RONDINEI ALMEIDA DA SILVA

UMA ANÁLISE MATEMÁTICA DE UM SISTEMA NÃO ISOTÉRMICO DO TIPO ALLEN-CAHN

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Silva, Rondinei Almeida da, 1987-

S586u Uma análise matemática de um sistema não isotérmico do
2014 tipo Allen-Cahn / Rondinei Almeida da Silva. – Viçosa, MG, 2014.

vii, 89f. ; 29 cm.

Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.87-89.

1. Sistema binário (Matemática). 2. Sistema Allen-Cahn. 3. Campo de fase. 4. Solidificação. 5. Fase de transição. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 513.5

RONDINEI ALMEIDA DA SILVA

UMA ANÁLISE MATEMÁTICA DE UM SISTEMA NÃO ISOTÉRMICO DO TIPO ALLEN-CAHN

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de Fevereiro de 2014.

Margareth da Silva Alves

Ademir Pastor Ferreira

Anderson Luis Albuquerque de Araujo
(Orientador)

Dedico este trabalho aos meus pais,
Valdinei e Nalva.

Jamais considere seus estudos
como uma obrigação, mas como
uma oportunidade invejável para
aprender a conhecer a influência
libertadora da beleza do reino do
espírito, para seu próprio prazer
pessoal e para proveito da
comunidade à qual seu futuro
trabalho pertencer.

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sua abundante graça sobre a minha vida, sem Ele nada seria possível.

Sou muitíssimo grato aos meus pais, Valdinei e Nalva, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são os maiores de todos os meus professores, a minha base, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Sou muito grato a minha namorada, Luana, pelo seu amor, apoio incondicional e por possuir a nobre virtude de estar bem perto mesmo estando longe.

Agradeço ao meu orientador, Anderson de Araujo, pela paciência, aprendizado valioso, e pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço ao meu nobre e exclusivo irmão, Ney Almeida, aos meus primos Isaac, Jairo e Taiane e ao meu amigo de infância, Tiago, pelo companheirismo, força e alegria.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. E também aos colegas do futebol e às demais amizades que fiz em Viçosa.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

SILVA, Rondinei Almeida da, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2014. **Uma Análise Matemática de um Sistema Não Isotérmico do Tipo Allen-Cahn**. Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

No presente trabalho estudamos um modelo de campo de fase que modela a evolução dos processos de solidificação que ocorre em certas ligas binárias. Obtemos a existência de solução e resultados de regularidade sob as hipóteses das não linearidades serem Lipschitz e limitadas. A não linearidade envolvida na equação de campo de fase é um potencial do tipo poço-duplo. Utilizamos ao longo do trabalho o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e o método de Galerkin.

Abstract

SILVA, Rondinei Almeida da, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2014. **A Mathematical Analysis of a Nonisothermal Allen-Cahn Type System**. Adiviser: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

In this present work we study a model of phase field modeling the evolution of solidification process that occurs in certain binary alloys. We obtain existence of solution and results under the hypotheses of regularity the nonlinearities are Lipschitz and limited. The non-linearity involved in the phase field equation is a potential double-well type. We use throughout the work the fixed point theorem of Leray-Schauder and the Galerkin method.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos o sistema não-linear

$$
\begin{cases}
\varphi_t - \xi^2 \Delta\varphi = \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi) - |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2 \theta) & \text{em} \quad Q, \\
\theta_t + \ell\varphi_t - \operatorname{div}(k(\varphi, \theta, c)\nabla\theta) = f(x,t) & \text{em} \quad Q, \\
c_t - \operatorname{div}(D_1(\varphi, \theta, c)\nabla c + D_2(\varphi, \theta, c)\nabla\varphi) = 0 & \text{em} \quad Q, \\
\varphi = 0,\ \theta = 0,\ c = 0 & \text{em} \quad S, \\
\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x)\ \text{ e } c(x,0) = c_0(x) & \text{em} \quad \Omega,
\end{cases}
\tag{1}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto, limitado e C^2 na fronteira e $1 \leq N \leq 3$. Seja T um número positivo finito; $Q = \Omega \times (0, T)$ indica o cilindro espaço-tempo com superfície lateral $S = \partial\Omega \times (0, T)$.

O presente problema tem uma estrutura que é similar ao problema de solidificação não isotérmica para uma liga binária apresentado em [5] e [10]. A primeira equação de (1) é a equação tipo Allen-Cahn para o campo de fase e, basicamente, é obtido de [5] e [10]. As outras duas equações são obtidas por formas mais gerais dos balanços de energia térmica e de massa. As constantes positivas ξ, μ_1, μ_2, ℓ estão associadas com as propriedades do material; $k(\cdot)$ está associada com a condutividade térmica; $D_1(\cdot)$ e $D_2(\cdot)$ são os coeficientes de difusão do soluto na matriz do solvente, isto é, o material que constitui a liga binária; $f(\cdot)$ é um dado campo externo associado com a densidade de fontes de calor ou bacias; e as condições iniciais $\varphi_0(\cdot)$, $\theta_0(\cdot)$ e $c_0(\cdot)$, respectivamente são, o campo de fase, a temperatura, e a concentração de soluto.

Muita atenção tem sido dada aos métodos de campo de fase nos processos de solidificação durante as duas últimas décadas por muitos autores. Para mais informações, ver, por exemplo [5], [6], [15], [27] e as referências deles. Nestas obras, muitas situações e diferentes hipóteses têm sido consideradas.

Neste trabalho, a equação de campo de fase foi obtido em [5] e, num certo sentido, essa equação pode ser considerada mais precisa do que o formato final indicado em [5]. As outras duas equações generalizam equações encontradas em [5], [10] e [26].

No entanto, para tal modelagem ser mais precisa, devemos pagar o preço da não-linearidade do acoplamento na equação de campo de fase, isto é, o termo $-|\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta)$, envolvendo os produtos da temperatura e da concentração com as derivadas do campo de fase, é muito mais difícil de manusear em termos matemáticos que o acoplamento clássico habitual entre a equação de campo de fase e as equações de temperatura e concentração.

Para resolver o problema (1), sob as hipóteses (2.6), temos que usar uma combinação de técnicas: Princípio do máximo em conjunto com um método espectral de Galerkin semidiscreto para a construção de soluções aproximadas, em seguida, passar para o limite para a obtenção de soluções do problema original.

Destacamos que, por simplicidade de exposição, assumimos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Com simples modificações dos argumentos, a análise semelhante pode ser feita para outros tipos de condições de contorno, por exemplo, poderíamos tomar condições de contorno de Neumann homogênea para alguma equação ou todas ou considerar condições de contorno não homogêneas apropriadas. Também para simplificar, apresentamos o potencial de não-linearidade na equação de campo de fase como $\varphi(\varphi-1)(1-2\varphi)$, isto é, a um potencial do tipo poço-duplo. Os resultados apresentados também valem, com as mesmas provas, para não-linearidades mais gerais, como os de classe apresentados em [23].

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 descreveremos as notações, espaços funcionais, alguns resultados clássicos da teoria de equações diferenciais e análise funcional.

No capítulo 2 provaremos um lema que exibe a existência e unicidade de solução de um problema aproximado dependendo de um parâmetro $\varepsilon \in (0,1]$ para a primeira equação do problema (1) com o termo $-|\nabla\varphi|(\mu_1 c+\mu_2\theta)$ substituído por uma função mais regular. Para mostrar a existência de solução desse problema aproximado usamos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Em seguida, provaremos uma proposição que nos permitirá passar o limite nesse problema aproximado e recuperar a solução original.

No capítulo 3 apresentamos o resultado de existência de solução forte para a primeira equação de (1) e de solução fraca para as outras duas equações, sob as hipóteses de que as aplicações $k(.)$, D_1 e D_2 são limitadas e Lipschitzianas. Para a prova desse resultado utilizamos o método de Faedo-Galerkin.

Os capítulos 2 e 3 são leituras do trabalho de C. Vaz e L. Boldrini [29].

Por fim, o capítulo 4 traz as considerações finais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Notações e Espaços Funcionais

Nesta seção vamos descrever as notações e definições de espaços funcionais que serão usados ao longo do trabalho. Para mais detalhes consultar [7] e [22]. Usaremos as seguintes notações:

- $\mathbb{R}^N$ representará o espaço euclidiano N-dimensional;
- Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com medida de Lebesgue $|\Omega|$ e fronteira $\partial\Omega$;
- Q representará o cilindro $\Omega \times (0,T)$;
- $S = \partial\Omega \times (0,T)$ representará a superfície lateral do cilindro Q;
- $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{N}$ denotará o operador gradiente;
- $\operatorname{div} u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ denotará o divergente de u;
- $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representará o operador Laplaciano;
- $|x| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $|\nabla u| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ denotam, respectivamente, a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^N$ e a norma do vetor gradiente da função $u = u(x)$;

Definiremos a seguir os espaços funcionais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Nestas definições, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto.

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u, que será denotado por* $\operatorname{supp}(u)$, *é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$ então dizemos que u possui suporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ ao espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto.*

Definição 1.2. *$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.*

Definição 1.3. *O conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de φ, é denotado por $C_0^\infty(\Omega)$.*

Definição 1.4. *Chamamos de* ***sequência regularizante*** *a toda sequência $(\eta_n)_{n\geq 1}$ de funções tal que*

$$\eta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \operatorname{supp}\eta_n \subset B(0, \frac{1}{n}),\ \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n = 1 \ \text{ e } \eta_n \geq 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Definição 1.5. *Uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^n}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que:*

* $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset K, \quad \forall\ \nu \in \mathbb{N};$

* *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$D^\alpha \varphi_\nu \to 0 \quad \text{uniformemente em } K,$$

onde D^α denota o operador derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$$

com $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 1.6. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.7. *Seja $1 \leq p \leq +\infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, com norma*

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para} \quad 1 \leq p < +\infty$$

e $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráves de u definidas sobre Ω, que são essecialmente limitadas, com a norma dada por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|, \quad p = \infty.$$

Definição 1.8. *$W^{p,q}(\Omega)$ é o espaço de Banach (com $p \in \mathbb{N}$) das funções $u(.)$ em $L^q(\Omega)$ com derivadas generalizadas de ordem $\leq p$ que pertencem a $L^q(\Omega)$ e cuja norma é dada por*

$$||u||_{W^{p,q}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq p} ||D^\alpha u||_{L^q(\Omega)}.$$

Definição 1.9. *$\overset{0}{W}{}^{p}_{q}(\Omega)$ representa o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{p,q}(\Omega)$.*

Definição 1.10. *Denotamos por $W_q^{2,1}(Q)$ o espaço de Banach ($q \geq 1$) das funções $u(.,.) \in L^q(Q)$ com derivadas generalizadas $D_x u, D_x^2 u, D_t u$ em $L^q(Q)$. Consideraremos em $W_q^{2,1}(Q)$ a norma definida por*

$$||u||_{W_q^{2,1}(Q)} = ||u||_{L^q(Q)} + ||D_x u||_{L^q(Q)} + ||D_x^2 u||_{L^q(Q)} + ||D_t u||_{L^q(Q)}.$$

Definição 1.11. *Dado H um espaço de Banach, se $T > 0$ é um número real e $1 \leq p < \infty$, representado por $L^p(0, T; H)$ o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0, T) \longrightarrow H$ tais que u é mensurável e $||u(t)||_H \in L^p(0, T)$ munido da norma*

$$||u||_{L^p(0,T;H)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_H^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Denotamos por $L^p(Q)$ o espaço $L^p(0, T; L^p(\Omega))$.

Definição 1.12. *$L^{q,r}(Q)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(x, t)$ de Q em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) cuja norma é dada por*

$$||u||_{L^{q,r}(Q)} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}, \quad (q, r \geq 1).$$

Para $q = r$ usaremos a notação $L^{q,q}(Q) = L^q(Q)$. Por vezes $L^{q,r}(Q)$ será denotado por $L^r(0, T; L^q(\Omega))$.

1.2 Resultados Auxiliares e Imersões

A seguir estão alguns resultados, dentre eles os de imersões, que serão usados nos demais capítulos. De modo geral, não apresentaremos as demonstrações, mas serão indicadas as respectivas referências bibliográficas.

Teorema 1.13. *Seja E um espaço de Hilbert. Seja $S = \{x_i; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em E. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $x = \sum_{i \in I} (x, x_i) x_i$ *para cada x em E.*

(b) S é completo.

(c) $\overline{[S]} = E$.

(d) (Identidade de Parseval) $||x||^2 = \sum_{i\in I} |(x, x_i)|^2$ *para todo* x *em* E.

(e) $(x, y) = \sum_{i\in I} (x, x_i)\overline{(y, x_i)}$ *para quaisquer* x, y *em* E.

Demonstração. Ver D. Pellegrino [25], p. 49. □

Obsevação 1.14 (Pellegrino [25], observação 3.3.6, pág. 47)**.** *A expressão* $\sum_{i=1}^{n} (x, x_i)x_i$ *é, por motivos óbvios chamado de* ***melhor aproximação*** *de* x *em* $M = [x_1, ..., x_n]$.

Teorema 1.15 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja* E *um espaço com produto interno e* $S = \{x_i; x \in I\}$ *um conjunto ortonormal em* E*. Então, se* $x \in E$*, temos*

$$\sum_{i\in J} |(x, x_i)_E|^2 \leq ||x||_E^2,$$

$J = \{i \in I; (x, x_i)_E \neq 0\}$.

Demonstração. Ver D. Pellegrino [25], p. 47. □

O teorema à seguir, devido à Lions-Peetre, pode ser encontrado em Lions [20].

Teorema 1.16. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suficientemente suave,* $Q = \Omega \times (0, 1)$ *e* $1 \leq q < \infty$*. Então:*

$$\begin{array}{lll} se \;\; \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2} < 0, & W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^\infty(Q); & \\ se \;\; \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2} = 0, & W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q) \;\; \forall p \in [q, \infty); & \\ se \;\; \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2} > 0, & W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^{p-\epsilon}(Q), \;\; p = \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2}\right)^{-1}, & \end{array}$$

com as imersões compactas para $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

Alguns resultados de imersões contínuas, cujas demonstrações podem ser encontradas por exemplo em Adams [1], p.144, são enunciadas no seguinte teorema.

Proposição 1.17 (Sobolev)**.** *Sejam* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$*,* Ω *de classe* C^m *e* $1 \leq p \leq \infty$*. Então as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$, *se* $mp < N$,

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, *se* $mp = N$,

(iii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, $k < m - \frac{N}{p} \leq k + 1$, *se* $mp > N$ *onde* k *é um inteiro não negativo.*

Lema 1.18. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $r \geq 1$ e $p < \infty$. Se j e m são inteiros tais que $0 \leq j < m$ e*

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} + \frac{j}{N} - \frac{m}{N}$$

então a seguinte imersão:

$$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração. Ver R. A. Adams [1], Teorema 6.2, p. 144. □

Proposição 1.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto e limitado e $Q = \Omega \times (0,T)$, então a seguinte imersão compacta se verifica:*

$$W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^\mu(Q)$$

com $2 \leq \mu < 10$ para $N = 3$ e com qualquer μ finito para $N = 2$.

Demonstração. Ver J. L. Lions [20], p. 13. □

O resultado seguinte é um exemplo de uma classe de resultados de imersão conhecidos como imersões do tipo Aubin-Lions. Essa versão foi apresentada por J. Simon em [28], Corolário 4, pág.85.

Lema 1.20. *Sejam X, B e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ com imersões contínuas e $X \hookrightarrow B$ compacta, $0 < T < \infty$. Tem-se as seguintes imersões compactas:*

(i) $L^q(0,T;X) \bigcap \Big\{\varphi; \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^1(0,T;Y)\Big\} \hookrightarrow L^q(0,T;B) \quad 1 \leq q \leq \infty$

(ii) $L^\infty(0,T;X) \bigcap \Big\{\varphi; \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^r(0,T;Y)\Big\} \hookrightarrow C([0,T];B) \quad 1 < r \leq \infty.$

Os seguintes resultados são teoremas clássicos da teoria L_p para as equações diferenciais parabólicas lineares.
Considere o seguinte o problema parabólico linear:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u = f(x,t) & \text{em } Q \\ u(x,t) = 0 & \text{em } S \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

O seguinte Lema pode ser encontrado em Ladyzenskaja ([17]; p.180, Observação 6.3).

Lema 1.21. *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. Suponha que:*

(a) $f \in L^2(Q)$.

(b) $u_0 \in \overset{0}{W}\ {}^1_2(\Omega)$.

(c) $b_i \in L^{q,r}(Q)$ *com* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{n}{2q} = \dfrac{1}{2}$ *e* $r < \infty$.

(d) $a \in L^{q,r}(Q)$ *com* $r < \infty$ *e*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} + \dfrac{N}{2q} = 1 & & \text{para } N \geq 4 \\ \dfrac{1}{r} + \dfrac{N}{2q} = 1 & q > 2 & \text{para } N = 3 \\ & & \\ r > 4 & q = 2 & \text{para } N = 3 \\ r > 2 & q = 2 & \text{para } N = 2 \end{cases}$$

Então, existe uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (1.1) satisfazendo a seguinte estimativa:

$$||u||_{W_q^{2,1}(Q)} \leq M\Big(||f||_{L^2(Q)} + \Big(||\overrightarrow{b}||_{W^{q,r}(Q)} + ||a||_{W^{q,r}(Q)}\Big)||u_0||_{W^{1,2}(\Omega)} + ||u_0||_{W^{1,2}(\Omega)}\Big),$$

em que M é uma constante que depende de T, q, r e Ω.

O próximo lema é importante para a prova do Teorema de Existência do problema (1) e pode ser encontrado em Ladyzenskaja [18] pág.74.

Lema 1.22. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Existe uma constante $M > 0$ tal que, para todas as funções $u \in V(Q) = L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, temos*

$$||u||_{L^r(0,T;L^s(\Omega))} \leq M||u||_{V(Q)} \quad \text{com} \quad \frac{1}{r} + \frac{N}{2s} = \frac{N}{4},$$

onde $r \in [2,\infty]$, $s \in [2, 2N/(N-2)]$ quando $N \geq 3$; $r \in (2,\infty]$, $s \in [2,\infty)$ quando $N = 2$ e $r \in [4,\infty]$, $s \in [2,\infty)$ quando $N = 1$.

Teorema 1.23. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ q.t.p., a função $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}^N$ e definimos*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Além disso, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [7], p. 104. □

Lema 1.24 (Gronwall - Forma Diferencial)**.**

(i) Seja $\eta(.)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0,T]$, satisfazendo para todo t q.t.p. a inequação diferencial

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

$\varphi(t)$ e $\psi(t)$ não negativas, definidas em $[0,T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds}\, [\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds] \quad \text{para } 0 \leq t \leq T.$$

(ii) Em particular, se

$$\eta' \leq \phi\eta \quad \text{em} \quad [0,T] \quad \text{e} \quad \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em} \quad [0,T]. \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver L.C. Evans [11], p. 624. □

Lema 1.25 (Gronwall - Forma Integral)**.**

(i) Seja $\xi(.)$ uma função não negativa, integrável em $[0,T]$, satisfazendo para todo t q.t.p. a inequação integral

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2$$

com as constantes C_1, $C_2 \geq 0$. Então

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

para todo t q.t.p. em $[0,T]$.

(ii) Em particular, se

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds$$

para todo t q.t.p. em $[0,T]$, então

$$\xi(t) = 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad [0,T].$$

Demonstração. Ver L.C. Evans [11], p. 625. □

Teorema 1.26 (Ponto fixo de Leray-Schauder)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $T : [a,b] \times X \longrightarrow X$ uma transformação tal que $y = T(\lambda, x)$ com $x, y \in X$ e $\lambda \in [a,b]$. Suponha que:*

(a) $T(\lambda, x)$ está bem definida $\forall x \in X$ e $\forall \lambda \in [a, b]$;

(b) Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é contínua em X;

(c) Para $x \in A$, $A \subset X$ limitado, $T(\lambda, x)$ é uniformemente contínua em λ;

(d) Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é uma transformação compacta;

(e) Existe uma constante M tal que toda possível solução x de $x = T(\lambda, x)$ satisfaz $\|x\|_X \leq M$;

(f) A equação $x = T(a, x)$ tem uma única solução em X.

Então, existe uma solução da equação $x = T(b, x)$.

Demonstração. Ver A. Friedman [12], Teorema 3, p. 189 . □

Teorema 1.27 (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot\,,\cdot\,)$ e norma $||\cdot||$. Dado $\phi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \phi, v \rangle_{H',H} = (f, v), \quad \forall\ v \in H.$$

Além disso,

$$||f|| = ||\phi||_{H'}.$$

Demonstração. Ver M. M. Cavalcanti e V. N Cavalcanti [9], p. 156. □

1.3 Desigualdades e Convergências

Nesta seção enunciamos os principais resultados que envolvem desigualdades e convergências que usaremos no decorrer do texto com suas correspondentes referências.

Teorema 1.28 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f_1 \in L^{p_1}, f_2 \in L^{p_2}, ..., f_n \in L^{p_n}, n \in \mathbb{N}$, com $p_1, ..., p_n > 1$ e $\dfrac{1}{p_1} + ... + \dfrac{1}{p_n} = 1$. Então $f_1 \cdots f_n \in L^1$ e*

$$\int |f_1 \cdots f_n| \leq ||f_1||_{L^{p_1}} \cdots ||f_n||_{L^{p_n}}$$

Demonstração. Ver H. Brézis [7], p. 92. □

Proposição 1.29 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver R.G. Bartle [4], p. 56. □

Uma variação da desigualdade de Young que será muito utilizado neste trabalho é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 1.30. *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo $\varepsilon > 0$ tem-se*

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} ab &= (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} ab \\ &= \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right) \left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young segue

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right)^p + \frac{1}{q} \left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right)^q \\ &= \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}} a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Tomando $c(\varepsilon) = \dfrac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}}$ temos

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

□

Proposição 1.31. *Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p \geq 1$, então*

$$(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo obtemos

$$\begin{aligned} (a + b)^p &\leq (2 \max\{a, b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leq 2^p(a^p + b^p). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.32 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p) tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver H. Brezis [7], p. 218. □

Como consequência da desigualdade acima, a expressão $||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$ a expressão

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

define um produto interno que induz a norma $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ equivalente a norma de $||u||_{H^1(\Omega)}$.

Teorema 1.33. *Existe $(e_n)_{n\leq 1}$ de $L^2(\Omega)$ e uma sequência $(\lambda_n)_{n\leq 1}$, $\lambda_n > 0$, $\forall n$ e $\lambda_n \to +\infty$ tal que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \text{ e } -\delta e_n = \lambda_n e_n \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Ver L. C. Evans [11]. □

Lema 1.34. *Consideremos a base ortonormal completa do $L^2(\Omega)$, que consiste nas autofunções $\{w_k\}_{k\geq 1}$ do operador $-\Delta$ com condições de contorno de Dirichlet homogêneas associadas aos autovalores $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$. Seja V_m o espaço vetorial finito gerado por $\{w_k\}_{1\leq k\leq m}$. Denotamos por $P_m : L^2(\Omega) \longrightarrow V_m$ a projeção ortogonal sobre V_m. Supondo $f \in H_0^1(\Omega)$ então vale a seguintes estimativa do erro $f - P_m f$:*

$$||f - P_m f||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}}||\nabla f||^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_{m+1}}||f||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver S. Antonello [2], p. 16. □

Teorema 1.35 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre a uma função real mensurável f. Se existe função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f dx = lim \int f_n dx.$$

Demonstração. Ver R.G. Bartle [4], p. 44. □

Teorema 1.36. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$. Então $\eta_\varepsilon * f \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ quando $\varepsilon \to +\infty$, onde η_ε denota uma sequência de funções regularizantes em $\mathbb{R}^N$*

Demonstração. Ver H. Brezis [7], p. 109. □

Lema 1.37. *Seja D um aberto limitado de $\mathbb{R}^{N+1}$, N um inteiro positivo, g_m e g funções de $L^q(D)$, $1 < q < \infty$, tais que*

$$||g_m||_{L^q(D)} \leq c, \ (c > 0 \quad constante)$$

$$g_m \to g \quad \text{quase sempre em} \quad D.$$

Então,

$$g_m \to g \quad \textit{fracamente em} \quad L^q(D).$$

Demonstração. Ver J. L. Lions [19], p. 12. □

1.4 Distribuições

Os resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em Cavalcanti [8]. Por esse motivo não daremos referência para as demonstrações.

Seja τ a topologia em $C_0^\infty(\Omega)$ induzida pela seguinte noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$: diremos que a sequência ϕ_n converge a ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset \Omega$, tal que $\text{supp}\{\phi_n\} \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$ uniformemente para todo multi-índice α.

Definição 1.38 (Funções teste)**.** *Definimos o espaço das funções testes em Ω como sendo o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a topologia τ. Denotamos esse espaço por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Dizemos que um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é contínuo se satisfaz:

$$\phi_j \to \phi \ \text{ em } \ \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T(\phi_j) \to T(\phi) \ \text{ em } \ \mathbb{R}.$$

O dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.39 (Espaço das distribuições)**.** *Definimos por distribuições sobre Ω e denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Dizemos que $\{T_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se $T_j(\phi) \to T(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Com essa topologia, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é Hausdorff, então o limite em $\mathcal{D}'(\Omega)$ é único.

Definição 1.40 (Derivada de uma distribuição)**.** *Considere $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Definimos a derivada de T de ordem α (denotada por $D^\alpha T$) por*

$$\langle D\alpha^T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

É possível demosntrar que se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx$$

é uma distribuição em Ω. Do próximo lema (conhecido como Lema de Du Bois Raymond) segue que $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ q.t.p. em Ω.

Proposição 1.41 (Du Bois Raymond)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que, a distribuição T_u satisfaz*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração. Ver M. Cavalcanti e V. Cavalcanti [8], Proposição 4, p. 12. □

1.5 Operadores Setoriais, Semigrupos Analíticos e Problemas de Cauchy Abstrato

Nesta seção vamos recordar a definição de operadores setoriais para uma certa classe de operadores lineares não limitados. Tais propriedades, serão usadas no tratamento das equações semilineares presentes nos nossos modelos.

Definição 1.42. *Um operador linear A em um espaço de Banach X é* **setorial** *se: A é fechado com $\mathcal{D}(A)$ denso em X e existem constantes $C \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$ e $\gamma \in (0, \pi/2)$ tais que o setor aberto*

$$\Sigma = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \gamma \leq |\arg(\lambda - C)| \leq \pi,\, \lambda \neq C\Big\}$$

é um subconjunto do resolvente de A e

$$\left\|(\lambda\, I - A)^{-1}\right\| \leq m\,|\lambda - C|^{-1}, \quad \forall\, \lambda \in \Sigma.$$

Nesta seção vamos supor que:

$(\mathbf{H})$: A é um operador linear fechado com $\mathcal{D}(A)$ denso em X tal que

$$\Sigma^+ = \Big\{\lambda\,;\, 0 < \gamma < |\arg(\lambda)| \leq \pi\Big\} \cup V \subset \rho(A)$$

$$\left\|(\lambda\, I - A)^{-1}\right\| \leq C\,(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \forall\, \lambda \in \Sigma^+$$

com V uma vizinhança de zero e $\gamma \in (0, \pi/2)$.

Se A é setorial e satisfaz $(\mathbf{H})$, então por Pazy [24, Teorema 5.2, p.61], $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico $S(t)$.

Mas se A é apenas um operador setorial, temos ainda os seguintes resultados, veja Henry [14, Exemplo 3, p.19 e Teorema 1.3.4, p.20]

Proposição 1.43. *Se A é um operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S(t)$.*

Proposição 1.44. *Se A é um operador setorial em X, B é um operador setorial em Y, então $A \times B$, é setorial em $X \times Y$, onde $(A \times B)(x, y) = (Ax, By)$ para $x \in D(A)$ e $y \in D(B)$.*

O seguinte resultado nos dá um importante exemplo de operador setorial, veja para mais detalhes Pazy [24, Teorema 3.5, p.214].

Proposição 1.45. *Se ν é uma constante positiva, então $A = -\nu\Delta$, com*

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

é um operador setorial em $L^2(\Omega)$.

Em particular, temos que o operador

$$A = \begin{bmatrix} -\xi^2\Delta & 0_{1\times(2m)} \\ 0_{(2m\times 1)} & 0_{(2m)\times(2m)} \end{bmatrix}_{(2m+1)\times(2m+1)}$$

é setorial em $(L^2(\Omega))^{(2m+1)^2}$ para todo $m \geq 1$ inteiro.

Consideremos agora o seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + Au(t) &= f(t, u(t)), \; t \geq 0 \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

com $u(t) \in D(A)$.

Dizemos que $u(\cdot)$ é uma "mild-solution"do problema de valor inicial (1.1) se ela satisfaz

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds \quad \text{com} \quad 0 \leq t < T, \tag{1.2}$$

Neste caso, $u(\cdot)$ é automaticamente contínua.

As duas definições que se seguem, podem ser encontradas em sua forma mais geral em Henry [14, p. 53].

Definição 1.46. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$, dizemos que uma função $f : U \to L^2(\Omega)$ é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em $x \in U$ se para cada $(t_1, x_1) \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, x_1) e constantes $L \geq 0$, $0 < v \leq 1$ tais que*

$$\|f(t,x) - f(s,y)\|_{L^2(\Omega)} \leq L(|t-s|^v + \|x-y\|_{H_0^1(\Omega)}), \tag{1.3}$$

para todo $(t,x), (s,y) \in V$.

Definição 1.47. *Uma **solução** do problema (1.1) em (t_0, t_1) é uma função contínua $u : [t_0, t_1[\to L^2(\Omega)$ tal que $u(0) = u_0$ e em (t_0, t_1) temos $(t, u(t)) \in U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$, $u(t) \in D(A)$, u_t existe, $t \longmapsto f(t, u(t))$ é localmente Hölder contínua e*

$$\int_0^\rho \|f(t, u(t))\|_{L^2(\Omega)} dt < \infty,$$

para algum $\rho > 0$ e a equação (1.1) está definida em (t_0, t_1).

O seguinte teorema , será aplicado para obter um resultado de existência e unicidade local (no sentido da Definição 1.47) para o problema (1)(para mais detalhes, veja Henry [14, Teorema 3.3.3, p.54]).

Proposição 1.48. *Suponhamos que A é um operador setorial e $f : U \to L^2(\Omega)$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$, $f(t,u)$ é localmente Lipschitziana em $u \in U$ e localmente Hölder contínua em t, com expoente $0 < v \leq 1$, então para cada dado inicial $(t_0, u_0) \in U$, existe $t_1 = t_1(t_0, x_0) > t_0$ tal que o problema de valor inicial (1.1) tem uma única solução local u em (t_0, t_1), $u \in C([t_0, t_1]; H_0^1(\Omega))$.*

O próximo resultado dá algumas condições suficientes para que se possa concluir que a solução, local no tempo, obtida pela Proposição 1.48 é de fato global, ou seja, que tal solução existe para todo $t \geq t_0$. Sua demonstração pode ser encontrada em Henry [14, Teorema 3.3.4, p. 55].

Proposição 1.49. *Suponha que A e f são como na Proposição 1.48 e também que, para cada conjunto limitado e fechado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Se u é uma solução de (1.1) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, ou seja, não existe solução de (1.1) em (t_0, t_2) se $t_2 > t_1$, então ou $t_1 = +\infty$ ou existe uma sequência $t_n \to t_1^-$ quando $n \to +\infty$ tal que $(t_n, u(t_n)) \to \partial U$. (Se U é ilimitado, o ponto no infinito está incluído em ∂U).*

Capítulo 2

Resultado Principal e Lema Auxiliar

Neste capítulo apresentaremos o principal resultado do trabalho e provaremos um lema auxiliar que vai nos permitir provar a existência de solução para a primeira equação do problema (2.1)-(2.5). Os demais resultados deste capítulo, mesmo quando não mencionado, também são válidos para $N = 1$.

2.1 Resultado Principal

Consideremos o problema

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta\varphi = \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi) - |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2 \theta) \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.1}$$

$$\theta_t + \ell\varphi_t - \operatorname{div}(k(\varphi, \theta, c)\nabla\theta) = f(x, t) \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.2}$$

$$c_t - \operatorname{div}(D_1(\varphi, \theta, c)\nabla c + D_2(\varphi, \theta, c)\nabla\varphi) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.3}$$

$$\varphi = 0,\ \theta = 0,\ c = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.4}$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x),\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ e } c(x, 0) = c_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

e suponhamos que:

$$\begin{array}{ll} (H_1) & \Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N = 1, 2 \text{ ou } 3, \text{ é um domínio limitado de classe } C^2; \\ & 0 < T < +\infty; Q = \Omega \times (0, T); \\ (H_2) & k \in C(\mathbb{R}^N) \text{ é Lipschitziana e } 0 < k_1 \leq k(.) \leq k_2 < +\infty; \\ (H_3) & D_1 \in C(\mathbb{R}^N) \text{ é Lipschitziana e } 0 < \rho_1 \leq D_1(.) \leq \rho_2 < +\infty; \\ (H_4) & D_2 \in C(\mathbb{R}^N) \text{ é Lipschitziana e } |D_2(.)| \leq \rho_3 < +\infty. \end{array} \tag{2.6}$$

Agora, enunciaremos o principal teorema do trabalho que provaremos no capítulo seguinte.

Teorema 2.1. *Supondo* $(H_1)-(H_4)$, $f \in L^2(Q)$, $(\varphi_0, \theta_0, c_0) \in H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2$, *com* $0 \leq \varphi_0 \leq 1$ *e* $q = \frac{N+2}{N+1}$, *onde* $N = 2$ *ou* 3, *denotando* $V_0(Q) = L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, *existe uma solução fraca* (φ, θ, c) *do problema* (2.1)-(2.5) *no seguinte sentido:*

$$\varphi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap W_q^{2,1}(Q), \;\; (\theta, c) \in (V_0(Q))^2, \tag{2.7}$$

$$((\theta + \ell_\varphi)_t, c_t) \in (L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)))^2, \tag{2.8}$$

$$(\varphi(0), \theta(0), c(0)) = (\varphi_0, \theta_0, c_0),$$

e

$$\langle (\theta + \ell_\varphi)_t, v_1 \rangle + \int_\Omega k(\varphi, \theta, c) \nabla\theta \nabla v_1 dx = \int_\Omega f v_1 dx, \tag{2.9}$$

$$\langle c_t, v_2 \rangle + \int_\Omega D_1(\varphi, \theta, c) \nabla c \nabla v_2 dx + \int_\Omega D_2(\varphi, \theta, c) \nabla\varphi \nabla v_2 dx = 0, \tag{2.10}$$

para todos $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$, *q.t.p em* $(0,T)$,

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta\varphi = \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi) - |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2 \theta) \quad q.t.p. \;\; em \;\; Q, \tag{2.11}$$

$$\varphi = 0 \quad q.t.p. \;\; em \;\; S. \tag{2.12}$$

2.2 Problemas Auxiliares

Inicialmente consideremos o seguinte problema auxiliar:

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta\varphi = F(\varphi) + g \;\; \text{em} \;\; Q = \Omega \times (0,T) \tag{2.13}$$

$$\varphi = 0 \;\; \text{em} \;\; S, \;\; \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \tag{2.14}$$

que foi tratado por Morosanu e Montreanu (Ver [23], p. 519) para o caso de condição de contorno de Neumann e uma parte geral $F(\varphi)$ não-linear, que inclui a não linearidade $\varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi)$ que aparece em nosso problema. A mesma prova apresentada em [23] para a existência e unicidade se mantém para o problema com a condição de contorno de Dirichlet, nós apenas vamos enunciar o resultado de existência e unicidade correspondente para os problemas (2.13) e (2.14), que é o que trata a próxima proposição. Para ver a definição e outros detalhes relacionados ao espaço fracionário $W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$ citado na proposição seguinte, consultar A. Fursikov [13].

Proposição 2.2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$ *ou* 3 *um domínio aberto e limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^2 *e* $Q = \Omega \times (0, T)$, *o cilindro espaço-tempo com superfície lateral* $S = \partial\Omega \times (0, T)$. *Suponhamos que* $F(\varphi) = \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi)$, $g \in L^q(Q)$ *para* $q \geq 2$ *e* $\varphi_0 \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$, *com* $\varphi_0 = 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então, existe uma única solução* $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ *para os problemas (2.13) e (2.14), que satisfaz a estimativa*

$$\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq M(\|\varphi_0\|_{W^{m,q}(\Omega)} + \|g\|_{L^q(Q)})$$

onde $m = 2 - 2/q$ *e* M *depende só de* Ω, T *e* q.

Demonstração. Ver Morosanu e Motreanu [23], p. 519. □

Em seguida, vamos considerar outro problema auxiliar mais parecido com a equação de campo de fase de nosso problema original:

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta\varphi = \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi) - |\nabla\varphi| h \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.15}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{em} \quad S, \ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.16}$$

Agora, consideremos o seguinte princípio de máximo para os problemas (2.15) e (2.16).

Lema 2.3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$ *ou* 3 *um domínio aberto e limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^2 *e* $Q = \Omega \times (0, T)$, *o cilindro espaço-tempo com superfície lateral* $S = \partial\Omega \times (0, T)$. *Suponha que o dado inicial* $\varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$ *com* $0 \leq \varphi_0(x) \leq 1$ *para todo* x *q.t.p. em* Ω *e* $h \in L^\infty(Q)$. *Então, para qualquer* $T > 0$ *e* $q = \frac{N+2}{N+1}$, *qualquer solução fraca* $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W_q^{2,1}(Q)$ *dos problemas (2.15) e (2.16) satisfaz* $0 \leq \varphi(x, t) \leq 1$ $\forall t \in [0, T]$ *e* $\forall x \in \Omega$ *q.t.p.*

Demonstração. Temos que

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

onde φ^+ e φ^- são, respectivamente, a parte positiva e negativa de φ. Multiplicando (2.15) por φ^- e depois integrando em Ω vem que

$$\int_\Omega \varphi_t \varphi^- dx - \xi^2 \int_\Omega \Delta\varphi \ \varphi^- dx = \int_\Omega \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi)\varphi^- dx - \int_\Omega |\nabla\varphi| h \varphi^- dx.$$

E como

$$D\varphi^+ = \begin{cases} \varphi_t & \text{se} \quad \varphi \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \varphi < 0 \end{cases}$$

e

$$D\varphi^- = \begin{cases} -\varphi_t & \text{se} \quad \varphi < 0 \\ 0 & \text{se} \quad \varphi \geq 0 \end{cases}$$

onde $D\varphi^+$ e $D\varphi^-$ indica a derivada em relação a $t \in [0,T]$, respectivamente, da parte positiva e negativa de φ. Logo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_t \varphi^- dx = \int_\Omega (\varphi_t^+ - \varphi_t^-)\varphi^- dx &= \int_\Omega \varphi_t^+ \varphi^- dx - \int_\Omega \varphi_t^- \varphi^- dx \\ &= -\int_\Omega \varphi_t^- \varphi^- dx, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}-\xi^2 \int_\Omega \Delta\varphi\ \varphi^- dx = \xi^2 \int_\Omega \nabla\varphi \nabla\varphi^- dx &= -\xi^2 \int_\Omega \nabla\varphi^- \nabla\varphi^- dx \\ &= -\xi^2 \int_\Omega |\nabla\varphi^-|^2 dx, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi)\varphi^- dx &= \int_\Omega (-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3)\varphi^- dx \\ &= \int_\Omega ((\varphi^-)^2 + 3(\varphi^-)^3 + 2(\varphi^-)^4) dx \end{aligned} \tag{2.19}$$

e usando a desigualdade de Young com $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{\xi^2}$ e $\varepsilon = \dfrac{\xi^2}{2}$ vem que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\varphi|\varphi^- h dx &\leq \int_\Omega (|\nabla\varphi^+| + |\nabla\varphi^-|)\varphi^- |h| dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\varphi^-|\ \varphi^-\ |h| dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla\varphi^-|\ \varphi^-\ ||h||_{L^\infty(Q)} dx \\ &\leq \frac{\xi^2}{2} \int_\Omega |\nabla\varphi^-|^2 dx + C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)} \int_\Omega (\varphi^-)^2 dx. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Daí, de (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) obtemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi_t^- \varphi^- dx + \xi^2 \int_\Omega |\nabla\varphi^-|^2 dx \\ \leq\ & -\int_\Omega ((\varphi^-)^2 + 3(\varphi^-)^3 + 2(\varphi^-)^4) dx \\ +\ & \frac{\xi^2}{2} \int_\Omega |\nabla\varphi^-|^2 dx + C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)} \int_\Omega (\varphi^-)^2 dx. \end{aligned}$$

Como $-\displaystyle\int_\Omega ((\varphi^-)^2 + 3(\varphi^-)^3 + 2(\varphi^-)^4) dx \leq 0$, resulta que

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varphi^-(t))^2 dx + \Big(\xi^2 - \frac{\xi^2}{2}\Big) \int_\Omega |\nabla\varphi^-|^2 dx \leq C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)} \int_\Omega (\varphi^-)^2 dx.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(\varphi^{-}(t))^2dx \leq 2C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)}\int_{\Omega}(\varphi^{-}(t))^2dx.$$

Fazendo

$$\eta(t) = \int_{\Omega}(\varphi^{-}(t))^2dx = ||\varphi^{-}(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$

temos que

$$\frac{d}{dt}\eta(t) \leq 2C(\varepsilon)||h||_{L^\infty(Q)}\eta(t) \;\text{ e }\; \eta(0) = \int_{\Omega}(\varphi_0^{-})^2dx = 0,$$

e então, pelo Lema de Gronwall, resulta que

$$\eta(t) \equiv 0 \;\text{ para todo }\; t \in [0,T], \tag{2.21}$$

ou seja,

$$||\varphi^{-}(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Daí

$$||\varphi^{-}(t)||_{L^2(\Omega)} = 0,$$

o que implica

$$\varphi^{-}(t) = 0,$$

para todo $t \in [0,T]$.

Portanto,

$$\varphi(t) = \varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t) = \varphi^{+}(t) \geq 0,$$

e então,

$$\varphi(t) \geq 0 \;\text{ para todo }\; t \in [0,T].$$

Agora, multiplicando (2.15) por $(\varphi-1)^{+}$ e depois integrando em Ω e observando que $\varphi_t = (\varphi-1)_t$, $\Delta\varphi = \Delta(\varphi-1)$ e $\nabla\varphi = \nabla(\varphi-1)$, segue que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}(\varphi-1)_t(\varphi-1)^{+}dx - \xi^2\int_{\Omega}\Delta(\varphi-1)(\varphi-1)^{+}dx \\ =&\int_{\Omega}\varphi(\varphi-1)(1-2\varphi)(\varphi-1)^{+}dx - \int_{\Omega}|\nabla\varphi|h(\varphi-1)^{+}dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\varphi-1)_t(\varphi-1)^+dx &= \int_\Omega ((\varphi-1)_t^+ - (\varphi-1)_t^-)(\varphi-1)^+dx \\
&= \int_\Omega (\varphi-1)_t^+(\varphi-1)^+dx - \int_\Omega (\varphi-1)_t^-(\varphi-1)^+dx \\
&= \int_\Omega (\varphi-1)_t^+(\varphi-1)^+dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\Big((\varphi-1)^+\Big)^2\Big]dx, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\xi^2\int_\Omega \Delta(\varphi-1)\ (\varphi-1)^+dx &= \xi^2\int_\Omega \nabla(\varphi-1)\nabla(\varphi-1)^+dx \\
&= \xi^2\int_\Omega ((\nabla\varphi-1)^+ - (\nabla\varphi-1)^-)\nabla(\varphi-1)^+dx \\
&= \xi^2\int_\Omega |\nabla(\varphi-1)^+|^2dx, \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi)(\varphi-1)^+dx &= \int_\Omega (\varphi-1+1)(\varphi-1)(1-2\varphi)(\varphi-1)^+dx \\
&= \int_\Omega (\varphi-1)(\varphi-1)(1-2\varphi)(\varphi-1)^+dx \\
&+ \int_\Omega (\varphi-1)(1-2\varphi)(\varphi-1)^+dx \\
&= \int_\Omega (\varphi-1)^2(\varphi-1)^+dx \\
&- 2\int_\Omega (\varphi-1)^2\varphi(\varphi-1)^+dx \\
&+ \int_\Omega (\varphi-1)(1-\varphi-\varphi)(\varphi-1)^+dx \\
&= \int_\Omega (\varphi-1)^2(\varphi-1)^+dx \\
&- 2\int_\Omega (\varphi-1)^2\varphi(\varphi-1)^+dx \\
&- \int_\Omega (\varphi-1)^2(\varphi-1)^+dx \\
&- \int_\Omega \varphi(\varphi-1)(\varphi-1)^+dx \\
&= -2\int_\Omega (\varphi-1)^2\varphi(\varphi-1)^+dx \\
&- \int_\Omega \varphi(\varphi-1)(\varphi-1)^+dx. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Como já mostramos que $\varphi(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,T]$, então

$$-2\int_\Omega (\varphi-1)^2\varphi(\varphi-1)^+dx \leq 0.$$

Daí, de (2.24) obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi)(\varphi-1)^+dx &\leq -\int_\Omega \varphi(\varphi-1)(\varphi-1)^+dx\\ &= -\int_\Omega \varphi\Big((\varphi-1)^+-(\varphi-1)^-\Big)(\varphi-1)^+dx\\ &= -\int_\Omega \varphi((\varphi-1)^+)^2dx\\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

e usando a desigualdade de Young com $C(\varepsilon)=\dfrac{1}{\xi^2}$ e $\varepsilon=\dfrac{\xi^2}{2}$ vem que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla(\varphi-1)|(\varphi-1)^+hdx\\ \leq\ & \int_\Omega (|\nabla(\varphi-1)^+|+|\nabla(\varphi-1)^-|)(\varphi-1)^+|h|dx\\ =\ & \int_\Omega |\nabla(\varphi-1)^+|\ (\varphi-1)^+\ |h|dx\\ \leq\ & \int_\Omega |\nabla(\varphi-1)^+|\ (\varphi-1)^+\ ||h||_{L^\infty(Q)}dx\\ \leq\ & \frac{\xi^2}{2}\int_\Omega |\nabla(\varphi-1)^+|^2dx + C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)}\int_\Omega((\varphi-1)^+)^2dx. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Daí, de (2.22), (2.23), (2.25) e (2.26) obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\Big((\varphi-1)^+\Big)^2\Big]dx + \xi^2\int_\Omega |\nabla(\varphi-1)^+|^2dx \leq -\int_\Omega \varphi((\varphi-1)^+)^2dx\\ +\frac{\xi^2}{2}\int_\Omega |\nabla(\varphi-1)^+|^2dx + C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)}\int_\Omega((\varphi-1)^+)^2dx\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\Big((\varphi-1)^+\Big)^2\Big]dx + \Big(\xi^2-\frac{\xi^2}{2}\Big)\int_\Omega |\nabla(\varphi-1)^+|^2dx\\ \leq\ & C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)}\int_\Omega((\varphi-1)^+)^2dx,\end{aligned}$$

e daí

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega((\varphi(t)-1)^+)^2dx \leq C(\varepsilon)||h||^2_{L^\infty(Q)}\int_\Omega((\varphi(t)-1)^+)^2dx.$$

Fazendo

$$\psi(t) = \int_{\Omega} ((\varphi(t) - 1)^+)^2 dx = ||(\varphi(t) - 1)^+||^2_{L^2(\Omega)}$$

temos que

$$\frac{d}{dt}\psi(t) \leq 2C(\varepsilon)||h||_{L^\infty(Q)}\psi(t) \ \text{ e } \ \psi(0) = \int_{\Omega} ((\varphi_0 - 1)^+)^2 dx = 0,$$

e então, pelo Lema de Gronwall,

$$\psi(t) \equiv 0 \ \text{ para todo } \ t \in [0, T] \tag{2.27}$$

se, e somente se,

$$||(\varphi(t) - 1)^+||^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$

e daí

$$||(\varphi(t) - 1)^+||_{L^2(\Omega)} = 0,$$

o que implica

$$(\varphi(t) - 1)^+ = 0,$$

para todo $t \in [0, T]$.

E assim,

$$\varphi(t) - 1 = (\varphi(t) - 1)^+ - (\varphi(t) - 1)^- = -(\varphi(t) - 1)^- \leq 0,$$

e então,

$$\varphi(t) - 1 \leq 0,$$

para todo $t \in [0, T]$, ou seja,

$$\varphi(t) \leq 1 \ \text{ para todo } \ t \in [0, T].$$

Portanto,

$$0 \leq \varphi(x, t) \leq 1 \ \text{ para todo } \ t \in [0, T] \ \text{ e } \ x \in \Omega \ \text{ q.t.p.}.$$

□

Em seguida, vamos considerar a questão da existência de soluções para os problemas (2.15) e (2.16). Para isso, vamos apresentar e estudar uma sequência de problemas regularizados dependendo de um parâmetro auxiliar positivo ε. Vamos então obter uma solução de (2.15) e (2.16) como o limite das soluções destes problemas regularizados quando o parâmetro se aproxima de zero.

Os problemas regularizados são obtidos como se segue:

Primeiramente definamos

$$h_{ext} = \begin{cases} h & \text{se } (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ 0 & \text{se } (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} - (\Omega \times (0,T)) \end{cases}$$

em seguida

$$\gamma_\varepsilon = h_{ext} * \eta_\varepsilon$$

onde η_ε denota uma sequência de funções regularizantes em $\mathbb{R}^{N+1}$ e $*$ indica o produto de convolução como definido no Teorema 1.23. Os problemas regularizados são aqueles com h substituído por γ_ε. Para este tipo de problema, temos um lema que será estudado na próxima seção.

2.3 Lema Auxiliar

Lema 2.4. *Fixemos $\varepsilon \in (0,1]$ e suponhamos que $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, onde $0 \leq \varphi_0 \leq 1$. Então, existe uma única solução $\varphi_\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q)$ do seguinte problema:*

$$\varphi_{\varepsilon,t} - \xi^2 \Delta \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\varphi_\varepsilon - 1)(1 - 2\varphi_\varepsilon) - |\nabla \varphi_\varepsilon| \gamma_\varepsilon \quad em \quad Q, \tag{2.28}$$

$$\varphi_\varepsilon = 0 \quad em \quad S, \; \varphi_\varepsilon(x,0) = \varphi_0(x) \quad em \quad \Omega. \tag{2.29}$$

Além disso, φ_ε é uniformemente limitada em relação a ε em $L^2(0,T;H_0^1(\mathit{\Omega})) \cap W_q^{2,1}(Q)$ com $q = \frac{N+2}{N+1}$.

Demonstração. Para provar o lema usaremos o Teorema 1.26 (Ponto fixo de Leray-Schauder).

Por simplicidade de notação, omitiremos o subescrito ε. Consideramos então a aplicação:
$\Phi : [0,1] \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ onde $\Phi(\lambda,\psi) = \varphi$, onde φ é solução única do problema:

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta \varphi = \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi) - \lambda |\nabla \psi| \gamma \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.30}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{em} \quad S, \; \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.31}$$

(a) Para verificar que $\Phi(\lambda,.)$ está bem definida, observemos que pela Proposição 2.2 com $g = -\lambda |\nabla \psi| \gamma \in L^2(Q)$ e $q = 2$ temos que o problema (2.30)-(2.31) tem uma única solução $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1(\mathit{\Omega}))$, ou seja, $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\mathit{\Omega}))$ e como $\varphi(x,t) = 0$ em S, então $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\mathit{\Omega}))$.

(b) Para verificar a continuidade de $\Phi(\lambda,.)$, seja $(\lambda,\psi_n) \to (\lambda,\psi)$ em $[0,1] \times L^2(0,T;H_0^1(\mathit{\Omega}))$. Denotamos $\Phi(\lambda,\psi_n) = \varphi_n$, e escrevemos

$$\varphi_{n,t} - \xi^2 \Delta \varphi_n = \varphi_n(\varphi_n - 1)(1 - 2\varphi_n) - \lambda |\nabla \psi_n| \gamma \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.32}$$

$$\varphi_n = 0 \quad \text{em} \quad S, \; \varphi_n(x,0) = \varphi_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.33}$$

Do fato de $\{\lambda, \psi_n\}$ ser limitada e usando a Proposição 2.2 obtemos que $\|\varphi_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq M$, e então $\{\varphi_n\}$ é uniformemente limitada em relação a n em $W_2^{2,1}(Q)$. Além disso, pela Proposição 1.19, $W_2^{2,1}(Q)$ está imerso compactamente em $L^\mu(Q)$ com $2 \leq \mu < 10$ e $N = 2$ ou 3.
Assim, existe $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ e uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ de $\{\varphi_n\}$ tal que quando $n \to \infty$

$$\varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi \text{ em } W_2^{2,1}(Q)$$

$$\varphi_{n_k} \to \varphi \text{ em } L^9(Q).$$

Desse modo, conseguimos provar via Teorema de Riesz que $\Phi(\lambda, \psi) = \varphi$ é solução de (2.30)-(2.31).

Notemos que, para qualquer subsequência de $\{\Phi(\lambda, \psi_{n_k})\}$ podemos usar o mesmo argumento anterior para concluir que esta subsequência admite outra subsequência que converge para uma solução de (2.30) e (2.31), e como ψ é fixo e a solução de (2.30) e (2.31) é única, então a sequência $\{\Phi(\lambda, \psi_n)\}$ tem a propriedade de que qualquer uma de suas subsequências tem por sua vez uma subsequência que converge para o mesmo limite, a saber $\Phi(\lambda, \psi) = \varphi$ que é solução de (2.30) e (2.31), então $\{\Phi(\lambda, \psi_n)\}$ converge para esse mesmo limite, ou seja, $\Phi(\lambda, \psi_n) \to \varphi = \Phi(\lambda, \psi)$. Portanto, se $(\lambda, \psi_n) \to (\lambda, \psi)$ então, $\Phi(\lambda, \psi_n) \to \Phi(\lambda, \psi)$, e assim a continuidade de Φ é provada.

(c) Seja $\psi \in A$, com $A \subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ limitado, ou seja, existe uma constante $K > 0$ tal que $\|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq K$, $\forall \psi \in A$.

Sejam $\varphi_1 = \Phi(\lambda_1, \psi)$ e $\varphi_2 = \Phi(\lambda_2, \psi)$, temos então que

$$\begin{cases} (\varphi_1)_t - \xi^2 \Delta \varphi_1 = \varphi_1(\varphi_1 - 1)(1 - 2\varphi_1) - \lambda_1 |\nabla \psi| \gamma \ \text{ em } \ Q, \\ \varphi_1 = 0 \ \text{ em } \ S, \ \varphi_1(x, 0) = \varphi_0(x) \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\begin{cases} (\varphi_2)_t - \xi^2 \Delta \varphi_2 = \varphi_2(\varphi_2 - 1)(1 - 2\varphi_2) - \lambda_2 |\nabla \psi| \gamma \ \text{ em } \ Q, \\ \varphi_2 = 0 \ \text{ em } \ S, \ \varphi_2(x, 0) = \varphi_0(x) \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{2.35}$$

Definamos $w = \varphi_1 - \varphi_2 = \Phi(\lambda_1, \psi) - \Phi(\lambda_2, \psi)$.
Fazendo (2.34) - (2.35) temos:

$$\begin{cases} w_t - \xi^2 \Delta w = (\varphi_1 - \varphi_2)(-1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)) - \\ \qquad\qquad (\lambda_1 - \lambda_2)|\nabla \psi| \gamma \ \text{ em } \ Q \\ w = 0 \ \text{ em } \ S, \ w(x, 0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{2.36}$$

Tomando $R(x, t) := -1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)$ em (2.36), temos

$$\begin{cases} w_t - \xi^2 \Delta w = w\, R(x, t) - (\lambda_1 - \lambda_2)|\nabla \psi| \gamma \ \text{ em } \ Q \\ w = 0 \ \text{ em } \ S, \ w(x, 0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{2.37}$$

Note que $R(x, t) \in L^{9/2}(0, T; L^2(\Omega))$. De fato, temos que

$$\int_Q (\varphi_1^2)^{9/2} dxdt = \int_Q (\varphi_1)^9 dxdt < +\infty,$$

pois, pelo Lema 1.19, $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^\mu(Q)$, com $2 \leq \mu < 10$ para $N = 2$ ou 3, então, $\varphi_1 \in L^9(Q)$, e de forma análoga provamos que

$$\int_Q (\varphi_2)^9 dxdt < +\infty.$$

Daí, pela desigualdade de Young, vem que

$$\int_Q (\varphi_2\varphi_2)^{9/2} dxdt \leq \frac{1}{2}\int_Q (\varphi_1)^9 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (\varphi_1)^9 dxdt < +\infty.$$

Logo,

$$\varphi_2\varphi_2 \in L^{9/2}(Q),$$

e como

$$L^{9/2}(Q) = L^{9/2}(0,T;L^{9/2}(\Omega)) \subset L^{9/2}(0,T;L^2(\Omega)),$$

então, φ_1, φ_2 e $\varphi_1\varphi_2$ pertencem a $L^{9/2}(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto,

$$R(x,t) \in L^{9/2}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Pelo Lema 1.21, vem que

$$\begin{aligned}
\|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq M(|\lambda_1 - \lambda_2|\||\nabla\psi|\gamma\|_{L^2(Q)}) \\
&\leq M|\lambda_1 - \lambda_2|\|\gamma\|_{L^\infty(Q)}\|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\leq M\,K|\lambda_1 - \lambda_2|\|\gamma\|_{L^\infty(Q)}
\end{aligned}$$

onde M é uma constante que depende de T e Ω.

Assim,

$$\|\Phi(\lambda_1,\psi) - \Phi(\lambda_2,\psi)\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq M\,K\|\gamma\|_{L^\infty(Q)}|\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Logo, pela continuidade da imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e usando o fato de $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ temos

$$\|\Phi(\lambda_1,\psi) - \Phi(\lambda_2,\psi)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\,M\,K\|\gamma\|_{L^\infty(Q)}|\lambda_1 - \lambda_2| \quad \forall\ \psi \in A.$$

Portanto, Φ é lipschitziana em relação a λ e então uniformemente contínua em λ.

(d) Pela Proposição 2.2 temos que $\varphi \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $\varphi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e como $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então $\varphi \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, e como

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

pelo Lema 1.20 vem que

$$W = L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap\{\varphi;\varphi_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Podemos escrever o operador Φ da seguinte forma

$$[0,1] \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow W \longrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

ou seja, Φ é a composição do operador solução com o operador inclusão, onde este último é compacto. Portanto, Φ é compacto.

(e) Mostraremos agora que se $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal que $\Phi(\lambda,\varphi) = \varphi$, com $\lambda \in [0,1]$, então existe uma constante β tal que

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < \beta.$$

Lembramos que o ponto fixo $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é solução do problema

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) - \lambda|\nabla\varphi|\gamma \ \text{ em } \ Q, \tag{2.38}$$
$$\varphi = 0 \ \text{ em } \ S, \ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \ \text{ em } \ \Omega. \tag{2.39}$$

Multiplicando (2.38) por φ, depois integrando o resultado em Ω, usando que o $\max\limits_{s\in\mathbb{R}}\{3s-2s^2-1\}$ é finito, a identidade de Green e a desigualdade de Young com $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\xi^2}$ e $\varepsilon = \dfrac{\xi^2}{2}$, obtemos

$$\int_\Omega \varphi_t\varphi dx - \xi^2\int_\Omega(\Delta\varphi)\varphi dx = \int_\Omega \varphi^2(\varphi-1)(1-2\varphi)dx - \lambda\int_\Omega|\nabla\varphi|\gamma\varphi dx,$$

e daí,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\int_\Omega|\nabla\varphi(t)|^2dx \ &\leq \ \int_\Omega \varphi(t)^2(3\varphi(t)-2\varphi(t)^2-1)dx \\ &+ \ \frac{\xi^2}{2}\int_\Omega|\nabla\varphi(t)|^2dx \\ &+ \ C(\varepsilon)||\gamma(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\varphi(t)^2dx,\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\xi^2-\frac{\xi^2}{2})\|\nabla\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \ &\leq \ \widetilde{M}\int_\Omega\varphi(t)^2dx \\ &+ \ C(\varepsilon)||\gamma(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\varphi(t)^2dx,\end{aligned}$$

onde $\widetilde{M} = \max\limits_{s\in\mathbb{R}}\{3s-2s^2-1\}$, e consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(2\,\widetilde{M} + 2C(\varepsilon)||\gamma(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big)\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

de onde concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M(1+\|\gamma(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde $M = \max\{2\,\widetilde{M}, 2C(\varepsilon)\}$, e então,

$$\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M(1+\|\gamma(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.41}$$

e aplicando o lema de Gronwall a última inequação, temos

$$\|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_1\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)},$$

e portanto,

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq M_1\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.42}$$

Integrando (2.40) de 0 a T e usando a desigualdade de Poincaré temos,

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq M_2\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.43}$$

E então, de (2.42) e (2.43) obtemos

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq M_3\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}$$

e tomando $\beta > M_3\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}$ obtemos o resultado.

(f) Agora, consideremos $\Phi(0,\varphi) = \varphi$, solução do problema

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.44}$$
$$\varphi = 0 \quad \text{em} \quad S, \;\; \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.45}$$

A existência de solução única para as equações (2.44) e (2.45) é dada pela Proposição 2.2.

Portanto, usando o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder com $\lambda = 1$, existe uma solução $\varphi \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ para os problemas (2.28) e (2.29).

Para provar que φ_ε é uniformemente limitada em relação a ε em $L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap W^{2,1}_q(Q)$ com $q = \frac{N+2}{N+1}$, multiplicamos (2.28) por φ_ε, integramos em Ω, usamos a identidade de Green, o fato do $\max\limits_{s\in\mathbb{R}}\{3s-2s^2-1\}$ ser finito, o princípio de máximo dado pelo Lema 2.3, a identidade de Young e depois integrando todo o resultado de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\varphi_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\xi^2 - \frac{\xi^2}{2})\|\nabla\varphi_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_1\|\varphi_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ M_2\|\gamma_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.46}$$

e aplicando o lema de Gronwall, temos

$$\|\varphi_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_3(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)}),$$

e do Teorema 1.23, temos $\|\gamma_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq \|h\|_{L^2(Q)}$, e por conseguinte

$$\|\varphi_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_3(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(Q)}).$$

Integrando a inequação (2.46) de 0 a T, concluímos que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq M_4(\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(Q)}), \tag{2.47}$$

onde M_4 depende de T, Ω, ξ, e independe de ε. Em seguida, usamos a Proposição 2.2 com $g_\varepsilon = |\nabla\varphi_\varepsilon|\gamma_\varepsilon$ no lugar de g e $q = 2$. Observamos que $\nabla\varphi_\varepsilon \in L^2(Q)$, e tomando $h \in L^r(Q)$ com $r = 2(N+2)/N$, então do Teorema 1.23 obtemos $\gamma_\varepsilon \in L^r(Q)$ tal que $\|\gamma_\varepsilon\|_{L^r(Q)} \leq \|h\|_{L^r(Q)}$. Consequentemente, $g_\varepsilon \in L^q(Q)$ com $q = (N+2)/(N+1)$, além disso,

$$\|g_\varepsilon\|_{L^q(Q)} \leq ||\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2(Q)}\|h\|_{L^r(Q)}.$$

Assim, usando a Proposição 2.2 temos que $\varphi_\varepsilon \in W^{2,1}_q(Q)$, com $q = (N+2)/(N+1)$ tal que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{W^{2,1}_q(Q)} \leq M_5(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2(Q)}\|h\|_{L^r(Q)}).$$

Finalmente, de (2.47) obtemos

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{W^{2,1}_q(Q)} \leq M_6(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(Q)}), \tag{2.48}$$

onde M_6 depende de T, Ω, $\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}$, e $\|h\|_{L^2(\Omega)}$, mas independe de ε.

Agora, provaremos a unicidade da solução de (2.28) e (2.29).

Suponhamos que existam φ_1 e φ_2 soluções de (2.28) e (2.29), logo

$$\begin{cases} (\varphi_1)_t - \xi^2\Delta\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_1 - 1)(1 - 2\varphi_1) - |\nabla\varphi_1|\gamma \;\text{ em }\; Q, \\ \varphi_1 = 0 \;\text{ em }\; S, \;\varphi_1(x,0) = \varphi_0(x) \;\text{ em }\; \Omega. \end{cases} \tag{2.49}$$

$$\begin{cases} (\varphi_2)_t - \xi^2\Delta\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_2 - 1)(1 - 2\varphi_2) - |\nabla\varphi_2|\gamma \;\text{ em }\; Q, \\ \varphi_2 = 0 \;\text{ em }\; S, \;\varphi_2(x,0) = \varphi_0(x) \;\text{ em }\; \Omega. \end{cases} \tag{2.50}$$

Definamos $w = \varphi_1 - \varphi_2$. Fazendo (2.49) - (2.50) temos:

$$\begin{cases} w_t - \xi^2\Delta w = (\varphi_1 - \varphi_2)(-1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)) - \\ \qquad\qquad (|\nabla\varphi_1| - |\nabla\varphi_2|)\gamma \;\text{ em }\; Q, \\ w = 0 \;\text{ em }\; S, \;w(x,0) = 0 \;\text{ em }\; \Omega. \end{cases} \tag{2.51}$$

Tomando $R(x,t) := -1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)$ em (2.51), temos

$$\begin{cases} w_t - \xi^2 \Delta w = w\, R(x,t) - (|\nabla\varphi_1| - |\nabla\varphi_2|)\gamma \ \text{ em } \ Q, \\ w = 0 \ \text{ em } \ S, \ w(x,0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{2.52}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.52) por $w(t) \in H_0^1(\Omega)$ e integrando em Ω vem que

$$\int_\Omega w(t)_t w(t) dx - \xi^2 \int_\Omega \Delta w(t) w(t) dx = \int_\Omega w^2(t)\, R(x,t) dx - \int_\Omega (|\nabla\varphi_1| - |\nabla\varphi_2|) w(t)\gamma dx$$

e como pela identidade de Green

$$\int_\Omega \Delta w(t) dx = -\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx$$

e usando o fato de $\gamma \in L^\infty(Q)$ e que

$$\int_\Omega w_t(t) w(t) dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2(t) dx$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2(t)dx + \xi^2 \int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx &\le \int_\Omega w^2(t)\, R(x,t) dx \\ &+ ||\gamma||_{L^\infty(Q)} \int_\Omega |\ |\nabla\varphi_1| - |\nabla\varphi_2|\ |\ |w(t)| dx. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} R(x,t) &:= -1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) \\ &= -1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2 \\ &\le -1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\varphi_1^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_2^2 \\ &= -1 + 3(\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 \\ &= (-1 + 3\varphi_1 - \varphi_1^2) + (3\varphi_2 - \varphi_2^2) \\ &\le M_7 \end{aligned}$$

onde M_7 é constante, já que $R_1(x,t) := -1 + 3\varphi_1 - \varphi_1^2$ e $R_2(x,t) := 3\varphi_2 - \varphi_2^2$ são parábolas com concavidade voltada para baixo, logo são limitadas superiormente. Então, de (2.53) vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2(t)dx + \xi^2 \int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx &\le M_7 \int_\Omega |w|^2(t) dx \\ &+ ||\gamma||_{L^\infty(Q)} \int_\Omega |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)|\ |w(t)| dx, \end{aligned} \tag{2.54}$$

usando a desigualdade de Young com $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\xi^2}$ e $\varepsilon = \dfrac{\xi^2}{2}$ vem que

$$\int_\Omega ||\gamma||_{L^\infty(Q)}|\nabla w|\ |w(t)|dx \leq \frac{\xi^2}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + C(\varepsilon)||\gamma||^2_{L^\infty(Q)}\int_\Omega |w(t)|^2 dx. \tag{2.55}$$

Aplicando (2.55) em (2.54) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2(t)dx + \frac{\xi^2}{2}\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx \leq \Big(M_7 + C(\varepsilon)||\gamma||^2_{L^\infty(Q)}\Big)\int_\Omega |w(t)|^2 dx$$

e daí

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq M_8||w(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

onde $M_8 = 2\Big(M_7 + C(\varepsilon)||\gamma||^2_{L^\infty(Q)}\Big)$. E como $w(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = \varphi_0 - \varphi_0 = 0$, então, pelo Lema de Gronwall

$$w \equiv 0 \ \text{ em } \ [0,T], \ \text{ ou seja, } \ \varphi_1 = \varphi_2,$$

e assim a unicidade é provada. □

Proposição 2.5. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3 um domínio aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, e $Q = \Omega \times (0,T)$ denota o cilindro espaço-tempo com superfície lateral $S = \partial\Omega \times (0,T)$. Assumimos que $\varphi_0 \in H^1_0(\Omega)$, onde $0 \leq \varphi_0 \leq 1$ e $h \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$. Então, existe uma solução $\varphi \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap W^{2,1}_q(Q)$, onde $q = \frac{N+2}{N+1}$, do problema (2.15)-(2.16). Além disso,*

$$||\varphi||_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap W^{2,1}_q(Q)} \leq M_9(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(Q)}),$$

onde M_9 é constante.

Demonstração. Como definida na Seção 2.2

$$\gamma_\varepsilon = h_{ext} * \eta_\varepsilon$$

onde η_ε denota a sequência de funções regularizantes em $\mathbb{R}^{N+1}$, e como na prova do Lema (2.4) tomamos $h \in L^r(Q)$ com $r = \frac{2(N+2)}{N} > 2$, então $h_{ext} \in L^r(\mathbb{R}^{N+1})$. Pelo Teorema 1.36 vem que

$$\gamma_\varepsilon = h_{ext} * \eta_\varepsilon \to h_{ext} \ \text{ em } \ L^r(\mathbb{R}^{N+1}),$$

logo, quando $\varepsilon \to +\infty$

$$||\gamma_{\varepsilon|_Q} - h||_{L^r(Q)} = ||\gamma_\varepsilon - h_{ext}||_{L^r(\mathbb{R}^{N+1})} = ||h_{ext} * \eta_\varepsilon - h_{ext}||_{L^r(\mathbb{R}^{N+1})} \to 0.$$

Daí, $\gamma_\varepsilon \to h$ em $L^r(Q)$. Como $h \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ e $\varphi_0 \in H^1_0(\Omega)$, pelo Lema 2.4, para cada $\varepsilon \in (0,1]$ o problema (2.28)-(2.29) tem uma solução $\varphi_\varepsilon \in W^{2,1}_2(Q)$ tal que por (2.48)

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{W^{2,1}_2(Q)} \leq M_6(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(Q)}),$$

uma vez que $L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pois, $q = \dfrac{N+2}{N+1} = 1 + \dfrac{1}{N+1} < 2$. Como $W_2^{2,1}(Q)$ é reflexivo, existe $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ e uma subsequência φ_ε, que continuaremos denotando por φ_ε, tal que

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \;\text{ fracamente em }\; W_2^{2,1}(Q).$$

De (2.47) φ_ε é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, pela reflexividade de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, existe $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e uma subsequência de φ_ε, que continuaremos denotando por φ_ε, tal que

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \;\text{ fracamente em }\; L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Como a sequência $\varphi_\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q)$, logo $\varphi_{\varepsilon,t} \in L^q(0,T;L^q(\Omega))$ e $\varphi_\varepsilon \in L^q(0,T;W^{2,q}(\Omega))$ com $q = \dfrac{N+1}{N+2} < 2$, e do fato de

$$L^q(0,T;W^{2,q}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

sendo a primeira imersão compacta, pelo Lema 1.20, existe uma subsequência de φ_ε, que continuaremos denotando por φ_ε, tal que

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi \;\text{ fortemente em }\; L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega)). \tag{2.56}$$

Agora, já podemos passar o limite no último termo da equação (2.28). De (2.56) vem que

$$\nabla\varphi_\varepsilon \to \nabla\varphi \;\text{ fortemente em }\; (L^q(Q))^N$$

e daí,

$$|\nabla\varphi_\varepsilon| \to |\nabla\varphi| \;\text{ fortemente em }\; L^q(Q).$$

Na prova do Lema 2.4 vimos que $\gamma_\varepsilon \in L^r(Q)$ com $r = \dfrac{2(N+2)}{N} > 2$ e de (2.47) $|\nabla\varphi_\varepsilon| \in L^2(Q)$, então, $|\nabla\varphi_\varepsilon|\gamma_\varepsilon \in L^q(Q)$ onde $q = \dfrac{N+2}{N+1} = 1 + \dfrac{1}{N+1} < 2$. Portanto, passando a uma subsequência vem que

$$\gamma_\varepsilon \to h \;\text{ q.t.p. em }\; Q$$

e

$$|\nabla\varphi_\varepsilon| \to |\nabla\varphi| \;\text{ q.t.p. em }\; Q$$

e, por conseguinte

$$|\nabla\varphi_\varepsilon|\gamma_\varepsilon \to |\nabla\varphi|h \;\text{ q.t.p. em }\; Q$$

e

$$|\nabla\varphi_\varepsilon|\gamma_\varepsilon \;\text{ é limitada em }\; L^q(Q),$$

logo, pelo Lema 1.37, obtemos que

$$|\nabla\varphi_\varepsilon|\gamma_\varepsilon \rightharpoonup |\nabla\varphi|h \;\text{ fracamente em }\; L^q(Q).$$

Para passar o limite nos demais termos podemos proceder de maneira clássica, conforme será visto na prova do Teorema de Existência do próximo capítulo.

Em seguida, vamos provar que

$$||\varphi||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap W_q^{2,1}(Q)} \leq M_6(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(Q)}).$$

De fato, como $W_q^{2,1}(Q)$ é reflexivo e por (2.48)

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq M_6(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(Q)}),$$

então, existe $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ e uma subseqência de φ_ε, que continuaremos denotando por φ_ε, tal que

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \quad \text{fracamente em} \quad W_q^{2,1}(Q),$$

e então,

$$\begin{aligned} ||\varphi||_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} ||\varphi_\varepsilon||_{q,Q}^{(2)} \\ &\leq M_6(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(Q)}). \end{aligned} \tag{2.57}$$

E por (2.47)

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq M_4(\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(Q)}),$$

então, existe $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e uma subseqência de φ_ε, que continuaremos denotando por φ_ε, tal que

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \quad \text{fracamente em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

e daí,

$$\begin{aligned} ||\varphi||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} ||\varphi_\varepsilon||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\leq M_4(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(Q)}), \end{aligned} \tag{2.58}$$

e como $r > 2$, então, $L^r(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$, e daí, $||h||_{L^2(Q)} \leq C||h||_{L^r(Q)}$, onde C é uma constante. Logo, de (2.57) e (2.58) vem que

$$||\varphi||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap W_q^{2,1}(Q)} \leq M_9(\|\varphi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(Q)}) \tag{2.59}$$

onde $M_9 = \max\{M_4 + M_6, CM_4 + M_6\}$.

Portanto, segue o resultado. $\square$

Capítulo 3

Demonstração do Resultado Principal

Neste capítulo vamos usar o método de Galerkin para provar o Teorema 2.1 do capítulo anterior.

3.1 Existência Local

Consideremos a base ortonormal completa do $L^2(\Omega)$, que consiste nas autofunções $\{w_k\}_{k\geq 1}$ do operador $-\Delta$ com condições de contorno de Dirichlet homogêneas associadas aos autovalores $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$. Devido a regularidade de $\partial\Omega$, temos em particular que $w_k \in C^1(\overline{\Omega})$ (Ver L. C. Evans [11], pág.334).

A partir dos dois próximos resultados, conclui-se que $\{w_k\}_{k\geq 1}$ é uma base ortogonal em $H_0^1(\Omega)$. E que P_m é também a projeção H_0^1-ortogonal sobre V_m.

Lema 3.1. *Sejam $\{w_k\}_{k\geq 1}$ as autofunções correspondentes dos autovalores (λ_k). Assim $\{w_k\}_{k\geq 1}$ são tais que:*

$$(w_j, w_k)_{L^2(\Omega)} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \text{, } para\ 1 \leq j, k.$$

Além disso, essas autofunções satisfazem

$$(\nabla w_j, \nabla w_k)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad para\ j \neq k,\ 1 \leq j, k.$$

Demonstração. De fato, sendo n o vetor normal exterior a fronteira $\partial\Omega$, pela identidade de Green,

$$
\begin{aligned}
(\nabla w_j, \nabla w_k)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla w_j . \nabla w_k \, dx \\
&= -\int_\Omega w_j \, \Delta w_k \, dx + \int_{\partial\Omega} w_j \frac{\partial w_k}{\partial n} \, ds \\
&= -\int_\Omega w_j \, \lambda_k w_k \, dx + \int_{\partial\Omega} w_j \frac{\partial w_k}{\partial n} \, ds \\
&= -\lambda_k \int_\Omega w_j \, w_k \, dx + \int_{\partial\Omega} w_j \frac{\partial w_k}{\partial n} \, ds \\
&= -\lambda_k (w_j, w_k)_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} w_j \frac{\partial w_k}{\partial n} \, ds \\
&= \int_{\partial\Omega} w_j \frac{\partial w_k}{\partial n} \, ds, \ \text{ pois } \ \{w_j\} \, \text{é base ortonormal e} \, j \neq k,
\end{aligned}
$$

e pela condição de contorno de Dirichlet homogênea, temos

$$
\int_{\partial\Omega} w_j \frac{\partial w_k}{\partial n} \, ds = 0,
$$

e então,

$$
(\nabla w_j, \nabla w_k)_{L^2(\Omega)} = 0.
$$

□

Lema 3.2. *Seja V_m o espaço vetorial finito gerado por $\{w_k\}_{1 \leq k \leq m}$. No que segue, vamos fazer uso da projeção L^2-ortogonal P_m sobre o espaço V_m. Então, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,*

$$
(\nabla(P_m\varphi - \varphi), \nabla w)_{L^2(\Omega)} = 0, \ \ \forall \, w \in V_m,
$$

isto é, P_m é também uma projeção H_0^1-ortogonal sobre V_m.

Demonstração. De fato, sendo n o vetor normal exterior a fronteira $\partial\Omega$, pela identidade de Green, para todo $w \in V_m$ temos que

$$
\begin{aligned}
(\nabla(P_m\varphi - \varphi), \nabla w)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla(P_m\varphi - \varphi) \nabla w \, dx \\
&= -\int_\Omega (P_m\varphi - \varphi) \, \Delta w \, dx + \int_{\partial\Omega} (P_m\varphi - \varphi) \frac{\partial w}{\partial n} \, ds,
\end{aligned}
$$

como $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, então $P_m\varphi - \varphi = 0$ em $\partial\Omega$, então

$$\begin{aligned}
(\nabla(P_m\varphi - \varphi), \nabla w)_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega (P_m\varphi - \varphi)\,\Delta w\,dx \\
&= -\int_\Omega (P_m\varphi - \varphi)\,\Delta(c_1w_1 + \ldots + c_mw_m)\,dx \\
&= -\int_\Omega (P_m\varphi - \varphi)\,(c_1\Delta w_1 + \ldots + c_m\Delta w_m)\,dx \\
&= -\int_\Omega (P_m\varphi - \varphi)\,(c_1\lambda_1 w_1 + \ldots + c_m\lambda_m w_m)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_\Omega [(P_m\varphi - \varphi)c_1\lambda_1 w_1 + \ldots + (P_m\varphi - \varphi)c_m\lambda_m w_m]\,dx \\
&= -\left[\int_\Omega (P_m\varphi - \varphi)c_1\lambda_1 w_1\,dx + \ldots + \int_\Omega (P_m\varphi - \varphi)c_m\lambda_m w_m\,dx\right] \\
&= -\big(c_1\lambda_1(P_m\varphi - \varphi, w_1)_{L^2(\Omega)} + \ldots + c_m\lambda_m(P_m\varphi - \varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}\big) \\
&= -\big(c_1\lambda_1\left[(P_m\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)} - (\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)}\right] + \ldots + c_m\lambda_m\left[(P_m\varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}\right. \\
&\quad \left.-\ (\varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}\right]\big) \\
&= c_1\lambda_1(\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)} + \ldots + c_m\lambda_m(\varphi, w_m)_{L^2(\Omega)} - \big(c_1\lambda_1(P_m\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)} + \ldots \\
&\quad + c_m\lambda_m(P_m\varphi - \varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}\big) \\
&= \sum_{i=1}^m c_i\lambda_i(\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^m c_i\lambda_i(P_m\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $P_m\varphi = \displaystyle\sum_{j=1}^m (\varphi, w_j)_{L^2(\Omega)}\,w_j$, pelo item (a) do Teorema 1.13 segue que

$$\begin{aligned}
(P_m\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)} &= \left(\sum_{j=1}^m (\varphi, w_j)_{L^2(\Omega)}\,w_j, w_i\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^m (\varphi, w_j)_{L^2(\Omega)}\,w_j\right) w_i\,dx \\
&= \int_\Omega \big((\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)}\,w_1 + \ldots + (\varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}\,w_m\big)\,w_i\,dx \\
&= \int_\Omega (\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)}\,w_1w_i\,dx + \ldots + \int_\Omega (\varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}\,w_mw_i\,dx \\
&= (\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)}\int_\Omega w_1w_i\,dx + \ldots + (\varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}\int_\Omega w_mw_i\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\varphi, w_1)_{L^2(\Omega)}(w_1, w_i)_{L^2(\Omega)} + \ldots + (\varphi, w_m)_{L^2(\Omega)}(w_m, w_i)_{L^2(\Omega)} \\
&= (\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
(\nabla(P_m\varphi - \varphi), \nabla w)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(P_m\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(\varphi, w_i)_{L^2(\Omega)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

Sendo V_m o espaço vetorial de dimensão finita gerado por $\{w_k\}_{1\leq k\leq m}$, então, pelo item (c) do Teorema 1.13, resulta que

$$
\overline{\bigcup_{m\geq 1} V_m}^{||\cdot||_{L^2(\Omega)}} = L^2(\Omega) \tag{3.1}
$$

e

$$
\overline{\bigcup_{m\geq 1} V_m}^{||\cdot||_{H^1(\Omega)}} = H_0^1(\Omega). \tag{3.2}
$$

Para cada $m \geq 1$, vamos considerar o problema aproximado:

$$
\int_\Omega (\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t v_1 dx + \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m \nabla v_1 dx = \int_\Omega f v_1 dx, \tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega c_{m,t}\, v_2 dx + \int_\Omega D_1(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla c_m \nabla v_2 dx &= -\int_\Omega D_2(\varphi_m, \theta_m, c_m) \times \\
&\quad \nabla\varphi_m \nabla v_2 dx,
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

para todo $v_1, v_2 \in V_m$.

$$
\theta_m(x, 0) = P_m(\theta_0(x)),\ c_m(x, 0) = P_m(c_0(x)) \text{ em } \Omega. \tag{3.5}
$$

$$
\varphi_{m,t} - \xi^2\Delta\varphi_m = \varphi_m(\varphi_m - 1)(1 - 2\varphi_m) - |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) \text{ em } Q, \tag{3.6}
$$

$$
\varphi_m = 0 \text{ em } S,\ \varphi_m(x, 0) = \varphi_0(x) \text{ em } \Omega. \tag{3.7}
$$

Lema 3.3. *Para cada $m \geq 1$, existe $0 < T_m \leq T$ e uma única solução $(\varphi_m, c_m, \theta_m) \in (C([0, T_m], L^2(\Omega)))^3$ dos problemas aproximados (3.3)-(3.5). Além disso, se $T_m < T$ então $\|\varphi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|c_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty$ quando $t \longrightarrow T_m^-$.*

Demonstração. Miltiplicando (3.6) por v_1 e integrando em Ω, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_{m,t} v_1 dx &= -\xi^2 \int_\Omega \nabla\varphi_m \nabla v_1 dx + \int_\Omega \varphi_m(\varphi_m - 1)(1-2\varphi_m) v_1 dx \\ &- \int_\Omega |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) v_1 dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em (3.3) vem que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \theta_{m,t} v_1 dx &= \ell\xi^2 \int_\Omega \nabla\varphi_m \nabla v_1 dx - \ell \int_\Omega \varphi_m(\varphi_m - 1)(1-2\varphi_m) v_1 dx \\ &+ \ell \int_\Omega |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) v_1 dx - \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m \nabla v_1 dx \\ &+ \int_\Omega f v_1 dx.\end{aligned}$$

Considerando

$$\theta_m(t) = \sum_{k=1}^m h_k(t) w_k \quad \text{e} \quad c_m(t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) w_k$$

em $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$, tomando $v_1 = w_i$ em (3.8) e $v_2 = w_j$ em (3.4) e usando a ortonormalidade da base $\{w_k\}_{k\geq 1}$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}h_i'(t) &= \ell\xi^2 \int_\Omega \nabla\varphi_m \nabla w_i dx - \ell \int_\Omega \varphi_m(\varphi_m - 1)(1-2\varphi_m) w_i dx \\ &+ \ell \int_\Omega |\nabla\varphi_m|(\mu_1 \sum_{k=1}^m g_k(t) w_k + \mu_2 \sum_{k=1}^m h_k(t) w_k) w_i dx \\ &- \int_\Omega k(\varphi_m, \sum_{k=1}^m h_k(t) w_k, \sum_{k=1}^m g_k(t) w_k) \sum_{k=1}^m h_k(t) \nabla w_k \nabla w_i dx \\ &+ \int_\Omega f w_i dx \\ &= H_i(t, \varphi_m(t), h_i(t), ..., h_m(t), g_1(t), ..., g_m(t)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_j'(t) &= -\int_\Omega D_1(\varphi_m, \sum_{k=1}^m h_k(t) w_k, \sum_{k=1}^m g_k(t) w_k) \sum_{k=1}^m g_k(t) w_k \nabla w_k \nabla w_j dx \\ &- -\int_\Omega D_2(\varphi_m, \sum_{k=1}^m h_k(t) w_k, \sum_{k=1}^m g_k(t) w_k) \sum_{k=1}^m g_k(t) w_k \nabla\varphi_m \nabla w_j dx \\ &= G_j(t, \varphi_m(t), h_i(t), ..., h_m(t), g_1(t), ..., g_m(t)),\end{aligned}$$

e de (3.6) obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_{m,t} - \xi^2\Delta\varphi_m &= \varphi_m(\varphi_m - 1)(1 - 2\varphi_m) - |\nabla\varphi_m|(\mu_1\sum_{k=1}^{m} g_k(t)w_k + \mu_2\sum_{k=1}^{m} h_k(t)w_k)\\ &= F_m(t, \varphi_m(t), h_i(t), ..., h_m(t), g_1(t), ..., g_m(t)).\end{aligned}$$

Definindo $V = (\varphi_m(t), h_1(t), ..., h_m(t), g_1(t), ..., g_m(t))^T$,

$$A = \begin{bmatrix} -\xi^2\Delta & 0_{1\times(2m)} \\ 0_{(2m\times 1)} & 0_{(2m)\times(2m)} \end{bmatrix}_{(2m+1)\times(2m+1)} \tag{3.9}$$

e

$$F(t, V) = (F_m(t, V), H_1(t, V), ..., H_m(t, V), G_1(t, V), ..., G_m(t, V))^T$$

temos o sistema abstrato

$$\begin{aligned} V_t + AV &= F(t, V)\\ V(0) &= V_0 = (\varphi_0, h_1(0), ..., h_m(0), g_1(0), ..., g_m(0))\\ &= (\varphi_0, \langle\varphi_{0m}, w_1\rangle_{L^2(\Omega)}, ..., \langle\varphi_{0m}, w_m\rangle_{L^2(\Omega)}, \langle c_{0m}, w_1\rangle_{L^2(\Omega)}, ..., \langle c_{0m}, w_m\rangle_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

onde $V_0 \in (H_0^1(\Omega)) \times (L^2(\Omega))^{2m}$.

Calculemos

$$\left|H_i(t, \varphi_m, h_1, ..., h_m, g_1, ..., g_m) - H_i(\overline{t}, \overline{\varphi}_m, \overline{h}_1, ..., \overline{h}_m, \overline{g}_1, ..., \overline{g}_m)\right|.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla\varphi_m\nabla w_i - \int_\Omega \nabla\overline{\varphi}_m\nabla w_i\right| &= \left|\int_\Omega (\nabla\varphi - \nabla\overline{\varphi}_m)\nabla w_i\right|\\ &\leq ||\varphi_m - \overline{\varphi}_m||_{L^2(\Omega)}||w_i||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $\varphi_m(\varphi_m - 1)(1 - 2\varphi_m) = \varphi_m(\varphi_m - 2\varphi_m^2 - 1 + \varphi_m) = \varphi_m + 3\varphi_m^2 - 2\varphi_m^3$, então

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega \varphi_m(\varphi_m - 1)(1 - 2\varphi_m)w_i dx - \int_\Omega \overline{\varphi}_m(\overline{\varphi}_m - 1)(1 - 2\overline{\varphi}_m)w_i\right|\\ =& \left|\int_\Omega \Big(-(\varphi - \overline{\varphi}_m) + 3(\varphi_m^2 - \overline{\varphi}_m^2) - 2(\varphi_m^3 - \overline{\varphi}_m^3)\Big)w_i dx\right|\\ =& \left|\int_\Omega \Big(-1 + 3(\varphi_m + \overline{\varphi}_m) - 2(\varphi_m^2 + \varphi_m\overline{\varphi}_m + \overline{\varphi}_m^2)\Big)w_i(\varphi_m - \overline{\varphi}_m)dx\right|\\ \leq& C||w_i||_{L^\infty}(1 + ||\varphi_m||_{L^4(\Omega)} + ||\overline{\varphi}_m||_{L^4(\Omega)})^4||\varphi_m - \overline{\varphi}_m||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla\varphi_m|(\mu_1\sum_{k=1}^{m} g_k(t)w_k + \mu_2\sum_{k=1}^{m} h_k(t)w_k)w_i dx\\ =& \mu_1\sum_{k=1}^{m} g_k\int_\Omega |\nabla\varphi_m|w_k w_i dx + \mu_2\sum_{k=1}^{m} h_k\int_\Omega |\nabla\varphi_m|w_k w_i dx,\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Omega |\nabla\varphi_m|(\mu_1\sum_{k=1}^m g_k(t)w_k+\mu_2\sum_{k=1}^m h_k(t)w_k)w_i dx\\
-&\int_\Omega |\nabla\overline{\varphi}_m|(\mu_1\sum_{k=1}^m \overline{g}_k(t)w_k+\mu_2\sum_{k=1}^m \overline{h}_k(t)w_k)w_i dx\Big|\\
=&\Big|\mu_1\Big(\sum_{k=1}^m g_k\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx-\sum_{k=1}^m\overline{g}_k\int_\Omega|\nabla\overline{\varphi}_m|w_kw_idx\Big)\\
+&\mu_2\Big(\sum_{k=1}^m h_k\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx-\sum_{k=1}^m\overline{h}_k\int_\Omega|\nabla\overline{\varphi}_m|w_kw_idx\Big)\Big|.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\mu_1\Big(\sum_{k=1}^m g_k\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx-\sum_{k=1}^m\overline{g}_k\int_\Omega|\nabla\overline{\varphi}_m|w_kw_idx\Big|\\
=&\Big|\mu_1\Big(\sum_{k=1}^m g_k\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx-\sum_{k=1}^m\overline{g}_k\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx\\
+&\sum_{k=1}^m\overline{g}_k\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx-\sum_{k=1}^m\overline{g}_k\int_\Omega|\nabla\overline{\varphi}_m|w_kw_idx\Big|\\
\le&\Big|\sum_{k=1}^m(g_k-\overline{g}_k)\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx\Big|+\Big|\sum_{k=1}^m\overline{g}_k\int_\Omega(|\nabla\varphi_m|-|\nabla\overline{\varphi}_m|)w_kw_idx\Big|\\
\le&||\varphi_m||_{L^2(\Omega)}||w_i||_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^m|g_k-\overline{g}_k|||w_k||_{L^2(\Omega)}\\
+&||\varphi_m-\overline{\varphi}_m||_{L^2(\Omega)}+\sum_{k=1}^m|\overline{g}_k|||w_k||_{L^2(\Omega)}||w_i||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=1}^m h_k\int_\Omega|\nabla\varphi_m|w_kw_idx-\sum_{k=1}^m\overline{h}_k\int_\Omega|\nabla\overline{\varphi}_m|w_kw_idx\Big|\\
\le&||\varphi_m||_{L^2(\Omega)}||w_i||_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^m|h_k-\overline{h}_k|||w_k||_{L^2(\Omega)}\\
+&||\varphi_m-\overline{\varphi}_m||_{L^2(\Omega)}||w_i||_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^m|\overline{g}_k|||w_k||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
& \Big| \int_\Omega k\Big(\varphi_m, \sum_{k=1}^m h_k(t)w_k, \sum_{k=1}^m g_k(t)w_k\Big) \sum_{k=1}^m h_k(t)\nabla w_k \nabla w_i dx \\
- & \int_\Omega k\Big(\overline{\varphi}_m, \sum_{k=1}^m \overline{h}_k(t)w_k, \sum_{k=1}^m \overline{g}_k(t)w_k\Big) \sum_{k=1}^m \overline{h}_k(t)\nabla w_k \nabla w_i dx \Big| \\
= & \Big| \int_\Omega k\Big(\varphi_m, \sum_{k=1}^m h_k(t)w_k, \sum_{k=1}^m g_k(t)w_k\Big) \sum_{k=1}^m h_k(t)\nabla w_k \nabla w_i dx \\
- & k\Big(\overline{\varphi}_m, \sum_{k=1}^m \overline{h}_k(t)w_k, \sum_{k=1}^m \overline{g}_k(t)w_k\Big) \sum_{k=1}^m h_k(t)\nabla w_k \nabla w_i \\
+ & \int_\Omega k\Big(\overline{\varphi}_m, \sum_{k=1}^m \overline{h}_k(t)w_k, \sum_{k=1}^m \overline{g}_k(t)w_k\Big) \Big(\sum_{k=1}^m (h_k - \overline{h}_k)\nabla w_k \nabla w_i\Big) dx \Big| \\
\leq & \int_\Omega \Big| k\Big(\varphi_m, \sum_{k=1}^m h_k(t)w_k, \sum_{k=1}^m g_k(t)w_k\Big) - k\Big(\overline{\varphi}_m, \sum_{k=1}^m \overline{h}_k(t)w_k, \sum_{k=1}^m \overline{g}_k(t)w_k\Big) \Big| \\
& \sum_{k=1}^m |h_k||\nabla w_k||\nabla w_i| dx \\
+ & k_3 \sum_{k=1}^m |h_k - \overline{h}_k| \int_\Omega |\nabla w_k||\nabla w_i| dx \\
\leq & \int_\Omega \Big(k_0 \Big(|\varphi_m - \overline{\varphi}_m| + \sum_{j=1}^m |h_j - \overline{h}_j| w_j + \sum_{j=1}^m |y_j - \overline{y}_j| w_j \Big) \sum_{k=1}^m |h_k||\nabla w_k||\nabla w_i| dx \\
+ & k_3 \sum_{k=1}^m |h_k - \overline{h}_k| ||\nabla w_k|| ||\nabla w_i|| \Big) dx \\
\leq & \Big(k_0 \sum_{j=1}^m |h_j| ||\nabla w_i||_{L^\infty(\Omega)} ||w_j||_{L^2(\Omega)} \Big) ||\varphi_m - \overline{\varphi}_m||_{L^2(\Omega)} \\
+ & \Big(k_0 \sum_{k=1}^m |h_k| ||w_k||_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^2(\Omega)} \Big) \sum_{j=1}^m ||w_j||_{L^\infty(\Omega)} |h_j - \overline{h}_j| \\
+ & \Big(k_0 \sum_{k=1}^m |h_k| ||w_k||_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^2(\Omega)} \Big) \sum_{k=1}^m ||w_j||_{L^\infty(\Omega)} |g_j - \overline{g}_j|.
\end{aligned}
$$

Das estimativas anteriores e da Proposição 1.17, se (t, V), $(t, \overline{V}) \in U \subset \mathbb{R} \times (H_0^1(\Omega)) \times (L^2(\Omega))^{2m}$ um aberto limitado contendo $(0, V_0)$, então,

$$
\begin{aligned}
||H_i(t, V) - H_i(s, \overline{V})||_{L^2(\Omega)} & \leq C||V - \overline{V}||_{H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^{2m}} \\
& \leq C\Big(|t - s|^\alpha + ||V - \overline{V}||_{H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^{2m}}\Big),
\end{aligned}
$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Analogamente, para G_i e F_m. Portanto,

$$||F(t,V) - F(s,\overline{V})||_{(L^2(\Omega))^{2m+1}} \leq C\Big(|t-s|^\alpha + ||V-\overline{V}||_{H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^{2m}}\Big)$$

para todo $V = (\varphi_m, h_i, ..., h_m, g_1, ..., g_m)^T$ e
$\overline{V} = (\overline{\varphi}_m, \overline{h}_1, ..., \overline{h}_m, \overline{g}_1, ..., \overline{g}_m)$ pertencentes a U. Pela Proposição 1.48 o sistema

$$V_t + AV = F(t,V), \;\; V(0) = V_0$$

tem uma única solução local $V = (\varphi_m, h_i, ..., h_m, g_1, ..., g_m) \in C([0,T_m], H_0^1(\Omega)) \times (C([0,T_m], L^2(\Omega)))^{2m}$ para algum $0 < T_m \leq T$. Em particular, da definição de $\theta_m(t)$, $c_m(t)$ e usando a ortonormalidade da base $\{w_k\}_{k\geq 1}$ em $L^2(\Omega)$, obtemos a existência de uma solução local

$$(\varphi_m, \theta_m, c_m) \in (C([0,T_m], H_0^1(\Omega)))^3$$

para $0 < T_m \leq T$. □

A conclusão do Lema 3.3 e uma consequência do seguinte lema. Antes, consideremos novamente o problema aproximado:

$$\int_\Omega (\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t v_1 dx + \int_\Omega k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m \nabla v_1 dx = \int_\Omega f v_1 dx \tag{3.10}$$

$$\int_\Omega c_{m,t}\, v_2 dx + \int_\Omega D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla c_m \nabla v_2 dx = -\int_\Omega D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m) \times \nabla\varphi_m \nabla v_2 dx \tag{3.11}$$

para todo $v_1, v_2 \in V_m$ e $0 < t \leq T_m$.

$$\theta_m(x,0) = P_m(\theta_0(x)), \;\; c_m(x,0) = P_m(c_0(x)) \;\; \text{em} \;\; \Omega. \tag{3.12}$$

$$\varphi_{m,t} - \xi^2\Delta\varphi_m = \varphi_m(\varphi_m - 1)(1-2\varphi_m) - |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) \quad \text{em} \;\; (0,T_m)\times\Omega, \tag{3.13}$$

$$\varphi_m = 0 \;\; \text{em} \;\; S, \;\; \varphi_m(x,0) = \varphi_0(x) \;\; \text{em} \;\; \Omega. \tag{3.14}$$

Lema 3.4. *Existe uma constante $M_{14} > 0$, que não depende de m, tal que*

$$\begin{aligned} &||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||_{(V(Q))^3} \\ \leq\;& M_{14}\Big(||f||_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||_{L^2(\Omega)} + ||c_0||_{L^2(\Omega)}\Big), \end{aligned}$$

para todo $t \in (0,T_m)$, onde $V(Q)$ é definido como no Lema 1.22.

Demonstração. Tomando $v_1 = \theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))$ em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))dx \\
+ & \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)\nabla(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))dx \\
= & \int_\Omega f(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))dx, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))dx \\
+ & \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)\nabla\theta_m(t)dx \\
= & -\int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)\ \ell\ \nabla P_m(\varphi_m(t))dx \\
+ & \int_\Omega f\ (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))dx,
\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))|^2 dx + \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)\nabla\theta_m(t)dx \\
= & -\int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)\ \ell\ \nabla P_m(\varphi_m(t))dx + \int_\Omega f\ (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))dx,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)|\nabla\theta_m(t)|^2 dx \\
= & -\ell\int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)\nabla P_m(\varphi_m(t))dx \\
+ & \int_\Omega f\ (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))dx. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Tomando agora $v_2 = c_m(t)$ em (3.11) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega c_{m,t}(t)\, c_m(t)dx + \int_\Omega D_1(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla c_m(t)\nabla c_m(t)dx \\
& \qquad = -\int_\Omega D_2(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\varphi_m(t)\nabla c_m(t)dx \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

e então,

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|c_m(t)|^2 dx + \int_\Omega D_1(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla c_m(t)\nabla c_m(t) dx$$
$$= -\int_\Omega D_2(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\varphi_m(t)\nabla c_m(t) dx$$

e daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\varphi_m, \theta_m, c_m)|\nabla c_m(t)|^2 dx$$
$$= -\int_\Omega D_2(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\varphi_m(t)\nabla c_m(t) dx. \tag{3.18}$$

De (3.16) vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)|\nabla\theta_m(t)|^2 dx$$
$$\leq \ell k_2 \int_\Omega |\nabla\theta_m(t)||\nabla(P_m(\varphi_m(t)))| dx + \int_\Omega |f(t)|\ |\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))| dx. \tag{3.19}$$

Usando a desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla\theta_m(t)||\nabla(P_m(\varphi_m(t)))| dx &\leq \frac{\varepsilon}{2}||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C(\varepsilon)}{2}||\nabla P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C(\varepsilon)}{2}||P_m(\varphi_m(t))||^2_{H^1_0(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

e

$$\int_\Omega |f(t)|\ |\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))| dx$$
$$\leq \frac{1}{2}||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.21}$$

Pelo Lema 3.2 temos que

$$(\nabla(P_m(\varphi) - \varphi), \nabla w)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall w \in V_m,$$

então, tomando $w = P_m(\varphi)$ com $w \in H^1_0(\Omega)$, vem que

$$\begin{aligned} (\nabla(P_m(\varphi)) - \nabla\varphi, \nabla(P_m(\varphi)))_{L^2(\Omega)} &= (\nabla(P_m(\varphi)), \nabla(P_m(\varphi)))_{L^2(\Omega)} \\ &- (\nabla\varphi, \nabla(P_m(\varphi)))_{L^2(\Omega)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}||\nabla(P_m(\varphi))||^2_{L^2(\Omega)} &= (\nabla\varphi, \nabla(P_m(\varphi)))_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |(\nabla\varphi, \nabla(P_m(\varphi)))_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq ||\nabla\varphi||_{L^2(\Omega)}||\nabla(P_m(\varphi))||_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$||\nabla(P_m(\varphi))||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla\varphi||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in H^1_0(\Omega),$$

ou seja,

$$||P_m(\varphi)||_{H^1_0(\Omega)} \leq ||\varphi||_{H^1_0(\Omega)}.$$

Por conseguinte, fazendo $\varphi = \varphi_m$, obtemos

$$||P_m(\varphi_m)||_{H^1_0(\Omega)} \leq ||\varphi_m||_{H^1_0(\Omega)}. \tag{3.22}$$

Substituindo (3.20), (3.21) e (3.22) em (3.19) vem que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(k_1 - \frac{\varepsilon\ell k_2}{2}\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \frac{C(\varepsilon)\ell k_2}{2}||\varphi_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{2}\Big(||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\ =\ & \frac{C(\varepsilon)\ell k_2}{2}||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\Big(||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

onde $\varepsilon > 0$ é tal que $k_1 - \dfrac{\varepsilon\ell k_2}{2} > 0$, e assim

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{d}{dt}||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(2k_1 - \varepsilon\ell k_2\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\ &\qquad\leq \max\Big\{C(\varepsilon)\ell k_2, 1\Big\}\Big(||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad\qquad + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(2k_1 - \varepsilon\ell k_2\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & M_1\Big(||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $M_1 = \max\Big\{C(\varepsilon)\ell k_2, 1\Big\}$.

Agora, de (3.18) vem que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)|\nabla c_m(t)|^2dx \\ = -\int_\Omega D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\varphi_m(t)\nabla c_m(t)dx \\ \leq \int_\Omega |D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)||\nabla\varphi_m(t)||\nabla c_m(t)|dx \\ \leq \rho_3\int_\Omega |\nabla\varphi_m(t)||\nabla c_m(t)|dx\end{aligned} \tag{3.24}$$

e como da hipótese (H_3) temos $D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\geq\rho_1$, então (3.24) fica

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \rho_1\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2dx \\ \leq \rho_3\int_\Omega |\nabla\varphi_m(t)||\nabla c_m(t)|dx,\end{aligned} \tag{3.25}$$

usando a desigualdade de Young com $C(\varepsilon)=\dfrac{\rho_3}{2\rho_1}$ e $\varepsilon=\dfrac{\rho_1}{2\rho_3}$ temos que

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_m(t)||\nabla c_m(t)|dx \leq C(\varepsilon)\int_\Omega|\nabla\varphi_m(t)|^2 + \frac{\rho_1}{2\rho_3}\int_\Omega|\nabla c_m(t)|^2dx. \tag{3.26}$$

Aplicando (3.26) em (3.25) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \rho_1\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2dx \\ \leq \rho_3 C(\varepsilon)\int_\Omega|\nabla\varphi_m(t)|^2 + \frac{\rho_1}{2}\int_\Omega|\nabla c_m(t)|^2dx\end{aligned}$$

e então

$$\frac{d}{dt}||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \rho_1\int_\Omega|\nabla c_m(t)|^2dx \leq 2\rho_3C(\varepsilon)\int_\Omega|\nabla\varphi_m(t)|^2,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \rho_1||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq M_2||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.27}$$

onde $M_2=2\rho_3C(\varepsilon)$.

Somando membro a membro (3.23) com (3.27) vem que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(||\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}+||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\ +\quad &\Big(2k_1-\varepsilon\ell k_2\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\rho_1||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\quad &(M_1+M_2)||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}+M_1\Big(||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \end{aligned} \tag{3.28}$$

e, por conseguinte

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(||\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} \\ +\quad &||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\Big(2k_1-\varepsilon\ell k_2\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\rho_1||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\quad &M_3\Big(||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde $M_3=\max\Big\{M_1+M_2, M_1\Big\}$.

Como $\theta_m(t)=\sum_{k=1}^{m}h_k(t)w_k$ e $c_m(t)=\sum_{k=1}^{m}g_k(t)w_k$ onde $\{w_k\}_{1\leq k\leq m}$ são autovalores do operador $-\Delta$, e $w_k\in H^2(\Omega)\cap C_0^\infty(\Omega)$ (Ver L. C. Evans [11], pág.335) então $\mu_1c_m(t)+\mu_2\theta_m(t)\in L^\infty(\Omega)$, e como $\{w_k\}_{1\leq k\leq m}$ são funções suaves podemos usar o Lema 2.3 com $h(t)=\mu_1c_m(t)+\mu_2\theta_m(t)\in L^\infty(\Omega)$ obtemos que $0\leq\varphi_m(t)\leq 1$ para todo $t\in(0,T_m)$ e para todo m.

Multiplicando (3.13) por φ_m e integrando em Ω temos que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi_{m,t}(t)\varphi_m(t)dx-\xi^2\int_\Omega\Delta\varphi_m(t)\varphi_m(t)dx \\ &\quad\leq\int_\Omega(3\varphi_m(t)-2(\varphi(t))^2-1)(\varphi_m(t))^2dx \\ &\quad-\int_\Omega\varphi_m(t)|\nabla\varphi_m|(\mu_1c_m(t)+\mu_2\theta_m(t))dx \\ &\quad\leq\int_\Omega(3\varphi_m(t)-2(\varphi(t))^2-1)(\varphi_m(t))^2dx \\ &\quad+\int_\Omega\varphi_m(t)|\nabla\varphi_m|(\mu_1c_m(t)+\mu_2\theta_m(t))dx \\ &\quad\leq\int_\Omega(3\varphi_m(t)-2(\varphi(t))^2-1)(\varphi_m(t))^2dx \\ &+\int_\Omega|\varphi_m(t)||\nabla\varphi_m||\mu_1c_m(t)+\mu_2\theta_m(t)|dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Usando a identidade de Green vem que

$$\int_\Omega \Delta\varphi_m(t)\varphi_m(t)dx = \int_\Omega |\nabla\varphi(t)|^2 dx,$$

usando a desigualdade de Young com $C(\varepsilon) = \frac{1}{2\xi^2}$ e $\varepsilon = \frac{\xi^2}{2}$ vem que

$$|\nabla\varphi_m||\mu_1 c_m(t) + \mu_2\theta_m(t)| \leq \frac{\xi^2}{2}|\nabla\varphi_m|^2 + \frac{1}{2\xi^2}|\mu_1 c_m(t) + \mu_2\theta_m(t)|^2$$

e usando o fato de

$$|\mu_1 c_m(t) + \mu_2\theta_m(t)|^2 \leq 2^2(|\mu_1 c_m(t)|^2 + |\mu_2\theta_m(t)|^2),$$

$M_4 = \max\limits_{x\in\mathbb{R}}\{3x - 2x^2 - 1\}$ ser finito e positivo, logo $3\varphi_m - 2\varphi_m^2 - 1 \leq M_4$.

Como $0 \leq \varphi_m(t) \leq 1$ para todo $t \in (0, T_m)$ e para todo m, então (3.30) fica

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi_{m,t}(t)\varphi_m(t)dx + \xi^2\int_\Omega |\nabla\varphi_m(t)|^2 dx \\ &\leq M_4\int_\Omega (\varphi_m(t))^2 dx + \frac{\xi^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_m(t)|^2 dx \\ &+\frac{2\mu_1^2}{\xi^2}\int_\Omega |c_m(t)|^2 dx + \frac{2\mu_2^2}{\xi^2}\int_\Omega |\theta_m(t)|^2 dx \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|\varphi_m(t)|^2 dx + \frac{\xi^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_m(t)|^2 dx \\ &\leq M_4||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\mu_1^2}{\xi^2}||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\mu_2^2}{\xi^2}||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dx + \xi^2||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M_5\Big(||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $M_5 = \max\{2M_4, \frac{4\mu_1^2}{\xi^2}, \frac{4\mu_2^2}{\xi^2}\}$.

Em seguida, multiplicando (3.31) por $2M_3$ e (3.29) por ξ^2 e somando membro a membro obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(2M_3||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&+4M_3\xi^2||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\Big(2k_1 - \varepsilon\ell k_2\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\rho_1||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \le 2M_3M_5||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + M_3\xi^2||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad\quad +2M_3M_5||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2M_3M_5||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad\quad +M_3\xi^2||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + M_3\xi^2||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
||\theta_m(t)||_{L^2(\Omega)} &\le ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)) - \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\le ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||_{L^2(\Omega)} + ||\ell P_m(\varphi_m(t))||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Observemos ainda que, $||P_m(\varphi_m(t))||_{L^2(\Omega)} \le ||\varphi_m(t)||_{L^2(\Omega)}$ com $t \in [0, T_m)$ e $T_m \le T$. De fato, por hipótese $\varphi_m(t) \in L^2(\Omega)$, e pela Observação 1.14, temos que a melhor aproximação de $\varphi_m(t)$ em V_m é dada por

$$\sum_{i=1}^{m}(\varphi_m, w_i)_{L^2(\Omega)}w_i,$$

assim, aplicando o Teorema 1.15 e lembrando que $||w_i||_{L^2(\Omega)} = 1$,

$$
\begin{aligned}
||P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} &= \left|\left|\sum_{i=1}^{m}(\varphi_m, w_i)_{L^2(\Omega)}w_i\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}|(\varphi_m, w_i)_{L^2(\Omega)}|^2||w_i||^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}|(\varphi_m, w_i)_{L^2(\Omega)}|^2 \le ||\varphi_m||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Logo, $||P_m(\varphi_m(t))||_{L^2(\Omega)} \le ||\varphi_m(t)||_{L^2(\Omega)}$. Então, de (3.33)

$$||\theta_m(t)||_{L^2(\Omega)} \le ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||_{L^2(\Omega)} + ||\ell\varphi_m(t)||_{L^2(\Omega)}$$

e daí

$$
\begin{aligned}
||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \Big(||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||\ell\varphi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\Big)^2 \\
&\leq 2^2\Big(||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \ell^2||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\leq M_6\Big(||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \quad (3.34)
\end{aligned}
$$

onde $M_6 = 2^2 \max\{1, \ell^2\}$.

Aplicando (3.34) em (3.32) temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(2M_3||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&+(4M_3\xi^2 - M_3\xi^2)||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\Big(2k_1 - \varepsilon\ell k_2\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\rho_1||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2M_3M_5||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + M_3\xi^2||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+2M_3M_5M_6\Big(||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&+2M_3M_5||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + M_3\xi^2||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

e, por conseguinte

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(2M_3||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&+3M_3\xi^2||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\Big(2k_1 - \varepsilon\ell k_2\Big)||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\xi^2\rho_1||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2M_3M_5(1 + M_6)||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+M_3(\xi^2 + 2M_5M_6)||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + 2M_3M_5||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+M_3\xi^2||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} \quad (3.35)
\end{aligned}
$$

Integrando (3.35) de 0 a t com $t \in [0, T_m)$ temos que

$$\begin{aligned}
2M_3||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)}&\\
+\xi^2||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}&\\
+3M_3\xi^2\int_0^t ||\nabla\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds + \xi^2\Big(2k_1 - \varepsilon\ell k_2\Big)\int_0^t ||\nabla\theta_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds&\\
+\xi^2\rho_1\int_0^t ||\nabla c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds&\\
\leq 2M_3M_5(1+M_6)\int_0^t ||\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds&\\
+M_3(\xi^2 + 2M_5M_6)\int_0^t ||\theta_m(s) + \ell P_m(\varphi_m(s))||^2_{L^2(\Omega)}ds&\\
+2M_3M_5\int_0^t ||c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds + M_3\xi^2\int_0^t ||f(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds&\\
+2M_3||\varphi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\theta_m(0) + \ell P_m(\varphi_m(0))||^2_{L^2(\Omega)}&\\
+\xi^2||c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)},&
\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
2M_3||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}&\\
+3M_3\xi^2\int_0^t ||\nabla\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds + \xi^2\Big(2k_1 - \varepsilon\ell k_2\Big)\int_0^t ||\nabla\theta_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds&\\
+\xi^2\rho_1\int_0^t ||\nabla c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds&\\
\leq M_7\Big\{\int_0^t\Big(||\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(s) + \ell P_m(\varphi_m(s))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)ds&\\
+\int_0^t ||f(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds + ||\varphi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(0) + \ell P_m(\varphi_m(0))||^2_{L^2(\Omega)}&\\
+||c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)}\Big\},&
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde $M_7 = \max\{2M_3M_5(1+M_6), M_3(\xi^2 + 2M_5M_6), 2M_3M_5, M_3\xi^2, 2M_3, \xi^2\}$, e observando que

$$\begin{aligned}
||\theta_m(0) + \ell P_m(\varphi_m(0))||^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2^2\Big(||\theta_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \ell^2||P_m(\varphi_m(0))||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\leq 2^2\Big(||\theta_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \ell^2||\varphi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)}\Big),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$||\varphi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} = ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.38}$$

e de modo análogo ao que fizemos em (3.33), obtemos

$$||P_m(\theta_0)||_{L^2(\Omega)} = ||\theta_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.39}$$

e

$$||P_m(c_0)||_{L^2(\Omega)} = ||c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.40}$$

Aplicando (3.37), (3.38), (3.39) e (3.40) em (3.36) temos que

$$\begin{aligned}
& ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \int_0^t ||\nabla\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla\theta_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \\
\leq & M_9 \Bigg\{ \int_0^t \Big(||\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(s) + \ell P_m(\varphi_m(s))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} \Big) ds \\
+ & \int_0^t ||f(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & 2^2 \Big(||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + \ell^2 ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} \Big) + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)} \Bigg\} \text{ para todo } \ t \in [0, T_m),
\end{aligned}$$

onde $M_9 = \dfrac{M_7}{M_8}$ e $M_8 = \min\{2M_3, \xi^2, 3M_3\xi^2, \xi^2(2k_1 - \varepsilon\ell k_2)\}$, e assim,

$$\begin{aligned}
& ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \int_0^t ||\nabla\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla\theta_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \\
\leq & M_9 \Bigg\{ \int_0^t \Big(||\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(s) + \ell P_m(\varphi_m(s))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} \Big) ds \\
+ & \int_0^t ||f(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + (1 + 4\ell^2) ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & 4||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)} \Bigg\}
\end{aligned}$$

e daí

$$
\begin{aligned}
& ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \int_0^t ||\nabla\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla\theta_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \\
\leq & M_{10}\Bigg\{ \int_0^t \Big(||\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(s) + \ell P_m(\varphi_m(s))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} \Big) ds \\
+ & \int_0^t ||f(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)} \Bigg\} \text{ para todo } \ t \in [0, T_m),
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

onde $M_{10} = \max\{M_9, M_9(1 + 4\ell^2), 4M_9\}$.

Como (3.41) vale para todo $t \in [0, T_m)$, com $T_m \leq T$, então

$$
\begin{aligned}
& ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \int_0^t ||\nabla\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla\theta_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||\nabla c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \\
\leq & M_{10}\Bigg\{ \int_0^t \Big(||\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(s) + \ell P_m(\varphi_m(s))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \Big) ds \\
+ & \int_0^T ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)} \Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

e daí

$$
\begin{aligned}
& ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq & M_{10}\Bigg\{ \int_0^t \Big(||\varphi_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(s) + \ell P_m(\varphi_m(s))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(s)||^2_{L^2(\Omega)} \Big) ds \\
+ & \int_0^T ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Aplicando o lema de Gronwall na versão integral em (3.43) resulta que

$$
\begin{aligned}
& ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq \;& M_{11}\Big(\int_0^T ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \quad (3.44)
\end{aligned}
$$

onde $M_{11} = M_{10}(1 + TM_{10}\ e^{TM_{10}})$, e como por (3.34)

$$
||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq M_6\Big(||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big),
$$

e de (3.44)

$$
\begin{aligned}
& ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq \;& M_{11}\Big(\int_0^T ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big),
\end{aligned}
$$

então

$$
||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq M_{11}\Big(\int_0^T ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big)
$$

e, por conseguinte

$$
\begin{aligned}
& ||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq \;& 2M_{11}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big). \quad (3.45)
\end{aligned}
$$

Segue da última desigualdade que $T_m = T$, pois caso contrário, se $T_m < T$ então $\|\varphi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|c_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty$ quando $t \longrightarrow T_m^-$ pela Proposição 1.49 o que é uma contradição. Este argumento conclui a prova do Lema 3.3.

Continuemos com a prova do Lema 3.4. De (3.44) vem que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T \Big(||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)dt \\
\leq \;& 2M_{11}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big)(T-0),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T \Big(||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)dt \\
\leq \;& M_{12}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \quad (3.46)
\end{aligned}
$$

onde $M_{12} = 2M_{11}T$.

Aplicando (3.46) a (3.42) resulta que

$$\begin{aligned}
& ||\varphi_m(T)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(T) + \ell P_m(\varphi_m(T))||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(T)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \int_0^T ||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T ||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt \\
\leq & M_{13}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big)
\end{aligned}$$

onde $M_{13} = M_{10}M_{12} + M_{10}$, e então,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T ||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T ||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt \\
\leq & M_{13}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T)$, e assim, de (3.45) e (3.47)

$$\begin{aligned}
& ess\sup_{x\in\Omega}\big(||\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\big) \\
+ & \int_0^T ||\nabla\varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T ||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt \\
\leq & M_{13}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& ||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||^2_{(L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^3} + ||(\nabla\varphi_m(t), \nabla\theta_m(t), \nabla c_m(t))||^2_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))^3} \\
\leq & M_{13}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré temos que

$$||\nabla\varphi||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = ||\varphi||^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))},$$

$$||\nabla\theta||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = ||\theta||^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))}$$

e

$$||\nabla c_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = ||c_m||^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))},$$

e como a norma em $H^1_0(\Omega)$ é a norma induzida por $H^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
& ||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||^2_{(L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^3} + ||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||^2_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^3} \\
\leq & M_{13}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||^2_{(V(Q))^3}\\ \leq\;& M_{13}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}&||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||^2_{(V(Q))^3}\\ \leq\;& M_{13}\Big(||f||_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||_{L^2(\Omega)} + ||c_0||_{L^2(\Omega)}\Big)^2\end{aligned}$$

e, por conseguinte

$$\begin{aligned}&||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||_{(V(Q))^3}\\ \leq\;& M_{14}\Big(||f||_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||_{L^2(\Omega)} + ||c_0||_{L^2(\Omega)}\Big),\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde $M_{14} = \sqrt{M_{13}}$. □

Lema 3.5. *Existe uma constante $M_{17} > 0$, que independe de m, tal que*

$$||\varphi_m||_{W_q^{2,1}(Q)} \leq M_{17}\Big(||\varphi_0||_{H^1(\Omega)} + ||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\Big).$$

Demonstração. Pelo Lema 1.22 observemos que

$$||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||_{L^r(0,T;L^s(\Omega))^3} \leq C||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||_{V(Q)^3}, \tag{3.49}$$

ou seja, $V(Q) \hookrightarrow L^r(0, T; L^s(\Omega))$ continuamente, sendo C uma constante positiva e $\dfrac{1}{r} + \dfrac{N}{2s} = \dfrac{N}{4}$, então de (3.48) vem que

$$\begin{aligned}&||(\varphi_m(t), \theta_m(t), c_m(t))||_{(L^r(0,T;L^s(\Omega)))^3}\\ \leq\;& M_{15}\Big(||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\Big)\end{aligned} \tag{3.50}$$

onde $M_{15} = CM_{14}$.

Podemos tomar $r = s = \dfrac{2(N+2)}{N}$ no Lema 1.22. De fato, temos que

$$\frac{2(N+2)}{N} \leq \frac{2N}{N-2} \;\Leftrightarrow\; 2(N^2-4) \leq 2N^2 \;\Leftrightarrow\; 2N^2 - 8 \leq 2N^2 \;\Leftrightarrow\; -8 \leq 0.$$

Desse modo, $(\theta_m, c_m) \in (L^r(Q))^2$ e de (3.47) $\nabla\varphi_m \in L^2(Q)$, segue daí que $g = |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) \in L^q(Q)$, com $q = \dfrac{N+2}{N+1}$. De fato, Como $\dfrac{1}{\frac{2(N+1)}{N}} + \dfrac{1}{\frac{2(N+1)}{N+2}} = 1$, então

$$
\begin{aligned}
&\int_Q (|\nabla\varphi_m||c_m|)^q dxdt \\
= &\int_Q |\nabla\varphi_m|^{\frac{N+2}{N+1}}|c_m|^{\frac{N+2}{N+1}}dxdt \\
\leq &\left(\int_Q |\nabla\varphi_m|^{\frac{N+2}{N+1}\frac{2(N+1)}{N+2}}dxdt\right)^{\frac{N+2}{2(N+1)}} \left(\int_Q |c_m|^{\frac{N+2}{N+1}\frac{2(N+1)}{N}}dxdt\right)^{\frac{N}{2(N+1)}} \\
= &\left(\int_Q |\nabla\varphi_m|^2 dxdt\right)^{\frac{N+2}{2(N+1)}} \left(\int_Q |c_m|^{\frac{2(N+2)}{N}}dxdt\right)^{\frac{N}{2(N+1)}} < \infty, \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

já que $\nabla\varphi_m \in L^2(Q)$ e $c_m \in L^r(Q)$ com $r = \dfrac{2(N+2)}{N}$, e assim $|\nabla\varphi_m|c_m \in L^q(Q)$, o que implica $\mu_1|\nabla\varphi_m|c_m \in L^q(Q)$. De modo análogo concluímos que $\mu_2|\nabla\varphi_m|\theta_m \in L^q(Q)$, já que $\theta_m \in L^r(Q)$. Portanto,

$$g = |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) \in L^q(Q).$$

Usando a Proposição 2.2, obtemos $\varphi_m \in W_q^{2,1}(Q)$, com $q = \dfrac{N+2}{N+1}$ e além disso,

$$||\varphi_m||_{W_q^{2,1}(Q)} \leq M\Big(||\varphi_0||_{H^1(\Omega)} + |||\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m)||_{L^q(Q)}\Big), \qquad (3.52)$$

e como de (3.51) vem que

$$|||\nabla\varphi|_m c_m||^q_{L^q(Q)} \leq ||\nabla\varphi_m||^q_{L^2(Q)}||c_m||^q_{L^r(Q)},$$

então

$$|||\nabla\varphi_m|c_m||_{L^q(Q)} \leq ||\nabla\varphi_m||_{L^2(Q)}||c_m||_{L^r(Q)},$$

com $q = \dfrac{N+2}{N+1}$ e $r = \dfrac{2(N+2)}{N}$. E analogamente, concluímos que

$$|||\nabla\varphi_m|\theta_m||_{L^q(Q)} \leq ||\nabla\varphi_m||_{L^2(Q)}||\theta_m||_{L^r(Q)},$$

com $q = \dfrac{N+2}{N+1}$ e $r = \dfrac{2(N+2)}{N}$.

Logo, de (3.52) vem que

$$\begin{aligned}||\varphi_m||_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq M\Big(||\varphi_0||_{H^1(\Omega)} + |||\nabla\varphi_m|\mu_1 c_m||_{L^q(Q)} + |||\nabla\varphi|\mu_2\theta_m||_{L^q(Q)}\Big)\\ &\leq M\Big(||\varphi_0||_{H^1(\Omega)} + ||\nabla\varphi_m||_{L^2(Q)}(||\mu_1 c_m||_{L^r(Q)} + ||\mu_2\theta_m||_{L^r(Q)})\Big)\\ &\leq M_{16}\Big(||\varphi_0||_{H^1(\Omega)} + ||\nabla\varphi_m||_{L^2(Q)}(||c_m||_{L^r(Q)} + ||\theta_m||_{L^r(Q)})\Big)\end{aligned}$$

onde $M_{16} = M \max\{1, \mu_1, \mu_2\}$.

De (3.42) e de (3.50) com $s = r$ vem que

$$||\varphi_m||_{W_q^{2,1}(Q)} \leq M_{17}\Big(||\varphi_0||_{H^1(\Omega)} + ||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\Big) \tag{3.53}$$

onde $M_{17} = M_{16} \max\{1, M_{10}M_{15}\}$ depende de T, Ω, ξ e $||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3}$ é independente de m. $\square$

Dos Lemas anteriores, concluímos que as sequências $\varphi_{m,t}$, $\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial x}$ são uniformemente limitadas em $L^q(Q)$, e consequentemente $\Delta\varphi_m$ é uniformemente limitada em $L^q(\Omega)$.
Como $\dfrac{N+2}{N+1} = 1 + \dfrac{1}{N+1} > 1$, então $L^q(Q)$ é reflexivo. Logo, com o mesmo raciocínio que usamos para concluir (3.123), existem $\Delta\varphi$ e φ_t em $L^q(Q)$ e subsequências de $\varphi_{m,t}$ e $\Delta\varphi_m$, que continuaremos denotando por $\varphi_{m,t}$ e $\Delta\varphi_m$, tais que

$$\varphi_{m,t} \rightharpoonup \varphi_t \;\text{ fracamente em }\; L^q(Q) \;\text{ e} \tag{3.54}$$
$$\Delta\varphi_m \rightharpoonup \Delta\varphi \;\text{ fracamente em }\; L^q(Q). \tag{3.55}$$

Em seguida, vamos obter estimativas para as derivadas temporais de $\theta_m + \ell P_m(\varphi)$ e c_m, é o que veremos no próximo lema.

Lema 3.6. *As seguintes estimativas são válidas:*

$$||(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq M_{18}\Big(||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\Big)$$

e

$$||c_{m,t}||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq M_{19}\Big(||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\Big),$$

onde M_{18} e M_{19} são constantes positivas que não dependem de m.

Demonstração. Sejam $v, w \in H_0^1(\Omega)$ arbitrários e tomemos $v_1 = P_m(v)$ em (3.10) e $v_2 = P_m(w)$ em (3.11). Substituindo $v_1 = P_m(v)$ em (3.10) temos que,

$$\int_\Omega (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t P_m(v)dx + \int_\Omega k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)\nabla P_m(v)dx = \int_\Omega f P_m(v)dx.$$

Agora, note que

$$\langle(\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t, P_m(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle(\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

De fato, observemos que $H_0^1(\Omega) = V_m \bigoplus V_m^\perp$, ou seja, $v \in H_0^1(\Omega)$, $v = P_m(v) + P_m(v)^\perp$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), v\rangle &= \langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), P_m(v) + P_m(v)^\perp\rangle \\
&= \langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), P_m(v)\rangle \\
&+ \langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), P_m(v)^\perp\rangle \\
&= \langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), P_m(v)\rangle + 0 \\
&= \langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), P_m(v)\rangle,
\end{aligned}$$

uma vez que $\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)) \in V_m$ e $P_m(v)^\perp \in V_m^\perp$, e daí,

$$\langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), P_m(v)^\perp\rangle = 0$$

é o produto de dualidade $H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\langle(\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t, P_m(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle(\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

De maneira análoga, provamos que

$$\langle c_{m,t}, P_m(v)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle c_{m,t}, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}. \tag{3.56}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &= -\langle k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t), \nabla P_m(v)\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ \langle f, P_m(v)\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq |-\langle k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t), \nabla P_m(v)\rangle_{H_0^1(\Omega)}| \\
&+ |\langle f, P_m(v)\rangle_{H_0^1(\Omega)}| \\
&\leq ||k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m(t)||_{L^2(\Omega)}\ ||\nabla P_m(v)||_{L^2(\Omega)} \\
&+ ||f||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(v)||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq k_2||\theta_m||_{H_0^1(\Omega)}\ ||P_m(v)||_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ ||f||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(v)||_{H_0^1(\Omega)}. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

Analogamente, trocando v por $-v$ obtemos,

$$\begin{aligned}
-\langle(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &\leq k_2||\theta_m||_{H_0^1(\Omega)}||P_m(v)||_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ ||f||_{L^2(\Omega)}||P_m(v)||_{H_0^1(\Omega)}. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Desse modo, de (3.57), (3.58) e (3.22) resulta que

$$
\begin{aligned}
|\langle(\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| &\leq k_2||\theta_m||_{H_0^1(\Omega)}||P_m(v)||_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ ||f||_{L^2(\Omega)}||P_m(v)||_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \Big(k_2||\theta_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}\Big)||P_m(v)||_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \Big(k_2||\theta_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}\Big)||v||_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

daí,

$$
\begin{aligned}
||(\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t||_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{||v||\leq 1} |\langle(\theta_m(t)+\ell\varphi_m(t))_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \\
&\leq k_2||\theta_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega).} \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

Elevando ambos os membros de (3.59) ao quadrado e integrando de 0 a T temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||(\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t||^2_{H^{-1}(\Omega)}dt &\leq \int_0^T \Big(k_2||\theta_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)}\Big)^2 dt \\
&\leq \int_0^T 2^2\Big(k_2^2||\theta_m||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)}\Big)dt \\
&= 2^2\bigg(\int_0^T k_2^2||\theta_m||^2_{H_0^1(\Omega)}dt + \int_0^T ||f||^2_{L^2(\Omega)}dt\bigg) \\
&= 4\bigg(k_2^2\int_0^T ||\nabla\theta_m||^2_{L^2(\Omega)}dt + ||f||^2_{L^2(Q)}dt\bigg), \qquad (3.60)
\end{aligned}
$$

e de (3.47) vem que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||\nabla\theta_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt &\leq M_{13}\Big(||f||^2_{L^2(Q)} + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&= M_{13}\Big(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||^2_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||^2_{L^2(Q)}\Big),
\end{aligned}
$$

então de (3.60) temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T ||(\theta_m(t)+\ell\varphi_m(t))_t||^2_{H^{-1}(\Omega)}dt &\le 4\left(k_2^2\int_0^T ||\nabla\theta_m||^2_{L^2(\Omega)}dt + ||f||^2_{L^2(Q)}dt\right)\\ &\le M_{18}\left(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||^2_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||^2_{L^2(Q)}\right)\\ &\le M_{18}\left(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\right)^2,\end{aligned}$$

onde $M_{18} = 4\ \max\{k_2^2M_{13}, k_2^2M_{13}+1\}$, logo,

$$||(\theta_m+\ell P_m(\varphi_m))_t||^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le M_{18}\left(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\right)^2,$$

e portanto,

$$||(\theta_m+\ell P_m(\varphi_m))_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le M_{18}\left(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\right) \tag{3.61}$$

Agora, tomando $v_2 = P_m(w)$ em (3.11) com $w \in H_0^1(\Omega)$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega c_{m,t}\,P_m(w)dx &+ \int_\Omega D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla c_m\nabla P_m(w)dx\\ &= -\int_\Omega D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\varphi_m\nabla P_m(w)dx,\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\langle c_{m,t}, P_m(w)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &= -\langle D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla c_m, \nabla P_m(w)\rangle_{H_0^1(\Omega)}\\ &- \langle D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\varphi_m, \nabla P_m(w)\rangle_{H_0^1(\Omega)}\\ &\le |-\langle D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla c_m, \nabla P_m(w)\rangle_{H_0^1(\Omega)}|\\ &+ |-\langle D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\varphi_m, \nabla P_m(w)\rangle_{H_0^1(\Omega)}|\\ &\le ||D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla c_m||_{L^2(\Omega)}\ ||\nabla P_m(w)||_{L^2(\Omega)}\\ &+ ||D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\varphi_m||_{L^2(\Omega)}\ ||\nabla P_m(w)||_{L^2(\Omega)}\\ &= \rho_2||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)}||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(w)||_{H_0^1(\Omega)}\\ &+ \rho_3||\nabla\varphi_m||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(w)||_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.62}$$

Analogamente, trocando w por $-w$ obtemos

$$\begin{aligned} -\langle c_{m,t}, w\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &\leq \rho_2||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(w)||_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \rho_3||\nabla \varphi_m||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(w)||_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

De (3.56) vem que $\langle c_{m,t}, P_m(w)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle c_{m,t}, w\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$, assim, de (3.22), (3.62) e (3.63) resulta que

$$\begin{aligned} |\langle c_{m,t}, w\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| &\leq \rho_2||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(w)||_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \rho_3||\nabla \varphi_m||_{L^2(\Omega)}\ ||P_m(w)||_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \rho_2||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)}\ ||w||_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \rho_3||\nabla \varphi_m||_{L^2(\Omega)}\ ||w||_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \Big(\rho_2||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)} + \rho_3||\nabla \varphi_m||_{L^2(\Omega)}\Big)||w||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} ||c_{m,t}||_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{||w||\leq 1} |\langle c_{m,t}, w\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \\ &\leq \rho_2||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)} + \rho_3||\nabla \varphi_m||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Elevando ambos os membros de (3.64) ao quadrado e integrando de 0 a T temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T ||c_{m,t}(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)}dt &\leq \int_0^T \Big(\rho_2||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)} + \rho_3||\nabla \varphi_m||_{L^2(\Omega)}\Big)^2 dt \\ &\leq \int_0^T 2^2\Big(\rho_2||\nabla c_m||^2_{L^2(\Omega)} + \rho_3||\nabla \varphi_m||^2_{L^2(\Omega)}\Big)dt \\ &= 2^2\Big(\rho_2\int_0^T ||\nabla c_m||^2_{L^2(\Omega)}dt + \rho_3\int_0^T ||\nabla \varphi_m||^2_{L^2(\Omega)}dt\Big). \end{aligned} \tag{3.65}$$

De (3.47)vem que

$$\int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt \leq M_{13}\Big(||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\Big)$$

e

$$\int_0^T ||\nabla \varphi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt \ \leq\ M_{13}\Big(||(\varphi_0, \theta_0, c_0)||_{(L^2(\Omega))^3} + ||f||_{L^2(Q)}\Big),$$

então de (3.65) vem que

$$\begin{aligned}\int_0^T ||c_{m,t}(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)}dt &\leq 4(\rho_2+\rho_3)M_{13}\Big(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||_{(L^2(\Omega))^3}+||f||_{L^2(Q)}\Big)\\ &\leq M_{19}\Big(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||_{(L^2(\Omega))^3}+||f||_{L^2(Q)}\Big)^2,\end{aligned}$$

onde $M_{19}=4(\rho_2+\rho_3)M_{13}$, logo,

$$||c_{m,t}||^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leq M_{19}\Big(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||_{(L^2(\Omega))^3}+||f||_{L^2(Q)}\Big)^2,$$

e portanto,

$$||c_{m,t}||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leq M_{19}\Big(||(\varphi_0,\theta_0,c_0)||_{(L^2(\Omega))^3}+||f||_{L^2(Q)}\Big). \tag{3.66}$$

□

Lema 3.7. *As seguintes convergências se verificam:*

$$(\varphi_m,\theta_m+\ell P_m(\varphi_m),c_m)\to(\varphi,\zeta,c)\ \ \textit{q.t.p. e fortemente em}\ \ (L^2(Q))^3,$$

$$\begin{gathered}\nabla\varphi_m\to\nabla\varphi\ \ \textit{fortemente em}\ \ L^q(0,T;L^p(\Omega)),\\ \varphi_m\rightharpoonup\varphi\ \ \textit{em}\ \ L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap W^{2,1}_q(Q),\\ (\theta_m,c_m)\rightharpoonup(\theta,c)\ \ \textit{em}\ \ (L^2(0,T;H^1_0(\Omega))^2,\\ (\theta_m(t)+\ell P_m(\varphi_m(t)))_t\rightharpoonup\zeta_t\ \ \textit{em}\ \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\ \ \textit{e}\\ c_{m,t}\rightharpoonup c_t\ \ \textit{em}\ \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).\end{gathered}$$

Demonstração. Observemos que de (3.48) e (3.53) a sequência φ_m é uniformemente limitada em relação a m em

$$L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap W^{2,1}_q(Q),$$

onde $W=\{u\in L^q(0,T;W^{2,q}(\Omega)):u_t\in L^q(Q)\}$ e $q=\dfrac{N+2}{N+1}$. E, do fato desses espaços serem reflexivos, então, existe

$$\varphi\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap W^{2,1}_q(Q),$$

e uma subsequência de φ_m, que continuaremos denotando por φ_m, tal que,

$$\varphi_m\rightharpoonup\varphi\ \ \text{em}\ \ L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap W^{2,1}_q(Q). \tag{3.67}$$

Observemos agora que, como $W^{2,q}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, com a primeira imersão compacta, se $2 - \dfrac{N}{q} > 1 - \dfrac{N}{p}$ e $p > q$ (Ver Lema 1.18). Veja que, realmente é possível $p > q$ com $q = \dfrac{N+2}{N+1}$. De fato, $2 - \dfrac{N}{q} > 1 - \dfrac{N}{p}$, daí, $\dfrac{N}{p} > -1 + \dfrac{N}{q} = -1 + \dfrac{N(N+1)}{N+2} = \dfrac{N^2-2}{N+2}$, logo, $p < \dfrac{N(N+2)}{N^2-2}$ e $q = \dfrac{N+2}{N+1} < \dfrac{N(N+2)}{N^2-2}$, e então, é só tomarmos $q < p < \dfrac{N(N+2)}{N^2-2}$. Assim, usando o item (i) do Lema 1.20, resulta que

$$W = \{u \in L^q(0,T;W^{2,q}(\Omega)) : u_t \in L^q(Q)\} \hookrightarrow L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$$

compactamente. Logo, como a sequência φ_m é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W_q^{2,1}(Q)$, então existe $\varphi \in L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ e uma subsequência de φ_m, que continuaremos denotando por φ_m, tal que, $\varphi_m \to \varphi \in L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, o que implica que

$$\nabla\varphi_m \to \nabla\varphi \ \text{ fortemente em } \ L^q(0,T;L^p(\Omega)). \tag{3.68}$$

Também de (3.48) vemos que, a sequência θ_m é uniformemente limitada em relação a m em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então existe

$$\theta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

e uma subsequência de θ_m, que continuaremos denotando por θ_m, tal que,

$$\theta_m \rightharpoonup \theta \ \text{ fracamente em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega). \tag{3.69}$$

Analogamente, de (3.48), a sequência c_m é uniformemente limitada em relação a m em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então existe

$$c \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

e uma subsequência de c_m, que continuaremos denotando por c_m, tal que,

$$c_m \rightharpoonup c \ \text{ fracamente em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega). \tag{3.70}$$

De (3.48), (3.61) e (3.66) a sequência $(\theta_m + \ell\varphi_m, c_m)$ é uniformemente limitada em relação a m em $X \times X$, onde $X = \{u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$. E como, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, com a primeira imersão compacta, então, pelo o item (i) do Lema 1.20, vem que

$$X \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \ \text{ compactamente,}$$

então, existe

$$(\zeta, c) \in (L^2(Q))^2$$

e uma subsequência de $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m)$, que continuaremos denotando por $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m)$, tal que

$$(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m) \to (\zeta, c) \text{ fortemente em } (L^2(Q))^2, \tag{3.71}$$

assim, existe uma subsequência da subsequência $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m)$, que também vamos denotar por $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m)$, tal que

$$(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m) \to (\zeta, c) \ \ q.t.p. \text{ em } (L^2(Q))^2. \tag{3.72}$$

Logo, de (3.71) e (3.72), resulta que

$$(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m) \to (\zeta, c) \ \ q.t.p. \text{ e fortemente em } (L^2(Q))^2. \tag{3.73}$$

Além disso, como $q = \dfrac{N+2}{N+1}$, então

$$\frac{1}{q} - \frac{2}{N+2} = \frac{1}{\frac{N+2}{N+1}} - \frac{2}{N+2} = \frac{N+1}{N+2} - \frac{2}{N+2} = \frac{N-1}{N+2} > 0$$

quando $N = 2$ ou $N = 3$ e

$$p = \left[\frac{1}{q} - \frac{2}{N+2}\right]^{-1} = \left[\frac{N+1}{N+2} - \frac{2}{N+2}\right]^{-1} = \left[\frac{N-1}{N+2}\right]^{-1},$$

então, usando o Teorema 1.16, temos que

$$W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^{p-\epsilon}(Q) \text{ compactamente, com } p = \frac{N+2}{N-1} \text{ e } p - \epsilon > 1,$$

para ϵ suficientemente pequeno. Em particular, se $N = 2$ ou $N = 3$, pela Proposição 1.19, resulta que

$$W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(Q) \text{ compactamente,}$$

logo, como a sequência φ_m é uniformemente limitada em $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap W_q^{2,1}(Q)$, então, existe $\varphi \in L^2(Q)$ e uma subsequência de φ_m, que continuaremos denotando por φ_m, tal que,

$$\varphi_m \to \varphi \text{ fortemente em } L^2(Q), \tag{3.74}$$

daí, existe uma subsequência da subsequência φ_m, que também vamos denotar por φ_m, tal que,

$$\varphi_m \to \varphi \;\; q.t.p. \;\text{ em }\; L^2(Q). \tag{3.75}$$

Por conseguinte, de (3.74) e (3.75), obtemos que

$$\varphi_m \to \varphi \;\; q.t.p. \text{ e fortemente em } \; L^2(Q). \tag{3.76}$$

Portanto, de (3.73) e (3.76) resulta que

$$(\varphi_m, \theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m) \to (\varphi, \zeta, c) \;\; q.t.p. \text{ e fortemente em } \; (L^2(Q))^3. \tag{3.77}$$

De (3.61), implica que, a sequência $(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t$ é uniformemente limitada em relação a m em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então existe

$$\alpha \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

e uma subsequência de $(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t$, que continuaremos denotando por $(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t$, tal que,

$$(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t \rightharpoonup \alpha \;\; \text{fracamente em } \; L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.78}$$

Mostraremos que $\alpha = \zeta_t$. Por definição,

$$\alpha = \zeta_t \text{ se, e somente se } \int_0^T \psi'(t)\zeta(t)dt = -\int_0^T \psi(t)\alpha(t), \;\forall \psi \in C_0^\infty(0,T).$$

Mas, $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t \rightharpoonup \alpha$ fracamente em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ significa que para qualquer $\beta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

$$\int_0^T \Big\langle (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t, \beta(t) \Big\rangle dt \to \int_0^T \Big\langle \alpha(t), \beta(t) \Big\rangle dt.$$

Então, segue que para todo $\beta \in C_0^\infty(0,T)$ e $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^T \Big\langle (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t, \psi(t)w \Big\rangle dt \to \int_0^T \Big\langle \alpha(t), \psi(t)w \Big\rangle dt,$$

pois, $\psi(t)w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \Big\langle (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t, \psi(t)w \Big\rangle dt \\
= & \Big\langle \int_0^T (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t \psi(t) dt, w \Big\rangle \\
= & -\Big\langle \int_0^T (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))) \psi'(t) dt, w \Big\rangle \\
= & -\int_0^T \Big\langle (\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))), \psi'(t)w \Big\rangle dt.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\theta_m + \ell P_m(\varphi_m) \rightharpoonup \zeta \text{ fracamente em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& ||\theta_m + \ell P_m(\varphi_m)||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
= & \int_0^T ||\theta_m + \ell P_m(\varphi_m)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \\
\leq & \; 4\int_0^T ||\theta_m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt + 4\ell \int_0^T ||P_m(\varphi_m(t))||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \\
= & \; 4||\theta_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 4\ell \int_0^T ||P_m(\varphi_m(t))||^2_{H_0^1(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

De (3.22) temos que

$$||P_m(\varphi_m)||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||\varphi_m||_{H_0^1(\Omega)}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
& ||\theta_m + \ell P_m(\varphi_m)||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
\leq & \; 4||\theta_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 4\ell||\varphi_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

De (3.48) segue que

$$4||\theta_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 4\ell||\varphi_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < C_1,$$

onde C_1 é uma constante estritamente positiva e, por conseguinte

$$||\theta_m + \ell P_m(\varphi_m)||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < C_1,$$

e daí

$$||\theta_m + \ell P_m(\varphi_m)||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < C_2,$$

onde C_2 é uma constante estritamente positiva. Passando a uma subsequência se necessário, segue que

$$\theta_m + \ell P_m(\varphi_m) \rightharpoonup \zeta \text{ fracamente em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Para todo $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ e $w \in H_0^1(\Omega)$ temos que $\psi'(t)w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então

$$\int_0^T \Big\langle \psi'(t)w, \theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t))\Big\rangle dt \to \int_0^T \Big\langle \psi'(t)w, \zeta(t)\Big\rangle dt.$$

Assim, tomando o limite em (3.79), temos que para todo $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^T \Big\langle \alpha(t), \psi(t)w\Big\rangle dt = -\int_0^T \Big\langle \zeta(t), \psi'(t)w\Big\rangle dt.$$

Isto é,

$$\Big\langle \int_0^T \alpha(t)\psi(t)dt, w\Big\rangle = \Big\langle -\int_0^T \zeta(t)\psi(t)dt, w\Big\rangle,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$. Ou seja,

$$\int_0^T \psi'(t)\zeta(t)dt = -\int_0^T \psi(t)\alpha(t)dt,\ \forall \psi \in C_0^\infty(0,T),$$

como queríamos provar. Concluímos então que

$$(\theta_m(t) + \ell P_m(\varphi_m(t)))_t \rightharpoonup \zeta_t \text{ fracamente em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.80}$$

Da mesma forma, de (3.66), vem que a sequência $c_{m,t}$ é uniformemente limitada em relação a m em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então existe

$$\delta \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

e uma subsequência de $c_{m,t}$, que continuaremos denotando por $c_{m,t}$. De maneira análoga ao raciocínio anterior, a subsequência $c_{m,t}$ é tal que,

$$c_{m,t} \rightharpoonup c_t = \delta \ \text{ fracamente em } \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.81}$$

Em suma, de (3.77), (3.68), (3.67), (3.69), (3.70), (3.80) e (3.81) respectivamente, obtemos que

$$(\varphi_m, \theta_m + \ell P_m(\varphi_m), c_m) \to (\varphi, \zeta, c) \ \ q.t.p. \text{ e fortemente em } \ (L^2(Q))^3, \tag{3.82}$$

$$\nabla\varphi_m \to \nabla\varphi \ \text{ fortemente em } \ L^q(0,T;L^p(\Omega)), \tag{3.83}$$

$$\varphi_m \rightharpoonup \varphi \ \text{ fracamente em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W_q^{2,1}(Q), \tag{3.84}$$

$$(\theta_m, c_m) \rightharpoonup (\theta, c) \ \text{ fracamente em } \ (L^2(0,T;H_0^1(\Omega))^2, \tag{3.85}$$

$$(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t \rightharpoonup \zeta_t \;\text{ fracamente em }\; L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \;\text{ e} \tag{3.86}$$

$$c_{m,t} \rightharpoonup c_t \;\text{ fracamente em }\; L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.87}$$

□

Observemos agora que

$$\begin{aligned} ||P_m(\varphi_m) - \varphi||_{L^2(Q)} &= ||P_m(\varphi_m) - P_m(\varphi) + P_m(\varphi) - \varphi||_{L^2(Q)} \\ &\leq ||P_m(\varphi_m) - P_m(\varphi)||_{L^2(Q)} + ||P_m(\varphi) - \varphi||_{L^2(Q)} \\ &= ||P_m(\varphi_m - \varphi)||_{L^2(Q)} + ||P_m(\varphi) - \varphi||_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

e de (3.33), temos

$$||P_m(\varphi_m - \varphi)||_{L^2(Q)} \leq ||\varphi_m - \varphi||_{L^2(Q)},$$

e daí,

$$||P_m(\varphi_m) - \varphi||_{L^2(Q)} \;\leq\; ||\varphi_m - \varphi||_{L^2(Q)} + ||P_m(\varphi) - \varphi||_{L^2(Q)},$$

e por (3.82), vem que

$$||\varphi_m - \varphi||_{L^2(Q)} \to 0 \;\text{ quando }\; m \to +\infty,$$

e do item do Lema 1.34, resulta que

$$||P_m(\varphi(t)) - \varphi(t)||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}} ||\varphi(t)||_{H^1(\Omega)}.$$

Elevando ambos os membros dessa última desigualdade ao quadrado e depois integrando de 0 a T, vem que

$$||P_m(\varphi) - \varphi||_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} ||\varphi||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},$$

e por (3.48), temos

$$||\varphi||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} < \infty,$$

logo, como $\lambda_{m+1} \to \infty$ quando $m \to \infty$, então

$$||P_m(\varphi) - \varphi||_{L^2(Q)} \to 0 \;\text{ quando }\; m \to \infty,$$

ou seja,

$$P_m(\varphi) \to \varphi \;\text{ fortemente em }\; L^2(Q). \tag{3.88}$$

Em particular, de (3.82) temos que

$$\theta_m + \ell P_m(\varphi_m) \to \zeta \text{ fortemente em } L^2(Q),$$

e como $\theta_m = \theta_m + \ell P_m(\varphi_m) - \ell P_m(\varphi_m)$, então, de (3.88), concluimos que

$$\theta_m \to \zeta - \ell\varphi \text{ fortemente em } L^2(Q),$$

e de (3.85)

$$\theta_m \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

e da unicidade do limite segue que

$$\zeta - \ell\varphi = \theta,$$

e consequentemente,

$$\zeta = \theta + \ell\varphi.$$

Portanto,

$$\theta_m + \ell P_m(\varphi_m) \to \theta + \ell\varphi \text{ fortemente em } L^2(Q).$$

Como

$$\begin{aligned} ||\theta_m - \theta||_{L^2(Q)} &= ||\theta_m + \ell P_m(\varphi_m) - \ell P_m(\varphi_m) + \ell\varphi - \ell\varphi - \theta||_{L^2(Q)} \\ &\leq ||(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m)) - (\theta + \ell\varphi)||_{L^2(Q)} + |\ell|||\varphi_m - \varphi|||_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

então, de (3.82) e (3.88) resulta que

$$\theta_m \to \theta \;\; q.t.p. \text{ e fortemente em } L^2(Q). \tag{3.89}$$

De (3.82) e $0 \leq \varphi_m(x,t) \leq 1$, concluimos que

$$0 \leq \varphi(x,t) \leq 1 \;\; q.t.p. \text{ em } Q. \tag{3.90}$$

Em seguida, vamos tomar o limite do problema aproximado (3.10)-(3.12) quando $m \to +\infty$. Como os argumentos para os termos lineares são padrões, vamos mostrar as convergências apenas para os não lineares, como no seguite lema.

Lema 3.8. *As seguintes convergências são válidas:*

$$k(\varphi_m,\theta_m,c_m) \to k(\varphi,\theta,c) \;\; \textit{fortemente em } L^{p_1}(Q), \; \forall\, 2 \leq p_1 < \infty,$$

$$D_i(\varphi_m,\theta_m,c_m) \to D_i(\varphi,\theta,c) \;\; \textit{fortemente em } L^{p_1}(Q), \; \forall\, 2 \leq p_1 < \infty,$$

$$k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m \rightharpoonup k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta \;\; \textit{fracamente em } L^2(Q).$$

$$D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla c_m \rightharpoonup D_1(\varphi,\theta,c)\nabla c \;\; \textit{fracamente em } L^2(Q),$$

$$D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\varphi_m \rightharpoonup D_2(\varphi,\theta,c)\nabla\varphi \;\; \textit{fracamente em } L^2(Q).$$

$$\varphi_m(\varphi_m - 1)(1 - 2\varphi_m) \rightharpoonup \varphi(\varphi - 1)(1 - \varphi) \ \ \textit{fracamente em} \ \ L^2(Q).$$
$$|\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) \rightharpoonup |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta) \ \ \textit{fracamente em} \ \ L^1(Q).$$

Demonstração. De (3.82), (3.89) e usando as hipóteses $(H_2) - (H_4)$, ou seja, o fato das funções k e D_i, $i = 1, 2$, serem contínuas, resulta que

$$k(\varphi_m, \theta_m, c_m) \to k(\varphi, \theta, c) \ \ q.t.p. \ \text{ em } \ Q, \tag{3.91}$$
$$D_i(\varphi_m, \theta_m, c_m) \to D_i(\varphi, \theta, c) \ \ q.t.p. \ \text{ em } \ Q, \ \ i = 1, 2. \tag{3.92}$$

Agora, para cada m e qualquer $2 \leq p_1 < \infty$ fixado, definamos as funções $g_m = |k(\varphi_m, \theta_m, c_m) - k(\varphi, \theta, c)|^{p_1}$ e $h_{i,m} = |D_i(\varphi_m, \theta_m, c_m) - D_i(\varphi, \theta, c)|^{p_1}$, para $i = 1, 2$. Usando novamente as hipóteses $(H_2) - (H_4)$ e as duas últimas convergências, temos que, $|g_m| \leq (2k_2)^{p_1}$, $|h_{i,m}| \leq (2\rho_{i+1})^{p_1}$, $g_m \to 0$ $q.t.p$ em Q e $h_{i,m} \to 0$ $q.t.p$ em Q. Logo, pelo Teorema 1.35 (Convergência Dominada de Lebesgue), concluímos que

$$k(\varphi_m, \theta_m, c_m) \to k(\varphi, \theta, c) \ \text{ em } \ L^{p_1}(Q), \tag{3.93}$$
$$D_i(\varphi_m, \theta_m, c_m) \to D_i(\varphi, \theta, c) \ \text{ em } \ L^{p_1}(Q), \tag{3.94}$$

para cada $2 \leq p_1 < \infty$ e $i = 1, 2$.

De (3.84) vem que $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ fracamente em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W_q^{2,1}(Q)$, daí $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, então, $\nabla\varphi_m \rightharpoonup \nabla\varphi$ em $L^2(Q)$, já que, se $\varphi_m(t) \in H_0^1(\Omega)$, então, $\dfrac{\partial\varphi_m(t)}{\partial x} \in H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. De modo análogo, temos que $\nabla\theta_m \rightharpoonup \nabla\theta$ em $L^2(Q)$ e $\nabla c_m \rightharpoonup \nabla c$ em $L^2(Q)$, e por conseguinte, concluímos que

$$(\nabla\varphi_m, \nabla\theta_m, \nabla c_m) \rightharpoonup (\nabla\varphi, \nabla\theta, \nabla c) \text{ fracamente em } (L^2(Q))^3. \tag{3.95}$$

Mostraremos agora que $k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla\theta_m \rightharpoonup k(\varphi, \theta, c)\nabla\theta$ fracamente em $L^2(Q)$. De fato, para todo $\nabla\psi \in L^2(Q)$, temos que

$$
\begin{aligned}
& \lim_{m\to\infty}\left|\int_Q k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m\nabla\psi dxdt - \int_Q k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla\psi dxdt\right| \\
= & \lim_{m\to\infty}\left|\int_Q \Big(k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m\nabla\psi - k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta_m\nabla\psi\Big)dxdt\right. \\
+ & \left.\int_Q \Big(k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta_m\nabla\psi - k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla\psi\Big)dxdt\right| \\
\leq & \lim_{m\to\infty}\int_Q \Big|k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi - k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi\Big|\,|\nabla\theta_m|\,dxdt \\
+ & \lim_{m\to\infty}\int_Q \Big|k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi\nabla\theta_m - k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi\nabla\theta\Big|dxdt \\
\leq & \lim_{m\to\infty} ||k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi - k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi||_{L^2(Q)}||\nabla\theta_m||_{L^2(Q)} \\
+ & \lim_{m\to\infty}\left|\int_Q k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi\nabla\theta_m - k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi\nabla\theta dxdt\right| \\
= & \lim_{m\to\infty} ||k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi - k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi||_{L^2(Q)}||\nabla\theta_m||_{L^2(Q)} \\
+ & \lim_{m\to\infty}\left|\int_Q (\nabla\theta_m - \nabla\theta)k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi dxdt\right|.
\end{aligned}
$$

Observemos agora que, de (3.93) $k(\varphi_m,\theta_m,c_m) \to k(\varphi,\theta,c)$ em $L^2(Q)$, então $k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi \to k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi$ em $L^2(Q)$, para todo $\nabla\psi \in L^2(Q)$. De fato, de (3.91), $k(\varphi_m,\theta_m,c_m) \to k(\varphi,\theta,c)$ *q.t.p.* em Q, logo, para cada $\nabla\psi \in L^2(Q)$, $k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi \to k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi$ *q.t.p.* em Q e por (H_2) temos $|k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi| \leq k_2|\nabla\psi|$, assim, pelo Teorema 1.35 (Convergência Dominada de Lebesgue)

$$
k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi \to k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi \text{ fortemente em } L^2(Q), \tag{3.96}
$$

e de (3.95) e (3.96), concluímos que

$$
\begin{aligned}
& \lim_{m\to\infty}\left|\int_Q k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m\nabla\psi dxdt - \int_Q k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla\psi dxdt\right| \\
= & \lim_{m\to\infty} ||k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\psi - k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi||_{L^2(Q)}||\nabla\theta_m||_{L^2(Q)} \\
+ & \lim_{m\to\infty}\left|\int_Q (\nabla\theta_m - \nabla\theta)k(\varphi,\theta,c)\nabla\psi dxdt\right| = 0,
\end{aligned}
$$

e isso implica que

$$
\lim_{m\to\infty}\int_Q k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m\nabla\psi dxdt = \int_Q k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla\psi dxdt,
$$

para todo $\nabla\psi \in L^2(Q)$, ou seja,

$$k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m \rightharpoonup k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta \;\text{ fracamente em }\; L^2(Q). \tag{3.97}$$

Analogamente, provamos que

$$D_1(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla c_m \rightharpoonup D_1(\varphi,\theta,c)\nabla c \;\text{ fracamente em }\; L^2(Q), \tag{3.98}$$
$$D_2(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla \varphi_m \rightharpoonup D_2(\varphi,\theta,c)\nabla \varphi \;\text{ fracamente em }\; L^2(Q). \tag{3.99}$$

Por outro lado, para todo $\psi \in L^2(Q)$, temos que

$$\int_Q \Big((3\varphi_m^2 - 2\varphi_m^3 - \varphi_m) - (3\varphi^2 - 2\varphi^3 - \varphi)\Big)\psi dxdt = \int_Q d_m(\varphi_m - \varphi)\psi dxdt,$$

onde $d_m = 3(\varphi_m+\varphi) - 2(\varphi_m^2 + \varphi_m\varphi + \varphi^2) - 1$. E usando o fato de $0 \leq \varphi_m \leq 1$ e $0 \leq \varphi \leq 1$, obtemos que $||d_m||_{L^\infty(Q)} \leq M_{20}$, onde M_{20} é constante. Consequentemente,

$$\left|\int_Q d_m(\varphi_m - \varphi)\psi dxdt\right| \leq ||d_m||_{L^\infty(Q)}||\varphi_m - \varphi||_{L^2(Q)}||\psi||_{L^2(Q)},$$

e de (3.82) concluímos que

$$\int_Q d_m(\varphi_m - \varphi)\psi dxdt = 0 \;\text{ quando }\; m \to \infty,$$

e portanto,

$$\varphi_m(\varphi_m - 1)(1 - 2\varphi_m) \rightharpoonup \varphi(\varphi - 1)(1 - \varphi) \;\text{ fracamente em }\; L^2(Q). \tag{3.100}$$

Além disso, para $N = 2$ ou 3, existem q, p, r, e s tais que $L^r(0,T;L^s(\Omega)) \hookrightarrow L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$ continuamente, com $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
De fato, note que para justificar (3.68) temos $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{N}$, o que implica $p < \dfrac{N(N+2)}{N^2-2}$, com $q = \dfrac{N+2}{N+1}$, e tomando r e s no Lema 1.22, temos que

se $N = 2$ então $r \in (2,+\infty]$ e $s \in [2,+\infty)$ e

se $N = 3$ então $r \in [2,+\infty]$ e $s \in [2,6]$.

Desse modo, como $q = \dfrac{N+2}{N+1}$, então $q' = N+2$ e daí

$$\text{se } N = 2 \text{ então } q' = 4 \text{ e basta tomar } 4 \leq r < \infty,$$

$$\text{se } N = 3 \text{ então } q' = 5 \text{ e basta tomar } 5 \leq r \leq \infty,$$

$$\text{se } N = 2 \text{ então } 1 < p < \frac{8}{2} = 4,\ p' = \frac{p}{p-1} \text{ e basta tomar } s > p' \text{ e}$$

$$\text{se } N = 3 \text{ então } 1 < p < \frac{15}{7}, \text{ e basta tomar } p = 2 \text{ e daí } p' = 2 \text{ e basta escolher}$$

$2 \leq s \leq 6$.
Logo, para $N = 2$ ou 3, existem q, p, r, e s tal que $L^r(0,T;L^s(\Omega)) \hookrightarrow L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$ continuamente, com $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

De (3.48), a sequência (θ_m, c_m) é uniformemente limitada em $(V(Q))^2$, e pelo Lema 1.22, temos $V(Q) \hookrightarrow L^r(0,T;L^s(\Omega))$ continuamente, e então, a sequência (θ_m, c_m) é uniformemente limitada em $(L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega)))^2$. Portanto, passando a uma subsequência, $(\theta_m, c_m) \rightharpoonup (\theta, c)$ fracamente em $(L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega)))^2$, e daí $\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m \in L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$. Note ainda que

$$\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m \rightharpoonup \mu_1 c + \mu_2\theta \text{ fracamente em } L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega)),$$

já que $(\theta_m, c_m) \rightharpoonup (\theta, c)$ fracamente em $(L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega)))^2$, e como de (3.83) $\nabla\varphi_m \to \nabla\varphi$ fortemente em $L^q(0,T;L^p(\Omega))$, então, pela desigualdade de Hölder $|\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m) \in L^1(Q)$, e também

$$\begin{aligned}
\int_Q |\nabla\varphi_m||(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m)|dxdt &\leq ||\nabla\varphi_m||_{L^q(0,T;L^p(\Omega))}||\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m||_{L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

onde C é constante. Logo, para todo $\psi \in L^\infty(Q) = (L^1(Q))'$ temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)\psi dxdt-\int_Q|\nabla\varphi|(\mu_1 c+\mu_2\theta)\psi dxdt\right|\\
=\ &\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q (|\nabla\varphi_m|-|\nabla\varphi|)(\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)\psi dxdt\right.\\
+\ &\left.\int_Q |\nabla\varphi|\Big((\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)-(\mu_1 c+\mu_2\theta)\Big)\psi dxdt\right|\\
\leq\ &\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q (|\nabla\varphi_m|-|\nabla\varphi|)(\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)\psi dxdt\right|\\
+\ &\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q |\nabla\varphi|\Big((\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)-(\mu_1 c+\mu_2\theta)\Big)\psi dxdt\right|\\
\leq\ &\lim_{m\to\infty}\Big(||\,|\nabla\varphi_m|-|\nabla\varphi|\,||_{L^q(0,T;L^p(\Omega))}||\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m||_{L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))}||\psi||_{L^\infty(Q)}\Big)\\
+\ &\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q\Big((\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)|\nabla\varphi|\psi-(\mu_1 c+\mu_2\theta)|\nabla\varphi|\psi\Big)dxdt\right|.
\end{aligned}$$

Observemos que $(L^q(0,T;L^p(\Omega))' = L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$, e como $\psi\in L^\infty(Q)$ e $\nabla\varphi\in L^q(0,T;L^p(\Omega))$, então $|\nabla\varphi|\psi\in L^q(0,T;L^p(\Omega))$, e do fato de $\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m\rightharpoonup\mu_1 c+\mu_2\theta$ fracamente em $L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$, obtemos que

$$\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q\Big((\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)|\nabla\varphi|\psi-(\mu_1 c+\mu_2\theta)|\nabla\varphi|\psi\Big)dxdt\right|=0 \tag{3.101}$$

para todo $\psi\in L^\infty(Q)$. De (3.83) e (3.101) vem que

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)\psi dxdt-\int_Q|\nabla\varphi|(\mu_1 c+\mu_2\theta)dxdt\right|\\
\leq\ &\lim_{m\to\infty}\Big(||\,|\nabla\varphi_m|-|\nabla\varphi|\,||_{L^q(0,T;L^p(\Omega))}||\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m||_{L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))}||\psi||_{L^\infty(Q)}\Big)\\
+\ &\lim_{m\to\infty}\left|\int_Q\Big((\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)|\nabla\varphi|\psi-(\mu_1 c+\mu_2\theta)|\nabla\varphi|\psi\Big)dxdt\right|=0+0=0,
\end{aligned}$$

logo,

$$\int_Q |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)\psi dxdt\to\int_Q|\nabla\varphi|(\mu_1 c+\mu_2\theta)\psi dxdt$$

para todo $\psi\in L^\infty(Q)$, ou seja,

$$|\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m+\mu_2\theta_m)\rightharpoonup|\nabla\varphi|(\mu_1 c+\mu_2\theta)\ \text{ fracamente em }\ L^1(Q). \tag{3.102}$$

$\square$

3.2 Demonstração do Resultado Principal

Agora, já podemos passar o limite no problema aproximado para obter a solução do Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1. De (3.86) no Lema 3.7 vem que $(\theta_m(t)+\ell\varphi_m(t))_t \rightharpoonup \zeta_t = (\theta+\ell\varphi)_t$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e como $\left(L^p(0,T;H_0^1(\Omega))\right)' = L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, então para todo $\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos que

$$\int_0^T \langle(\theta_m+\ell\varphi_m)_t,\psi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt \to \int_0^T \langle\theta+\ell\varphi,\psi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt.$$

Tomemos agora $v_1 \in V_m$ e $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T) = C_0^\infty(0,T) \subset L^2(0,T)$, logo, $\psi v_1 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle(\theta_m+\ell\varphi_m)_t,\psi(t)v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt &\to \int_0^T \langle\theta+\ell\varphi,\psi(t)v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt\\ &= \int_0^T \psi(t)\langle\theta+\ell\varphi,v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt.\end{aligned} \tag{3.103}$$

De (3.97) vem que $k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m \rightharpoonup k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta$ em $L^2(Q)$, então, para todo $\nabla\psi \in L^2(Q)$ temos

$$\int_Q k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m\nabla\psi dxdt \to \int_Q k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla\psi dxdt.$$

Tomemos agora $v_1 \in V_m$ e $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T) = C_0^\infty(0,T)$, então $\nabla v_1 \in L^2(\Omega)$, logo, $\psi(t)\nabla v_1 \in L^2(Q)$. Portanto,

$$\int_0^T\int_\Omega k(\varphi_m,\theta_m,c_m)\nabla\theta_m\ \psi(t)\nabla v_1 dxdt \to \int_0^T\int_\Omega k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\ \psi(t)\nabla v_1 dxdt. \tag{3.104}$$

Como $\displaystyle\int_\Omega f v_1 dx$ é constante, então $v_1\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e,

$$\int_\Omega f v_1\psi(t)dx = \psi(t)\int_\Omega f v_1 dx. \tag{3.105}$$

Assim, fazendo $m \to \infty$ no problema aproximado, de (3.103), (3.104) e (3.105) vem que

$$\int_0^T \psi(t)\langle(\theta+\ell\varphi)_t, v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt + \int_0^T \int_\Omega \psi(t)k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla v_1 dxdt \\ - \int_0^T \psi(t)dt \int_\Omega f v_1 dx = 0,$$

daí,

$$\int_0^T \psi(t)\left(\langle(\theta+\ell\varphi)_t, v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla v_1 dx - \int_\Omega f v_1 dx\right)dt = 0,$$

e como $\nabla\theta$, $\nabla v_1 \in L^2(Q)$ e $k(\varphi,\theta,c) \in L^2(Q)$ então $k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla v_1 \in L^1(Q)$. Logo, como o operador

$$\int_0^T \psi(t)\left(\langle(\theta+\ell\varphi)_t, v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla v_1 dx - \int_\Omega f v_1 dx\right)dt = 0$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, então, pela Proposição 1.41 (Du Bois Raymond), concluimos que

$$\langle(\theta+\ell\varphi)_t, v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla v_1 dx - \int_\Omega f v_1 dx = 0$$

no sentido das distribuições, para todo $v_1 \in V_m$, q.t.p. em $(0,T)$, e por (3.2) resulta que

$$\langle(\theta+\ell\varphi)_t, v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta\nabla v_1 dx - \int_\Omega f v_1 dx = 0$$

no sentido das distribuições, para todo $v_1 \in H_0^1(\Omega)$, q.t.p. em $(0,T)$.

Analogamente, de (3.87) vem que $c_{m,t} \rightharpoonup c_t$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e como $(L^p(0,T;H_0^1(\Omega)))' = L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, então para todo $\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos que

$$\int_0^T \langle c_{m,t},\psi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt \to \int_0^T \langle c_t,\psi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt.$$

Tomemos agora $v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T) = C_0^\infty(0,T) \subset L^2(0,T)$, logo, $\psi v_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Portanto,

$$\int_0^T \langle c_{m,t}, \psi(t)v_2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt \to \int_0^T \langle c_{m,t}, \psi(t)v_2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt$$
$$= \int_0^T \psi(t)\langle c_t, v_2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt. \quad (3.106)$$

De (3.98) vem que $k(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla c_m \rightharpoonup k(\varphi, \theta, c)\nabla c$ em $L^2(Q)$, então, para todo $\nabla\psi \in L^2(Q)$ temos

$$\int_Q D_1(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla c_m \nabla\psi dxdt \to \int_Q D_1(\varphi, \theta, c)\nabla c\nabla\psi dxdt.$$

Tomemos agora $v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T) = C_0^\infty(0,T)$, então $\nabla v_2 \in L^2(\Omega)$, logo, $\psi(t)\nabla v_2 \in L^2(Q)$. Portanto,

$$\int_0^T \int_\Omega D_1(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla c_m \; \psi(t)\nabla v_2 dxdt \to \int_0^T \int_\Omega D_1(\varphi, \theta, c)\nabla c \; \psi(t)\nabla v_2 dxdt, \quad (3.107)$$

e de maneira análoga concluímos que

$$\int_0^T \int_\Omega D_2(\varphi_m, \theta_m, c_m)\nabla \varphi_m \; \psi(t)\nabla v_2 dxdt \to \int_0^T \int_\Omega D_2(\varphi, \theta, c)\nabla \varphi \; \psi(t)\nabla v_2 dxdt. \quad (3.108)$$

Assim, fazendo $m \to \infty$ no problema aproximado, de (3.106), (3.107) e (3.108) vem que

$$\int_0^T \psi(t)\langle c_t, v_2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt + \int_0^T \int_\Omega \psi(t)D_1(\varphi, \theta, c)\nabla c\nabla v_2 dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \psi(t)D_2(\varphi, \theta, c)\nabla\varphi\nabla v_2,$$

e daí,

$$\int_0^T \psi(t)\Big(\langle c_t, v_2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\varphi, \theta, c)\nabla c\nabla v_2 dx$$
$$+ \int_\Omega D_2(\varphi, \theta, c)\nabla\varphi\nabla v_2 dx\Big)dt = 0, \quad (3.109)$$

e como ∇c, ∇v_2 e $D_1(\varphi, \theta, c) \in L^2(Q)$ e $\nabla\varphi$, ∇v_2 e $D_2(\varphi, \theta, c) \in L^2(Q)$ então

$D_1(\varphi,\theta,c)\nabla c\nabla v_2 \in L^1(Q)$ e $D_2(\varphi,\theta,c)\nabla\varphi\nabla v_2 \in L^1(Q)$. Logo, como (3.109) vale para todo $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, então, pela Proposição 1.41 (Du Bois Raymond), concluimos que

$$\langle c_t, v_2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\varphi,\theta,c)\nabla c\nabla v_2 dx + \int_\Omega D_2(\varphi,\theta,c)\nabla\varphi\nabla v_2 dx$$

no sentido das distribuições, para todo $v_2 \in V_m$, q.t.p. em $(0,T)$, e por 3.2 resulta que

$$\langle c_t, v_2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\varphi,\theta,c)\nabla c\nabla v_2 dx + \int_\Omega D_2(\varphi,\theta,c)\nabla\varphi\nabla v_2 dx \tag{3.110}$$

no sentido das distribuições, para todo $v_2 \in H_0^1(\Omega)$, q.t.p. em $(0,T)$.

Agora, multiplicando a equação (3.13) por $\psi \in L^\infty(Q)$ e integrando em Q vem que

$$\begin{aligned} &\int_Q \varphi_{m,t}\psi dxdt - \xi^2\int_Q \Delta\varphi_m\psi dxdt - \int_Q \varphi_m(\varphi_m-1)(1-2\varphi_m)\psi dxdt \\ +\ &\int_Q |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m)\psi dxdt = 0, \end{aligned} \tag{3.111}$$

e de (3.54), (3.55), (3.100), e (3.102) temos que

$$\int_Q \varphi_{m,t}\psi dxdt \to \int_Q \varphi_t\psi dxdt, \tag{3.112}$$

$$\int_Q \Delta\varphi_m\psi dxdt \to \int_Q \Delta\varphi\psi dxdt, \tag{3.113}$$

$$\int_Q \varphi_m(\varphi_m-1)(1-2\varphi_m)\psi dxdt \to \int_Q \varphi(\varphi-1)(1-\varphi)\psi dxdt \quad \text{e} \tag{3.114}$$

$$\int_Q |\nabla\varphi_m|(\mu_1 c_m + \mu_2\theta_m)\psi dxdt \to \int_Q |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta)\psi dxdt, \tag{3.115}$$

para todo $\psi \in L^\infty(Q)$, com $\varphi_t \in L^q(Q)$, $\Delta\varphi \in L^q(Q)$, $\varphi(\varphi-1)(1-\varphi) \in L^2(Q)$ e $|\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta) \in L^1(Q)$, onde $q = \dfrac{N+2}{N+1}$, e então

$$\Big(\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi - \varphi(\varphi-1)(1-\varphi) + |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta)\Big) \in L^1(Q).$$

Portanto, quando $m \to \infty$, de (3.112), (3.113), (3.114) e (3.115) concluímos que

$$\int_Q \Big(\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi - \varphi(\varphi-1)(1-\varphi) + |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta)\Big)\psi = 0$$

para todo $\psi \in L^\infty(Q)$, o que implica que

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \varphi(\varphi-1)(1-\varphi) + |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta) \text{ q.t.p. em } Q. \tag{3.116}$$

Para as condições de fronteira, observemos que de (3.84) e (3.85)

$$(\varphi, \theta, c) \in (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))^3,$$

daí,

$$\varphi(t,x) = 0 \ \ , \theta(t,x) = 0 \ \text{ e } \ c(t,x) = 0, \tag{3.117}$$

para todo $t \in (0,T)$ e $x \in \partial\Omega$, isto é, para todo $(t,x) \in S = (0,T) \times \partial\Omega$.

Para estudarmos as condições iniciais do problema, observemos primeiramente que de (3.48) e (3.87) c_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e $c_{m,t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ com a primeira imersão compacta, então, pelo Lema 1.20, temos

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \bigcap \left\{\varphi; \frac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\} \hookrightarrow C([0,T];H^{-1}(\Omega))$$

compactamente, e então, existe $c \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$ e uma subsequência de c_m em $C([0,T];H^{-1}(\Omega))$, que continuaremos denotando por c_m, tal que

$$c_m \to c \ \text{ fortemente em } \ C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{3.118}$$

Pelo item (i) da Proposição 1.17, com $m = 1$ e $p = 2$ vem que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ com imersão contínua e densa, e $1 \leq r \leq 6$, isto é, com $N = 3$ no item (i) da Proposição supracitada. Além disso, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ com imersão contínua e densa, e $1 \leq r \leq \infty$, isto é, com $N = 2$ no item (i) da Proposição 1.17. Logo, se $N = 2$, r é qualquer, em particular $r = N + 2 = 4$, e se $N = 3$, $r \in [1,6]$, em particular $r = N + 2 = 5$. Assim $L^{r'}(\Omega) = (L^r(\Omega))' \hookrightarrow (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$ e

se, $N = 2$ então em particular $r = 4$, o que implica $r' = \dfrac{4}{3} = \dfrac{N+2}{N+1} = q$,

e se, $N = 3$ então em particular $r = 5$, o que implica $r' = \dfrac{5}{4} = \dfrac{N+2}{N+1} = q$.

Logo, $L^{r'}(\Omega) = L^q(\Omega)$, ou seja, $L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, com $q = \dfrac{N+2}{N+1}$.

Segue por (3.86) que

$$(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t \rightharpoonup (\theta + \ell\varphi)_t \ \text{ fracamente em } \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.119}$$

Do Lema 3.5 temos que a subsequência

$$\varphi_{m,t} \in L^q(0,T;L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

e por (3.119) a subsequência $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então, $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T;H^{-1}(\Omega))$, pois $q = \dfrac{N+2}{N+1} = 1 + \dfrac{1}{N+1} < 2$. Note que, $(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t$ é limitada em $L^q(0,T;H^{-1}(\Omega))$, já que o é em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e ainda do Lema 3.5 a subsequência $\ell\varphi_{m,t}$ é uniformemente limitada em $L^q(Q)$, e portanto, uniformemente limitada em $L^q(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Provaremos agora que

$$\theta_{m,t} \rightharpoonup \theta_t \text{ fracamente em } L^q(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

De fato, observemos que

$$\theta_{m,t} = (\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t - \ell P_m(\varphi_{m,t}),$$

logo

$$||\varphi_{m,t}||_{H^{-1}(\Omega)} \leq ||(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t||_{H^{-1}(\Omega)} + ||P_m(\varphi_{m,t})||_{H^{-1}(\Omega)}.$$

De (3.61) temos que

$$||(\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq K_1$$

onde K_1 é uma constante estritamente positiva. Agora para $w \in H_0^1(\Omega)$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} |\langle P_m(\varphi_{m,t}), w\rangle| &= |\langle \varphi_{m,t}, P_m(w)\rangle| \\ &\leq ||\varphi_{m,t}||_{L^q(\Omega)}||P_m(w)||_{L^{q'}(\Omega)} \\ &\leq ||\varphi_{m,t}||_{L^q(\Omega)}K_2||P_m(\varphi_m)||_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq K_2||\varphi_{m,t}||_{L^q(\Omega)}||w||_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.120}$$

onde K_2 é uma constante estritamente positiva, e usamos que $\dfrac{1}{\frac{N+2}{N+1}} + \dfrac{1}{q'} = 1$, com $q' = N+2 \leq 5$, aplicamos (3.22) e o item (a) do Teorema 1.17. Portanto, como de (3.53) $\varphi_{m,t}$ é limitada em $L^q(Q)$ e $||P_m(\varphi_{m,t}(t))||_{H^{-1}(\Omega)} \leq M_2||\varphi_{m,t}||_{L^q(\Omega)}$, segue que

$$P_m(\varphi_{m,t}) \text{ é limitada em } L^q(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

e daí

$$\varphi_{m,t} \text{ é limitada em } L^q(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\varphi_{m,t} \rightharpoonup \omega \text{ fracamente em } L^q(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Agora, notemos que

$$\theta_m = \theta_m + \ell P_m(\varphi_m) + \ell((I - P_m)(\varphi_m)) - \ell\varphi_m, \tag{3.121}$$

onde I é o operador identidade em $L^2(Q)$. Provaremos que

$$(I - P_m)(\varphi_m) \to 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

De fato, segue do Lema (1.34) que

$$||(I - P_m)(v)||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} ||v||_{H_0^1(\Omega)},$$

logo, tomando $v = \varphi_m(t)$, temos que

$$||(I - P_m)(\varphi_m)||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}} ||\varphi_m||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Por (3.48),

$$||\varphi_m||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq K_3,$$

onde K_3 é uma constante estritamente positiva. Assim, como $\lambda_{m+1} \to \infty$ quando $m \to \infty$, segue que

$$(I - P_m)(\varphi_m) \to 0 \text{ em } L^2(Q).$$

Logo,

$$(I - P_m)(\varphi_m) \to 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q),$$

e consequentemente

$$(I - P_m)(\varphi_{m,t}) \to 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \tag{3.122}$$

Voltando a (3.121), obtemos que

$$\theta_{m,t} = (\theta_m + \ell P_m(\varphi_m))_t + \ell((I - P_m)(\varphi_{m,t})) - \ell\varphi_{m,t}.$$

Passando ao limite esta última igualdade e usando as convergências (3.54), (3.122) e (3.86), concluímos que

$$\omega = (\theta + \ell\varphi)_t + 0 - \ell\varphi_t \text{ em } \mathcal{D}'(Q),$$

e daí

$$\omega = \theta_t.$$

Portanto,

$$\theta_{m,t} \rightharpoonup \theta_t \text{ fracamente em } L^q(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.123}$$

Por outro lado, $\theta_{m,t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e de (3.48) temos que θ_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, e como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ com a primeira imersão compacta, então, pelo Lema 1.20, vem que

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \bigcap \Big\{\varphi; \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\Big\} \hookrightarrow C([0,T];H^{-1}(\Omega))$$

compactamente, e então, existe $\theta \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$ e uma subsequência da subsequência θ_m em $C([0,T];H^{-1}(\Omega))$, que continuaremos denotando por θ_m, tal que

$$\theta_m \to \theta \text{ fortemente em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{3.124}$$

Observemos agora que, como $q = \dfrac{N+2}{N+1} < 2$, então, $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com a primeira imersão compacta, e de (3.84) temos que $\varphi_{m,t} \in L^q(0,T;L^q(\Omega))$ e por (3.48) φ_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, logo, pelo Lema 1.20, obtemos

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \bigcap \Big\{\varphi; \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^q(0,T;L^q(\Omega))\Big\} \hookrightarrow C([0,T];L^q(\Omega))$$

compactamente, e então, existe $\varphi \in C([0,T];L^q(\Omega))$ e uma subsequência da subsequência φ_m em $C([0,T];L^q(\Omega))$, que continuaremos denotando por φ_m, tal que

$$\varphi_m \to \varphi \text{ fortemente em } C([0,T];L^q(\Omega)). \tag{3.125}$$

Portanto, de (3.118), (3.124) e (3.125), temos $c \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$, $\theta \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$ e $\varphi \in C([0,T];L^q(\Omega))$.

Agora, podemos estudar as condições iniciais do problema.

De (3.124) temos que

$$\theta_m \to \theta \text{ fortemente em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)),$$

daí,

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||\theta_m(t) - \theta(t)||_{H^{-1}(\Omega)} = 0,$$

mas,

$$||\theta_m(0) - \theta(0)||_{H^{-1}(\Omega)} \leq \sup_{t\in[0,T]} ||\theta_m(t) - \theta(t)||_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{3.126}$$

e como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ continuamente e

$$\theta_m(0) \to \theta_0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega),$$

logo,

$$\theta_m(0) \to \theta_0 \text{ fortemente em } H^{-1}(\Omega).$$

Passando o limite em (3.126) quando $m \to \infty$ vem que

$$||\theta_0 - \theta(0)||_{H^{-1}(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} ||\theta_m(0) - \theta(0)||_{H^{-1}(\Omega)} \leq \lim_{m\to\infty} ||\theta_m(t) - \theta(t)||_{H^{-1}(\Omega)} = 0.$$

Portanto,

$$||\theta_0 - \theta(0)||_{H^{-1}(\Omega)} = 0,$$

o que implica

$$\theta(0) = \theta_0.$$

De modo análogo, usando (3.118) concluímos que

$$c(0) = c_0.$$

Agora, de (3.125) temos

$$\varphi_m \to \varphi \text{ fortemente em } C([0,T]; L^q(\Omega)),$$

logo,

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||\varphi_m(t) - \varphi(t)||_{L^q(\Omega)} = 0,$$

mas,

$$||\varphi_0 - \varphi(0)||_{L^q(\Omega)} = ||\varphi_m(0) - \varphi(0)||_{L^q(\Omega)} \leq \sup_{t\in[0,T]} ||\varphi_m(t) - \varphi(t)||_{L^q(\Omega)}. \quad (3.127)$$

Passando o limite em (3.127) quando $m \to \infty$ vem que

$$||\varphi_0 - \varphi(0)||_{L^q(\Omega)} \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||\varphi_m(t) - \varphi(t)||_{L^q(\Omega)} = 0.$$

Portanto,

$$||\varphi_0 - \varphi(0)||_{L^q(\Omega)} = 0,$$

o que implica

$$\varphi(0) = \varphi_0.$$

$\square$

Considerações Finais

Com este trabalho conseguimos usar o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e o método de Galerkin para provar a existência de solução para um modelo de campo de fase no processo de solidificação não isotérmica.

Futuramente, pretendemos continuar estudando modelos de campo de fase e, quando possível, implementar simulações.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] ANTONELLO, S. B. **Estimativas do Erro nas Aproximações de Galerkin Para as Equações de Navier-Stokes**. Santa Maria: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Dissertação de Mestrado, 2002.

[3] ARAUJO, A. L. A. **Análise Matemática de um Modelo de Controle de População de Mosquitos**. Campinas: UNICAMP, Tese de Doutorado, 2010.

[4] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.

[5] BECKERMANN, C; DIEPERS, H. J; STEINBACH, I; KARMA, A; TONG, X. **Modeling melt convection in phase-field simulations of solidification** Journal of Computational Physics 1999, (154), 468-496.

[6] BOLDRINI, J. L; CARETTA, B. C; FERNÁNDEZ-CARA, E. **Analysis of a two-phase field model for the solidication of an alloy**,Journal of Mathematical Analysis and Applications 2009, 357 , 25-44.

[7] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations**. Paris: Spinger, 2011.

[8] CAVALCANTI, M. M; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: UEM/DMA, Vol. 1, 2000.

[9] CAVALCANTI, M. M; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: UEM/DMA, 2007.

[10] DIEPERS, H. J; BECKERMANN, C; STEINBACH, I. **Simulation of convection and ripening in a binary alloy mush using the phase-field method**. Acta Materialia 1999, 47 (13), 3663-3678.

[11] EVANS, L. C. **Partial Diferential Equations**. University of California, Berkeley, 1998.

[12] FRIEDMAN, A. **Partial Differential Equation of Parabolic Type**. Prentice-Hall.

[13] FURSIKOV, A. V. **Optimal Control of Distributed Systems, Theory and Applications**. American Mathematical Society, 1999.

[14] HENRY, D. **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**. Springer- Verlag, Berlin Heidelberg. 1981.

[15] JIANG, J. **Convergence to equilibrium for a parabolic-hyperbolic phase field model with Cattaneo heat flux law**,Journal of Mathematical Analysis and Applications 2008, 341, 149-169.

[16] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applicatins**. New Yourk: John Wiley & Sons. Inc, 1978.

[17] LADYZENSKAJA, O.A; SOLONNIKOV, V.A; URAL'CEVA, N.N. **Linear and Qua-silinear Equations of Parabolic Type**. Providence: American Mathematical Society, 1968.

[18] LADYZENSKAJA, O.A; SOLONNIKOV, V.A; URAL'CEVA, N.N. **Linear and quasilinear equations of parabolic type**. Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[19] LIONS, J. L. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[20] LIONS, J. L. **Control of Distributed Singular Systems**. Paris: Gauthier-Villars, 1985.

[21] MEDEIROS, L. A. **Applications of Monotony Method**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2005.

[22] MEDEIROS, L. A. da J; MIRANDA, M. A. M. **Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000

[23] MOROSANU, C; MOTREANU, D. **A generalized phase-field system**, Journal of Mathematical Analysis and Applications 1999, 273, 515-540.

[24] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differetial Equations**. Springer- Verlag, New York, v.44. 1983.

[25] PELLEGRINO, D. **Introdução à Análise Funcional**. João Pessoa: UFPB/Departamento de Matemática, 2007.

[26] RAPPAZ, J; SHEID, J. F. **Existence of solutions to a phase-field model for the isothermal solidification process of binary alloy**, Mathematical Methods in the Applied Sciences 2000, 23 (6), 491-513.

[27] RUBIO, P. M; PLANAS, G; REAL, J. **Asymptotic behaviour of a phase-field model with three coupled equations without uniqueness**, Journal of Differential Equations 2009, 246, 4632-4652.

[28] SIMON, J. **Compact sets in the space Lp (0, T ; B)**, Annali Mat. Pura Aplli., Serie IV, v.146 (1987), 65-96.

[29] VAZ, C. L. D; BOLDRINI, J. L. **A mathematical analysis of a nonisothermal Allen-Cahn type system**, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2012, 35, 1392-1405.