UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

DARAH APARECIDA PIRES MOREIRA

MATERIAL DIDÁTICO INTERATIVO PARA O ENSINO E APRENDIZADO DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

VIÇOSA-MINAS GERAIS

2025

Darah Aparecida Pires Moreira

MATERIAL DIDÁTICO INTERATIVO PARA O ENSINO E APRENDIZADO DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa para obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Fernando de Souza Bastos
Co-Orientadora: Prof^{a} Dra. Cristiane Botelho Valadares

VIÇOSA-MINAS GERAIS
2025

Darah Aparecida Pires Moreira

MATERIAL DIDÁTICO INTERATIVO PARA O ENSINO E APRENDIZADO DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

APROVADO:

ASSENTIMENTO:

Documento assinado digitalmente
DARAH APARECIDA PIRES MOREIRA
Data: 05/02/2025 15:22:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Darah Aparecida Pires Moreira
Autor

Documento assinado digitalmente
CRISTIANE BOTELHO VALADARES
Data: 05/02/2025 15:07:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Cristiane Botelho Valadares
Co-orientadora

Documento assinado digitalmente
FERNANDO DE SOUZA BASTOS
Data: 03/02/2025 21:17:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Fernando de Souza Bastos
Orientador

Darah Aparecida Pires Moreira

MATERIAL DIDÁTICO INTERATIVO PARA O ENSINO E APRENDIZADO DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

APROVADO:

BANCA AVALIADORA:

gov.br Documento assinado digitalmente
CAROLINE MENDES DOS PASSOS
Data: 04/02/2025 20:01:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Caroline Mendes dos Passos

gov.br Documento assinado digitalmente
ANTONIO POLICARPO SOUZA CARNEIRO
Data: 04/02/2025 16:22:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Antônio Policarpo Souza Carneiro

gov.br Documento assinado digitalmente
CRISTIANE BOTELHO VALADARES
Data: 05/02/2025 15:13:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Cristiane Botelho Valadares
Co-orientadora

gov.br Documento assinado digitalmente
FERNANDO DE SOUZA BASTOS
Data: 03/02/2025 21:19:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Fernando de Souza Bastos
Orientador

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um material didático interativo para o ensino de Distribuições de Probabilidade, fundamentado na hipótese de que a interatividade facilita a aprendizagem e aprimora a assimilação dos conceitos estatísticos. O objetivo é disponibilizar um recurso pedagógico inovador que auxilie professores e estudantes na visualização dinâmica e na compreensão do comportamento gráfico das distribuições à medida que seus parâmetros são ajustados. O material abrange 14 distribuições de probabilidade, incluindo discretas, como Uniforme, Bernoulli, Binomial, Poisson, Geométrica e Binomial Negativa, e contínuas, como Uniforme, Normal, Birnbaum-Saunders, Beta, Cauchy, Qui-quadrado, Exponencial e Gama. Além de abordar as definições teóricas, o material apresenta os principais parâmetros, algumas medidas estatísticas associadas e algumas aplicações relevantes dessas distribuições. A apostila interativa, disponível em https://pibicest.shinyapps.io/InteractiveModels, fornece códigos detalhados para a construção e exploração das distribuições, permitindo uma aprendizagem mais intuitiva e eficaz. Ademais, uma revisão detalhada da literatura foi realizada para identificar lacunas no ensino do tema e embasar o desenvolvimento da ferramenta. Acredita-se que o material desenvolvido possa contribuir para a ampliação da compreensão estatística e para a melhoria do aprendizado, proporcionando um suporte acessível e dinâmico para professores e estudantes. Além disso, a interatividade do recurso possibilita uma exploração mais intuitiva das distribuições de probabilidade, o que pode facilitar a visualização e a assimilação dos conceitos estatísticos. Estudos futuros podem ser conduzidos para avaliar empiricamente a efetividade da ferramenta no ensino e aprendizado de Estatística.

Palavras-chave: R; Ensino de Estatística; Gráficos Interativos; Ensino Interativo; Pacote *learnr*.

Abstract

This work presents the development of an interactive educational material for teaching Probability Distributions, based on the hypothesis that interactivity facilitates learning and enhances the assimilation of statistical concepts. The objective is to provide an innovative pedagogical resource that assists teachers and students in dynamically visualizing and understanding the graphical behavior of distributions as their parameters are adjusted. The material covers 14 probability distributions, including discrete ones such as Uniform, Bernoulli, Binomial, Poisson, Geometric, and Negative Binomial, as well as continuous ones such as Uniform, Normal, Birnbaum-Saunders, Beta, Cauchy, Chi-square, Exponential, and Gamma. In addition to addressing theoretical definitions, the material presents the main parameters, some associated statistical measures, and relevant applications of these distributions. The interactive textbook, available at https://pibicest.shinyapps.io/InteractiveModels, provides detailed codes for constructing and exploring the distributions, allowing for a more intuitive and effective learning experience. Furthermore, a detailed literature review was conducted to identify gaps in the teaching of this topic and support the development of the tool. It is believed that the developed material may contribute to expanding statistical understanding and improving learning, providing accessible and dynamic support for teachers and students. Additionally, the interactivity of the resource enables a more intuitive exploration of probability distributions, which may facilitate the visualization and assimilation of statistical concepts. Future studies may be conducted to empirically evaluate the effectiveness of the tool in teaching and learning Statistics.

Keywords: R; Statistics Education; Interactive Graphics; Interactive Teaching; *learnr* Package.

AGRADECIMENTOS

A Deus e à Nossa Senhora Aparecida, por me guiarem e me darem forças ao longo desta jornada, iluminando meu caminho nos momentos de incerteza.

Aos meus pais, que, mesmo sem terem tido a oportunidade de estudar, nunca mediram esforços para que eu pudesse trilhar esse caminho. Com seu amor, dedicação e exemplo, ensinaram-me o valor da educação, da humildade e da perseverança na vida.

Aos meus irmãos, cunhado e cunhada, que sempre torceram por mim, me incentivando e me fortalecendo em cada etapa dessa caminhada.

Aos amigos que a vida me presenteou, que, de alguma forma, sempre me apoiaram, tornando os desafios mais leves, mesmo aqueles que, apesar da distância, permanecem comigo em pensamento e coração.

Ao meu namorado, por me incentivar e acreditar em mim até mais do que eu mesma e por estar ao meu lado em cada conquista e obstáculo.

À minha madrinha *(in memoriam)*, que me ensinou a correr atrás dos meus sonhos, a sair da zona de conforto sem medo de arriscar e a sempre acreditar no meu potencial. Seu exemplo e carinho seguirão vivos em meu coração.

Aos meus tios, tias, padrinhos, madrinhas, avós e primos, minha sincera gratidão por todo apoio, carinho e incentivo ao longo da minha trajetória.

Ao meu orientador, pelo conhecimento compartilhado, pela paciência e pela excelência no seu trabalho. Seu direcionamento e conselhos foram fundamentais e, sem dúvida, continuarão a me guiar para um futuro melhor.

Aos membros da banca, pelo tempo e dedicação em avaliar meu trabalho, oferecendo sugestões valiosas para torná-lo ainda mais completo.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte dessa caminhada, o meu mais profundo e sincero agradecimento.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Estatística, em geral, dedica-se à obtenção, limpeza, organização, descrição e análise de dados coletados a fim de obter conclusões sobre tais dados e/ou sobre determinadas populações. Essas análises permitem observar padrões, realizar inferências e, posteriormente, chegar a algumas conclusões. Para garantir o entendimento de todo esse processo, é importante oferecer um ensino abrangente e detalhado de Estatística e Probabilidade. Muitos estudantes, ao aprenderem Estatística, limitam-se a decorar fórmulas e aplicá-las sem entender seu propósito ou o significado delas. Nesse contexto, ao estudarem, por exemplo, Distribuições de Probabilidade, não entendem a importância e a necessidade desse conteúdo, que é a base para a Estatística Inferencial.

Durante um curso de Estatística Básica, são estudadas poucas distribuições de probabilidade e, em geral, sequer a forma gráfica destas distribuições são apresentadas. Além disso, poucos exemplos práticos e vinculados a área específica de formação dos estudantes são discutidos. No entanto, a importância das distribuições de probabilidade para o mundo científico é imensurável. Elas fornecem uma maneira de descrever a incerteza e de modelar fenômenos que envolvem variabilidade. Seja na Física, na Biologia, na Economia ou na Engenharia, as distribuições permitem não apenas descrever o comportamento de sistemas complexos, mas também de realizar inferências, como determinar intervalos de confiança e testar hipóteses. Essa capacidade de quantificar incertezas e fazer previsões confiáveis é um dos pilares da ciência moderna.

No entanto, o ensino tradicional de distribuições de probabilidade é frequentemente caracterizado pela priorização de métodos teóricos em detrimento de práticas interativas e visuais, pois, muitos educadores, ainda acreditam que os métodos tradicionais são suficientes para promover a compreensão dos problemas complexos ou não possuem ferramentas pedagógicas e práticas disponíveis. Essa abordagem limita a compreensão dos estudantes sobre a forma e o comportamento das distribuições, dificultando a construção de uma base conceitual sólida para a Estatística Inferencial. Além disso, como destacam Muijs e Reynolds (2001) e Ukobizaba et al. (2021), o uso excessivo de métodos teóricos pode tornar os alunos passivos e dependentes do professor, incapazes de desenvolver habilidades de aprendizagem autônoma, essenciais para seu desenvolvimento.

Levando em conta as limitações evidenciadas, resultantes de práticas pedagógicas pouco atrativas, surge a seguinte questão: como é possível aprimorar o ensino de Distribuições de Probabilidade e torná-lo mais significativo? Acreditamos que é necessário adotar estratégias pedagógicas que aproximem os conceitos abstratos das distribuições de probabilidade da realidade dos alunos, e isso, pode ser alcançado, por meio de metodologias que integrem recursos interativos, como simulações computacionais, visualizações dinâmicas e atividades práticas capazes de ilustrar a aplicabilidade desses conceitos em contextos concretos. Pois, ao conectar a teoria às aplicações reais, os alunos podem não apenas compreender os princípios fundamentais, mas também reconhecer sua utilidade em problemas do cotidiano e em diversas áreas do conhecimento.

Entendemos, portanto, que é indispensável adotar abordagens mais dinâmicas e interativas para o ensino do tema. Assim, este trabalho tem como principal objetivo descrever a criação de uma apostila online que poderá ser utilizada como um recurso pedagógico, principalmente, para alunos da graduação e pós-graduação, capaz de tornar o aprendizado mais abrangente e efetivo. O material didático proposto é dinâmico, e conta com recursos visuais e gráficos interativos, que permitem aos estudantes e professores alterarem os parâmetros de algumas distribuições comuns e de maior interesse para o ensino básico de Estatística e Probabilidade e a observarem, de forma prática, como suas formas variam em resposta a essas alterações. Além disso, ao integrar o ensino de distribuições de probabilidade com a tecnologia, o material promove uma compreensão mais profunda e incentiva a autonomia do aluno no processo de aprendizagem.

O material foi desenvolvido com o uso da linguagem R e de pacotes como *learnr* e *ggplot*. Utilizamos, ainda, o RStudio, que é um ambiente de desenvolvimento integrado, prático, acessível e gratuito, que pode ser utilizado tanto pelos alunos, como ferramenta de estudo, quanto pelos professores, como suporte didático na exposição de conteúdos. É importante ressaltar que o presente trabalho se distingue de outros materiais disponíveis na literatura por abordar, tanto distribuições discretas, como a Binomial e a Poisson, quanto distribuições contínuas, como as distribuições Normal e Exponencial, de forma interativa. Isto é, o material não se limita apenas à apresentação teórica dos conceitos, mas incorpora interatividade, proporcionando uma experiência de aprendizado ativa e visual. Todas as distribuições serão apresentadas por meio de gráficos dinâmicos, e permitirão a variação dos parâmetros em tempo real, favorecendo um aprendizado mais profundo e significativo.

Este trabalho está estruturado em tópicos que julgamos essenciais para compreender o processo de criação do material interativo. Inicialmente, apresentamos uma revisão bibliográfica, destacando a importância de recursos práticos e interativos no ensino de distribuições de probabilidade. Em seguida, discutimos o papel dos materiais interativos no ensino de Estatística, abordamos as definições e aplicações relevantes das distribuições de probabilidade incluídas no material e descrevemos a metodologia utilizada em sua construção. Por fim, detalhamos o desenvolvimento do material, destacando suas principais seções, as especificações necessárias para cada uma delas e as conclusões deste estudo.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

Como discutido na Introdução deste trabalho, o ensino de distribuições de probabilidade é, em geral, realizado de maneira estática, sem o uso de visualizações práticas e interativas. Mesmo com os avanços tecnológicos, muitos professores ainda preferem métodos tradicionais de ensino. Acreditamos que essa preferência, na maioria dos casos, decorre da escassez de materiais adequados. Ao realizarmos, por exemplo, uma busca no Google Acadêmico utilizando o termo "Technological Tools for Teaching", foram encontrados 894 resultados, evidenciando o uso significativo de ferramentas tecnológicas na prática pedagógica. Contudo, considerando que o objetivo deste estudo é explorar a aplicação da interatividade especificamente no ensino de estatística, refinamos a busca para o termo "Technological Tools for Teaching Statistics", o que reduziu o número de trabalhos encontrados para apenas 24. Em seguida, aplicamos um filtro ainda mais específico, utilizando o termo "Technological Tools for Teaching Probability Distribution", para identificar estudos mais alinhados à temática deste trabalho. Este último refinamento não resultou em nenhum trabalho, o que evidencia a escassez de discussões e pesquisas voltadas exclusivamente ao uso da interatividade e de ferramentas tecnológicas no ensino de distribuições de probabilidade.

Apesar disso, muitos educadores e trabalhos científicos importantes defendem o uso de ferramentas tecnológicas e práticas para ampliar a compreensão e generalização do conteúdo, além de servir como suporte para os professores em suas aulas. Martin-Gonzalez, Chi-Poot e Uc-Cetina (2016) e Chen (2019), por exemplo, argumentam que o processo de ensino-aprendizagem da matemática pode ser particularmente desafiador e se beneficiar de metodologias que auxiliem na compreensão de conceitos abstratos. Esses autores utilizaram ferramentas de Realidade Aumentada no ensino de Física e Matemática, e observaram melhores resultados de aprendizagem com a aplicação dessas tecnologias.

Qureshi et al. (2021) conduziram uma análise a partir de 47 estudos sobre o uso de ferramentas tecnológicas no ensino. Eles destacaram que as tecnologias digitais estão promovendo mudanças significativas na educação, nas habilidades desenvolvidas e nos empregos. Além disso, apontam que essas tecnologias estão se expandindo e que o futuro da educação está intrinsecamente ligado às tecnologias digitais, sugerindo que os métodos tradicionais de ensino serão gradualmente substituídos.

De forma complementar, Haleem et al. (2022) destacam que a educação de qualidade é um dos pilares fundamentais da Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável das Nações Unidas. Nesse contexto, as tecnologias digitais emergem como ferramentas indispensáveis para alcançar esse objetivo. Os autores argumentam que essas tecnologias facilitam a vida dos estudantes, substituindo métodos tradicionais, como o uso de caneta e papel, por softwares e ferramentas que promovem maior praticidade. Comparativamente, um iPad é mais leve do que uma pilha de cadernos, e navegar em um e-book é mais fácil do que carregar livros físicos, o que contribui para o aumento do interesse dos estudantes. No trabalho, os autores defendem a adoção de tecnologias digitais na educação, discutindo suas principais aplicações e desafios.

Dado o papel essencial das tecnologias digitais na transformação da educação, é fundamental destacar ferramentas específicas que têm sido amplamente utilizadas para apoiar o ensino de Matemática e Estatística. O uso dessas ferramentas não apenas promove maior interatividade no processo de ensino-aprendizagem, mas também facilita a visualização de conceitos abstratos e a aplicação prática do conhecimento adquirido. Entre as ferramentas mais destacadas estão o GeoGebra, o Excel, o Maxima, o Maple, o R, entre outros, que possuem funcionalidades diversas que atendem tanto a professores quanto a estudantes, oferecendo recursos para o desenvolvimento de habilidades computacionais, simulação de cenários e resolução de problemas complexos. No contexto do ensino de Estatística e Matemática, essas ferramentas têm demonstrado seu potencial para tornar o aprendizado mais dinâmico, acessível e eficiente, contribuindo significativamente para a modernização das práticas pedagógicas.

Tamam e Dasari (2021) destacam o GeoGebra como uma excelente ferramenta tecnológica para o aprendizado de Matemática. Esse software oferece suporte ao ensino de diversas disciplinas, com destaque para Geometria, Álgebra e Estatística. Sua principal vantagem reside na capacidade de permitir que os usuários criem e manipulem objetos geométricos de maneira rápida e precisa, sendo particularmente eficaz no tratamento de conceitos mais abstratos. Em uma análise de doze artigos relacionados, os autores identificaram várias vantagens significativas associadas ao uso do GeoGebra no aprendizado de Matemática. Além de resultados acadêmicos superiores, concluiu-se que os alunos demonstraram maior engajamento, felicidade e satisfação ao aprenderem conteúdos utilizando essa ferramenta tecnológica.

Diković (2009) explora, em seu artigo, novas tendências de aprendizagem relacionadas ao uso do GeoGebra. O autor apresenta estruturas metodológicas inovadoras, ilustradas por meio de exemplos específicos voltados ao ensino de Matemática no nível universitário, de maneira interativa e criativa. O estudo discute os resultados de um experimento didático realizado com estudantes de graduação, que participaram de um método de ensino de Cálculo Diferencial mediado pelo GeoGebra. A análise estatística dos dados obtidos confirmou que o uso dessa ferramenta tecnológica contribuiu significativamente para a compreensão dos conceitos de cálculo, resultando em um impacto positivo no desempenho acadêmico dos alunos.

Além do GeoGebra, diversos autores sugerem o uso do Excel para o ensino de Estatística.

Citamos, por exemplo, Bell (2000), Warner e Meehan (2001), Shuqin (2005), Quintela-del-Río e Francisco-Fernández (2017) e Mangiero, Qayyum e Cante (2022), entre diversos outros trabalhos. Em todos esses, destaca-se o potencial do Excel como uma ferramenta acessível e versátil para a construção de tabelas, gráficos e cálculos estatísticos. O software permite que os alunos realizem análises descritivas, simulações e representações visuais de dados de maneira prática, promovendo uma melhor compreensão de conceitos abstratos. Além disso, sua ampla disponibilidade e interface intuitiva tornam o Excel uma opção atraente tanto para professores quanto para estudantes. Os autores enfatizam que, ao integrar o uso do Excel nas aulas, é possível conectar a teoria estatística à prática, incentivando o aprendizado ativo e desenvolvendo habilidades computacionais relevantes para o mercado de trabalho.

Outros softwares também se destacam no ensino e aprendizado de Estatística, como o R, o Python, o SPSS, o Maxima e o Minitab. Cada um desses programas oferece recursos específicos que podem ser explorados para diferentes níveis de ensino. O R, por exemplo, é amplamente utilizado em cursos de graduação e pós-graduação devido à sua capacidade de realizar análises estatísticas avançadas e gerar visualizações de alta qualidade, além de ser um software de código aberto, o que facilita sua adoção em ambientes educacionais. O Python, similarmente, é valorizado por sua versatilidade e ampla gama de bibliotecas, como o Matplotlib e o Pandas, que permitem desde a manipulação de dados até a criação de gráficos interativos. O SPSS e o Minitab, por sua vez, são frequentemente utilizados para introduzir estudantes a análises estatísticas aplicadas, graças às suas interfaces amigáveis e foco em usuários iniciantes. Já o Maxima, um sistema de álgebra computacional, é especialmente útil no ensino de tópicos como estatística descritiva e cálculo simbólico, ajudando na resolução de problemas matemáticos e estatísticos de forma automatizada. Esses softwares, quando incorporados ao ensino, não apenas promovem a interação prática com os conceitos, mas também preparam os estudantes para o uso de ferramentas profissionais em suas carreiras.

Zeynivandnezhad (s.d.) discute como a introdução dos sistemas de álgebra computacional trouxe mudanças para o ensino de matemática em nível superior. O estudo de equações diferenciais é de extrema importância para os cursos de engenharia e o uso de tecnologias neste caso é inevitável. O artigo relata como estudantes de diferentes níveis de desempenho utilizam o software Maxima como um sistema de álgebra computacional para resolver as equações diferenciais. De acordo com os resultados, as programações realizadas pelos estudantes indicam que, quanto maior o conhecimento sobre equações diferenciais, melhor é a qualidade das soluções obtidas por meio de suas implementações. Além disso, os participantes demonstraram grande interesse e preferência por trabalhar com menus interativos, em detrimento do uso de comandos diretos.

Outros autores também destacam o potencial do Maxima como uma ferramenta tecnológica para o ensino de Matemática. Fedriani e Moyano (2011), apresentam, em sua obra, as vantagens do uso desse software. Além de ser uma ferramenta de código aberto, o Maxima é capaz de manipular expressões algébricas, simplificá-las e criar aplicações específicas. O software também oferece uma ampla variedade de pacotes complementares, tornando-se acessível e aplicável a diversas áreas da Matemática. Essa versatilidade é fundamental para promover um ensino de maior qualidade. Adicionalmente, o Maxima foi projetado para funcionar em diferentes sistemas operacionais, o que contribui para expandir sua utilização. Os autores exploram as possibilidades do Maxima e de sua interface gráfica como ferramenta de ensino em diversos níveis educacionais, apresentando, ao final, um relatório que destaca os principais pontos fortes do uso desse software em sala de aula.

Autores como Rubin e Abrams (2015) enfatizam a carência de habilidades tecnológicas entre a maioria dos estudantes que ingressam na graduação, o que dificulta seu desempenho em disciplinas de análise quantitativa. Nessas disciplinas, é comum que os alunos precisem inserir, analisar e interpretar dados experimentais, além de gerar gráficos. O Microsoft Excel desempenha um papel crucial nesse processo; contudo, estudantes que não dominam a ferramenta acabam investindo muito tempo em processos de "tentativa e erro". Os autores propõem no trabalho a implementação de um laboratório interativo com planilhas, projetado especificamente para atender às demandas da química e compatível com qualquer versão do Excel. Os estudantes relataram que a experiência com o laboratório interativo contribuiu significativamente para o desenvolvimento de suas habilidades em informática, demonstrando a eficácia dessa abordagem.

A linguagem R é uma das ferramentas mais poderosas e versáteis no ensino e aprendizado de Estatística, amplamente utilizada devido à sua natureza de código aberto e à extensa gama de pacotes desenvolvidos pela comunidade acadêmica. Dentre os pacotes disponíveis, destacam-se o *learnr*, o *shiny* e o *ggplot*, que permitem a criação de aplicações interativas e visualizações sofisticadas. Esses pacotes, em sinergia, tornam o R uma ferramenta indispensável para o ensino de Estatística, promovendo um aprendizado mais prático, intuitivo e envolvente.

O trabalho de Pavlenko, Pavlenko e Khomenko (2024) destaca a linguagem R como uma ferramenta essencial para facilitar o ensino e aprendizagem de Estatística. Os autores argumentam que o conteúdo teórico tradicional do ensino de Estatística deve ser atualizado e orientado para aplicações práticas, mesmo no nível superior, priorizando a análise e a interpretação de resultados em detrimento de cálculos estatísticos manuais. O estudo propõe um sistema de tarefas baseadas em conjuntos de dados reais obtidos de pesquisas estatísticas, demonstrando que essas atividades podem aumentar significativamente a motivação dos alunos em comparação com exemplos teóricos frequentemente utilizados em cursos de Estatística. Essa abordagem prática, apoiada pela linguagem R, reforça a importância de contextualizar o aprendizado por meio de dados reais, aproximando os estudantes dos desafios encontrados no campo profissional.

Outro trabalho que explorou o uso da linguagem R e do pacote *learnr* foi apresentado por Gehrke et al. (2021). Os autores propõem um currículo inovador que prioriza o pensamento científico, a modelagem e a inferência baseada em simulação, utilizando R e diversos pacotes, como *shiny* e *learnr*. A abordagem sugere o ensino de Estatística a partir de uma perspectiva centrada em dados, com o objetivo de capacitar os alunos a se tornarem alfabetizados em dados e aptos a interpretar e comunicar informações estatísticas de forma eficaz. O feedback inicial obtido de alunos e educadores indicou uma melhoria significativa na compreensão conceitual dos conteúdos e uma melhor percepção da aplicabilidade prática da Estatística, evidenciando o impacto positivo do uso dessas ferramentas no processo de ensino-aprendizagem.

Uma discussão teórica é apresentada na sequência, fundamentando o impacto das ferramentas tecnológicas no ensino e aprendizado de estatística, enfatizando como o computador contribui para apoiar processos cognitivos e socioculturais. Posteriormente, é apresentada uma amostra de tecnologias educacionais que representam os tipos de softwares geralmente utilizados no ensino de estatística: pacotes estatísticos (ferramentas), micromundos, tutoriais, recursos (incluindo recursos da Internet) e metaferramentas dos professores. Por fim, são sugeridas certas implicações e recomendações para o uso de computadores no contexto educacional estatístico.

Os trabalhos citados evidenciam que o uso de recursos tecnológicos no ensino de Matemática e Estatística tem se consolidado como uma abordagem eficaz para promover maior interação, engajamento e compreensão conceitual dos alunos. A adoção de softwares como o GeoGebra, Excel, R e seus pacotes, bem como metodologias baseadas em dados reais e práticas aplicadas, demonstra um avanço significativo na modernização do ensino. As pesquisas destacadas nesta seção reforçam a relevância de integrar tecnologia e práticas pedagógicas inovadoras, fornecendo um embasamento teórico consistente para a proposta deste estudo e incentiva a ampliação do uso dessas ferramentas no contexto educacional.

Capítulo 3

Ensino Interativo de Distribuições de Probabilidade

A evolução da ciência deve muito ao desenvolvimento das distribuições de probabilidade, pois, ao fornecer uma base matemática sólida para a incerteza, permitiram avanços na estatística inferencial, na teoria dos erros e na modelagem preditiva. Esses avanços, por sua vez, possibilitaram o desenvolvimento de técnicas mais robustas de análise de dados, essenciais para a pesquisa experimental e para a formulação de teorias científicas. De Charles Darwin, que utilizou estatísticas em seus estudos sobre evolução, aos pesquisadores contemporâneos que empregam modelos probabilísticos para prever padrões climáticos ou analisar genomas, a teoria das distribuições de probabilidade permanece sendo uma ferramenta essencial que impulsiona a ciência e a tecnologia (STIGLER, 1990; HACKING, 2006; ROSS, 2019). Sob essa perspectiva, é fundamental destacar a importância das distribuições de probabilidade na teoria da probabilidade. São elas que permitem explicar fenômenos aleatórios com base em dados coletados, organizados e analisados. Entender o comportamento de determinada amostra nos possibilita obter respostas e previsões aplicáveis a diversas áreas do conhecimento.

As distribuições estatísticas surgiram da necessidade de entender e modelar o comportamento de fenômenos aleatórios, o que remonta a trabalhos iniciais de pensadores como Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que estudaram problemas de jogos de azar no século XVII. Esses estudos foram os primeiros passos na formalização do conceito de probabilidade, dando origem a uma nova área da matemática dedicada ao estudo da incerteza. Posteriormente, matemáticos como Jacob Bernoulli e Abraham de Moivre contribuíram significativamente para desenvolver a teoria das probabilidades, culminando no famoso "Teorema de Moivre-Laplace", que estabeleceu uma ligação entre distribuições binomiais e a distribuição normal, um avanço que já indicava a necessidade de classificar diferentes tipos de distribuições, como destacado por (HACKING, 2006).

Existem vários modelos probabilísticos e, grande parte delas, são divididas em dois grupos, distribuições discretas e distribuições contínuas. A distinção entre distribuições de probabilidade discretas e contínuas foi um marco importante na formalização dessa teoria. Quem primeiro contribuiu para essa classificação foi Carl Friedrich Gauss e outros matemáticos do século XVIII e XIX, que ajudaram a estabelecer as bases para a análise matemática e estatística, para mais informações sugerimos a leitura de Salsburg (2024).

Distribuições discretas, como a binomial, são úteis para modelar situações como o número de sucessos em uma série de experimentos, enquanto a de Poisson é frequentemente aplicada em modelos de chegadas em filas, como em chamadas de serviços de atendimento. Por outro lado, as distribuições contínuas, como a normal, são amplamente usadas para modelar variáveis como altura e peso em populações, enquanto a exponencial é comumente associada a tempos de espera. Essa classificação é fundamental para o estudo probabilístico, pois permite a aplicação correta de modelos a diferentes tipos de dados e fenômenos.

3.1 Distribuição Uniforme Discreta

A **Distribuição Uniforme Discreta** descreve uma variável aleatória que assume valores inteiros igualmente prováveis em um intervalo finito. Seja X uma variável aleatória com valores possíveis $a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b$, para $a < b$, então a função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \text{ com } x \in \{a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\} \text{ e } n = b - a + 1.$$

A formulação matemática da distribuição uniforme discreta foi desenvolvida como uma generalização da ideia de probabilidade igual para eventos mutuamente exclusivos, sendo amplamente difundida em trabalhos iniciais de probabilidade por Pierre-Simon Laplace (1749–1827).

✓ Parâmetros

- a: menor valor do intervalo.
- b: maior valor do intervalo.
- $n = b - a + 1$: número total de valores possíveis.

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$.
- Variância: $\text{Var}(X) = \dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de eventos em que todos os resultados possíveis têm a mesma probabilidade de ocorrer, como o lançamento de um dado justo.
- Simulação computacional para gerar números inteiros aleatórios em um intervalo específico.
- Estudos iniciais de probabilidade e experimentos aleatórios simples.

3.2 Distribuição de Bernoulli

A **Distribuição de Bernoulli** é uma distribuição discreta que descreve uma variável aleatória que assume apenas dois possíveis valores, geralmente representados por 1 (sucesso) e 0 (fracasso), com probabilidades complementares. Seja X uma variável aleatória com esta distribuição, então sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1, \\ 1 - p, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

em que $p \in [0, 1]$ é a probabilidade de sucesso.

A distribuição de Bernoulli foi introduzida e estudada pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1655–1705), um dos pioneiros no estudo das probabilidades, em sua obra *Ars Conjectandi*. Para maiores informações sugerimos Forbes et al. (2011).

✓ Parâmetros

- p: probabilidade de sucesso ($0 \leq p \leq 1$).

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = p$.
- Variância: $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de experimentos binários, como o lançamento de uma moeda justa ou viciada.
- Análise de eventos dicotômicos em estudos estatísticos, como sucesso/fracasso ou presença/ausência de um atributo.
- Base teórica para distribuições mais complexas, como a binomial e a binomial negativa.

3.3 Distribuição Binomial

A **Distribuição Binomial** é uma distribuição discreta que descreve o número de sucessos em n ensaios independentes de Bernoulli, cada um com probabilidade de sucesso p. Seja X uma variável aleatória que segue essa distribuição, sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ é o coeficiente binomial.

A formulação matemática da distribuição binomial foi inicialmente explorada por Jakob Bernoulli (1655–1705) em *Ars Conjectandi* e posteriormente formalizada com base nos trabalhos de Abraham de Moivre (1667–1754). Para maiores informações sugerimos Edwards (1960) e Forbes et al. (2011).

✓ Parâmetros

- n: número de ensaios de Bernoulli (inteiro positivo).
- p: probabilidade de sucesso em cada ensaio ($0 \leq p \leq 1$).

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = np$.
- Variância: $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de contagem de sucessos em experimentos repetidos, como o número de caras em n lançamentos de uma moeda.
- Estudos estatísticos envolvendo amostras aleatórias e proporções populacionais.
- Modelagem de eventos binários em séries temporais ou experimentos laboratoriais.

3.4 Distribuição Poisson

A **Distribuição de Poisson** é uma distribuição discreta que descreve o número de ocorrências de um evento em um intervalo fixo de tempo ou espaço, dado que as ocorrências são independentes e acontecem a uma taxa constante. Para maiores informações sugerimos Forbes et al. (2011). Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson. A distribuição de Poisson foi nomeada em homenagem ao matemático francês Siméon-Denis Poisson (1781–1840), que a utilizou em seus estudos sobre probabilidade no contexto de julgamentos e eventos raros. Sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $\lambda > 0$ é o parâmetro que representa a taxa média de ocorrências por unidade de tempo ou espaço.

✓ Parâmetro

- λ: taxa média de ocorrências por unidade de tempo ou espaço (real positivo).

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = \lambda$.
- Variância: $\text{Var}(X) = \lambda$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de eventos raros, como o número de chamadas recebidas por uma central telefônica em um intervalo de tempo.
- Estudos envolvendo contagem de ocorrências em áreas como biologia (mutação genética) e física (contagem de partículas radioativas).
- Análise de padrões de eventos espaciais ou temporais em processos estocásticos.

3.5 Distribuição Geométrica

A **Distribuição Geométrica** é uma distribuição discreta e descreve o número de ensaios necessários até a ocorrência do primeiro sucesso em um experimento de Bernoulli repetido. Seja X uma variável aleatória com esta distribuição. A distribuição geométrica foi estudada no contexto de processos binários por Jakob Bernoulli (1655–1705), sendo amplamente utilizada em teoria de probabilidades e estatística aplicada. Sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde $p \in (0, 1]$ é a probabilidade de sucesso em cada ensaio.

✓ Parâmetro

- p: probabilidade de sucesso em cada ensaio ($0 < p \leq 1$).

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$.
- Variância: $\text{Var}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de processos que envolvem a contagem do número de tentativas até o primeiro sucesso, como o número de lançamentos de um dado até que uma face específica apareça.

- Análise de falhas em sistemas, determinando o número de testes necessários até que um produto funcione corretamente.
- Processos estocásticos que envolvem eventos discretos com probabilidades constantes.

3.6 Distribuição Binomial Negativa

A **Distribuição Binomial Negativa** é uma distribuição discreta que modela o número de falhas (X) necessárias para alcançar um número fixo de sucessos (r) em experimentos de Bernoulli independentes, onde cada tentativa tem uma probabilidade constante de sucesso (p). Embora o conceito tenha origens nas investigações sobre probabilidades acumulativas por Jacob Bernoulli no século XVII, a formalização completa da distribuição binomial negativa foi desenvolvida no contexto da teoria das distribuições e aplicada no século XX. A função de probabilidade é:

$$P(X=x)=\binom{x+r-1}{r-1}p^r(1-p)^x, x=0,1,2\cdots$$

✓ Parâmetros

- r : Número de sucessos
- p : Probabilidade de sucesso em cada tentativa

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X]=\dfrac{r(1-p)}{p}$
- Variância: Var(X)= $\dfrac{r(1-p)}{p^2}$

✓ Principais aplicações

- Determina número de tentativas até alcançar um certo número de sucessos
- O número de falhas em um sistema antes que ele alcance alguns reparos bem-sucedidos.

3.7 Distribuição Uniforme Contínua

A **Distribuição Uniforme Contínua** descreve uma variável aleatória contínua cuja densidade de probabilidade é constante em um intervalo finito. Seja X uma variável aleatória com suporte no intervalo $[a,b]$, para $a<b$, então sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A distribuição uniforme contínua é uma das distribuições mais simples e fundamentais em estatística. Seu uso remonta aos primeiros estudos de probabilidade, sendo amplamente empregada na modelagem de incertezas e geração de números aleatórios. A suposição de equiprobabilidade para qualquer subintervalo de mesmo comprimento dentro de $[a,b]$ a torna útil em diversas aplicações teóricas e práticas.

✓ **Parâmetros**

- a: limite inferior do intervalo.
- b: limite superior do intervalo.

✓ **Estatísticas Importantes**

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$.
- Variância: $\text{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

✓ **Principais Aplicações**

- Geração de números aleatórios contínuos em simulações computacionais.
- Modelagem de fenômenos físicos e naturais onde cada valor dentro de um intervalo tem a mesma chance de ocorrer.
- Métodos estatísticos e computacionais, como a técnica de amostragem de Monte Carlo.

3.8 Distribuição Normal

A **Distribuição Normal**, também conhecida como distribuição Gaussiana, é uma distribuição contínua que modela variáveis aleatórias cuja probabilidade se distribui simetricamente em torno da média, formando a clássica curva em formato de sino. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde μ é a média e σ^2 é a variância.

A distribuição normal foi descrita matematicamente por Carl Friedrich Gauss (1777–1855), que a utilizou no estudo de erros de medição, embora Abraham de Moivre (1667–1754), matemático francês, tenha sido o primeiro a introduzir a curva em um contexto probabilístico. Moivre notou que à medida que se aumentava o número de eventos de um experimento, a Distribuição Binomial se aproximava de uma curva suave. A partir daí, o francês Pierre Simon de Laplace (1748 – 1827) estendeu os resultados e formalizou essa ideia como parte do Teorema de Moivre-Laplace e utilizou a distribuição com o intuito de analisar erros experimentais e assim contribuiu com o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. Maiores informações sugere-se Bittencourt e Viali (2006) e Salsburg (2024).

✓ Parâmetros

- μ: média (localização da curva).
- σ^2: variância (dispersão da curva).

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = \mu$.
- Variância: $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de fenômenos naturais e sociais, como altura, peso, e desempenho acadêmico, que frequentemente seguem uma distribuição aproximadamente normal.
- Base teórica para testes estatísticos, como o teste t de Student e a análise de regressão.
- Aproximação de outras distribuições (teorema central do limite), especialmente em grandes amostras.

3.9 Distribuição Birnbaum-Saunders

A **Distribuição Birnbaum-Saunders** é uma distribuição contínua, derivada de um modelo para fadiga que seguiu de considerações da teoria de renovação para o número de ciclos necessários para forçar uma extensão de trinca de fadiga a exceder um valor crítico. Foi desenvolvida por Z. W. Birnbaum e S. C. Saunders em 1969. Birnbaum e Saunders (1969)

Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t;\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha t} exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)^2}{\alpha^2}\right), t > 0,$$

onde:
$\alpha > 0$: parâmetro de forma (relacionado à dispersão dos dados).
$\beta > 0$: parâmetro de escala (associado ao valor médio ou à localização central).

✓ Parâmetros

- α: Controla a variação em torno do parâmetro de escala.
- β: Tempo médio de falha.

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[T] \approx \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)$
- Variância: Var(T) $\approx \beta^2\alpha^2 \left(1 + \frac{5\alpha^2}{4}\right)$
- Mediana: Med $= \beta$

✓ Principais aplicações

- Modelagem do tempo até a falha de componentes ou sistemas mecânicos e eletrônicos.
- Análise da resistência de materiais sujeitos a ciclos de carga repetitivos.
- Aplicada em áreas como biologia, economia e finanças, quando os dados possuem assimetria positiva.

3.10 Distribuição Beta

A **Distribuição Beta** é uma distribuição de probabilidade contínua e suas aplicações incluem a modelagem de variáveis aleatórias que possuem um intervalo finito de “a” a “b”. É uma distribuição frequentemente utilizada para proporções binomiais na análise bayesiana. Forbes et al. (2011)

Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0 \leq x \leq 1,$$

✓ Parâmetros

- α: Controla o peso próximo de $x = 0$
- β Controla o peso próximo de $x = 1$.

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

- Variância: $\text{Var(X)} = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

- Moda: $\text{Mo(X)} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}, \text{se} \alpha, \beta > 1$

✓ Principais aplicações

- Representação de incertezas sobre frações ou probabilidades em diversas áreas.

- Usada como distribuição a priori para parâmetros de distribuições binomiais.

- Para análise de dados relativos a taxas de defeitos ou sucesso.

- Representa proporções de sucesso em processos estocásticos.

3.11 Distribuição Cauchy

A **Distribuição de Cauchy** é uma distribuição de probabilidade contínua caracterizada por sua forma simétrica e caudas longas. A distribuição foi introduzida por Augustin-Louis Cauchy em 1821 no contexto da teoria das funções complexas. É também conhecida como distribuição de Lorentz, devido à sua aplicação na física para descrever ressonâncias. Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, -\infty < x < \infty,$$

✓ Parâmetros

- x_0: moda da distribuição

- γ: Controla a dispersão dos dados ao redor de x_0

✓ Estatísticas Importantes

- Moda: A moda é x_0, o ponto onde a densidade atinge seu valor máximo

- Mediana: A mediana também x_0, pois a distribuição é simétrica.

✓ Principais aplicações

- Descrever ressonâncias em sistemas oscilatórios.

- Modelagem de ruído em sistemas de comunicação.

- Utilizada em estudos para demonstrar falhas de estimadores.

3.12 Distribuição Qui-quadrado

A **Distribuição Qui-quadrado** é uma distribuição contínua e pode ser definida por ser a soma dos quadrados de um certo número de variáveis normais, por esse motivo, os valores da distribuição sempre serão maior que zero. Geralmente é usada para analisar variabilidade. Muito comum para analisar tabelas de contingências Forbes et al. (2011). Sua definição matemática foi formalizada por Karl Pearson em 1900.

Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x;k) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0$$

✓ Parâmetros

- k: Número de graus de liberdade

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = k$
- Variância: Var$= 2k$

✓ Principais aplicações

- Teste de independência em tabelas de contingência.
- Utilizada para verificação da variabilidade dos dados.
- Estimativa de variâncias populacionais.

3.13 Distribuição Exponencial

A **Distribuição Exponencial** é uma distribuição de probabilidade contínua que modela o tempo entre eventos em um processo de Poisson, onde os eventos ocorrem continuamente e independentemente a uma taxa constante. A formulação matemática da distribuição exponencial foi descoberta no século XIX, inicialmente como parte do trabalho de Siméon-Denis Poisson sobre a probabilidade de eventos raros. Posteriormente, foi formalizada como uma distribuição separada em estudos sobre confiabilidade e processos estocásticos. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0,$$

✓ Parâmetros

- λ: Taxa de ocorrência dos eventos

✓ Estatísticas Importantes

- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
- Var(X)= $\dfrac{1}{\lambda^2}$

✓ Principais aplicações

- Modelagem de Tempo de Vida.
- Modela o intervalo entre eventos consecutivos.

3.14 Distribuição Gama

A **Distribuição Gama** é uma distribuição de probabilidade contínua que modela o tempo até que ocorram α eventos em um processo de Poisson. A distribuição Gama foi formalizada no século XIX como parte dos estudos sobre funções especiais por matemáticos como Adrien-Marie Legendre e Carl Friedrich Gauss. Foi aplicada posteriormente por Karl Pearson no início do século XX para modelar dados biométricos e outros fenômenos. Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\beta x}, x > 0,$$

✓ Parâmetros

- α :Parâmetro de forma
- β :Parâmetro de taxa

✓ Estatísticas Importantes

- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}$
- Var(X)= $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de tempo de espera
- Modelagem de precipitação acumulada em um intervalo de tempo

Ferramentas interativas têm desempenhado um papel essencial no ensino de distribuições de probabilidade, contribuindo para potencializar a compreensão desse tema fundamental, que é essencial tanto em estudos teóricos quanto em aplicações práticas. Por meio de recursos que permitem a manipulação dinâmica de parâmetros e a visualização gráfica das distribuições, os estudantes podem explorar de forma intuitiva os conceitos centrais, como a influência dos parâmetros sobre a forma das funções de probabilidade e densidade. Essa abordagem dinâmica promove um aprendizado mais significativo, ao transformar conceitos abstratos em experiências visuais e práticas, além de favorecer a autonomia dos aprendizes na construção do conhecimento estatístico. Assim, a combinação entre teoria e prática interativa representa uma estratégia pedagógica poderosa para o ensino de distribuições. Uma maneira de aproveitar a tecnologia a favor de uma aprendizagem mais eficiente é incorporando a experiência prática por meio de materiais didáticos interativos.

A interação é um processo em que se espera que os alunos assumam um papel ativo, e o ensino interativo de alta qualidade é essencial dentro de uma perspectiva construtivista social de aprendizagem. As tecnologias interativas têm ganhado destaque por possibilitarem que pessoas de diferentes partes do mundo vejam, conversem e ouçam umas às outras, proporcionando um conhecimento e entretenimento diferenciados, tudo por meio de dispositivos acessíveis (VERASZTO; GARCÍA, 2011).

Embora as tecnologias interativas ofereçam amplas possibilidades educacionais, sua aplicação no ensino de Estatística, particularmente no contexto das distribuições de probabilidade, ainda enfrenta desafios consideráveis. Além disso, há uma notável carência de recursos e materiais didáticos que ofereçam suporte adequado aos professores no tratamento desse conteúdo. Apesar dessas limitações, o software estatístico *R* destaca-se como uma ferramenta com grande potencial para a criação de recursos digitais interativos, que podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem, beneficiando tanto professores quanto estudantes.

O *R* (R CORE TEAM, 2024) é uma ferramenta versátil e amplamente utilizada para análises estatísticas, desenvolvimento de visualizações e criação de materiais pedagógicos interativos. Ele oferece uma vasta opção de pacotes que nos permite visualizar dados, organizá-los, criar gráficos, fazer cálculos, entre outras funções que são extremamente valiosas para o contexto acadêmico e profissional. Dois pacotes do *R* muito importantes para a criação de recursos pedagógicos interativos são o *shiny* e o *learnr*

O *shiny* é um pacote do *R* desenvolvido por Chang et al. (2017). Ele possibilita criar interações em *R*, e é usado principalmente para compreensão e análise de dados. Com o *shiny* o usuário pode interagir com gráficos, fazendo modificações e assim ter a facilidade de visualização e compreensão de comportamentos. É um pacote extremamente importante para a criação de ferramentas interativas que podem auxiliar educadores e analistas e alunos de estatística. Já o *learnr* é um pacote do *R* criado por Aden-Buie et al. (2024) e sua função é criar tutoriais interativos que facilitam a aprendizagem do usuário, promovendo o conteúdo de forma prática e dinâmica. Com ele, é possível criar exercícios interativos e práticos e verificar suas respostas em tempo real, promovendo um aprendizado ativo.

Para a criação deste material, usamos esses pacotes e alguns outros, como o *ggplot* Wickham (2016) que permite a criação de gráficos altamente personalizados e informativos, essenciais para a compreensão de padrões e tendências nos dados. Adicionalmente, o material foi utilizando o Rstudio (RSTUDIO TEAM, 2024) que é um ambiente de desenvolvimento integrado que fornece uma interface gráfica para trabalhar com o *R*. É possível agora, que o professor ensine de forma rápida, visual e interativa o conteúdo de Distribuição de Probabilidade através deste material. Espera-se que, os alunos, tenham mais facilidade de compreender os conceitos de distribuição de probabilidade por meio das ferramentas utilizadas no material.

Capítulo 4

Metodologia

Essa pesquisa caracteriza-se como uma investigação aplicada, com foco no desenvolvimento de material didático interativo destinado a facilitar o ensino e a aprendizagem de conceitos complexos, como as Distribuições de Probabilidade. Trata-se de uma pesquisa qualitativa e exploratória, que busca investigar e propor formas inovadoras de criar recursos educacionais que atendam às necessidades do ensino desses conteúdos. O objetivo principal é desenvolver um produto pedagógico eficaz, devido a necessidade de compreender os desafios do ensino de distribuição de probabilidade e de propor soluções inovadoras.

Para a construção deste material, inicialmente estudamos o conceito e alguns modelos probabilísticos, usando principalmente a referência Forbes et al. (2011). No entanto, com o objetivo de expandir o conhecimento e facilitar o ensino de Estatística, em especial o ensino de Distribuição de Probabilidade, realizamos uma revisão bibliográfica, buscando distribuições conhecidas e comuns na prática Estatística e distribuições recém descobertas ou pouco conhecidas dos professores e alunos das disciplinas de Estatística Básica.

Em seguida, exploramos a criação de gráficos utilizando o pacote *ggplot* do software R, com suporte do ambiente RStudio. Esses gráficos foram incorporados a um material didático interativo desenvolvido com o pacote *learnR*. O material inclui diversos gráficos acompanhados por seus códigos R, todos comentados de maneira detalhada, com o objetivo de facilitar a compreensão e o ensino de Distribuições de Probabilidade. Essa abordagem buscou integrar a teoria com a prática, promovendo um aprendizado mais dinâmico e intuitivo.

Para a criação do material, utilizamos o RStudio Cloud, que oferece um ambiente acessível e flexível para desenvolvimento. O processo iniciou-se com a criação de uma conta na plataforma, seguida pela configuração de um novo projeto e instalação de pacotes essenciais, como *learnr*, *ggplot* e *tidyverse*. Dentro do RStudio, os seguintes passos foram realizados: **File -> New File -> R Markdown -> From Template -> Interactive Tutorial**. O arquivo gerado, no formato **RMarkdown** (.Rmd), permite combinar texto explicativo com código R, possibilitando a criação de tutoriais interativos que incentivam o aprendizado ativo e a experimentação por parte dos usuários.

```
1  ---
2  title: "Material Didático Interativo para o Ensino e Aprendizado de Distribuições
   de Probabilidade"
3  output: learnr::tutorial
4  runtime: shiny_prerendered
5  ---
6
7  ```{r setup, include=FALSE}
8  library(learnr)
9  library(tidyverse)
10 knitr::opts_chunk$set(echo = FALSE)
11 ```
```

Figura 4.1: Código que define o cabeçalho do material e o carregamento de alguns pacotes.

Essa é a página inicial do código. Entre as linhas 1 e 5, está o código que define o cabeçalho (*yaml*), na linha 2 está identificado o nome do material, na linha 3 está definida a saída do documento, no caso deste material, é um tutorial interativo gerado pelo pacote *learnr*. A linha 4 vai especificar o modo como o material interativo será executado, neste caso, em *shiny*. Desse modo, parte do documento será processado antes da interação do usuário e outras partes que necessitam de entradas dos usuários, são processadas de forma dinâmica no *shiny*. Isso torna a compilação dinâmica.

Na segunda parte dessa imagem temos um *chunk*, que é uma seção de código delimitada por três crases (“‘), onde é possível escrever e executar comandos em R ou outras linguagens suportadas. Ele permite incorporar análises, gráficos e resultados diretamente no documento, mantendo o código organizado e integrado ao texto. Na linha 7 temos o início desse ambiente, “setup” é apenas o nome (rótulo) dado a esse *chunk* e “include=FALSE” significa que não vamos gerar esse código em primeiro plano, ou seja, ele não aparece no documento compilado. Na linha 8 e 9 estamos carregando os pacotes *learnr* e *tidyverse*. Na linha 10 temos a função do pacote *knitr* que irá permitir a configuração padrão para os *chunks* do documento. O “echo= FALSE” irá ocultar o código dos *chunks* mantendo apenas os seus respectivos resultados, como gráficos, tabelas, entre outros.

A partir daí, iniciamos a escrita do material. Para enumerar cada seção, utilizamos “##”. Descrevemos a parte teórica de cada distribuição de probabilidade e apresentamos seus respectivos gráficos utilizando o pacote *ggplot* (detalhamos a seguir o processo de construção desses gráficos com uso deste pacote). Para descrever as fórmulas de cada distribuição, utilizamos a linguagem LaTeX.

Apresentamos, portanto, neste material, o conteúdo teórico, as fórmulas associadas a cada distribuição de probabilidade descrita anteriormente, e as, respectivas, representações gráficas. Abaixo, é possível visualizar o código utilizado para criar o gráfico da Distribuição Binomial:

```
270 ```{r bin1, exercise=TRUE, exercise.eval=TRUE, fig.align='center'}
271 # Definição dos parâmetros
272 n <- 15  # Número de tentativas
273 prob <- 0.4  # Probabilidade de sucesso
274 sucessos <- 0:n  # Possíveis valores de sucessos
275
276 # Calculando a distribuição binomial
277 probabilidade <- dbinom(x = sucessos, size = n, prob = prob)
278
279 # Criando o data frame
280 df <- data.frame(sucessos, prob = probabilidade)
281
282 # Criando o gráfico de espeto com ggplot2
283 ggplot(df, aes(x = sucessos, y = prob)) +
284   geom_segment(aes(xend = sucessos, yend = 0), linetype = "solid", color = "skyblue", size = 1) +
285   geom_point(size = 3, color = "blue") +
286   geom_text(aes(label = round(prob, 3), y = prob + 0.015), size = 3, vjust = 0) +
287   scale_x_continuous(breaks = sucessos) +
288   labs(title = "Distribuição Binomial",
289        subtitle = bquote("Binomial"~"(n"== .(n)~","~ "p"== .(prob)~")"),
290        x = "Número de Sucessos (x)",
291        y = "Probabilidade") +
292   theme_minimal()
```

Figura 4.2: Código para criação do gráfico da Distribuição Binomial

A partir da linha 270 inicia-se o *chunk* com os códigos para a distribuição Binomial, o rótulo deste *chunk* é "bin1". Após isto vem o "exercise=TRUE", ele indica que é um exercício interativo. E "exercise.eval=TRUE" permite a avaliação do código e apresenta o resultado após a compilação. Por fim, "fig.align='center'" serve para centralizar a imagem que será gerada, neste caso o gráfico da distribuição binomial. Já nas linhas 272 e 274 indicamos, respectivamente, o número de repetições e um vetor que contém o número possível de sucessos. Na linha 273 a probabilidade de sucesso e na linha 277 acrescentamos o objeto denominado probabilidade que recebe os resultados da aplicação da fórmula da distribuição Binomial, em que x é o número de sucessos, n é o número total de repetições ou lançamentos e "prob = 0.4" é a probabilidade de sucesso em cada experimento.

Na linha 280, acrescentamos um *data.frame*, que, em R, é uma estrutura de dados bidimensional amplamente utilizada para organizar dados em formato tabular. Nesse *data.frame*, são associadas duas variáveis: o número de sucessos e suas respectivas probabilidades. Na sequência, ocorre a criação do gráfico, com o auxílio do pacote *ggplot*. Na linha 283, a função `aes()` é utilizada para mapear as variáveis aos elementos visuais do gráfico. O argumento `x = sucesso` define que os valores de sucessos serão exibidos no eixo x, enquanto `y = prob` especifica que as probabilidades correspondentes serão representadas no eixo y. A função `geom_segment()` é empregada para criar o gráfico, apropriado neste caso, uma vez que a distribuição é discreta.

Adicionalmente, a função `geom_text()` é utilizada para rotular as barras do gráfico. Por exemplo, o argumento `label = round(prob, 3)` indica que as probabilidades serão arredondadas para três casas decimais, enquanto `y = prob + 0.015` define o posicionamento vertical dos rótulos. O parâmetro `size = 3` ajusta o tamanho da fonte, e `vjust = 0` controla o alinhamento vertical dos textos. Por fim, a função `labs()` é empregada para atribuir o título do gráfico e nomear os eixos x e y.

O usuário do material pode alterar na apostila interativa o código anterior e visualizar o gráfico resultante após suas alterações, o que auxilia o entendimento da linguagem R e das respectivas funções dos pacotes utilizados e também da distribuição de probabilidade. Veja, por exemplo, o gráfico da distribuição Binomial com os parâmetros $n = 15$ e $p = 0.4$.

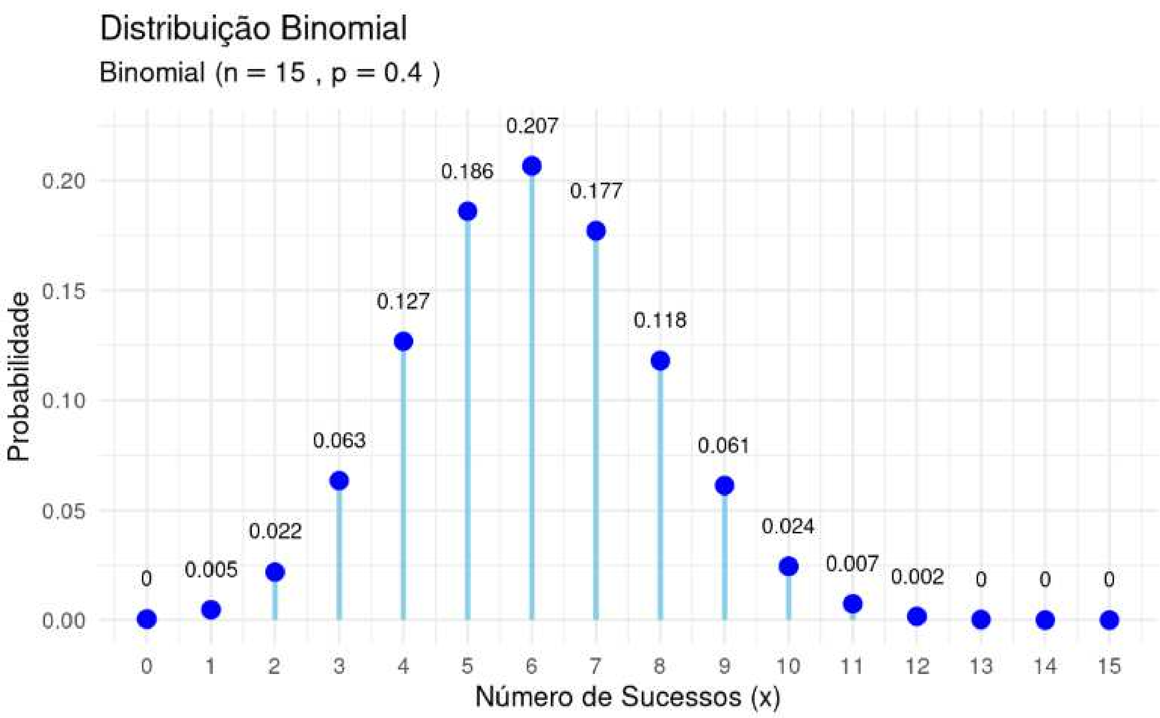

Figura 4.3: Gráfico da Distribuição Binomial

Caso, o usuário deseje modificar apenas os parâmetros da distribuição, sem alterar o código fonte, e visualizar o comportamento do gráfico à medida que os parâmetros n e p são alterados, criamos uma aplicação dinâmica usando o *shiny*. Nela, o aluno pode ajustar esses parâmetros de forma prática e intuitiva por meio de uma barra deslizante horizontal. Essa interação possibilita visualizar instantaneamente as mudanças no gráfico, tornando o aprendizado mais engajante. Abaixo, apresentamos o código para a construção do controle deslizante para distribuição Binomial.

```
```{r, echo=FALSE}
sliderInput("Num", "Número de Experimentos N:" , min = 1  , max = 100, value = 15)
sliderInput("prob", "Valor de p:", min = 0, max = 1, value = 0.5)
plotOutput("distPlotBin")
```
```

Figura 4.4: Código em *shiny* para Criar um Controle Deslizante dos Parâmetros da Distribuição Binomial.

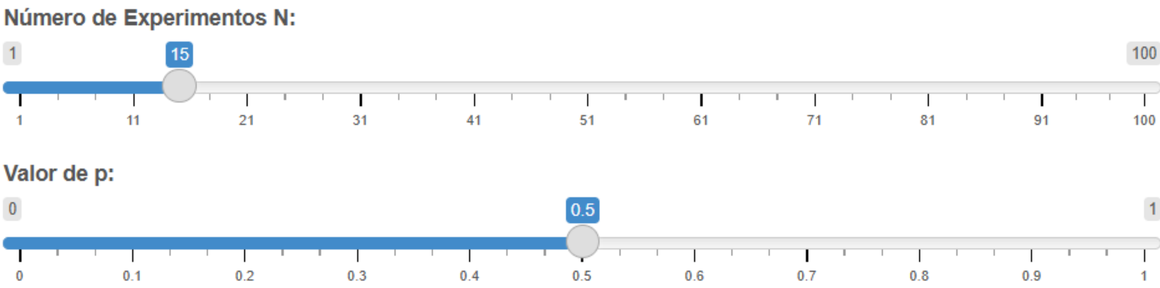

Figura 4.5: Controle Deslizante dos Parâmetros da Distribuição Binomial

Na linha 88, a função `sliderInput()` é utilizada para criar um controle deslizante que permite ao usuário interagir ajustando o parâmetro, número de repetições, da distribuição Binomial por meio de uma barra horizontal. O argumento `"Num"` especifica o rótulo do controle deslizante, enquanto o texto `"Número de Experimentos N:"` será exibido ao lado do controle. O intervalo de variação do controle é definido pelos argumentos `min = 1` e `max = 100`, e o argumento `value = 15` determina o valor inicial do controle deslizante.

De forma semelhante, na linha 89, um segundo controle deslizante é criado. Este controle possui o título `"valor de p"`, com um intervalo de variação definido entre $[0, 1]$, refletindo o domínio de uma probabilidade. O valor inicial deste controle é especificado como $0,5$. Após a alteração nos controles deslizantes, o usuário visualizará imediatamente o gráfico atualizado da distribuição binomial, refletindo as modificações realizadas. Para que isso seja possível, é necessário criar o código de saída no *shiny*, utilizando na descrição do *chunk* a função `context="server"`.

```
```{r, context="server"}
output$distPlotBin <- renderPlot({
  # Definição dos parâmetros da distribuição binomial no Shiny
sucessos <- 0:input$Num  # Valores possíveis de sucessos
size  <- input$Num       # Número total de tentativas
prob <- input$prob       # Probabilidade de sucesso
media <- input$Num*input$prob
Var <- input$Num*input$prob*(1-input$prob)

# Calculando a distribuição binomial
probabilidade <- dbinom(x = sucessos, size = size, prob = prob)

# Criando o data frame
df <- data.frame(sucessos, prob = probabilidade)

# Criando o gráfico de espeto com ggplot2
ggplot(df, aes(x = sucessos, y = prob)) +
  geom_segment(aes(xend = sucessos, yend = 0), linetype = "solid", color = "skyblue", size = 1) +
  geom_point(size = 3, color = "blue") +
  geom_text(aes(label = round(prob, 3), y = prob + 0.015), size = 3, vjust = 0) +
  scale_x_continuous(breaks = sucessos) +
  labs(title = bquote("Distribuição Binomial com Média"~"E(X)="~.(media)~"e
Variância"~"VAR(X)="~.(Var)),
       subtitle = paste("Binomial (n =", input$Num, ", p =", input$prob, ")"),
       x = "Número de Sucessos (x)",
       y = "Probabilidade") +
  theme_minimal()
})
```
```

Figura 4.6: Código `server` para atualização imediata do gráfico da distribuição binomial após alterações nos controles deslizantes.

Na linha 317, `output$distPlotBin` é o elemento responsável por armazenar e exibir os conteúdos do aplicativo. A função `renderPlot()` gera o gráfico com base nos valores fornecidos pelo usuário por meio dos `inputs`. O comando `sucessos <- 0:input$Num` cria um vetor que varia de 0 até o valor selecionado em `input$Num`, representando todas as quantidades possíveis de sucessos em uma determinada quantidade de ensaios. Os parâmetros `size` (número de ensaios) e `prob` (probabilidade de sucesso por ensaio) são definidos pelos valores de `input$Num` e `input$prob`, respectivamente. A linha 326 calcula a distribuição binomial.

Na linha 328, é criado um *data.frame* que relaciona duas variáveis: o "número de sucessos" e a "probabilidade correspondente a cada número de sucessos". A partir desse *data.frame*, iniciamos com o pacote *ggplot* a construção do gráfico. A função `geom_segment()` é utilizada para gerar o gráfico vertical que representam as probabilidades associadas a cada número de sucessos. Esse código segue estrutura semelhante à utilizada na construção do gráfico representado da Figura 4.6.

De forma resumida, o código apresentado tem como principal função capturar os valores fornecidos pelo usuário na interface do *shiny* e recalcular automaticamente os resultados sempre que os parâmetros forem alterados. Com isso, um novo gráfico é gerado com base nos valores atualizados, permitindo que o aluno observe, de maneira prática, como o comportamento das distribuições varia conforme os parâmetros são ajustados. O material busca, assim, proporcionar um entendimento claro e conciso sobre as distribuições de probabilidade, de forma prática e objetiva. Esse processo é repetido para todas as demais distribuições abordadas no conteúdo.

Com base na abordagem descrita, a metodologia desenvolvida neste trabalho permite uma interação dinâmica e prática com os conceitos teóricos de distribuições de probabilidade. A utilização do *shiny*, integrada ao R, proporciona um ambiente interativo em que os usuários podem alterar parâmetros e visualizar, em tempo real, os impactos dessas alterações nos gráficos gerados. Essa característica é especialmente valiosa para o aprendizado, permitindo uma compreensão intuitiva e aplicada dos conceitos estatísticos. Além disso, a construção dos gráficos com o *ggplot* e o uso de controles deslizantes tornam o processo acessível, eficiente e visualmente atrativo. Por fim, o método apresentado foi replicado para diferentes distribuições de probabilidade, reforçando a aplicabilidade e a robustez da metodologia na criação de materiais didáticos interativos voltados ao ensino de estatística.

Capítulo 5

Resultados e Discussão

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos com o desenvolvimento do material didático interativo sobre distribuições de probabilidade. O material disponível no endereço `https://pibicest.shinyapps.io/InteractiveModels` apresenta 14 distribuições, incluindo Uniforme Discreta, Bernoulli, Binomial, Poisson, Geométrica, Uniforme Contínua, Normal, Birnbaum-Saunders, Binomial Negativa, Beta, Cauchy, Qui-quadrado, Exponencial e Gamma. Para cada distribuição, foram explorados aspectos como histórico, definição, parâmetros e aplicações, acompanhados de representações gráficas interativas. Com o uso de barras deslizantes, o material permite ao usuário ajustar os parâmetros das distribuições e observar instantaneamente como essas alterações impactam os gráficos. Essa abordagem busca facilitar a aprendizagem, promovendo uma compreensão mais intuitiva e aprofundada de conceitos estatísticos, especialmente daqueles considerados mais complexos.

Destacam-se neste capítulo duas distribuições de probabilidade: a geométrica, de natureza discreta, e a normal, de natureza contínua. As demais distribuições mencionadas anteriormente são apresentadas de maneira semelhante, com histórico, definição, parâmetros e gráficos interativos. A Figura 5.1 apresenta uma imagem do texto que introduz a distribuição geométrica no material interativo.

Distribuição Geométrica

Distribuição Geométrica

A descreve o número de ensaios necessários até a ocorrência do primeiro sucesso em um experimento de Bernoulli repetido. Seja X uma variável aleatória com esta distribuição. A distribuição geométrica foi estudada no contexto de processos binários por Jakob Bernoulli (1655–1705), sendo amplamente utilizada em teoria de probabilidades e estatística aplicada. Sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde $p \in (0, 1]$ é a probabilidade de sucesso em cada ensaio.

✓ Parâmetros

- p: probabilidade de sucesso em cada ensaio ($0 < p \leq 1$).

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$.
- Variância: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de processos que envolvem a contagem do número de tentativas até o primeiro sucesso, como o número de lançamentos de um dado até que uma face específica apareça.
- Análise de falhas em sistemas, determinando o número de testes necessários até que um produto funcione corretamente.
- Processos estocásticos que envolvem eventos discretos com probabilidades constantes.

Figura 5.1: Introdução da seção sobre a Distribuição Geométrica da Apostila Interativa.

Após explorar este conteúdo, o usuário pode avançar para as representações gráficas da seção. A Figura 5.3 ilustra o gráfico da distribuição geométrica com probabilidade de sucesso em cada tentativa igual a $0,3$ e número de tentativas limitado a 15. O *chunk* permite ao estudante alterar os valores de p e x. Ao clicar em “Executar Código”, o gráfico será atualizado, refletindo as alterações realizadas.

Código R | Reiniciar | Executar código

```r
# Definindo os parâmetros da distribuição Geométrica
prob <- 0.3        # Probabilidade de sucesso em cada tentativa
tentativas <- 0:15 # Número de tentativas até o primeiro sucesso

# Calculando a probabilidade usando a distribuição geométrica
probabilidade <- dgeom(x = tentativas, prob = prob)

# Criando o data frame
df <- data.frame(tentativas, prob = probabilidade)

# Criando o gráfico de espeto
ggplot(df, aes(x = tentativas, y = prob)) +
  geom_segment(aes(xend = tentativas, yend = 0), linetype = "solid", color = "skyblue", size = 1) +
  geom_point(size = 3, color = "blue") +
  geom_text(
```

Figura 5.2: Código da Distribuição com $K = 15$ e $p = 0,3$.

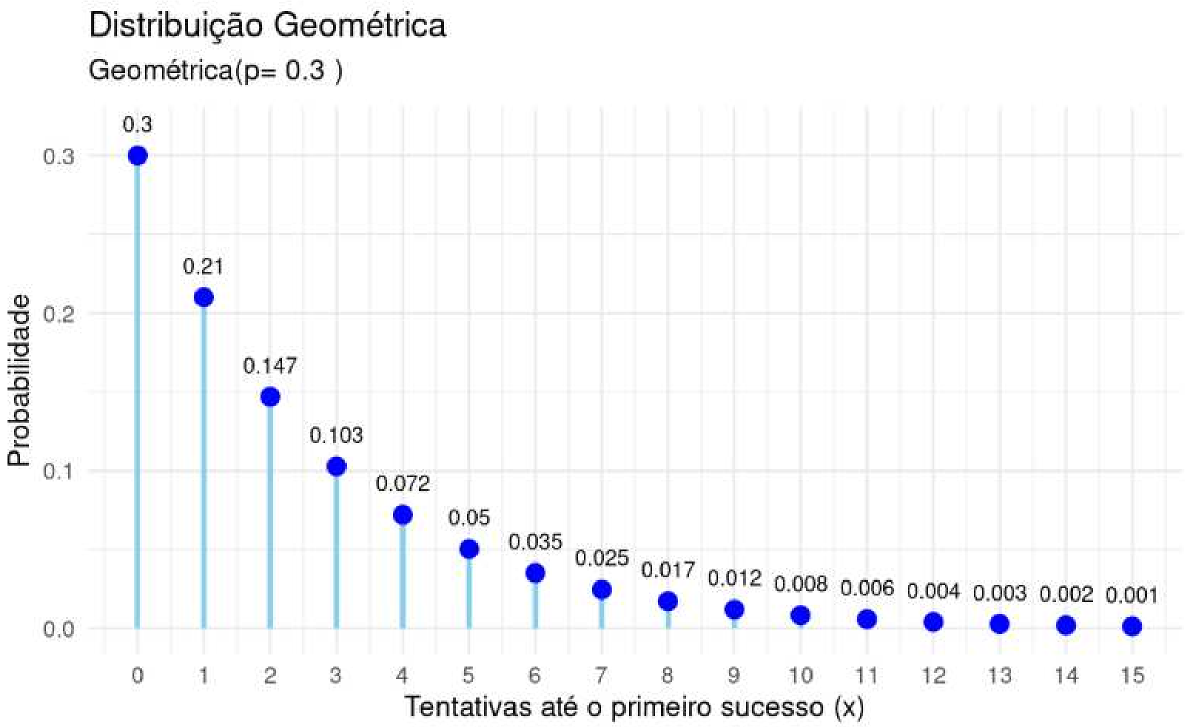

Figura 5.3: Gráfico da Distribuição com $K = 15$ e $p = 0,3$.

Nossa apostila possuí também barras deslizantes que permitem ao leitor modificar e observar de maneira instantânea as alterações nos gráficos. Note que os parâmetros escolhidos abaixo são $p = 0,5$ e $K = 11$. À medida que aumentamos o valor da probabilidade de sucesso p, o gráfico se concentra mais próximo ao início, indicando que eventos de sucesso tendem a ocorrer em menos tentativas. Essa característica reflete a propriedade da distribuição geométrica, na qual o número de tentativas até o primeiro sucesso diminui conforme a probabilidade de sucesso aumenta.

A visualização interativa e rápida permite uma compreensão mais objetiva e clara. O usuário pode fixar um parâmetro e variar o outro, ajustando a probabilidade de sucesso entre $0,01$ e 1 e o número máximo de tentativas entre 1 e 50. Além disso, a ferramenta pode ser utilizada por professores para promover discussões instigantes e incentivar debates que estimulem o raciocínio crítico dos alunos.

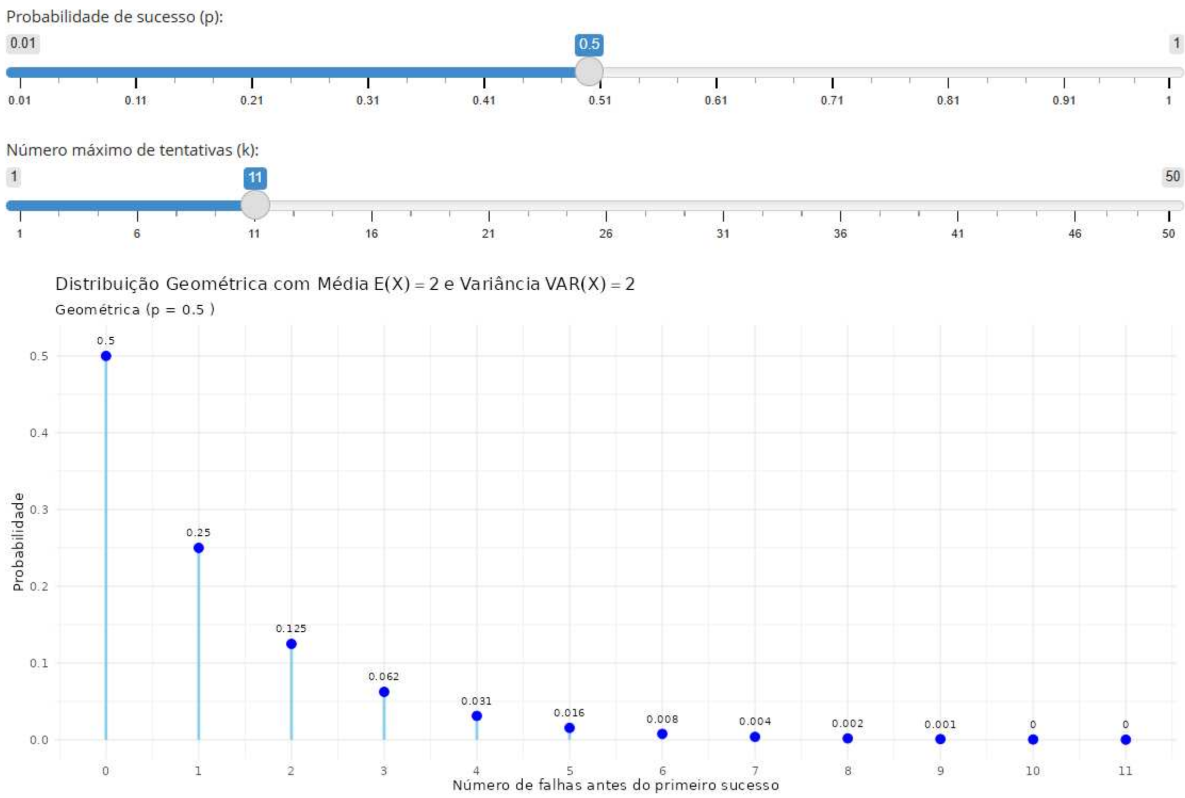

Figura 5.4: Controle de variação dos parâmetros da Distribuição Geométrica e seu respectivo gráfico com $p = 0,5$ e $K = 11$.

Distribuição Normal

A Figura 5.5 apresenta a introdução à seção sobre a distribuição Normal, incluída no material. Nesse espaço, são abordados aspectos fundamentais da distribuição Normal, como sua história, a função densidade de probabilidade, os parâmetros que a definem e algumas de suas aplicações. Essa parte teórica fornece ao usuário uma base inicial para compreender o conceito da distribuição Normal, preparando-o para interagir com os gráficos.

Distribuição Normal

A , também conhecida como distribuição Gaussiana, é uma distribuição contínua que modela variáveis aleatórias cuja probabilidade se distribui simetricamente em torno da média, formando a clássica curva em formato de sino. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde μ é a média e σ^2 é a variância.

A distribuição normal foi descrita matematicamente por Carl Friedrich Gauss (1777–1855), que a utilizou no estudo de erros de medição, embora Abraham de Moivre (1667–1754), matemático francês, tenha sido o primeiro a introduzir a curva em um contexto probabilístico. Moivre notou que à medida que se aumentava o número de eventos de um experimento, a Distribuição Binomial se aproximava de uma curva suave. A partir daí, o francês Pierre Simon de Laplace (1748 – 1827) estendeu os resultados e formalizou essa ideia como parte do Teorema de Moivre-Laplace e utilizou a distribuição com o intuito de analisar erros experimentais e assim contribuiu com o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. Maiores informações sugere-se .

✓ Parâmetros

- μ: média (localização da curva).
- σ^2: variância (dispersão da curva).

✓ Estatísticas Importantes

- Esperança: $\mathbb{E}[X] = \mu$.
- Variância: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

✓ Principais Aplicações

- Modelagem de fenômenos naturais e sociais, como altura, peso, e desempenho acadêmico, que frequentemente seguem uma distribuição aproximadamente normal.
- Base teórica para testes estatísticos, como o teste t de Student e a análise de regressão.
- Aproximação de outras distribuições (teorema central do limite), especialmente em grandes amostras.

Figura 5.5: Seção sobre a Distribuição Normal presente na Apostila.

A Figura 5.6 apresenta o código da função de densidade de probabilidade da distribuição normal, ilustrada com 6 curvas. Assim como na distribuição geométrica, este código é totalmente editável, permitindo ao usuário adicionar ou remover curvas, ajustar parâmetros, modificar cores, personalizar a legenda, entre outras alterações. Esse espaço oferece uma oportunidade para o usuário não apenas explorar conceitos estatísticos relacionados à distribuição normal, mas também se familiarizar com a linguagem *R* de forma prática e interativa.

Código R Reiniciar Executar código

```r
# Função para calcular a densidade da normal
normal <- function(x, mu, sigma) {
  dnorm(x, mu, sigma)
}

# Definição do intervalo de x
x <- seq(-10, 10, by = 0.01)

# Parâmetros das distribuições
mus <- c(1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5)  # Valores de média
sigma <- 2  # Desvio padrão
var <- sigma^2  # Variância

# Criando o data frame para ggplot
df <- expand.grid(x = x, mu = mus) %>%
```

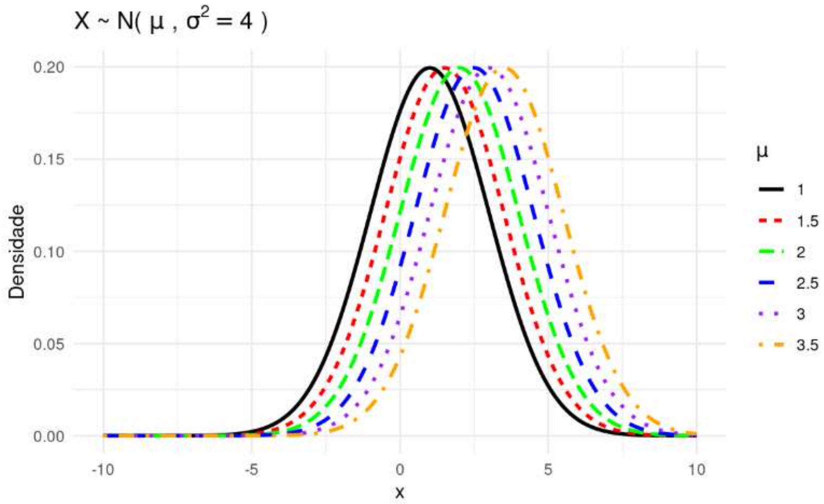

Figura 5.6: Código e Gráfico da Distribuição Normal

A Figura 5.7 apresenta barras deslizantes que permitem o ajuste dos parâmetros μ (média), σ^2 (variância) e a legenda das curvas. Inicialmente, as curvas representam funções densidade de probabilidade com $\mu = 2$ e $\sigma^2 = 8,1$. Os usuários podem variar μ no intervalo $[-5,5]$ e σ^2 no intervalo $[0,1,10]$. Essa ferramenta ilustra graficamente o papel da média como medida de posição e da variância como medida de dispersão. Alterações em μ deslocam a curva horizontalmente, enquanto aumentos em σ^2 ampliam a dispersão dos valores em torno de μ, modificando a forma do gráfico.

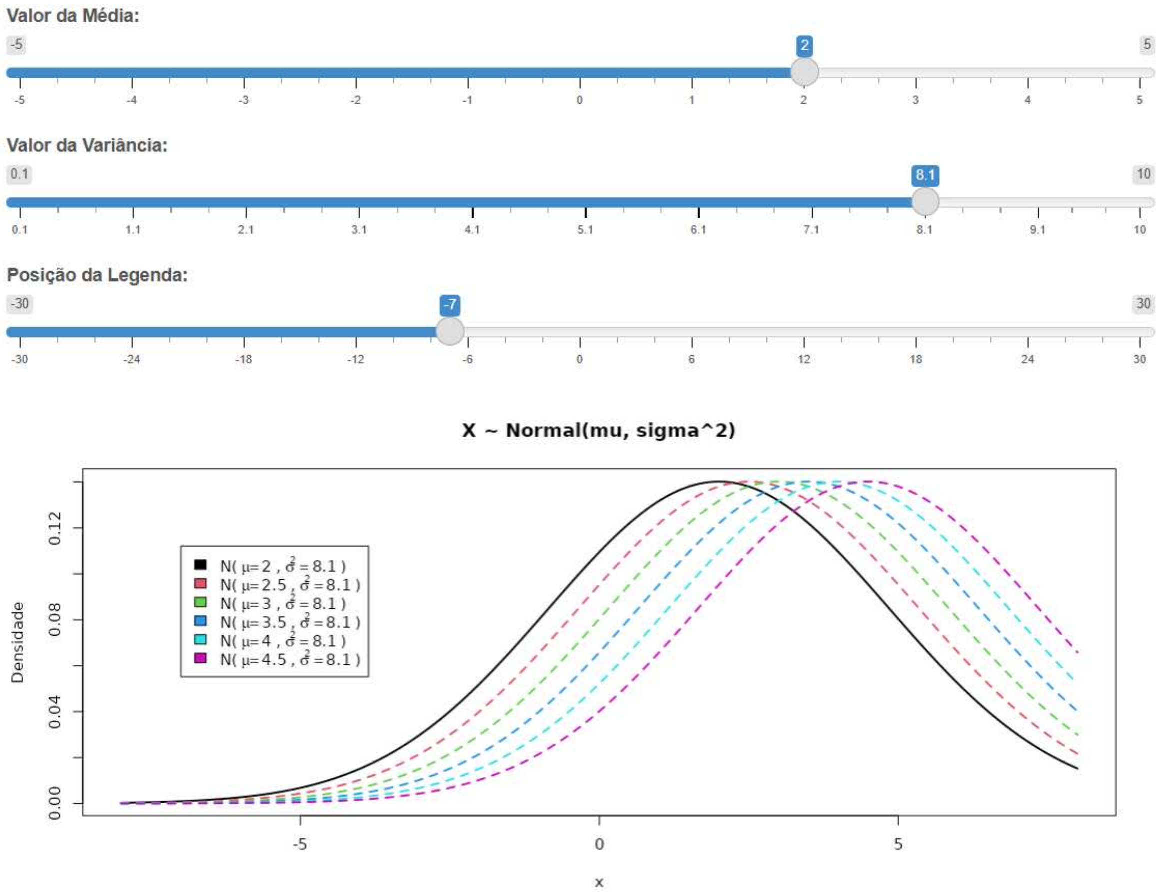

Figura 5.7: Controle de variação dos parâmetros da Distribuição Normal e seu respectivo gráfico com média$= 2$ e variância$= 8.1$.

Os resultados apresentados neste capítulo destacam o potencial do material didático interativo para facilitar a compreensão de distribuições de probabilidade. A integração de elementos visuais e ferramentas dinâmicas, como as barras deslizantes, permitem ao usuário explorar os efeitos dos parâmetros sobre as distribuições, promovendo uma aprendizagem mais intuitiva e aprofundada. Essa abordagem não apenas complementa o ensino teórico, mas também oferece uma ferramenta prática para o desenvolvimento do raciocínio estatístico, contribuindo para a formação de estudantes com maior domínio conceitual e analítico.

Capítulo 6

Conclusão

Conforme evidenciado na revisão de literatura, este trabalho aborda um tema essencial e ainda pouco explorado no ensino de Estatística: o uso de materiais didáticos interativos para o ensino de distribuições de probabilidade. O material desenvolvido representa uma contribuição significativa para as práticas pedagógicas, ao oferecer explicações claras, didáticas e integradas a recursos interativos. Além de facilitar a compreensão de conceitos estatísticos complexos, a abordagem proposta estimula a participação ativa dos estudantes e promove o desenvolvimento do raciocínio crítico e analítico, aspectos fundamentais para a formação acadêmica.

Entre as principais vantagens do material, destacam-se sua capacidade de transformar conteúdos abstratos em experiências visuais e práticas, bem como sua flexibilidade de uso, que permite adaptações tanto em aulas presenciais quanto em modalidades de ensino remoto. O uso de ferramentas interativas, como gráficos dinâmicos e barras deslizantes, demonstrou ser uma estratégia eficaz para engajar os alunos e aprofundar sua compreensão dos conceitos apresentados.

Como possibilidade de aprimoramento, sugere-se a inclusão de exercícios práticos e questões investigativas no material. Esses elementos permitiriam aos estudantes analisar resultados, formular hipóteses e refletir mais profundamente sobre os conceitos explorados. Além disso, poderiam enriquecer as discussões em sala de aula, incentivando um aprendizado mais colaborativo e significativo.

Outro aspecto a ser considerado é a ampliação do conteúdo, com a inclusão de outras distribuições de probabilidade. Isso aumentaria o alcance e a abrangência do material, consolidando-o como uma ferramenta de referência indispensável para o ensino de Estatística em diferentes níveis. Além disso, a integração de elementos adicionais, como estudos de caso ou aplicações práticas em áreas específicas (por exemplo, ciências sociais, biológicas e econômicas), poderia tornar o material ainda mais relevante para públicos diversos.

Em síntese, este trabalho reafirma a importância de materiais didáticos interativos e inovadores no processo educacional. A abordagem adotada demonstra o potencial transformador da interatividade no ensino de conceitos estatísticos, contribuindo para a formação de estudantes mais preparados, críticos e engajados no entendimento de princípios fundamentais da

Estatística. Espera-se que este estudo inspire futuras iniciativas voltadas para a modernização e a inovação no ensino dessa área, ampliando as possibilidades de aprendizado e tornando a Estatística mais acessível e atrativa.

Referências

ADEN-BUIE, Garrick et al. **learnr: Interactive Tutorials for R**. [S.l.], 2024. R package version 0.11.5.9000, https://github.com/rstudio/learnr. Disponível em: <https://rstudio.github.io/learnr/>.

BELL, Peter C. Teaching business statistics with Microsoft Excel. **INFORMS Transactions on Education**, INFORMS, v. 1, n. 1, p. 18–26, 2000.

BIRNBAUM, Zygmunt W; SAUNDERS, Sam C. A new family of life distributions. **Journal of applied probability**, Cambridge University Press, v. 6, n. 2, p. 319–327, 1969.

BITTENCOURT, Hélio Radke; VIALI, Lori. Contribuições para o ensino da distribuição normal ou curva de Gauss em cursos de graduação. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. [S.l.: s.n.], 2006.

CHANG, Winston et al. Shiny: web application framework for R. **R package version**, v. 1, n. 5, p. 2017, 2017.

CHEN, Yu-ching. Effect of mobile augmented reality on learning performance, motivation, and math anxiety in a math course. **Journal of Educational Computing Research**, Sage Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 57, n. 7, p. 1695–1722, 2019.

DIKOVIĆ, Ljubica. Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. **Computer Science and Information Systems**, v. 6, n. 2, p. 191–203, 2009.

EDWARDS, AWF. The meaning of binomial distribution. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 186, n. 4730, p. 1074–1074, 1960.

FEDRIANI, Eugenio M; MOYANO, Rafael. Using Maxima in the mathematics classroom. **Int. J. Technol. Math. Educ**, v. 18, p. 171–176, 2011.

FORBES, Catherine et al. **Statistical distributions**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

GEHRKE, Matthias et al. Statistics education from a data-centric perspective. **Teaching Statistics**, Wiley Online Library, v. 43, s201–s215, 2021.

HACKING, Ian. **The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction, and Statistical Inference**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

HALEEM, Abid et al. Understanding the role of digital technologies in education: A review. **Sustainable operations and computers**, Elsevier, v. 3, p. 275–285, 2022.

MANGIERO, George A; QAYYUM, Arif; CANTE, Charles J. Teaching statistics–A dynamic excel approach. **Journal of Education for Business**, Taylor & Francis, v. 97, n. 7, p. 439–444, 2022.

MARTIN-GONZALEZ, Anabel; CHI-POOT, Angel; UC-CETINA, Victor. Usability evaluation of an augmented reality system for teaching Euclidean vectors. **Innovations in Education and Teaching International**, Taylor & Francis, v. 53, n. 6, p. 627–636, 2016.

MUIJS, Daniel; REYNOLDS, David. Being or doing: The role of teacher behaviors and beliefs in school and teacher effectiveness in mathematics, a SEM analysis. In: CITESEER. ANNUAL meeting of the American Educational Research Association, Seattle, WA. [S.l.: s.n.], 2001. P. 10–14.

PAVLENKO, Liliia V; PAVLENKO, Maksym P; KHOMENKO, Vitalii H. Teaching statistics to future programmers using real data sets and R programming language. In: CEUR Workshop Proceedings. [S.l.: s.n.], 2024. P. 102–117.

QUINTELA-DEL-RÍO, Alejandro; FRANCISCO-FERNÁNDEZ, Mario. Excel templates: a helpful tool for teaching statistics. **The American Statistician**, Taylor & Francis, v. 71, n. 4, p. 317–325, 2017.

QURESHI, Muhammad Imran et al. Digital technologies in education 4.0. Does it enhance the effectiveness of learning? International Association of Online Engineering, 2021.

R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2024. Disponível em: <`https://www.R-project.org/`>.

ROSS, Sheldon M. **Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists**. 6. ed. Cambridge, MA: Academic Press, 2019.

RSTUDIO TEAM. **RStudio: Integrated Development Environment for R**. Boston, MA, 2024. Disponível em: <`http://www.rstudio.com/`>.

RUBIN, Samuel J; ABRAMS, Binyomin. Teaching fundamental skills in Microsoft Excel to first-year students in quantitative analysis. **Journal of chemical education**, ACS Publications, v. 92, n. 11, p. 1840–1845, 2015.

SALSBURG, David. **Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX**. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2024.

SHUQIN, Yang. Applications of Excel in teaching Statistics. **International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education**, v. 14, n. 1, 2005.

STIGLER, Stephen M. **The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.

TAMAM, B; DASARI, D. The use of Geogebra software in teaching mathematics. In: IOP PUBLISHING, 1. JOURNAL of Physics: Conference Series. [S.l.: s.n.], 2021. v. 1882, p. 012042.

UKOBIZABA, Fidele et al. From what makes students dislike mathematics towards its effective teaching practices. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, SciELO Brasil, v. 35, p. 1200–1216, 2021.

VERASZTO, Estéfano Vizconde; GARCÍA, Francisco. Interatividade e Educação: reflexões acerca do potencial educativo das TIC. **Revista Interciência e Sociedade**, p. 85–96, 2011.

WARNER, C Bruce; MEEHAN, Anita M. Microsoft Excel™ as a tool for teaching basic statistics. **Teaching of Psychology**, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 28, n. 4, p. 295–298, 2001.

WICKHAM, Hadley. **ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2016. ISBN 978-3-319-24277-4. Disponível em: <https://ggplot2.tidyverse.org>.

ZEYNIVANDNEZHAD, Fereshteh. INSTRUMENTAL ACTION SCHEMES IN DIFFERENTIAL EQUATIONS USING A COMPUTER ALGEBRA SYSTEM, MAXIMA.