, eficiente considerando-se apenas os mais sensíveis.

---

---

## 3. MATERIAIS E MÉTODOS

### 3.1 Materiais

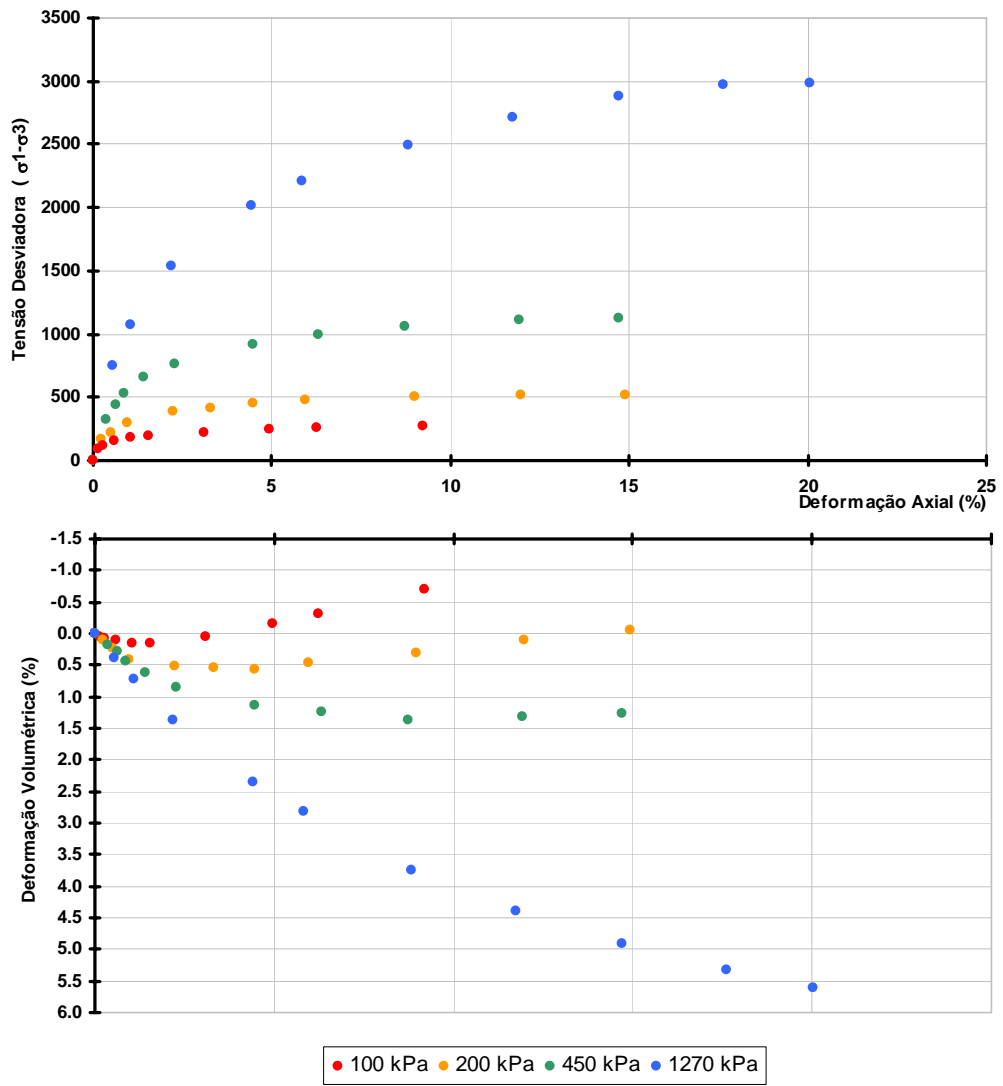
#### 3.1.1 Areias do Rio Sacramento

Para a calibração dos modelos constitutivos utilizaram-se resultados dos ensaios de compressão triaxial drenados e ensaios de compressão isotrópica executados em amostras de areia uniforme fina, dragada do Rio Sacramento, trinta milhas a montante da Baía de São Francisco, apresentados por LEE & SEED (1967).

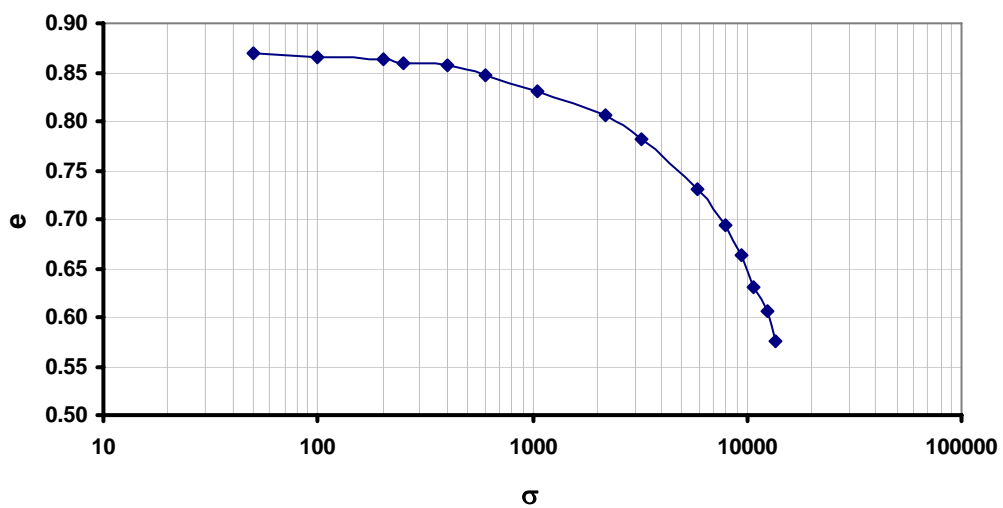
A areia foi minuciosamente lavada entre as peneiras de nº 50 (0,297 mm) e de nº 100 (0,149 mm) para produzir um material uniformemente fino, que não segregasse na moldagem das amostras e cuja penetração na membrana fosse insignificante. As partículas individuais eram, na maioria, minerais de feldspato e quartzo com forma de sub-angular a sub-arredondada. O peso específico e os índices de vazios limites,  $e_{\min}$  e  $e_{\max}$ , foram:  $\gamma_s = 2,68 \times 9,81 \text{ kn/m}^3$ ,  $e_{\min} = 0,61$  e  $e_{\max} = 1,03$ . O índice de vazios máximo,  $e_{\max}$ , foi determinado vertendo-se, lentamente e de altura muito baixa, uma amostra da areia seca para dentro de um recipiente graduado.

Os ensaios foram conduzidos em amostras preparadas com quatro densidades iniciais diferentes, sendo que, nessa tese, foram considerados apenas dois valores de densidade relativa: (1) Fofa,  $e_i = 0,87$ ,  $D_r \cong 38\%$ ; menor densidade que pode ser convenientemente preparada seguindo a rotina básica; (2) Densa,  $e_i = 0,61$ ,  $D_r \cong 100\%$ ; densidade máxima obtida por vibração, admitida representar a máxima densidade desta areia.

Os resultados desses ensaios, apresentados nas Figuras 3.1 e 3.2, foram escolhidos como referência para demonstrar o funcionamento dos diferentes procedimentos utilizados para a calibração dos modelos constitutivos.



(a) ensaios triaxiais convencionais



(b) ensaio de compressão isotrópica

Figura 3.1 - Pontos experimentais da areia fofa ( $e_i = 0,87$  e  $D_r \cong 38\%$ ) do Rio Sacramento.

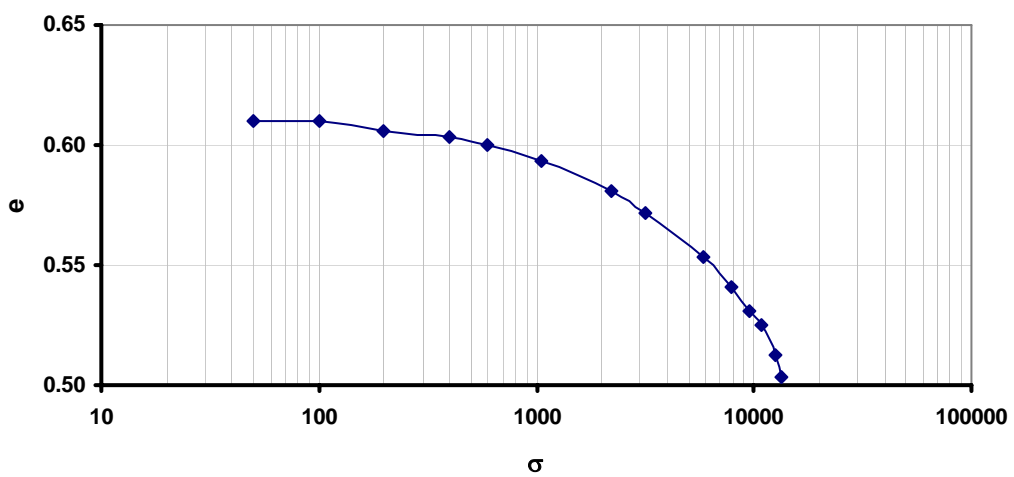
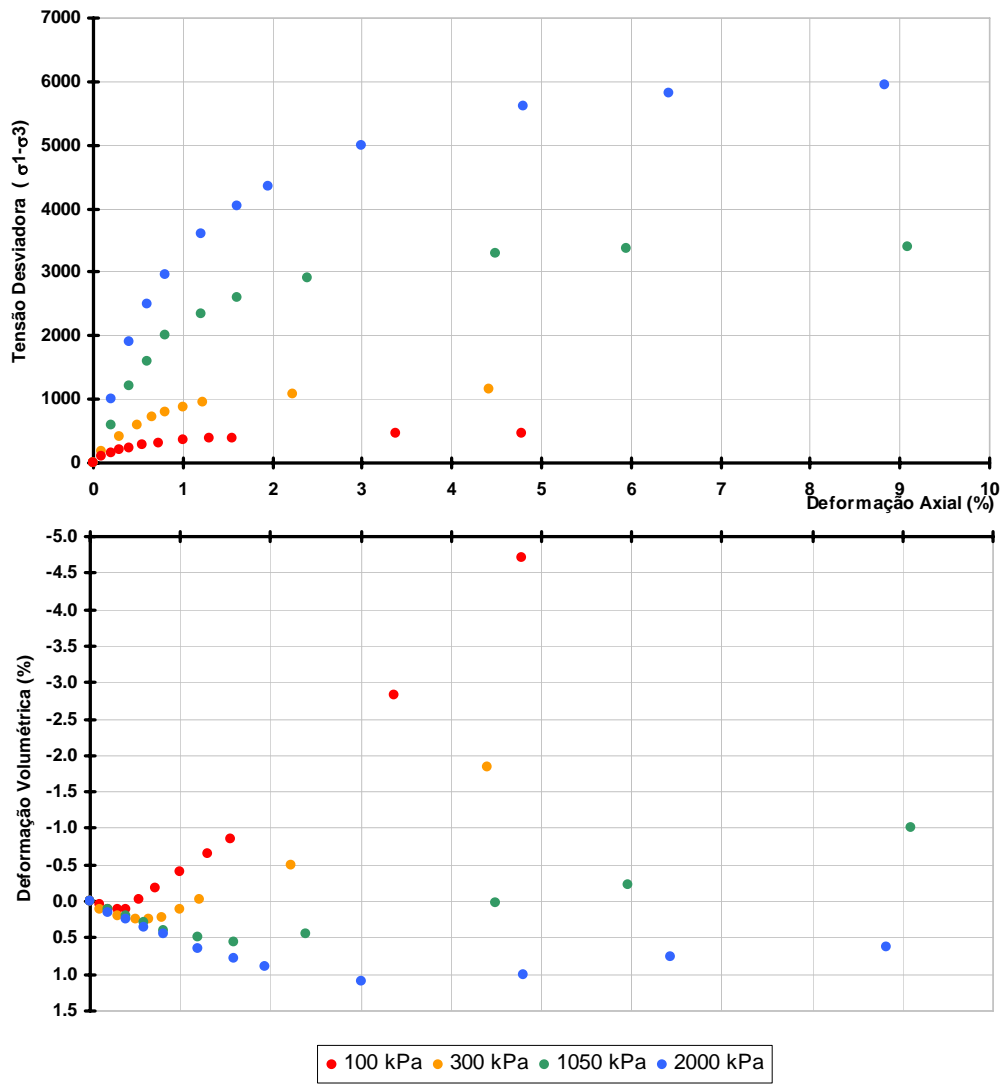


Figura 3.2 - Pontos experimentais da areia densa ( $e_i = 0,61$  e  $D_r \cong 100\%$ ) do Rio Sacramento.

Observou-se que alguns dados dos ensaios mostravam o fenômeno de amolecimento na curva tensão-deformação, após alcançar a resistência cisalhante máxima. Visto que o comportamento amolecimento não é parte do esforço de modelagem, os pontos pós pico foram excluídos, a fim de evitar os problemas derivados da capacidade dos modelos em descrever o comportamento do solo.

### 3.1.1 Solo residual jovem de gnaiss

O segundo material utilizado nesse trabalho é um solo residual jovem de gnaiss, coletado em um talude situado no Município de Viçosa, MG, e ensaiado por BOTELHO (2007). Na Figura 3.3 encontra-se a curva granulométrica, e na Tabela 3.1 apresentam-se os resultados dos ensaios de caracterização geotécnica desse material.

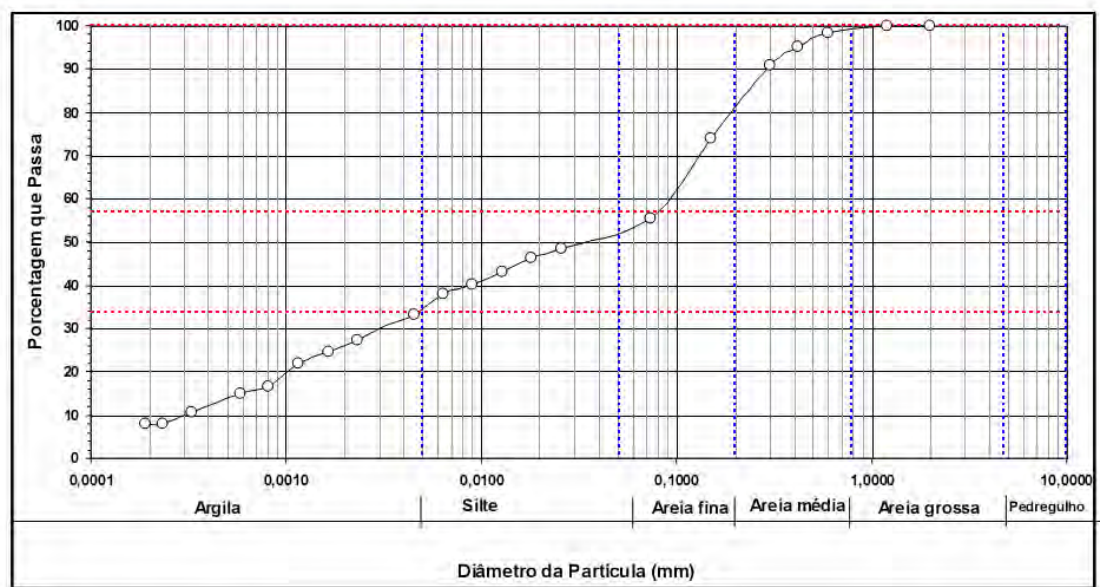


Figura 3.3 – Curva Granulométrica do solo residual jovem de gnaiss

Tabela 3.1 – Resultados dos ensaios de caracterização geotécnica

$\gamma_s$ (KN/m <sup>3</sup> )	LIMITES (%)			GRANULOMETRIA (%)			
	LL	LP	IP	argila	silte	areia	pedregulho
27,7	51	36	15	35	17	48	0

O programa de ensaios triaxiais cúbicos compreendeu trajetórias convencionais e não-convencionais (triaxiais verdadeiros, ou seja,  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ), em amostras saturadas e não-saturadas. Na Tabela 3.2 resumem-se os ensaios realizados e nas Figuras 3.4 a 3.12 apresentam-se os dados experimentais.

Tabela 3.2 – Ensaios realizados por BOTELHO (2007) no solo residual jovem de gnaisse

<b>Característica</b>		<b>Tipo</b>
<b>Ensaios Convencionais</b>	Sucção matricial de 80 kPa	CTC tensão confinante de 50 kPa
		CTC tensão confinante de 100 kPa
		CTC tensão confinante de 150 kPa
		HC (compressão hidrostática)
	Sucção matricial de 160 kPa	CTC tensão confinante de 50 kPa
		CTC tensão confinante de 100 kPa
		CTC tensão confinante de 150 kPa
		HC (compressão hidrostática)
	Saturado	CTC tensão confinante de 50 kPa
		CTC tensão confinante de 100 kPa
		CTC tensão confinante de 150 kPa
		HC (compressão hidrostática)
<b>Ensaios Não-Convencionais</b>	Saturado	Tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 30°
	Sucção matricial de 80 kPa	Tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 0°
		Tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 30°
		Tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 60°
	Sucção matricial de 160 kPa	Tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 0°
		Tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 30°
Tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a 60°		

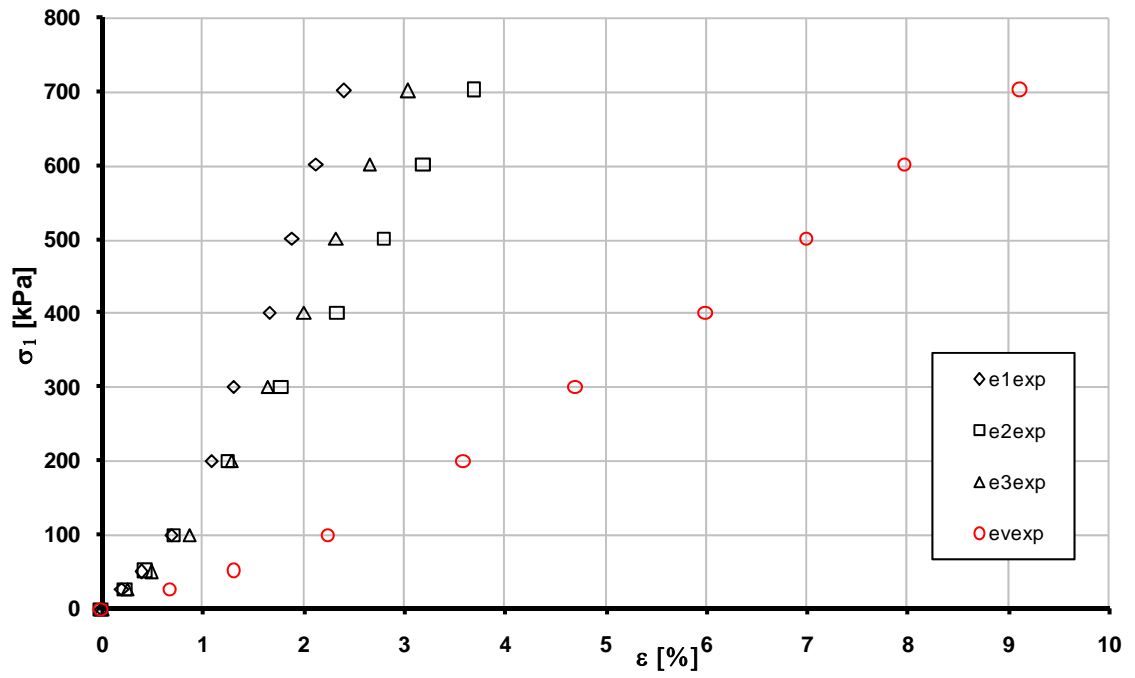


Figura 3.4 - Pontos experimentais do ensaio HC saturado

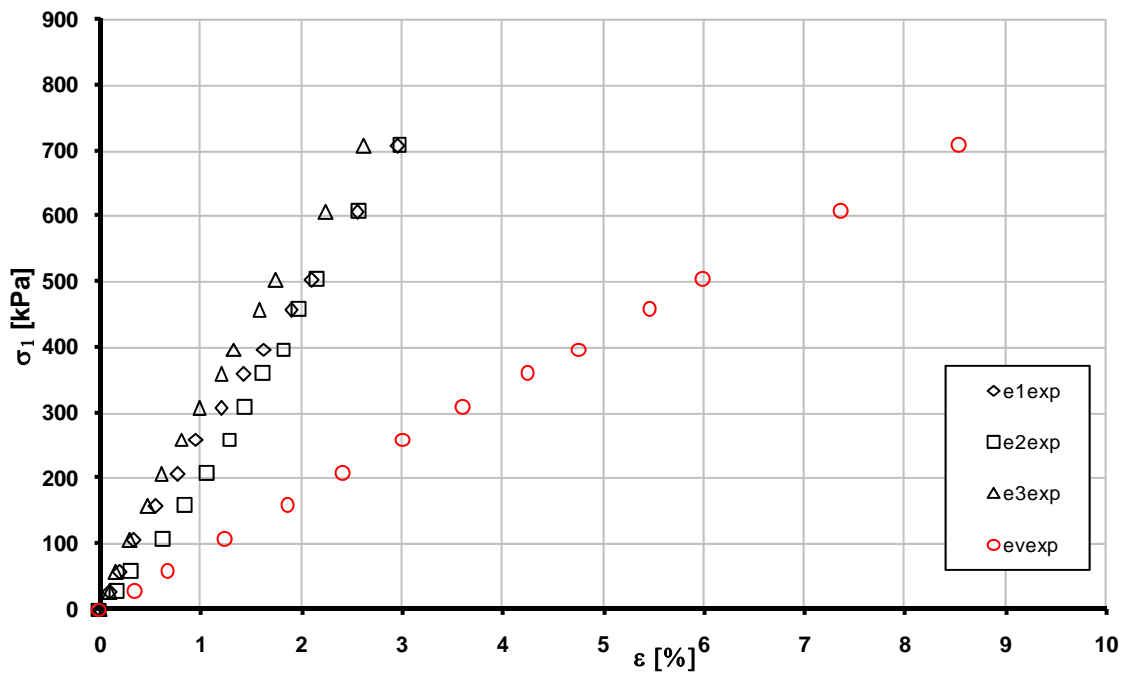


Figura 3.5 - Pontos experimentais do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa

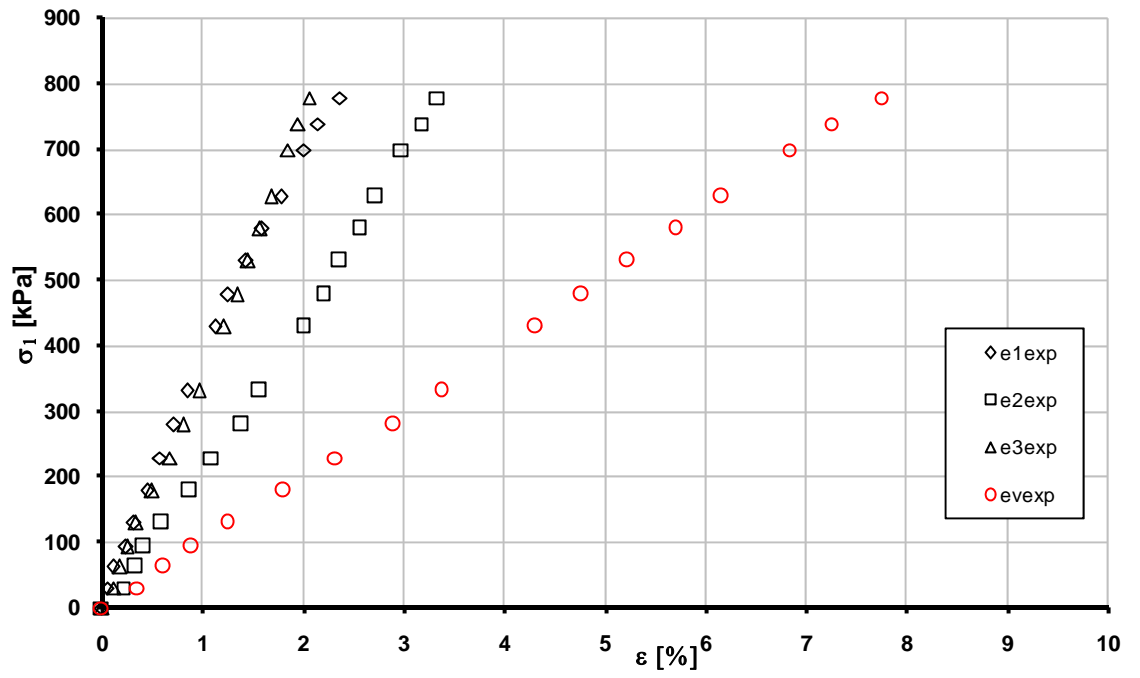


Figura 3.6 - Pontos experimentais do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa

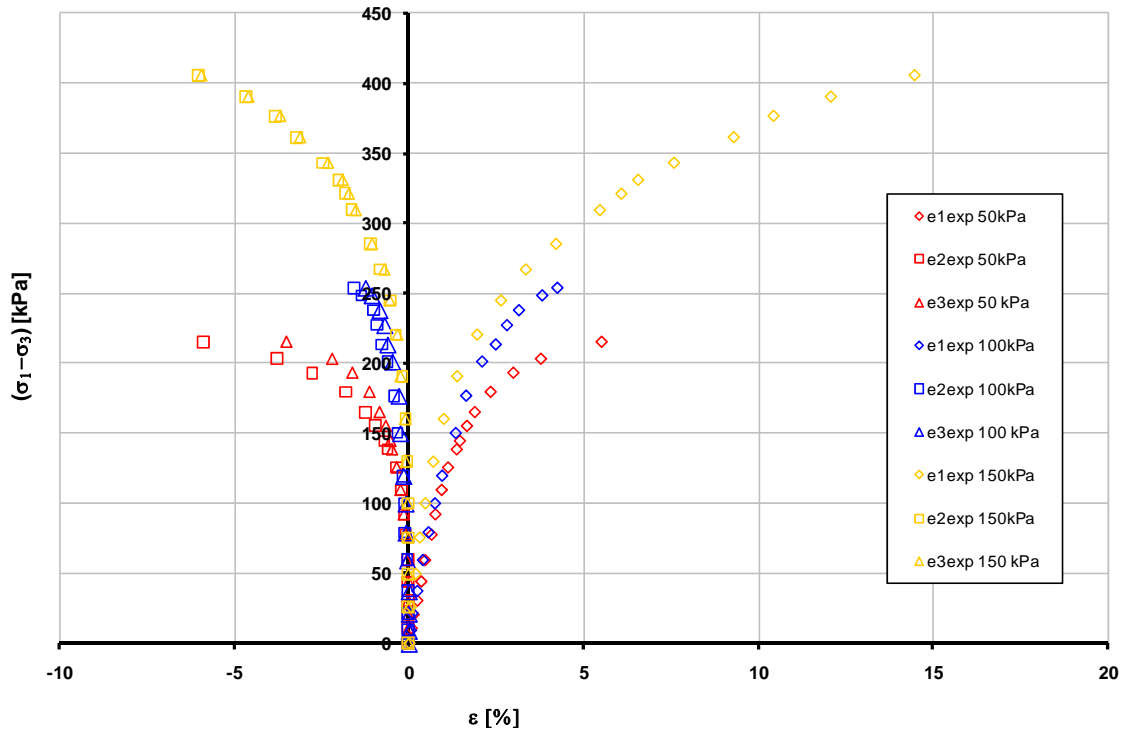


Figura 3.7 - Pontos experimentais do ensaio CTC saturado

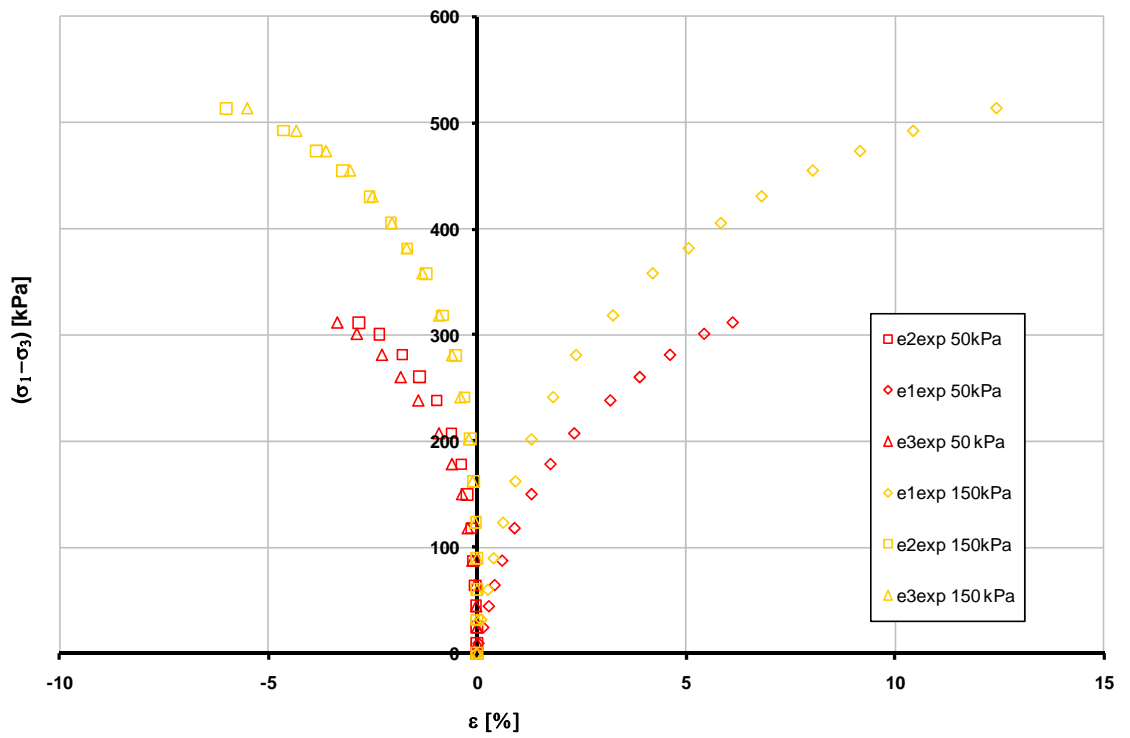


Figura 3.8 - Pontos experimentais do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa

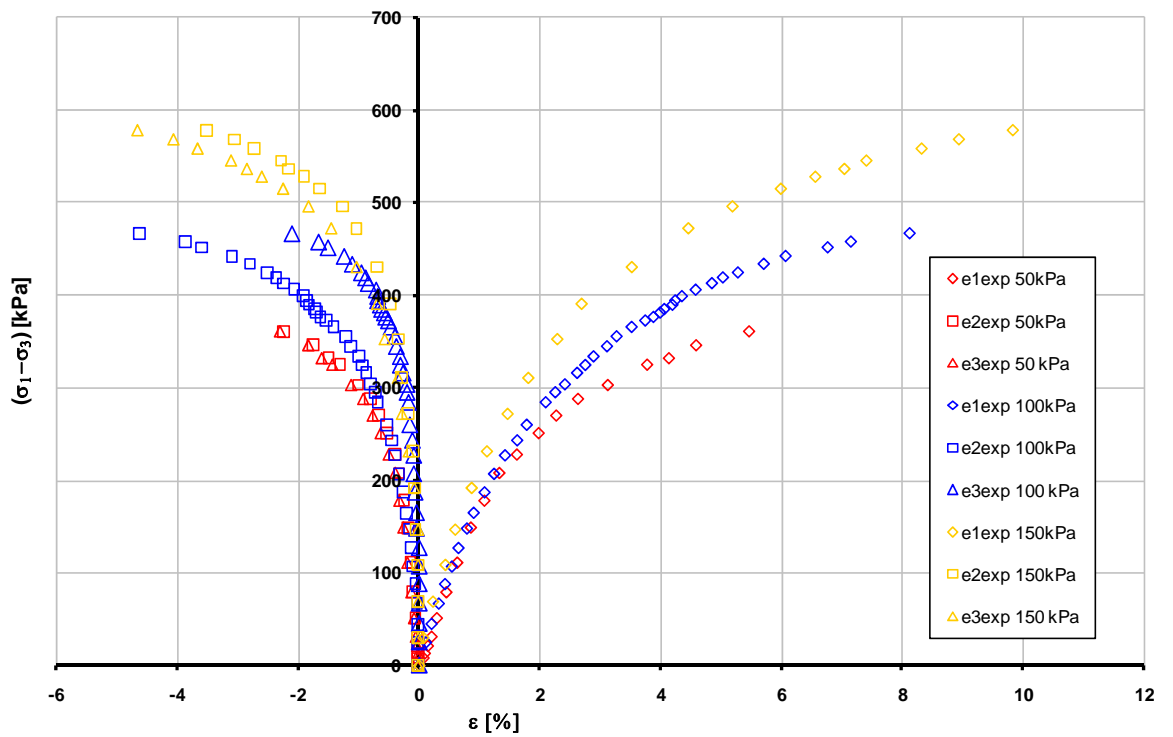


Figura 3.9 - Pontos experimentais do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa

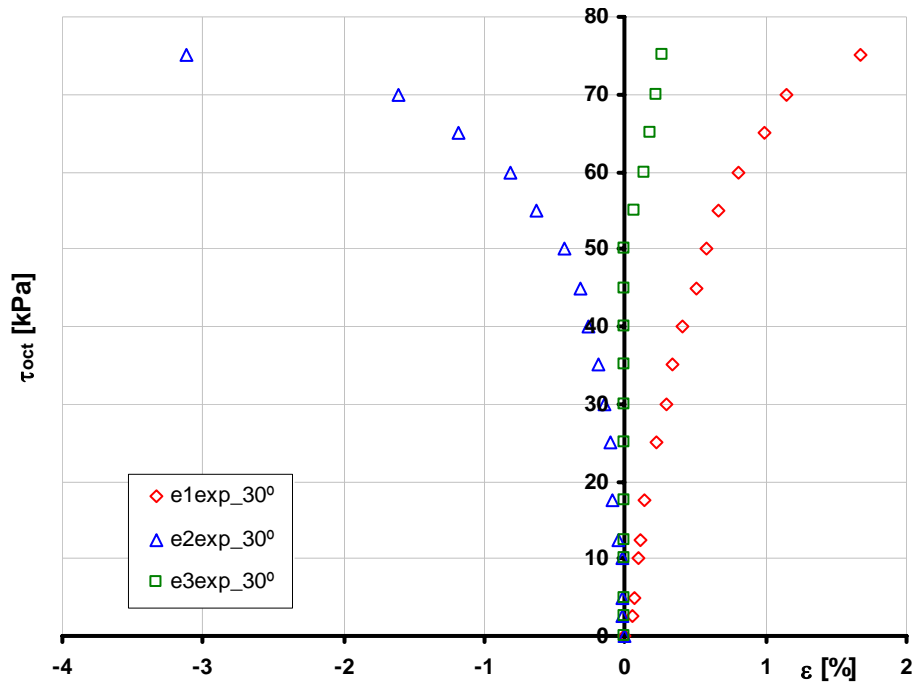
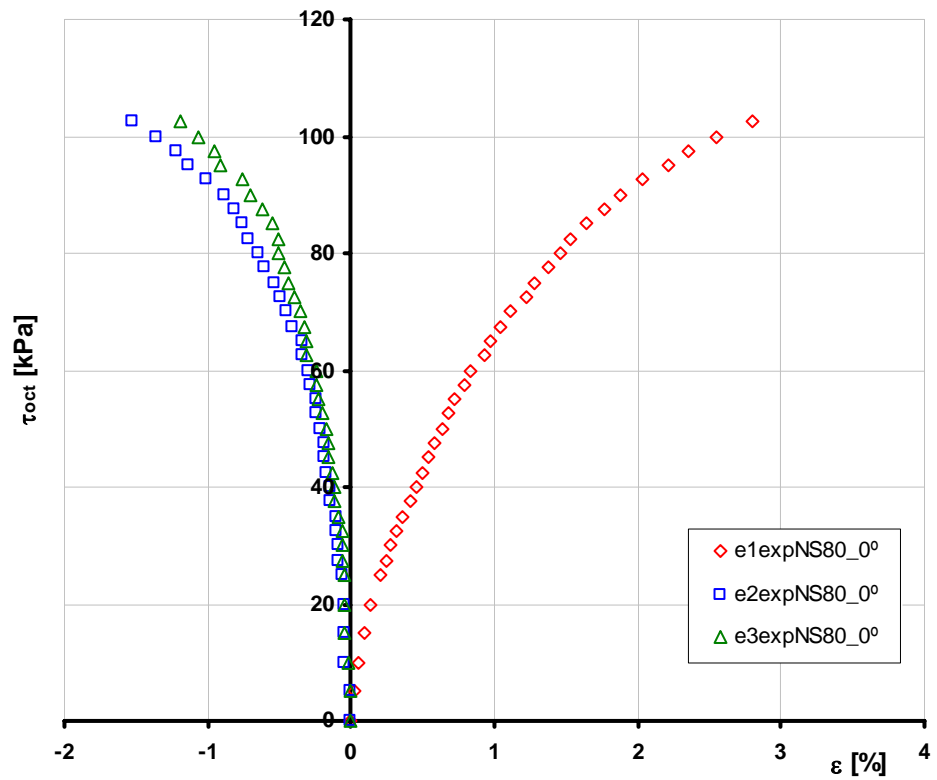
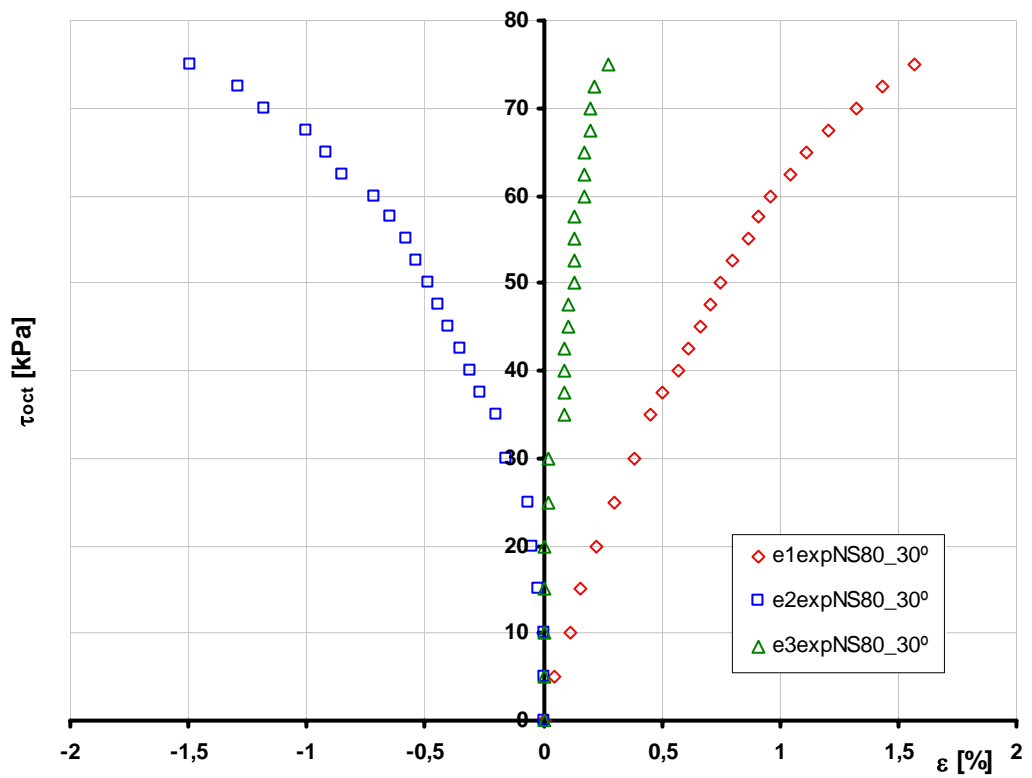


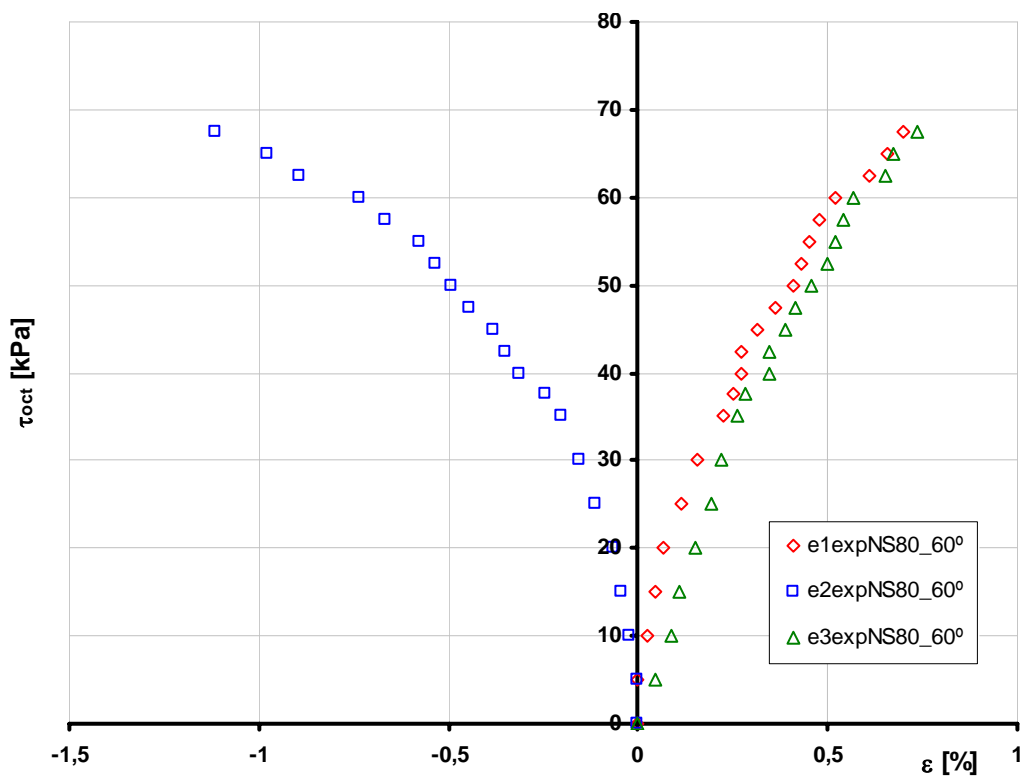
Figura 3.10 - Pontos experimentais do ensaio saturado com tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode igual a  $30^\circ$



(a)

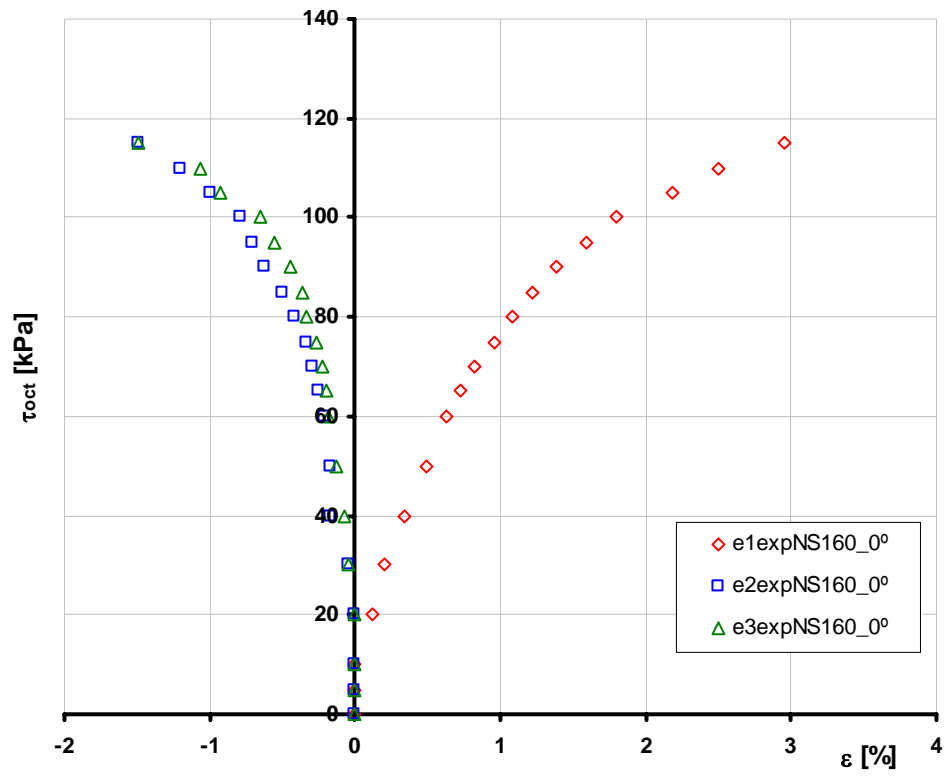


(b)

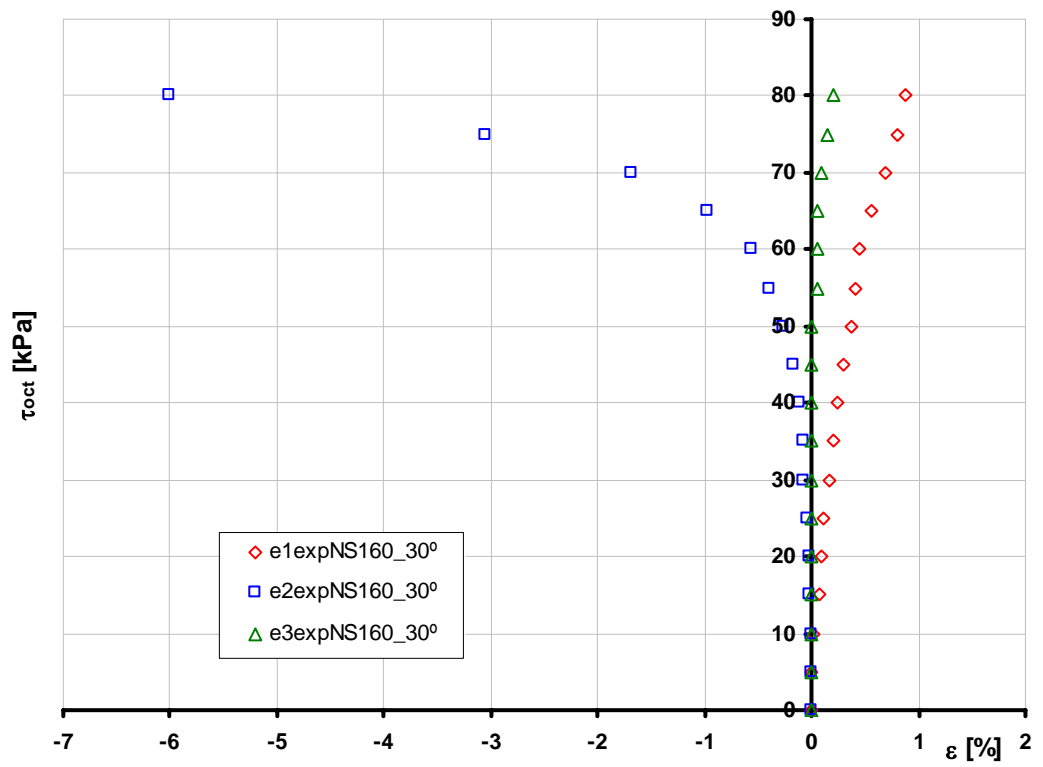


(c)

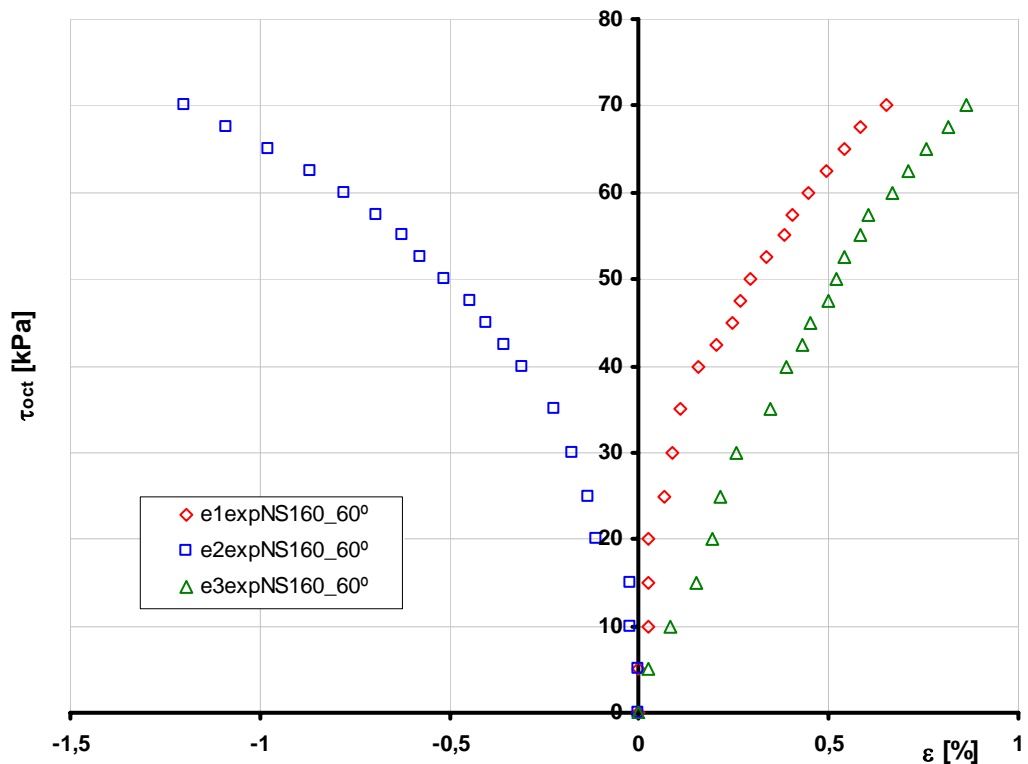
Figura 3.11 - Pontos experimentais dos ensaios com sucção matricial de 80 kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode iguais a (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°



(a)



(b)



(c)

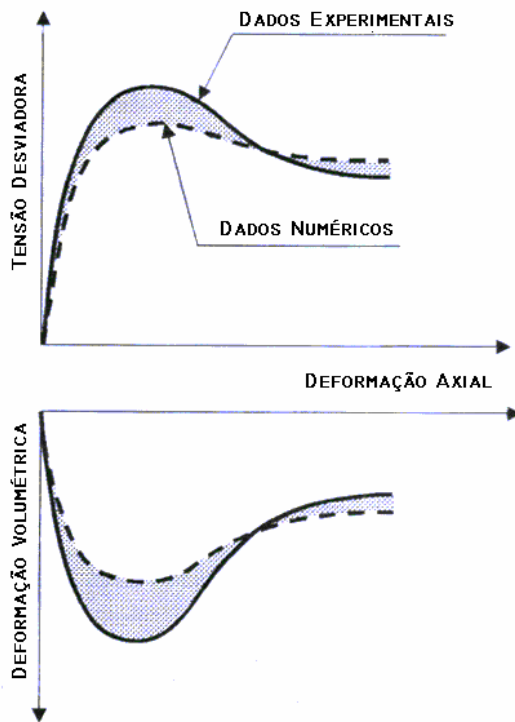
Figura 3.12 - Pontos experimentais dos ensaios com sucção matricial de 160 kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode iguais a (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°

### 3.2 Procedimento matemático

Na mecânica dos solos convencional, parâmetros de modelos constitutivos são calibrados com base em resultados experimentais apropriados para cada tipo de problema de valor de fronteira sob exame. O objetivo da calibração de modelos é encontrar os parâmetros apropriados que produzem a melhor resposta do modelo em relação aos resultados experimentais disponíveis (Figura 3.13).

A metodologia proposta para identificação de parâmetros de modelos é um procedimento racional para minimização do erro entre resultados experimentais e predições numéricas. O procedimento matemático de minimização consiste basicamente de duas etapas principais:

1. Formulação de uma função objetivo que mede a diferença entre os resultados experimentais e preditos;
2. Seleção de uma estratégia de otimização que possibilita a procura por um mínimo global da função objetivo.



Minimizar {Experimental – Numérico}

Figura 3.13 – Ilustração de um procedimento de otimização usado para a calibração de parâmetros de modelos.

A maior vantagem da análise inversa é o cálculo objetivo e automático dos valores dos parâmetros que produzem o melhor ajuste entre dados medidos e resultados computados, além da economia de tempo em relação aos métodos tradicionais de calibração por tentativa e erro.

### 3.2.1 Função objetivo

Como os valores observados e os resultados computados são conhecidos somente em pontos discretos, a função objetivo pode ser representada por uma soma de normas individuais em tais pontos. Nesse estudo, a função objetivo,  $f(\mathbf{p})$  ou  $FO$ , expressa com base no método dos mínimos quadrados ponderados (Equação 2.39), é função das tensões totais principais  $\sigma_l$  ( $l = 1,2,3$ ) e das deformações principais  $\varepsilon_l$  ( $l = 1,2,3$ ):

$$f(\mathbf{p}) = FO = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{npt_j} w_{\sigma} \left\| \sigma_{li}^{\text{exp}} - \sigma_{li}(\mathbf{p}) \right\|^2 + w_{\varepsilon} \left\| \varepsilon_{li}^{\text{exp}} - \varepsilon_{li}(\mathbf{p}) \right\|^2 \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{p}$  é o vetor de parâmetros;  $ne$  é o numero de ensaios;  $npt_j$  é o número de pontos do  $j$ -ésimo ensaio;  $\sigma_{li}(\mathbf{p})$  são os valores das tensões totais principais prescritas pelo modelo constitutivo do  $i$ -ésimo ponto,  $\sigma_{li}^{\text{exp}}$  são as tensões experimentais do  $i$ -ésimo ponto,  $\varepsilon_{li}(\mathbf{p})$  são os valores das deformações principais prescritas pelo modelo constitutivo do  $i$ -ésimo ponto e  $\varepsilon_{li}^{\text{exp}}$  são as deformações experimentais do  $i$ -ésimo ponto.

Os valores de  $w_\sigma$  e  $w_\varepsilon$  são fatores escalares de ponderação necessários para transformar os valores observados em quantidades adimensionais, já que mais de um tipo de observação é somado. Foram escolhidos como fatores os valores máximos das variáveis correspondentes aos pontos envolvidos em cada conjunto de dados, sendo admitido os seguintes valores:

$$w_\sigma = \frac{1}{\sigma_{máx}^2} \quad (3.2)$$

$$w_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_{máx}^2}$$

em que  $\sigma_{máx}$  e  $\varepsilon_{máx}$  são, respectivamente,

$$\sigma_{máx} = \max\{\sigma_{li}^{\text{exp}}\}, l = 1...3, i = 1...npt_j \quad (3.3a)$$

$$\varepsilon_{máx} = \max\{\varepsilon_{li}^{\text{exp}}\}, l = 1...3, i = 1...npt_j \quad (3.3b)$$

A calibração de parâmetros em solos tem sido tradicionalmente baseada em resultados de três ensaios de cisalhamento para diferentes tensões de confinamento e, por isso, na Equação 3.1, somam-se as diferenças dos resultados de mais de um ensaio.

A função objetivo considera tanto os erros nas tensões quanto nas deformações. Os dados prescritos são comparados no mesmo nível de deformação axial, já que para os pontos finais das curvas, as diferenças para o mesmo nível de tensão, podem ser muito grandes (Figura 3.14), o que poderia influenciar significativamente o valor da função objetivo.

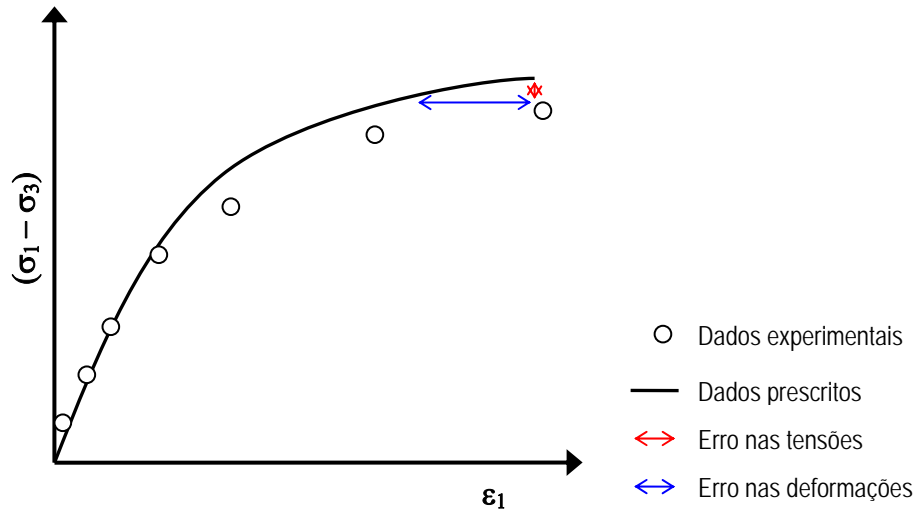


Figura 3.14 – Definição dos erros da função objetivo

A variação no valor da função objetivo pode ser expressa por uma variável estatística, denominada *melhoria do ajuste (fit improvement)*, FI, que indica o percentual de melhora nos resultados otimizados em relação ao ajuste inicial. Essa variável é definida como:

$$FI = \frac{f(\mathbf{p})_{inicial} - f(\mathbf{p})_{final}}{f(\mathbf{p})_{inicial}} \times 100 \quad (3.4)$$

Outras variáveis estatísticas, que expressam em porcentagem o ajuste da função objetivo são os erros relativos, definidos como:

$$erro_{\sigma} = \frac{\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{npt_j} w_{\sigma} \|\sigma_{li}^{exp} - \sigma_{li}(\mathbf{p})\|^2}{\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{npt_j} w_{\sigma} (\sigma_{li}^{exp})^2} \times 100 \quad (3.5a)$$

$$erro_{\varepsilon} = \frac{\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{npt_j} w_{\varepsilon} \|\varepsilon_{li}^{exp} - \varepsilon_{li}(\mathbf{p})\|^2}{\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{npt_j} w_{\varepsilon} (\varepsilon_{li}^{exp})^2} \times 100 \quad (3.5b)$$

Há um risco de interpretação incorreta das estatísticas de ajuste do modelo, já que elas inferem sobre o ajuste entre resultados computados e dados experimentais, apenas das observações incluídas na otimização. Portanto, elas não podem ser

usadas para prever a melhoria de simulações de ensaios não incluídos na otimização.

### 3.2.2 Estratégias de otimização

A solução do problema de identificação de parâmetros de modelos constitutivos (Equação 2.37) requer a minimização de uma função objetivo adequada, definida na Equação 3.1, que pode ser realizada por uma variedade de algoritmos de otimização. Um resumo dos algoritmos implementados para este trabalho são apresentados no ANEXO A.

Com o objetivo de definir a melhor estratégia, duas abordagens foram estudadas: programação matemática e genética. Em ambas as abordagens, os parâmetros são inicialmente estimados por meios convencionais, ou seja, os parâmetros iniciais são obtidos em conformidade com os procedimentos de calibração tradicional específicos de cada modelo. Nos Anexos B e C são apresentados tais procedimentos para os modelos hiperbólico e Lade-Kim, respectivamente. A calibração tradicional foi realizada de forma a minimizar qualquer subjetividade dos procedimentos de calibração do modelo.

Os parâmetros indeterminados estão, geralmente, sujeitos a certas restrições nas faixas de valores que podem assumir. Nas Tabelas 3.3 e 3.4 estão apresentados os valores limites ( $pl$ , limite inferior;  $pu$ , limite superior) adotados para os parâmetros dos modelos constitutivos estudados, hiperbólico e Lade-Kim. Esses limites foram impostos apenas para os algoritmos L-BFGS-B e genético, enquanto que para os demais considerou-se o problema irrestrito.

Tabela 3.3 – Limites superiores e inferiores adotados para os parâmetros do modelo hiperbólico.

Parâmetros	$K$	$n$	$Rf$	$K_b$	$m$	$c$ [kPa]	$\phi$ [°]
$pl$	5,0	0,0	0,7	2,0	0,0	0,0	0,0
$pu$	1000	2,0	1,2	2000	2,0	100,0	90,0

Tabela 3.4 – Limites superiores e inferiores adotados para os parâmetros do modelo Lade-Kim.

Parâmetros	$pl$	$pu$
$v$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$M$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$\lambda$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$m$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$\eta_1$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$\psi_2$	$L\psi_2$	$1,0 \times 10^5$
$\mu$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$C$	0,0	90,0
$p$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$h$	0,0	$1,0 \times 10^5$
$\alpha$	0,0	$1,0 \times 10^5$

em que:  $L\psi_2 = -(27 \times \psi_1 + 3)$   
 $\psi_1 = 0.00155 \times m^{-1.27}$

### Abordagem da programação matemática

Na abordagem da programação matemática utilizaram-se as técnicas de Newton modificado, Gauss-Newton, Levenberg-Marquart e L-BFGS-B. Para essas técnicas empregaram-se dois procedimentos distintos.

No primeiro, apenas os parâmetros não correlacionados foram otimizados, já que parâmetros ditos correlacionados, de acordo com o critério de identificabilidade, não podem ser identificados independentemente, os demais foram considerados constantes. Verifica-se a correlação entre parâmetros a partir do coeficiente de correlação (Equação 2.87), determinado a partir da calibração tradicional.

No segundo, selecionaram-se para a otimização somente os parâmetros relevantes não-correlacionados, mantendo-se os outros constantes. Os parâmetros relevantes foram escolhidos com base na sensibilidade de escala comparada (Equação 2.88) dos parâmetros do modelo, determinada a partir da calibração tradicional.

Os algoritmos Newton-Modificado, Gauss-Newton e Levenberg-Marquardt foram implementados em FORTRAN, de acordo com o fluxograma apresentado na Figura 3.15. A avaliação das derivadas, necessária para a determinação da

matriz de sensibilidade e da direção de busca nos algoritmos clássicos de otimização empregados, foi realizada numericamente por diferenças finitas.

A otimização pelo algoritmo L-BFGS-B foi realizada modificando-se um dos *drivers* de exemplos fornecidos no pacote do código L-BFGS-B disponível na internet (<http://www.ece.northwestern.edu/~nocedal/software.html>), incluindo-se como calcular o valor da função objetivo e de seu gradiente. Segundo seus autores, este *software* pode ser usado livremente para pesquisa, educação ou finalidades comerciais, mas alertam, entretanto, que ele é fornecido sem qualquer garantia expressa ou implícita, ou seja, não existe garantia a respeito da aptidão do *software* para uma finalidade particular.

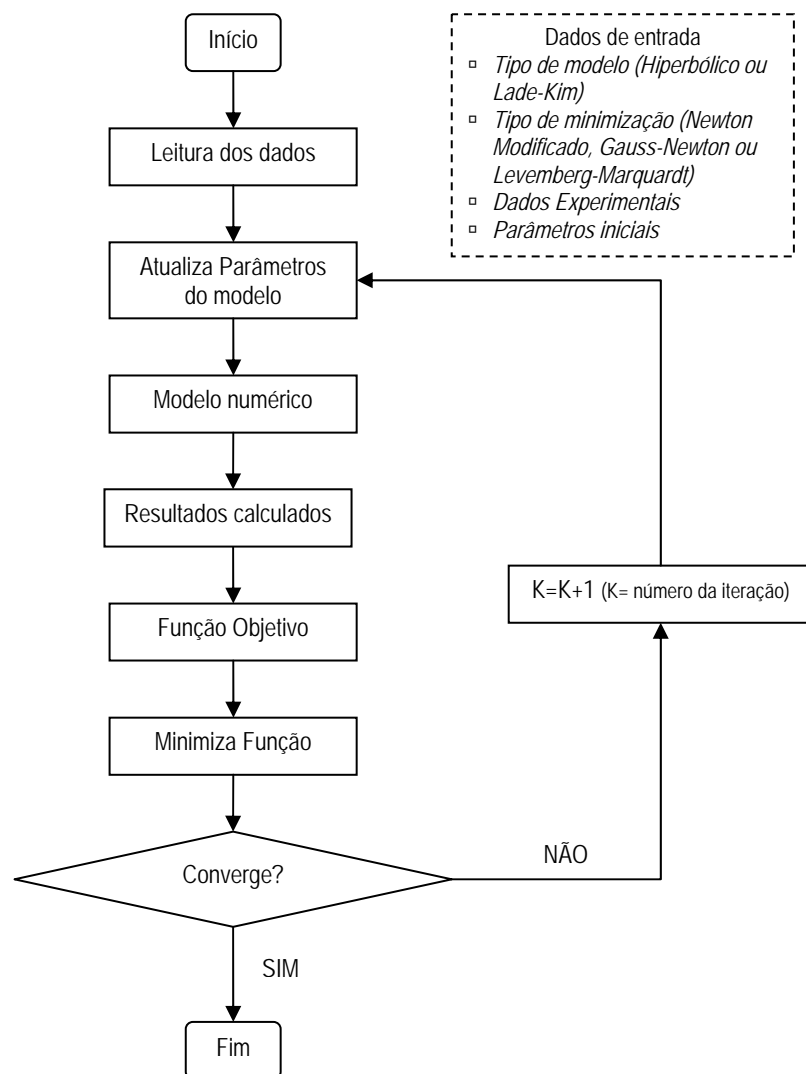


Figura 3.15 – Fluxograma do algoritmo desenvolvido para a abordagem da programação matemática.

## Abordagem Genética

No algoritmo genético implementado, a população inicial de cromossomos é formada aleatoriamente. O cromossomo é representado por um vetor de  $np$  números de pontos flutuantes (representação real). Cada gene do cromossomo corresponde a um parâmetro ( $p_i$ ) do modelo constitutivo, cujos limites inferior ( $pl_i$ ) e superior ( $pu_i$ ) são valores estimados de acordo com alguma informação anterior (calibração tradicional, experiência do usuário, outros ensaios de laboratório e, ou de campo). Cada cromossomo da população produz um grupo de dados numéricos, de acordo com o modelo constitutivo, que é comparado aos dados observados. A diferença entre os valores desses dois grupos – resultados preditos e experimentais, é indicativa da adaptabilidade desse cromossomo (definida pelo valor *fitness*).

A cada geração, segundo uma taxa pré-definida, alguns indivíduos da população principal, com base no valor de sua aptidão, são selecionados para a recombinação, gerando uma população de descendentes. Sobre os indivíduos da população de descendentes, mutações são aplicadas, também de acordo com uma probabilidade pré-definida.

Uma população dita intermediária é formada pela soma da população principal e de descendentes. Ao final do processo ocorre a seleção natural, em que indivíduos menos aptos das populações somadas são descartados. Ressalta-se que tal procedimento constitui um caso elitista, isto é, os indivíduos mais adaptados são sempre passados para as próximas gerações. O procedimento é repetido até que se obtenha convergência da população para uma única solução, ou o número de gerações exceda determinado limite pré-fixado.

O algoritmo genético desenvolvido pode ser entendido por meio do fluxograma mostrado na Figura 3.16.

Conforme se pode observar, um ciclo de geração compreende a avaliação da adaptabilidade dos indivíduos, a seleção para a reprodução, a geração de novos indivíduos (reprodução: recombinação, mutação e elitismo), a atualização da população (seleção natural) e a definição da nova geração (convergência).

A avaliação da população é feita em relação ao valor *fitness*, que representa a qualidade do cromossomo como solução. O objetivo do algoritmo genético é minimizar o valor *fitness* do problema. No problema de calibração a meta é achar o conjunto de parâmetros do modelo constitutivo de um material que prediz o comportamento tensão-deformação medido em ensaios de laboratório tão ajustados quanto possível. Então, o valor *fitness* pode ser obtido comparando o comportamento tensão-deformação observado em ensaios de laboratório com o comportamento predito pelo modelo constitutivo, usando o conjunto de parâmetros do material representado pelo cromossomo. Essa definição é a mesma apresentada anteriormente para a função objetivo, por esta razão o valor *fitness* se iguala ao valor da função objetivo.

A aptidão é determinada pelo mapeamento da função objetivo do problema, introduzindo uma medida relativa do quanto o melhor cromossomo é melhor do que o pior cromossomo, e define um ordenamento do cromossomo na população. O primeiro cromossomo do ordenamento recebe uma aptidão arbitrária igual a 2,0 e ao último é atribuído o valor 0,0. Os demais recebem valores de aptidão interpolando linearmente esses dois extremos usando a função  $f_i = 2(N - i)(N - 1)$ , em que N é o tamanho da população e i a posição que o indivíduo ocupa em ordem crescente do valor da função objetivo.

O algoritmo genético desenvolvido permite que um algoritmo de minimização possa ser usado para aumentar a chance de encontrar o mínimo global, reduzindo o espaço de busca aos mínimos locais da função. Esse procedimento pode ser utilizado na formação da população inicial e nos descendentes, em que os cromossomos são considerados bebês e que, ao serem minimizados, transformam-se em cromossomos adultos. A desvantagem do uso dessa minimização advém do aumento do tempo computacional.

Como são múltiplas as possibilidades do algoritmo genético, adotaram-se as seguintes características para os exemplos apresentados no Capítulo 4:

- População inicial de 10 indivíduos;
- Não há exigência de diversidade na população inicial;

- Introdução de um indivíduo germe na população inicial: utiliza-se a calibração tradicional;
- População inicial formada a partir de limites preestabelecidos. Admitem-se quatro porcentagens de limites dos valores da calibração tradicional: 20%, 50%, 70% e 90%;
- Crossover BLX- $\alpha$ ;
- Taxa de mutação de 1%;
- Mutação do tipo uniforme;
- População de descendentes duas vezes maior que a população inicial.
- Nenhum tipo de minimização foi usado na formação das populações inicial e de descendentes devido ao grande esforço computacional.

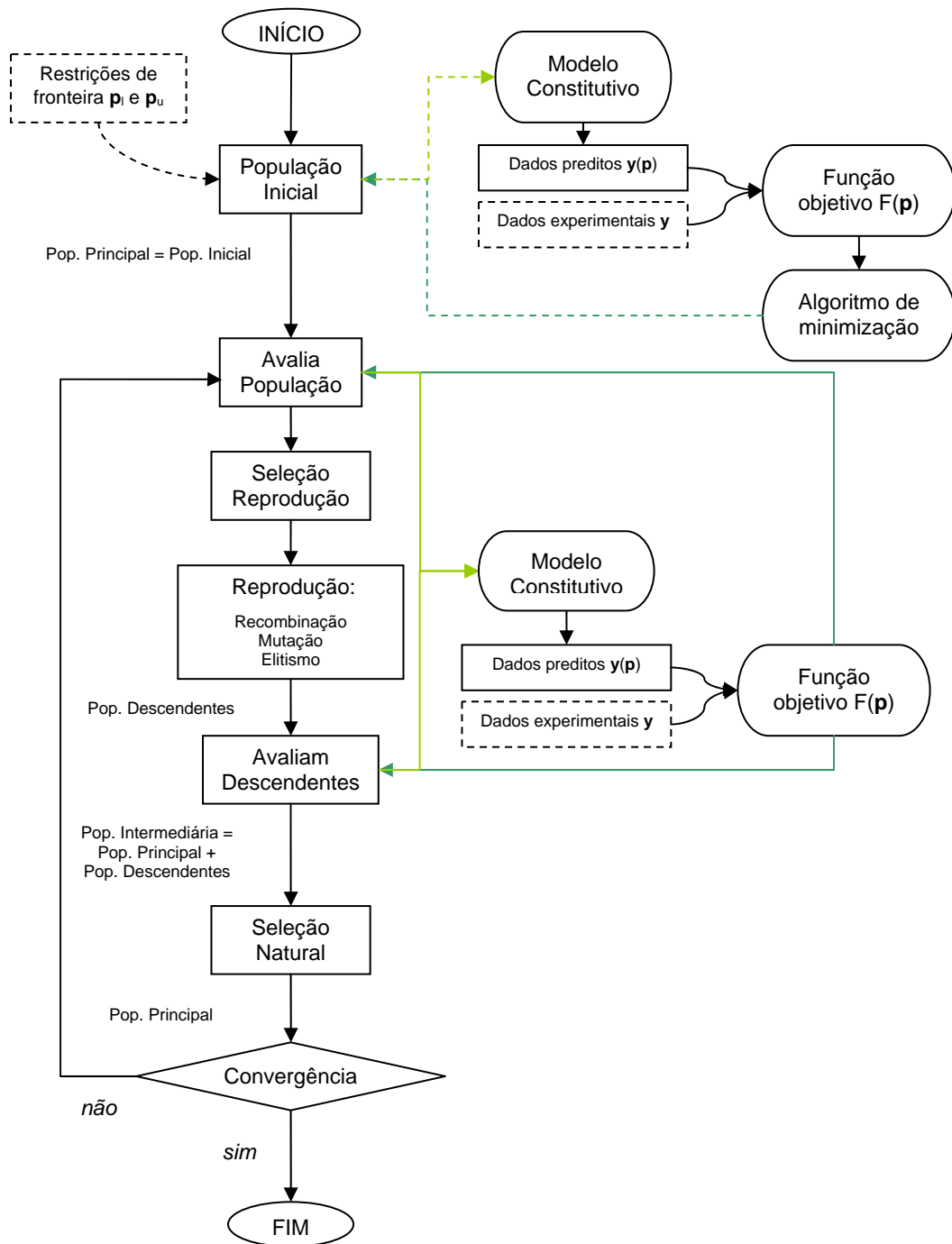


Figura 3.16 – Fluxograma do procedimento de análise inversa com o algoritmo genético proposto.

---

---

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 Estudo da estratégia de otimização

#### 4.1.1 Modelo Hiperbólico

A metodologia proposta foi inicialmente empregada para calibrar os parâmetros do modelo não-linear hiperbólico. Nesse caso, apenas os pontos experimentais das curvas de tensões de confinamento de 200, 450 e 1270 kPa da areia fofa ( $e_i = 0,87$  e  $D_r \cong 38\%$ ), descrita no Capítulo 3, foram utilizados nos procedimentos de calibração, devido a algumas limitações na capacidade de reprodução deste modelo.

##### 4.1.1.1 Calibração tradicional

O procedimento de calibração tradicional para o modelo hiperbólico resultou nos parâmetros apresentados na Tabela 4.1. Na Figura 4.2 apresentam-se as curvas comparativas entre resultados experimentais e resultados numéricos obtidos com os parâmetros da calibração tradicional. Estes parâmetros foram posteriormente utilizados como parâmetros iniciais nos procedimentos de calibração iterativos.

Tabela 4.1 – Parâmetros da calibração tradicional do modelo hiperbólico para areia fofa

Areia fofa	$K$	$n$	$R_f$	$K_b$	$m$	$c$ [kPa]	$\phi$ [°]
Calibração Tradicional	825,28	0,2764	0,9495	325,46	-0,0263	19,89	32,29

Os resultados encontrados para os parâmetros ajustam os dados dos ensaios razoavelmente bem. Entretanto, eles superestimam ligeiramente a resposta da tensão desviadora e não são capazes de representar a dilatância para a tensão de confinamento de 200 kPa.

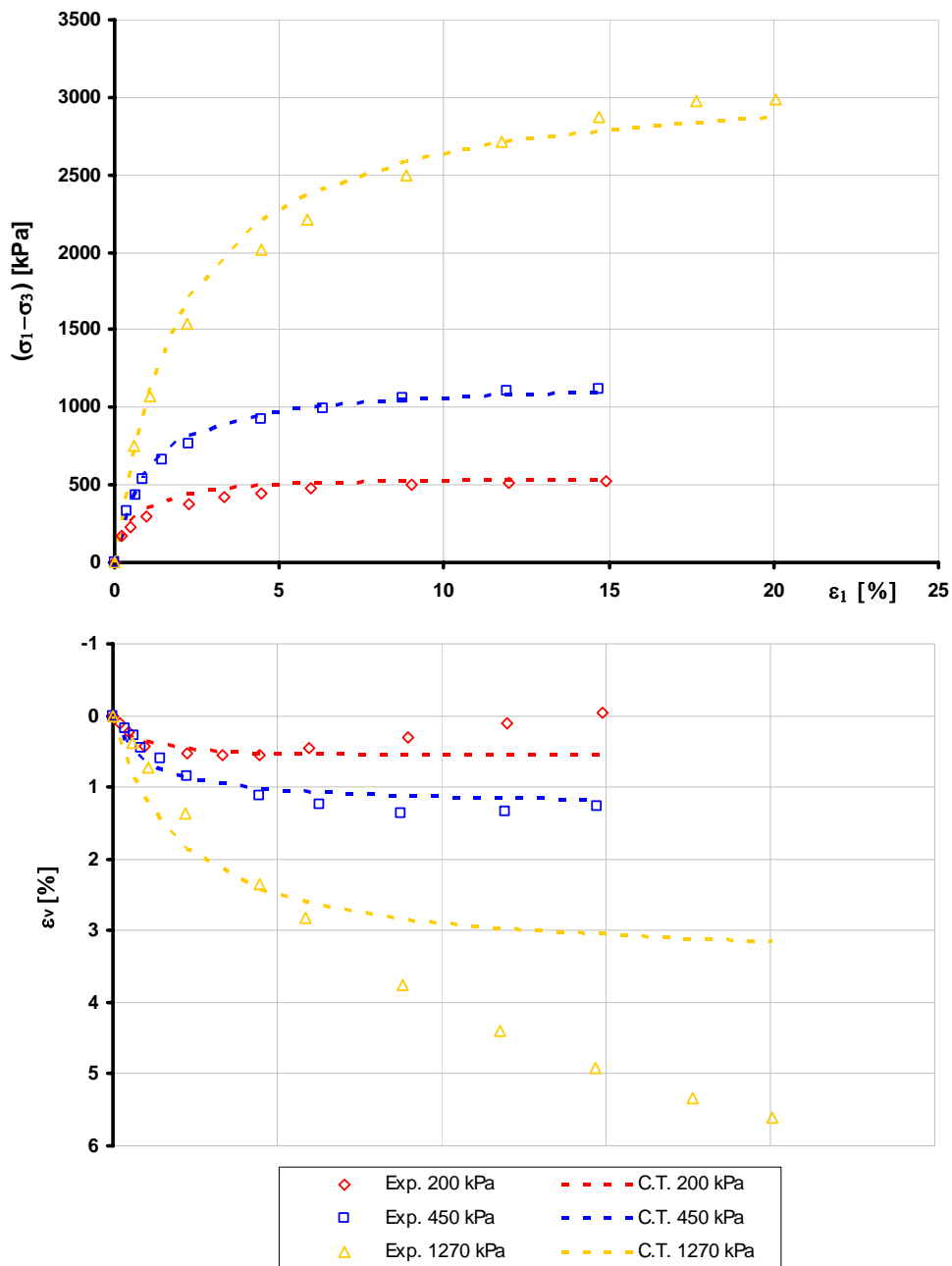


Figura 4.1 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros obtidos pela calibração tradicional para areia fofa.

#### 4.1.1.2 Análise sensibilidade

Os parâmetros utilizados na montagem da matriz de sensibilidade e cálculo dos coeficientes de correlação e relevância foram os obtidos na calibração tradicional.

Conforme indicado na Tabela 4.2, os parâmetros  $c$  (coesão) e  $\phi$  (ângulo de atrito) apresentaram coeficiente máximo de correlação entre si e com o parâmetro  $R_f$

(razão de ruptura). Como eles não poderiam ser estimados simultaneamente, optou-se por manter  $c$  e  $\phi$  constantes durante o processo de otimização, já que esses parâmetros podem ser mais facilmente determinados em laboratório do que o parâmetro  $R_f$ . Além disso, os parâmetros  $K$  e  $K_b$  apresentaram alta correlação com os parâmetros  $n$  e  $m$ , respectivamente.

A estimativa simultânea de  $K$  e  $n$  é difícil, já que no modelo hiperbólico esses parâmetros aparecem na mesma equação que define a rigidez inicial da curva tensão-deformação, no espaço  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  versus  $\varepsilon_a$  (Equação 2.2).

Na Figura 4.2 é possível observar que: (i) os parâmetros  $R_f$  e  $\phi$  são os mais sensíveis; (ii) o efeito nos resultados computados dos parâmetros  $c$ ,  $K$  e  $n$  são visíveis e (iii) mudanças nos parâmetros  $K_b$  e  $m$  não afetam os resultados simulados. Estes resultados são condizentes com as características do modelo e com os dados usados como observações (ensaios de compressão triaxial). Como apenas os parâmetros  $R_f$  e  $\phi$  são os mais relevantes, mas são correlacionados, apenas um deles pode ser identificado, e optou-se pelo  $R_f$  pelo mesmo motivo exposto anteriormente.

Tabela 4.2 – Coeficientes de correlação entre os parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa

$\rho_{ij}$	$K$	$n$	$R_f$	$K_b$	$m$	$c$	$\phi$
$K$	1,000	-0,893	-0,738	0,689	-0,660	-0,738	-0,738
$n$	-0,893	1,000	0,544	-0,697	0,732	0,544	0,544
$R_f$	-0,738	0,544	1,000	-0,268	0,237	1,000	1,000
$K_b$	0,689	-0,697	-0,268	1,000	-0,981	-0,268	-0,268
$m$	-0,660	0,732	0,237	-0,981	1,000	0,237	0,237
$c$	-0,738	0,544	1,000	-0,268	0,237	1,000	1,000
$\phi$	-0,738	0,544	1,000	-0,268	0,237	1,000	1,000

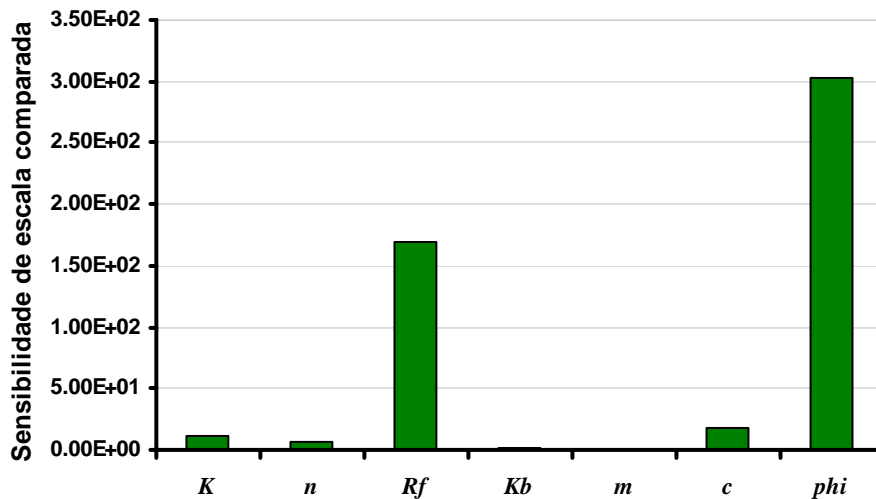


Figura 4.2 – Sensibilidade de escala comparada dos parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa.

#### 4.1.1.3 Otimização

Comparações entre resultados numéricos e experimentais obtidas por meio das diferentes técnicas de otimização são apresentadas para mostrar a capacidade desses procedimentos na extração dos parâmetros do modelo hiperbólico.

#### Parâmetros não-correlacionados

Algoritmos de programação matemática foram utilizados para identificar os parâmetros não correlacionados do modelo hiperbólico, para o seguinte vetor de variáveis:

$$\mathbf{p}_{NC} = \{K, R_f, K_b\} \quad NC = \text{não correlacionados} \quad (4.1)$$

Os resultados estão apresentados nas Tabelas 4.3 e 4.4 e nas Figuras de 4.3 a 4.5.

A melhora do ajuste entre os resultados calculados e os dados experimentais não é significativa e não pode ser visualmente identificada. As curvas de tensão desviadora *versus* deformação axial permaneceram praticamente imóveis e as mudanças são mais perceptíveis nas curvas de deformação volumétrica *versus* deformação axial.

Tabela 4.3 – Estatísticas de ajuste do modelo hiperbólico para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Areia fofa	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B	
<i>FO</i>	0,23	0,14	0,17	0,15	Não converge	
TX SS	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	0,09	0,09	0,14	1,03	Não converge
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,32	0,18	0,19	0,18	Não converge
<i>FI</i> (%)	-	37	26	33	Não converge	
Tempo de processamento (segundos)	-	3	3	4	Não converge	

TX SS – Ensaio triaxial saturado

*FO* – Função objetivo

*FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.4 – Parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Parâmetros	Areia fofa				
	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B
<i>K</i>	825,28	825,27	903,25	847,86	-
<i>n</i>	0,2764	0,2764	0,2764	0,2764	-
<i>R<sub>f</sub></i>	0,9495	0,9495	0,9443	0,9487	-
<i>K<sub>b</sub></i>	325,46	243,13	257,91	250,73	-
<i>m</i>	-0,0263	-0,0263	-0,0263	-0,0263	-
<i>c</i>	19,89	19,89	19,89	19,89	-
<i>φ</i>	32,29	32,29	32,29	32,29	-

Nesse exemplo mostra-se como a otimização por análise inversa não trabalha bem se os resultados prescritos pelo modelo não refletem adequadamente todos os dados experimentais. Os resultados da calibração pela análise inversa foram fortemente influenciados pelo fato de o modelo hiperbólico ser pseudo-elástico, não sendo capaz de prever as respostas decrescentes das deformações volumétricas em condições drenadas.

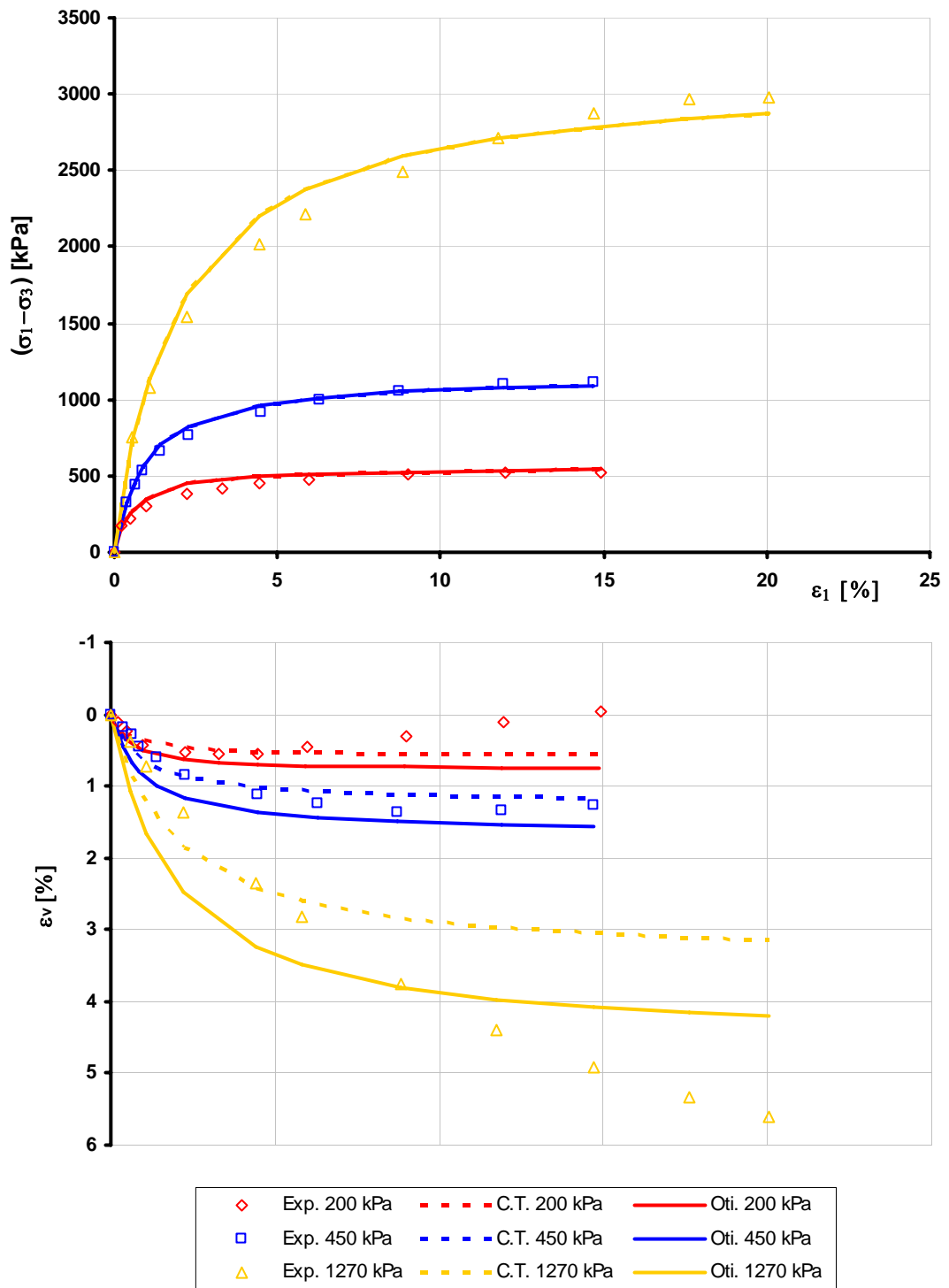


Figura 4.3 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia fofa.

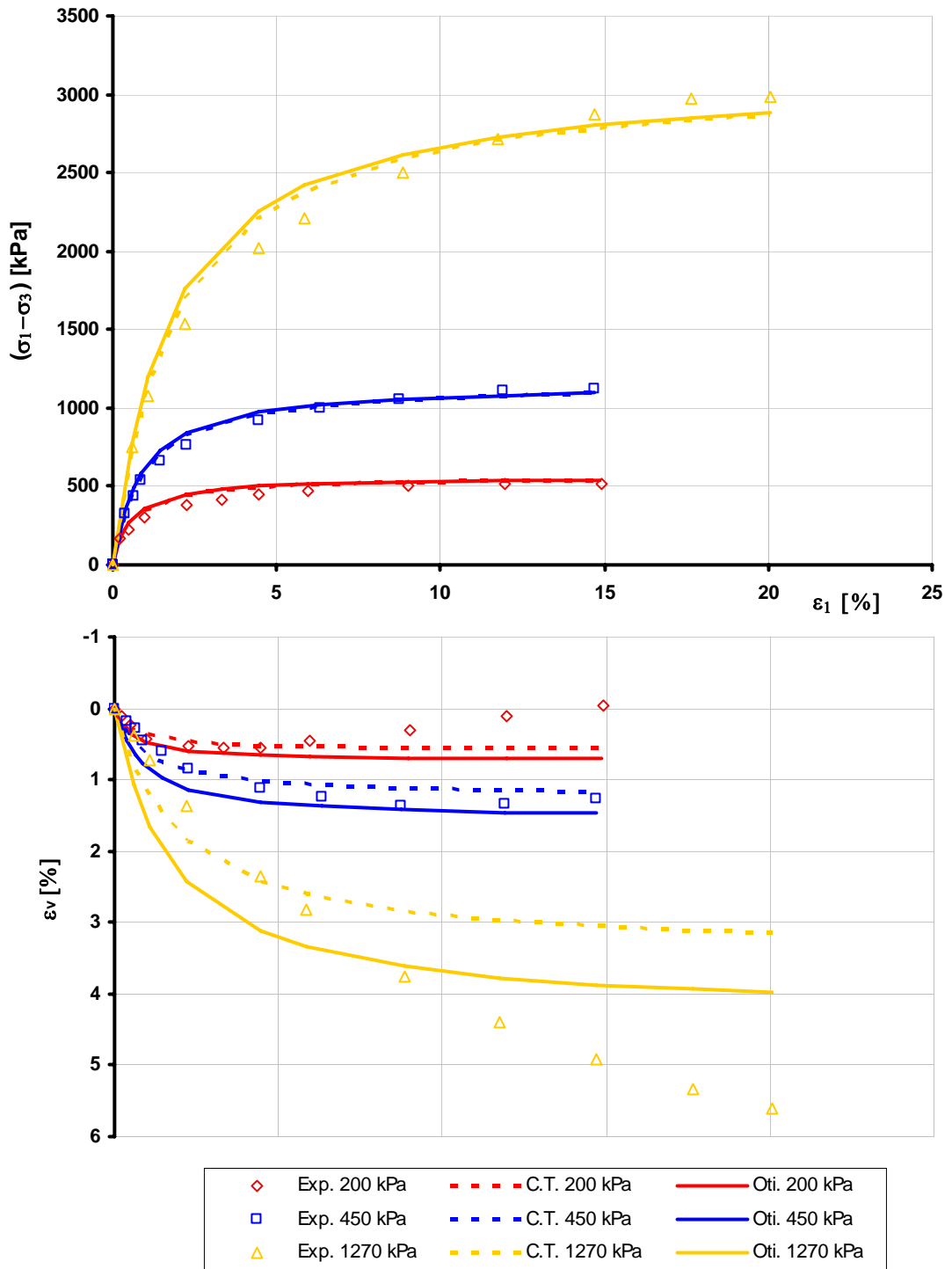


Figura 4.4 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Gauss-Newton para areia fofa.

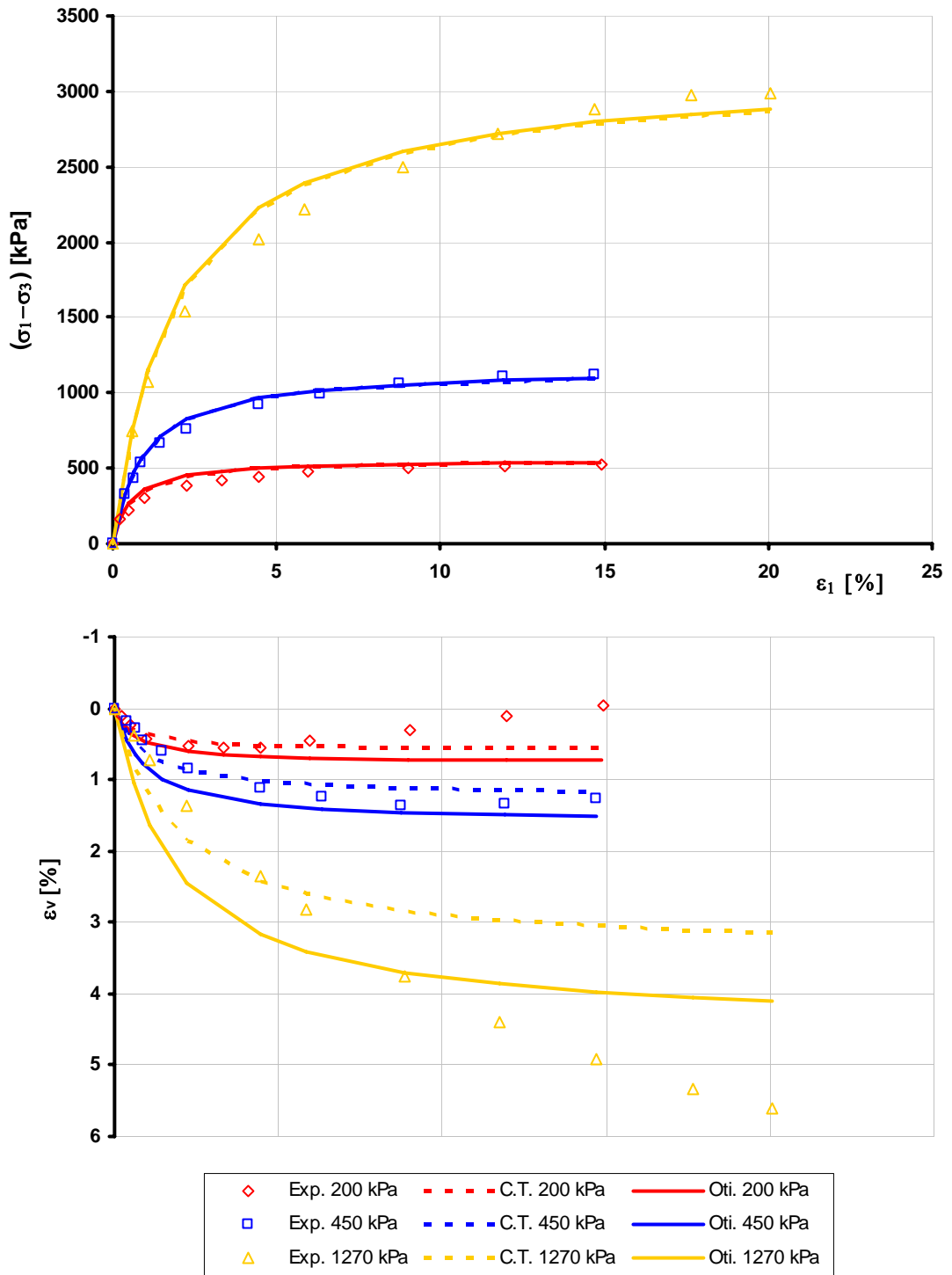


Figura 4.5 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Levenberg-Marquart para areia fofa.

## Parâmetros relevantes não-correlacionados

No caso do modelo hiperbólico não houve convergência em nenhum dos métodos de programação matemática estudados. O vetor de variáveis adotado nesse procedimento foi:

$$\mathbf{p}_{RNC} = \{R_f\} \quad RNC = \text{relevantes não - correlacionados} \quad (4.2)$$

## Algoritmo genético

Nas Tabelas 4.5 e 4.6 apresentam-se os resultados das análises. Neste estudo, a não-unicidade das estimativas dos parâmetros era esperada, pelo fato de as equações do modelo serem não-lineares e dependentes de mais de um parâmetro.

Na Figura 4.6 apresenta-se a convergência do algoritmo genético, em que se variaram os limites na formação da população inicial, criada a partir dos valores dos parâmetros da calibração tradicional. A convergência foi maior e mais rápida quando os limites foram estabelecidos a 40% dos valores de entrada. Observa-se que com o limite a 50% dos valores de entrada, a convergência foi pior do que com o limite de 40%, fato que não deveria ocorrer. Com uma região de busca mais ampla dever-se-ia encontrar uma solução melhor ou equivalente a região de busca menor. Duas hipóteses podem ser levantadas sobre esse fato, ou o número de indivíduos selecionados não foi capaz de investigar toda a região ou as correlações entre os parâmetros prejudicou os resultados da solução via AG.

Na Figura 4.7 apresentam-se as curvas comparativas entre resultados experimentais e resultados numéricos obtidos com os parâmetros da calibração tradicional e do algoritmo genético com limites estabelecidos a 40% dos valores da calibração tradicional.

O fato de o modelo hiperbólico não ser capaz de descrever o fenômeno da dilatância, como ilustrado na Figura 4.8, pode ser o motivo da otimização não ter sido expressiva, já que um dos pré-requisitos para exercitar uma otimização significativa é que o modelo teórico deve representar, adequadamente, os mecanismos físicos, responsáveis pelas características essenciais das respostas observadas.

Tabela 4.5 – Estatísticas de ajuste do modelo hiperbólico para areia fofa com o AG

Areia fofa	Calibração Tradicional	GA 10% CT	GA 20% CT	GA 30% CT	GA 40% CT	GA 50% CT
<i>FO</i>	0,23	0,17	0,13	0,098	0,096	0,10
<i>TX SS</i> $erro_{\sigma}$ (%)	0,09	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$erro_{\varepsilon}$ (%)	0,32	0,25	0,20	0,14	0,14	0,15
<i>FI</i> (%)	-	26	44	57	58	57
Tempo de processamento (segundos)	-	19	19	20	16	23

*TX SS* – Ensaio triaxial saturado      *FO* – Função objetivo      *FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo hiperbólico para areia fofa com o AG

Parâmetros	Areia fofa					
	Calibração Tradicional	GA 10% CT	GA 20% CT	GA 30% CT	GA 40% CT	GA 50% CT
<i>K</i>	825,28	744,9	674,4	542,1	559,5	594,4
<i>n</i>	0,2764	0,2496	0,2784	0,335	0,3197	0,3394
<i>R<sub>f</sub></i>	0,9495	0,9545	1,106	1,184	1,160	0,783
<i>K<sub>b</sub></i>	325,46	281,4	258,4	223,1	222,4	225,4
<i>m</i>	-0,0263	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
<i>c</i>	19,89	17,25	16,96	14,05	12,42	11,55
$\phi$	32,29	32,90	35,46	37,10	36,77	29,56

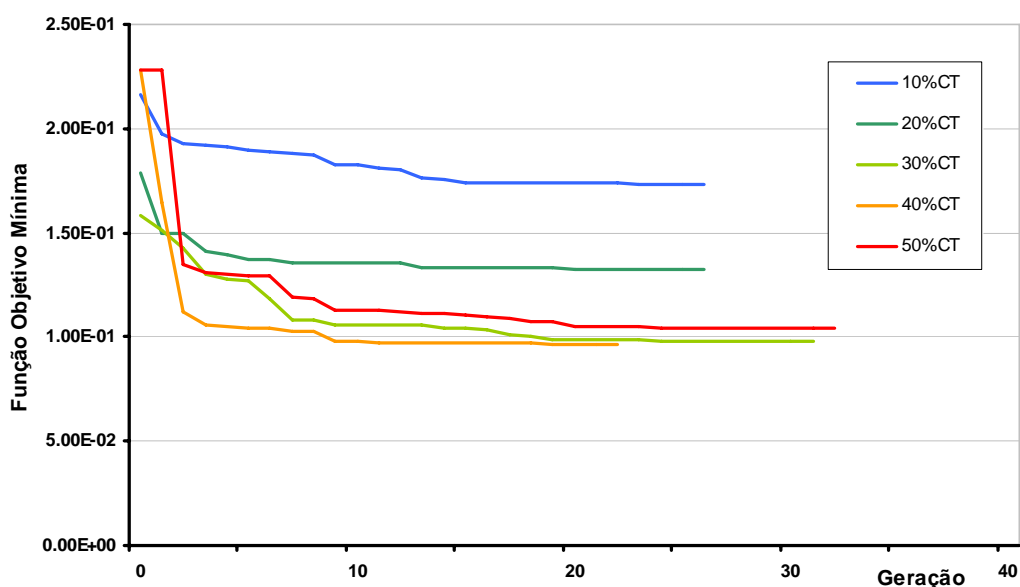


Figura 4.6 – Convergência do AG para areia fofa com o modelo hiperbólico variando os limites dos parâmetros.

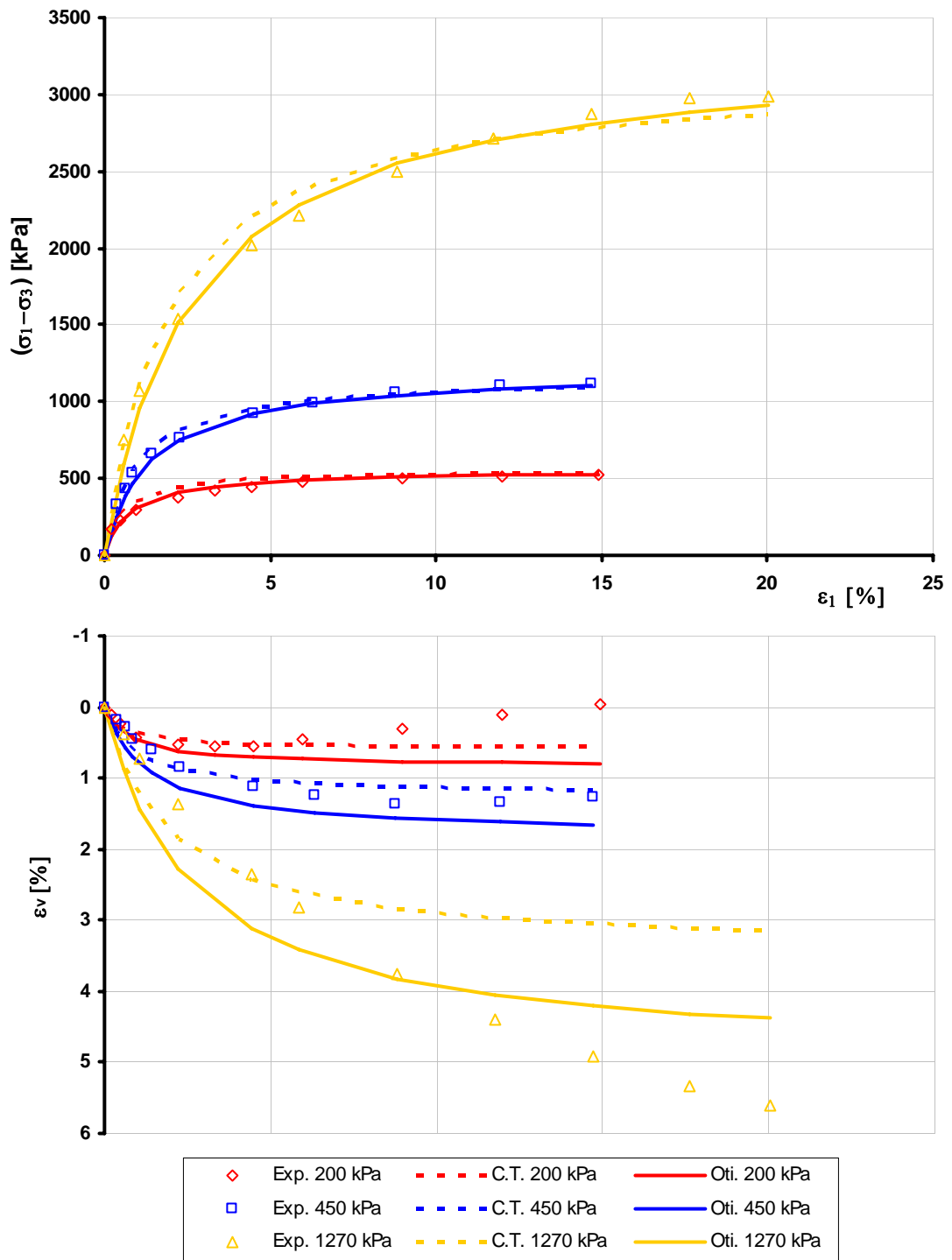


Figura 4.7 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético com os limites a 40% da calibração tradicional para areia fofa.

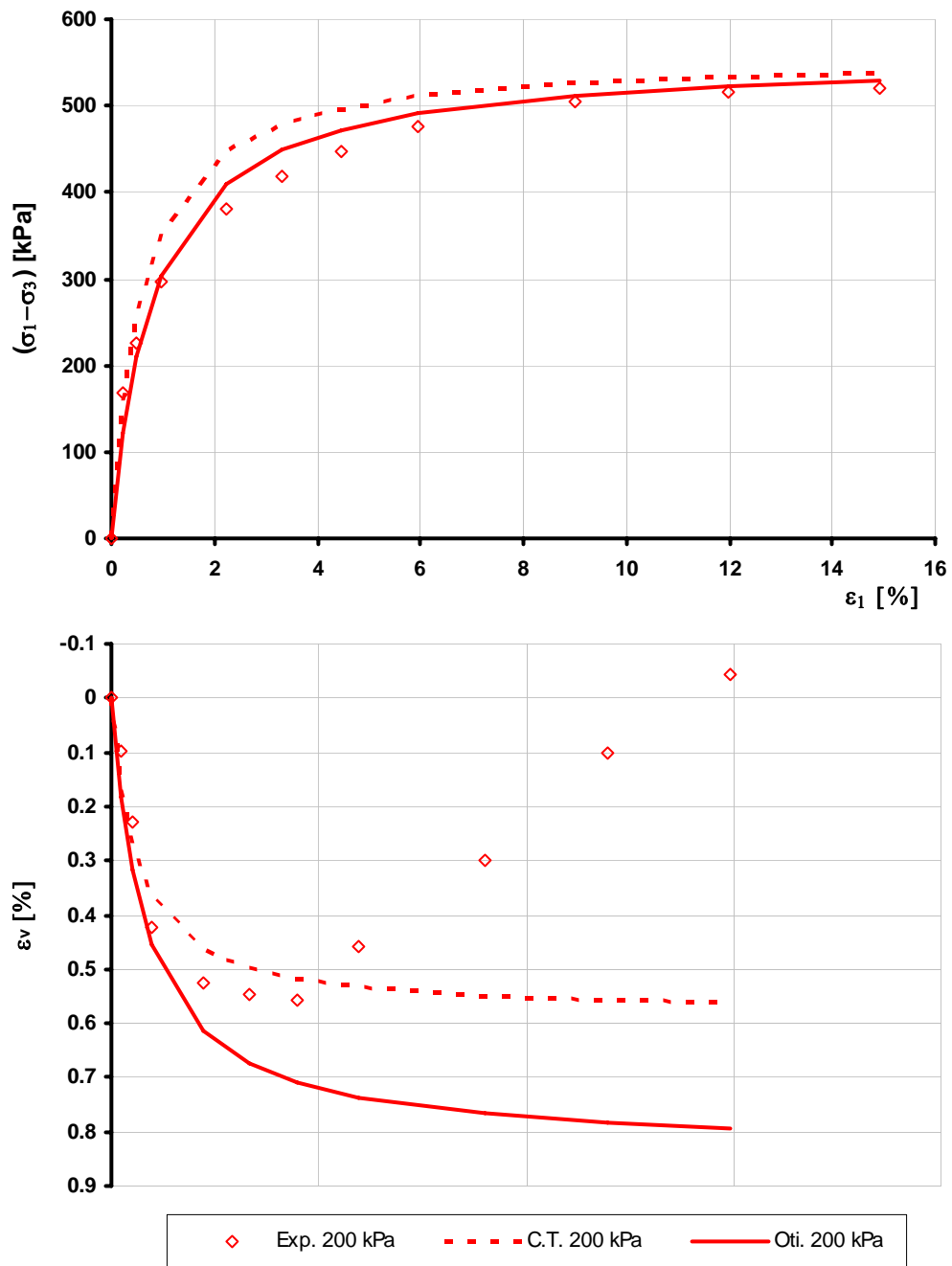


Figura 4.8 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo hiperbólico com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético (40% CT) para areia fofa na tensão de confinamento de 200 kPa.

#### 4.1.2 Modelo Lade-Kim

Nesse caso, os pontos experimentais utilizados nos procedimentos de calibração foram os das curvas para tensões de confinamento de 100, 200, 450 e 1270 kPa para a areia fofa e de 100, 300, 1050 e 2000 kPa para a areia densa.

##### 4.1.2.1 Calibração tradicional

Os valores dos parâmetros da calibração tradicional do modelo elasto-plástico Lade-Kim foram calculados com base nos resultados de ensaios de compressão isotrópica e triaxiais convencionais apresentados na seção 3.1. Na Tabela 4.7 apresentam-se os valores obtidos.

Tabela 4.7 – Parâmetros da calibração tradicional do modelo Lade-Kim para a areia fofa e a areia densa

Parâmetros	Calibração Tradicional	
	Areia fofa	Areia densa
$\nu$	0,2	0,2
M	1080	2585
$\lambda$	0,299	0,313
m	0,097	0,232
$\eta_1$	27,70	80,37
$\psi_2$	-3,62	-3,10
$\mu$	1,95	1,68
C	$1,36 \times 10^{-4}$	$1,65 \times 10^{-4}$
p	1,853	1,675
h	0,651	0,879
$\alpha$	1,787	1,386

Nas Figuras 4.9 e 4.10 os resultados dos ensaios de compressão triaxial drenados são comparados com as previsões do modelo, para os parâmetros obtidos pela calibração tradicional. Os resultados prescritos pelo modelo não ajustaram bem os resultados dos ensaios, principalmente as curvas tensão desviadora *versus* deformação axial.

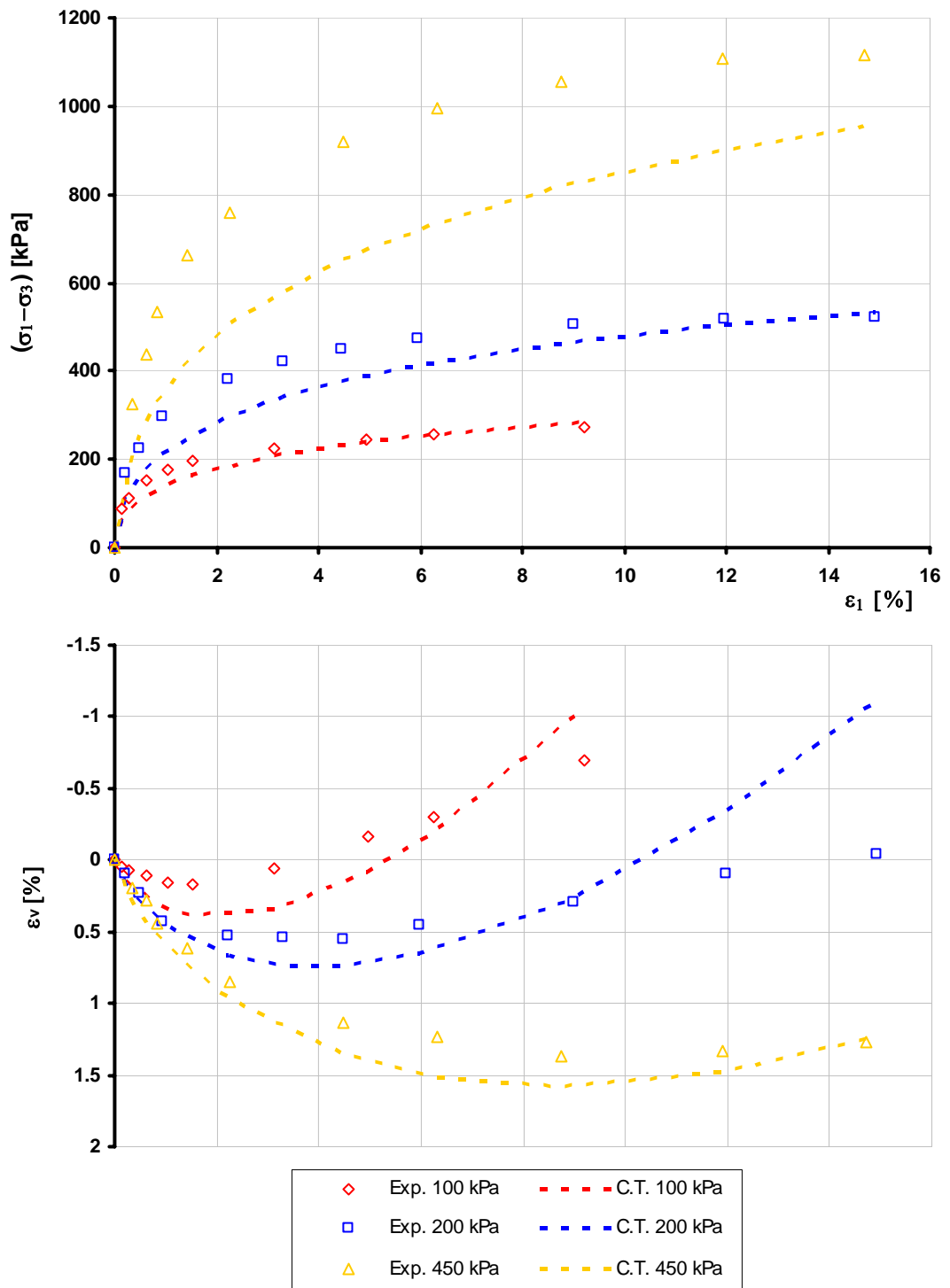


Figura 4.9 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros obtidos pela calibração tradicional para areia fofa.

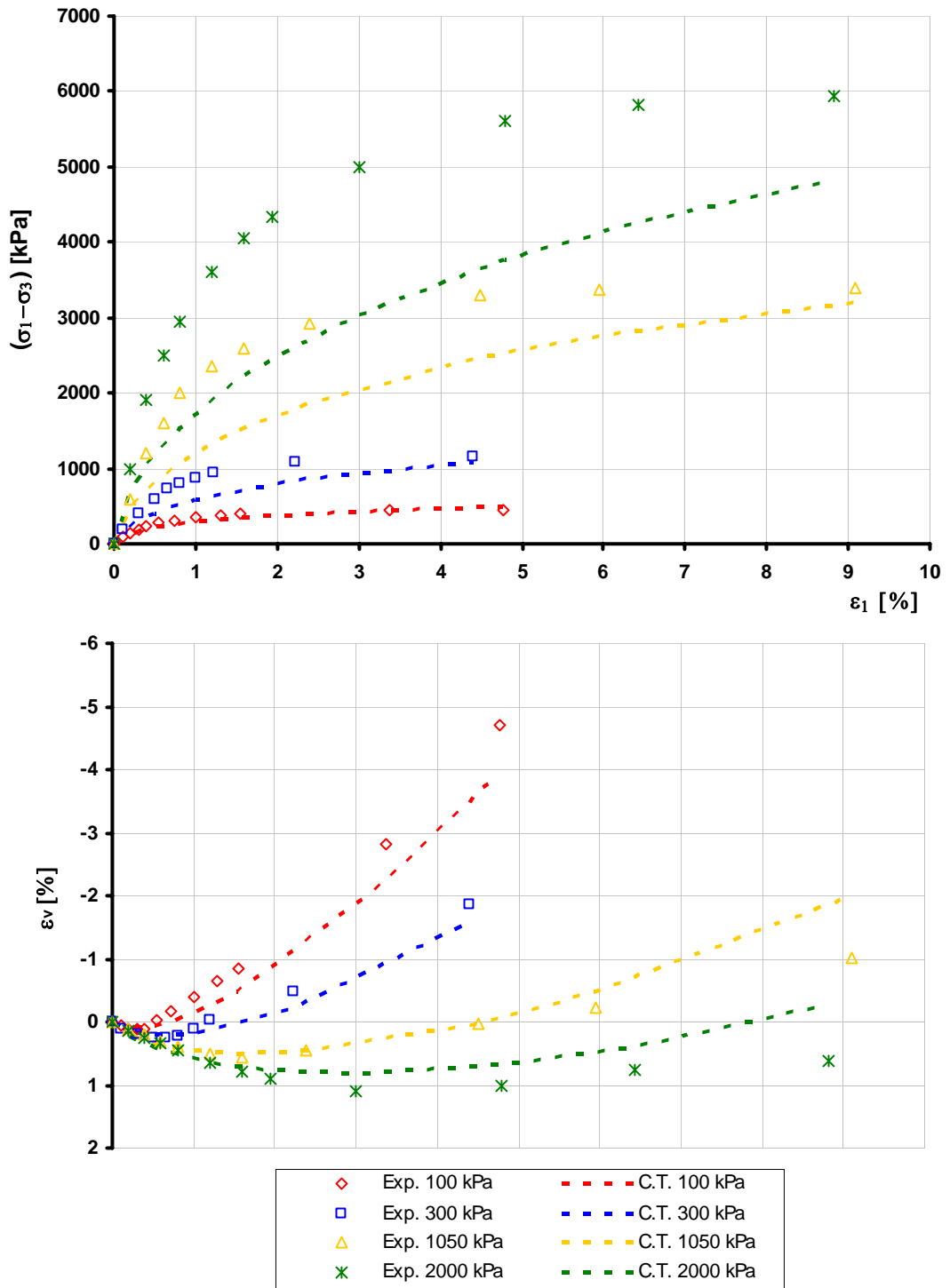


Figura 4.10 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros obtidos pela calibração tradicional para areia densa.

#### 4.1.2.2 Análise de sensibilidade

Os resultados da análise sensibilidade realizada com os parâmetros do modelo Lade-Kim obtidos pela calibração tradicional são apresentados na Tabela 4.8 e na Figura 4.11 para a areia fofa e na Tabela 4.9 e Figura 4.12 para a areia densa.

Tabela 4.8 – Coeficientes de correlação entre os parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa

$\rho_{ij}$	$v$	$M$	$\lambda$	$m$	$\eta_1$	$\psi_2$	$\mu$	$C$	$p$	$h$	$\alpha$
$v$	1,000	-0,302	0,142	0,168	0,310	0,184	-0,345	0,032	0,019	-0,290	0,312
$M$	-0,302	1,000	-0,828	0,308	0,075	0,298	-0,159	0,010	-0,522	-0,110	0,077
$\lambda$	0,142	-0,828	1,000	-0,735	-0,492	-0,728	0,623	-0,020	0,885	0,530	-0,492
$m$	0,168	0,308	-0,735	1,000	0,930	1,000	-0,939	0,072	-0,940	-0,947	0,929
$\eta_1$	0,310	0,075	-0,492	0,930	1,000	0,934	-0,917	0,080	-0,752	-0,999	1,000
$\psi_2$	0,184	0,298	-0,728	1,000	0,934	1,000	-0,945	0,073	-0,936	-0,950	0,933
$\mu$	-0,345	-0,159	0,623	-0,939	-0,917	-0,945	1,000	-0,083	0,833	0,926	-0,917
$C$	0,032	0,010	-0,020	0,072	0,080	0,073	-0,083	1,000	-0,066	-0,080	0,084
$p$	0,019	-0,522	0,885	-0,940	-0,752	-0,936	0,833	-0,066	1,000	0,784	-0,752
$h$	-0,290	-0,110	0,530	-0,947	-0,999	-0,950	0,926	-0,080	0,784	1,000	-0,999
$\alpha$	0,312	0,077	-0,492	0,929	1,000	0,933	-0,917	0,084	-0,752	-0,999	1,000

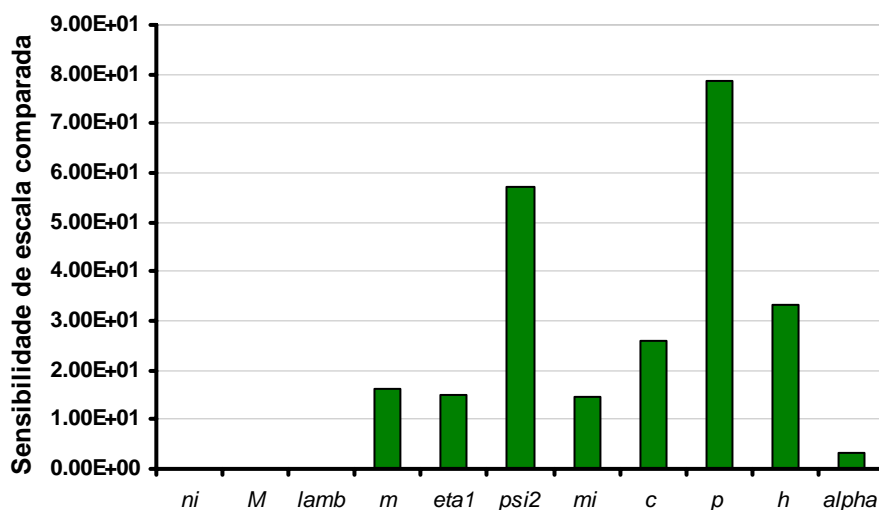


Figura 4.11 – Sensibilidade de escala comparada dos parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa.

Tabela 4.9 – Coeficientes de correlação entre os parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa

$\rho_{ij}$	$\nu$	$M$	$\lambda$	$m$	$\eta_1$	$\psi_2$	$\mu$	$C$	$p$	$h$	$\alpha$
$\nu$	1,000	-0,377	0,377	-0,119	0,017	0,006	-0,021	-0,103	0,547	0,011	-0,038
$M$	-0,377	1,000	-0,905	0,495	0,349	0,430	-0,215	0,039	-0,760	-0,381	0,422
$\lambda$	0,377	-0,905	1,000	-0,679	-0,507	-0,626	0,482	-0,002	0,899	0,538	-0,571
$m$	-0,119	0,495	-0,679	1,000	0,966	0,988	-0,651	-0,294	-0,639	-0,976	0,981
$\eta_1$	0,017	0,349	-0,507	0,966	1,000	0,978	-0,650	-0,381	-0,423	-0,999	0,994
$\psi_2$	0,006	0,430	-0,626	0,988	0,978	1,000	-0,719	-0,309	-0,550	-0,982	0,984
$\mu$	-0,021	-0,215	0,482	-0,651	-0,650	-0,719	1,000	0,135	0,324	0,644	-0,642
$C$	-0,103	0,039	-0,002	-0,294	-0,381	-0,309	0,135	1,000	-0,075	0,371	-0,346
$p$	0,547	-0,760	0,899	-0,639	-0,423	-0,550	0,324	-0,075	1,000	0,462	-0,501
$h$	0,011	-0,381	0,538	-0,976	-0,999	-0,982	0,644	0,371	0,462	1,000	-0,997
$\alpha$	-0,038	0,422	-0,571	0,981	0,994	0,984	-0,642	-0,346	-0,501	-0,997	1,000

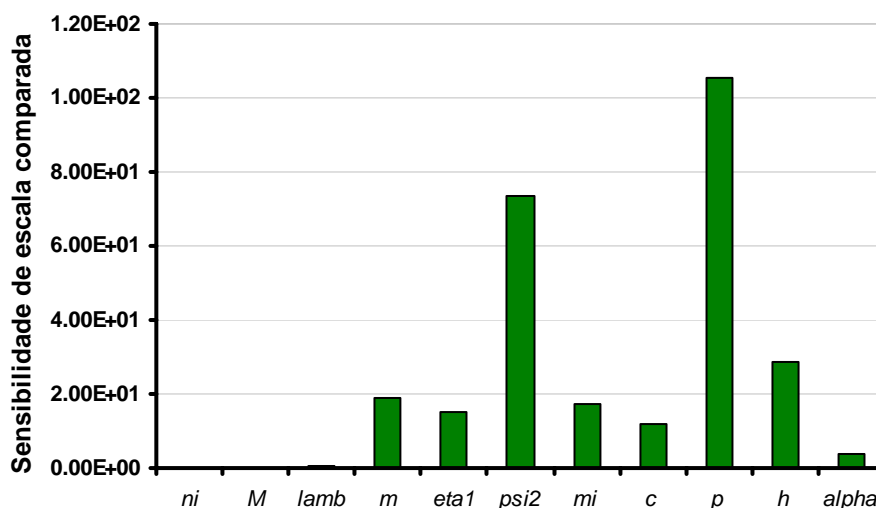


Figura 4.12 – Sensibilidade de escala comparada dos parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa.

De acordo com os coeficientes de correlação determinados (Tabelas 4.8 e 4.9), apenas os parâmetros  $\nu$ ,  $M$ ,  $\mu$ ,  $C$  e  $p$  são considerados não correlacionados. Isso implica que somente esses parâmetros devem ser determinados simultaneamente pela análise inversa.

Nas Figuras 4.11 e 4.12 fica claro que os parâmetros mais relevantes para a modelagem são  $\psi_2$ ,  $C$ ,  $p$  e  $h$ , sendo  $\nu$ ,  $M$  e  $\lambda$  desprezíveis. Isso mostra que as

observações usadas no processo de otimização não fornecem informações suficientes para estimar os três últimos.

#### **4.1.2.3 Otimização**

Para mostrar a capacidade dos diferentes procedimentos de calibração em extrair parâmetros do modelo Lade-Kim, apresentam-se comparações entre resultados experimentais e numéricos com os parâmetros obtidos pelos diferentes métodos de otimização.

O mesmo procedimento foi adotado tanto para areia fofa como para a areia densa.

#### **Parâmetros não-correlacionados**

Técnicas de programação matemática foram utilizadas para identificar os parâmetros não correlacionados do modelo Lade-Kim, de acordo com o vetor expresso em seguida, tanto para a areia fofa, quanto para areia densa:

$$\mathbf{p}_{NC} = \{V, M, \mu, C, p\} \quad NC = \text{não correlacionados} \quad (4.3)$$

Nas Tabelas 4.10 a 4.13 e nas Figuras 4.13 e 4.14 apresentam-se os resultados obtidos com esse procedimento.

Dificuldades numéricas na convergência dos métodos de programação foram encontradas, possivelmente os erros numéricos são devido à complexidade das correlações entre os parâmetros do modelo Lade-Kim.

Tabela 4.10 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Areia fofa	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B	
<i>FO</i>	0,33	0,18	Não converge	Não converge	Não converge	
TX SS	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	1,92	0,66	Não converge	Não converge	Não converge
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,06	0,17	Não converge	Não converge	Não converge
<i>FI</i> (%)	-	45	Não converge	Não converge	Não converge	
Tempo de processamento (segundos)	-	15	Não converge	Não converge	Não converge	

TX SS – Ensaio triaxial saturado      *FO* – Função objetivo      *FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.11 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Areia densa	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B	
<i>FO</i>	1,07	Não converge	Não converge	Não converge	0,76	
TX SS	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	4,69	Não converge	Não converge	Não converge	1,95
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,31	Não converge	Não converge	Não converge	1,03
<i>FI</i> (%)	-	Não converge	Não converge	Não converge	29	
Tempo de processamento (segundos)	-	Não converge	Não converge	Não converge	182	

TX SS – Ensaio triaxial saturado      *FO* – Função objetivo      *FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.12 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Parâmetros	Areia fofa				
	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B
$v$	0,20	0,109	-	-	-
$M$	1080	2113	-	-	-
$\lambda$	0,299	0,299	-	-	-
$m$	0,097	0,097	-	-	-
$\eta_1$	27,70	27,70	-	-	-
$\psi_2$	-3,62	-3,62	-	-	-
$\mu$	1,95	2,02	-	-	-
$C$	$1,36 \times 10^{-4}$	$0,91 \times 10^{-4}$	-	-	-
$p$	1,853	1,854	-	-	-
$h$	0,651	0,651	-	-	-
$\alpha$	1,787	1,787	-	-	-

Tabela 4.13 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Parâmetros	Areia fofa				
	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B
$v$	0,20	-	-	-	0,199
$M$	2585	-	-	-	2585
$\lambda$	0,313	-	-	-	0,313
$m$	0,232	-	-	-	0,232
$\eta_1$	80,37	-	-	-	80,37
$\psi_2$	-3,10	-	-	-	-3,10
$\mu$	1,68	-	-	-	1,71
$C$	$1,65 \times 10^{-4}$	-	-	-	$1,66 \times 10^{-4}$
$p$	1,675	-	-	-	1,592
$h$	0,879	-	-	-	0,879
$\alpha$	1,386	-	-	-	1,386

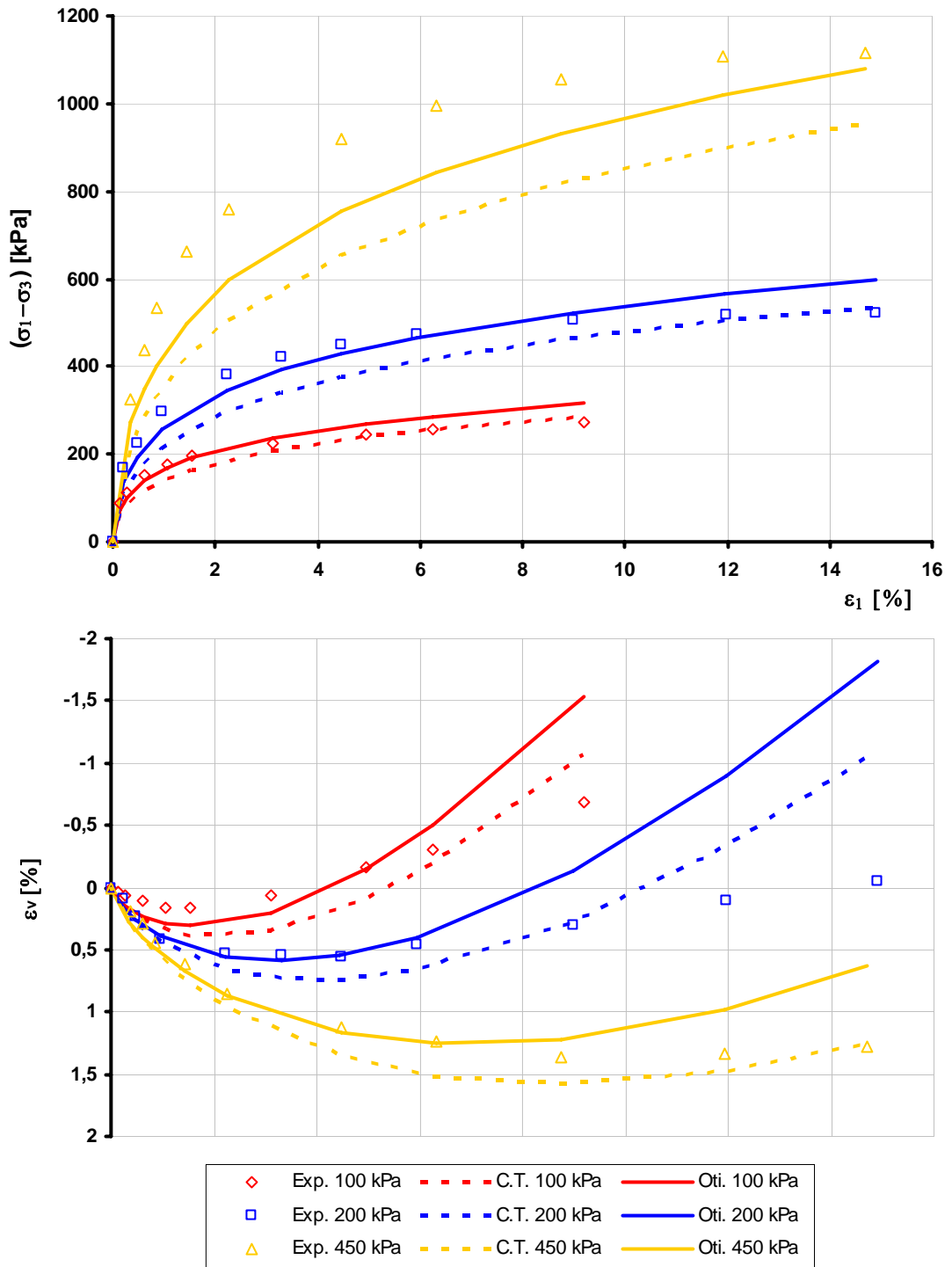


Figura 4.13 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia fofa.

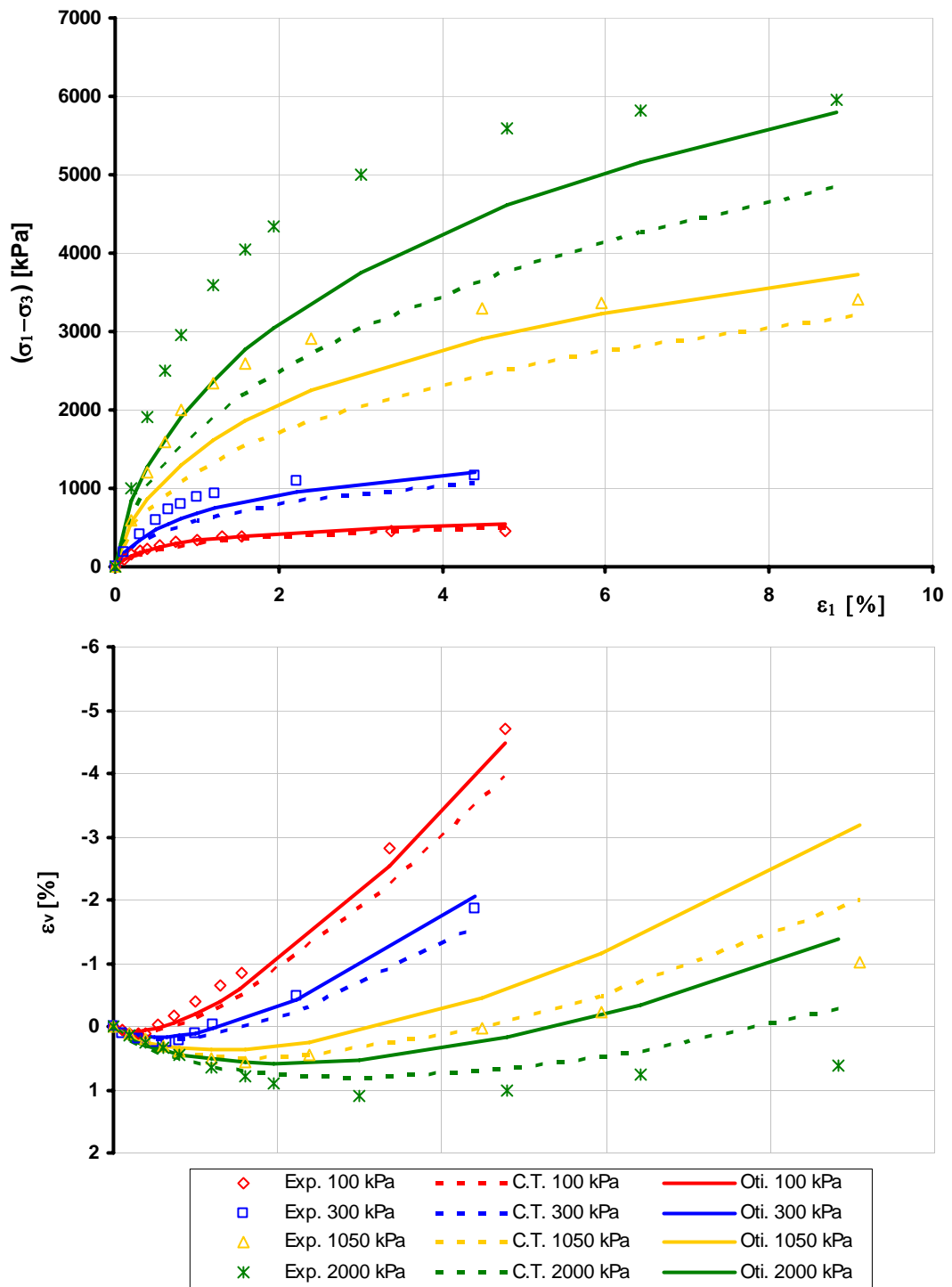


Figura 4.14 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros não correlacionados obtidos pelo método L-BFGS-B para areia densa.

## Parâmetros relevantes não-correlacionados

O vetor de variáveis adotado nesse procedimento, tanto para a areia fofa e densa, foi:

$$\mathbf{p}_{RNC} = \{\psi_2, C\} \quad RNC = \text{relevantes não - correlacionados} \quad (4.4)$$

Apresentam-se os resultados para a areia fofa nas Tabelas 4.14 e 4.16 e Figuras 4.15 a 4.18 , e para a areia densa nas Tabelas 4.15 e 4.17 e Figuras 4.19 a 4.22.

Tabela 4.14 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Areia fofa	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B
<i>FO</i>	0,33	0,24	0,16	0,16	0,15
TX SS <i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	1,92	1,05	0,64	0,64	0,40
<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,06	0,20	0,10	0,10	0,12
<i>FI</i> (%)	-	27	53	53	54
Tempo de processamento (segundos)	-	6	14	14	53

TX SS – Ensaio triaxial saturado

*FO* – Função objetivo

*FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.15 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Areia densa	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B
<i>FO</i>	1,07	0,76	0,30	0,31	0,30
TX SS <i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	4,69	2,67	0,81	0,94	0,55
<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,31	0,76	0,17	0,18	0,17
<i>FI</i> (%)	-	28	72	71	72
Tempo de processamento (segundos)	-	28	92	58	203

TX SS – Ensaio triaxial saturado

*FO* – Função objetivo

*FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.16 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Parâmetros	Areia fofa				
	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B
$\nu$	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
$M$	1080	1080	1080	1080	1080
$\lambda$	0,299	0,299	0,299	0,299	0,299
$m$	0,097	0,097	0,097	0,097	0,097
$\eta_1$	27,70	27,70	27,70	27,70	27,70
$\psi_2$	-3,62	-3,62	-3,53	-3,61	-3,50
$\mu$	1,95	1,95	1,95	1,95	1,95
$C$	$1,36 \times 10^{-4}$	$1,04 \times 10^{-4}$	$0,96 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$0,83 \times 10^{-4}$
$p$	1,853	1,853	1,853	1,853	1,853
$h$	0,651	0,651	0,651	0,651	0,651
$\alpha$	1,787	1,787	1,787	1,787	1,787

Tabela 4.17 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização dos parâmetros relevantes não-correlacionados pelos métodos de programação matemática

Parâmetros	Areia fofa				
	Calibração Tradicional	Newton Modificado	Gauss-Newton	Levenberg-Marquart	L-BFGS-B
$\nu$	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
$M$	2585	2585	2585	2585	2585
$\lambda$	0,313	0,313	0,313	0,313	0,313
$m$	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232
$\eta_1$	80,37	80,37	80,37	80,37	80,37
$\psi_2$	-3,10	-3,10	-2,88	-2,88	-2,84
$\mu$	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68
$C$	$1,65 \times 10^{-4}$	$1,22 \times 10^{-4}$	$1,02 \times 10^{-4}$	$1,07 \times 10^{-4}$	$0,94 \times 10^{-4}$
$p$	1,675	1,675	1,675	1,675	1,675
$h$	0,879	0,879	0,879	0,879	0,879
$\alpha$	1,386	1,386	1,386	1,386	1,386

Os valores positivos de FI indicam que a calibração do modelo por análise inversa produz melhores resultados do que o método de calibração tradicional, sendo que a melhoria é mais visível nas curvas da tensão desviadora *versus* deformação axial do que nas curvas de deformação volumétrica *versus* deformação axial.

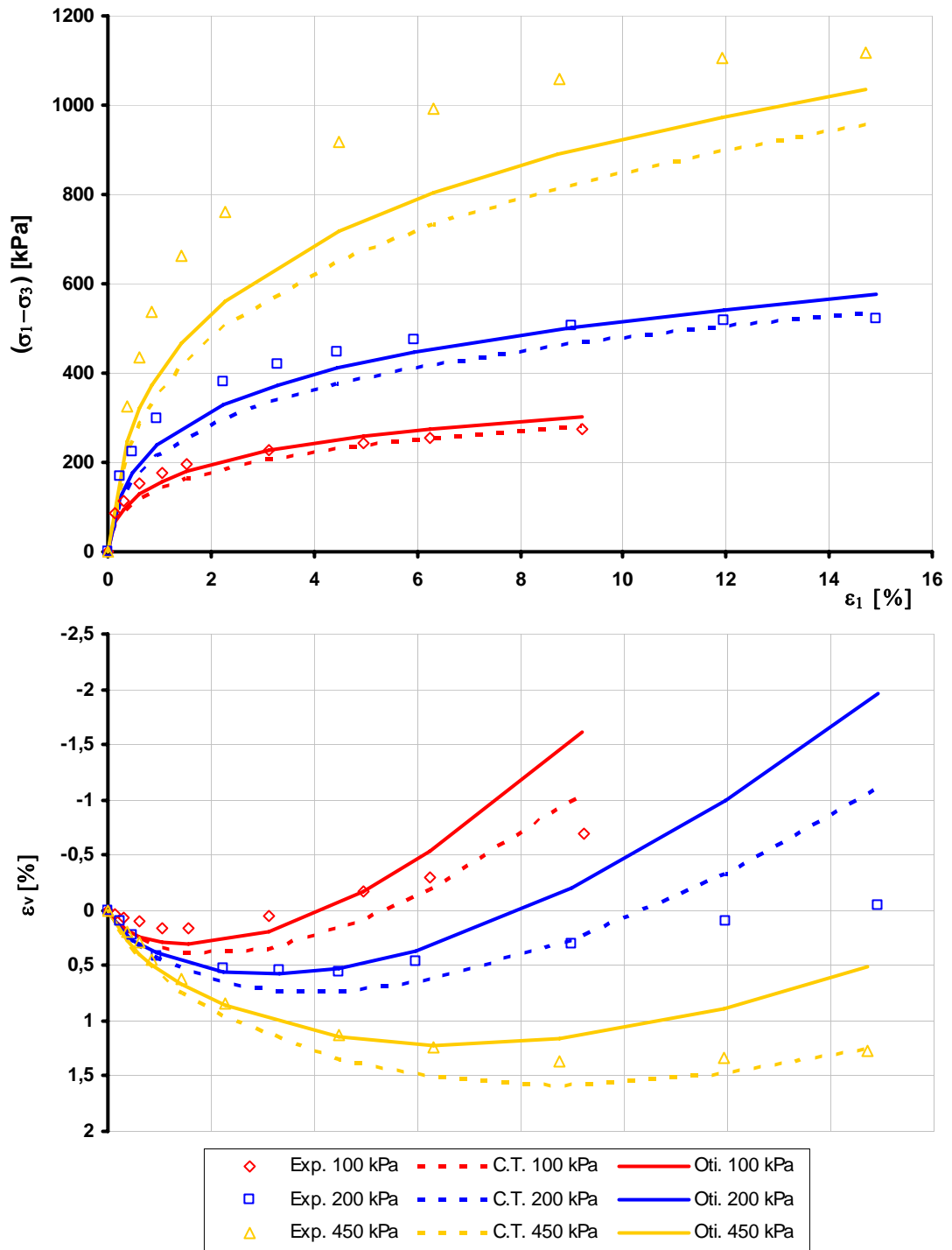


Figura 4.15 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia fofa.

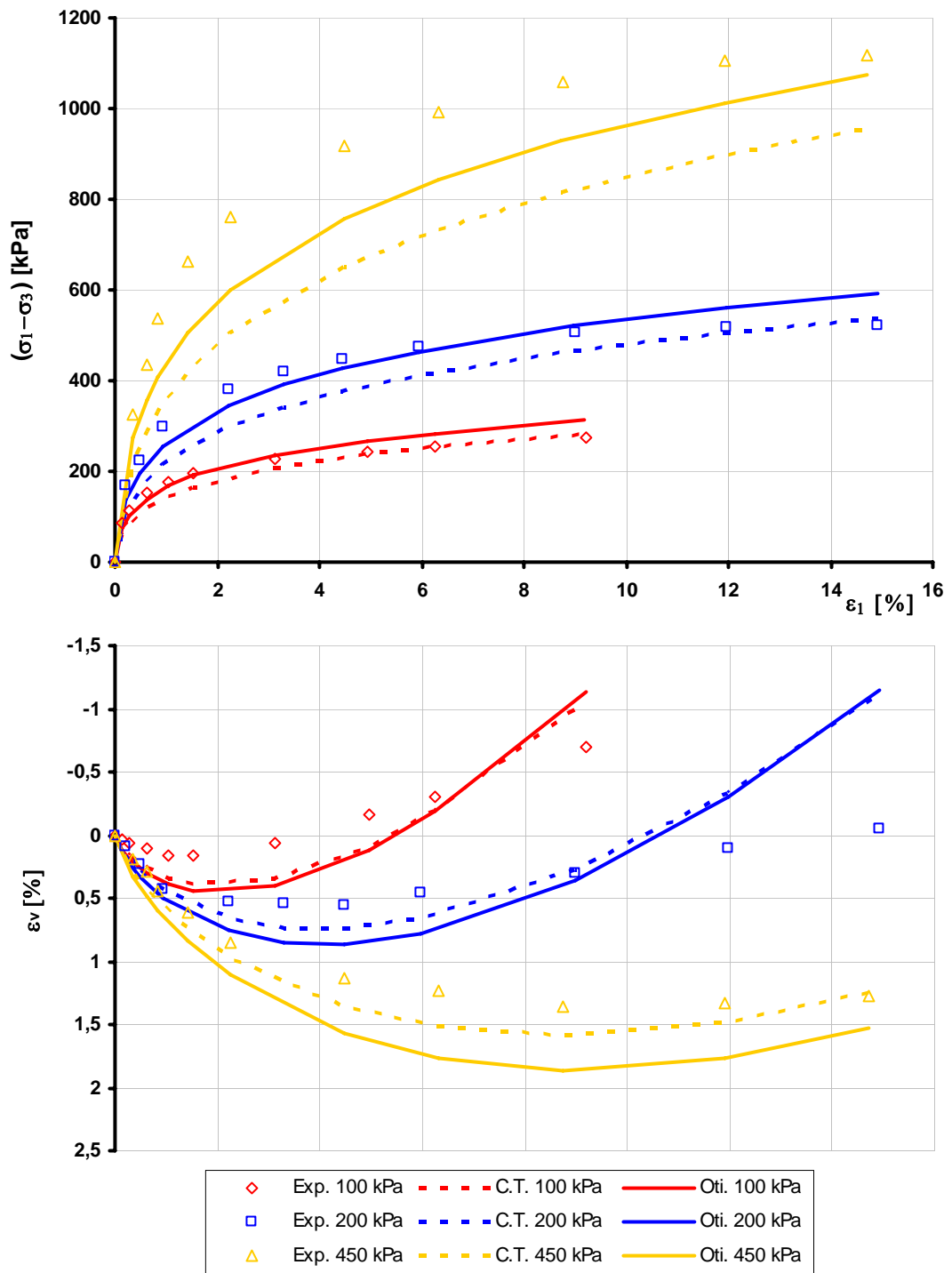


Figura 4.16 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Gauss-Newton para areia fofa.

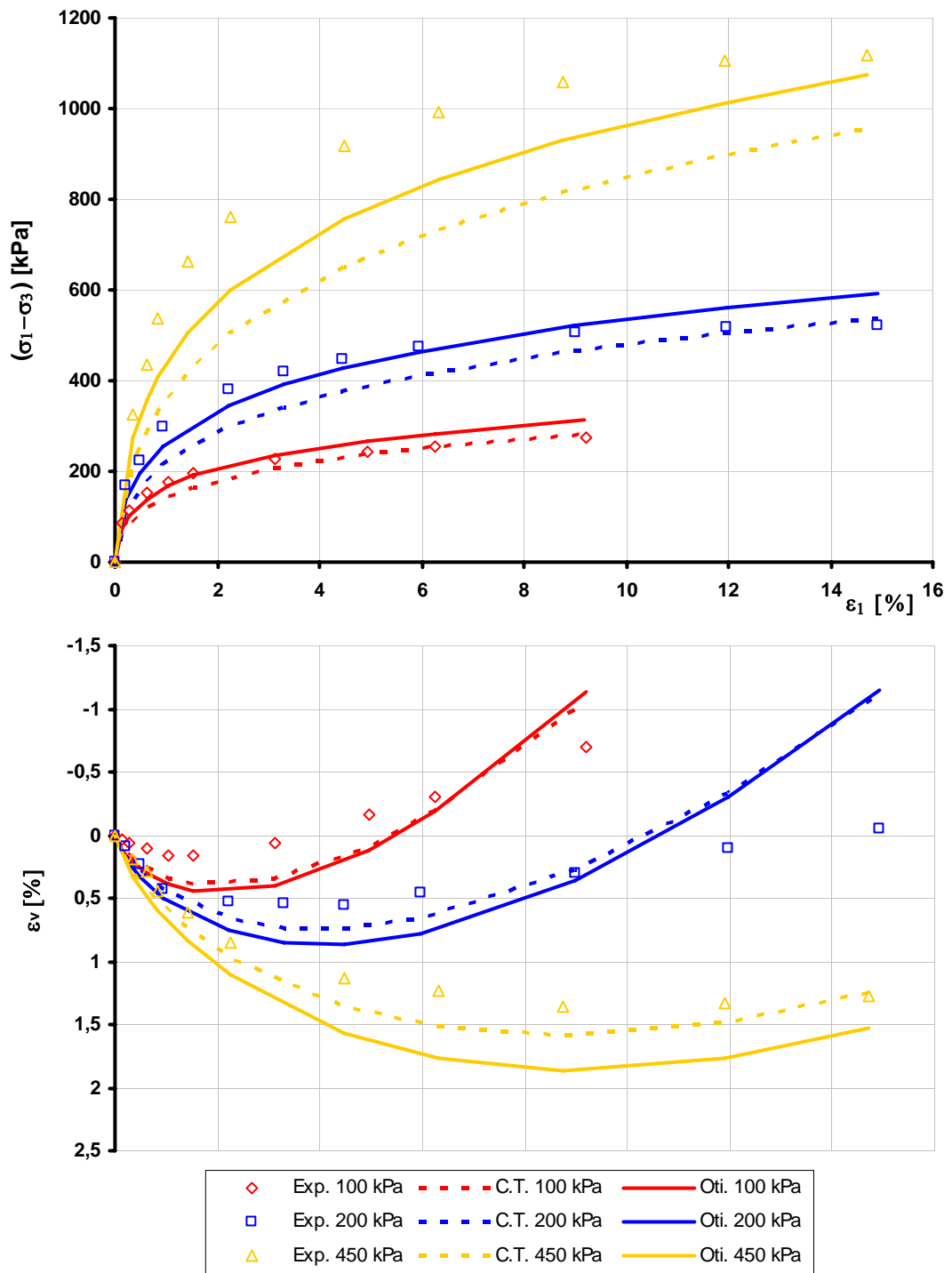


Figura 4.17 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Levenberg-Marquart para areia fofa.

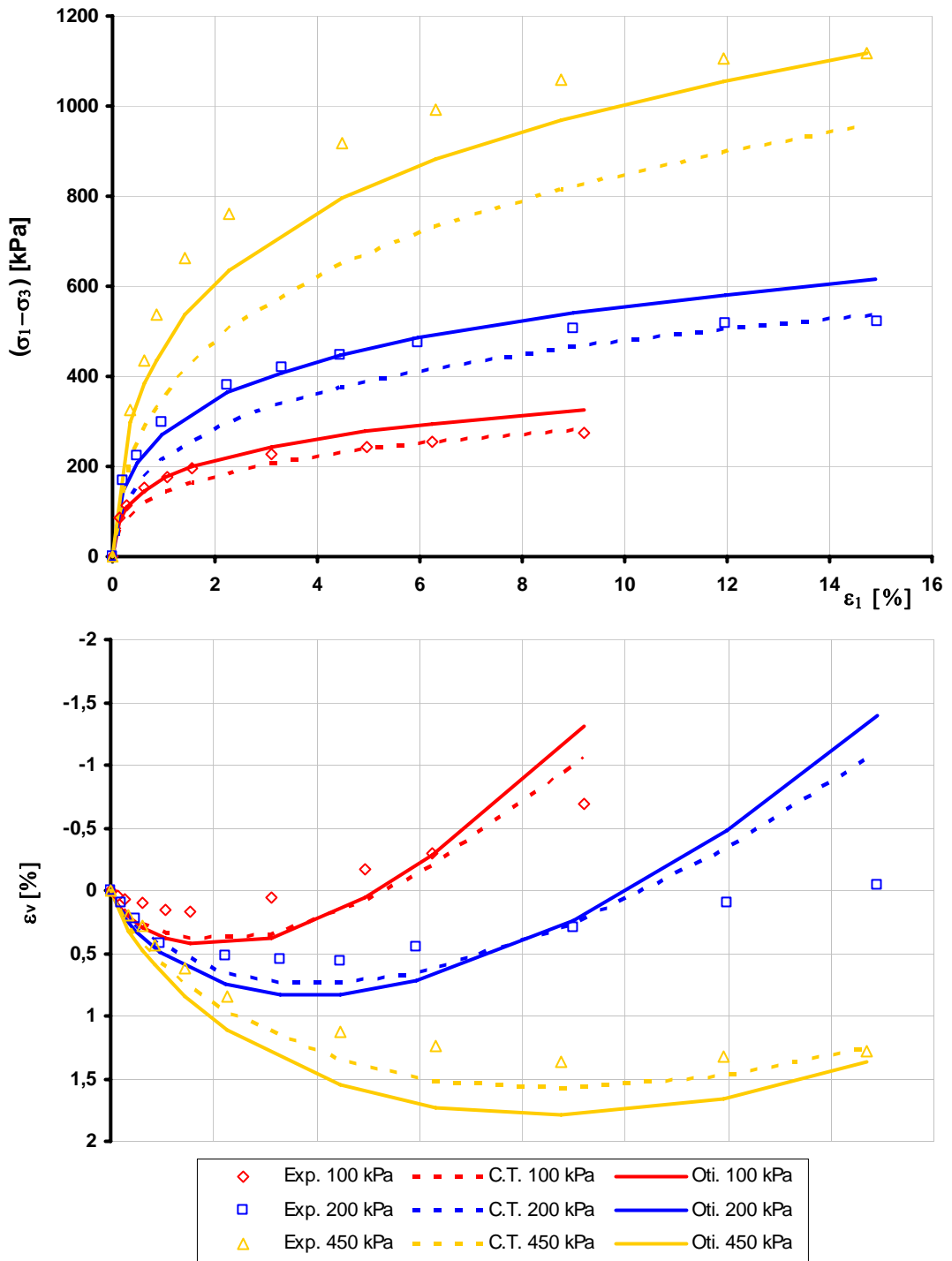


Figura 4.18 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método L-BFGS-B para areia fofa.

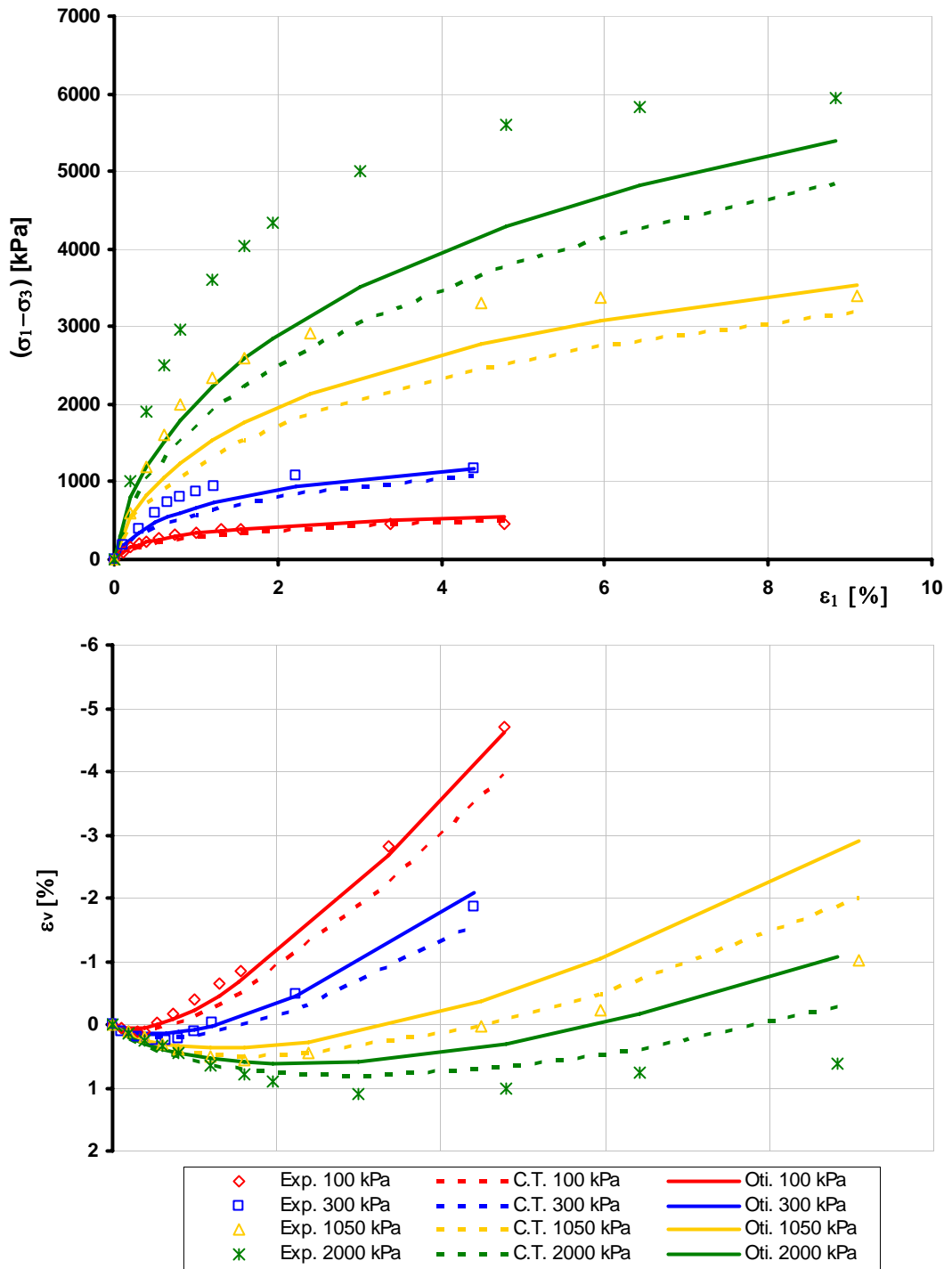


Figura 4.19 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Newton Modificado para areia densa.

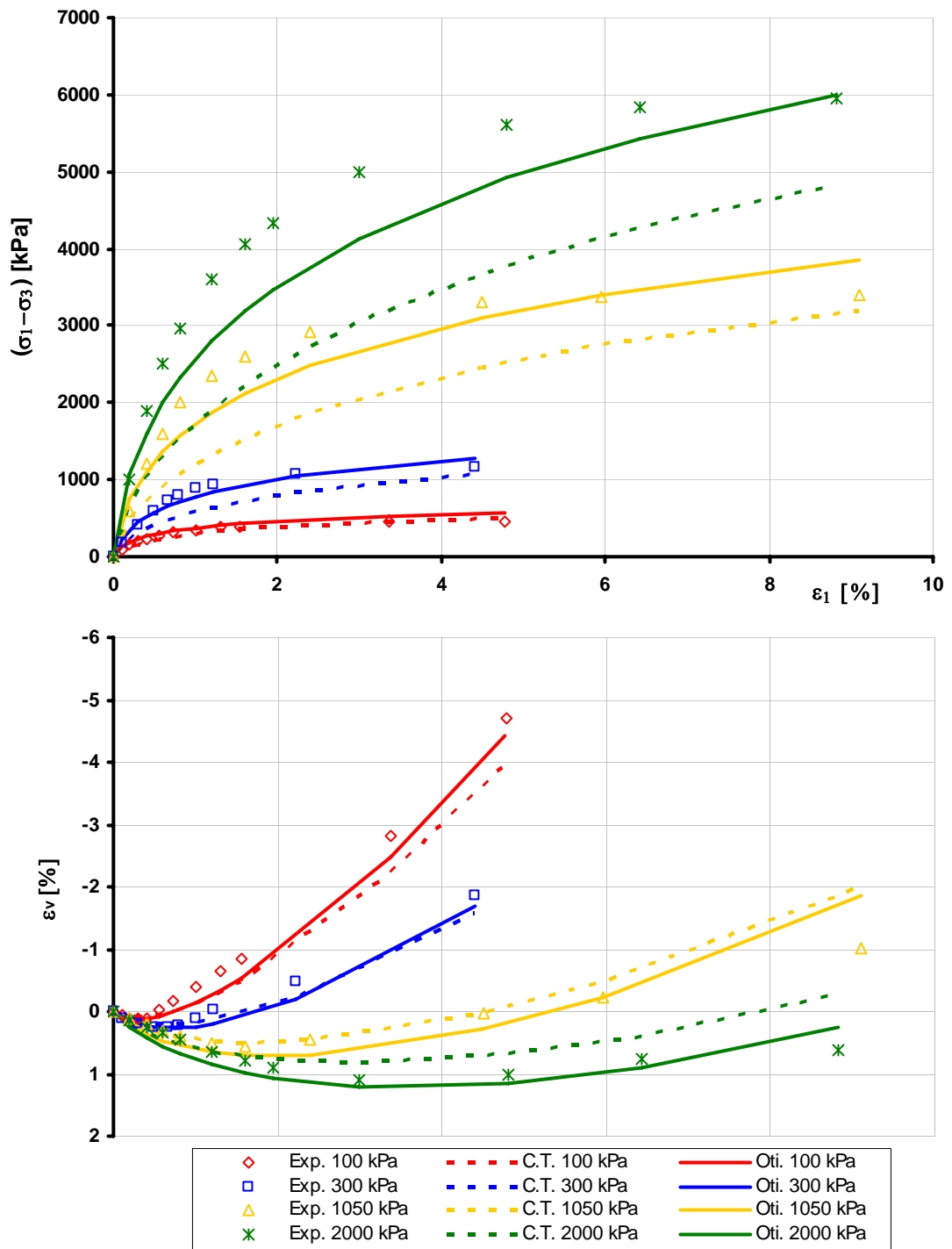


Figura 4.20 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Gauss-Newton para areia densa.

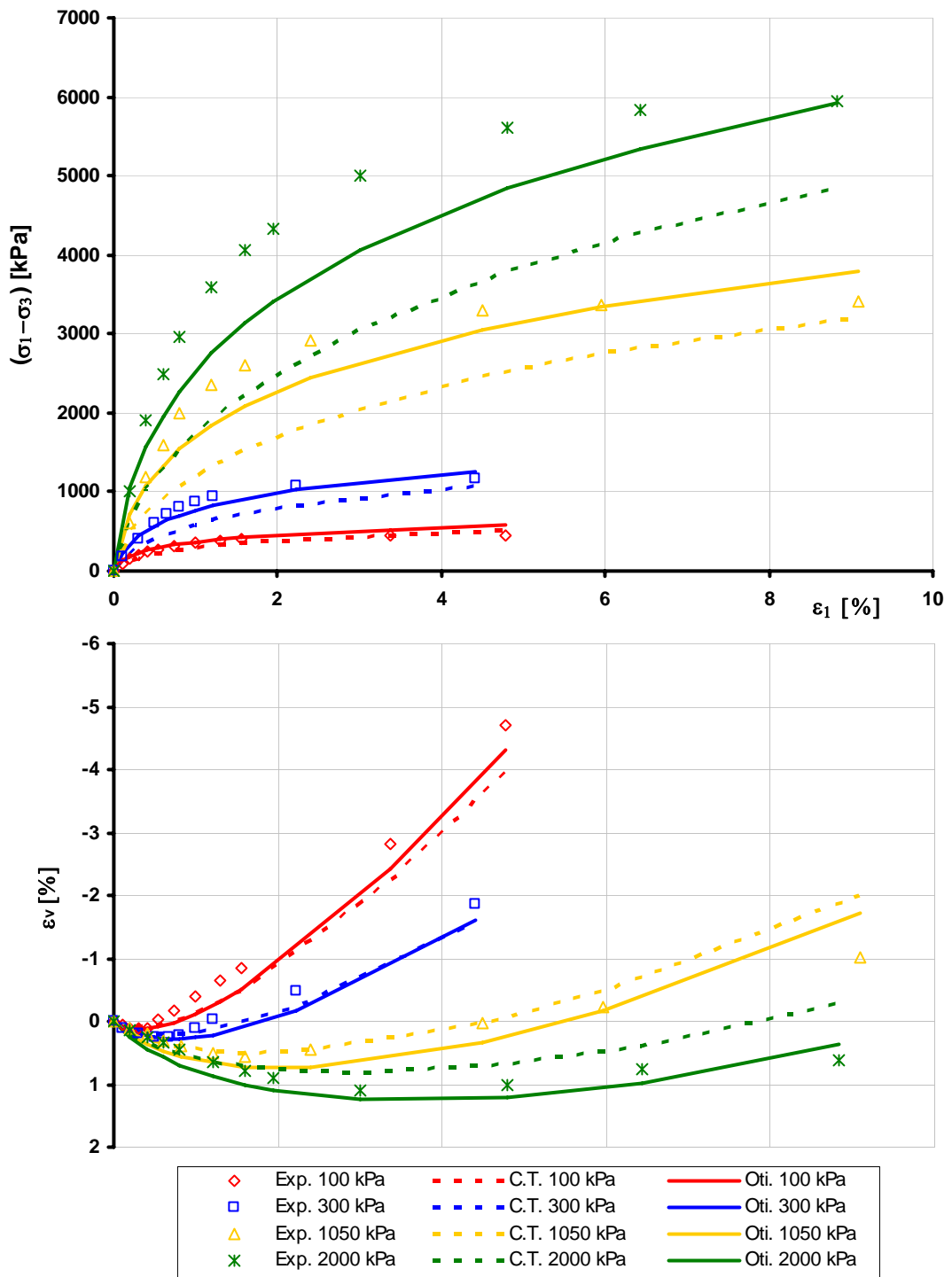


Figura 4.21 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método de Levenberg-Marquart para areia densa.

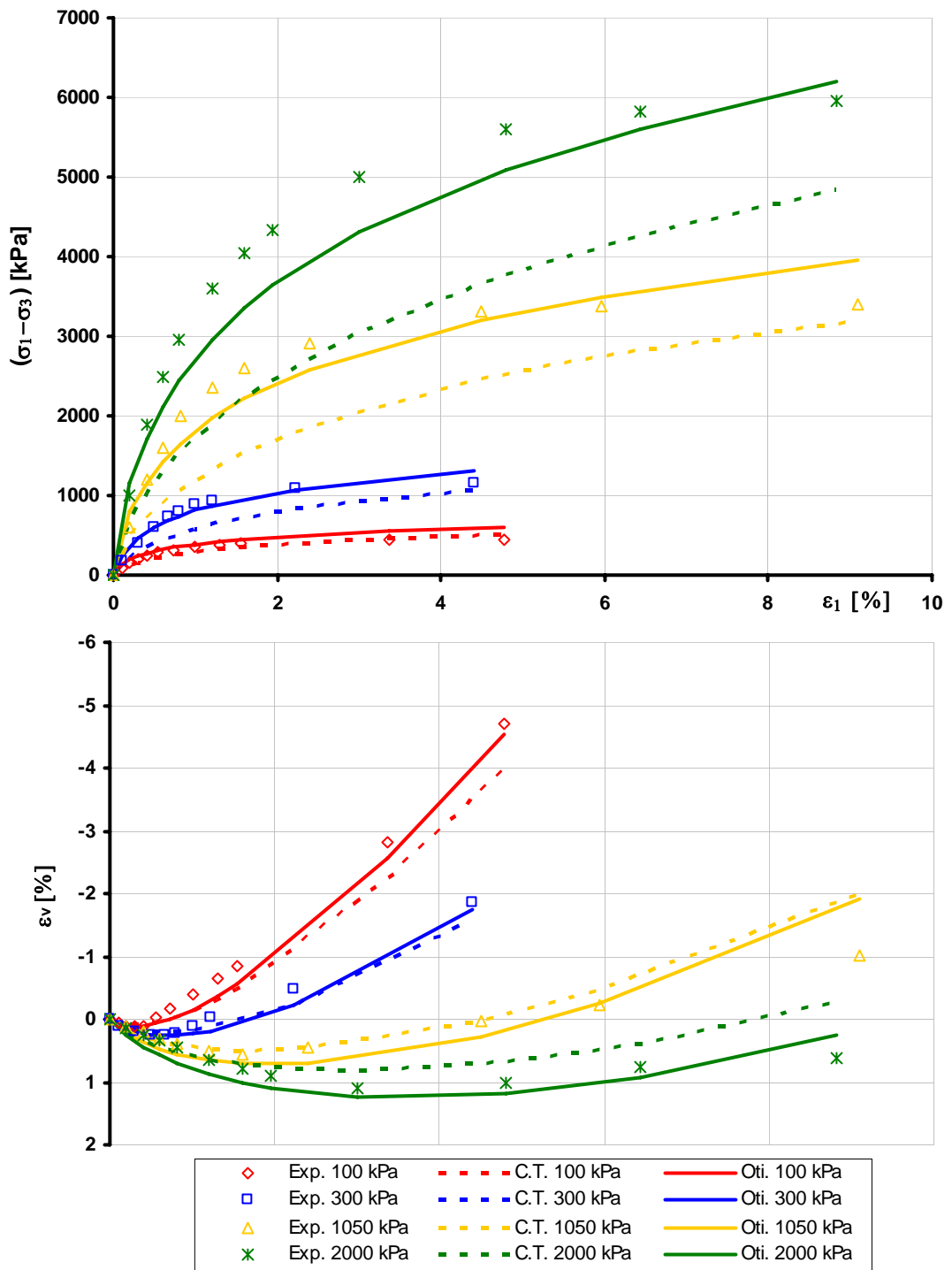


Figura 4.22 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com os parâmetros relevantes não-correlacionados obtidos pelo método L-BFGS-B para areia densa.

### Algoritmo genético (AG)

Nas Tabelas 4.18 a 4.21 apresentam-se os resultados do AG nos diferentes casos de formação da população principal, em que os limites variaram em 10%, 20%, 30%, 40% e 50% dos valores da calibração tradicional e os calculados com os parâmetros fornecidos por Lade-Kim (1995).

Quando os limites variaram acima de 50% ocorreram problemas de convergência, provavelmente, o número de indivíduos adotado igual a 10 foi insuficiente para investigar uma região de busca mais ampla.

Nas Figuras 4.23 e 4.24 observa-se que a convergência do AG, para os limites em 50% dos valores da calibração tradicional, é melhor do que nos demais casos.

Nas Figuras 4.25 e 4.26 apresentam-se comparações entre os resultados experimentais nas diferentes tensões de confinamento e os resultados analíticos calculados com o modelo usando parâmetros obtidos por meio da calibração tradicional e calculados pelo algoritmo genético com os limites em 50% dos valores de entrada.

As comparações entre os resultados experimentais e os resultados prescritos pelo modelo usando parâmetros fornecidos por Lade e Kim (1995) e calculados pelo algoritmo genético com os limites em 50% dos valores da calibração tradicional são apresentadas nas Figuras 4.27 e 4.28.

Tabela 4.18 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia fofa na otimização pelo algoritmo genético

Areia fofa	Calib. Trad.	GA 10% CT	GA 20% CT	GA 30% CT	GA 40% CT	GA 50% CT	Lade e Kim (1995)
<i>FO</i>	0,33	0,11	0,08	0,06	0,055	0,04	0,06
TX <i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	1,92	0,34	0,24	0,19	0,14	0,16	0,04
SS <i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,06	0,09	0,06	0,05	0,05	0,02	0,06
<i>FI</i> (%)	-	67	76	82	83	88	-
Tempo de processamento (segundos)	-	99	133	90	93	90	-

TX SS – Ensaio triaxial saturado

*FO* – Função objetivo

*FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.19 – Estatísticas de ajuste do modelo Lade-Kim para areia densa na otimização pelo algoritmo genético

Areia densa	Calib. Trad.	GA 10% CT	GA 20% CT	GA 30% CT	GA 40% CT	GA 50% CT	Lade e Kim (1995)
<i>FO</i>	1,07	0,23	0,21	0,17	0,17	0,14	0,45
TX $erro_{\sigma}$ (%)	4,69	0,40	0,29	0,29	0,21	0,13	0,07
SS $erro_{\varepsilon}$ (%)	0,31	0,29	0,21	0,20	0,19	0,19	0,57
<i>FI</i> (%)	-	79	80	84	84	87	-
Tempo de processamento (segundos)	-	512	351	330	347	457	-

TX SS – Ensaio triaxial saturado      *FO* – Função objetivo      *FI* – Melhoria do ajuste

Tabela 4.20 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia fofa com o AG

	Areia fofa						Lade e Kim (1995)
	Calib. Trad.	GA 10% CT	GA 20% CT	GA 30% CT	GA 40% CT	GA 50% CT	
$\nu$	0,200	0,202	0,257	0,234	0,273	0,286	0,2
$M$	1080	1185	1387	1261	1412	1495	500
$\lambda$	0,299	0,327	0,387	0,351	0,396	0,441	0,28
$m$	0,0969	0,0953	0,0988	0,0913	0,1091	0,123	0,093
$\eta_1$	27,70	29,05	25,84	26,71	29,33	29,80	28
$\psi_2$	-3,620	-3,526	-3,507	-3,601	-3,401	-3,388	-3,72
$\mu$	1,950	1,953	1,994	2,023	1,955	2,067	2,36
$C$	$1,36 \times 10^{-4}$	$1,23 \times 10^{-4}$	$1,36 \times 10^{-4}$	$1,17 \times 10^{-4}$	$1,20 \times 10^{-4}$	$1,36 \times 10^{-4}$	$1,27 \times 10^{-4}$
$p$	1,853	1,760	1,720	1,751	1,761	1,764	1,65
$h$	0,651	0,618	0,630	0,620	0,597	0,608	0,534
$\alpha$	1,787	1,621	1,254	1,426	1,115	0,926	0,794

Tabela 4.21 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para areia densa com o AG

	Areia densa						Lade e Kim (1995)
	Calib. Trad.	GA 10% CT	GA 20% CT	GA 30% CT	GA 40% CT	GA 50% CT	
$\nu$	0,200	0,223	0,250	0,264	0,294	0,310	0,2
$M$	2585	2817	2205	2474	1995	1374	900
$\lambda$	0,313	0,360	0,405	0,294	0,337	0,291	0,28
$m$	0,232	0,218	0,265	0,272	0,245	0,254	0,23
$\eta_1$	80,37	76,31	81,08	79,45	80,82	70,80	80
$\psi_2$	-3,10	-2,815	-2,633	-2,600	-2,767	-2,724	-3,09
$\mu$	1,68	1,628	1,502	1,437	1,620	1,591	2,00
$C$	$1,65 \times 10^{-4}$	$1,48 \times 10^{-4}$	$1,68 \times 10^{-4}$	$1,38 \times 10^{-4}$	$1,48 \times 10^{-4}$	$1,65 \times 10^{-4}$	$0,4 \times 10^{-4}$
$p$	1,675	1,583	1,588	1,537	1,610	1,568	1,82
$h$	0,879	0,843	0,961	0,793	0,915	1,019	0,765
$\alpha$	1,386	1,236	0,985	1,124	0,814	0,710	0,229

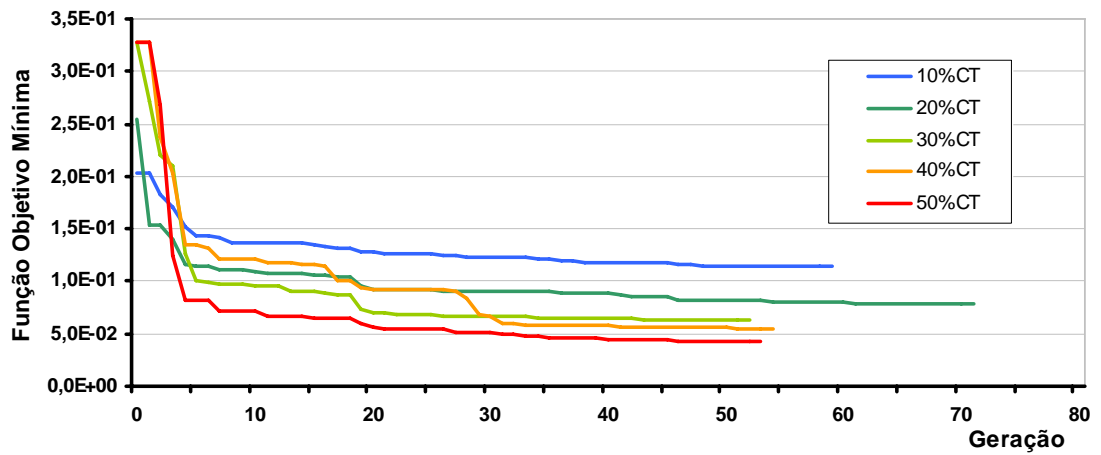


Figura 4.23 – Convergência do AG para areia fofa com o modelo Lade-Kim variando os limites dos parâmetros.

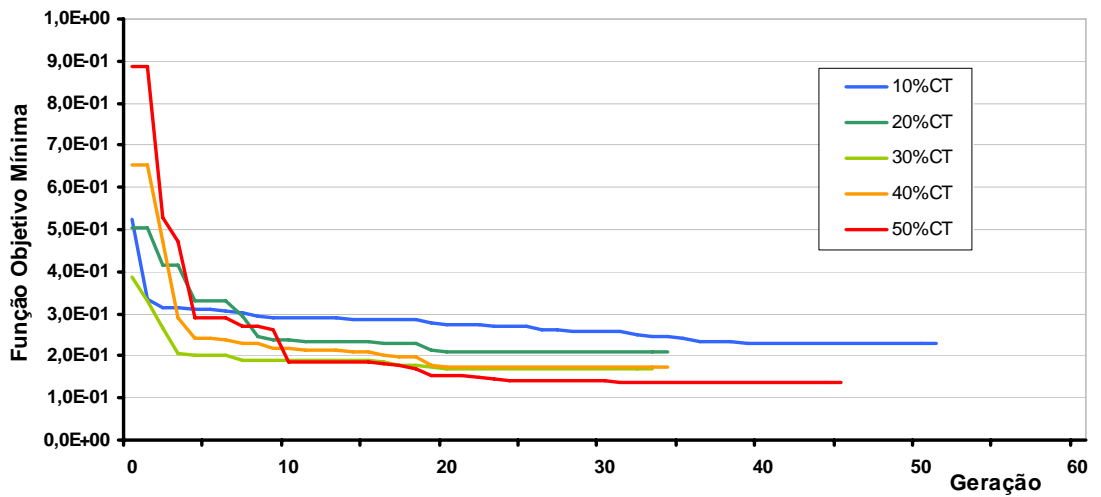


Figura 4.24 – Convergência do AG para areia densa com o modelo Lade-Kim variando os limites dos parâmetros.

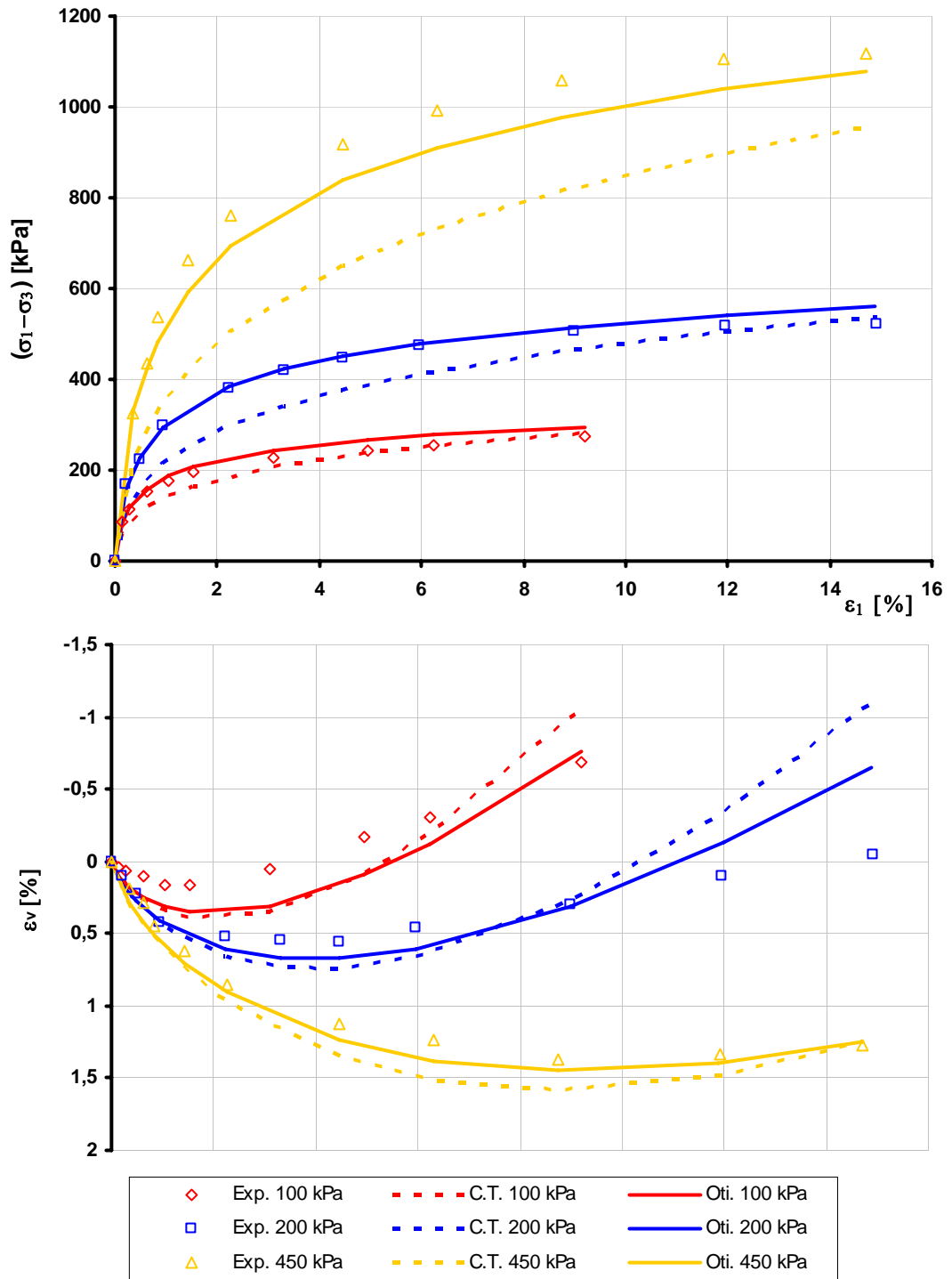


Figura 4.25 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pela calibração tradicional e pelo algoritmo genético (50% CT) para areia fofa.

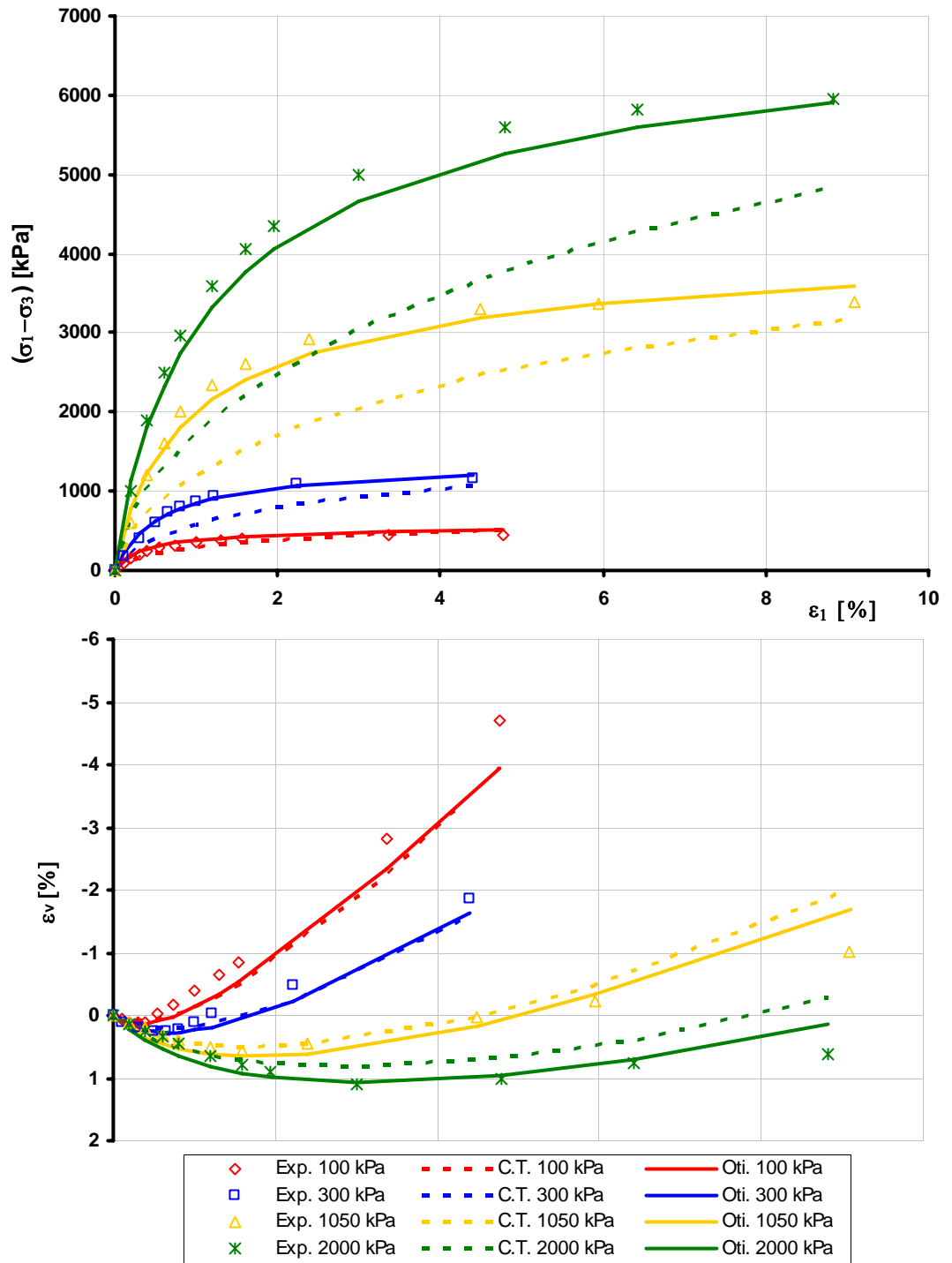


Figura 4.26 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pela calibração tradicional e pelo algoritmo genético (50% CT) para areia densa.

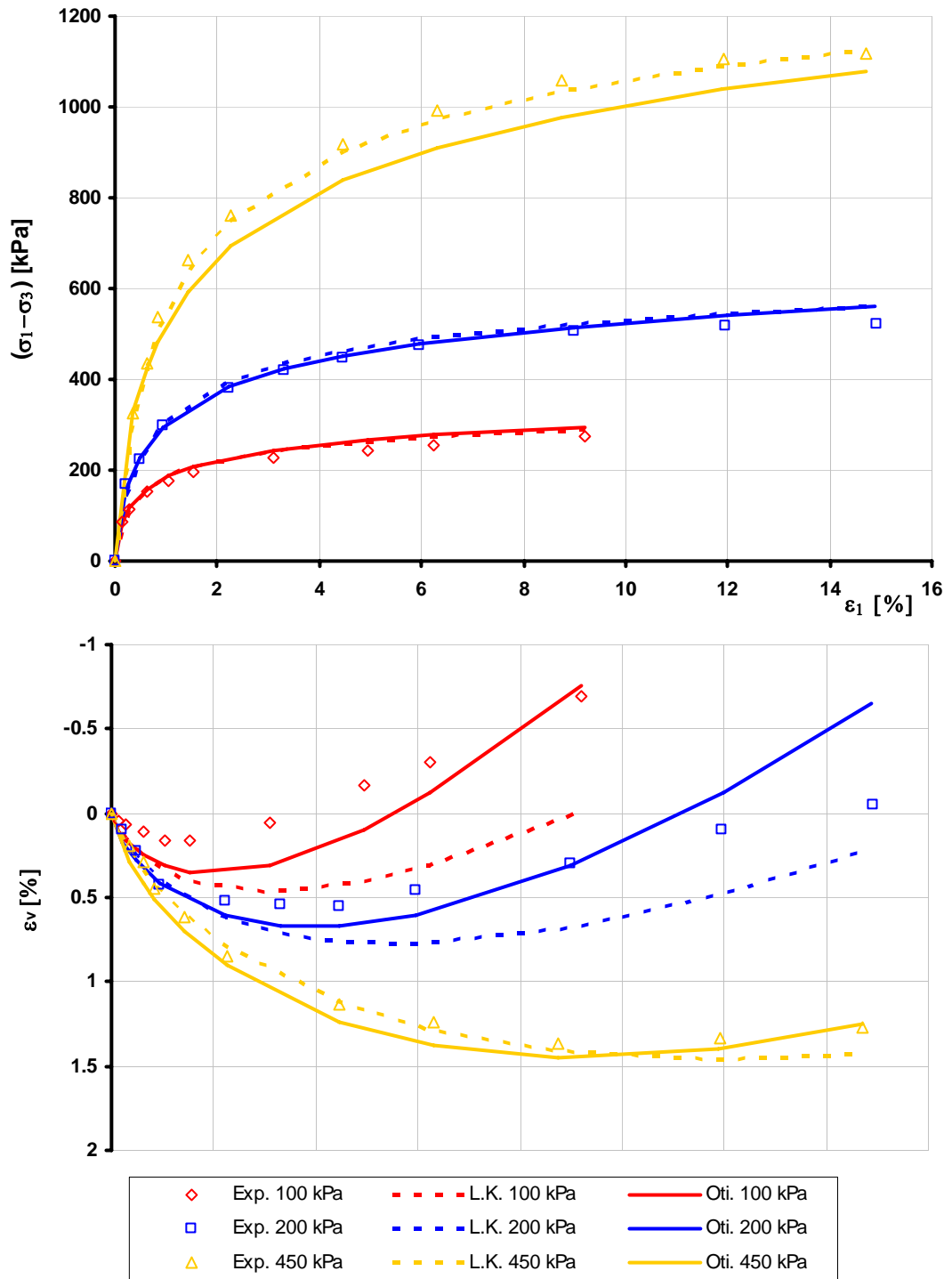


Figura 4.27 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético (50% CT) e por Lade e Kim (1995) para areia fofa.

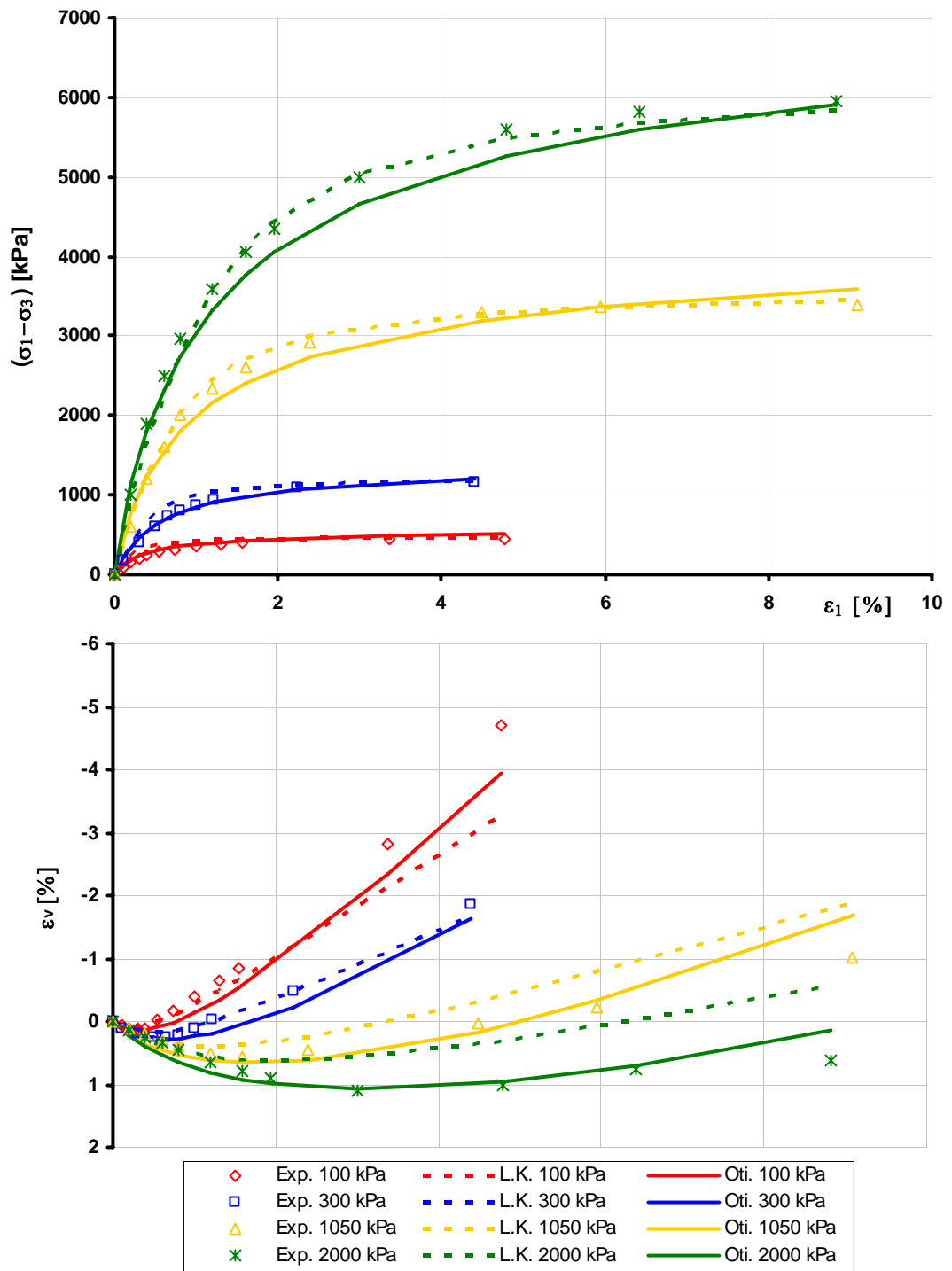


Figura 4.28 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético (50% CT) e por Lade e Kim (1995) para areia densa.

As curvas tensão desviadora *versus* deformação axial definidas com os parâmetros apresentados por Lade e Kim (1995) mostram-se mais ajustadas aos dados experimentais, do que as curvas prescritas com os parâmetros determinados pelo algoritmo genético. No entanto, o menor valor da função objetivo, que considera o conjunto total dos dados, confirma que a calibração pelo AG é mais eficiente.

Quando múltiplos mecanismos estão incluídos em um modelo teórico, é freqüentemente possível executar a otimização em um sub-grupo dos parâmetros do modelo associados a um determinado mecanismo, tendo por base os dados experimentais que representem, principalmente, esse mecanismo. A maior vantagem dessa abordagem é que cada otimização envolve somente um pequeno número de parâmetros e o foco pode ser mantido na identificação do efeito dos mecanismos, um de cada vez (YANG e ELGAMAL, 2003).

No caso do modelo Lade-Kim, os parâmetros  $C$  e  $p$  são tradicionalmente obtidos das curvas de ensaio isotrópico que, nesse trabalho, não foram levados em conta na função objetivo. Uma alternativa seria executar uma otimização separadamente para esses parâmetros com base nos ensaios isotrópicos e, em seguida, uma outra otimização para os demais parâmetros, de forma a aumentar a possibilidade de sucesso da análise de regressão.

## **4.2 Estudo da matriz de pesos**

Os estudos paramétricos que se seguem foram realizados apenas para o modelo Lade-Kim, pelo fato de o modelo representar melhor o comportamento dos solos. O material estudado foi o solo residual jovem de gnaiss (BOTELHO, 2007).

As estimativas foram calculadas utilizando o algoritmo genético, já que no estudo paramétrico anterior esse algoritmo mostrou-se eficiente para a tarefa de identificação de todos os parâmetros do modelo de Lade-Kim. Por causa das dificuldades de convergência observadas, quando os limites de variação dos parâmetros são superiores a 50% da calibração tradicional, adotou-se o limite de 50%.

Os pesos assumidos para as observações são parte importante da análise inversa porque eles influenciam os valores da função objetivo e os resultados da otimização. Uma ponderação é usada para reduzir a influência de observações menos precisas e aumentar a influência daquelas mais precisas. Em problemas com mais de um tipo de observação, a ponderação deve produzir resíduos ponderados de mesma grandeza, tal que eles possam ser somados.

O peso das observações pode ser considerado igual ao inverso da sua variância, ou a algum fator escalar que transforme os valores observados em quantidades adimensionais.

No caso das variâncias, elas podem ser expressas diretamente ou calculadas a partir dos valores amostrais pelo desvio padrão ou pelo coeficiente de variação, de acordo com as seguintes expressões:

$$w_{ii} = \frac{1}{{}_i\sigma^2} \quad (4.5)$$

$$\text{cov}_i = \frac{{}_i\sigma}{b_i} \quad (4.6)$$

em que  $w_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da matriz de pesos;  ${}_i\sigma^2$  é a variância do  $i$ -ésimo ponto (quadrado do desvio padrão);  $\text{cov}_i$  é o coeficiente de variação do  $i$ -ésimo ponto;  ${}_i\sigma$  é o desvio padrão do  $i$ -ésimo ponto; e  $b_i$  é o valor medido do  $i$ -ésimo ponto.

Na primeira simulação realizada neste estudo, os pesos foram assumidos com base no desvio padrão ( $w = \sigma$ ) tendo em vista apenas possíveis erros de medição, os seguintes pesos foram assumidos:

$$w_\sigma = \frac{1}{\sigma\sigma^2} = \frac{1}{(1)^2} = 1$$

$$w_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon\sigma^2} = \frac{1}{(10^{-4})^2} = \frac{1}{10^{-8}} \quad (4.7)$$

Na segunda simulação, usaram-se coeficientes de variação ( $w = \text{cov}$ ), de modo que o erro associado a uma observação aumenta com o aumento do valor da própria observação. A proposta desta escolha é dar mais peso às leituras iniciais

dos pontos tensão-deformação (o peso de uma observação é inversamente proporcional ao seu erro). De fato, pontos de observações iniciais são mais importantes na caracterização dos resultados computados porque, para um dado modelo, a inclinação das curvas tensão-deformação é fortemente influenciada por sua resposta inicial. Os pesos assumiram os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \text{cov}_\sigma = 0,05 \rightarrow w_{\sigma_i} &= \frac{1}{(0,05\sigma_i^{\text{exp}})^2} \\ \text{cov}_\varepsilon = 0,1 \rightarrow w_{\varepsilon_i} &= \frac{1}{(0,1\varepsilon_i^{\text{exp}})^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Na terceira simulação, utilizaram-se fatores escalares de ponderação com a finalidade de apenas transformar os dados em valores adimensionais. Os fatores escalares foram escolhidos como o valor máximo absoluto das variáveis correspondentes aos pontos envolvidos em cada conjunto de dados ( $w = \text{máx}$ ). Admitiram-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned} w_\sigma &= \frac{1}{\sigma_{\text{máx}}^2} \\ w_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{máx}}^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que  $\sigma_{\text{máx}} = \max\{\sigma_{li}^{\text{exp}}\}, l = 1...3, i = 1...npt_j$  e  $\varepsilon_{\text{máx}} = \max\{\varepsilon_{li}^{\text{exp}}\}, l = 1...3, i = 1...npt_j$ .

As estatísticas das otimizações são apresentadas na Tabela 4.22. Na Tabela 4.23 listam-se os parâmetros da calibração tradicional e os obtidos na análise inversa, para os três casos de ponderação considerados. Os resultados indicam que a ponderação tem pouco efeito na estimativa dos parâmetros mais sensitivos e que os parâmetros menos sensitivos mostram as maiores mudanças. Os parâmetros menos sensitivos têm menor efeito nos resultados computados, exigindo maiores variações de modo a influir na solução.

Tabela 4.22 – Estatísticas de ajuste do estudo paramétrico da matriz de ponderação

Solo residual jovem de gnaisse	Calib. Trad.	OTI TX SS	Calib. Trad.	OTI TX SS	Calib. Trad.	OTI TX SS
	$w = \sigma$	$w = \sigma$	$w = cov$	$w = cov$	$w = máx$	$w = máx$
<i>FO</i>	508178	128607	10189	1499	2,863	0,409
TXSS <i>erro</i> <sub><math>\sigma</math></sub> (%)	2,16	0,15	2,16	1,81	2,16	0,07
	3,17	1,00	3,17	2,08	3,17	0,60
<i>FI</i> (%)	75		85		86	
Nº de gerações	57		21		50	
Tempo de processamento (segundos)	46		24		44	

TXSS – Ensaio triaxial saturado

OTI TX SS – Otimização dos ensaios triaxiais saturados

Tabela 4.23 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaisse do estudo paramétrico da matriz de ponderação

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaisse			
	Calibração Tradicional	OTI TX SS $w = \sigma$	OTI TX SS $w = cov$	OTI TX SS $w = máx$
$v$	0,200	0,290	0,125	0,289
$M$	542,6	802,7	515,1	722,3
$\lambda$	0,108	0,133	0,161	0,061
$m$	0,819	0,992	0,593	1,175
$\eta_1$	115,6	110,2	96,12	117,5
$\psi_2$	-2,987	-2,793	-3,012	-2,651
$\mu$	1,925	1,919	2,874	1,643
$C$	$1,28 \times 10^{-3}$	$1,40 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$
$p$	1,692	1,579	1,838	1,650
$h$	1,266	1,349	1,749	1,667
$\alpha$	2,023	1,043	0,991	1,036

OTI TX SS – Otimização dos ensaios triaxiais saturados

Na Figura 4.29 apresentam-se os parâmetros otimizados em termos do percentual de mudança do parâmetro  $p$  em relação a sua estimativa inicial,  $PC_p$ , definida como:

$$PC_p = \frac{P_{oti} - P_{ini}}{P_{ini}} \quad (4.10)$$

em que  $p_{ini}$  é o valor do parâmetro antes da otimização (calibração tradicional); e  $p_{oti}$  é o valor após a otimização. Os resultados mostram que a influência da

ponderação nos resultados é significativa. Os pesos dados por um fator escalar máximo produzem o conjunto de parâmetros com maiores mudanças em relação ao conjunto inicial.

As curvas comparativas (Figuras 4.30) mostram que os melhores resultados ocorreram quando se considerou o valor máximo das medições na ponderação.

Com este estudo pretenderam-se mostrar a importância em se considerar outras contribuições de incertezas (amolecimento da preparação da amostra e variabilidade natural do material) na discrepância entre dados medidos e resultados computados.

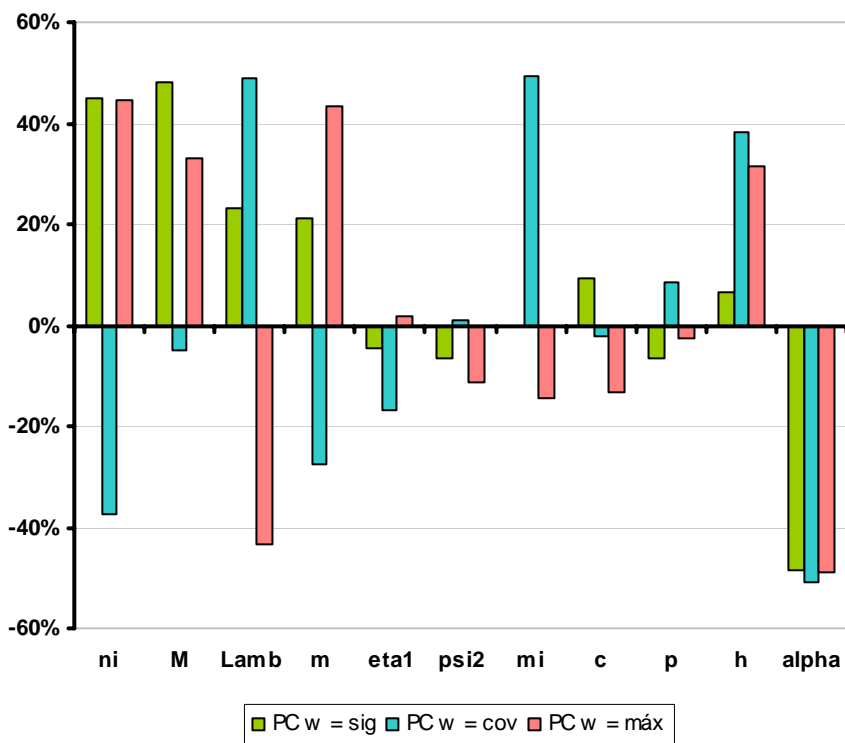


Figura 4.29 – Porcentagem de mudança dos parâmetros em relação a calibração tradicional para solo residual jovem de gnaiss.

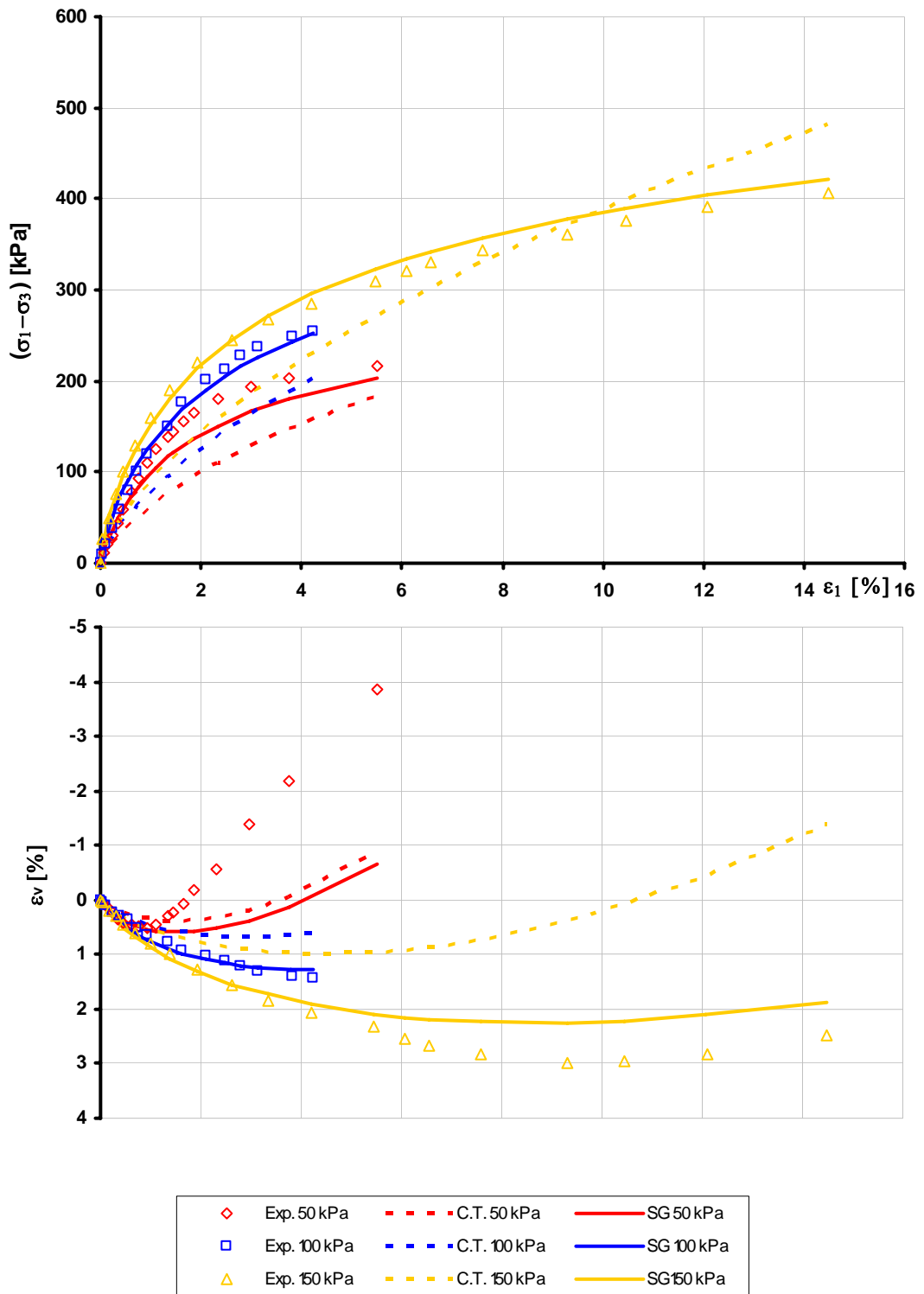


Figura 4.30 (a) – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético para solo residual jovem de gnaiss com a matriz de ponderação igual ao desvio padrão.

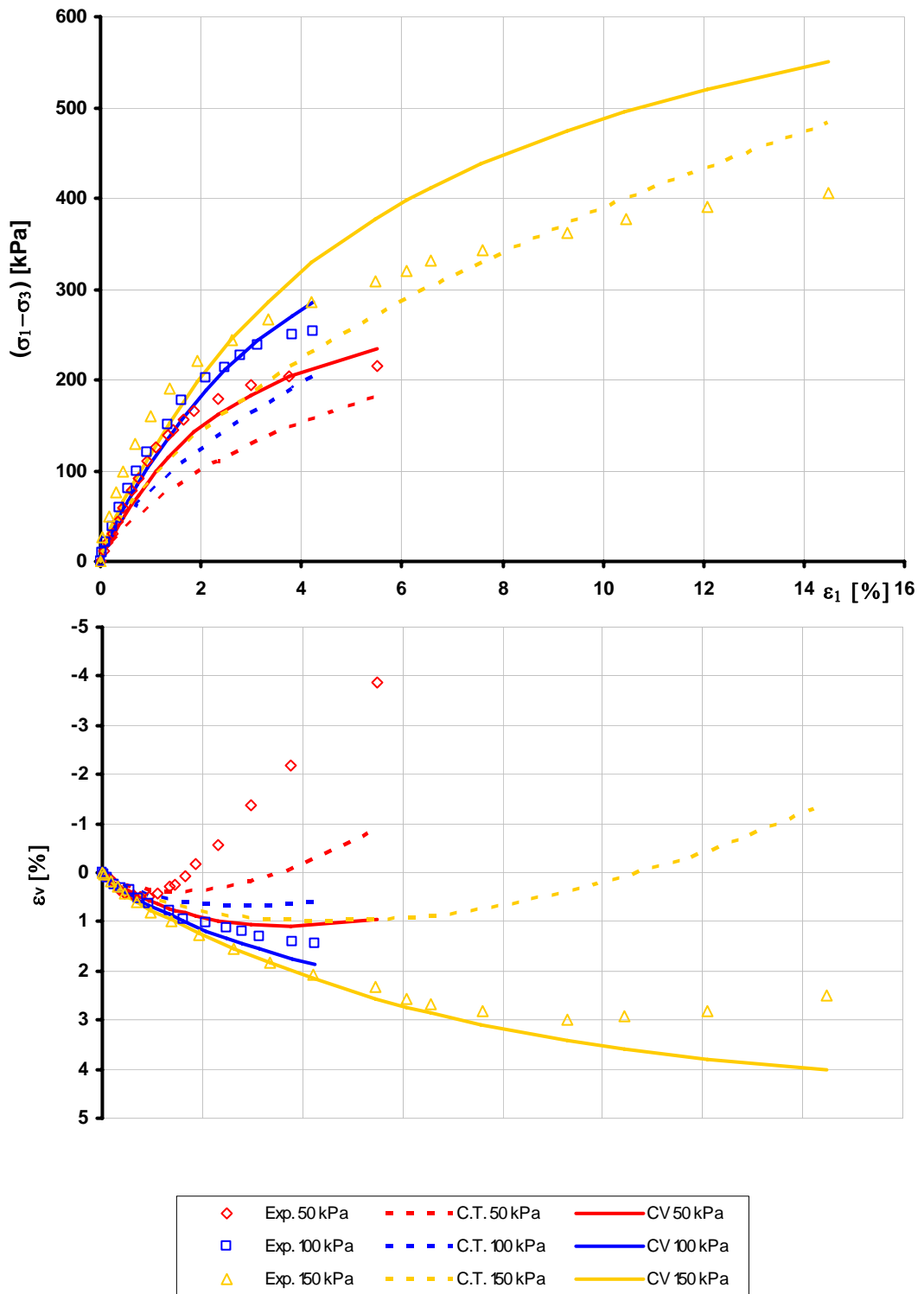


Figura 4.30 (b) – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético para solo residual jovem de gnaiss com a matriz de ponderação igual ao coeficiente de variação.

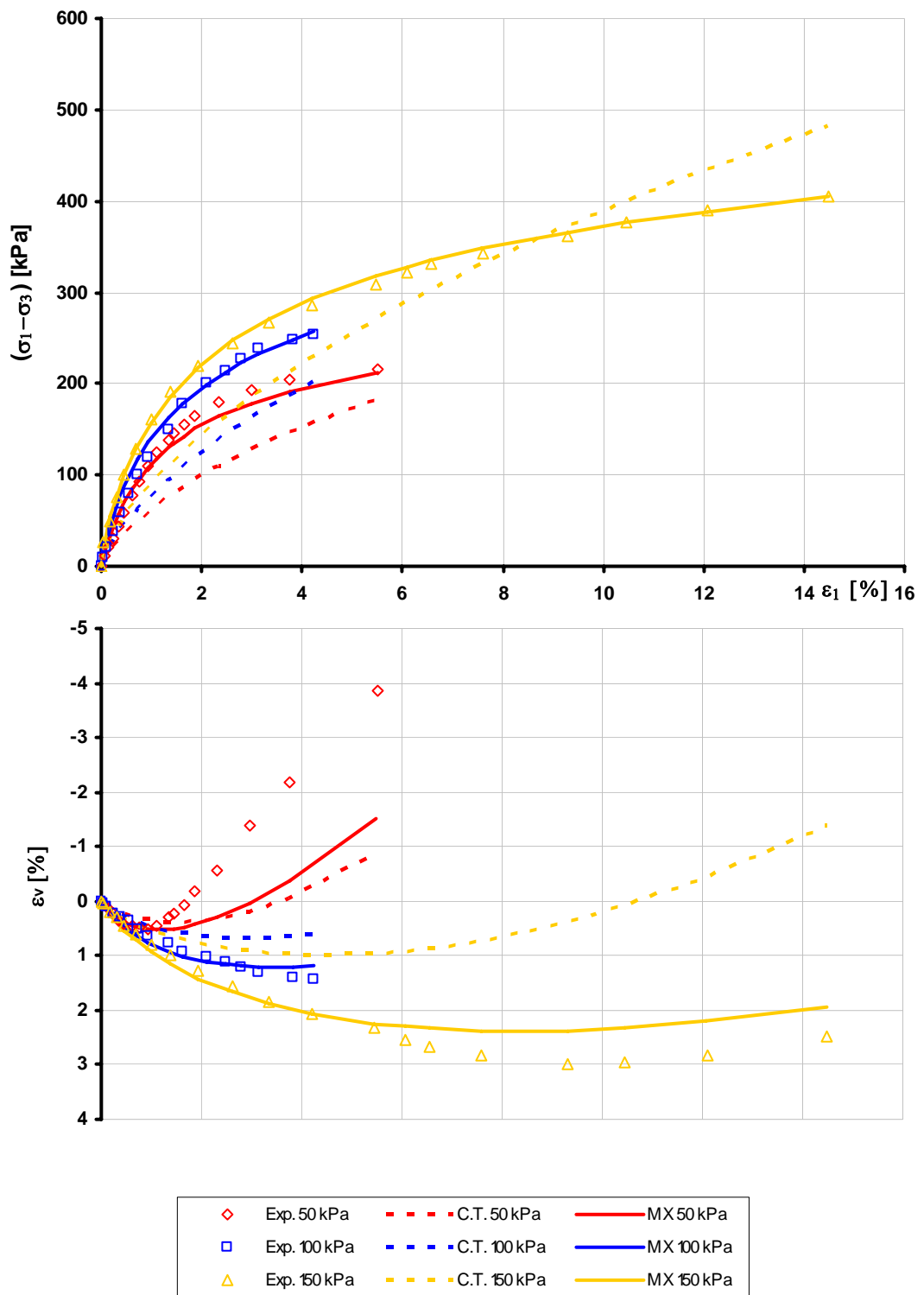


Figura 4.30 (c) – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim com parâmetros obtidos pelo algoritmo genético para solo residual jovem de gnaïsse com a matriz de ponderação igual ao fator escalar máximo.

### 4.3 Estudo dos tipos de ensaios

Os estudos anteriores mostram como a análise inversa pode eficientemente calibrar um modelo constitutivo de solo com base em resultados de ensaios triaxiais, com a combinação da resposta experimental e de resultados de simulações dos ensaios. Problemas inversos podem ser usados de diferentes maneiras, já que as variáveis que influenciam os resultados são numerosas. Por conseguinte, o número e, ou o tipo de ensaio de laboratório usados como observações podem ter efeitos diferentes no resultado da análise.

No presente estudo, resultados otimizados utilizando a análise inversa do modelo Lade-Kim (LADE,1990) são comparados com resultados experimentais de ensaios cúbicos triaxiais e hidrostáticos, executados em amostras saturadas e não saturadas de um solo residual jovem (BOTELHO,2007).

#### 4.3.1 Análise inversa dos ensaios saturados

No caso dos ensaios saturados, duas análises foram realizadas, a primeira utiliza somente observações de ensaios triaxiais e a segunda leva em conta ensaios triaxiais e hidrostático. Nas Tabelas 4.24 a 4.27 e nas Figuras 4.31 a 4.34 apresentam-se os resultados da análise inversa dos ensaios saturados.

##### A) Ensaios triaxiais saturados

Tabela 4.24 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais saturados

Solo residual jovem de gnaisse	Calib. Tradicional	OTI TX SS
<i>FO</i>	2,863	0,409
fo	2,863	0,409
TXSS <i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,16	0,07
<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	3,17	0,60
<i>FI</i> (%)	86	
Tempo de processamento (segundos)	76	

TXSS – Ensaios triaxiais saturados

OTI TX SS – Otimização dos ensaios triaxiais saturados

fo – parcela do valor da função objetivo devido aos ensaios correspondentes

Tabela 4.25 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios triaxiais saturados

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaise	
	Calibração Tradicional	OTI TX SS
$\nu$	0,200	0,289
$M$	542,6	722,3
$\lambda$	0,108	0,061
$m$	0,819	1,175
$\eta_1$	115,6	117,5
$\psi_2$	-2,987	-2,651
$\mu$	1,925	1,643
$C$	$1,28 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$
$p$	1,692	1,650
$h$	1,266	1,667
$\alpha$	2,023	1,036
$b$	0,002313	-

OTI TX SS – Otimização dos ensaios triaxiais saturados

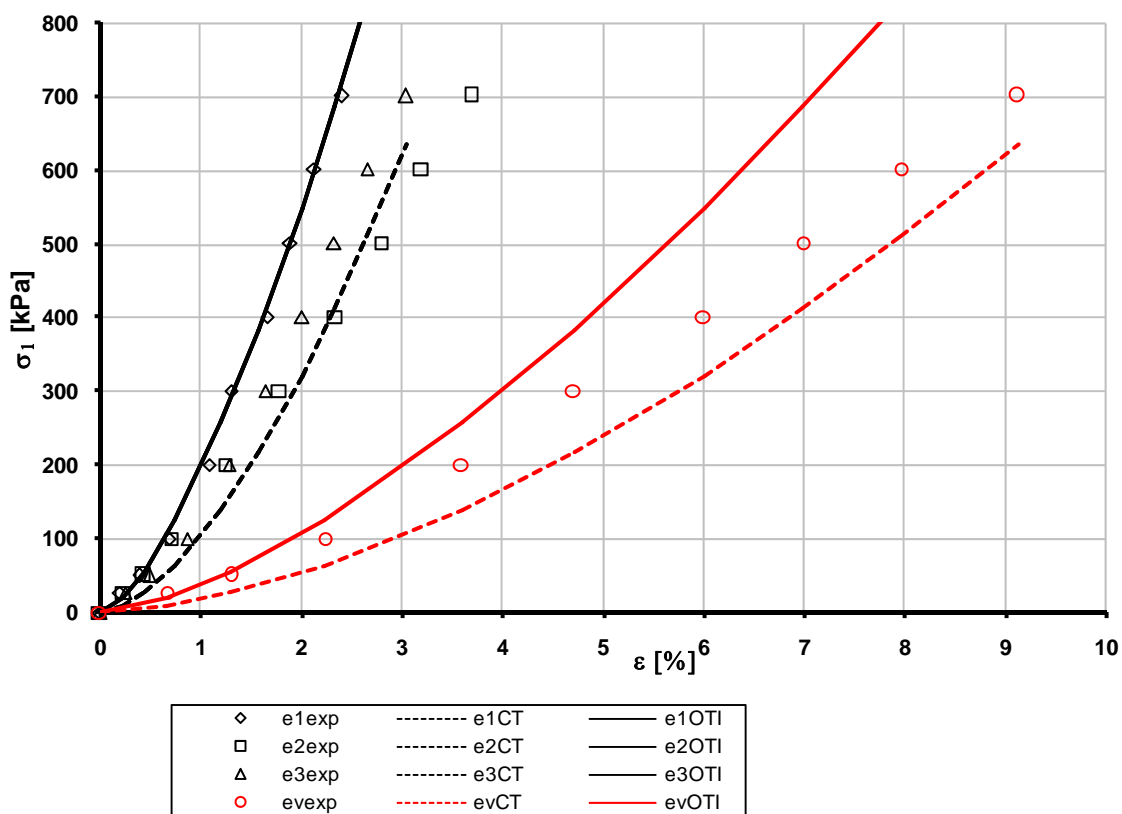


Figura 4.31 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados.

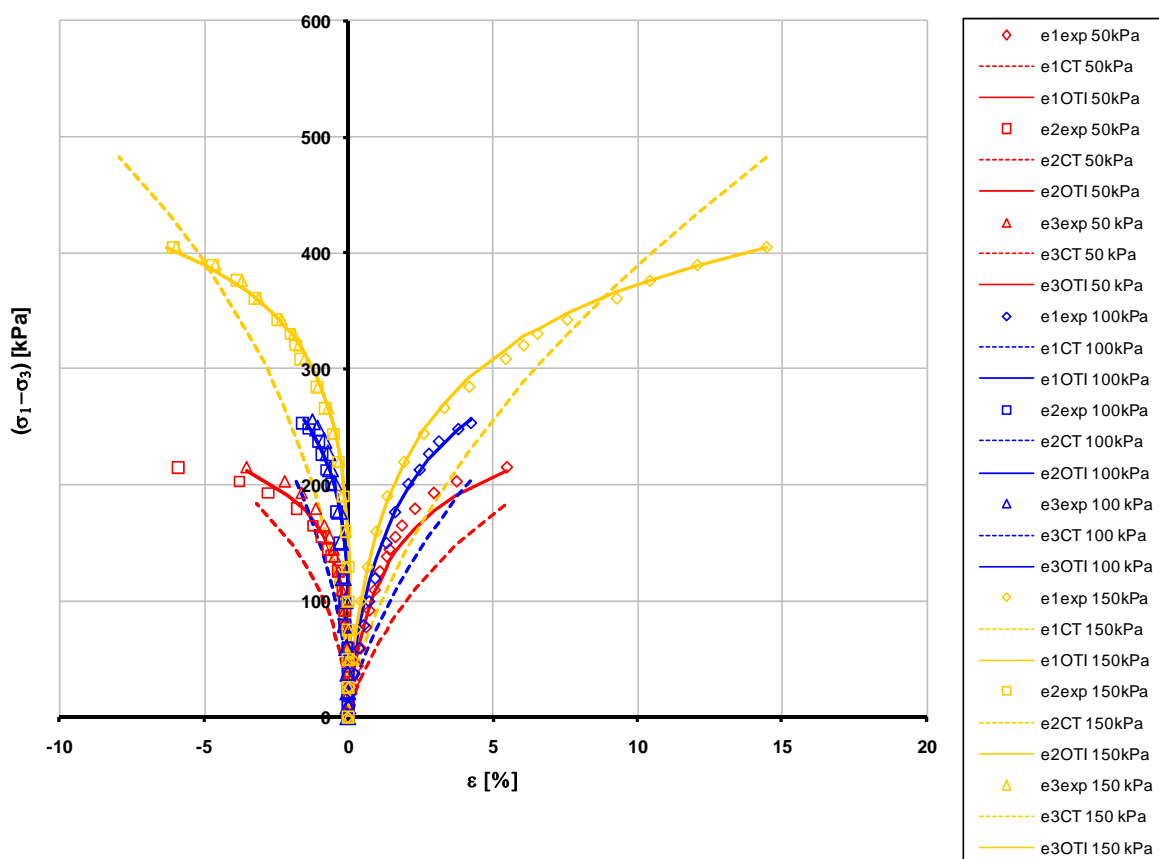


Figura 4.32 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados.

### B) Ensaio triaxiais e hidrostático saturados

Tabela 4.26 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios saturados

Solo residual jovem de gnaisse		Calib. Tradicional	OTI TX SS	OTI TX+HD SS
	<i>FO</i>	3,352	1,687	0,409
HDSS	fo	0,489	1,278	0,001
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,86	14,84	0,04
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	< 0,001	< 0,001	< 0,001
TXSS	fo	2,86	0,409	0,408
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,16	0,07	0,11
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	3,17	0,60	0,58
	<i>FI</i> (%)	-	-	86
	Tempo de processamento (segundos)	-	-	395

HDSS – Ensaio hidrostático saturado

TXSS – Ensaio triaxiais saturados

OTI TX SS – Otimização dos ensaios triaxiais saturados

OTI TX+HD SS – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados

fo – parcela do valor da função objetivo devido aos ensaios correspondentes

Tabela 4.27 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios saturados

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaise		
	Calibração Tradicional	OTI TX SS	OTI TX+HD SS
$\nu$	0,200	0,289	0,195
$M$	542,6	722,3	683,7
$\lambda$	0,108	0,061	0,047
$m$	0,819	1,175	1,315
$\eta_1$	115,6	117,5	144,1
$\psi_2$	-2,987	-2,651	-2,700
$\mu$	1,925	1,643	1,622
$C$	$1,28 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$	$1,12 \times 10^{-3}$
$p$	1,692	1,650	1,742
$h$	1,266	1,667	1,951
$\alpha$	2,023	1,036	1,054
$b$	0,002313	-	-

OTI TX SS – Otimização dos ensaios triaxiais saturados

OTI TX+HD SS – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados

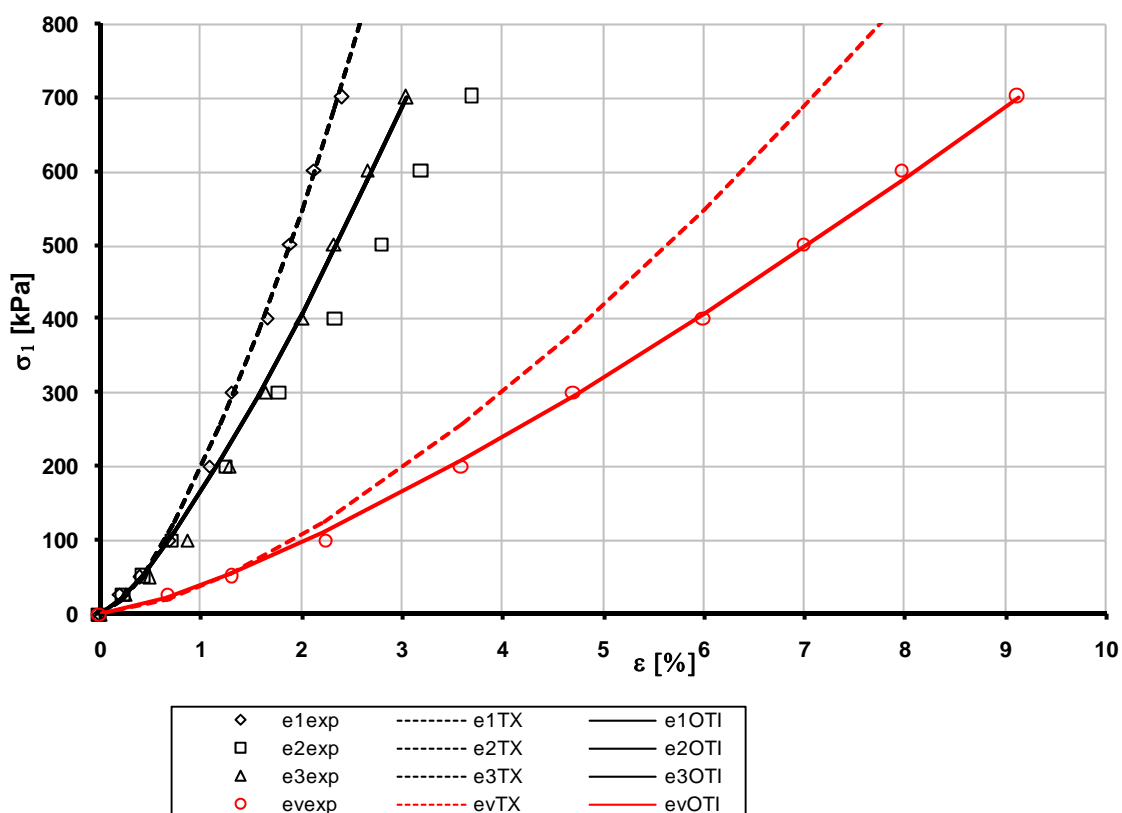


Figura 4.33 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados.

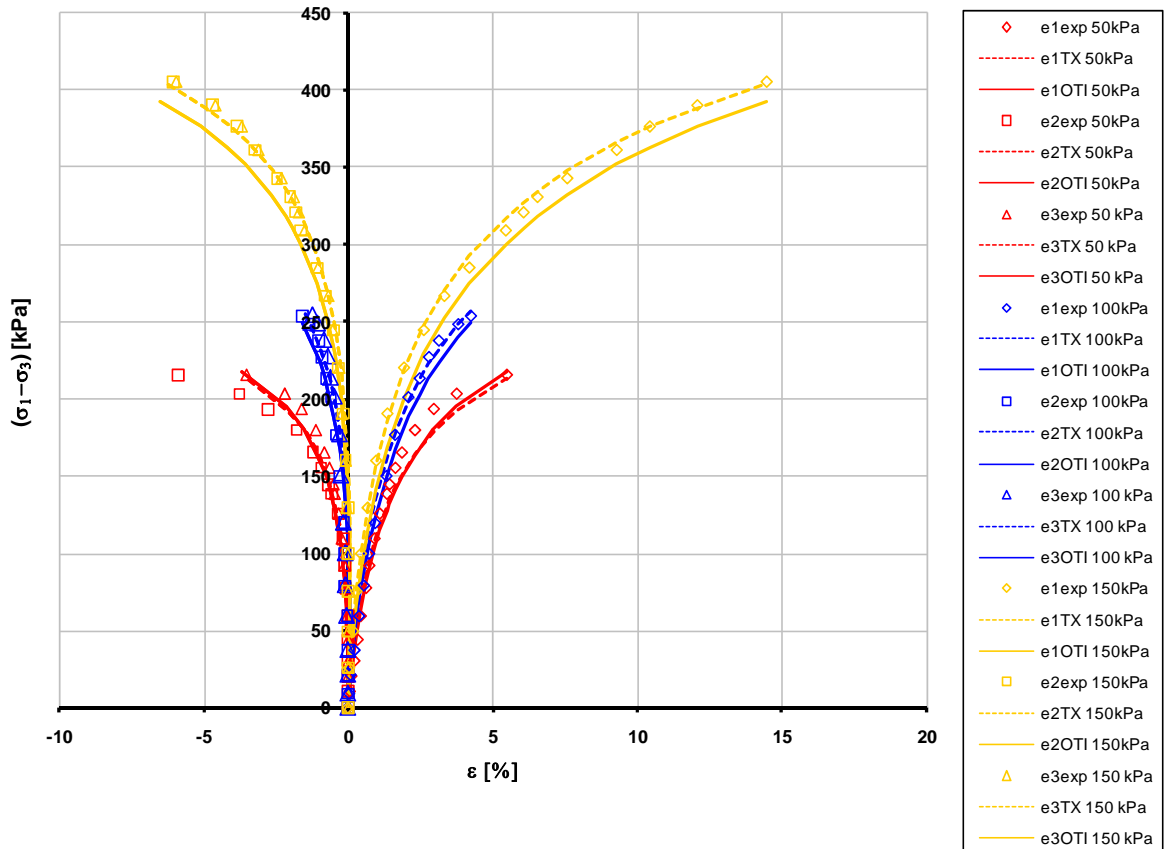


Figura 4.34 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados.

### 4.3.2 Análise inversa dos ensaios não-saturados

O mesmo procedimento dos ensaios saturados foi seguido para os ensaios não saturados com sucção matricial de 80 e 160 kPa, considerando a adaptação do modelo Lade-Kim para solos não saturados (LAQUINI ET AL., 2007). Nas Figuras 4.35 a 4.42 e nas Tabelas 4.28 a 4.35 apresentam-se os resultados das análises inversas dos ensaios não saturados.

A) Ensaios triaxiais não-saturados

Tabela 4.28 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

Solo residual jovem de gnaiss	Calib. Tradicional	OTI TX NS80
<i>FO</i>	0,455	0,042
<i>fo</i>	0,455	0,042
TXNS80 <i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,02	0,03
<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,11	0,09
<i>FI</i> (%)	91	
Tempo de processamento (segundos)	132	

TXNS80 – Ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

OTI TX NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

*fo* – parcela do valor da função objetivo devido aos ensaios correspondentes

Tabela 4.29 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaiss na análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaiss	
	Calibração Tradicional	OTI TX NS80
<i>v</i>	0,200	0,106
<i>M</i>	542,6	610,1
<i>λ</i>	0,108	0,058
<i>m</i>	0,819	0,689
<i>η<sub>1</sub></i>	115,6	80,06
<i>ψ<sub>2</sub></i>	-2,987	-2,977
<i>μ</i>	1,925	2,025
<i>C</i>	1,28 x 10 <sup>-3</sup>	0,99 x 10 <sup>-3</sup>
<i>p</i>	1,692	1,613
<i>h</i>	1,266	1,141
<i>α</i>	2,023	1,063
<i>b</i>	0,002313	0,003554

OTI TX NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais saturados

OTI TX NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

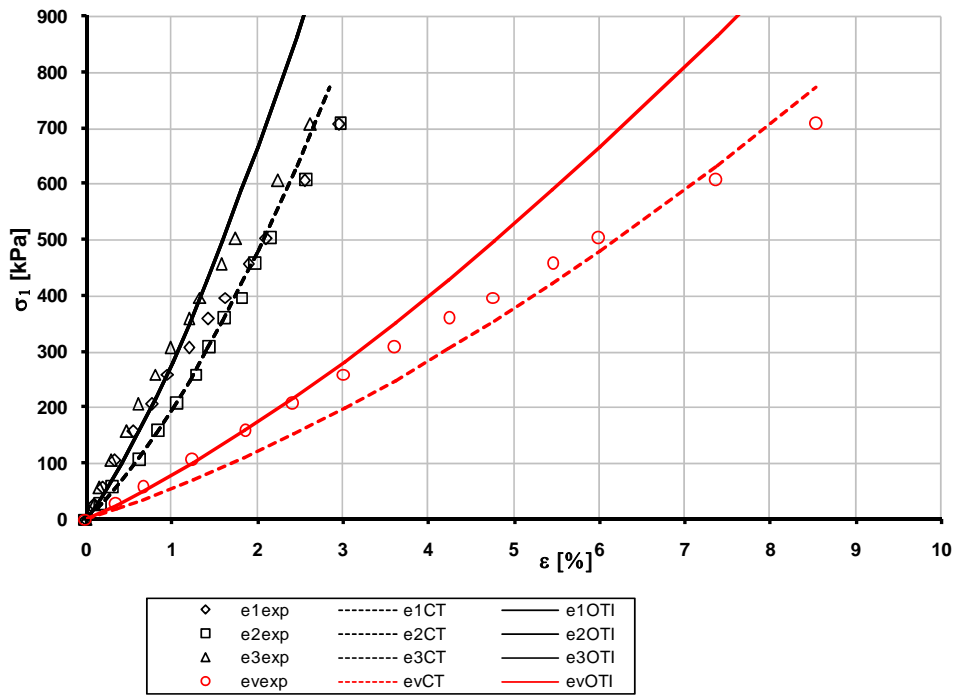


Figura 4.35 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais.

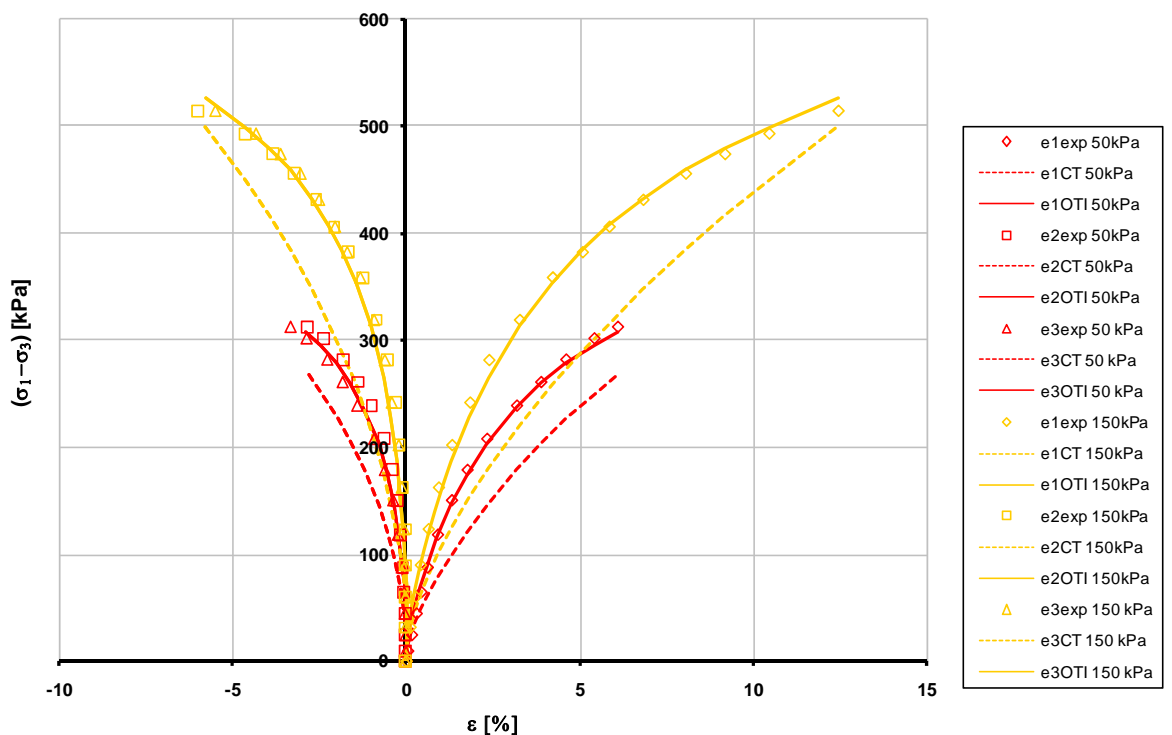


Figura 4.36 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais.

Tabela 4.30 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa

Solo residual jovem de gnaise	Calib. Tradicional	OTI TX NS160
<i>FO</i>	3,07	0,34
fo	3,07	0,34
TXNS160 $erro_{\sigma}$ (%)	5,98	0,13
$erro_{\varepsilon}$ (%)	0,23	0,22
<i>FI</i> (%)	89	
Tempo de processamento (segundos)	142	

TXNS160 – Ensaio triaxial com sucção matricial de 160 kPa

OTI TX NS160 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa

fo – parcela do valor da função objetivo devido aos ensaios correspondentes

Tabela 4.31 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaise	
	Calibração Tradicional	OTI TX NS160
$\nu$	0,200	0,097
$M$	542,6	472,1
$\lambda$	0,108	0,118
$m$	0,819	0,706
$\eta_1$	115,6	74,92
$\psi_2$	-2,987	-3,028
$\mu$	1,925	2,585
$C$	$1,28 \times 10^{-3}$	$1,07 \times 10^{-3}$
$p$	1,692	1,553
$h$	1,266	1,400
$\alpha$	2,023	0,841
$b$	0,002313	0,002867

OTI TX NS160 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa

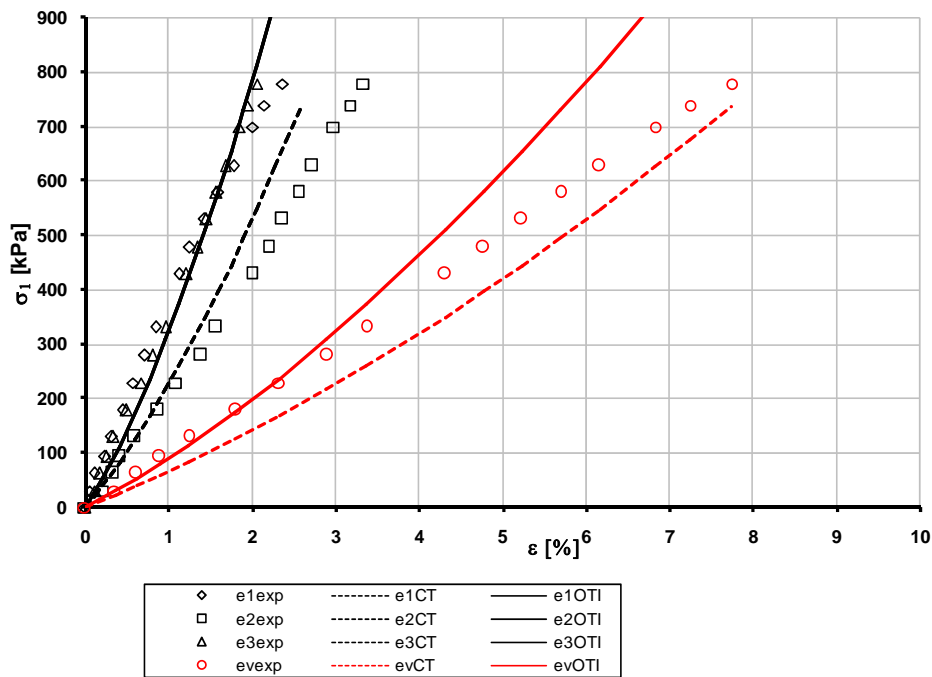


Figura 4.37 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados.

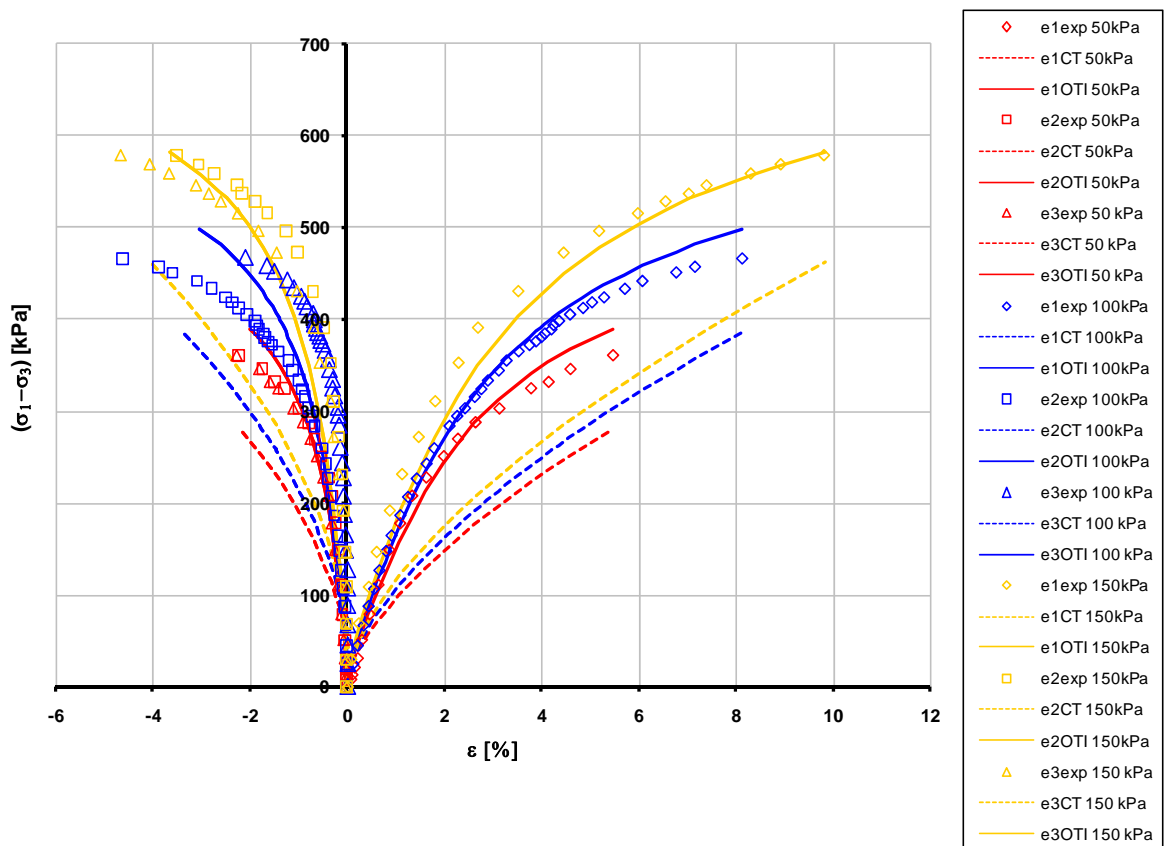


Figura 4.38 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais saturados.

## B) Ensaios triaxiais e hidrostático não-saturados

Tabela 4.32 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa

Solo residual jovem de gnaise		Calib. Tradicional	OTI TX NS80	OTI TX+HD NS80
<i>FO</i>		0,607	1,347	0,0094
HDNS80	<i>f<sub>o</sub></i>	0,152	1,305	
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	1,36	11,67	0,56
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	<0,001	0,03	<0,001
TXNS80	<i>f<sub>o</sub></i>	0,455	0,042	
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,02	0,03	0,03
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,11	0,09	0,05
<i>FI</i> (%)		-	-	99
Tempo de processamento (segundos)		-	-	576

HDNS80 – Ensaio hidrostático com sucção matricial de 80 kPa

TXNS80 – Ensaio triaxial com sucção matricial de 80 kPa

OTI TX NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

OTI TX+HD NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa

*f<sub>o</sub>* – parcela do valor da função objetivo devido aos ensaios correspondentes

Tabela 4.33 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaise		
	Calibração Tradicional	OTI TX NS80	OTI TX+HD NS80
<i>v</i>	0,200	0,106	0,079
<i>M</i>	542,6	610,1	398,5
<i>λ</i>	0,108	0,058	0,030
<i>m</i>	0,819	0,689	0,659
<i>η<sub>1</sub></i>	115,6	80,06	77,36
<i>ψ<sub>2</sub></i>	-2,987	-2,977	-2,973
<i>μ</i>	1,925	2,025	1,966
<i>C</i>	1,28 x 10 <sup>-3</sup>	0,99 x 10 <sup>-3</sup>	0,98 x 10 <sup>-3</sup>
<i>p</i>	1,692	1,613	1,619
<i>h</i>	1,266	1,141	1,174
<i>α</i>	2,023	1,063	0,753
<i>b</i>	0,002313	0,003554	0,004149

OTI TX NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

OTI TX+HD NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa

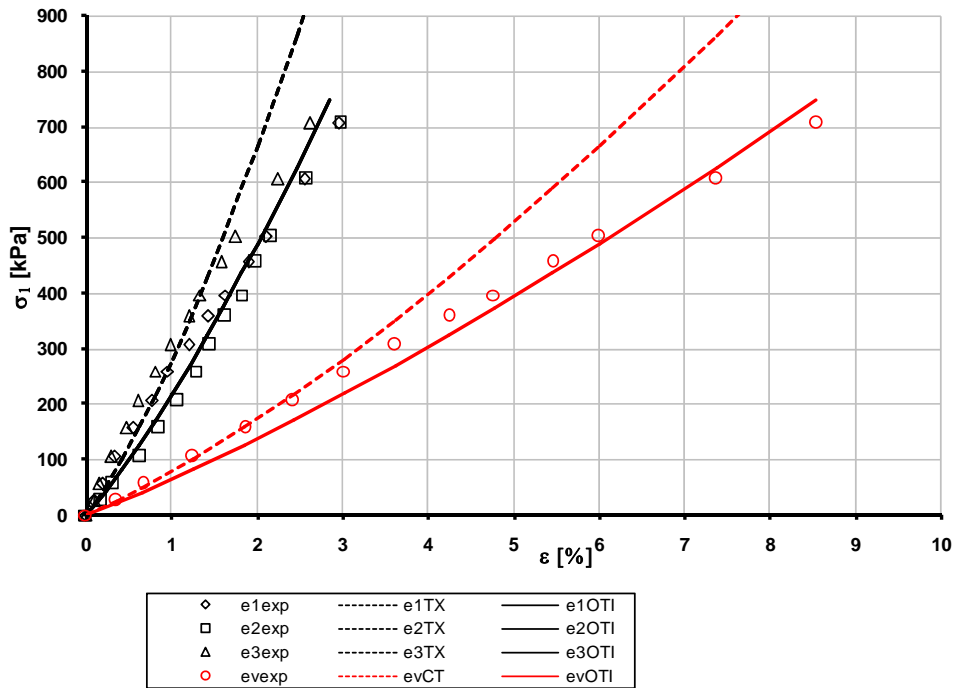


Figura 4.39 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados.

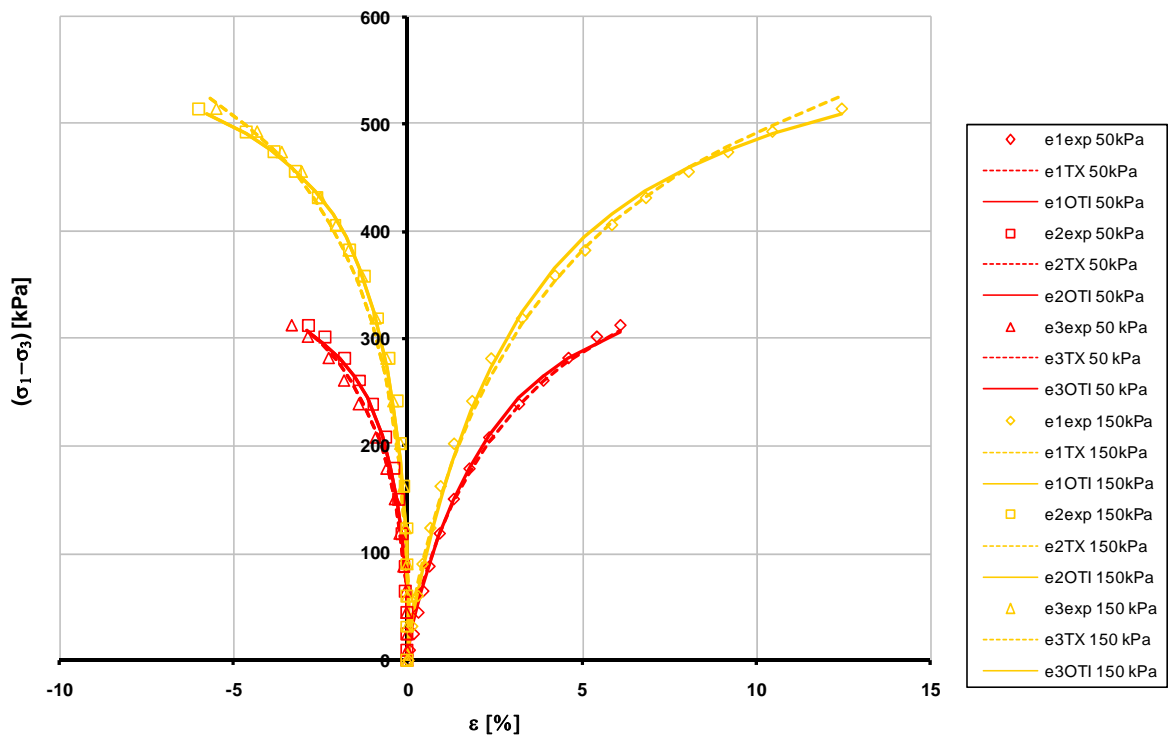


Figura 4.40 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados.

Tabela 4.34 – Estatísticas de ajuste da análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa

Solo residual jovem de gnaise		Calib. Tradicional	OTI TX NS160	OTI TX+HD NS160
<i>FO</i>		3,392	1,650	0,321
HDNS160	fo	0,322	1,31	
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	1,93	7,82	0,12
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	<0,001	0,08	<0,001
TXNS160	fo	3,07	0,34	
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	5,98	0,13	0,16
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,23	0,22	0,20
<i>FI</i> (%)		-	-	81
Tempo de processamento (segundos)		-	-	852

HDNS160 – Ensaio hidrostático com sucção matricial de 160 kPa

TXNS160 – Ensaio triaxial com sucção matricial de 160 kPa

OTI TX NS160 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa

OTI TX+HD NS160 – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa

fo – parcela do valor da função objetivo devido aos ensaios correspondentes

Tabela 4.35 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaise na análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaise		
	Calibração Tradicional	OTI TX NS160	OTI TX+HD NS160
<i>v</i>	0,200	0,097	0,084
<i>M</i>	542,6	472,1	457,5
<i>λ</i>	0,108	0,118	0,075
<i>m</i>	0,819	0,706	0,695
<i>η<sub>1</sub></i>	115,6	74,92	84,78
<i>ψ<sub>2</sub></i>	-2,987	-3,028	-3,034
<i>μ</i>	1,925	2,585	2,578
<i>C</i>	1,28 x 10 <sup>-3</sup>	1,07 x 10 <sup>-3</sup>	0,63 x 10 <sup>-3</sup>
<i>p</i>	1,692	1,553	1,787
<i>h</i>	1,266	1,400	1,416
<i>α</i>	2,023	0,841	0,497
<i>b</i>	0,0023	0,002867	0,004108

OTI TX NS160 – Otimização dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa

OTI TX+HD NS160 – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa

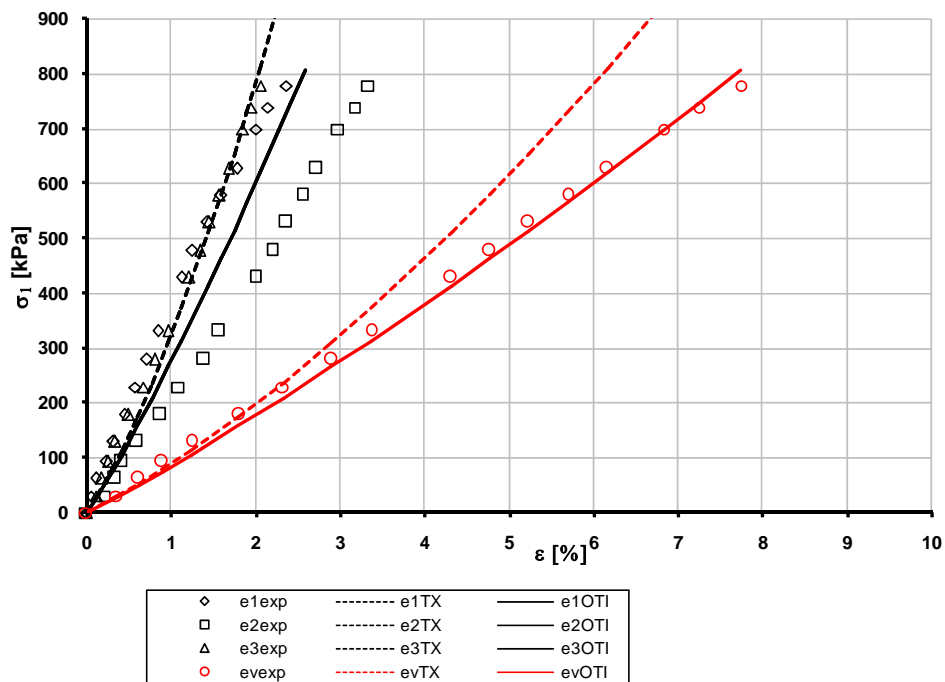


Figura 4.41 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados.

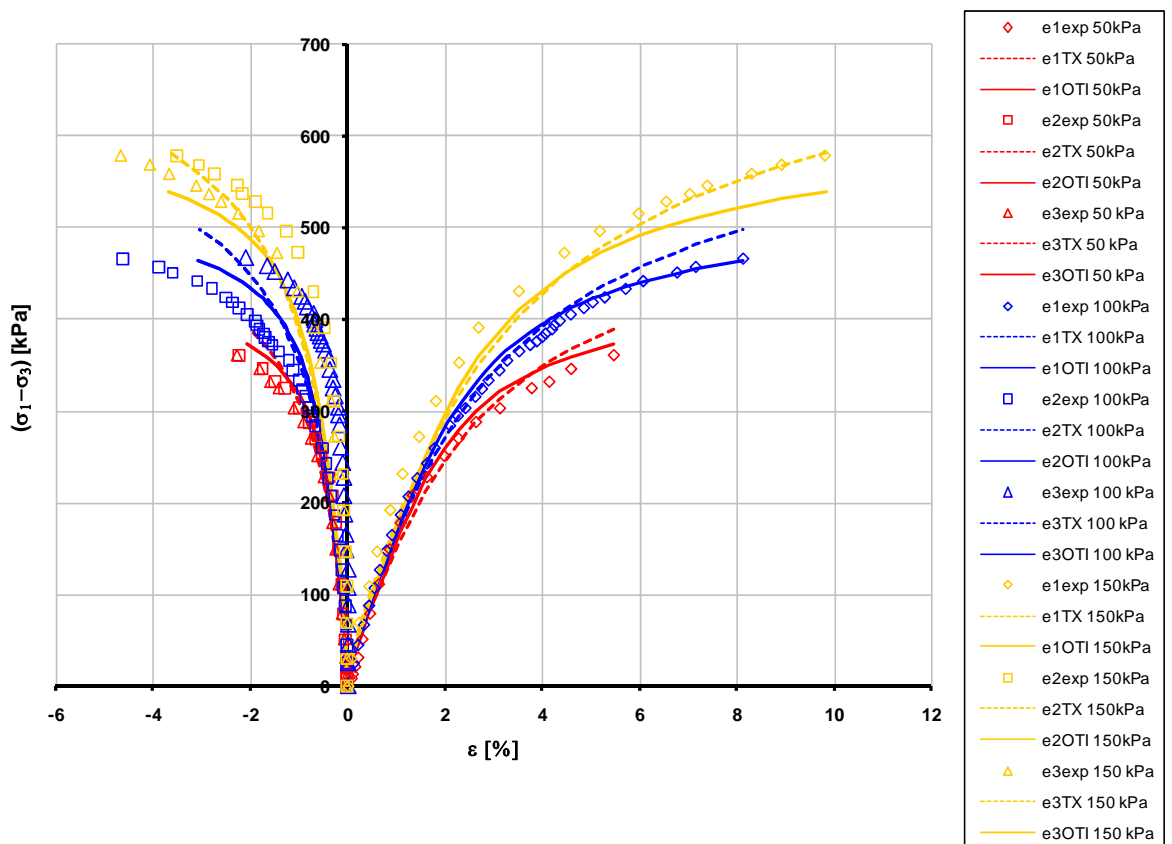


Figura 4.42 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados.

### 4.3.3 Simulação dos ensaios saturados e não-saturados

Para os ensaios saturados e não saturados foram realizadas quatro simulações: na primeira utilizam-se os parâmetros determinados por regressão linear daqueles mais sensíveis do modelo; na segunda utilizam-se os parâmetros determinados por regressão polinomial; na terceira considera-se o valor médio dos parâmetros otimizados; e na última levam-se em conta os parâmetros da otimização apenas dos ensaios saturados.

A Figura 4.43 mostra os parâmetros mais relevantes do modelo Lade-Kim ( $m$ ,  $\eta_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\mu$ ,  $C$ ) para a simulação simultânea dos ensaios saturados e não-saturados.

Os valores dos parâmetros utilizados nas regressões dos parâmetros mais sensíveis encontram-se na Tabela 4.36. As regressões lineares dos parâmetros mais sensíveis são apresentadas nas Figuras de 4.44 a 4.48 e as regressões polinomiais são apresentadas nas Figuras de 4.49 a 4.53.

Nas Tabelas 4.37 e 4.38 resumem-se os resultados das simulações realizadas.

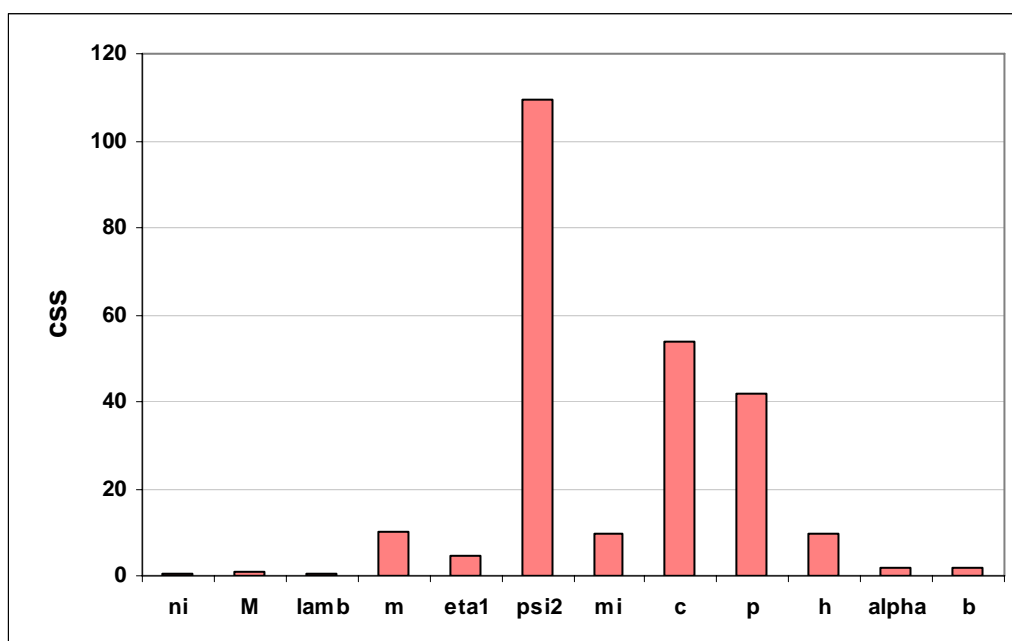


Figura 4.43 – Valores médios dos coeficientes de sensibilidade de escala comparada dos ensaios triaxiais e hidrostáticos saturados e não saturados para os parâmetros do modelo Lade-Kim.

Tabela 4.36 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaiss nas diferentes retroanálises

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaiss			
	Calibração Tradicional	OTI TX+HD SS	OTI TX+HD NS80	OTI TX+HD NS160
$v$	0,200	0,195	0,079	0,084
$M$	542,6	683,7	398,5	457,5
$\lambda$	0,108	0,047	0,030	0,075
$m$	0,819	1,315	0,659	0,695
$\eta_1$	115,6	144,1	77,36	84,78
$\psi_2$	-2,987	-2,700	-2,973	-3,034
$\mu$	1,925	1,622	1,966	2,578
$C$	$1,28 \times 10^{-3}$	$1,12 \times 10^{-3}$	$0,98 \times 10^{-3}$	$0,62 \times 10^{-3}$
$p$	1,692	1,742	1,619	1,787
$h$	1,266	1,951	1,174	1,416
$\alpha$	2,023	1,054	0,753	0,497
$b$	0,0023	-	0,004149	0,004108

OTI TX+HD SS – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados

OTI TX+HD NS80 – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa

OTI TX+HD NS160 – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa

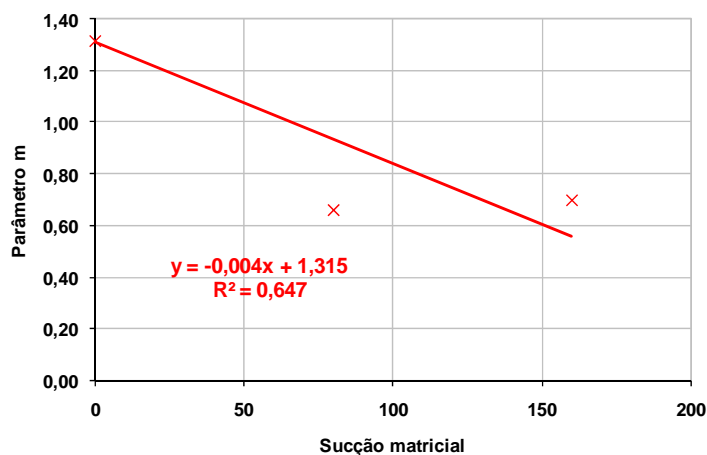


Figura 4.44 – Regressão linear do parâmetro  $m$ .

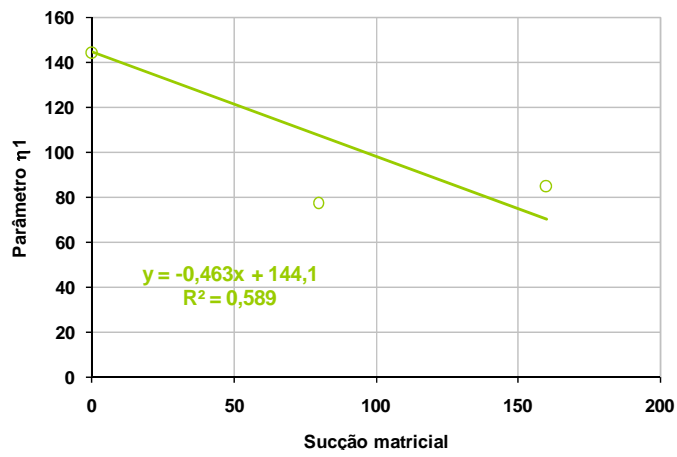


Figura 4.45 – Regressão linear do parâmetro  $\eta_1$ .

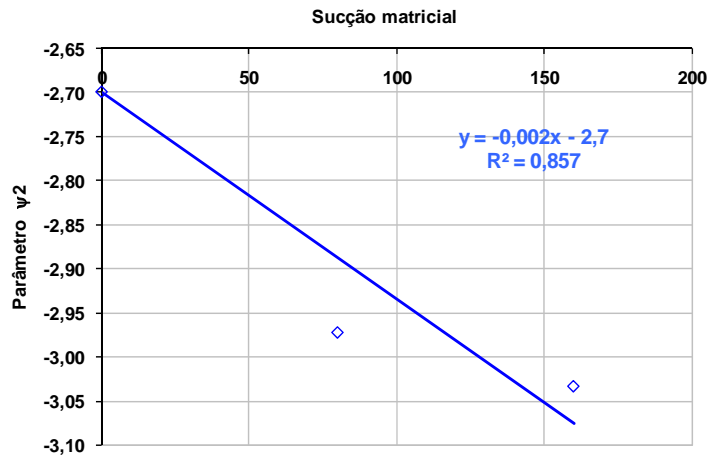


Figura 4.46 – Regressão linear do parâmetro  $\psi_2$ .

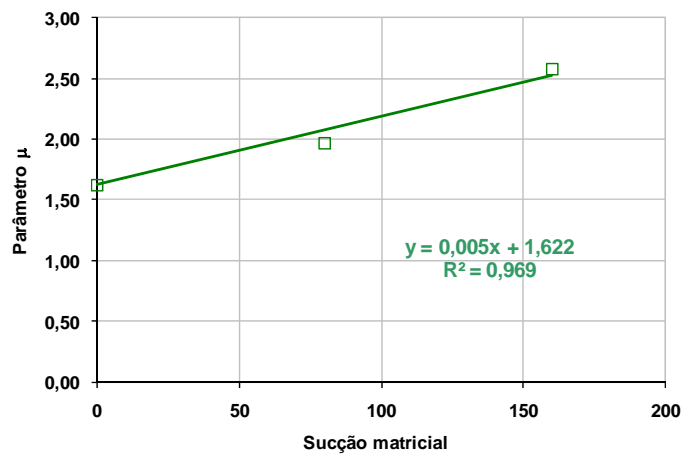


Figura 4.47 – Regressão linear do parâmetro  $\mu$ .

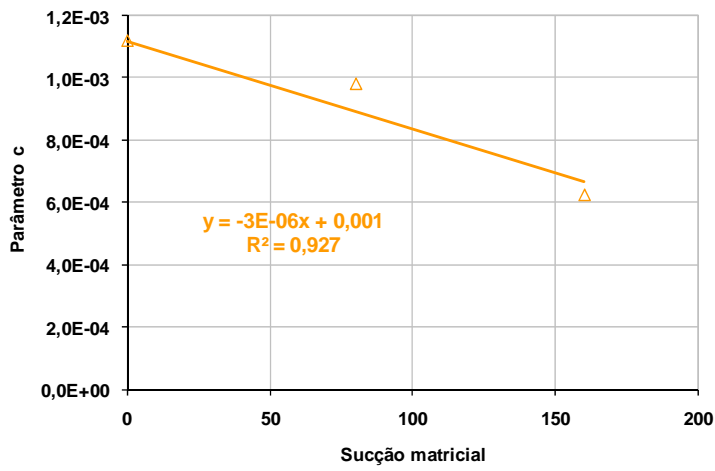


Figura 4.48 – Regressão linear do parâmetro C.

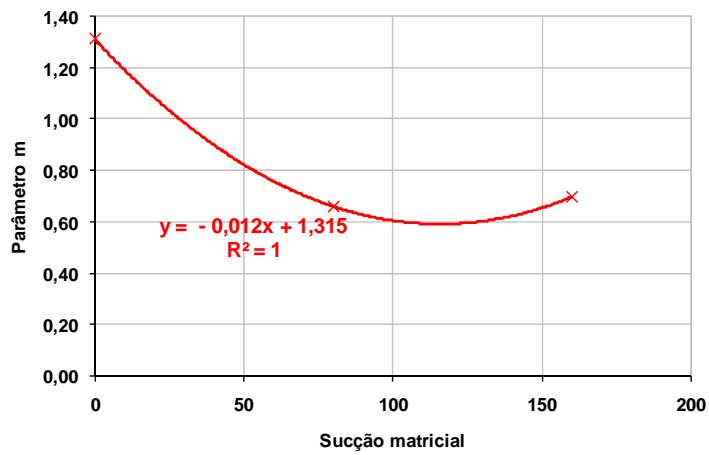


Figura 4.49 – Regressão polinomial do parâmetro m.

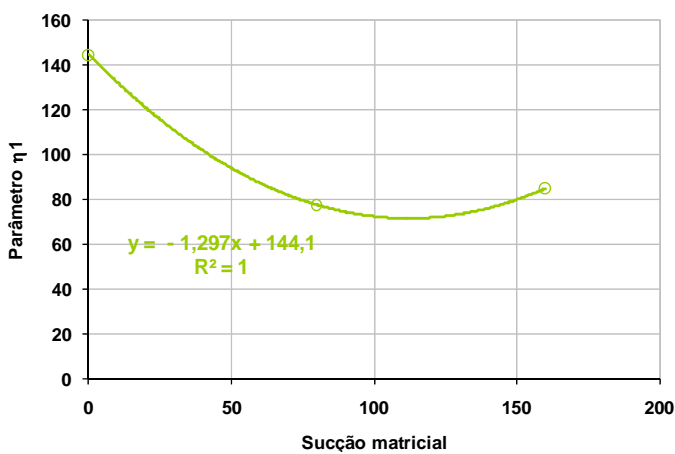


Figura 4.50 – Regressão polinomial do parâmetro  $\eta_1$ .

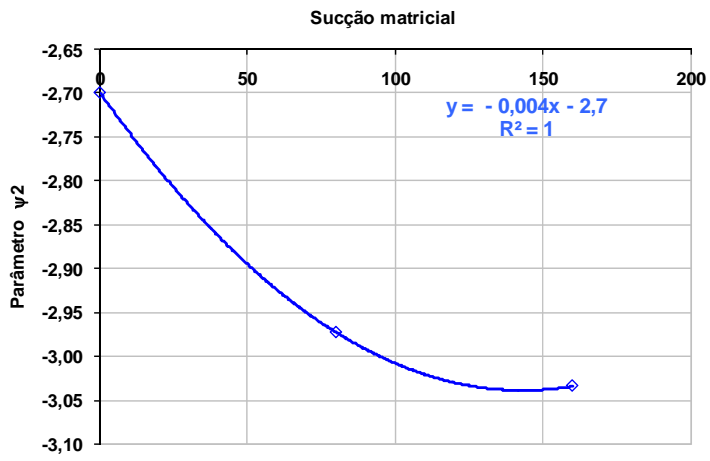


Figura 4.51 – Regressão polinomial do parâmetro  $\psi_2$ .

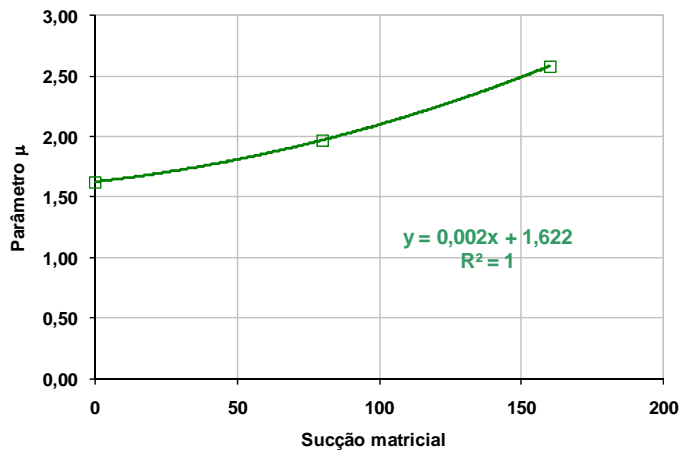


Figura 4.52 – Regressão polinomial do parâmetro  $\mu$ .

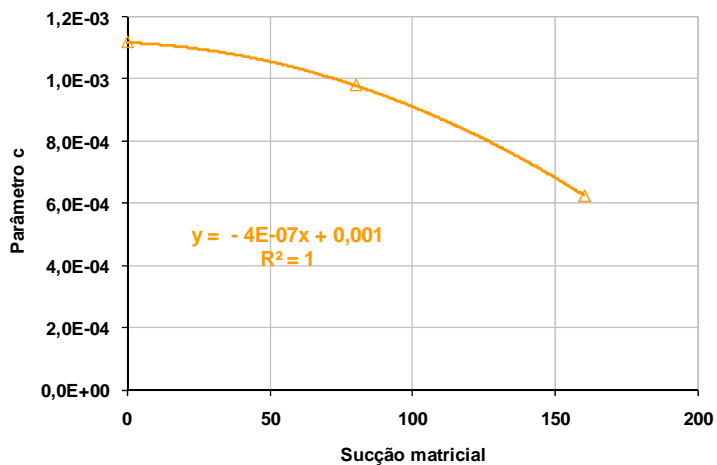


Figura 4.53 – Regressão polinomial do parâmetro C.

Tabela 4.37 – Estatísticas de ajuste das análises inversas dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados e não-saturados

Solo residual jovem de gnaisse		Calib. Tradicional	Regressão linear	Regressão polinomial	Média	OTI TX+HD SS
<i>FO</i>		7,348	4,919	5,603	2,100	10,864
HDSS	fo	0,489	0,003	0,003	0,122	0,003
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,86	0,04	0,04	1,42	0,04
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
TXSS	fo	2,86	0,408	0,408	0,88	0,408
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,16	0,11	0,11	0,18	0,11
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	3,17	0,59	0,59	1,40	0,59
HDNS80	fo	0,152	0,602	0,177	0,108	0,055
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	1,36	5,41	1,58	0,97	0,49
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
TXNS80	fo	0,455	0,166	0,405	0,186	1,409
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	2,02	0,28	1,69	0,11	0,94
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,11	0,13	0,31	0,34	3,31
HDNS160	fo	0,322	2,02	2,17	0,171	0,329
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	1,93	11,96	12,8	1,03	1,98
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	<0,001	1,97	2,49	<0,001	<0,001
TXNS160	fo	3,07	1,72	2,44	0,633	8,66
	<i>erro<sub>σ</sub></i> (%)	5,98	2,93	4,16	0,87	2,69
	<i>erro<sub>ε</sub></i> (%)	0,23	0,16	0,30	0,23	6,14

HDSS – Ensaio hidrostático saturado

TXSS – Ensaios triaxiais saturado

HDNS80 – Ensaio hidrostático com sucção matricial de 80 kPa

TXNS80 – Ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa

HDNS160 – Ensaio hidrostático com sucção matricial de 160 kPa

TXNS160 – Ensaios triaxiais com sucção matricial de 160 kPa

OTI TX+HD SS – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados

fo – parcela do valor da função objetivo devido aos ensaios correspondentes

As simulações com os parâmetros determinados por regressão linear são satisfatórias para os ensaios não saturados com sucção matricial de 80 kPa (Figuras 4.56 e 4.57), mas superestimam os resultados dos ensaios com sucção matricial de 160 kPa (Figuras 4.58 e 4.59).

As simulações com os parâmetros determinados por regressão polinomial não se mostraram satisfatórios para os ensaios não saturados. Os resultados dos ensaios triaxiais com sucção matricial de 80 kPa (Figura 4.63) e os ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa (Figuras 4.64 e 4.65) foram superestimados.

As simulações com os parâmetros médios ajustaram bem os dados dos ensaios saturados (Figuras 4.66 e 4.67) e não saturados com sucção matricial de 80 kPa

(Figuras 4.68 e 4.69). Para sucção matricial de 160 kPa (Figuras 4.70 e 4.71), os resultados foram subestimados. Apesar de o ajuste para os ensaios saturados ter se mostrado pior do que quando esses ensaios são otimizados isoladamente, as simulações foram muito boas.

As simulações com os parâmetros da otimização dos ensaios saturados não se mostraram satisfatórias para os ensaios não saturados, além de subestimar a resposta experimental, tanto dos ensaios com sucção matricial de 80 kPa (Figuras 4.74 e 4.75) quanto daqueles com 160 kPa (Figuras 4.76 e 4.77). Entretanto, essas simulações ainda são melhores do que as calculadas com os parâmetros da calibração tradicional.

Tabela 4.38 – Parâmetros do modelo Lade-Kim para o solo residual jovem de gnaiss para análise inversa dos ensaios saturados e não-saturados

Parâmetros	Solo residual jovem de gnaiss				
	Calib. Tradicional	Regressão linear	Regressão polinomial	Média	OTI TX+HD SS
$v$	0,200	0,195	0,195	0,119	0,195
$M$	542,6	683,7	683,7	513,2	683,7
$\lambda$	0,108	0,047	0,047	0,051	0,047
SS		1,315	1,315		
$m$ NS80	0,819	0,995	0,659	0,889	1,315
NS160		0,675	0,695		
SS		144,1	144,1		
$\eta_1$ NS80	115,6	107,06	77,36	102,08	144,1
NS160		70,02	84,78		
SS		-2,7	-2,700		
$\psi_2$ NS80	-2,987	-2,9	-2,973	-2,90	-2,700
NS160		-3,0	-3,034		
SS		1,622	1,622		
$\mu$ NS80	1,925	2,0	1,966	2,055	1,622
NS160		2,5	2,578		
SS		0,00112	0,00112		
$C$ NS80	0,00112	0,00088	0,00098	0,00091	0,00112
NS160		0,00064	0,00063		
$p$	1,692	1,742	1,742	1,716	1,787
$h$	1,266	1,95	1,95	1,514	1,416
$\alpha$	2,023	1,054	1,054	0,768	0,497
$b$	0,0023	0,00135	0,00135	0,004129	0,004108

SS – ensaios saturados

NS80 – ensaios não saturados com sucção matricial de 80 kPa

NS160 – ensaios não saturados com sucção matricial de 160 kPa

OTI TX+HD SS – Otimização dos ensaios triaxiais e hidrostático saturados

### A) Regressão linear dos parâmetros sensíveis

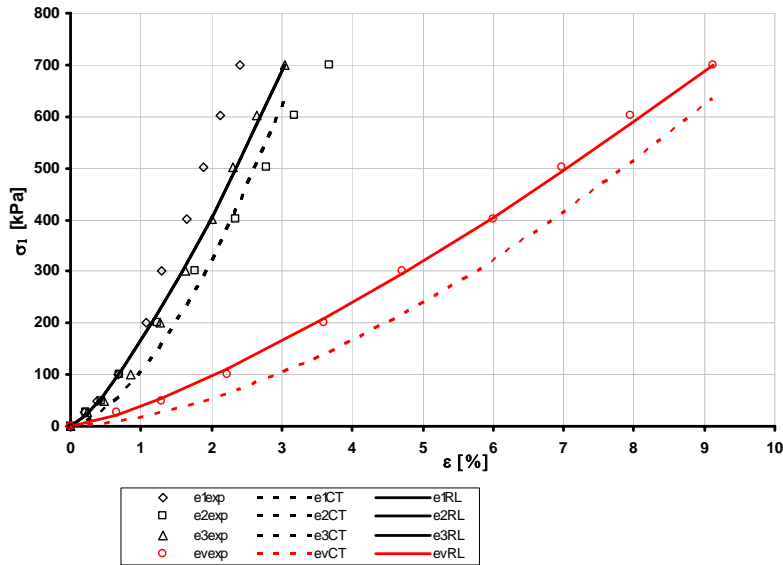


Figura 4.54 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, regressão linear dos parâmetros sensíveis.

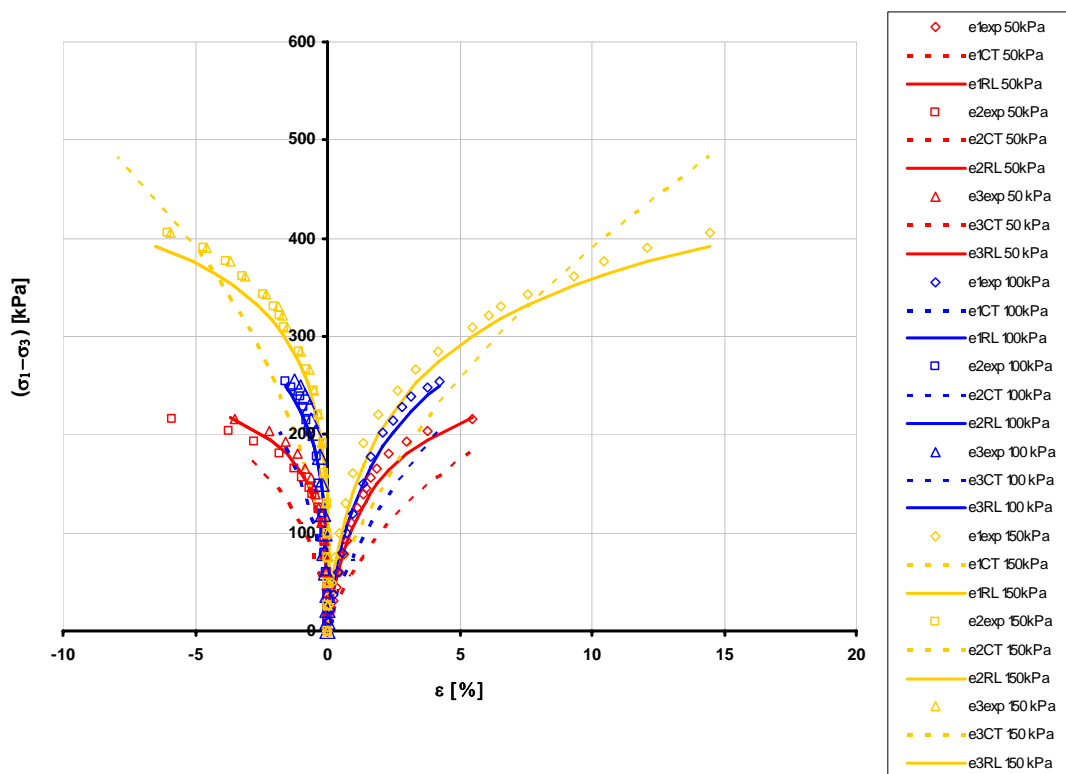


Figura 4.55 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, regressão linear dos parâmetros sensíveis.

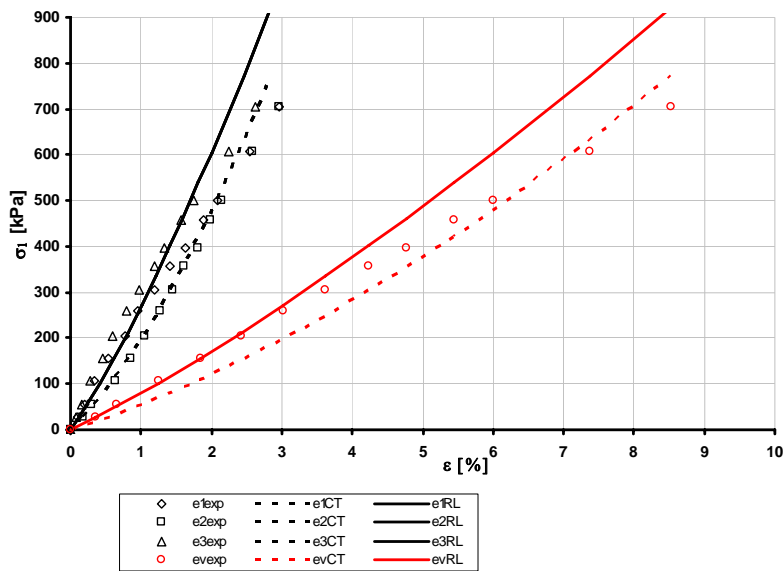


Figura 4.56 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis.

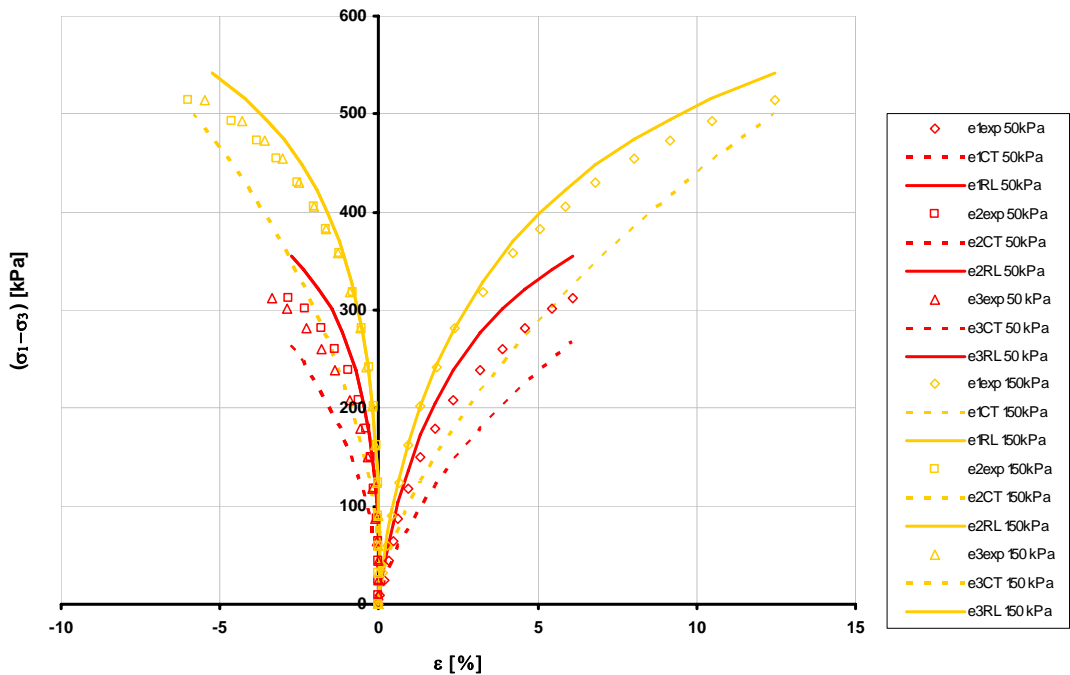


Figura 4.57 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis.

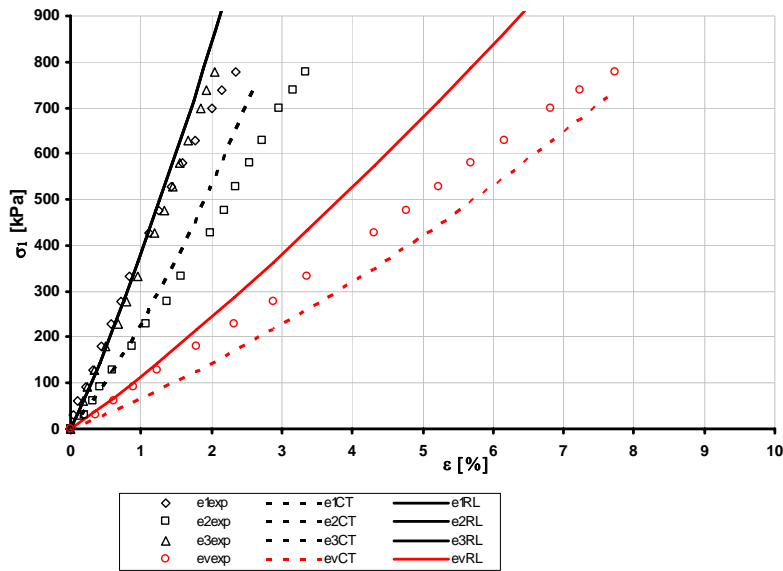


Figura 4.58 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis.

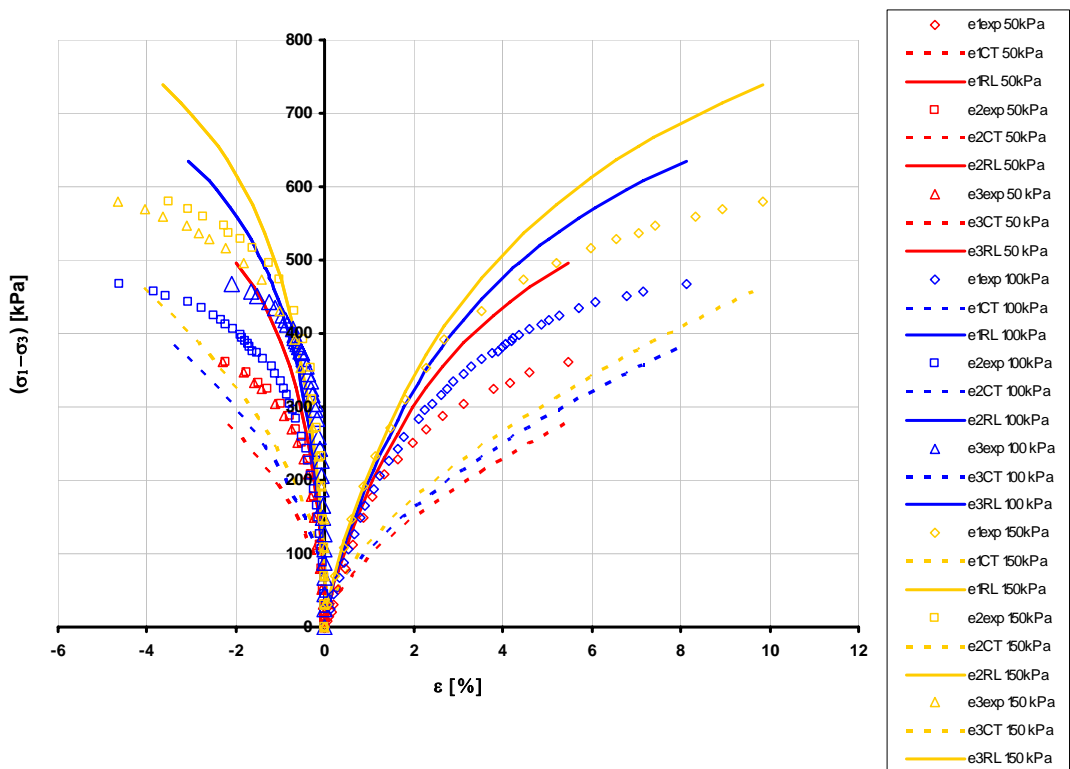


Figura 4.59 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, regressão linear dos parâmetros sensíveis.

B) Regressão polinomial dos parâmetros sensíveis

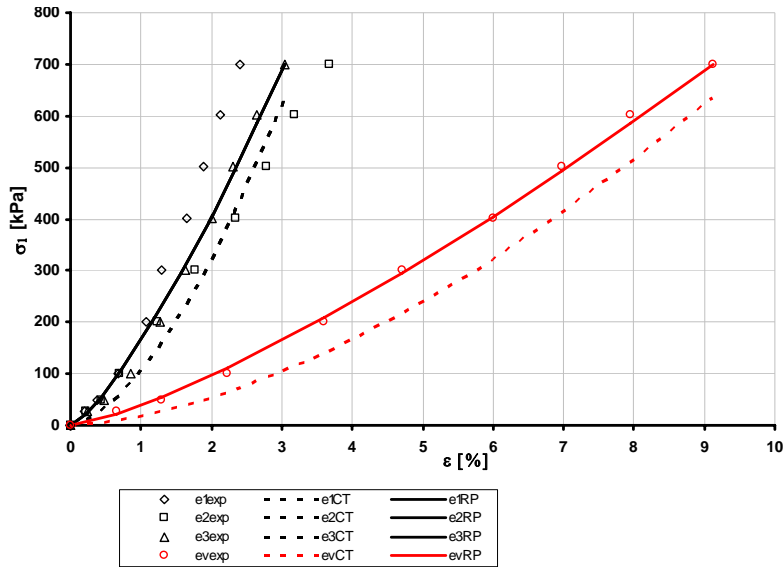


Figura 4.60 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis.

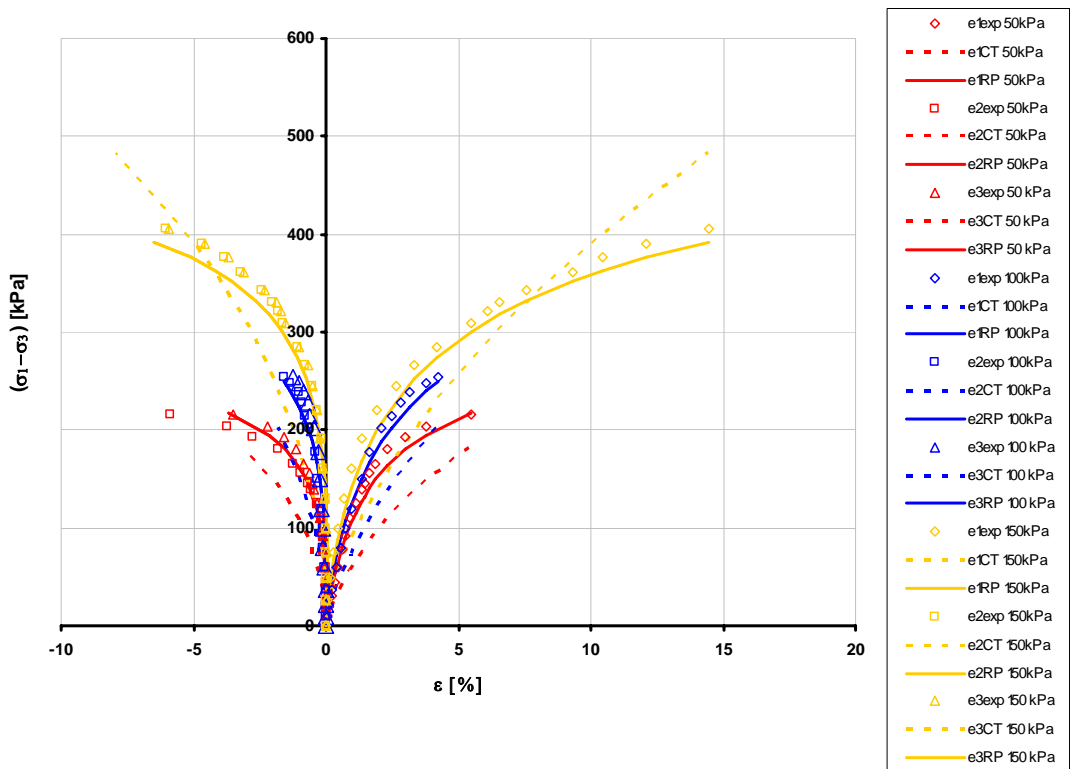


Figura 4.61 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis.

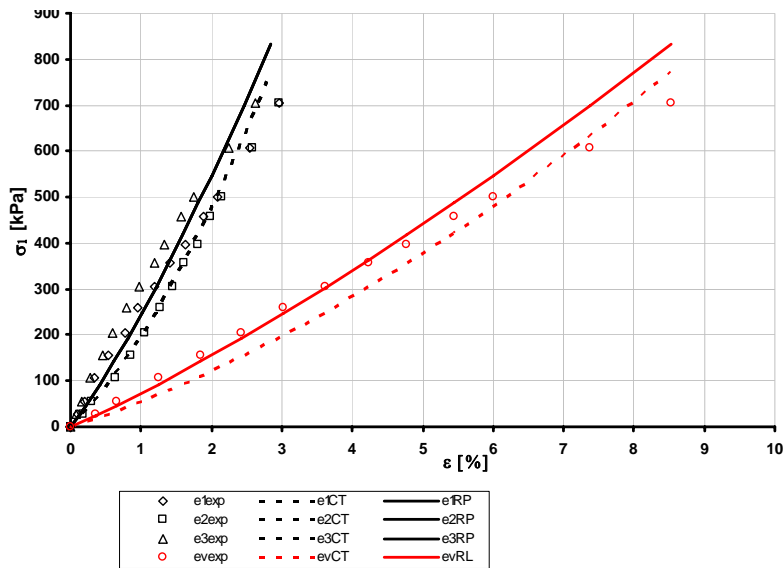


Figura 4.62 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis.

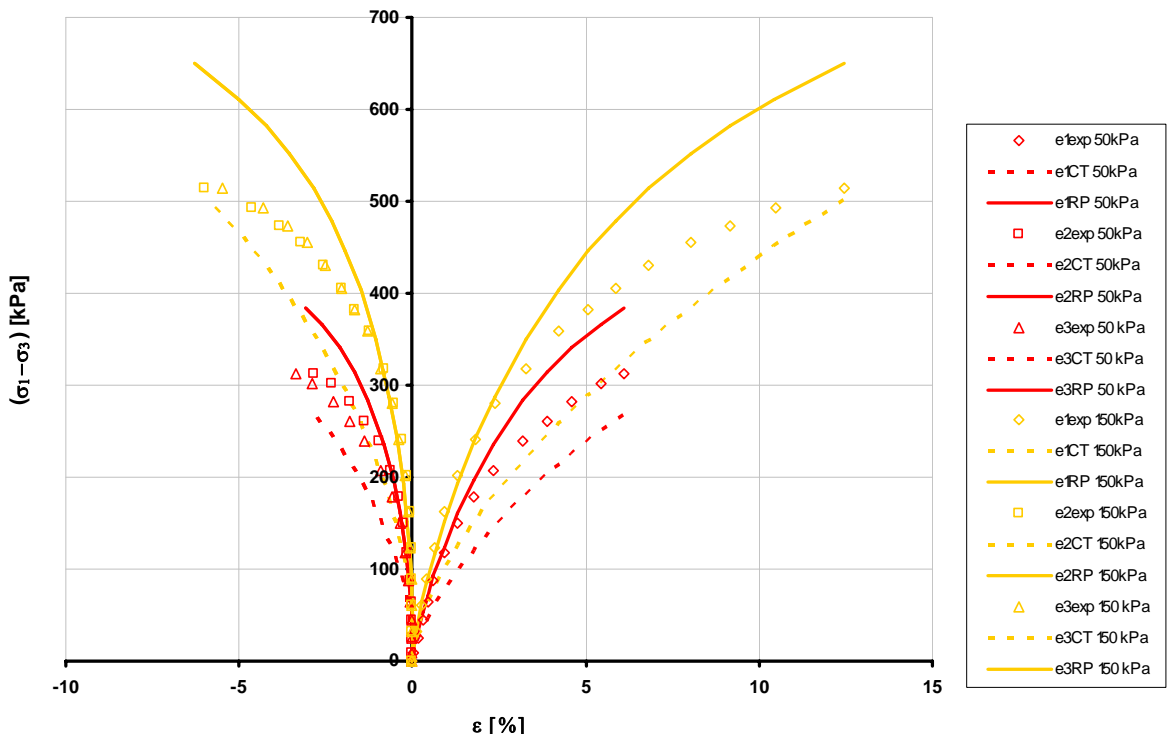


Figura 4.63 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis.

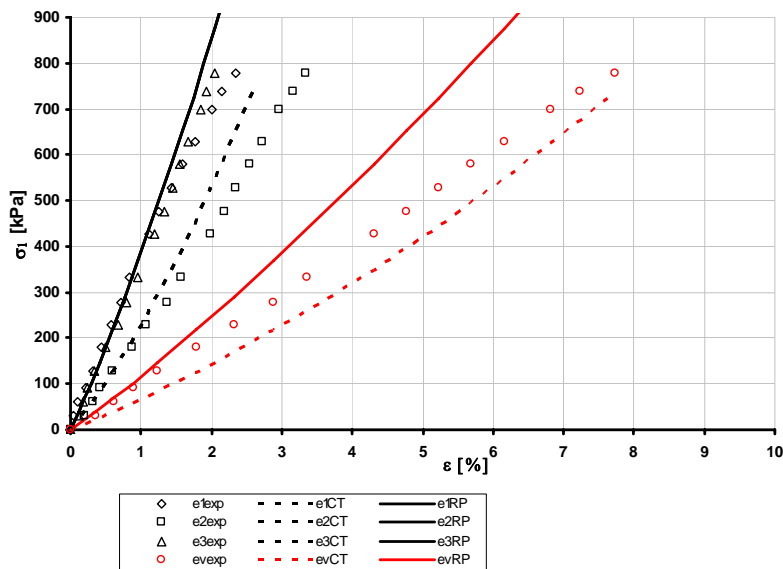


Figura 4.64 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis.

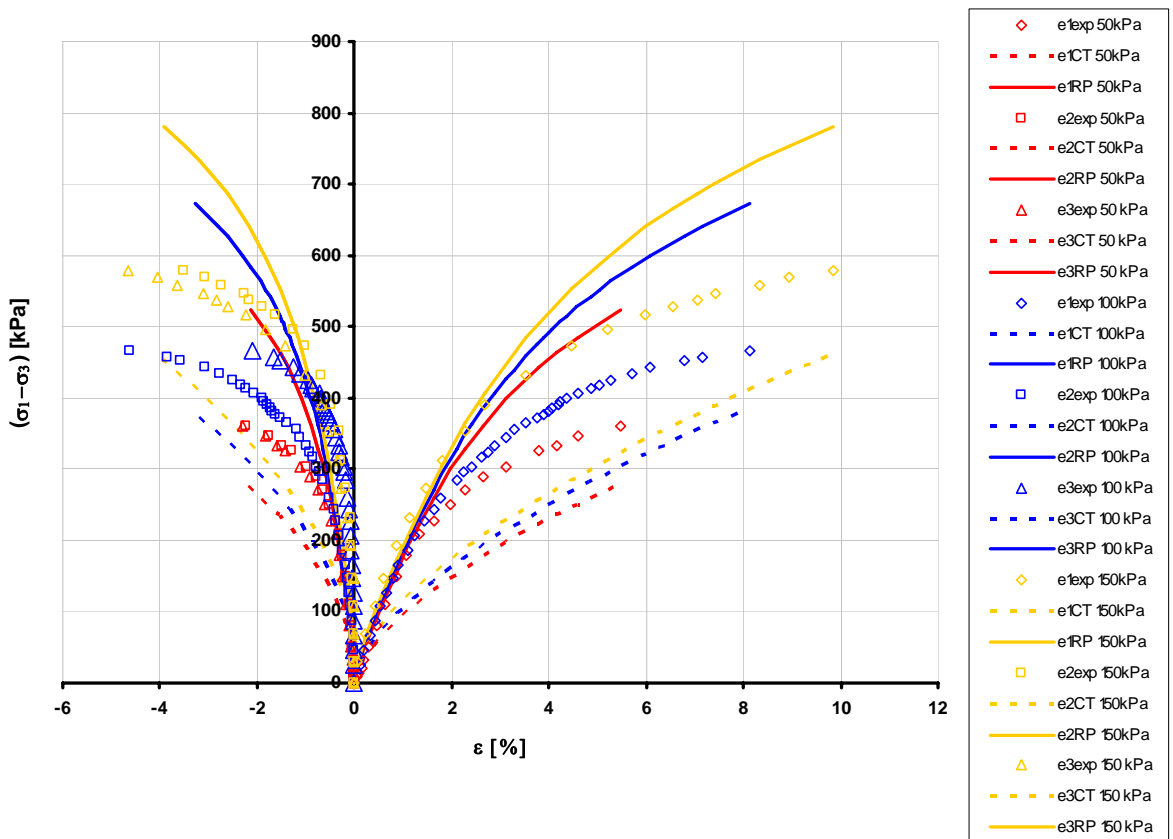


Figura 4.65 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, regressão polinomial dos parâmetros sensíveis.

C) Média dos parâmetros retroanalizados

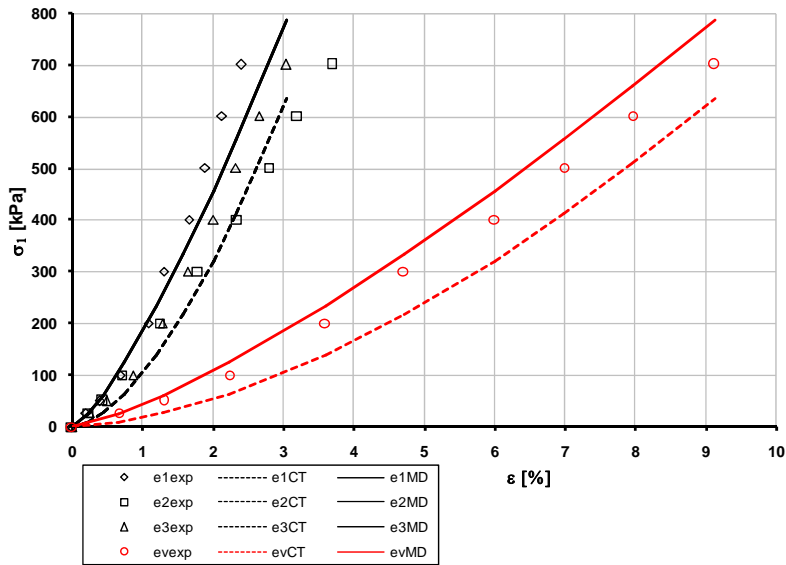


Figura 4.66 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, parâmetros médios.

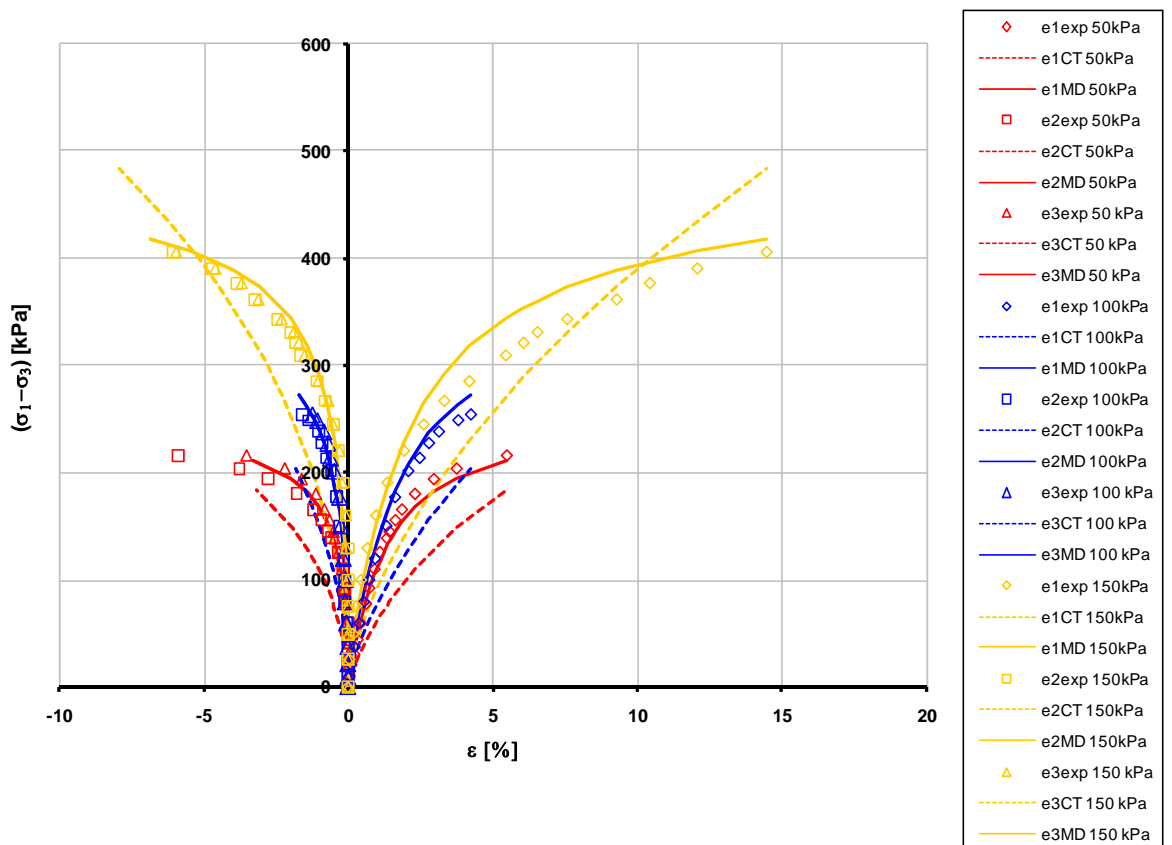


Figura 4.67 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, parâmetros médios.

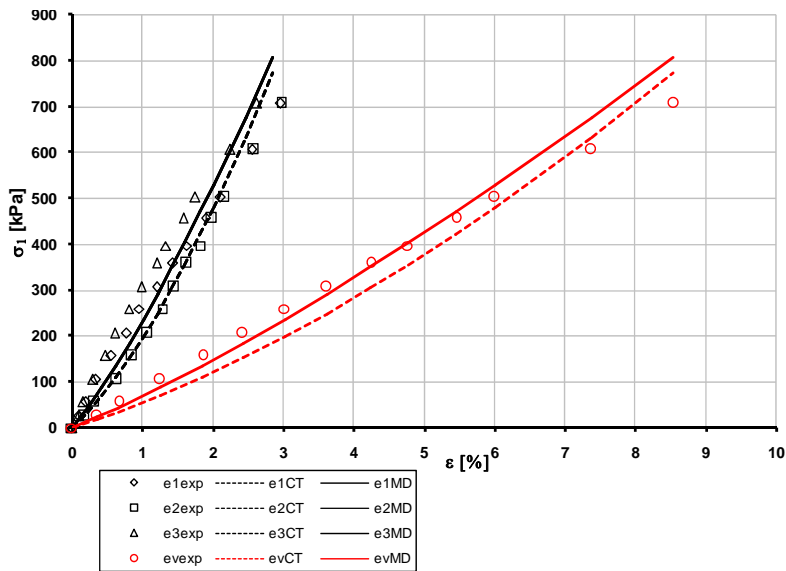


Figura 4.68 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros médios.

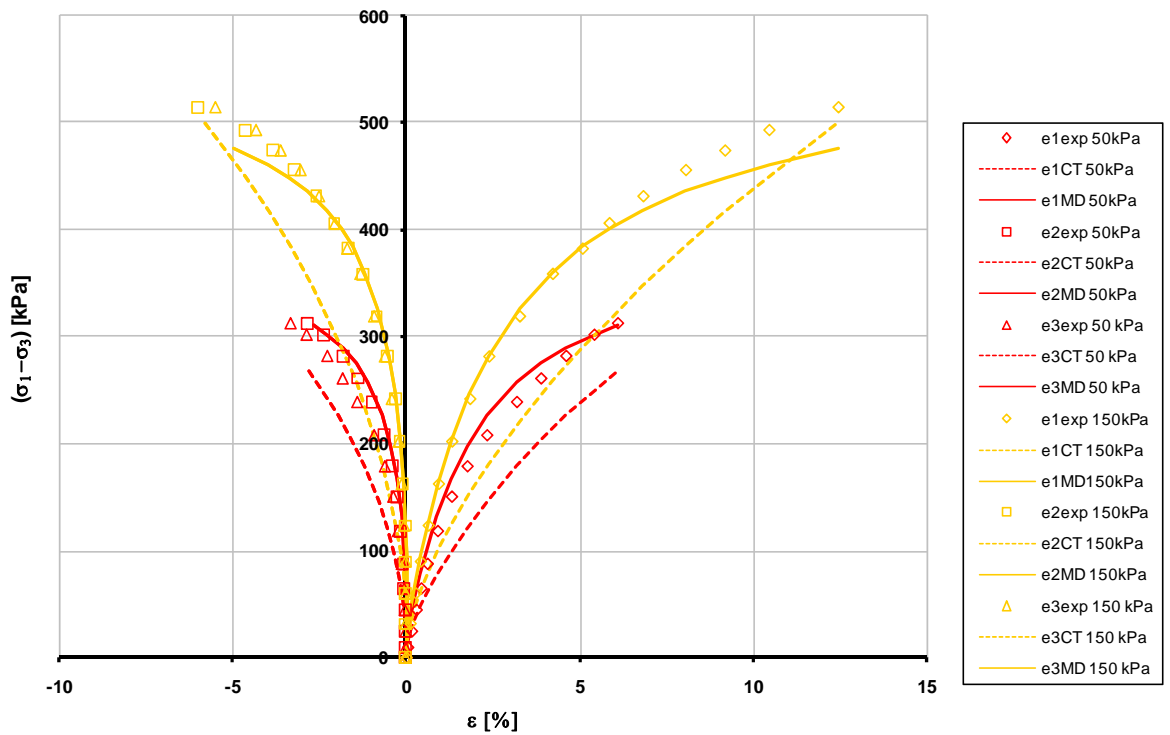


Figura 4.69 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros médios.

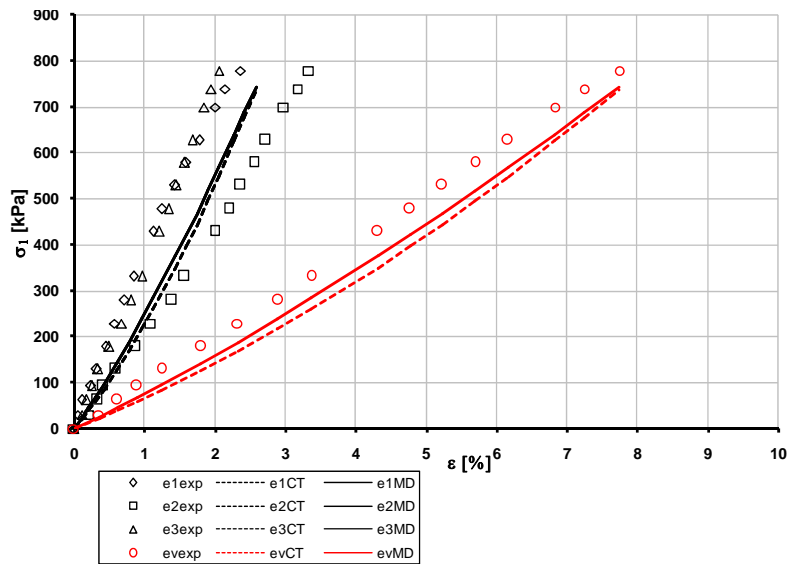


Figura 4.70 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros médios.

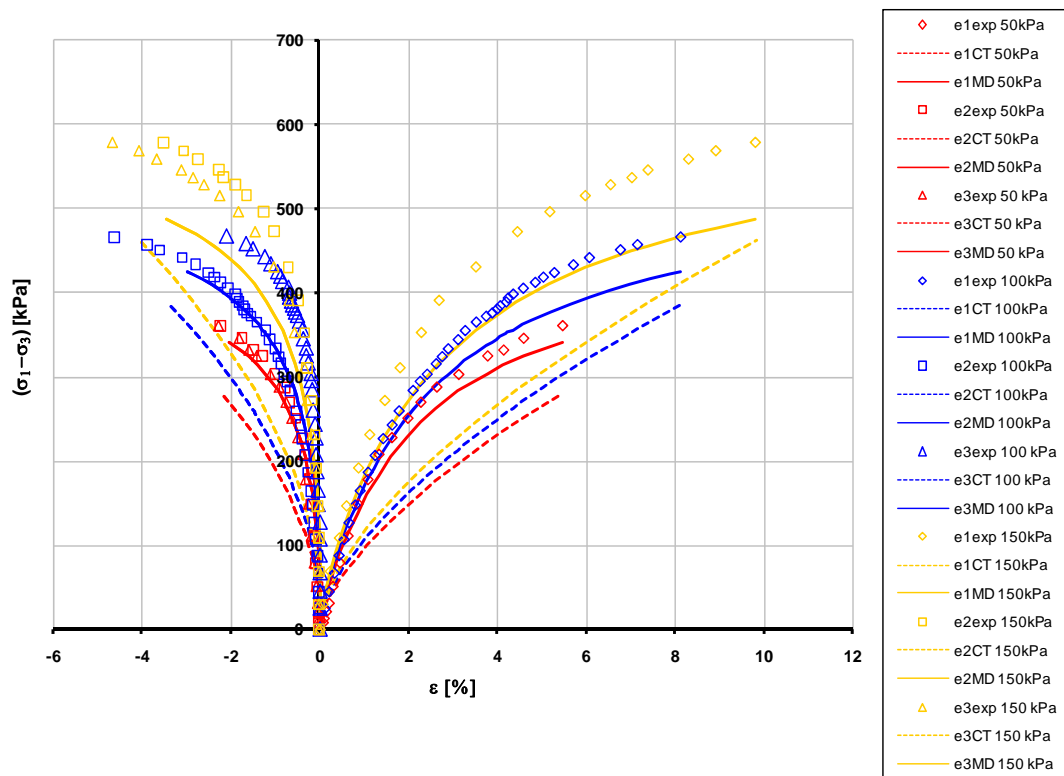


Figura 4.71 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros médios.

D) Parâmetros otimização dos ensaios saturados

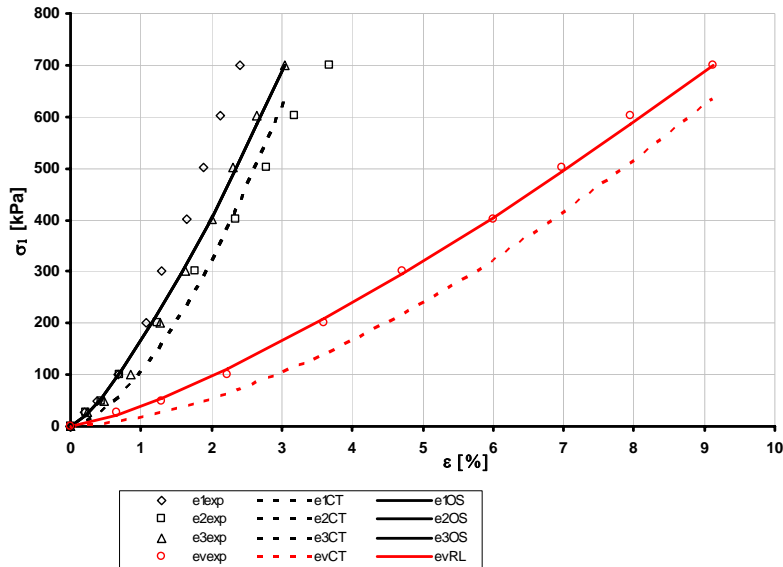


Figura 4.72 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC saturado, parâmetros otimização dos ensaios saturados.

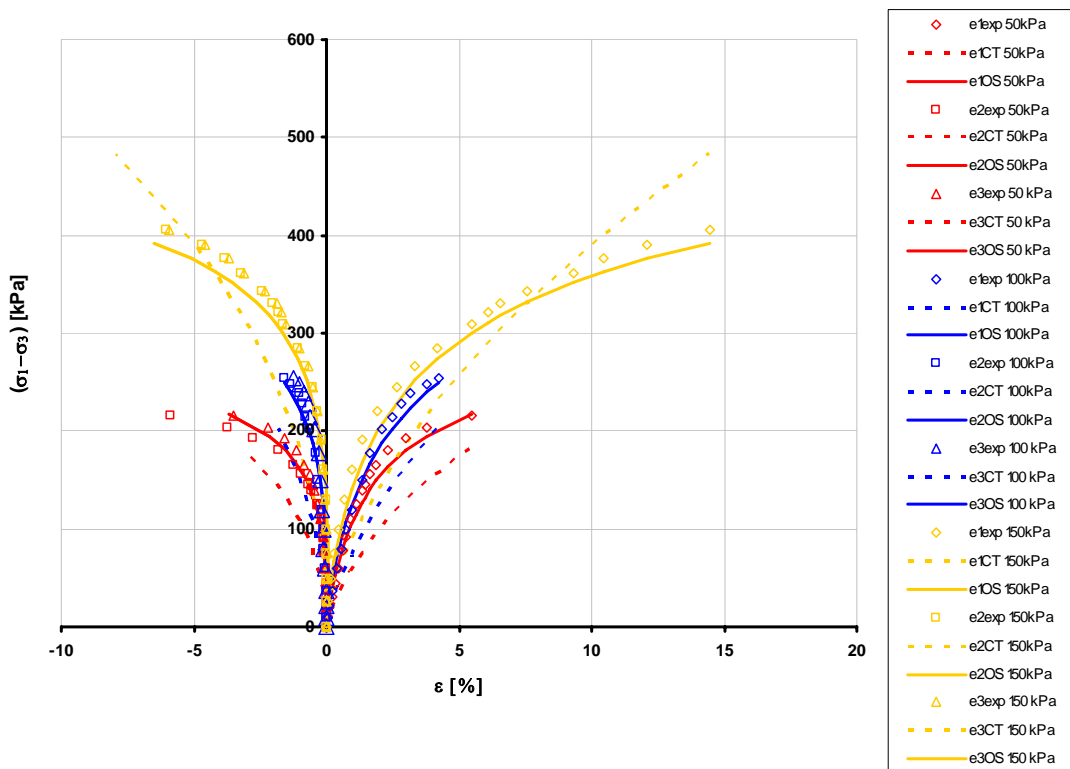


Figura 4.73 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC saturado, parâmetros otimização dos ensaios saturados.

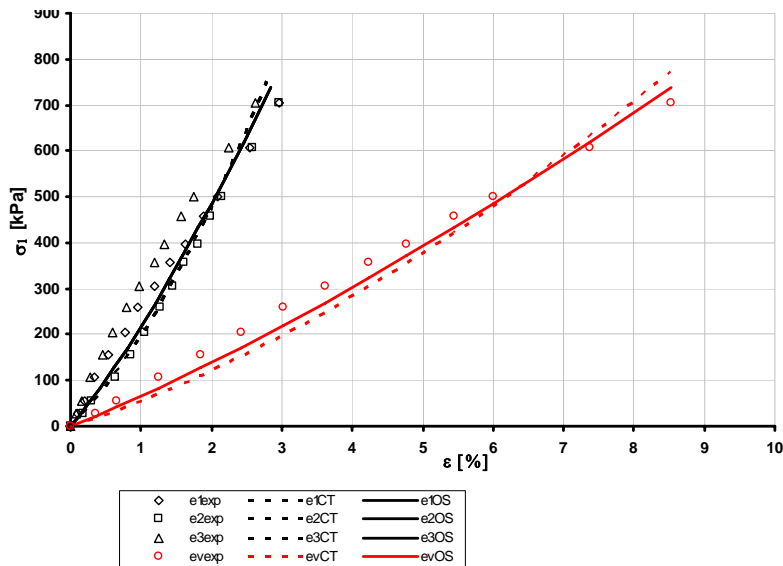


Figura 4.74 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados.

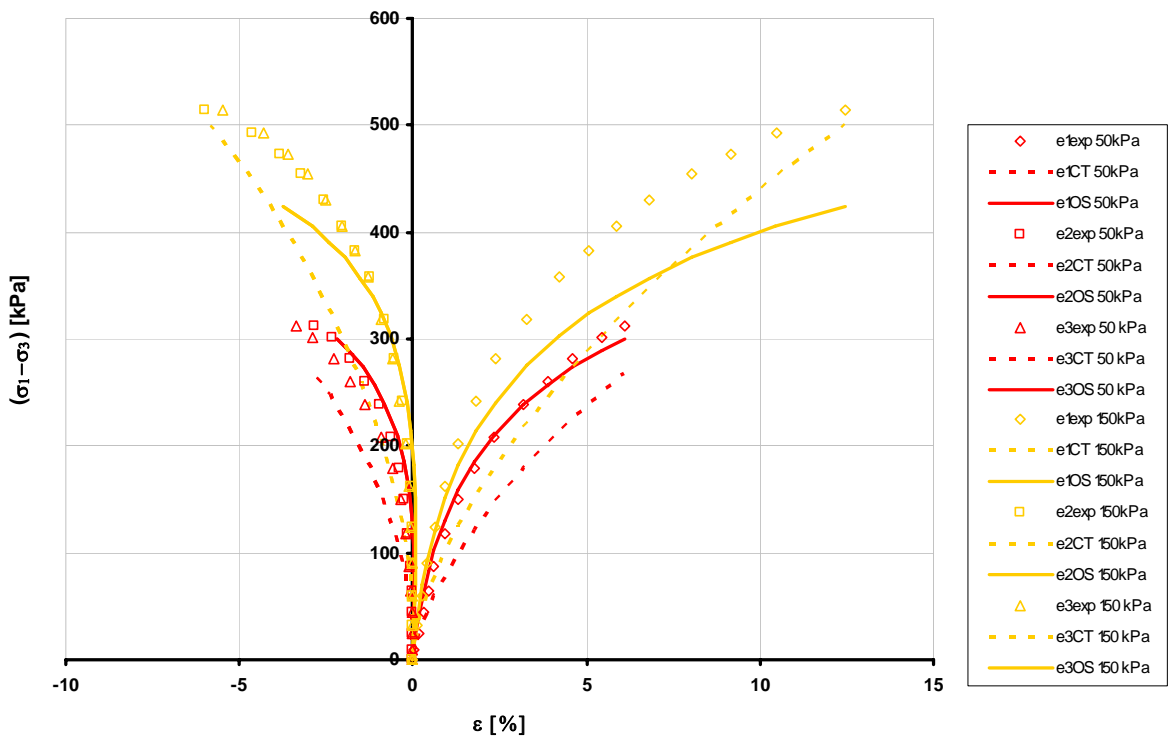


Figura 4.75 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 80 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados.

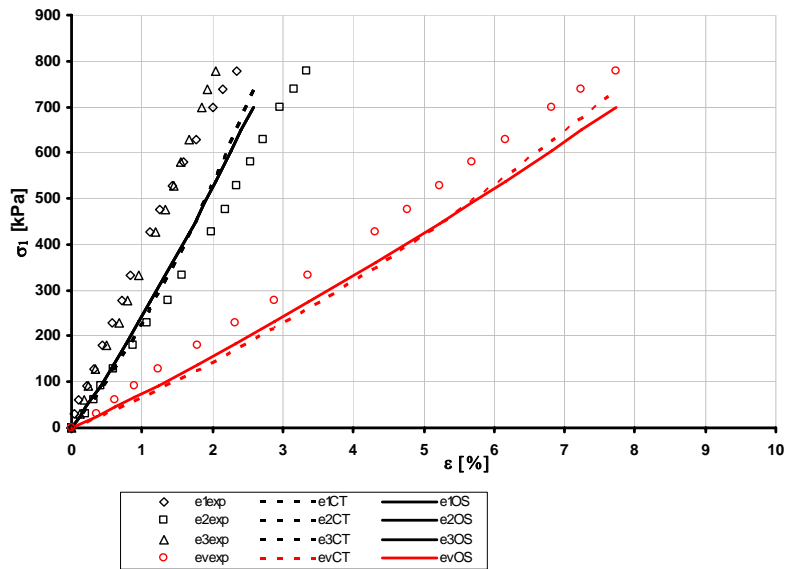


Figura 4.76 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio HC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados.

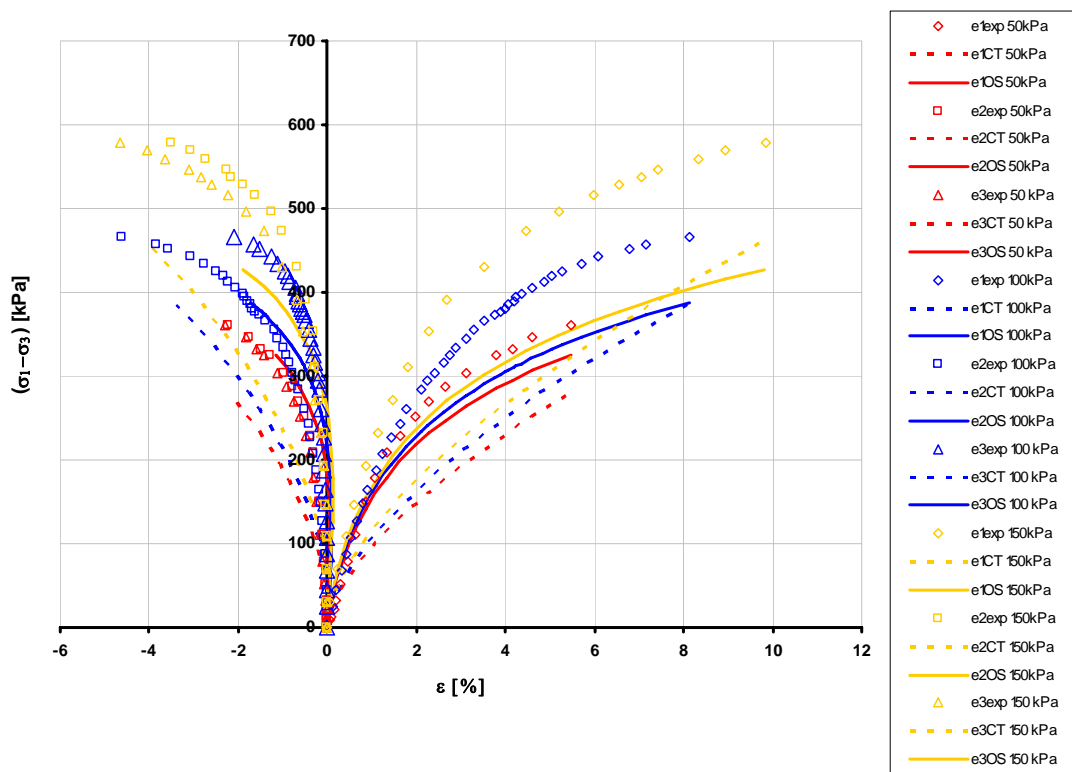


Figura 4.77 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio CTC com sucção matricial de 160 kPa, parâmetros otimização dos ensaios saturados.

#### 4.3.4 Simulação das trajetórias não convencionais

Simulações dos ensaios com trajetórias de tensões não convencionais do solo residual foram realizadas verificando a potencialidade dos parâmetros determinados pela análise inversa dos ensaios saturados e não saturados na representação de outros ensaios.

Nas Figuras 4.78 a 4.80 apresentam-se os resultados das simulações das trajetórias não convencionais.

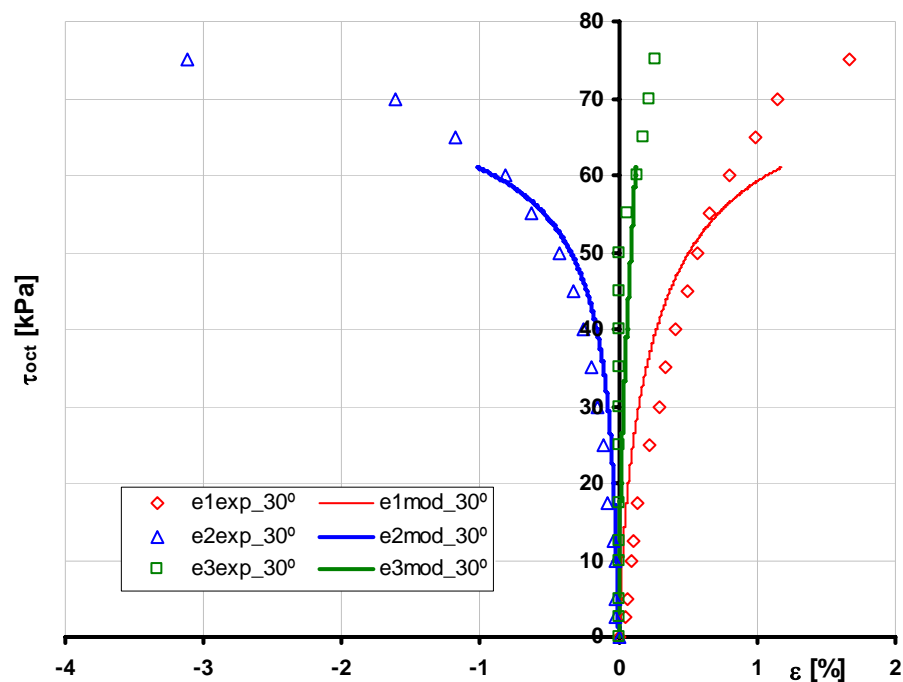
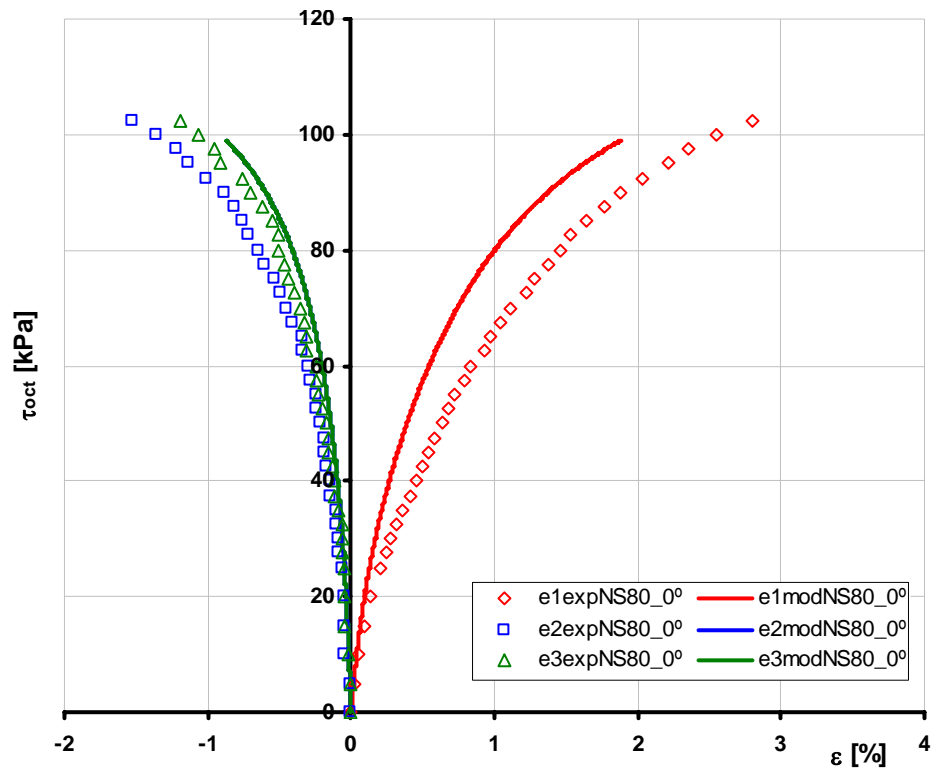
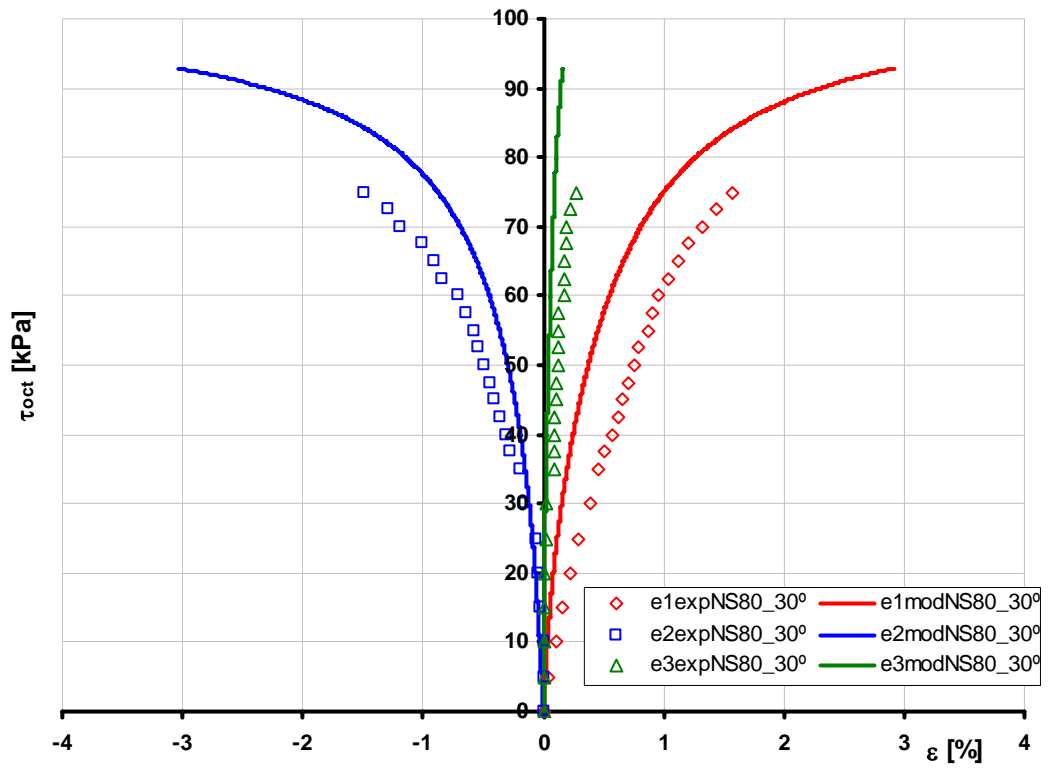


Figura 4.78 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual do ensaio saturado com tensão octaédrica de 100 kPa e ângulo de Lode de 30°, parâmetros da otimização dos ensaios saturados.

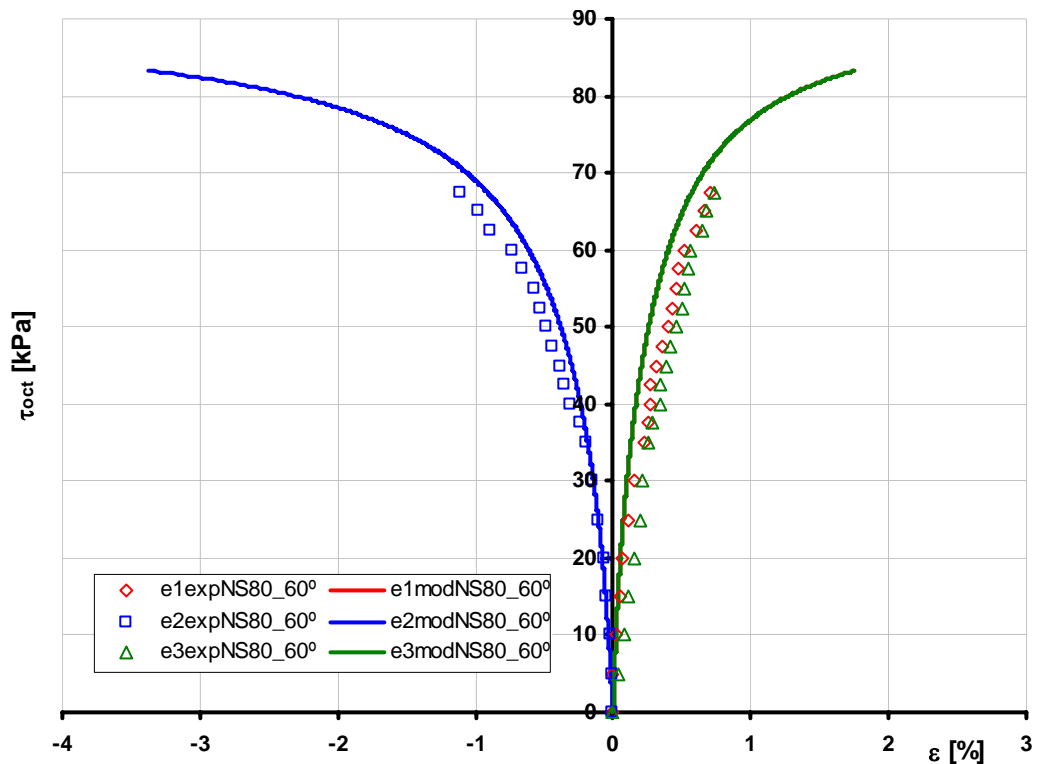
As simulações, realizadas com os parâmetros determinados pela análise inversa com os ensaios triaxiais e hidrostático saturados (Figura 4.78), ajustaram bem os resultados dos ensaios de trajetórias de tensões não convencionais.



(a)



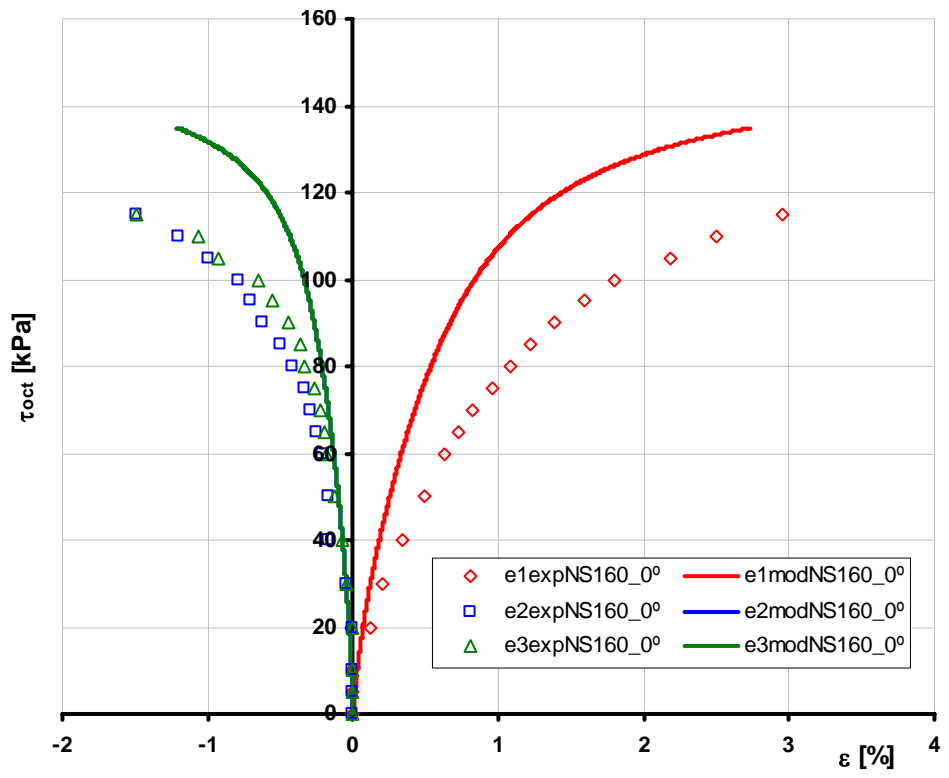
(b)



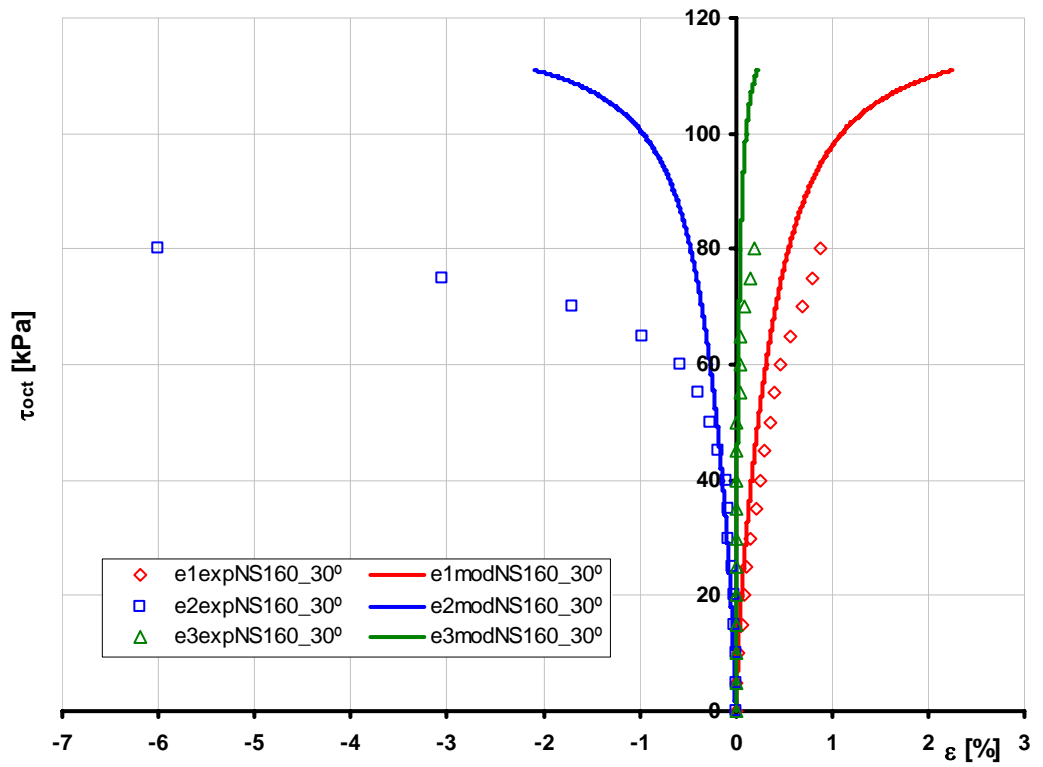
(c)

Figura 4.79 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual dos ensaios com sucção matricial de 80kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode de (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°, parâmetros da otimização dos ensaios com sucção matricial de 80 kPa.

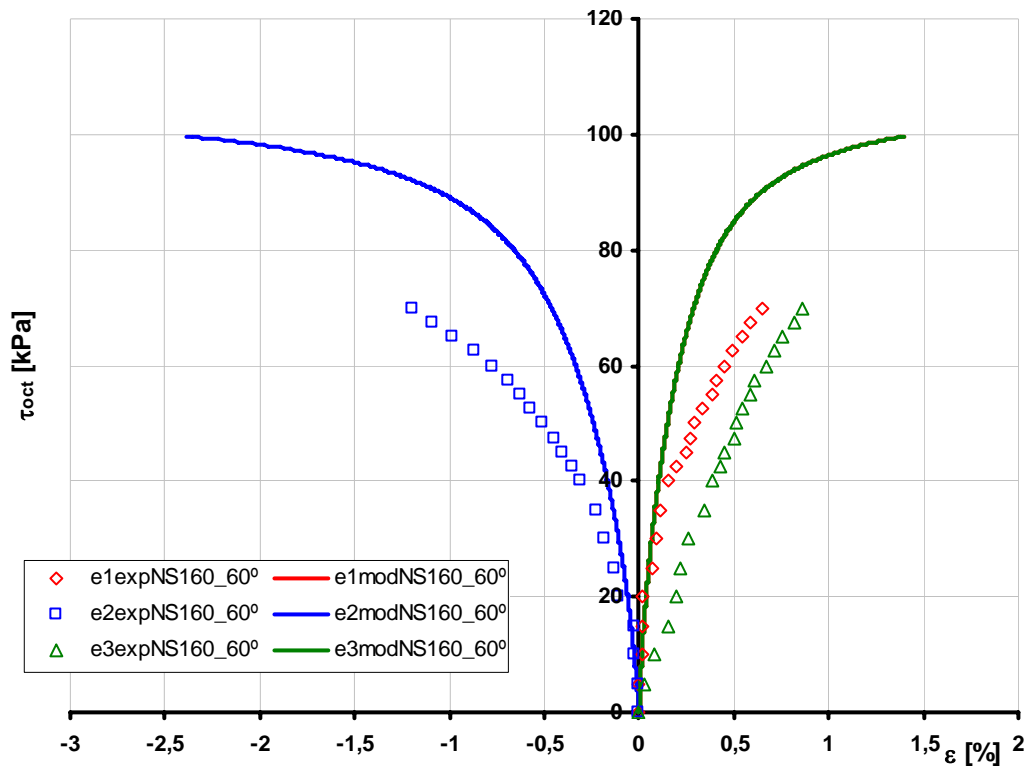
As simulações, realizadas com os parâmetros determinados pela análise inversa com os ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 80 kPa (Figura 4.79), superestimaram os resultados dos ensaios de trajetórias de tensões não convencionais.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.80 – Comparação entre curvas experimentais e numéricas do modelo Lade-Kim para solo residual jovem de gnaiss dos ensaios com sucção matricial de 160kPa, tensão octaédrica de 100 kPa e ângulos de Lode de (a) 0°, (b) 30° e (c) 60°, parâmetros da otimização dos ensaios com sucção matricial de 160 kPa.

As simulações, realizadas com os parâmetros determinados pela análise inversa com os ensaios triaxiais e hidrostático com sucção matricial de 160 kPa (Figura 4.80), superestimaram os resultados dos ensaios de trajetórias de tensões não convencionais.

---

---

## 5. CONCLUSÕES

Nesse trabalho avaliou-se o emprego de análise inversa na calibração de modelos constitutivos de solos a partir de resultados experimentais de laboratório.

Um conjunto de ensaios de triaxiais drenados em areias (LEE e SEED, 1967) foi usado em diferentes procedimentos de calibração para os modelos hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1980) e Lade-Kim (LADE, 1990). Comparações entre resultados numéricos e experimentais mostram a capacidade e as vantagens dos procedimentos de análise inversa na obtenção dos parâmetros.

Foram escolhidos os modelos hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1980), por ser muito utilizado em trabalhos de engenharia e devido a grande variedade de solos para os quais os valores dos seus parâmetros já foram publicados, e o de Lade-Kim (LADE, 1990), por ser capaz de representar um maior número de características relevantes do comportamento de solos.

Estimativas iniciais dos parâmetros dos modelos estudados, obtidas de acordo com os procedimentos de calibração convencionais, foram atualizadas por meio de alguns algoritmos da programação matemática (Newton-Modificado, Gauss-Newton, Levemberg-Marquardt e L-BFGS-B) e de um algoritmo genético.

No procedimento de modelagem inversa, um modelo é calibrado por mudança iterativa das estimativas dos parâmetros até que o valor de uma função objetivo, que quantifica o erro entre resultados observados e computados, é minimizado. Ao final do procedimento têm-se as estatísticas de ajuste do modelo (função objetivo, melhoria do ajuste e erros relativos), que são usadas para avaliar a precisão do ajuste entre dados experimentais e resultados computados numericamente e a eficiência da análise inversa.

Tendo em vista os objetivos propostos na tese, as seguintes conclusões podem ser delineadas:

(1) Em relação à avaliação do uso de técnicas de otimização na calibração de modelos de solos, a partir de resultados experimentais de laboratório concluiu-se que:

- Comparações visuais entre dados medidos e resultados computados com as estimativas iniciais (calibração tradicional) e finais (otimizadas) dos parâmetros dos modelos indicam que os modelos calibrados por análise inversa ajustam melhor os dados do que os modelos calibrados pelos procedimentos tradicionais. Valores positivos de FI (estatística de melhoria do ajuste) comprovaram que a calibração por análise inversa é mais eficiente na definição dos parâmetros do modelo do que os métodos convencionais de estimação.
- Nenhum dos algoritmos de programação matemática mostrou ser mais eficiente do que os outros na calibração dos modelos. Coeficientes de correlação e sensibilidade de escala comparada são estatísticas que devem ser utilizadas para definir um esquema de otimização adequado quando a análise inversa é realizada por meio de algoritmos de regressão. Quando apenas os parâmetros relevantes e não-correlacionados foram atualizados, os resultados prescritos pelos modelos ajustaram os dados experimentais melhor do que quando os parâmetros não correlacionados foram otimizados, confirmando que a sensibilidade de escala comparada é uma poderosa medida estatística na identificação dos parâmetros que mais afetam os resultados dos ensaios.
- Os melhores ajustes foram obtidos para os modelos calibrados pelo algoritmo genético, provavelmente pelo fato de esses algoritmos trabalharem num espaço de busca mais amplo do que dos métodos de programação matemática. Os métodos de programação matemática operam a partir de uma estimativa inicial e utilizam recursos matemáticos para tentar encontrar um mínimo local, já os algoritmos genéticos operam sobre uma população de candidatos à solução e cada indivíduo é avaliado dentro do contexto de toda a população, o que aumenta a probabilidade de achar o mínimo global.

- Diferentes conjuntos de valores de parâmetros, cada um definido por um dos algoritmos, foram capazes de modelar apropriadamente os resultados experimentais. Entretanto, no caso do AG, em que todos os parâmetros foram atualizados, os valores dos parâmetros obtidos sofreram variações mais significativas. A não-unicidade das estimativas vem da natureza não convexa da função objetivo, já que a resposta calculada é gerada por modelos não-lineares.
  - As análises inversas para o modelo hiperbólico foram menos eficientes do que para o modelo Lade-Kim (maiores valores de FI), justificado pelo fato de o modelo elasto-plástico ser mais capaz de descrever o comportamento das areias, e lembrando que o resultado de um processo de otimização depende fortemente da habilidade do modelo escolhido em descrever o comportamento do material. Além disso, se o modelo constitutivo não representa adequadamente a resposta tensão-deformação do problema, então não se pode garantir convergência da otimização para parâmetros realísticos.
- (2) Quanto à melhor maneira de ponderar os dados de entrada na função objetivo conclui-se que:
- Os resultados da análise inversa são sensíveis à maneira que se ponderam as observações. A proposta que normatiza os dados, ou seja, quando os valores das observações são divididos pelo valor máximo de cada ensaio há uma transformação que produz resíduos da mesma ordem de grandeza (entre 0 e 1), foi a que apresentou o melhor ajuste entre os dados experimentais e os modelados.
- (3) O estudo do emprego da análise inversa usando diferentes conjuntos de resultados de laboratório no procedimento de calibração levou às seguintes conclusões:
- As observações dos ensaios hidrostáticos usadas nas análises dos ensaios saturados e não saturados adicionaram novas informações, melhorando o ajuste dos resultados prescritos com os dados experimentais.

- As simulações dos ensaios saturados e não saturados com os parâmetros determinados pela regressão linear e polinomial não são boas apenas para os resultados dos ensaios com sucção matricial de 160 kPa. As simulações com os parâmetros médios das otimizações são capazes de representar bem todos os dados experimentais. Os parâmetros otimizados para os ensaios saturados são insatisfatórios para predizer os ensaios não saturados.
  - Os ensaios não saturados foram simulados razoavelmente bem pelo modelo Lade-Kim adaptado para os solos não-saturados. Não foi possível determinar um conjunto de parâmetros comum para os ensaios saturados e não saturados, mas esse estudo mostra o quanto é promissor esse tipo de modelagem.
- (4) Na identificação dos parâmetros mais significantes na modelagem verificou-se que:
- Para o modelo Lade-Kim os parâmetros da função potencial plástico,  $\psi_2$  e  $\mu$ , e da função de endurecimento,  $C$  e  $p$ , mostraram ser os mais relevantes para a modelagem dos ensaios. Pelo fato de existir uma relação de limite entre  $\psi_2$  e  $m$ , já que,  $\psi_2 > -(27\psi_1 + 3)$  e  $\psi_1 = 0,00155m^{-1,27}$ , atenção também deve ser dada ao parâmetro  $m$ .
  - Os valores dos parâmetros  $\psi_2$  e  $C$  são menores para os ensaios não saturados do que para os ensaios saturados, apresentando uma relação inversamente proporcional com a sucção.
- (5) Na verificação da potencialidade dos parâmetros determinados pela análise inversa representarem ensaios com trajetórias de tensões não convencionais concluiu-se que:
- As trajetórias de tensões não convencionais são bem simuladas, caso os parâmetros determinados pela análise inversa dos ensaios triaxiais e hidrostáticos também ajustem bem os resultados desses ensaios.

De forma geral, os resultados numéricos prescritos pelos parâmetros otimizados ajustaram bem os dados experimentais. Fica claro que algoritmos de procura mais recentes (AG) e relativamente simples podem ser eficientemente usados

para determinar parâmetros de materiais, na calibração de modelos constitutivos numéricos de solo a partir de resultados experimentais. No entanto, apenas os algoritmos da programação matemática fornecem como subproduto a matriz jacobiana que pode ser usada para estimar a qualidade da solução obtida através da matriz de covariância das estimativas ( $C_p$ ).

O uso de algoritmos de otimização na calibração de modelos produz uma estimação automática, menos subjetiva, em menor tempo, fornecendo estatísticas de ajuste usadas para avaliar a adequabilidade do modelo do solo na simulação das respostas experimentais, além de estatísticas dos parâmetros, que podem ajudar na interpretação das características de um modelo.

### **Sugestões para trabalhos futuros**

A metodologia de identificação de parâmetros empregada nesse trabalho poderá ser generalizada para outros tipos de ensaios e também para diferentes modelos constitutivos e, conseqüentemente, ser aplicada a uma grande variedade de problemas em engenharia.

Os parâmetros dos modelos constitutivos de solos são geralmente avaliados baseando-se em resultados de ensaios de laboratório. Entretanto, alguns erros nos valores dos parâmetros podem ser causados por possíveis perturbações em alguma fase dos ensaios, como por exemplo, amassamento durante a extração ou no transporte da amostra. Para contornar essas dificuldades os ensaios *in situ* são recomendados. Dentre esses ensaios encontra-se o ensaio pressiométrico, que estuda a expansão de uma cavidade cilíndrica dentro do solo, atualmente considerado um ensaio rotineiro em projetos geotécnicos. Assim um interessante desafio seria realizar a análise inversa desse tipo de ensaio.

**Softwares sem registro ou patente****1. NW\_model**

*Autor:* A.G. GUIMARÃES

*Descrição:* O programa NW\_model emprega a análise inversa na calibração de modelos constitutivos de solos a partir de resultados experimentais de laboratório. Estimativas iniciais dos parâmetros dos modelos hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1980) e Lade-Kim (LADE, 1990), geralmente obtidas de acordo com os procedimentos de calibração convencionais, podem ser atualizadas por meio de alguns algoritmos da programação matemática (Newton-Modificado, Gauss-Newton e Levemberg-Marquart).

*Linguagem de programação:* FORTRAN.

*Palavras-chave:* Newton-Modificado, Gauss-Newton, Levemberg-Marquart, Modelo hiperbólico, Modelo Lade-Kim, Ensaio triaxiais saturados.

*Áreas do conhecimento:* Modelos Constitutivos de Solos, Análise Inversa.

**2. L-BFGS-B\_model**

*Autor:* A.G. GUIMARÃES

*Descrição:* O programa L-BFGS-B\_model foi desenvolvido para identificação dos parâmetros de modelos constitutivos de solos que produzam a melhor resposta do modelo em relação aos resultados experimentais de laboratório disponíveis. Por meio do algoritmo L-BFGS-B, desenvolvido por ZHU ET AL. (1997), as estimativas iniciais dos parâmetros dos modelos hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1980) e Lade-Kim (LADE, 1990), normalmente determinadas por procedimentos de calibração tradicionais, podem ser atualizadas tornando mínima a diferença entre os dados experimentais e os prescritos pelo modelo escolhido.

*Linguagem de programação:* FORTRAN.

*Palavras-chave:* Método L-BFGS-B, Modelo hiperbólico, Modelo Lade-Kim, Ensaio triaxiais saturados.

*Áreas do conhecimento:* Modelos Constitutivos de Solos, Análise Inversa.

### **3. Sensibilidade\_model**

*Autor:* A.G. GUIMARÃES

*Descrição:* O programa Sensibilidade\_model calcula os coeficientes de sensibilidade comparada e coeficientes de correlação para identificação dos parâmetros relevantes e dos não-correlacionados dos modelos hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1980), Lade-Kim (LADE, 1990) e Lade-Kim para solos não saturados (LAQUINI ET AL., 2007) a partir de resultados experimentais de laboratório.

*Linguagem de programação:* FORTRAN.

*Palavras-chave:* Sensibilidade, Modelo hiperbólico, Modelo Lade-Kim, Modelo Lade-Kim para solos não saturados, Ensaio de laboratório.

*Áreas do conhecimento:* Modelos Constitutivos de Solos, Análise Inversa.

### **4. GA\_model**

*Autor:* A.G. GUIMARÃES

*Descrição:* O programa GA\_model usa a estratégia evolutiva Algoritmo Genético para calibração dos modelos hiperbólico (DUNCAN ET AL., 1980), Lade-Kim (LADE, 1990) e Lade-Kim para solos não saturados (LAQUINI ET AL., 2007) a partir de resultados experimentais de laboratório. O objetivo é encontrar os melhores parâmetros do modelo que minimizam o erro entre as curvas simuladas pelo modelo e os resultados de ensaios de laboratório.

*Linguagem de programação:* FORTRAN.

*Palavras-chave:* Algoritmo genético, Modelo hiperbólico, Modelo Lade-Kim, Modelo Lade-Kim para solos não saturados, Ensaio triaxiais e hidrostáticos, Ensaio saturados e não saturados.

*Áreas do conhecimento:* Modelos Constitutivos de Solos, Análise Inversa.

Esses programas foram desenvolvidos em função das necessidades específicas para a execução do projeto de pesquisa de doutorado.

**Calibração Tradicional do Modelo Hiperbólico**

Os parâmetros do modelo hiperbólico podem ser calculados usando-se apenas os resultados de ensaios de triaxiais convencionais.

Uma planilha de EXCEL foi desenvolvida para realizar a calibração tradicional. Os traçados das retas foram realizados por regressão linear para que o procedimento de identificação dos parâmetros fosse menos subjetivo.

Os parâmetros da hipérbole ( $a = 1/E_i$  e  $1/b = (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ ) são determinados através de um ajuste linear dos pontos de um ensaio de laboratório desenhados num gráfico em que no eixo vertical representa-se os valores de  $\varepsilon_1 / (\sigma_1 - \sigma_3)$  e no eixo horizontal representa-se valores de  $\varepsilon_1$  (Figura B.1).

Os parâmetros  $c$  (coesão) e  $\phi$  (ângulo de atrito) são determinados pela envoltória de ruptura de Mohr-Coluomb (Figura B.2).

Com os parâmetros  $a$  e  $b$  variam com a tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ), o parâmetro  $Rf$  é tomado como o valor médio e os parâmetros  $K$  e  $n$  são, respectivamente, o intercepto e a inclinação da reta log-log  $E_i / pa$  versus  $\sigma_3 / pa$  (Figura B.3).

Os parâmetros  $K_b$  e  $m$  são obtidos do gráfico log-log como apresentado na Figura B.4. Obtém-se  $m$  pela inclinação da reta que melhor ajusta os pontos plotados e  $K_b$  pelo intercepto dessa reta.

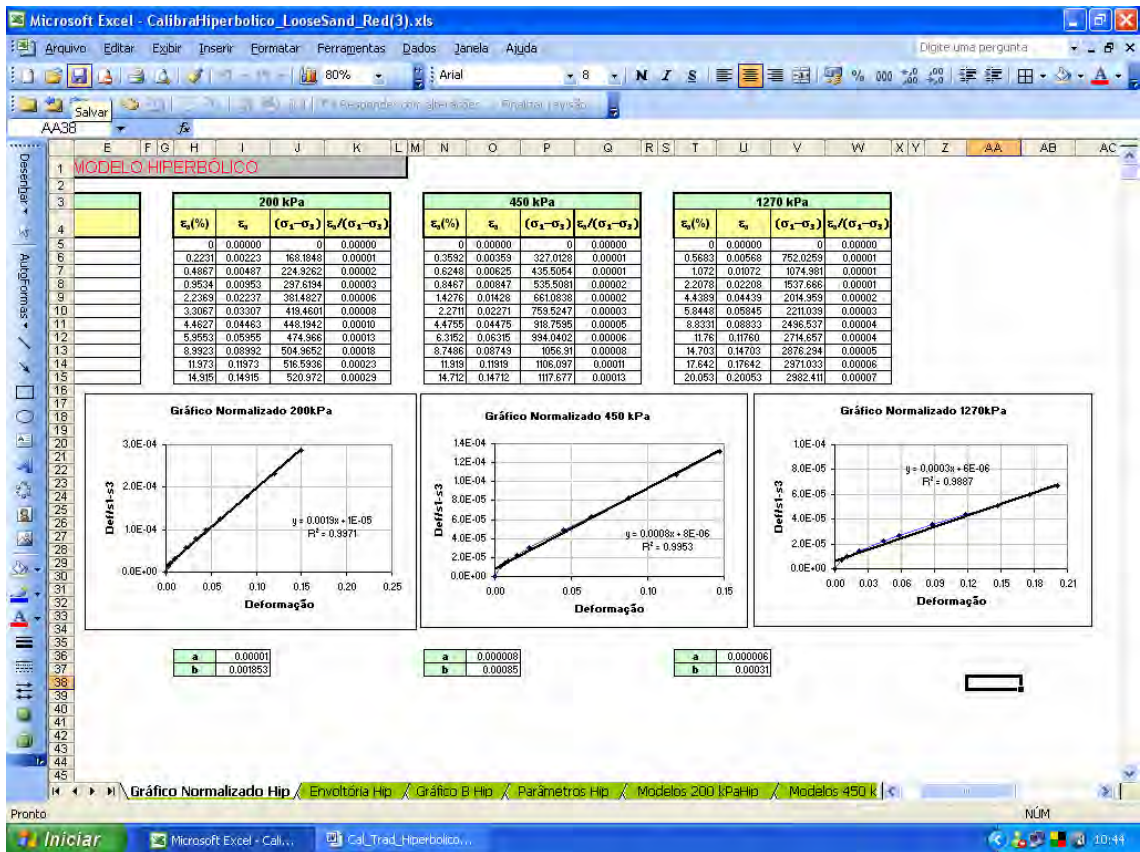


Figura B.1 – Planilha com os gráficos normalizados do modelo hiperbólico.

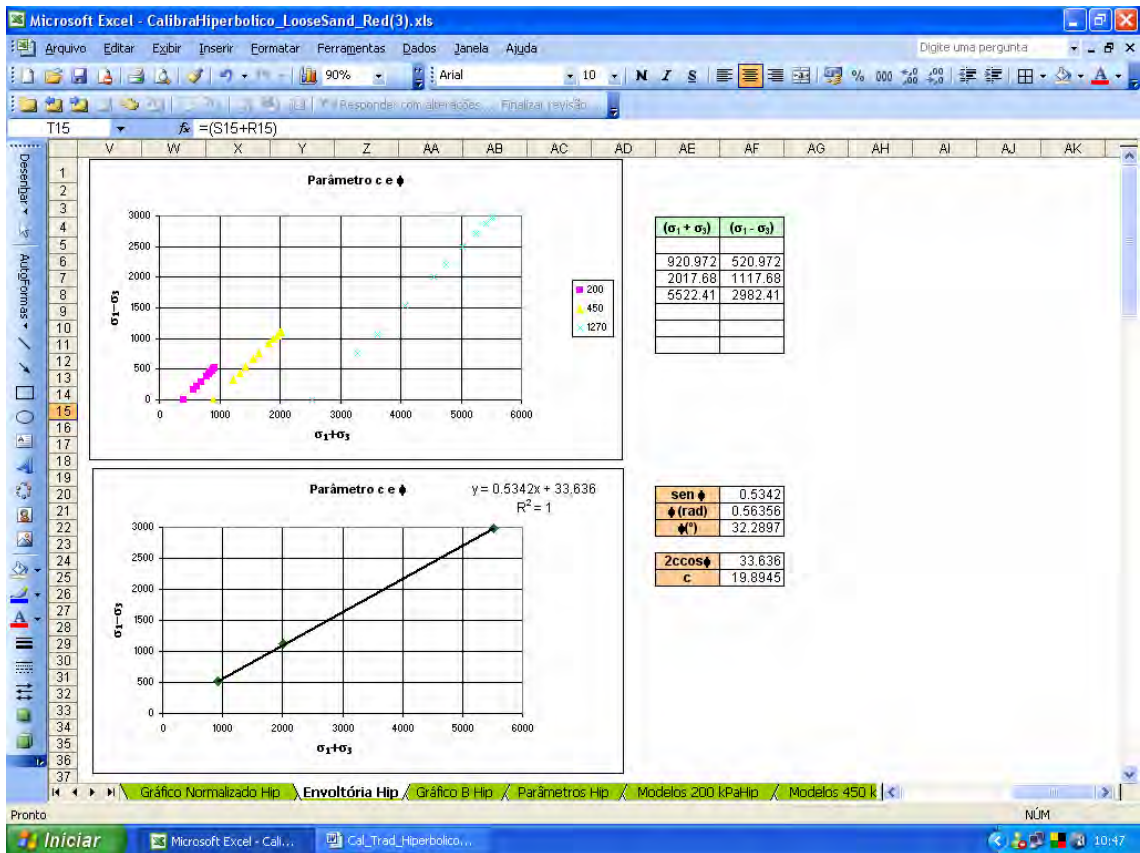


Figura B.2 – Planilha para os parâmetros C e  $\phi$  do modelo hiperbólico.

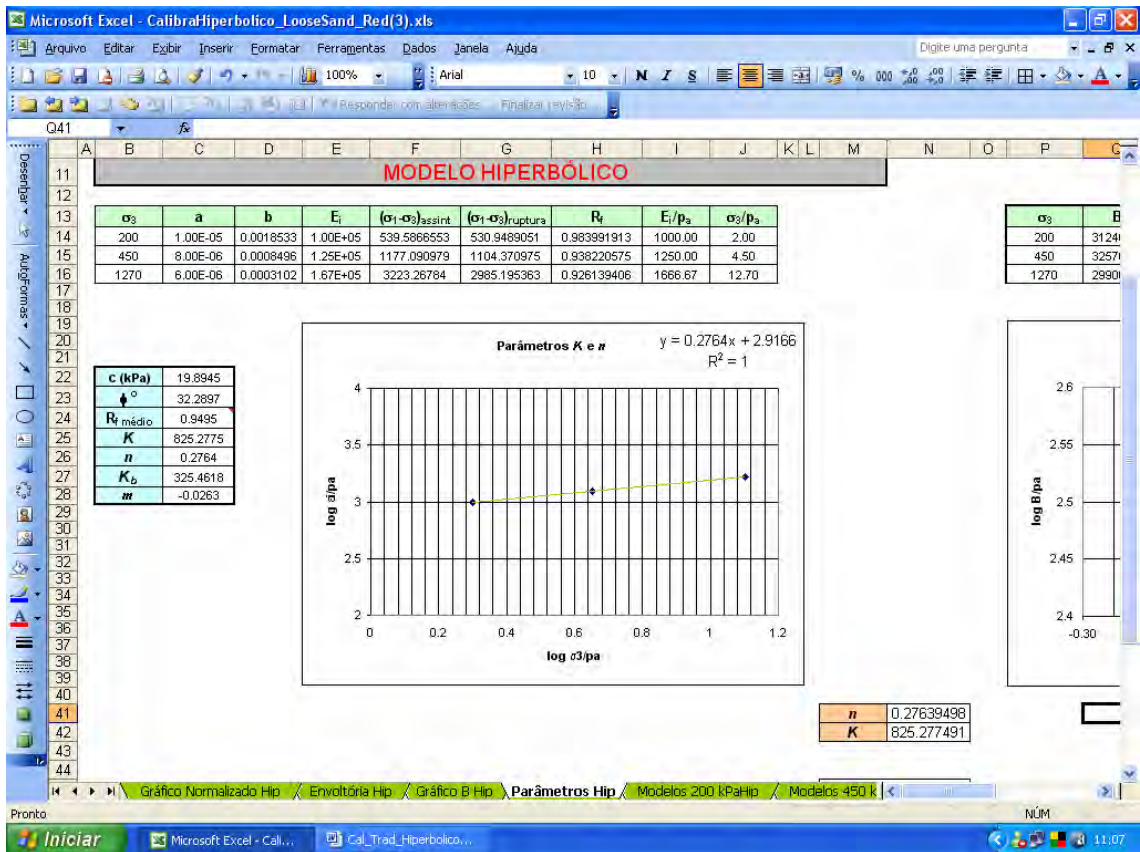


Figura B.3 – Planilha para os parâmetros  $K$ ,  $n$  e  $R_f$  do modelo hiperbólico.

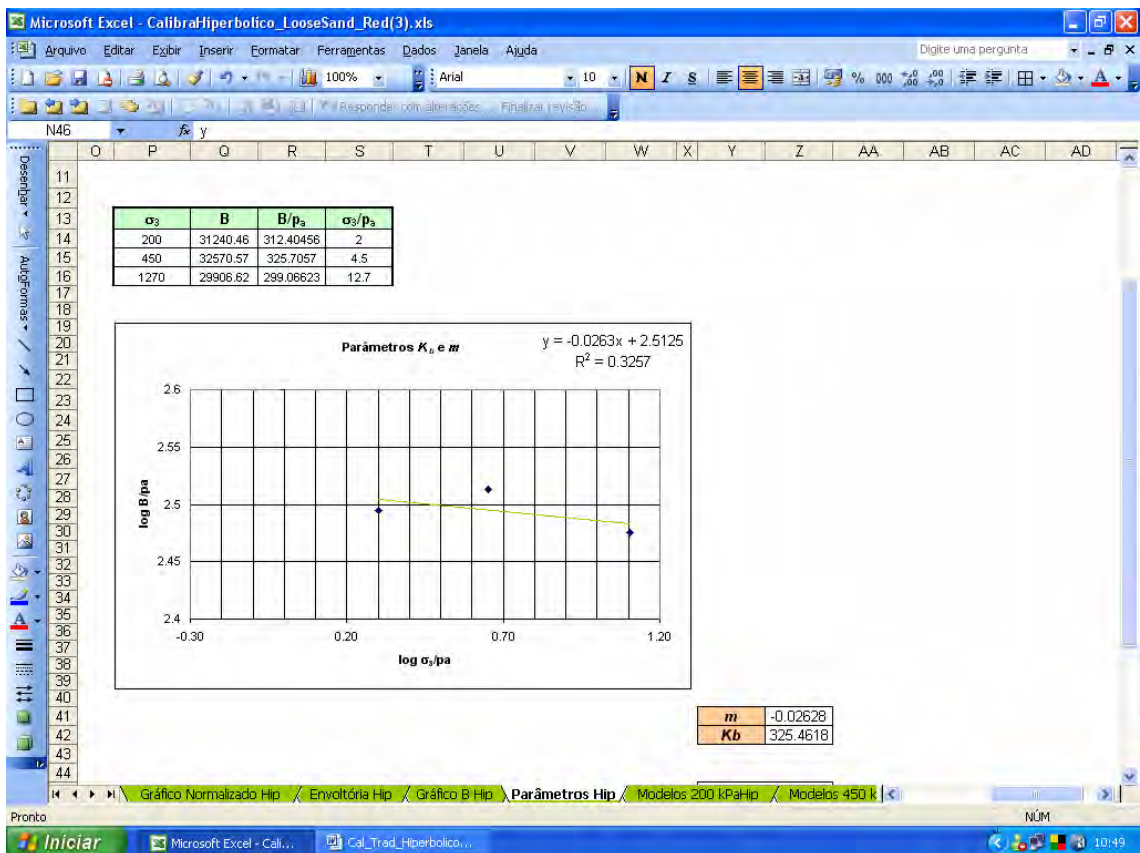


Figura B.4 – Planilha para os parâmetros  $K_b$  e  $m$  do modelo hiperbólico.

### **Calibração Tradicional do Modelo Lade-Kim**

Os parâmetros do modelo Lade-Kim podem ser calculados usando-se apenas os resultados de ensaios de compressão isotrópica e triaxiais convencionais.

Uma planilha de EXCEL foi desenvolvida para realizar a calibração tradicional, de maneira menos subjetiva quanto possível. Os dados de entrada são os resultados dos ensaios hidrostáticos e triaxiais e como dados de saída têm-se os parâmetros elásticos, de ruptura, de endurecimento, da função potencial plástico e da função de plastificação.

#### **Parâmetros elásticos**

O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), é adotado entre 0 e 0,5.

Os outros parâmetros elásticos,  $M$  e  $\lambda$ , são obtidos pela reta log-log. Sendo  $M$  o intercepto da reta e  $\lambda$  é a inclinação (Figura C.1)

#### **Parâmetros de ruptura**

Os parâmetros de ruptura são obtidos através de um gráfico log-log como apresentado na Figura C.2.

Tomando-se os pontos de ruptura dos ensaios convencionais triaxiais de compressão (CTC) e plotando-se um gráfico obtém-se  $m$  pela inclinação da reta que melhor ajusta os pontos plotados e  $\eta_1$  pelo intercepto dessa reta com  $\frac{p_a}{I_1} = 1$ .

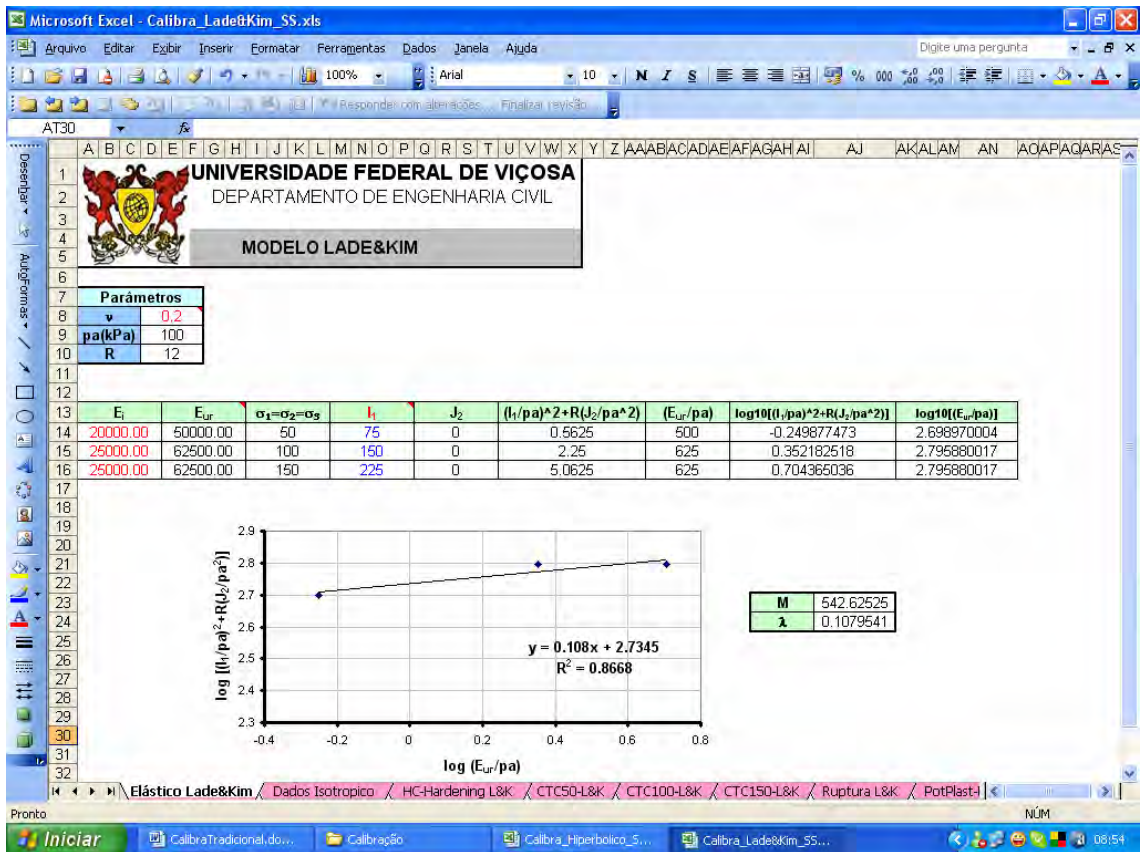


Figura C.1 – Planilha para os parâmetros elásticos do modelo Lade-Kim.

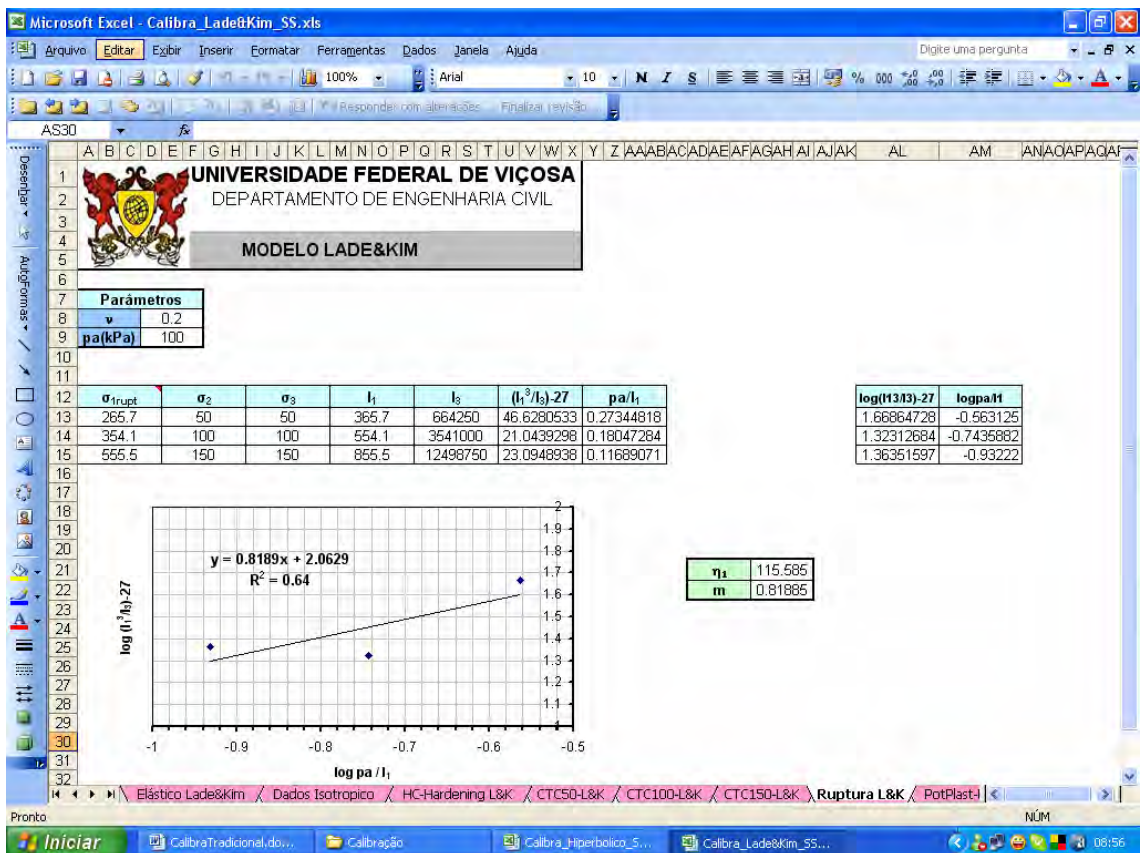


Figura C.2 – Planilha para os parâmetros de ruptura do modelo Lade-Kim.

## Parâmetros de endurecimento

Os parâmetros de endurecimento são obtidos através da equação

$$W_p = C p_a \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^p, \text{ plotando-se } \frac{I_1}{p_a} \text{ versus } \frac{W_p}{p_a} \text{ em um gráfico do tipo log-log e}$$

ajustando-se a melhor reta. A inclinação desta reta será  $p$  e o seu intercepto

$$\frac{I_1}{p_a} = 1 \text{ com será } C \text{ (Figura C.3).}$$

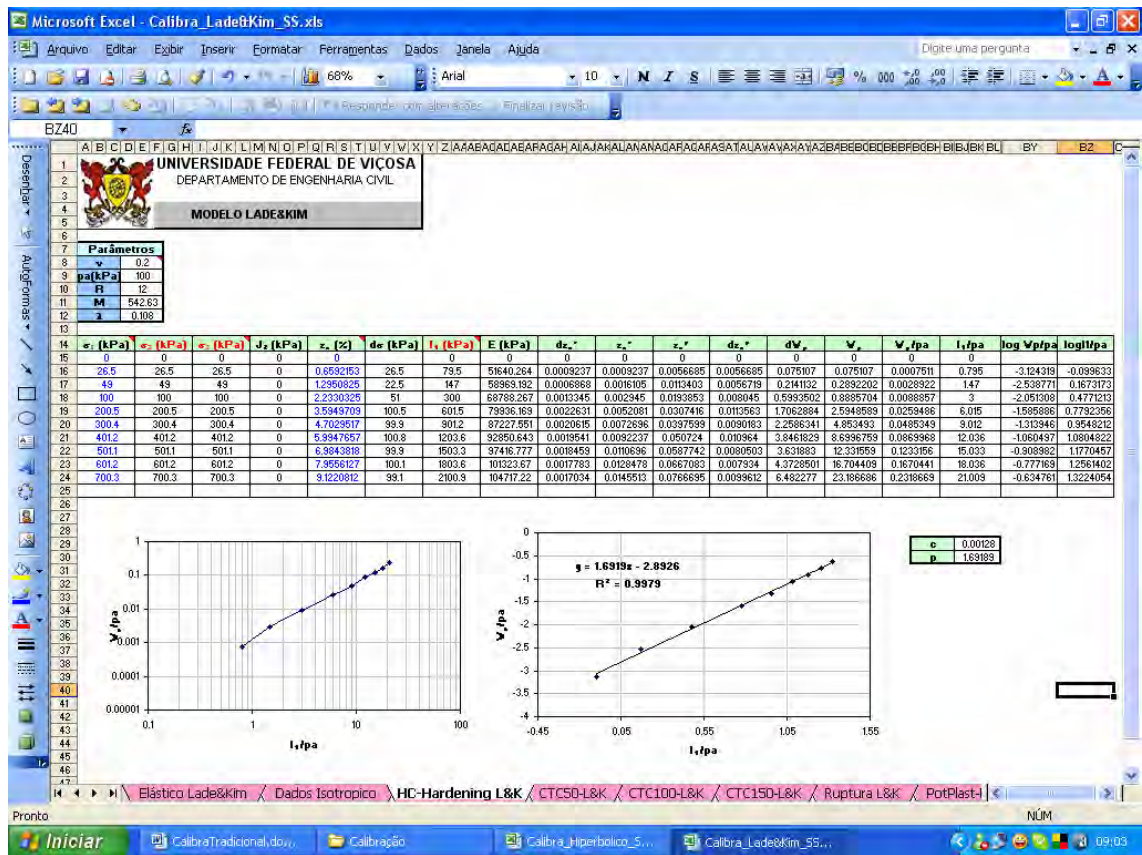


Figura C.3 – Planilha para os parâmetros de endurecimento do modelo Lade-Kim.

## Parâmetros da função do potencial plástico

O parâmetro  $\psi_1$  controla a forma da função do potencial plástico em planos octaédricos. Lade e Kim (1988) propõem uma relação entre  $\psi_1$  e o ângulo do

incremento plástico nestes planos. Os mesmos autores observaram uma relação entre  $\psi_1$  e o parâmetro  $m$ , expressa pela função:

$$\psi_1 = 0,00155m^{-1,27} \quad (C.1)$$

Essa correlação apresenta excelentes resultados e elimina a necessidade de testes mais complicados nos quais  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ .

Calculando  $\psi_1$ , os parâmetros  $\psi_2$  e  $\mu$  podem ser determinados através do seguinte procedimento. Expressando a razão de deformação incremental plástica como:

$$\nu_p = -\frac{d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p} \quad (C.2)$$

Considerando-se os valores dos incrementos de deformação plástica dados pela equação de incrementos de deformação plástica (Equação 2.12) para uma condição de compressão triaxial ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) obtém-se a seguinte equação:

$$\xi_y = \frac{1}{\mu} \xi_x - \psi_2 \quad (C.3)$$

$$\text{em que, } \xi_x = \frac{1}{1+\nu_p} \left\{ \frac{I_1^3}{I_2^2} (\sigma_1 + \sigma_3 + 2\nu_p \sigma_3) + \psi_1 \frac{I_1^4}{I_3^2} (\sigma_1 \sigma_3 + \nu_p \sigma_3^2) \right\} - 3\psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} + 2 \frac{I_1^2}{I_2}$$

$$\text{e } \xi_y = \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2}.$$

Já se tendo obtido os valores dos parâmetros elásticos e de ruptura é possível calcular, para cada nível de tensão do ensaio CTC, valores de  $\nu_p$  e, conseqüentemente, os valores de  $\xi_x$  e  $\xi_y$ .

Plotando-se  $\xi_x$  versus  $\xi_y$  e ajustando-se a melhor reta, obter-se-á pela sua inclinação  $\frac{1}{\mu}$  e pelo valor do intercepto em  $\xi_y$  para  $\xi_x = 0$ ,  $-\psi_2$  (Figura C.4).

Este procedimento poderá produzir parâmetros que não satisfaçam a condição de irreversibilidade apresentada na Equação C.1. Quando tal fato ocorrer, faz-se necessário adotar os valores limites.

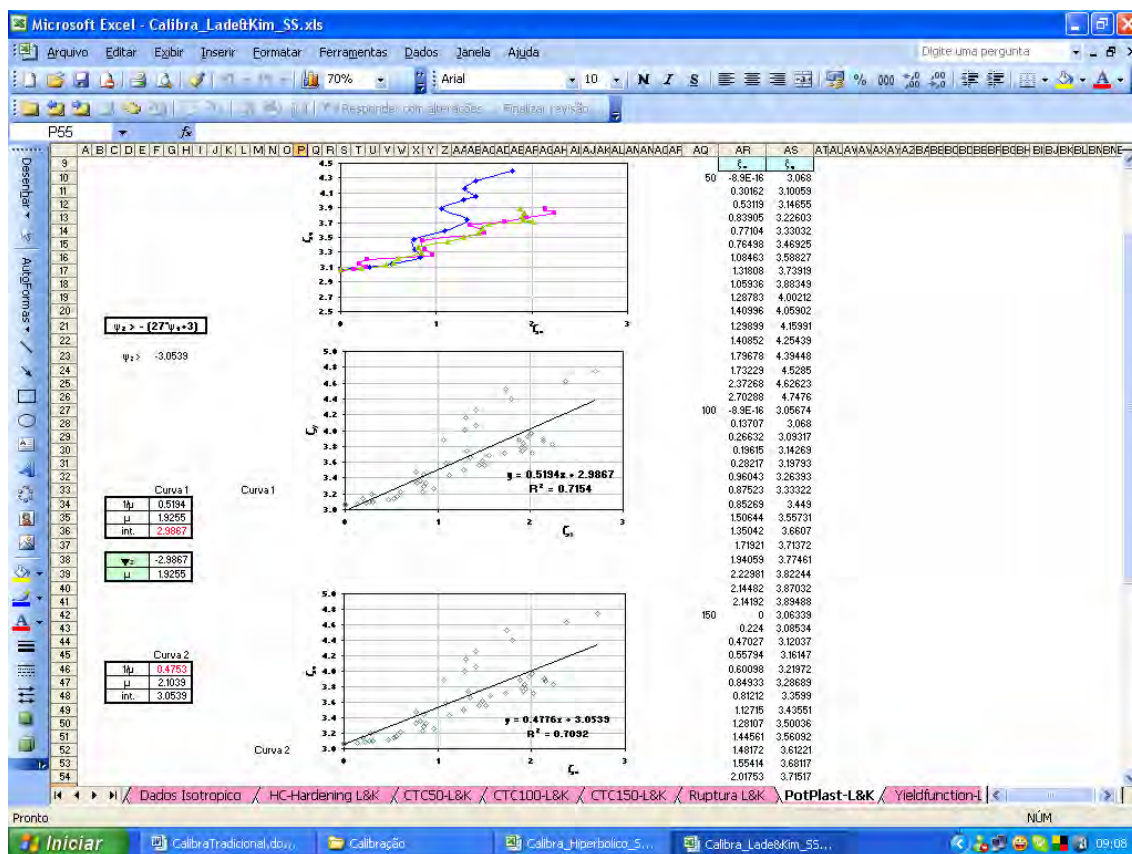


Figura C.4 – Planilha para os parâmetros da função do potencial plástico do modelo Lade-Kim.

### Parâmetros da função de plastificação

Com os parâmetros obtidos anteriormente restam apenas os parâmetros  $h$  e  $q$  para que a função de plastificação fique determinada. O parâmetro  $h$  assume um valor constante e pode ser obtido considerando-se que dois pontos (A e B) numa mesma superfície de plastificação possuem o mesmo valor de trabalho plástico  $e$ , consequentemente, o mesmo valor de  $F'(\sigma')$ , ou seja:

$$\left( \psi_1 \frac{I_{1A}^3}{I_{3A}} - \frac{I_{1A}^2}{I_{2A}} \right) \left( \frac{I_{1A}}{P_a} \right)^h e^{qA} = \left( \psi_1 \frac{I_{1B}^3}{I_{3B}} - \frac{I_{1B}^2}{I_{2B}} \right) \left( \frac{I_{1B}}{P_a} \right)^h e^{qB} \quad (C.4)$$

Se o ponto A está sobre o eixo hidrostático ( $q=0$ ) e B está na envoltória de ruptura ( $q=1$ ) pode-se escrever a Equação C.4 como:

$$(27\psi_1 + 3) \left( \frac{I_{1A}}{p_a} \right)^h = \left( \psi_1 \frac{I_{1B}^3}{I_{3B}} - \frac{I_{1B}^2}{I_{2B}} \right) \left( \frac{I_{1B}}{p_a} \right)^h e \quad (C.5)$$

daí,

$$h = \frac{\log \left[ \frac{\left( \psi_1 \frac{I_{1B}^3}{I_{3B}} - \frac{I_{1B}^2}{I_{2B}} \right) \left( \frac{I_{1B}}{p_a} \right)^h e}{27\psi_1 + 3} \right]}{\log \frac{I_{1A}}{I_{1B}}} \quad (C.6)$$

em que  $e$  é a base do logaritmo neperiano.

Nota-se que para cada valor de tensão confinante ( $\sigma_3$ ) tem-se um valor independente para  $h$ , no entanto, não há grande variação, adotando-se por simplicidade um valor médio, independente de  $\sigma_3$  (Figura C.5).

O valor de  $q$  varia com o nível de tensão  $S$ , que é definido como:

$$S = \frac{f_n}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m \quad (C.7)$$

O valor de  $S$  varia de 0 no eixo hidrostático até 1 na ruptura.

Através das Equações 2.19 e 2.20 pode-se reescrever:

$$q = \ln \frac{\left( \frac{W_p}{Dp_a} \right)^{1/\rho}}{\left( \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h} \quad (C.8)$$

Apenas a região compreendida entre  $0 \leq q < 1$  é de interesse, pois a região estudada é de endurecimento. Com isso a relação entre  $q$  e  $S$  pode ser descrita por uma relação hiperbólica:

$$S = \frac{q}{\alpha + \beta q} \quad (C.9)$$

Como essa curva passa pelo ponto  $q = 1$ ,  $S = 1$  o valor de  $\beta$  é dado por:

$$\beta = 1 - \alpha \quad (C.10)$$

Lade e Kim (1988) sugerem que o melhor valor de  $q$  é obtido quando  $S = 0,80$ . Substituindo esse valor na Equação C.8, tem-se:

$$\alpha = \frac{1 - S}{S} \frac{q_s}{1 - q_s} = \frac{1}{4} \frac{q_{80}}{1 - q_{80}} \quad (C.11)$$

Conhecido o valor do parâmetro  $\alpha$ ,  $q$  pode ser obtido através das Equações C.9 e C.10, como:

$$q = \frac{\alpha S}{1 - (1 - \alpha)S} \quad (C.12)$$

Nesta equação nota-se que a relação entre  $S$  e  $q$  torna-se convexa, linear ou côncava em função de  $\alpha$  ser, respectivamente, maior, igual ou menor que a unidade (Figura C.5).

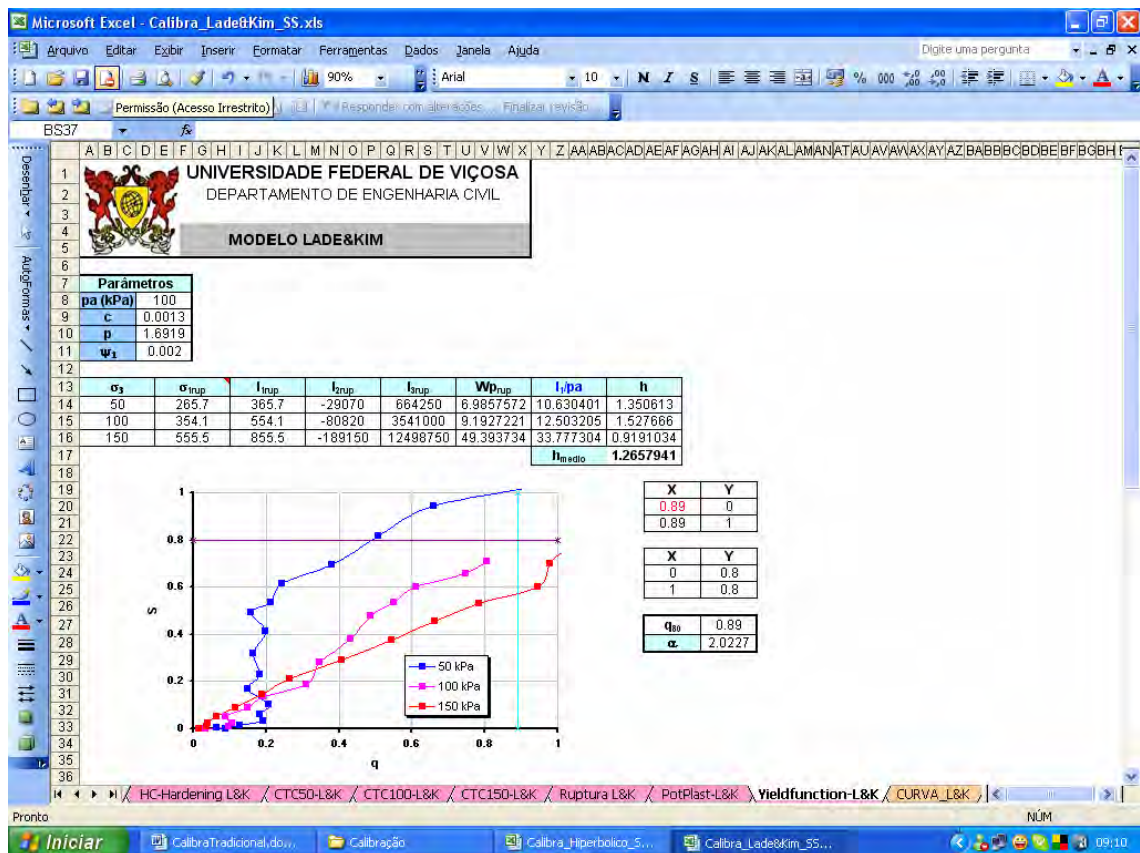


Figura C.5 – Planilha para os parâmetros da função de plastificação do modelo Lade-Kim.

### Parâmetros para as condições não saturadas

Os parâmetros  $a$  e  $b$  são obtidos pelo seguinte procedimento. Conhecidos os parâmetros de ruptura  $m$  e  $\eta_1$  e as tensões totais na ruptura,  $\sigma_1^{rup}, \sigma_2^{rup}, \sigma_3^{rup}$ , o critério de ruptura, Equação 2.11, é reescrita na Equação C.13 e numericamente resolvida para obter  $u_{eq}$ .

$$\left( \frac{(\sigma_1^{rup} + \sigma_2^{rup} + \sigma_3^{rup} - 3u_{eq})^3}{(\sigma_1^{rup} - u_{eq})(\sigma_2^{rup} - u_{eq})(\sigma_3^{rup} - u_{eq})} - 27 \right) \cdot \left( \frac{(\sigma_1^{rup} + \sigma_2^{rup} + \sigma_3^{rup} - 3u_{eq})}{pa} \right) - \eta_1 = 0 \quad (C.13)$$

Usando, na Equação C.13, as tensões totais na ruptura obtidas em um ensaio de cisalhamento triaxial com sucção controlada, é possível obter  $u_{eq}$  e, usando a Equação 2.30, determinar o valor dos parâmetros  $a$  e  $b$  (Figura C.6).

Para essa adaptação, a função de plastificação, local de pontos com mesmos valores de trabalho plástico, é dada por (Equação C.14):

$$F(\{\sigma'\}, W_p, \pi) = F'(\sigma') - f_{W_p, \pi}(W_p, \pi) = f_{\sigma'}(\{\sigma'\}) - \left( \frac{W_p + k\pi}{D p_a} \right)^{\frac{1}{\rho}} = 0 \quad (C.14)$$

Na Equação C.14,  $k$  é um parâmetro do material,  $q$  e  $\rho$  são dadas, respectivamente, pelas Equações 2.22 e 2.23 e  $F'(\sigma')$  pela Equação 2.19.

Da Equação C.14, o trabalho plástico pode ser reescrito como:

$$W_p = f_{\sigma'}(\{\sigma'\})^{\rho} D p_a - k\pi \quad (C.15)$$

Assim, o trabalho plástico incremental é igual a:

$$dW_p = \frac{\partial W_p}{\partial f_{\sigma'}} df_{\sigma'} + \frac{\partial W_p}{\partial \pi} d\pi = \rho D p_a f_{\sigma'}(\{\sigma'\})^{\rho-1} df_{\sigma'} - k d\pi \quad (C.16)$$

Substituindo este resultado na Equação 2.17, tem-se:

$$d\lambda = \frac{\rho D p_a f_{\sigma'} (\{\sigma'\})^{\rho-1} df_{\sigma'} - k d\pi}{\mu g_p} \quad (C.17)$$

Durante uma trajetória de tensão de molhagem,  $df_{\sigma'} = 0$ . Entretanto,  $d\lambda > 0$  porque  $d\pi < 0$ . Assim, dependendo do comportamento do solo e, conseqüentemente, dos parâmetros do solo, a superfície plástica volumétrica pode modelar um comportamento colapsivo.

Os valores de  $C$  e  $p$  são obtidos com os resultados dos ensaios de compressão hidrostático no solo em condições saturadas. Com esses parâmetros conhecidos, alguns pontos de ensaios de compressão hidrostático não saturados com um valor constante de sucção (Figura C.7),  $\pi$ , pode ser usado para encontrar o parâmetro  $k$  com a Equação B.18:

$$k = \frac{C p_a \left( \frac{I'_1}{P_a} \right)^p - W_p}{\pi} \quad (C.18)$$

sucção	$\sigma_1^{rup}$	$\sigma_2^{rup}$	$\sigma_3^{rup}$	$u_{aq}$	$suc(u_{aq})$	b	I1	I3	$I1^3/I3$	I1/PA	B.13
80	362	50	50	-58.4123024	1.36957	0.00462	637.237	4941201	52.3685	6.37237	3.51E-05
160	420.3	50	50	-96.69671457	1.65466	0.00409	810.39	11125731	47.8359	8.1039	4.06E-05
80	497.3	100	100	-66.24242412	1.20769	0.0026	896.027	15574365	46.1906	8.96027	4.29E-05
160	566.7	100	100	-121.687592	1.31484	0.00197	1131.76	33831076	42.86	11.3176	4.81E-05
80	663.9	150	150	-113.6284771	0.70405	0	1304.79	54038209	41.1071	13.0479	5.14E-05
160	728.9	150	150	-176.9109101	0.90441	0	1559.63	96804685	39.1896	15.5963	5.54E-05
						b					
						Média	0.00221				
80	362	50	50	-112.3137542	-0.71229						
80	497.3	100	100	-130.8071808	-0.61159						
80	663.9	150	150	-192.4092447	-0.41578						
160	420.3	50	50	-228.9906438	-0.69872						
160	566.7	100	100	-277.4737858	-0.57663						
160	728.9	150	150	-359.3498106	-0.44525						

Figura C.6 – Planilha para os parâmetros  $a$  e  $b$  para condições não saturadas do modelo Lade-Kim.

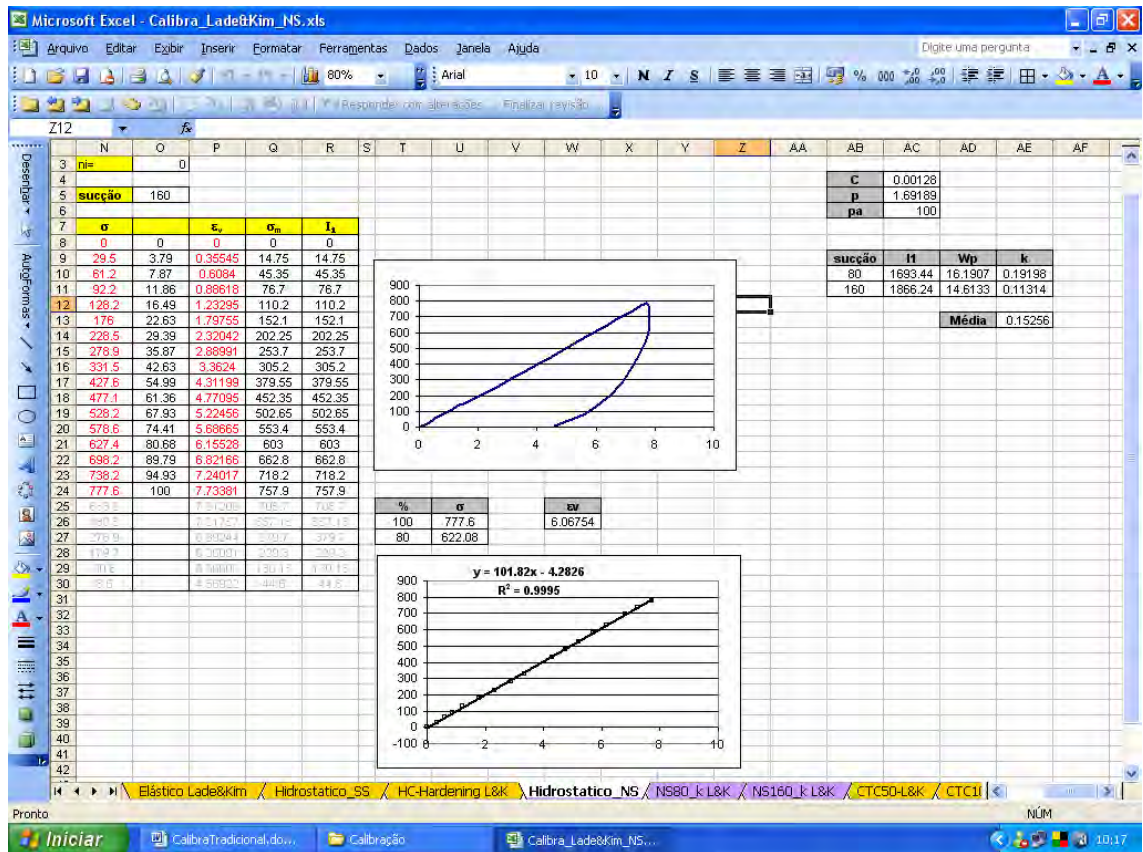


Figura C.7 – Planilha para o parâmetro  $k$  para condições não saturadas do modelo Lade-Kim.

---

---

## REFERÊNCIAS

- ANDRÉ, J.C. e FURUKAWA, A.C. (2007) Identification of parameters: their importance, attention to be paid, cares to be taken, In Proceedings of Applications of Computational Mechanics in Geotechnical Engineering, p.115-124
- ARORA, J.S. (2004) Introduction to Optimum Design, 2nd ed., Elsevier Academic Press, San Diego, California, USA.
- AUBRY, D., KODAISSI, E. e MEIMON, Y. (1985) A viscoplastic constitutive equation for clays including a damage law. 5<sup>th</sup> Int. Conf. Num. Meth in Geomechanics, Nagoya (citado por CEREVAC ET AL.,2006)
- AZEVEDO, R.F. e GUIMARÃES, L.S. (1992) A constitutive model for non-saturated soils. Applicability of Classical Soil Mechanics Principles to Structured Soils. p.206-210.
- AZEVEDO, R.F. e MELO, L.T.B. (1996) The Elasto-Plastic Model of Lade and Kim, Portuguese Geotechnical Journal, Portugal, vol. 75, p. 83-103, (in Portuguese).
- BECK, J.V. e ARNOLD, K.J. (1977) Parameter Estimation in engineering and science , John Wiley & Sons,Inc, USA.
- BICALHO, K.V. (1992) Modelagem das características e Resistências da Areia de Itaipú-Niterói/RJ, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ciências da Engenharia Civil: Geotecnia, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- BISHOP, A.W. (1959) The principle of effective stress, Teknisk Ukeblad, p.859-863.
- BOTELHO, B.S. (2007) Equipamento Triaxial Cúbico para Ensaios em Solos Saturados e Não-Saturados com Sucção Matricial Controlada, Dissertação

de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Geotecnia, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal Viçosa.

BYRD, R.H., LU, P., NOCEDAL, J. e ZHU, C. (1994) A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization, Report NAM-08, EECS Department, Northwestern University.

CALVELLO, M. (2002) Inverse Analysis of a Supported Excavation through Chicago Glacial Clays, Dissertation of Doctor of Philosophy, Northwestern University, Evanston, Illinois.

CALVELLO, M. and FINNO, R.J. (2004) Selection Parameters to Optimize in Model Calibration by Inverse Analysis, Computers and Geotechnics, Vol. 31, Issue 5, p.410-424.

CEKEREVAC, C., GIRARDIN, S., KLUBERTANZ, G. and LALOU, L. (2006) Calibration of an elasto-plastic constitutive model by a constrained optimization procedure, Computers and Geotechnics, Vol. 33, Issue 8, p.432-443.

COSTA, A., ANDRÉ, J.C. e GOULART, M.L.S. (2004) Back Analysis for Identification of Parameters Using the Finite Element Method: Iterative Methods, In. Proceedings of Iberian Latin-American Congress on Computational methods in Engineering, No. 25., Recife.

COSTA, A. (2006) Identificação de Parâmetros em Obras Civis, Dissertação e Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

DESAI, C. S. (1979) Elementary Finite Element Method, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

DESAI, C. S. e SIRIWARDANE, H. J. (1984) Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

DENNIS, J.E. e SCHNABEL, R.B. (1983) Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

- DUNCAN, M.J. e CHANG, C.Y. (1970) Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, SM5, p. 1629-1653.
- DUNCAN, J.M., BYRNE, P., WONG, K.S. and MARRY, P. (1979) Strength, stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analyses of stress and movements in soil mass, Report no. UCB/GT/78-02 to National Science Foundation, University of California, Berkeley.
- FINSTERLE, S. e PERSOFF, P. (1997) Determining Permeability of Tight Rock Samples Using Inverse Modeling, Water Resour. Res., 33(8), p.1803-1811.
- FINSTERLE, S. e PRUESS, K. (1995) Solving the estimation-identification problem in two-phase flow modeling, Water Resour. Res., 31(4), p. 913-923.
- HUJEUX, J.C. (1985) Une Loi de comportement pour Le chargement cyclique des sols. In Génie parasismique. E.N.P.C., Paris, p.287-353 (citado por CEKEREVAC ET AL., 2006)
- JAMBU, N. (1963) Soil Compressibility as determined by oedometer and triaxial tests, European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, Germany, Vol. 1, p. 19-25.
- JENNINGS, J.E. e BURLAND, J.B. (1962) Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils, Geotechnique, Vol. 12, No. 2, p.125-144.
- KOGHO, Y., NAKANO, M. e MIYAZAKI, T. (1993) Theoretical aspects of constitutive modeling for non-saturated soils, Soils and Foundations, Vol. 33, No. 4, p.49-63.
- KONDNER, R.L. (1983) Hyperbolic Stress-Strain response: cohesive soils, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 89, SM1, p. 115-143.
- LACERDA, E.G.M e CARVALHO, A.C.P.L. (1999) Introdução aos Algoritmos Genéticos, In: Galvão, C.O., Valença, M.J.S. (orgs) Sistemas Inteligentes: aplicações a recursos hídricos e bacias ambientais, Coleção ABRH de Recursos Hídricos, Ed. Universidade/UFRGS e Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, Vol. 7, p. 99-150.

- LADE, P. V. (1990) Single-Hardening Model with Application to NC Clay, Journal of Geotechnical Engineering, Vol 116, No. 3, p. 395-415.
- LADE, P.V. e KIM, M.K. (1995) Single Hardening Constitutive Model for Soil, Rock and Concrete, Int. J. Solids Structures, Vol. 32, No. 14, p.1963-1978.
- LAQUINI, J.P., AZEVEDO, R.F. e REIS, R.M. (2007) Elasto-Plastic Modeling of Saturated and Non-Saturated Residual Soil with Parameters Optimization, The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 12C.
- LEDESMA, A. (1987) Identificación de parámetros en geotecnia: aplicación a la excavación de túneles. Tesis(Doctorado), Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- LEDESMA, A., GENS, A. e ALONSO, E.E. (1996) Estimation of Parameters in Geotechnical Backanalysis – I. Maximum Likelihood Approach, Computers and Geotechnics, Vol. 18, No.1, p.1-27.
- LEE, K.L. e SEED, H.B. (1967) Drained Strength Characteristic of Sands, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 61, SM6, p. 117-141.
- LIU, D.C. e POLYAK, B.T. (1989) On the limited memory BFGS method for large scale optimization methods Mathematical Programming, Vol. 45, p. 503-528.
- MATTSSON, H., KLISINSKI, M. e AXELSSON, K. (2001) Optimization Routine for Identification of Model Parameters in Soil Plasticity, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol. 25, p.435-472.
- MARQUARDT, D.W. (1963) An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, No. 2, June, Printed in U.S.A., p.431-441.
- MELO, L.T.B. (1995) Utilização de um modelo elasto-plástico para análise de deformações em solos, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ciências da Engenharia Civil: Geotecnia, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

- MODERASSI, A., ABOU-BEKR, N. e FRY, J. (1995) Unified approach to model partially saturated soil, Proceedings of the First Int. Conf. on Unsaturated Soils, Paris, p.1495-1502.
- NOGUEIRA, C.L. (1998) Análise não linear de Escavações e Aterros, Dissertação de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Ciências da Engenharia Civil: Geotecnia, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- PAL, S., WATHUGALA, G.W. e KUNDU, S. (1996) Calibration of a Constitutive Model Using Genetic Algorithms, Computers and Geotechnics, Vol. 19, No. 4, p. 325-348.
- PEDROSO, D. M. (2006) Representação Matemática do comportamento Mecânico Cíclico de Solos Saturados e Não Saturados, Tese de Doutorado em Geotecnia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília.
- REIS, R.M. (2004) Comportamento tensão-deformação de dois horizontes de um solo residual de gnaiss, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SILVEIRA, L.G. (1992) Estudo de um Modelo Constitutivo para Solos Não-Saturados, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- VELLOSO, R. Q. (2000) Estudo Numérico da Estimativa de Parâmetros Hidráulicos em Solos Parcialmente Saturados. Tese de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- WHEELER, S.J. e KARUBE, D. (1995) Constitutive modeling, Proceedings of the First Int. Conf. on Unsaturated Soils, Paris, p.1323-1356.
- YANG,Z. e ELGAMAL,A. (2003) Application of unconstrained optimization and sensitivity analysis to calibration of a soil constitutive model, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 27, p.1277-1297.

ZENTAR, R., HICHER, P.Y. e MOULIN, G. (2001) Identification of Soil Parameters by Inverse Analysis, Computers and Geotechnics, Vol. 28, p.129-144.

ZHU, C., BYRD, R.H., LU, P. e NOCEDAL, J. (1994) L-BFGS-B:Fortran subroutines for large-scale bound constrained optimization, Report NAM-11, EECS Department, Northwestern University.