

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA**

**A máquina de adição bilateral**

Rebeca Marjorie Souza dos Santos  
*Magister Scientiae*

**VIÇOSA - MINAS GERAIS**  
**2025**

**REBECA MARJORIE SOUZA DOS SANTOS**

**A máquina de adição bilateral**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Pouya Mehdipour

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

S237m Santos, Rebeca Marjorie Souza dos, 2000-  
2025 A máquina de adição bilateral / Rebeca Marjorie Souza dos Santos. – Viçosa, MG, 2025.  
1 dissertação eletrônica (71 f.)

Inclui apêndice.

Orientador: Pouya Mehdipour Balagafsheh.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática, 2025.

Referências bibliográficas: f. 69-70.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2025.545>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Balagafsheh, Pouya Mehdipour, 1982-. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 515.39

**REBECA MARJORIE SOUZA DOS SANTOS**

**A máquina de adição bilateral**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 6 de agosto de 2025.

Assentimento:

---

Rebeca Marjorie Souza dos Santos  
Autora

---

Pouya Mehdipour  
Orientadora

Essa dissertação foi assinada digitalmente pela autora em 26/08/2025 às 09:09:55 e pela orientadora em 26/08/2025 às 09:16:22. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **4SR1.ALBZ.MHLW** e clique no botão 'Validar documento'.

Dedico à minha família.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar minha eterna gratidão aos meus pais, Luciene e Marcos, por todo o amor, dedicação e apoio incondicional ao longo de toda a minha trajetória. Obrigada por sempre acreditarem em mim, mesmo quando eu mesma duvidava.

Agradeço ao meu irmão Emanuel e à minha tia Cláudia que sempre estiveram ao meu lado, oferecendo conselhos valiosos, ouvindo minhas angústias e alegrias, e me incentivando a seguir em frente.

Ao meu amigo e companheiro Edinailton, sou imensamente grata. O incentivo, a paciência, o carinho e o amor tornaram cada desafio mais suportável e cada conquista mais doce.

À minha orientadora, professora Pouya Mehdipour, meu mais sincero agradecimento pela confiança, orientação e por acreditar no meu potencial. A oportunidade de estudar Sistemas Dinâmicos sob sua orientação foi uma experiência enriquecedora. Sou grata pela paciência, pelas inúmeras horas de dedicação que foram essenciais para o meu amadurecimento acadêmico.

Aos meus colegas de mestrado, que se tornaram amigos, sou imensamente grata. Tive a oportunidade de aprender e crescer ao lado de pessoas extraordinárias, que tornaram cada desafio mais prazeroso e cada conquista mais significativa.

À Universidade Federal de Viçosa, expresse minha gratidão pela oportunidade de realizar a pós-graduação. A todos os professores e membros do Departamento de Matemática, agradeço pela orientação e pelo apoio constante.

Por fim, agradeço aos membros da banca avaliadora, que gentilmente aceitaram o convite para participar deste momento tão importante. Agradeço pelas contribuições valiosas e pela atenção dedicada a este trabalho.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

"O segredo querida Alice, é rodear-se de pessoas que te façam sorrir o coração."  
Alice no país das maravilhas.

## RESUMO

SANTOS, Rebeca Marjorie Souza dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2025. **A máquina de adição bilateral**. Orientadora: Pouya Mehdipour.

Neste trabalho, apresentamos o odômetro, mais especificamente a máquina de adição unilateral, e algumas de suas propriedades dinâmicas topológicas. Utilizando a estrutura do espaço simbólico *Zip*, originalmente proposta como uma extensão do *shift* bilateral, chamada de *Zip-Shift*, construímos uma extensão específica do odômetro denominada máquina de adição bilateral. Para essa nova classe de sistemas, fornecemos uma caracterização em termos de conjugação topológica. Demonstramos que a dinâmica da máquina de adição bilateral, assim como no caso unilateral, é um homeomorfismo e possui a propriedade de minimalidade. Como aplicação dessa estrutura, mostramos que as máquinas de adição bilaterais definidas em espaços *Zip* fornecem exemplos de sistemas dinâmicos que não são conjugados a transformações do tipo *Zip-Shift*. Nosso estudo destaca a minimalidade desses sistemas e seu papel na teoria da dinâmica simbólica.

Palavras-chave: dinâmica simbólica; espaço zip; máquina de adição unilateral; máquina de adição bilateral; zip-shift

## ABSTRACT

SANTOS, Rebeca Marjorie Souza dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2025. **The bilateral adding machine**. Adviser: Pouya Mehdipour.

In this work, we present the odometer, more specifically the one-sided adding machine, along with some of its topological dynamics properties. Using the structure of the symbolic space  $Zip$ , originally proposed as an extension of the bilateral shift, called the *zip shift*, we construct a specific extension of the odometer called the two-sided adding machine. For this new class of systems, we provide a characterization in terms of topological conjugacy. We show that the dynamics of the two-sided adding machine, as in the one-sided case, is a homeomorphism and minimal. As an application of this structure, we demonstrate that such class of maps defined on  $Zip$  spaces are examples of dynamical systems that are not conjugate to transformations of the *zip shift* type. Our study highlights the minimality of these systems and their role in symbolic dynamics.

Keywords: symbolic dynamics; zip space; one-sided adding machine; two-sided adding machine; minimality; zip shift

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .  | <b>9</b>  |
| <b>2</b> | <b>PRELIMINARES</b> . . . . .  | <b>11</b> |
| 2.1      | <b>Espaços Topológicos</b> . . . . .   | <b>11</b> |
| 2.2      | <b>Espaços Métricos</b> . . . . .  | <b>13</b> |
| 2.3      | <b>Sistemas Dinâmicos</b> . . . . .  | <b>14</b> |
| <b>3</b> | <b>ESPAÇO <i>Shift</i> UNILATERAL E BILATERAL</b> . . . . .                      | <b>22</b> |
| 3.1      | <b>Espaço <i>Shift</i> Unilateral</b> . . . . .                                  | <b>22</b> |
| 3.2      | <b>Função <i>Shift</i> Unilateral</b> . . . . .                                  | <b>26</b> |
| 3.3      | <b>Espaço <i>S</i>-completo</b> . . . . .  | <b>27</b> |
| 3.4      | <b>Espaço <i>Shift</i></b> . . . . .   | <b>31</b> |
| <b>4</b> | <b>A CARACTERIZAÇÃO DA MÁQUINA DE ADIÇÃO UNILATERAL</b> . . . . .                | <b>35</b> |
| 4.0.1    | A Máquina de Adição Unilateral . . . . .   | 35        |
| 4.0.2    | A Aplicação da Máquina de Adição Unilateral . . . . .                            | 36        |
| 4.0.3    | Minimalidade e Caracterização via Conjugação Topológica . . . . .                | 39        |
| <b>5</b> | <b><i>Zip - Shift</i> E MÁQUINA DE ADIÇÃO BILATERAL</b> . . . . .                | <b>52</b> |
| 5.1      | <b>Espaço <i>Zip</i></b> . . . . .   | <b>52</b> |
| 5.2      | <b>A Máquina de Adição Bilateral</b> . . . . .                                   | <b>54</b> |
| <b>6</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .  | <b>68</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .   | <b>69</b> |
| <b>A</b> | <b>APÊNDICE</b> . . . . .  | <b>71</b> |
| A.1      | <b>Propriedade da métrica associada à máquina de adição unilateral</b> . . . . . | <b>71</b> |

# 1 Introdução

A máquina de adição ou odômetro, é um exemplo clássico no estudo da dinâmica topológica e dinâmica simbólica. Este exemplo é um sistema minimal e equicontínuo em um espaço métrico compacto de dimensão zero. Formalmente, uma máquina de adição associada à uma sequência de inteiros  $\alpha = (j_1, j_2, \dots)$ , com  $j_i \geq 2$  para cada  $i$ , é um espaço *Shift* no espaço limite inverso  $\Delta_\alpha = \varprojlim \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ , munido com a topologia do produto. A dinâmica da máquina de adição imita a soma na base  $p$ , generalizando a noção de contadores digitais.

A máquina de adição consiste de uma estrutura simples: somar 1 com transporte. Historicamente, este conceito foi materializado pela primeira vez no século XVII por Pascal com o intuito de auxiliar seu pai em cálculos contábeis, esta máquina possuía seis engrenagens e quando o dígito ultrapassava o 9, fazia a próxima engrenagem girar. Entre os séculos XIX-XX, Hensel em [12] formalizou este conceito com os números  $p$ -ádicos. Após isto, entre os anos de 1920 e 1940 matemáticos como Neumann em [20] estudou a estrutura topológica desse objeto, mas apenas entre as décadas de 1950 e 1970 os matemáticos Gustav Hedlund e Walter Gottschalk em [11] introduziram a noção de máquina de adição estudando sistemas dinâmicos que somavam 1 com transporte.

As máquinas de adição possuem diversas aplicações na teoria de sistemas dinâmicos. Elas surgem de modo natural na classificação de sistemas minimais, em particular, como modelos de comportamento regularmente recorrente [4],[7], [21]. Além disso, servem como ferramentas importantes na construção de representações simbólicas de sistemas mais complexos, como *subshifts* e modelos de Bratteli-Vershik [5],[10]. Sua simples estrutura com diversas propriedades topológicas levam à aplicações adicionais na teoria ergódica e na teoria dos números por meio de suas conexões com inteiros  $p$ -ádicos [8], [2], [13]. Neste trabalho, estendemos o odômetro clássico construindo-o dentro de um espaço simbólico conhecido como espaço *Zip* o qual se baseia em dois conjuntos com alfabetos distintos. Espaços simbólicos *Zip* foram introduzidos em [15] com o objetivo de estender a estrutura de espaços *shifts* bilaterais [17], levando ao desenvolvimento do *Zip - Shift* — uma nova forma de dinâmica simbólica projetada para codificar e analisar aplicações não-invertíveis. A existência de partições apropriadas para sistemas não-invertíveis pode implicar à sua conjugação ou semiconjugação com aplicações do *Zip - Shift*, possibilitando o estudo de dinâmicas complexas e caóticas por meio de representações simbólicas.

No entanto, muitos sistemas dinâmicos estão fora da classe daqueles que

podem ser efetivamente modelados por meio do espaço  $Zip - Shift$ . Nesse contexto, a construção e o estudo de aplicações que não são  $Zip - Shift$  tornam-se essenciais. Neste trabalho, com base nas ideias e métodos apresentados em [3], construímos e estudamos uma máquina de adição bilateral que opera em um espaço  $Zip$ . Este exemplo ilustra um homeomorfismo que não é uma função do tipo  $Zip - Shift$ . Além disso, fornecemos as condições necessárias e suficientes para caracterizar estas transformações.

Este trabalho está organizado em 6 capítulos, no capítulo 2 apresentamos uma breve revisão sobre espaços topológicos, espaços métricos e sistemas dinâmicos que serão necessários para a compreensão das propriedades topológicas dos espaços definidos em capítulos posteriores.

O capítulo 3 é dedicado para apresentarmos alguns conceitos básicos da dinâmica simbólica. Trabalhamos com o espaço de sequências unilaterais, algumas de suas propriedades dinâmicas citadas no capítulo 2 e apresentamos uma dinâmica fundamental chamada função  $Shift$ . Com o objetivo de generalizar estes conceitos, trabalhamos com o espaço  $\mathcal{S}$ -completo sobre um alfabeto  $\mathcal{S}$  finito e alguns subespaços do espaço  $\mathcal{S}$ -completo. Por fim, também observamos como é possível descrever o espaço  $\mathcal{S}$ -completo através de palavras proibidas ou sua linguagem.

Já no capítulo 4, conforme [3] introduzimos o conceito de máquina de adição unilateral, apresentamos a aplicação definida neste espaço e provamos que o conjunto da máquina de adição unilateral é minimal para esta aplicação. Por fim, depois de alguns resultados, apresentamos uma caracterização para a máquina de adição bilateral, isto é, uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação contínua definida em um espaço métrico compacto seja topologicamente conjugada à aplicação da máquina de adição unilateral.

No Capítulo 5, introduzimos o espaço  $Zip$ , a partir do qual generalizamos a máquina de adição unilateral. Definimos uma aplicação nesse novo espaço com o intuito de apresentar também uma caracterização para essa expansão. Por fim, no capítulo 6, revisamos os principais objetivos da pesquisa, destacamos os resultados obtidos ao longo dos capítulos anteriores e discutimos sua relevância no contexto da teoria de sistemas dinâmicos. Também apontamos possíveis caminhos para investigações futuras que podem ampliar os resultados aqui desenvolvidos.

## 2 Preliminares

Neste capítulo faremos uma revisão de alguns conceitos que são essenciais para a compreensão deste trabalho. Inicialmente, apresentamos algumas definições e propriedades de espaços topológicos. Para fixar as ideias, discutiremos de forma breve os espaços métricos e alguns de seus resultados. Por fim, apresentamos alguns conceitos gerais sobre sistemas dinâmicos, que serão utilizados até o fim deste trabalho. As referências utilizadas para esse capítulo se encontram em [16], [19] e [4].

### 2.1 Espaços Topológicos

Nesta seção vamos estudar alguns conceitos sobre espaços topológicos.

**Definição 2.1.1.** Uma **topologia** sobre um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  com as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\tau$ ;
2. A união dos elementos de qualquer subcoleção de  $\tau$  pertence a  $\tau$ ;
3. A interseção dos elementos de qualquer subcoleção finita de  $\tau$  pertence a  $\tau$ .

Um conjunto  $X$  para o qual foi definido uma topologia  $\tau$  chama-se **espaço topológico**.

**Definição 2.1.2.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico, dizemos que  $U$  é um **conjunto aberto** em  $X$  se  $U \in \tau$ .

**Definição 2.1.3.** Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $(X, \tau)$  é dito **fechado** se o conjunto  $X \setminus A$  é aberto.

**Observação 2.1.1.** Dizemos que um conjunto  $A$  em um espaço topológico  $(X, \tau)$  é *clopen* se  $A$  for um conjunto aberto e fechado simultaneamente.

**Definição 2.1.4.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . O **fecho** de  $A$ , denotado por  $\bar{A}$ , se define como a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm  $A$ .

**Definição 2.1.5.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico, uma **base** para  $\tau$  é uma coleção  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  chamados **elementos básicos** tais que:

1. Para cada  $x \in X$ , existe pelo menos um elemento básico  $B \in \mathcal{B}$  que contém  $x$ ;
2. Se  $x$  pertence a interseção de dois elementos básicos  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , então existe um elemento básico  $B_3 \in \mathcal{B}$  que contém  $x$  e  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Se  $\mathcal{B}$  satisfaz estas condições, então definimos a topologia  $\tau$  gerada por  $\mathcal{B}$  como segue: um subconjunto  $U$  de  $X$  é dito **aberto** em  $X$  se, para cada  $x \in U$ , existe um elemento básico  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$  e  $B \subset U$ .

**Definição 2.1.6.** Se  $(X, \tau)$  é um espaço topológico, um ponto  $x \in X$  é dito **ponto isolado** de  $X$  se o conjunto  $\{x\}$  é aberto em  $X$ . Um conjunto  $X$  é dito **discreto** se todos os seus pontos forem isolados.

**Lema 2.1.1.** Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma base para uma topologia  $\tau$  sobre  $X$ . Então  $\tau$  é igual a coleção de todas as uniões de elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Lema 2.1.2.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Se  $\mathcal{C}$  é uma coleção de conjuntos abertos de  $X$  tal que, para cada conjunto aberto  $U$  de  $X$  e cada  $x \in U$ , existe um elemento  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $x \in C \subset U$ . Então  $\mathcal{C}$  é uma base para  $\tau$ .

**Definição 2.1.7.** Uma **sub-base**  $S$  para uma topologia  $\tau$  sobre  $X$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$  cuja união é igual a  $X$ . A topologia gerada por esta sub-base  $S$  se define como a coleção  $\tau$  de todas as uniões de interseções finitas de elementos de  $S$ .

**Definição 2.1.8.** Um subconjunto  $A$  de um espaço  $X$  é dito **denso** em  $X$  se  $\bar{A} = X$ .

**Definição 2.1.9.** Uma coleção  $S$  de subconjuntos do espaço  $X$  é uma **cobertura** de  $X$ , se a união dos elementos de  $S$  coincide com  $X$ . Dizemos que  $S$  é uma cobertura aberta de  $X$  se  $S$  é uma cobertura de  $X$  formada por conjuntos abertos de  $X$ .

**Definição 2.1.10.** Um espaço  $X$  é dito **compacto** se para cada cobertura aberta  $S$  de  $X$  seja possível obter uma subcoleção finita que também cobre  $X$ .

Agora que já temos uma noção sobre algumas propriedades que envolvem a topologia de um conjunto, podemos definir o conceito de função contínua entre dois espaços topológicos. Isto é,

**Definição 2.1.11.** Sejam  $(X, \tau_1)$  e  $(Y, \tau_2)$  dois espaços topológicos. Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita **contínua** se para cada subconjunto aberto  $V$  de  $Y$ , o conjunto  $f^{-1}(V)$  é um subconjunto aberto de  $X$ .

**Definição 2.1.12.** Sejam  $(X, \tau_1)$  e  $(Y, \tau_2)$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção. Se a função  $f$  e a função inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  são ambas contínuas, então  $f$  é dito um **homeomorfismo**.

**Teorema 2.1.1.** A imagem de um espaço compacto sob uma aplicação contínua é um espaço compacto.

**Proposição 2.1.1.** Se  $X$  é compacto, toda bijeção contínua  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo.

## 2.2 Espaços Métricos

Com o objetivo de exemplificar conceitos vistos na seção anterior, nesta seção vamos revisar alguns conceitos gerais de espaços métricos que serão utilizados nos capítulos 3 e 4.

**Definição 2.2.1.** Uma **métrica** num conjunto  $X$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in X$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a **distância** de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in X$ :

1.  $d(x, x) = 0$ ;
2. Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Dessa forma, um **espaço métrico** é um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $X$ . A partir desta métrica, é possível definir alguns conceitos como veremos a seguir:

**Definição 2.2.2.** A **bola** de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a; r)$  dos pontos de  $X$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor que  $r$ . Ou seja,

$$B(a; r) = \{x \in X; d(x, a) < r\}.$$

**Proposição 2.2.1.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Então a coleção

$$\mathcal{B} = \{B(x; \varepsilon); x \in X \text{ e } \varepsilon > 0\}$$

é uma base para uma topologia sobre  $X$ , denominada **topologia métrica** induzida por  $d$ .

**Teorema 2.2.1.** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  com  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dois espaços métricos. Então, a continuidade de  $f$  é equivalente ao requisito de que, dado  $x \in X$  e dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Definição 2.2.3.** Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é dita **uniformemente contínua** quando para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existir um  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que, sejam quais forem  $x, y \in X$ ,

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Proposição 2.2.2.** *Se  $X$  é um espaço métrico compacto, então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é uniformemente contínua.*

**Definição 2.2.4.** *Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $(X, d)$  é dita **convergente** se existe  $x \in X$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

*Dizemos que  $x$  é o **limite** de  $(x_n)$  em  $X$ .*

**Definição 2.2.5.** *Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $(X, d)$  é dita **sequência de Cauchy** em  $X$ , se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ para todo } m, n > N.$$

**Definição 2.2.6.** *Dizemos que o espaço métrico  $X$  é **completo** quando toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente.*

**Teorema 2.2.2.** *Todo espaço métrico compacto é completo.*

**Teorema 2.2.3.** *Um espaço métrico  $X$  é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$  de subconjuntos fechados não vazios  $F_n \subset X$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$ , existe um ponto  $a \in X$  tal que  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_n = \{a\}$ .*

## 2.3 Sistemas Dinâmicos

De modo geral, um sistema dinâmico é uma função definida sobre um conjunto  $X$  que é utilizada para analisar o comportamento de um ponto no espaço ao decorrer do tempo. Neste trabalho apresentamos o conceito de sistema dinâmico sobre conjuntos com algumas particularidades.

**Definição 2.3.1.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico (compacto). Um **sistema dinâmico** é uma função  $f : X \rightarrow X$  contínua.*

A dinâmica, isto é, a passagem do tempo, é vista como a iteração dessa função. Dessa forma, se começarmos com um ponto  $x \in X$  (correspondente ao instante zero), depois ele estará em  $f(x)$  (instante um), depois em  $f(f(x))$  (instante dois) e assim sucessivamente. Para simplificar a notação, usaremos

$$f^0(x) = x, \quad f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f(x)), \dots, \quad f^n(x) = f(f^{n-1}(x)), \text{ para } n \geq 1.$$

Respeitando as mesmas condições da definição acima, também podemos considerar um sistema dinâmico que seja um homeomorfismo  $f^{-1} : X \rightarrow X$ . No entanto, a dinâmica agora é vista no passado, assim,

$$f^{-n}(x) = f^{-1}(f^{-n+1}(x)) \text{ para } n \geq 1.$$

**Definição 2.3.2.** A evolução no tempo de um ponto  $x \in X$  sob a ação  $f$ , ou seja,  $x, f(x), \dots, f^n(x), \dots$  é chamada de **órbita positiva** do ponto  $x$

$$\mathcal{O}_f^+(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} f^n(x).$$

Se  $f$  for uma homeomorfismo, podemos definir a **órbita negativa** de um ponto  $x \in X$  ou seja,

$$\mathcal{O}_f^-(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_-} f^n(x).$$

De modo geral, dado  $f$  um homeomorfismo, definimos a **órbita total** de um ponto  $x \in X$  como

$$\mathcal{O}_f^T(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x).$$

**Definição 2.3.3.** Dizemos que  $x \in X$  é um **ponto periódico** de período  $p$ , se  $p$  é o menor inteiro tal que  $f^p(x) = x$ . Quando  $p = 1$ , dizemos que  $x$  é um **ponto fixo** de  $f$ . Denotamos o conjunto de todos os pontos periódicos de  $f$  por  $Per(f)$ .

**Definição 2.3.4.** Dizemos que um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  é **topologicamente transitivo** se, para todo par de abertos  $U$  e  $V$  em  $X$ , existe um inteiro  $n = N(U, V) > 0$  tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Se a equação acima for válida para  $n = N(U, V) < 0$ , o sistema é dito **topologicamente bitransitivo**.

**Proposição 2.3.1.** Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Se  $f$  for topologicamente transitivo, então  $f$  é topologicamente bitransitivo.

*Demonstração.* Como  $f$  é topologicamente transitivo, então para quaisquer dois abertos  $U, V \subset X$ , existe  $n = N(U, V) > 0$  tal que

$$\emptyset \neq f^n(U) \cap V \Rightarrow \emptyset \neq f^{-n}(f^n(U) \cap V) = U \cap f^{-n}(V).$$

Portanto,  $f$  é topologicamente bitransitivo. □

**Definição 2.3.5.** Quando existe uma órbita positiva densa no sistema, dizemos que este sistema é **transitivo**.

**Teorema 2.3.1.** Seja  $X$  um espaço métrico compacto sem pontos isolados. Um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  contínuo é topologicamente transitivo se, e somente se,  $f$  é transitivo.

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ )

Suponhamos que  $f$  seja topologicamente transitivo, vamos mostrar que  $f$  possui uma órbita positiva densa. Como  $X$  é um espaço métrico compacto, então  $X$  é separável, logo,  $X$  possui uma base enumerável  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ . Sendo  $f$  topologicamente transitivo, então para todo aberto  $U \subset X$  e cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$f^n(U) \cap B_i \neq \emptyset \Rightarrow U \cap f^{-n}(B_i) \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

Agora, considerando os conjuntos abertos

$$V_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(B_i).$$

Por (2.1), temos

$$V_i \cap U = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(B_i) \right) \cap U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^{-n}(B_i) \cap U) \neq \emptyset$$

e concluímos que  $V_i$  é denso em  $X$  para cada  $i$ . Sendo  $X$  um conjunto compacto, então é completo e pelo Teorema de Baire [19],

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(B_i) \right)$$

é um conjunto denso em  $X$ . Agora, dado  $x$  um elemento no conjunto acima, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $n > 0$  tal que  $f^n(x) \in B_i$ , ou seja,  $\mathcal{O}_f^+(x) \cap B_i \neq \emptyset$ . Portanto,  $f$  possui uma órbita densa e é transitivo.

( $\Leftarrow$ )

Como  $f$  é transitivo, existe  $x \in X$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$ . Dessa forma, dados  $U, V$  dois abertos em  $X$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_1}(x) \in U$  e existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_2}(x) \in V$ . Suponhamos sem perda de generalidade que  $n_2 > n_1$ , tomando  $n = n_2 - n_1$  obtemos

$$f^n(f^{n_1}(x)) = f^{n_2}(x) \in V.$$

Como  $f^{n_1}(x) \in U$ , então existe  $n = n_2 - n_1$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .  $\square$

**Corolário 2.3.1.1.** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto sem pontos isolados. Um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  que também é um homeomorfismo é topologicamente bitransitivo se, e somente se,  $f$  é bi-transitivo.*

*Demonstração.* O resultado segue do Teorema anterior e da Proposição 2.3.1.  $\square$

**Observação 2.3.1.** *Se considerarmos  $M = \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ , munido com a métrica usual, este é um espaço métrico compacto. Se definirmos  $f(x) = \frac{1}{n}$ , notemos que 1 é um ponto isolado do sistema, então dado  $U$  uma vizinhança de 1, não é possível que exista um inteiro  $n > 0$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo par de abertos  $U$  e  $V$ .*

**Definição 2.3.6.** Um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  é dito **positivamente expansivo** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que para quaisquer dois pontos distintos  $x, y \in X$ , existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$ .

**Definição 2.3.7.** Um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  é **expansivo** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que para quaisquer dois pontos distintos  $x, y \in X$ , existe algum  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$ .

**Definição 2.3.8.** [6] Dizemos que  $f : X \rightarrow X$  tem **sensibilidade às condições iniciais** se existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in X$  e toda vizinhança  $V$  de  $x$  existam  $y \in V$  e  $n \in \mathbb{Z}$  tais que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ .

Em relação à noção de expansividade, para quaisquer dois pontos distintos em  $X$ , as órbitas sempre se separam. Por outro lado, em relação a sensibilidade às condições iniciais, para cada ponto em  $X$ , em todas as vizinhanças deste ponto existem outros pontos cujas órbitas se separam. Dessa forma, podemos afirmar que toda função expansiva possui sensibilidade às condições iniciais.

**Proposição 2.3.2.** Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Se  $f$  for expansiva, então  $f$  tem sensibilidade às condições iniciais.

*Demonstração.* Consideremos  $f$  uma função expansiva, queremos mostrar que  $f$  possui sensibilidade às condições iniciais. De fato, seja  $x$  um ponto arbitrário de  $X$  e  $V_x$  uma vizinhança de  $x$ . Como  $V_x$  é uma vizinhança qualquer, então podemos tomar  $y \neq x$  em  $V_x$ . Por hipótese,  $f$  é expansiva, logo, existe  $\varepsilon > 0$  e algum iterado  $k \in \mathbb{Z}$  tais que  $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \varepsilon$  como queríamos demonstrar.  $\square$

Agora vamos introduzir o conceito de caos em relação ao nosso objeto de estudo, ou seja, um comportamento imprevisível característico de alguns sistemas dinâmicos. Neste texto, trabalharemos com a definição de caos segundo Devaney, introduzida em 1989 [6].

**Definição 2.3.9.** Um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  é dito **caótico** se

1. o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $X$ ;
2.  $f$  é topologicamente transitivo;
3.  $f$  tem sensibilidade às condições iniciais.

**Definição 2.3.10.** Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico. Um conjunto  $A \subset X$  é dito  **$f$ -invariante** se  $f^{-1}(A) = A$ .

**Proposição 2.3.3.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função invertível. As seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $A$  é um conjunto  $f$ -invariante;
2.  $f(A) = A$ ;
3.  $f^n(A) = A$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.*  $1 \Rightarrow 2$ :

Se  $A$  for  $f$ -invariante, então  $f^{-1}(A) = A$ , como  $f$  é invertível, então  $A = f(A)$ .

$2 \Rightarrow 3$ :

Por hipótese,

$$f(A) = A \Rightarrow f^2(A) = f(A) = A.$$

Vamos supor que para  $n \geq 0$ ,  $f^{n-1}(A) = A$ , notemos:

$$f^n(A) = f^{n-1+1}(A) = f^{n-1}(f(A)) = f^{n-1}(A) = A.$$

Logo,  $f^n(A) = A$ . Para  $n < 0$  basta aplicar o mesmo raciocínio para  $-n$ .

$3 \Rightarrow 1$ :

Se  $f^n(A) = A$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , então para  $n = -1$  obtemos  $f^{-1}(A) = A$ . □

**Lema 2.3.1.** *Seja  $A \subset X$  e  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo.  $A$  é um conjunto  $f$ -invariante se, e somente se,  $A$  é a união das órbitas de seus pontos. Mais ainda,  $\mathcal{O}_f^T(x)$  é sempre um conjunto  $f$ -invariante para qualquer  $x \in X$ .*

*Demonstração.* Primeiro, vamos mostrar que a órbita total de um ponto  $x \in X$  é um conjunto  $f$ -invariante. Como  $f$  é um homeomorfismo, pela Proposição 2.3.3, basta mostrarmos que  $f(\mathcal{O}_f^T(x)) = \mathcal{O}_f^T(x)$ . Com efeito, se  $y \in f(\mathcal{O}_f^T(x))$ , então existe  $z \in \mathcal{O}_f^T(x)$  tal que  $y = f(z) = f^n(x)$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $f(y) = f^{n+1}(x) \in \mathcal{O}_f^T(x)$ . Por outro lado, se  $y \in \mathcal{O}_f^T(x)$ , então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $y = f^n(x)$ . E,

$$y = f^n(x) = f(f^{n-1}(x)).$$

Como  $f^{n-1}(x) \in \mathcal{O}_f^T(x)$ , então  $y \in f(\mathcal{O}_f^T(x))$ . Portanto,  $f(\mathcal{O}_f^T(x)) = \mathcal{O}_f^T(x)$  como queríamos demonstrar.

( $\Rightarrow$ )

Suponhamos que  $A$  é um conjunto  $f$ -invariante. Se  $x \in A$ , então  $f^n(x) \in A$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{O}_f^T(x) \subset A$ . Assim, para todo  $x \in A$ , então  $A \subset \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f^T(x)$ . E, sendo  $f$  um homeomorfismo, pela Proposição 2.3.3, dado  $x \in A$ ,  $f^n(x) \in A$  para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim, a órbita de qualquer ponto em  $A$  está contida em  $A$ , isto é,  $\bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f^T(x) \subset A$ . Portanto,  $A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f^T(x)$ .

( $\Leftarrow$ )

Suponhamos que  $A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f^T(x)$ , dado  $x \in A$ ,  $\mathcal{O}_f^T(x)$  é um conjunto  $f$ -invariante. Assim,

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f^T(x)\right) = \bigcup_{x \in A} f^{-1}(\mathcal{O}_f^T(x)) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f^T(x) = A.$$

□

**Proposição 2.3.4.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Dado  $A \subset X$ , se  $A$  é  $f$ -invariante então  $\overline{A}$  é  $f$ -invariante.*

*Demonstração.* Como  $A$  é  $f$ -invariante, pela Proposição 2.3.3  $f(A) = A$ , logo,  $\overline{f(A)} = \overline{A}$ . Agora, como  $f$  é um homeomorfismo, então  $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ . Portanto,  $f(\overline{A}) = \overline{A}$  e  $\overline{A}$  é  $f$ -invariante.

□

**Definição 2.3.11.** *Um conjunto  $A \subset X$  é dito  $f$ -**minimal** para  $f : X \rightarrow X$  se*

1.  $A$  é fechado e  $f$ -invariante;
2. se  $B \subset A$  é um subconjunto fechado e  $f$ -invariante, então  $B = \emptyset$  ou  $B = A$ .

**Proposição 2.3.5.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo.  $X$  é um conjunto  $f$ -minimal se, e somente se, todos os pontos de  $X$  possuem órbita positiva densa em  $X$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que exista  $y \in X$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_f^T(y)} \neq X$ . Pela Proposição 2.3.3,  $\mathcal{O}_f^T(y)$  é um conjunto  $f$ -invariante, logo,  $\overline{\mathcal{O}_f^T(y)}$  também é  $f$ -invariante. Como  $\overline{\mathcal{O}_f^T(y)} \subset X$ , então  $X$  não é  $f$ -minimal. Por outro lado, se existe  $A \subset X$  não vazio  $f$ -invariante e fechado. Dado  $y \in A$ ,  $\overline{\mathcal{O}_f^T(y)} \subset A$  pois  $A$  é  $f$ -invariante. Por hipótese,  $\overline{\mathcal{O}_f^T(y)} = X$ , daí,

$$X = \overline{\mathcal{O}_f^T(y)} \subset A \subset X, \Rightarrow A = X.$$

Absurdo, logo  $X$  é  $f$ -minimal.

□

**Observação 2.3.2.** *No Teorema 2.3.1 mostramos que quando  $(X, f)$  não possui pontos isolados e é topologicamente transitivo, então possui órbita positiva densa. Se  $f$  é um homeomorfismo, o Corolário 2.3.1.1 nos afirma que  $f$  também é bitransitivo. Ou seja, a existência de uma órbita positiva densa garante a existência de uma órbita total densa quando  $f$  é homeomorfismo.*

**Proposição 2.3.6.** *Sejam  $A, B \subset X$  ambos não vazios. Se  $A$  e  $B$  são  $f$ -minimais, então  $A = B$  ou  $A \cap B = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Como  $A$  e  $B$  são  $f$ -minimais, então

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = A \cap B.$$

Notemos que,  $A \cap B$  é fechado,  $f$ -invariante e está contido em  $A$  e  $B$  simultaneamente. Absurdo! Portanto,  $A = B$  ou  $A \cap B = \emptyset$ .

□

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Então todo conjunto  $K \subset X$  não vazio, fechado e  $f$ -invariante contém um subconjunto minimal não vazio.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F}$  a coleção de todos os subconjuntos não vazios de  $X$  que são fechados e  $f$ -invariantes. Como  $X \in \mathcal{F}$ , então  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Definimos uma ordem parcial  $\leq$  em  $\mathcal{F}$  dada por:

$$K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_2 \subseteq K_1.$$

Como toda cadeia  $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$  em  $\mathcal{F}$  possui um menor elemento, isto é,

$$K^* = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha.$$

Mostremos que  $K^* \in \mathcal{F}$ :

1.  $K^* \neq \emptyset$  pelo Teorema da Interseção de Cantor;
2.  $K^*$  é fechado pois é a interseção arbitrária de conjuntos fechados;
3.  $K^*$  é  $f$ -invariante pois

$$f^{-1}(K^*) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(K_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = K^*.$$

Assim, pelo Lema de Zorn,  $\mathcal{F}$  possui um elemento mínimo  $M$ . Por fim, suponhamos que exista  $J \subset M$  o qual é  $f$ -minimal em  $\mathcal{F}$ . Mas isto contradiz a hipótese de  $M$  ser mínimo na ordem parcial  $\leq$ . Portanto, o elemento mínimo  $M$  é o elemento  $f$ -minimal em  $X$ .  $\square$

**Definição 2.3.12.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  duas aplicações. Uma **conjugação topológica** entre  $f$  e  $g$  é um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  que satisfaz*

$$h \circ f = g \circ h.$$

**Proposição 2.3.7.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  transformações topologicamente conjugadas. Se  $\mathcal{O}_f^+(x)$  representa a órbita positiva de um ponto em  $X$  por  $f$ , então  $h(\mathcal{O}_f^+(x))$  representa a órbita positiva de um ponto em  $Y$  por  $g$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas, então existe  $h : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo tal que  $h \circ f = g \circ h$  e  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ . Assim,

$$f^2 = (h^{-1} \circ g \circ h) \circ h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^2 \circ h.$$

Se  $f^{n-1} = h^{-1} \circ g^{n-1} \circ h$  com  $n \in \mathbb{N}$ , então, como

$$f^n = f^{n-1+1} = f^{n-1} \circ f = (h^{-1} \circ g^{n-1} \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) = h^{-1} \circ g^n \circ h.$$

Logo,  $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$  com  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Notemos:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{O}_f^+(x)) &= \{y \in Y; y = h(z), z \in \mathcal{O}_f^+(x)\} \\ &= \{y \in Y; \exists n \in \mathbb{Z}_+, y = h(f^n(x))\} \\ &= \{y \in Y; \exists n \in \mathbb{Z}_+, y = g^n(h(x))\} \\ &= \mathcal{O}_g^+(h(x)) \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

**Observação 2.3.3.** *Pela Proposição anterior, podemos concluir que a conjugação topológica preserva órbitas, logo, também preserva órbitas densas e órbitas periódicas.*

**Proposição 2.3.8.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos compactos e  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  transformações topologicamente conjugadas. Se  $f$  é positivamente expansiva então  $g$  também é positivamente expansiva.*

*Demonstração.* Como  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas, então existe  $h : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo tal que  $h \circ f = g \circ h$ . Sejam  $y_1, y_2 \in Y$  distintos, então  $h^{-1}(y_1) = x_1$  e  $h^{-1}(y_2) = x_2$  também são distintos. Suponhamos que  $f$  seja positivamente expansiva, então existe  $\varepsilon > 0$  tal que se

$$x_1, x_2 \in X \text{ e } d_X(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Por hipótese,  $h^{-1}$  é contínua, então para  $y_1, y_2 \in Y$  podemos escolher  $\delta > 0$  tal que

$$d_Y(g^n(y_1), g^n(y_2)) < \delta \Rightarrow d_X(h^{-1}(g^n(y_1)), h^{-1}(g^n(y_2))) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $h \circ f = g \circ h$  então  $f^n \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^n$ . Logo,

$$d_X(h^{-1}(g^n(y_1)), h^{-1}(g^n(y_2))) = d_X(f^n(h^{-1}(y_1)), f^n(h^{-1}(y_2))) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo  $f$  positivamente expansiva, então  $h^{-1}(y_1) = h^{-1}(y_2)$  e sendo  $h$  um homeomorfismo,  $y_1 = y_2$ . Portanto, podemos concluir que  $g$  também é positivamente expansiva. □

**Observação 2.3.4.** *A conjugação topológica também preserva expansividade. A demonstração é análoga à demonstração da Proposição acima.*

**Definição 2.3.13.** *Dizemos que a transformação  $f : X \rightarrow X$  é **semiconjugada** à  $g : Y \rightarrow Y$  se existe  $\pi : X \rightarrow Y$  contínua e sobrejetora e que satisfaça*

$$\pi \circ f = g \circ \pi.$$

Podemos observar que o conceito de semiconjugação é mais fraco, já que  $\pi$  não necessita ser bijetora tão pouco possuir inversa contínua.

## 3 Espaço *Shift* Unilateral e Bilateral

Neste capítulo, vamos apresentar inicialmente o espaço de sequências unilateral, bilateral e algumas propriedades que podemos obter desses espaços quando os associamos à dinâmica *Shift*. Em seguida, generalizamos os conceitos dados anteriormente, a fim de definir o espaço  $\mathcal{S}$ -completo, com isso, abordamos conceitos particulares como espaço *Shift* e *Shift* do tipo finito. Nesse capítulo, utilizamos como referência [1], [14] e [17].

### 3.1 Espaço *Shift* Unilateral

Nesta seção apresentamos o espaço de todas as sequências unilaterais sobre um alfabeto finito.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $S = \{0, \dots, n-1\}$  um conjunto de símbolos chamado **alfabeto**. O espaço*

$$S^{\mathbb{Z}_+} = \{(x_0, x_1, x_2, \dots); x_i \in S \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}_+\}$$

*é formado por todas sequências infinitas que assumem entradas em  $S$ . Denotamos este espaço por  $\Sigma_S^+$ .*

**Exemplo 3.1.1.** *Definindo  $S = \{0, 1\}$ , um elemento  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \Sigma_S^+$  tem a forma*

$$x = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, \dots).$$

Para facilitar a notação, denotaremos a sequência  $(0, 0, 0, \dots)$  por  $0^{+\infty}$ . É possível indicar a repetição de um bloco, isto é, uma sequência finita de símbolos, usando esta mesma notação, assim,  $(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots) = 010^{+\infty}$ . Também é possível representarmos a sequência  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$  por  $010001\dots$ . Definimos o seguinte conceito:

**Definição 3.1.2.** *Dadas duas sequências  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ , definimos*

$$N(x, y) = \min_{i \in \mathbb{Z}_+} \{x_i \neq y_i\}.$$

*Por convenção, adotamos que  $N(x, x) = +\infty$ .*

De modo geral,  $N(x, y)$  descreve a primeira coordenada (da esquerda para à direita) onde as sequências  $x$  e  $y$  assumem valores distintos.

**Definição 3.1.3.** Seja  $0 < \lambda < 1$ . Definimos a seguinte métrica entre duas sequências  $x$  e  $y$  por

$$d(x, y) = \lambda^{N(x, y)}.$$

**Proposição 3.1.1.** A distância definida acima é uma métrica.

*Demonstração.*

1.  $d(x, x) = \lambda^{+\infty} = 0$
2.  $d(x, y) = \lambda^{N(x, y)} = \lambda^{N(y, x)} = d(y, x)$
3. Se  $x \neq y$  então as sequências  $x$  e  $y$  diferem em alguma coordenada, suponhamos na  $i$ -ésima. Daí,

$$d(x, y) = \lambda^i > 0.$$

4. Devemos mostrar que vale a desigualdade triangular, isto é

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \text{ para quaisquer } x, y, z \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+.$$

De fato, se  $d(x, z) \leq d(x, y)$  então  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . Por outro lado, se  $d(x, z) > d(x, y)$ , então  $N(x, z) < N(x, y)$ . Sabemos que as sequências  $x$  e  $z$  diferem na coordenada  $N(x, z)$  e as sequências  $x$  e  $y$  diferem na coordenada  $N(x, y)$ . Como  $N(x, z) < N(x, y)$  então as sequências  $y$  e  $z$  diferem na coordenada  $N(x, z)$ , logo,  $N(y, z) = N(x, z)$ , daí,  $d(y, z) = d(x, z)$ . Pelo Item 3, obtemos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

□

De acordo com a Proposição 2.2.1, podemos estudar o espaço métrico  $(\Sigma_{\mathcal{S}}^+, d)$  como um espaço topológico. As bolas abertas neste espaço serão definidas da seguinte forma:

**Definição 3.1.4.** Seja  $x \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$  uma sequência, consideremos a bola

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+; d(x, y) < \varepsilon\}.$$

**Proposição 3.1.2.** O espaço de sequências  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$  com  $S = \{0, \dots, n-1\}$  é um espaço compacto.

*Demonstração.* A demonstração segue da demonstração do teorema de Tychonoff em [19]. □

**Definição 3.1.5.** Definimos  $W_n$  como o espaço de **palavras** ou **blocos** de comprimento  $n$  da seguinte forma:

$$W_n = \{(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}); w_i \in \mathcal{S}\}.$$

**Exemplo 3.1.2.** Considerando  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . A sequência  $w = (0, 1, 2, 1, 3)$  é uma palavra de comprimento 5 em  $\Sigma_S^+$ .

**Definição 3.1.6.** Um **cilindro** é um conjunto definido por

$$C_{i_1, \dots, i_k}^{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}} = \{x \in \Sigma_S; x_{i_j} = w_{i_j}, j = 1, \dots, k\},$$

com  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

**Proposição 3.1.3.**

$$C_{i_1, \dots, i_k}^{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}} = \bigcup_{\substack{n_j \in \mathcal{S} \\ j \notin \{i_1, \dots, i_k\}}} C_{0, \dots, m}^{n_0, \dots, n_m}$$

com  $m = \max\{i_1, \dots, i_k\}$  e  $w_{i_j} = n_{i_j}$  para  $j = 1, \dots, k$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in C_{i_1, \dots, i_k}^{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}}$ , então  $x_{i_j} = w_{i_j}$  para  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Como  $m = \max\{i_1, \dots, i_k\}$ , então as  $m + 1$  primeiras coordenadas de  $x$  são  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . Para cada  $j \in \{0, \dots, m\}$ , podemos definir  $n_j = x_j$ , dessa forma,

$$j \in \{i_1, \dots, i_k\} \Rightarrow n_j = w_{i_j}$$

$$j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \Rightarrow n_j = x_j.$$

Concluimos que  $x \in C_{0, \dots, m}^{n_0, \dots, n_m}$  o qual é um dos cilindros da união. Por outro lado, se  $x$  é um elemento da união, então existe um cilindro da forma  $C_{0, \dots, m}^{n_0, \dots, n_m}$  que contém  $x$ . Por definição,

$$j \in \{i_1, \dots, i_k\} \Rightarrow n_j = w_{i_j} \Rightarrow x_j = w_{i_j}$$

$$j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \Rightarrow x_j = n_j$$

Assim,  $x \in C_{i_1, \dots, i_k}^{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}}$ . □

**Exemplo 3.1.3.** Considerando  $S = \{0, 1, 2\}$ . O cilindro  $C_{2,3,4}^{0,2,1}$  pode ser reescrito da seguinte forma

$$C_{2,3,4}^{0,2,1} = C_{0,1,2,3,4}^{0,0,2,1,1} \cup C_{0,1,2,3,4}^{0,1,2,1,1} \cup C_{0,1,2,3,4}^{1,0,2,1,1} \cup C_{0,1,2,3,4}^{1,1,2,1,1}.$$

**Proposição 3.1.4.** A coleção de todos cilindros forma uma base topológica de  $\Sigma_S^+$ .

*Demonstração.* Consideremos  $\mathcal{C}$  a coleção de todos os cilindros. Pela proposição 3.1.3, basta mostrarmos que a afirmação é válida para cilindros que iniciam na coordenada 0. De fato,

1. Dada  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  uma sequência qualquer em  $\Sigma_S^+$ , existe  $C_{0,1, \dots, n-1}^{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}}$  que contém  $x$ .

2. Suponhamos que  $C_{0,\dots,n-1}^{w_0,\dots,w_{n-1}} \cap C_{0,\dots,m-1}^{v_0,\dots,v_{m-1}} \neq \emptyset$ , logo, existe  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nesta interseção. Dessa forma, para algum  $k \leq \min\{n, m\}$ , temos

$$w_0 = v_0, w_1 = v_1, \dots, w_{k-1} = v_{k-1}.$$

Assim,  $x \in C_{0,\dots,k-1}^{w_0,\dots,w_{k-1}} \subset C_{0,\dots,n-1}^{w_0,\dots,w_{n-1}} \cap C_{0,\dots,m-1}^{v_0,\dots,v_{m-1}}$ .

□

**Teorema 3.1.1.** *A coleção de todos os cilindros em  $\Sigma_S^+$  gera uma topologia equivalente a topologia gerada pela métrica.*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.1.4, podemos considerar a seguinte base

$$\mathcal{C} = \{C_{i_1,\dots,i_k}^{w_{i_1},\dots,w_{i_k}}; x_{i_j} = w_{i_j}, j = 1, \dots, k\}$$

com  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . E considerando a métrica  $d$  definida anteriormente e  $\varepsilon > 0$ , definimos a seguinte base

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon); x \in \Sigma_S^+\}.$$

1.  $\tau_{\mathcal{C}} \subset \tau_{\mathcal{B}}$ :

Devemos mostrar que  $C_{i_1,\dots,i_k}^{w_{i_1},\dots,w_{i_k}} \in \mathcal{C}$  é aberto em  $\tau_{\mathcal{B}}$ . Pela Proposição 3.1.3, se  $x \in C_{i_1,\dots,i_k}^{w_{i_1},\dots,w_{i_k}}$ , então existe um cilindro na união tal que  $x \in C_{0,\dots,m}^{n_0,\dots,n_m}$  com  $m = \max\{i_1, \dots, i_k\}$  e  $w_{i_j} = n_{i_j}$  para  $j = 1, \dots, k$ . Seja  $x \in C_{0,\dots,m}^{n_0,\dots,n_m}$ , tomando  $\varepsilon = \lambda^{-m+1}$  então

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \Sigma_S^+; d(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \Sigma_S^+; y_0 = n_0, \dots, y_m = n_m\} = C_{0,\dots,m}^{n_0,\dots,n_m}.$$

Portanto, o cilindro  $C_{0,\dots,m}^{n_0,\dots,n_m}$  contem uma bola aberta, daí,  $C_{0,\dots,m}^{n_0,\dots,n_m}$  é aberto em  $\tau_{\mathcal{B}}$ .

2.  $\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau_{\mathcal{C}}$ :

Agora, devemos mostrar que  $B(x, \varepsilon) \in \tau_{\mathcal{C}}$ . Consideremos a bola  $B(x, \varepsilon)$ , escolhendo  $\lambda^{-m+1} < \varepsilon$  temos

$$C_{0,\dots,m}^{n_0,\dots,n_m} = \{y \in \Sigma_S^+; y_0 = n_0, \dots, y_m = n_m\} \subseteq B(x, \varepsilon).$$

Portanto,  $B(x, \varepsilon)$  é aberto em  $\tau_{\mathcal{C}}$ .

□

**Observação 3.1.1.** *Os cilindros são conjuntos **clopens**, basta notarmos que o complementar de um cilindro é determinado pela união de cilindros, logo, é um conjunto aberto.*

## 3.2 Função *Shift* Unilateral

Nesta seção vamos estudar um exemplo de um sistema dinâmico. Para esta função, vamos trabalhar algumas características vista na primeira seção deste capítulo e comparar alguns resultados interessantes.

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Considerando o espaço de sequências  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$ , podemos definir um sistema dinâmico  $\sigma_+ : \Sigma_{\mathcal{S}}^+ \rightarrow \Sigma_{\mathcal{S}}^+$  dado por  $\sigma_+((x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Esta função é conhecida como função **Shift unilateral**.*

**Exemplo 3.2.1.** *Seja  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ , vamos considerar o seguinte cilindro  $C_{0,3,5}^{0,1,1}$ , sabemos que os elementos desse conjunto são da forma  $x = (0, x_1, x_2, 1, x_4, 1, x_6, \dots)$ . Calculando a pré-imagem deste cilindro pela definição, obtemos*

$$\begin{aligned} \sigma_+^{-1}(C_{0,3,5}^{0,1,1}) &= \{x \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+ / \sigma_+(x) \in C_{0,3,5}^{0,1,1}\} \\ &= \{(0, 0, x_2, x_3, 0, x_5, 1, x_7, \dots), (1, 0, x_2, x_3, 0, x_5, 1, x_7, \dots) / x_i \in \mathcal{S}\} \\ &= C_{0,1,4,6}^{0,0,0,1} \cup C_{0,1,4,6}^{1,0,0,1} \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.1.** *A função *Shift* unilateral é uma função contínua e sobrejetora.*

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , escolhemos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda^N < \varepsilon$  e  $\delta = \lambda^{N+1}$ . Sejam  $x, y \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$  de modo que  $d(x, y) < \delta$ , então estas sequências coincidem até a coordenada  $N+1$ . Aplicando a função *Shift* unilateral,  $\sigma_+(x)$  e  $\sigma_+(y)$  coincidem até a coordenada  $N$ . Assim,

$$d(\sigma_+(x), \sigma_+(y)) \leq \lambda^N < \varepsilon.$$

Portanto,  $\sigma_+$  é uniformemente contínua, logo, é contínua.

Para mostrarmos que  $\sigma_+$  é sobrejetora, basta notarmos que dado  $y \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$ , existe uma sequência  $x = (0, x_1, x_2, \dots) \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$  tal que

$$\sigma_+(x) = \sigma_+((0, x_1, x_2, \dots)) = (x_1, x_2, \dots) = y.$$

□

**Observação 3.2.1.** *A função *Shift* não é injetora pois,*

$$\sigma_+(011^{+\infty}) = 110^{+\infty} = \sigma_+(1110\ 110^{+\infty})$$

*apesar das sequências  $011^{+\infty}$  e  $1110\ 110^{+\infty}$  serem distintas.*

**Proposição 3.2.1.** *A função *Shift* unilateral é um sistema dinâmico com propriedade de transitividade.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{S} = \{0, \dots, n-1\}$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Pela Proposição 3.1.2, sabemos que  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$  é um conjunto compacto. Basta então mostrarmos que  $\sigma_+$  possui uma órbita densa. De fato, consideremos a sequência

$$x = (\underline{0} \underline{1} \dots \underline{n-1} \underline{00} \underline{01} \dots \underline{0n-1} \underline{12} \dots \underline{1n-1} \dots \underline{000} \dots),$$

onde a sublinha foi usada somente para enfatizar blocos na sequência. Notemos que,  $\mathcal{O}_{\sigma_+}^+(x)$  é densa pois, tomando  $y \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$  tal que  $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ . Sabemos que a coordenada  $y_0$  assume algum símbolo em  $\mathcal{S}$ , logo, usando  $x$  ou algum iterado  $\sigma_+^n(x)$  com  $n \in \mathbb{N}$  podemos garantir que a distância é menor ou igual a 1. Para a distância ser menor ou igual a  $\lambda$ , basta que a segunda coordenada de  $x$  ou  $\sigma_+^n(x)$  coincidam na segunda coordenada, o que acontece pois  $x$  possui todas as palavras de comprimento 2, inclusive  $y_0y_1$ . Portanto,  $\sigma_+$  possui propriedade de transitividade.  $\square$

**Proposição 3.2.2.** *A função *Shift unilateral* é positivamente expansiva.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$  com  $x \neq y$ , então existe  $k \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $x_k \neq y_k$ , logo,  $d(x, y) = \lambda^k$ . Aplicando a função *Shift*  $k$ -vezes, obtemos

$$\sigma_+^k(x) = (x_k, x_{k+1}, \dots), \sigma_+^k(y) = (y_k, y_{k+1}, \dots)$$

Assim,  $d(\sigma_+^k(x), \sigma_+^k(y)) = 1$ . Portanto, para  $\varepsilon = 1$ ,  $d(\sigma_+^k(x), \sigma_+^k(y)) \geq 1$ .  $\square$

### 3.3 Espaço $\mathcal{S}$ -completo

Nesta seção vamos generalizar alguns conceitos visto na seção anterior, isto é, vamos estudar as coleções de sequências bi-infinitas de símbolos de um alfabeto  $\mathcal{S}$  que seja finito.

**Definição 3.3.1.** *Seja  $\mathcal{S}$  um alfabeto finito. Uma sequência de símbolos sobre  $\mathcal{S}$  é denotada por  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  ou por*

$$x = (\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots)$$

onde cada  $x_i \in \mathcal{S}$ . O símbolo  $x_i$  é a  $i$ -ésima coordenada de  $x$  o qual pode ser descrito por suas coordenadas ou como um “vetor infinito”.

Ao escrevermos uma sequência, precisamos especificar a coordenada  $x_0$ , assim, utilizamos “;” para separar coordenadas  $x_i$  para  $i \geq 0$ . Assim,

$$x = (\dots x_{-2} x_{-1}; x_0 x_1 x_2 \dots)$$

**Definição 3.3.2.** [17] Se  $S$  é um alfabeto finito então o espaço  $S$ -completo<sup>1</sup> é a coleção de todas as sequências bi-infinitas de símbolos de  $S$ . Denotado por

$$\Sigma_S = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}; x_i \in S, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Também denotamos o espaço  $S$ -completo por  $S^{\mathbb{Z}}$ , esta é a notação matemática para o conjunto de todas as funções de  $\mathbb{Z}$  para  $S$  e tais funções podem ser vistas como sequências bi-infinitas de elementos de  $S$ .

**Observação 3.3.1.** Quando desejamos enfatizar o índice  $i$  em uma sequência, escrevemos  $x_{[i]}$ .

**Definição 3.3.3.** Um **bloco** (ou **palavra**) sobre  $S$  é uma sequência finita de símbolos de  $S$ . Chamamos de **bloco vazio** uma sequência finita sem símbolos e denotamos por  $\varepsilon$ , também definimos o comprimento de um bloco  $u$ ,  $|u|$ , como o número de símbolos que  $u$  contém.

**Exemplo 3.3.1.** Consideremos  $S$  um alfabeto finito. Um bloco sobre  $S$  é da forma

$$u = a_1 a_2 \dots a_k$$

onde  $a_i \in S$ . Não é necessário separar as coordenadas do bloco por pontuações e  $|u| = k$ . Se  $u = \varepsilon$  então  $|u| = 0$ .

Um  $k$ -bloco é um bloco de comprimento  $k$  e o conjunto de todos os blocos sobre  $\Sigma_S$  é denotado por  $\Sigma_S^k$ . Um sub-bloco de  $u = a_1 a_2 \dots a_k$  é um bloco da forma  $a_i a_{i+1} \dots a_j$  com  $1 \leq i \leq j \leq k$ . Por convenção, o bloco vazio  $\varepsilon$  é sub-bloco de qualquer bloco.

**Definição 3.3.4.** Dados  $x, y \in \Sigma_S$ , definimos

$$M(x, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \{ |k|; x_k \neq y_k \}.$$

Caso  $x = y$  então  $M(x, y) = +\infty$ . Assim, considerando  $0 < \lambda < 1$ , a distância entre as sequências é dada por

$$d(x, y) = \lambda^{M(x, y)}.$$

**Observação 3.3.2.** Por simplicidade, vamos considerar  $\lambda = \frac{1}{n}$  onde  $n = |S|$ .

**Definição 3.3.5.** Dada uma palavra  $w$  com  $|w| = m + n$ . Definimos o cilindro por

$$C_{-m, \dots, 0, \dots, n}^{w-m, \dots, w_0, \dots, w_n} = \{x \in \Sigma_S; x_{-m} = w_m, \dots, x_0 = w_0, \dots, x_n = w_n\}.$$

**Teorema 3.3.1.** A coleção de todos os cilindros do espaço de sequências  $(\Sigma_S, d)$  gera uma topologia equivalente a topologia gerada pela métrica  $d$ .

<sup>1</sup> Full  $S$ -Shift

*Demonstração.* A prova é análoga ao caso unilateral.  $\square$

Notemos que, utilizando as definições da Seção 2.2 do Capítulo 2, os cilindros no espaço de sequências bilaterais são conjuntos *clopens* também.

A coordenada  $i$  em uma sequência  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  também pode ser considerada como indicação de tempo, por exemplo, a coordenada no tempo 0 de  $x$  é  $x_0$ . A passagem de tempo corresponde a deslocar a sequência uma posição para a esquerda, e isso resulta em uma aplicação do espaço  $\mathcal{S}$ -completo nele mesmo.

**Definição 3.3.6.** A **função Shift bilateral**  $\sigma$  no espaço  $\mathcal{S}$ -completo  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  mapeia um ponto  $x$  para o ponto  $y = \sigma(x)$  cuja coordenada é  $y_i = x_{i+1}$ .

**Proposição 3.3.1.** A função Shift bilateral é um homeomorfismo.

*Demonstração.* Para mostrar que  $\sigma$  é um homeomorfismo, mostraremos os itens abaixo. Com efeito,

1. Seja  $C_{-m, \dots, 0, \dots, n}^{w_{-m}, \dots, w_0, \dots, w_n}$  um cilindro de tamanho  $m + n + 1$ . Notemos:

$$\sigma^{-1} \left( C_{-m, \dots, 0, \dots, n}^{w_{-m}, \dots, w_0, \dots, w_n} \right) = \left\{ x \in \Sigma_{\mathcal{S}} ; \sigma(x) \in C_{-m, \dots, 0, \dots, n}^{w_{-m}, \dots, w_0, \dots, w_n} \right\}.$$

Assim, dado  $x$  no conjunto acima

$$[\sigma(x)]_{-m} = w_{-m}, [\sigma(x)]_{-m+1} = w_{-m+1}, \dots, [\sigma(x)]_{n-1} = w_{n-1}, [\sigma(x)]_n = w_n$$

e pela definição da função,  $[\sigma(x)]_i = x_{i+1}$ , escrevemos

$$x_{-m+1} = w_{-m}, x_{-m+2} = w_{-m+1}, \dots, x_n = w_{n-1}, x_{n+1} = w_n.$$

Como não temos restrição para a coordenada  $-m$ , então

$$\sigma^{-1} \left( C_{-m, \dots, 0, \dots, n}^{w_{-m}, \dots, w_0, \dots, w_n} \right) = \bigcup_{a \in \mathcal{S}} C_{-m, -m+1, \dots, 0, \dots, n+1}^{a, w_{-m}, \dots, w_0, \dots, w_n}.$$

2. Diferente do caso unilateral, a função Shift definida neste espaço é uma função injetora. De fato, consideremos  $x = (x_n), y = (y_n) \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  tal que  $[\sigma(x)]_n = [\sigma(y)]_n$ . Daí,

$$\begin{aligned} [\sigma(x)]_n = [\sigma(y)]_n &\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} \\ &\Rightarrow \dots, x_{-1} = y_{-1}, x_0 = y_0, x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

3. Queremos mostrar que para toda sequência  $y \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ , existe  $x \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  tal que  $\sigma(x) = y$ . De fato, dado  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , definimos a sequência  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  por

$$x_n = y_{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando  $\sigma$ , obtemos:

$$[\sigma(x)]_n = x_{n+1} = y_{(n+1)-1} = y_n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, a função *Shift* bilateral é sobrejetora;

4. Seja  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma sequência em  $\Sigma_S$ . A função inversa de  $\sigma$ , é  $\sigma^{-1} : \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  dada por  $[\sigma^{-1}(x)]_n = x_{n-1}$ , essa função também é contínua e a demonstração é feita de modo análogo ao item 1.

□

**Proposição 3.3.2.** *A função *Shift* bilateral é um sistema dinâmico topologicamente bitransitivo.*

*Demonstração.* Consideremos a sequência  $x \in \Sigma_S$  com  $|\mathcal{S}| \geq 2$ ,

$$x = (0^{-\infty}; \underline{01} \dots \underline{n-1} \underline{00} \underline{01} \dots \underline{0n-1} \underline{12} \dots \underline{1n-1} \dots \underline{000} \dots),$$

onde a sublinha foi usada somente para enfatizar blocos na sequência. Utilizando um argumento análogo ao caso unilateral, concluímos que esta sequência possui órbita positiva densa, daí,  $\sigma$  é transitiva. Como  $\Sigma_S$  é um espaço métrico compacto sem pontos isolados, pelo Teorema 2.3.1,  $f$  é topologicamente transitiva. E sendo  $\sigma$  um homeomorfismo, pela Proposição 2.3.1, garantimos que o *Shift* bilateral é um sistema dinâmico topologicamente bitransitivo.

□

**Proposição 3.3.3.** *A função *Shift* bilateral é expansiva com  $\delta = \frac{1}{2}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \Sigma_S$  com  $x \neq y$ , então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_k \neq y_k$ .

1. Se  $k \geq 0$ , então  $M(x, y) = k$ . Assim, aplicando a função  $\sigma$   $k$ -vezes obtemos

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, \dots, x_k, \dots) \Rightarrow \sigma^k(x) = (\dots, x_{k-2}, x_{k-1}; x_k, x_{k+1}, \dots)$$

$$y = (\dots, y_{-2}, y_{-1}; y_0, \dots, y_k, \dots) \Rightarrow \sigma^k(y) = (\dots, y_{k-2}, y_{k-1}; y_k, y_{k+1}, \dots)$$

Assim,  $d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) = 1 > \frac{1}{2}$ .

2. Se  $k < 0$ , então  $M(x, y) = -k$ . Assim, podemos aplicar  $\sigma^{-k}$  podemos obter  $d(\sigma^{-k}(x), \sigma^{-k}(y)) = 1 > \frac{1}{2}$ .

□

**Proposição 3.3.4.** *A função *Shift* bilateral é um sistema dinâmico caótico.*

*Demonstração.* Por definição, devemos mostrar que o conjunto  $Per(\sigma)$  é denso em  $X$ ,  $\sigma$  possui sensibilidade às condições iniciais e é transitivo. De fato, considerando  $\mathcal{S}$  um conjunto de símbolos finito com  $|\mathcal{S}| \geq 2$ .

1. A transitividade topológica para  $\sigma$  é garantida pela Proposição 3.3.2;
2. Pela Proposição anterior, a função *Shift* bilateral é expansiva e todo sistema dinâmico expansivo possui sensibilidade às condições iniciais;
3. Devemos mostrar que  $Per(\sigma)$  é denso em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$  qualquer

$$\forall x \in \Sigma_{\mathcal{S}}, \exists y \in Per(\sigma); d(x, y) < \varepsilon.$$

Dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, sejam  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  e  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda^{k+1} < \varepsilon$ . Consideremos o bloco  $w = (x_{-k}, \dots, x_k)$  e a sequência  $y = (\dots, w, w, w, w, \dots) \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ . Como  $\sigma^{2k+1}(y) = y$  então  $y \in Per(\sigma)$  e

$$d(x, y) \leq \lambda^{k+1} < \varepsilon$$

como queríamos demonstrar.

□

## 3.4 Espaço *Shift*

Nesta seção vamos introduzir o conceito de espaço *Shift*, este espaço é um subconjunto do espaço  $\mathcal{S}$ -completo com algumas características importantes.

**Definição 3.4.1.** Um **espaço *Shift*** é um subconjunto  $X$  de um espaço  $\mathcal{S}$ -completo  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  tal que é fechado e  $\sigma$ -invariante.

**Exemplo 3.4.1.** Seja  $A \subset \Sigma_{\mathcal{S}}$  tal  $A = \dots \{0\} \times \{2\} \times \{0\} \dots$ . Este conjunto é composto por todas as sequências que alternam entre os símbolos “0” e “2”. Notemos que  $A$  é de fato um conjunto  $\sigma$ -invariante, e pelo Teorema de Tychonoff é fechado.

**Exemplo 3.4.2.** Seja  $x \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  um ponto periódico. Pelo Lema 2.3.1,  $\mathcal{O}^T(x)$  é invariante. Como  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, d)$  é um espaço métrico e a órbita de  $x$  é um conjunto finito, então é fechado. Portanto, este é um espaço *Shift*.

**Definição 3.4.2.** Seja  $\mathcal{P}$  uma coleção de blocos sobre  $\mathcal{S}$ , que chamaremos de **blocos proibidos**. Para qualquer  $\mathcal{P}$ , definimos  $X_{\mathcal{P}}$  um subconjunto de  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  composto por todas as sequências que não contém nenhum bloco em  $\mathcal{P}$ .

**Observação 3.4.1.** A coleção de blocos  $\mathcal{P}$  é uma coleção enumerável, basta definirmos uma bijeção  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$  associando os blocos de acordo com o seu comprimento.

**Observação 3.4.2.** Na expressão  $X = X_{\mathcal{P}}$ , a notação  $X$  refere à operação de formação de um espaço *Shift*, enquanto a notação  $X$  denota o resultado desta operação.

**Proposição 3.4.1.** O espaço  $X = X_{\mathcal{P}}$  para alguma coleção  $\mathcal{P}$  de blocos proibidos sobre  $S$  é um espaço *Shift*.

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $X_{\mathcal{P}}$  é fechado e  $\sigma$ -invariante.

Suponhamos que  $x \in \overline{X_{\mathcal{P}}}$  mas  $x \notin X_{\mathcal{P}}$ . Dessa forma,  $x$  possui alguma palavra proibida  $w \in \mathcal{P}$  a partir da  $i$ -ésima coordenada, ou seja,  $x_{[i, i+|w|-1]} = w$ . Como  $x$  é um ponto aderente, então existe uma sequência  $(x_n) \subset X_{\mathcal{P}}$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Logo, dado  $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Em particular,  $d(x_n, x) < \lambda^k$  onde  $k = M(x_n, x)$ . Assim, para algum  $n > n_0$  deve existir um  $k > i$ ,  $d(x_n, x) < \lambda^k$ . Mas isto implica que  $x_n$  possui palavra proibida, absurdo. Portanto,  $X_{\mathcal{P}}$  é fechado.

Pela Proposição 2.3.3 basta mostrarmos que  $\sigma(X) = X$ . De fato, seja  $x \in X$ , então  $x$  não possui blocos de  $\mathcal{P}$ . Como a aplicação  $\sigma$  apenas desloca as coordenadas das sequências de  $X$ , então os pontos em  $\sigma(X)$  também não possuem blocos em  $\mathcal{P}$ . Assim,  $\sigma(x) \in X$ . Tomando  $y \in \sigma(X)$  então existe  $x \in X$  tal que  $\sigma(x) = y$ , isto é, como  $y_i = x_{i+1}$  então  $y$  também não possui blocos em  $\mathcal{P}$ . Portanto,  $y \in X$  e  $\sigma(X) = X$ .  $\square$

É possível que para um determinado espaço *Shift*, exista mais de uma coleção de blocos proibidos o descrevendo. Quando um espaço *Shift*  $X$  está contido em um espaço *Shift*  $Y$ , dizemos que  $X$  é *Subshift* de  $Y$ .

**Exemplo 3.4.3.** Se  $X = \Sigma_S$ , então a coleção de blocos proibidos que podemos tomar para representar  $X$  é  $\mathcal{P} = \emptyset$ .

**Exemplo 3.4.4.** Consideremos o conjunto fechado  $X = \{(011)^\infty\}$ , como  $\sigma(x) = (110)^\infty$ , então  $X$  não é invariante. Logo, não é um espaço *Shift*.

**Exemplo 3.4.5.** Consideremos  $X$  o conjunto de todas as sequências binárias de modo que entre qualquer dois símbolos “1” existe um número par de símbolos “0”. Assim,

$$\mathcal{P} = \{10^{2n+1}1; n \geq 0\}.$$

Este espaço  $X$  é chamado *Shift Par*<sup>2</sup>.

**Observação 3.4.3.** Seja  $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  o conjunto de todas as sequências que possuem uma quantidade finita de símbolos “1”. Este conjunto claramente é  $\sigma$ -invariante. Suponhamos que  $X$  seja fechado, logo,  $X$  é um espaço *Shift*, então os blocos que

<sup>2</sup> *Even Shift*

possuem o símbolo “1” não são blocos proibidos. Dessa forma, a sequência  $(1)^\infty \in X$ , absurdo, pois não é possível afirmar que esta sequência possui uma quantidade finita de símbolos “1”. Portanto,  $X$  não é um espaço *Shift*.

**Definição 3.4.3.** Um *Shift do tipo finito (STF)* é um espaço *Shift* descrito por um conjunto finito de blocos proibidos.

**Exemplo 3.4.6.** Seja  $X$  o conjunto de todas as sequências binárias sem bloco “11”. Assim,  $X = X_{\mathcal{P}}$  com  $\mathcal{P} = \{11\}$ , este espaço é chamado de **Shift Áureo**.<sup>3</sup>

Agora, veremos que também é possível definir um espaço *Shift*  $X$  por meio dos elementos que o compõe.

**Definição 3.4.4.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço  $S$ -completo e seja  $\mathcal{B}_n(X)$  o conjunto de todos os  $n$ -blocos que ocorrem nas sequências de  $X$ . A **linguagem** de  $X$  é a coleção

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X).$$

**Exemplo 3.4.7.** Seja  $X$  o espaço de todas as sequências que não possui blocos da forma  $0100, 010000, \dots, 010^{2n}$  com  $n \geq 1$ . Logo, a linguagem de  $X$  é dada por

$$\mathcal{B}(X) = \{0, 1, 00, 11, 01, 10, 00, 000 \dots\}$$

Observemos que nem toda coleção de blocos é uma linguagem de um espaço *Shift*. A proposição a seguir faz parte de um resultado em [17] que apresenta outra descrição do espaço *Shift*.

**Proposição 3.4.2.** A linguagem do espaço *Shift* determina o espaço *Shift*. Na verdade, para qualquer espaço *Shift*  $X = X_{\mathcal{B}(X)^c}$ . Assim, dois espaços *Shift* são iguais se, e somente se, eles possuem a mesma linguagem.

*Demonstração.* Se  $x \in X$ , então nenhum bloco que ocorre em  $x$  pertence a  $\mathcal{B}(X)^c$ , pois  $\mathcal{B}(X)$  contém todos os blocos que ocorrem em todas as sequências de  $X$ . Assim,  $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$  e  $X \subset X_{\mathcal{B}(X)^c}$ . No entanto, como  $X$  é um espaço *Shift*, então existe uma coleção  $\mathcal{P}$  que descreve  $X$ . Se  $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$ , então cada bloco em  $x$  deve está em  $\mathcal{B}(X)$ , logo, não pode está em  $\mathcal{P}$ . Portanto,  $x \in X_{\mathcal{P}}$  e  $X = X_{\mathcal{B}(X)^c}$ .  $\square$

**Observação 3.4.4.** Pela proposição acima, para verificar se  $x \in X$ , basta mostrarmos que cada sub-bloco  $x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(X)$ .

**Exemplo 3.4.8.** O *Shift Par* é um espaço *Shift*, mas não é um espaço *Shift* do tipo finito. Com efeito, se fosse, existiria uma coleção finita de blocos proibidos  $\mathcal{P}$  que

<sup>3</sup> Golden mean Shift

descreve  $X$ . Consideremos então  $N \geq 1$  o comprimento do maior bloco em  $\mathcal{P}$ , daí, podemos construir uma nova coleção  $\tilde{\mathcal{P}}$  de blocos de tamanho  $N$  que contém blocos de  $\mathcal{P}$ , esta nova coleção também descreve  $X$ . Seja  $x = 0^\infty 10^{2N+1} 10^\infty$ , notemos que

$$N = 1 \Rightarrow x = 0^\infty 100010^\infty$$

e cada bloco de tamanho 1 pertence a  $\mathcal{B}_1(X)$ .

$$N = 2 \Rightarrow x = 0^\infty 10000010^\infty$$

e cada bloco de tamanho 2 pertence a  $\mathcal{B}_2(X)$ . Por sucessão, cada bloco de tamanho  $N$  também pertence a  $\mathcal{B}_N(X)$ , mas  $x$  possui bloco proibido também. Absurdo!

**Observação 3.4.5.** Sabemos que um espaço *Shift* pode ser descrito por diferentes coleções de blocos proibidos, no entanto, a Proposição acima mostra que a coleção  $\mathcal{B}(X)$  é a maior coleção de blocos proibidos que descreve o espaço *Shift*  $X$ . De fato, suponhamos que exista uma coleção  $\mathcal{P}$  que seja a maior coleção de proibidos que descreve  $X$ , logo,  $\mathcal{B}(X)^c \subset \mathcal{P}$ . Seja  $w \in \mathcal{P}$  tal que  $w \notin \mathcal{B}(X)^c$ , então  $w \in \mathcal{B}(X)$ . Assim,  $y$  é um bloco permitido, logo, existe alguma sequência em  $X$  que contém  $w$ , absurdo pois  $w \in \mathcal{P}$ .

## 4 A Caracterização da Máquina de Adição Unilateral

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de máquina de adição unilateral e oferecer uma caracterização que nos indique quando a aplicação da máquina de adição é topologicamente conjugada à uma outra aplicação contínua definida em um espaço métrico compacto. A base do estudo desse capítulo é o Artigo [3].

### 4.0.1 A Máquina de Adição Unilateral

**Definição 4.0.1.** *Seja  $\alpha^+ = (j_0, j_1, \dots)$  uma sequência de inteiros onde cada  $j_i \geq 2$ . Denotamos por  $\Delta_{\alpha^+}$  o conjunto de todas as sequências  $(x_0, x_1, \dots)$  onde cada  $x_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}$  para cada  $i$ . O conjunto  $\Delta_{\alpha^+}$  é chamado de **Máquina de adição unilateral  $\alpha^+$ -ádica**.*

**Exemplo 4.0.1.** *Seja  $\alpha^+ = (2, 2, 2, \dots)$ , então dada uma sequência  $(x_0, x_1, \dots)$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$  para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Assim,  $\Delta_{\alpha^+} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ .*

Neste conjunto é possível definirmos uma métrica  $d_{\alpha^+}$ . Assim,

**Definição 4.0.2.** *Sejam  $x = (x_0, x_1, \dots)$ ,  $y = (y_0, y_1, \dots) \in \Delta_{\alpha^+}$ ,*

$$d_{\alpha^+}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{i+1}},$$

onde  $\delta(x_i, y_i) = 1$  se  $x_i \neq y_i$  e  $\delta(x_i, y_i) = 0$  se  $x_i = y_i$ .

**Proposição 4.0.1.** *Sejam  $d_{\alpha^+}$  e  $d$  métricas sobre  $\Delta_{\alpha^+}$ , onde  $d$  é a métrica estabelecida no espaço  $S$ -completo. Então as métricas  $d_{\alpha^+}$  e  $d$  induzem a mesma topologia.*

*Demonstração.* Podemos escrever  $d_{\alpha^+}(x, y) = \frac{1}{2^{N(x,y)}}$ , conforme justificado no Apêndice A.1.1 e  $d(x, y) = \frac{1}{n^{N(x,y)}}$ . Para mostrar que essas duas métricas induzem a mesma topologia, basta provarmos que uma sequência converge em  $d$  se, e somente se, converge em  $d_{\alpha^+}$ . De fato,

( $\Rightarrow$ )

Suponhamos que  $d(x_k, x) = \frac{1}{n^{N(x_k, x)}} \rightarrow 0$ . Como  $n \geq 2$ , temos:

$$\frac{1}{n^{N(x_k, x)}} \rightarrow 0 \Rightarrow N(x_k, x) \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{2^{N(x_k, x)}} \rightarrow 0 \Rightarrow d_{\alpha^+}(x_k, x) \rightarrow 0$$

( $\Leftarrow$ )

Agora, suponhamos que  $d_{\alpha^+}(x_k, x) = \frac{1}{2^{N(x_k, x)}} \rightarrow 0$ . Como  $2 > 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{N(x_k, x)}} \rightarrow 0 &\Rightarrow N(x_k, x) \rightarrow \infty \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^{N(x_k, x)}} \rightarrow 0 \quad (\text{pois } n \geq 2 > 1) \\ &\Rightarrow d(x_k, x) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que as métricas induzem uma mesma topologia.  $\square$

Dado que as métricas são equivalentes, quando  $\alpha^+ = (n, n, n, \dots)$  adotarmos por simplicidade o espaço  $\Delta_{\alpha^+}$  munido com a métrica  $d$ . Pela Proposição anterior,  $d$  e  $d_{\alpha^+}$  geram a mesma topologia métrica em  $\Delta_{\alpha^+}$ . Assim, de maneira análoga ao espaço  $\mathcal{S}$ -completo, as bolas abertas em  $(\Delta_{\alpha^+}, d)$  coincidem com os cilindros já definidos anteriormente.

#### 4.0.2 A Aplicação da Máquina de Adição Unilateral

**Definição 4.0.3.** Dados  $(x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots), (z_0, z_1, \dots) \in \Delta_{\alpha^+}$ . Definimos a soma

$$(x_0, x_1, \dots) + (y_0, y_1, \dots) = (z_0, z_1, \dots),$$

onde  $z_0 = (x_0 + y_0) \bmod j_0$ ,  $z_1 = (x_1 + y_1 + t_1) \bmod j_1$  e

$$\begin{cases} t_1 = 0, & \text{se } x_0 + y_0 < j_0 \\ t_1 = 1, & \text{se } x_0 + y_0 \geq j_0. \end{cases}$$

$z_2 = (x_2 + y_2 + t_2) \bmod j_2$  e

$$\begin{cases} t_2 = 0, & \text{se } x_1 + y_1 + t_1 < j_1 \\ t_2 = 1, & \text{se } x_1 + y_1 + t_1 \geq j_1, \end{cases}$$

E prosseguimos com este mesmo raciocínio para toda a sequência.

**Exemplo 4.0.2.** Consideremos  $\alpha^+ = (3, 2, 4, 7, \dots)$  e as sequências  $x = (2, 1, 0, 1, \dots)$ ,  $y = (1, 0, 1, 5, \dots) \in \Delta_{\alpha^+}$ . Assim,

$$\begin{aligned} x + y &= ((2 + 1) \bmod 3, (1 + 0 + t_1) \bmod 2, (0 + 1 + t_2) \bmod 4, (1 + 5 + t_3) \bmod 7, \dots) \\ &= (3 \bmod 3, (1 + 0 + 1) \bmod 2, (0 + 1 + 1) \bmod 4, (1 + 5 + 0) \bmod 7, \dots) \\ &= (0, 0, 2, 6, \dots) \end{aligned}$$

**Definição 4.0.4.** Definimos a aplicação  $f_{\alpha^+} : \Delta_{\alpha^+} \rightarrow \Delta_{\alpha^+}$  dada por

$$f_{\alpha^+}(x) = (x_0, x_1, \dots) + (1, 0, \dots)$$

chamada **aplicação da máquina de adição unilateral**.

**Observação 4.0.1.** Para simplificar as demonstrações, em alguns casos deixaremos implícito que a soma em cada coordenada é feita via  $\text{mod } j_i$  para cada  $i$ .

**Proposição 4.0.2.** A aplicação da máquina de adição é um homeomorfismo.

*Demonstração.* Para mostrar que  $f_{\alpha^+}$  é um homeomorfismo, vamos mostrar os seguintes itens:

1.  $f_{\alpha^+}$  é injetora:

Sejam  $x, y \in \Delta_{\alpha^+}$  distintos tais que  $f_{\alpha^+}(x) = f_{\alpha^+}(y)$ , logo

$$f_{\alpha^+}(x) = f_{\alpha^+}(y) \Rightarrow (x_0 + 1, x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots) = (y_0 + 1, y_1 + s_1, y_2 + s_2, \dots)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = y_0 + 1 \\ x_1 + t_1 = y_1 + s_1 \\ x_2 + t_2 = y_2 + s_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Por definição,

$$\begin{cases} t_1 = 0, \text{ se } x_0 + 1 < j_0 \\ t_1 = 1, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s_1 = 0, \text{ se } y_0 + 1 < j_0 \\ s_1 = 1, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Uma vez que  $x_0 = y_0$ , então os dois sistemas acima são equivalentes, daí,  $t_1 = s_1$  e  $x_1 = y_1$ . Com base nesta linha de raciocínio,  $x_i = y_i$  para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Portanto,  $f_{\alpha^+}$  é injetora.

2.  $f_{\alpha^+}$  é sobrejetora:

Seja  $y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \Delta_{\alpha^+}$ . Como  $y_0 \in \{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$ , obtemos os seguintes casos:

a) Se  $y = (0, y_1, y_2, \dots)$ , então existe  $x = (j_0 - 1, y_1 - 1, y_2, \dots)$  tal que

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}(x) &= (j_0 - 1, y_1 - 1, y_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots) \\ &= (j_0 \text{ mod } j_0, (y_1 - 1 + t_1) \text{ mod } j_1, (y_2 + t_2) \text{ mod } j_2, \dots). \end{aligned}$$

Como  $x_0 + 1 = j_0$  então  $t_1 = 1$ . Assim,  $y_1 - 1 + t_1 = y_1 < j_1$ , e não há mais carregamentos. Logo,  $f_{\alpha^+}(x) = y$ .

b) Se  $y = (1, y_1, y_2, \dots)$ , então existe  $x = (0, y_1, y_2, \dots)$  tal que

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}(x) &= (0, y_1, y_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots) \\ &= (1 \text{ mod } j_0, (y_1 + t_1) \text{ mod } j_1, (y_2 + t_2) \text{ mod } j_2, \dots). \end{aligned}$$

Como  $x_0 + 1 = 1$ , então  $t_1 = 0$  e não há mais carregamentos. Logo,  $f_{\alpha^+}(x) = y$ .

c) Se  $y = (2, y_1, y_2, \dots)$ , então existe  $x = (1, y_1, y_2, \dots)$  tal que

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}(x) &= (1, y_1, y_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots) \\ &= (2 \bmod j_0, (y_1 + t_1) \bmod j_1, (y_2 + t_2) \bmod j_2, \dots). \end{aligned}$$

Se  $j_0 = 2$ , então regressamos ao item a) e nada temos a provar. Por outro lado, se  $j_0 > 2$ , então  $x_0 + 1 < j_0$  e  $t_1 = 0$ . Assim, não há mais carregamentos e  $f_{\alpha^+}(x) = y$ .

d) Se  $y = (j_0 - 1, y_1, y_2, \dots)$ , existe  $x = (j_0 - 2, y_1, y_2, \dots)$  tal que

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}(x) &= (j_0 - 2, y_1, y_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots) \\ &= ((j_0 - 1) \bmod j_0, (y_1 + t_1) \bmod j_1, (y_2 + t_2) \bmod j_2, \dots). \end{aligned}$$

Como  $j_0 - 2 + 1 = j_0 - 1 < j_0$ , então  $t_1 = 0$  e a partir desta coordenada não ocorre mais carregamentos, logo,  $f_{\alpha^+}(x) = y$ .

Portanto,  $f_{\alpha^+}$  é sobrejetora.

3.  $f_{\alpha^+}$  é contínua:

Devemos mostrar que a pré-imagem de um conjunto aberto em  $\Delta_{\alpha^+}$  é aberto em  $\Delta_{\alpha^+}$ , isto é, basta mostrar que a pré-imagem de um cilindro também é um cilindro.

a)  $f_{\alpha^+}^{-1}(C_i^{s_i})$  é um cilindro. Basta notarmos

$$f_{\alpha^+}^{-1}(C_i^{s_i}) = \begin{cases} C_{0,1,\dots,i}^{x_0,x_1,\dots,s_i}, & \text{se cada } x_i \text{ não assume seu máximo simultaneamente} \\ C_{0,1,\dots,i}^{x_0,x_1,\dots,s_i-1}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, dado  $x \in f_{\alpha^+}^{-1}(C_i^{s_i})$  tal que  $f_{\alpha^+}(x)$  não carrega até a  $i$ -ésima coordenada, tomemos  $x$  de forma que  $x_i = s_i$ . Se  $f_{\alpha^+}(x)$  carrega até a  $i$ -ésima coordenada, basta tomarmos  $x_i = s_i - 1$ . Portanto, a pré-imagem de um cilindro de tamanho 1 também é um cilindro.

b) Cilindros de tamanho  $n + 2$ :

Suponhamos que a pré-imagem de um cilindro de tamanho  $n + 1$  é um cilindro.

Seja  $C_{0,1,\dots,n+1}^{x_0,x_1,\dots,x_{n+1}}$  um cilindro de tamanho  $n + 2$ , assim

$$f_{\alpha^+}(C_{0,1,\dots,n+1}^{x_0,x_1,\dots,x_{n+1}}) = f_{\alpha^+}(C_{0,1,\dots,n}^{x_0,x_1,\dots,x_n} \cap C_{n+1}^{x_{n+1}}) = f_{\alpha^+}(C_{0,1,\dots,n}^{x_0,x_1,\dots,x_n}) \cap f_{\alpha^+}(C_{n+1}^{x_{n+1}})$$

Pelo item a) e usando que a interseção de cilindros também é um cilindro, podemos afirmar que  $f_{\alpha^+}(C_{0,1,\dots,n+1}^{x_0,x_1,\dots,x_{n+1}})$  é um cilindro. Logo, é um aberto e  $f_{\alpha^+}$  é contínua.

4.  $f_{\alpha^+}^{-1}$  é contínua:

Como  $\Delta_{\alpha}$  é compacto e  $f_{\alpha^+}$  é uma função contínua e bijetora. Então, pela proposição 2.1.1  $f_{\alpha^+}^{-1}$  também é uma função contínua.

Portanto,  $f_{\alpha^+}$  é um homeomorfismo. □

Assim, podemos considerar  $(\Delta_{\alpha^+}, f_{\alpha^+})$  é um sistema dinâmico.

### 4.0.3 Minimalidade e Caracterização via Conjugação Topológica

Agora, vamos demonstrar a minimalidade da máquina de adição unilateral. Para isso, começaremos introduzindo os seguintes lemas:

**Lema 4.0.1.** *Seja  $x \in C_{0,\dots,n}^{s_0,\dots,s_n}$ , então existe um cilindro  $C_{0,\dots,n+1}^{s'_0,\dots,s'_{n+1}}$  tal que  $f_{\alpha^+}(x) \in C_{0,\dots,n+1}^{s'_0,\dots,s'_{n+1}}$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in C_{0,\dots,n}^{s_0,\dots,s_n}$ , então  $x = (s_0, s_1, \dots, s_n, x_{n+1}, \dots)$ . Aplicando  $f_{\alpha^+}$ , obtemos  $f_{\alpha^+}(x) = (s_0 + 1, s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n, x_{n+1} + t_{n+1}, \dots)$  onde cada  $t_i$  satisfaz a Definição 4.0.4. Agora, basta notarmos que  $f_{\alpha^+}(x) \in C_{0,\dots,n+1}^{s_0+1,\dots,s_n+t_n,x_{n+1}+t_{n+1}}$ . □

**Lema 4.0.2.** *Se  $s_i \in \mathcal{S} = \{0, 1, \dots, j_i - 1\}$ , então  $\Delta_{\alpha^+} = \bigcup_{s_i \in \mathcal{S}} C_{0,\dots,n}^{s_0,\dots,s_n}$ .*

*Demonstração.* Sabemos que  $(\Delta_{\alpha^+}, d_{\alpha^+})$  é um espaço topológico cuja base é a coleção de todos os cilindros de tamanho  $n$ . Como toda base é sub-base, então a reunião destes cilindros determinam o espaço  $\Delta_{\alpha^+}$ . □

**Proposição 4.0.3.** *O conjunto  $\Delta_{\alpha^+}$  é  $f_{\alpha^+}$ -minimal.*

*Demonstração.* Como a aplicação  $f_{\alpha^+}$  é um homeomorfismo, pela Proposição 2.3.5 e pela Observação 2.3.4, basta mostrarmos que todo ponto em  $\Delta_{\alpha^+}$  possui órbita densa. Ou seja,

$$\forall x \in \Delta_{\alpha^+} \Rightarrow \mathcal{O}_{f_{\alpha^+}}^+(x) \cap C_{0,\dots,n}^{s_0,\dots,s_n} \neq \emptyset, \text{ com } s_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}.$$

Provemos por indução matemática:

- $n = 1$ :

Consideremos os cilindros de tamanho 1,  $C_0^{s_i}$  com  $s_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}$ . Pelo Lema 4.0.2,

$$\Delta_{\alpha^+} = C_0^0 \cup C_0^1 \cup \dots \cup C_0^{j_0-1}.$$

Daí,

$$x \in C_0^0 \Rightarrow f_{\alpha^+}(x) \in C_0^1 \Rightarrow f_{\alpha^+}^2(x) \in C_0^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow f_{\alpha^+}^{j_0}(x) \in C_0^0$$

Este raciocínio pode ser aplicado de modo análogo se tomarmos  $x$  em qualquer outro cilindro de tamanho 1, assim, podemos concluir que todo ponto em  $\Delta_{\alpha^+}$  possui órbita densa.

- $n = k + 2$ :

Suponhamos que a hipótese seja válida para cilindros de tamanho  $k + 1$ , isto é

$$\forall x \in \Delta_{\alpha^+} \Rightarrow \mathcal{O}_{f_{\alpha^+}}^+(x) \cap C_{0,\dots,k}^{s_0,\dots,s_k} \neq \emptyset.$$

Como a interseção acima é não vazia, então existe um índice  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f_{\alpha^+}^m(x) \in C_{0,\dots,k}^{s_0,\dots,s_k}$ . Nosso objetivo é mostrar que a afirmação é válida para  $k + 1$ , isto é, vamos exibir um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $(f_{\alpha^+}^m)^n(x)$  pertença a um cilindro de tamanho  $k + 2$ . Com efeito, como  $s_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}$  então

$$C_{0,\dots,k}^{s_0,\dots,s_k} = C_{0,\dots,k,k+1}^{s_0,\dots,s_k,0} \cup C_{0,\dots,k,k+1}^{s_0,\dots,s_k,1} \cup \dots \cup C_{0,\dots,k,k+1}^{s_0,\dots,s_k,j_{k+1}-1}.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que  $f_{\alpha^+}^m(x)$  pertence ao primeiro cilindro da união acima, assim  $f_{\alpha^+}^m(x) = (s_0, s_1, \dots, s_k, 0, \dots)$ . Notemos:

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k, \dots) + (1, 0, 0, \dots) \\ &= (s_0 + 1, s_1 + t_{11}, s_2 + t_{21}, \dots, s_{k-1} + t_{k-1,1}, s_k + t_{k1}, \dots) \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^2(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + 1, s_1 + t_{11}, s_2 + t_{21}, \dots, s_{k-1} + t_{k-1,1}, s_k + t_{k1}, \dots) + (1, 0, 0, \dots) \\ &= (s_0 + 2, s_1 + (t_{11} + t_{12}), s_2 + (t_{21} + t_{22}), \dots, s_k + (t_{k1} + t_{k2}), \dots) \end{aligned}$$

Por construção, aplicando  $f_{\alpha^+}$ ,  $j_0$ -vezes em  $f_{\alpha^+}^m(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^{j_0}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + j_0, s_1 + (t_{11} + \dots + t_{1j_0}), s_2 + (t_{21} + \dots + t_{2j_0}), \dots, s_k + (t_{k1} + \dots + t_{kj_0}), \dots) \\ &= (s_0, 1 + s_1 + (t_{11} + \dots + t_{1j_0-1}), s_2 + (t_{21} + \dots + t_{2j_0}), \dots, s_k + (t_{k1} + \dots + t_{kj_0}), \dots) \end{aligned}$$

E assim, somamos 1 na coordenada 1. Notemos que o iterado  $f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot 2}((f_{\alpha^+}^m(x)))$  é aplicar  $f_{\alpha^+}^{j_0}(x)$   $j_0$ -vezes à  $f_{\alpha^+}^m(x)$ . Para facilitar a compreensão, representaremos por  $H$  os carregamentos obtidos a cada iteração das coordenadas de  $f_{\alpha^+}^m(x)$ .

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot 2}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + j_0, s_1 + H, s_2 + H, \dots, s_k + H, \dots) \\ &= (s_0, 2 + s_1 + H, s_2 + H, \dots, s_k + H, \dots) \end{aligned}$$

Da mesma forma, o iterado  $f_{\alpha^+}^{3 \cdot j_0}$  é aplicar  $f_{\alpha^+}^{2 \cdot j_0}(x)$   $j_0$ -vezes em  $f_{\alpha^+}^m(x)$ . Daí,

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot 3}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + j_0, 2 + s_1 + H, s_2 + H, \dots, s_k + H, \dots) \\ &= (s_0, 3 + s_1 + H, s_2 + H, \dots, s_k + H, \dots) \end{aligned}$$

Seguindo este mesmo raciocínio, o iterado  $f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot j_1}$  é aplicar  $f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot (j_1 - 1)}(x)$   $j_0$ -vezes em  $f_{\alpha^+}^m(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot j_1}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + j_0, (j_1 - 1) + s_1 + H, s_2 + H, \dots, s_k + H, \dots) \\ &= (s_0, s_1 + H, 1 + s_2 + H, \dots, s_k + H, \dots), \end{aligned}$$

e assim, conseguimos somar 1 na coordenada 2. Novamente, o iterado  $f_{\alpha^+}^{j_1 \cdot j_0 \cdot 2}$  é aplicar  $f_{\alpha^+}^{j_1 \cdot j_0}$  mais  $j_0 \cdot j_1$ -vezes em  $f_{\alpha^+}^m(x)$ . Logo,

$$f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot j_1 \cdot 2}(f_{\alpha^+}^m(x)) = (s_0, s_1 + H, 2 + s_2 + H, \dots, s_k + H, \dots).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^{j_0 \cdot j_1 \cdot j_2}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + j_0, (j_1 - 1) + s_1 + H, (j_2 - 1) + s_2 + H, s_3 + H, \dots, s_k + H, \dots) \\ &= (s_0, s_1 + H, s_2 + H, 1 + s_3 + H, \dots). \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos somar 1 na coordenada  $k$  aplicando  $j_0 \cdot j_1 \cdots j_{k-1}$ -vezes em  $f_{\alpha^+}^m(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^{j_0 \cdots j_{k-1}}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + j_0, (j_1 - 1) + s_1 + H, (j_2 - 1) + s_2 + H, \dots, (j_{k-1} - 1) + s_{k-1} + H, s_k + H, \dots) \\ &= (s_0, s_1 + H, s_2 + H, s_3 + H, \dots, 1 + s_k + H, \dots), \end{aligned}$$

e podemos somar 1 na coordenada  $k + 1$  aplicando  $j_0 \cdot j_1 \cdots j_k$ -vezes em  $f_{\alpha^+}^m(x)$ :

$$\begin{aligned} f_{\alpha^+}^{j_0 \cdots j_k}(f_{\alpha^+}^m(x)) &= (s_0 + j_0, (j_1 - 1) + s_1 + H, \dots, (j_{k-1} - 1) + s_{k-1} + H, (j_k - 1) + s_k + H, s_{k+1} + H, \dots) \\ &= (s_0, s_1 + H, s_2 + H, s_3 + H, \dots, 1 + s_k + H, \dots). \end{aligned}$$

Tomando todos os carregamentos iguais a zero, obtemos

$$f_{\alpha^+}^{j_0 \cdots j_k}(f_{\alpha^+}^m(x)) \in C_{0, \dots, k, k+1}^{s_0, \dots, s_k, 1}.$$

Assim, garantimos que existe um iterado  $n = j_0 \cdot j_1 \cdots j_k$  tal que  $(f_{\alpha^+}^m)^n(x)$  pertence a um cilindro de tamanho  $k + 2$ . Se escolhermos  $(f_{\alpha^+}^m)^n(x)$  em outro cilindro daquela união, o raciocínio é análogo. □

**Lema 4.0.3.** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto,  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua e  $X$   $f$ -minimal. Seja  $n$  um inteiro positivo, então para algum inteiro positivo  $t \leq n$  e algum conjunto  $N \subset X$ ,  $f^n$ -minimal, temos:*

1.  $X$  é a união disjunta de  $N, f(N), \dots, f^{t-1}(N)$ ;
2. Cada um dos conjuntos  $N, f(N), \dots, f^{t-1}(N)$  é clopen;
3. A coleção  $\{N, f(N), \dots, f^{t-1}(N)\}$  é a coleção de todos os subconjuntos de  $X$  que são  $f^t$ -minimais e  $f^n$ -minimais.

Além disso, para cada  $x \in X$ ,  $\overline{O_{f^n}^+(x)}$  é um conjunto  $f^n$ -minimal.

*Demonstração.*

1. • **Afirmção 1:** Dado  $N$   $f^n$ -minimal, existe  $t \leq n$  tal que  $f^t(N) \cap N \neq \emptyset$ .  
De fato, suponhamos que não exista  $t$  que satisfaça a afirmação. Logo,

$$f^t(N) \cap N = \emptyset, \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Assim,

$$f(N) \cap N = \emptyset, f^2(N) \cap N = \emptyset, \dots, f^n(N) \cap N = \emptyset.$$

Absurdo, pois  $N$  é  $f^n$ -minimal.

- **Afirmção 2:** Para quaisquer  $i < j < t$ ,  $f^i(N) \cap f^j(N) = \emptyset$ .  
Ora, suponhamos que  $f^i(N) \cap f^j(N) \neq \emptyset$ , então existe  $y \in f^i(N) \cap f^j(N) = \emptyset$ .  
Daí,

$$\exists x \in N; f^i(x) = y \text{ e } \exists z \in N; f^j(z) = y \Rightarrow f^i(x) = f^j(z) \Rightarrow f^{j-i}(x) = z \Rightarrow f^{j-i}(N) \cap N \neq \emptyset.$$

Absurdo, pois  $t$  é o menor inteiro com esta propriedade. Assim, os conjuntos são dois a dois disjuntos.

- **Afirmção 3:** Se  $N$  é  $f^n$ -minimal então  $f^i(N)$  é  $f^n$ -minimal para qualquer  $i \in \mathbb{Z}_+$ .

Notemos que,  $f^{-n}(f^i(N)) = f^i(f^{-n}(N)) = f^i(N)$  e  $f^i(N)$  é fechado pois  $f^i$  é contínua e  $N$  é compacto. Além disso, consideremos  $L \subset f^i(N)$  fechado e também  $f^n$ -invariante, daí,  $f^{-i}(L) \subset N$ . Absurdo, pois  $N$  é  $f^n$ -minimal. Portanto,  $f^i(N)$  é  $f^n$ -minimal para cada  $i$  inteiro positivo. Em particular,  $f^t(N)$  é  $f^n$ -minimal. Pela Proposição 2.3.6, como  $N$  também é  $f^n$ -minimal, então  $f^t(N) = N$ .

- **Afirmção 4:**  $A = N \cup f(N) \cup \dots \cup f^{t-1}(N)$  é  $f$ -minimal.

Mostremos que a união acima é  $f$ -invariante. Seja  $x \in f^{-1}(A)$ . Caso  $x \in f^{-1}(N)$ , então

$$f(x) \in N \Rightarrow f(x) \in f^n(N) \Rightarrow x \in f^{n-1}(N).$$

Como  $n-1 < n$ , então se  $n-1 = t$ , pela Afirmção 3,  $x \in N$ . Caso  $n-1 < t$ , a afirmação é verdadeira, e se  $n-1 > t$ , existe um inteiro  $m$  tal que  $t+m = n-1$ , em particular,  $n-1 = m+kt$  onde  $m < t$  e  $k$  um inteiro positivo. Logo,

$$x \in f^{n-1}(N) = f^{m+kt}(N) = f^m(f^{kt}(N)) = f^m(N)$$

então  $x \in A$  já que  $m < t$ . Portanto,  $f^{-1}(A) \subset A$ .

Por outro lado, consideremos  $x \in A$ . Se  $x \in f^{t-1}(N)$  então pela Afirmção 3,  $f(x) \in f^t(N) = N$  e  $x \in f^{-1}(N) \subset f^{-1}(A)$ . Para os outros casos, o raciocínio é análogo. Portanto,  $A \subset f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(A) = A$ .

Notemos que  $A$  é fechado pois é a união finita de conjuntos fechados, além disso, não possui subconjunto com estas mesmas propriedades pois  $A$  é

composto da união de conjuntos que são dois a dois disjuntos. Portanto,  $A$  é  $f$ -minimal.

Por fim, como  $A$  e  $X$  são  $f$ -minimais, pela Proposição 2.3.6,

$$X = N \dot{\cup} f(N) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} f^{t-1}(N).$$

2. Consideremos  $f^i(N) \in X$  com  $1 \leq i \leq t$ , vimos na Afirmação 3 que este conjunto é fechado. Como  $f^i(N)^c = X \setminus \{f^i(N)\}$  é união de fechados, então  $f^i(N)$  é aberto.
3. Basta notarmos que, como os conjuntos são dois a dois disjuntos e  $X$  é  $f$ -minimal, então segue da Afirmação 3 que cada conjunto da união é  $f^t$ -minimal e  $f^n$ -minimal.

Além disso, seja  $x \in X$ , pelas Afirmações 1 e 3, existe  $f^i(N) \subset X$  com  $1 \leq i \leq t$  tal que  $x \in f^i(N)$ . Dessa forma,  $\mathcal{O}_{f^n}^+(x) \subset f^i(N)$ . Como  $f^i(N)$  é  $f^n$ -minimal, então  $\overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)} = f^i(N)$ .  $\square$

**Teorema 4.0.1.** *Seja  $\alpha^+ = (j_0, j_1, \dots)$  uma seqüência de inteiros com  $j_i \geq 2$  e  $m_i = j_0 \cdot j_1 \cdot \dots \cdot j_i$  para cada  $i$ . Consideremos  $X$  um espaço métrico compacto e uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow X$ . Então  $f$  é topologicamente conjugada a  $f_{\alpha^+}$  se, e somente se, 1, 2 e 3 forem válidas:*

1. *Para cada inteiro não negativo  $i$ , existe uma cobertura  $\mathcal{P}_i$  de  $X$  consistindo de  $m_i$  conjuntos não-vazios, dois a dois disjuntos, clopens que são permutados ciclicamente por  $f$ ;*
2. *Para cada inteiro não negativo  $i$ ,  $\mathcal{P}_{i+1}$  particiona  $\mathcal{P}_i$ ;*
3. *Se  $W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \dots$  é uma seqüência encaixada com  $W_i \in \mathcal{P}_i$  para cada  $i$ , então  $\bigcap_{i=0}^{\infty} W_i$  consiste de um único ponto.*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ )

Vamos definir uma cobertura com as propriedades acima para  $\Delta_{\alpha^+}$  e usar a conjugação para construir uma cobertura com estas propriedades para  $X$ . Com efeito, como os cilindros formam uma base para  $(\Delta_{\alpha^+}, d_{\alpha^+})$  podemos considerar a cobertura

$$\mathcal{Q}_0 = \{C_0^{s_0} ; s_0 \in \{0, 1, \dots, j_0 - 1\}\}.$$

Para cilindros de tamanho 2, consideremos a seguinte cobertura:

$$\mathcal{Q}_1 = \{C_{0,1}^{s_0, s_1} ; s_0 \in \{0, 1, \dots, j_0 - 1\}, s_1 \in \{0, 1, \dots, j_1 - 1\}\}.$$

De modo geral, para cada inteiro positivo  $i$  podemos obter uma cobertura

$$\mathcal{Q}_i = \{C_{0,\dots,i}^{s_0,\dots,s_i} ; s_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}\}$$

para  $\Delta_{\alpha^+}$  com  $m_i = j_0 \cdot j_1 \cdots j_i$  cilindros de tamanho  $i + 1$ . Por fim,

1. a) As coberturas definidas em  $\Delta_{\alpha^+}$  foram construídas de modo que, dado um cilindro de tamanho  $i + 1$ , a cobertura  $\mathcal{Q}_i$  possua todos os cilindros que podem ser construídos com uma permutação de  $i + 1$  elementos que residem no conjunto  $\{0, 1, \dots, j_i - 1\}$ . Por sua vez, todas as permutações possíveis são dadas por  $j_0 \cdot j_1 \cdots j_i$ , ou seja,  $m_i$ .
  - b) Basta notar que os cilindros são conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos e *clopens*.
  - c) Dado um cilindro  $C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}$  em  $\mathcal{Q}_{i+1}$ ,  $f_{\alpha^+}^{m_i}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}) = C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}$ .
2. Basta notar que dado um cilindro  $C_{0,1,\dots,i,i+1}^{s_0,s_1,\dots,s_i,s_{i+1}}$  em  $\mathcal{Q}_{i+1}$ , existe  $C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}$  em  $\mathcal{Q}_i$  tal que

$$C_{0,1,\dots,i,i+1}^{s_0,s_1,\dots,s_i,s_{i+1}} \subset C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}.$$

3. Consideremos uma sequência aninhada

$$C_0^{s_0} \supset C_{0,1}^{s_0,s_1} \supset C_{0,1,2}^{s_0,s_1,s_2} \supset \dots$$

com cada  $C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i} \in \mathcal{Q}_i$ . Como o diâmetro de um cilindro de tamanho  $i$  é  $\frac{1}{2^{i+1}}$ , então quando  $i \rightarrow \infty$ , o diâmetro de  $C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}$  é 0. Pelo Item 1.a), podemos aplicar os Teoremas 2.2.2 e 2.2.3, logo

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i} = \{x\}.$$

com  $x \in \Delta_{\alpha^+}$ .

Portanto, os itens 1, 2 e 3 valem para as coberturas de  $\Delta_{\alpha^+}$ . Por hipótese,  $f$  é topologicamente conjugada a  $f_{\alpha}$ , então existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow \Delta_{\alpha^+}$  tal que  $h \circ f = f_{\alpha^+} \circ h$ . Logo, considerando  $C_{0,\dots,i}^{s_0,\dots,s_i} \in \mathcal{Q}_i$ , podemos definir para cada inteiro não negativo  $i$  uma cobertura

$$\mathcal{P}_i = \{X_i^{l_0,l_1,\dots,l_i} ; l_r \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}, 0 \leq r \leq i\}$$

de  $X$  consistindo de conjuntos da forma  $X_i^{l_0,l_1,\dots,l_i} = h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i})$ .

1. a) Como  $h$  é um homeomorfismo,  $h$  preserva a cardinalidade de conjuntos, logo, como  $|\mathcal{Q}_i| = m_i$  então  $|\mathcal{P}_i| = m_i$ .

- b) Sendo  $h$  um homeomorfismo, então  $X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i} = h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i}) \neq \emptyset$ , é *clopen*, e quaisquer dois elementos em  $\mathcal{P}_i$  são disjuntos pois os cilindros em  $\mathcal{Q}_i$  são dois a dois disjuntos.
- c) Seja  $X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i} = h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i})$  um elemento em  $\mathcal{P}_i$ , como  $f_{\alpha^+}$  permuta os cilindros ciclicamente, então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f_{\alpha^+}^n(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i}) = C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i}$ . Sendo  $f$  e  $g$  conjugadas, temos

$$\begin{aligned} f^n &= h^{-1} \circ f_{\alpha^+}^n \circ h \Rightarrow f^n(h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i})) = h^{-1}(f_{\alpha^+}^n(h(h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i})))) \\ &\Rightarrow f^n(h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i})) = h^{-1}(f_{\alpha^+}^n(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i})) \\ &\Rightarrow f^n(h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i})) = h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i}) \\ &\Rightarrow f^n(X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i}) = X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  permuta os elementos da cobertura ciclicamente.

2. Como  $\mathcal{Q}_{i+1}$  particiona  $\mathcal{Q}_i$ , então  $C_{0,1,\dots,i,i+1}^{s_0, s_1, \dots, s_i, s_{i+1}} \subset C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i}$ . Logo,  $h^{-1}(C_{0,1,\dots,i,i+1}^{s_0, s_1, \dots, s_i, s_{i+1}}) \subset h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i})$ . Portanto,  $X_{i+1}^{l_0, l_1, \dots, l_i, l_{i+1}} \subset X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i}$  e  $\mathcal{P}_{i+1}$  particiona  $\mathcal{P}_i$ .
3. Consideremos uma seqüência aninhada

$$X_0^{l_0} \supset X_1^{l_0, l_1} \supset X_2^{l_0, l_1, l_2} \supset \dots$$

com cada  $X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i} \in \mathcal{P}_i$ . Notemos:

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i} = \bigcap_{i=0}^{\infty} h^{-1}(C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i}) = h^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{s_0, s_1, \dots, s_i}\right) = h^{-1}(\{x\}).$$

Sendo  $h$  é um homeomorfismo, em particular,  $h$  é bijetor, então  $h^{-1}(\{x\})$  consiste de um único ponto.

Para cada inteiro não negativo  $i$ , consideremos a cobertura  $\mathcal{P}_i$  de  $X$  denotada por

$$\mathcal{P}_i = \{X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i} ; l_r \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}, 0 \leq r \leq i\}$$

que satisfaz os Itens 1, 2 e 3 do Teorema. Devemos mostrar que  $f$  é topologicamente conjugada a  $f_{\alpha^+}$ . Pelo Item 1,  $f$  permuta os elementos de  $\mathcal{P}_i$  ciclicamente e pelo item 2,  $X_{i+1}^{l_0, l_1, \dots, l_i, l_{i+1}} \subset X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i}$ . Por outro lado, para cada  $i$  inteiro não negativo, a cobertura  $\mathcal{Q}_i$  de  $\Delta_{\alpha^+}$  também satisfaz os Itens 1, 2 e 3.

Pelo Item 1, dado  $x \in X$ . Para cada inteiro positivo  $i$ , existe um único elemento  $X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i}$  em  $\mathcal{P}_i$  tal que  $x \in X_i^{l_0, l_1, \dots, l_i}$ , e considerando  $\mathcal{Q}_i$ , como  $\bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,\dots,i}^{s_0, \dots, s_i}$  consiste de um único ponto  $y$ . Podemos então definir a aplicação

$$h : X \rightarrow \Delta_{\alpha^+} \text{ tal que } h(x) = y.$$

Provemos que  $h$  é um homeomorfismo:

1. Afirmamos que a aplicação  $h$  está bem definida pois para todo  $x \in X$ , a interseção

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,\dots,i}^{s_0,\dots,s_i}$$

possui um único ponto  $y$ .

2. Seja

$$V = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}$$

um aberto em  $\Delta_\alpha$  para algum  $i$ . Notemos:

$$h^{-1}(V) = h^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}\right) = \bigcup_{i=0}^{\infty} h^{-1}\left(C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}\right),$$

onde os cilindros acima pertencem a partição  $\mathcal{Q}_i$ . Como as coberturas de  $X$  e  $\Delta_{\alpha^+}$  satisfazem o Item 1 e a cardinalidade caracteriza cada cobertura, então  $h^{-1}(V)$  é *clopen* em  $(X, f)$ . Portanto,  $h$  é contínua.

3. Sejam  $x, y \in X$  tal que  $x \neq y$ . Suponhamos que  $h(x) = h(y)$ , por definição,

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i} = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{t_0,t_1,\dots,t_i}$$

onde  $x \in X_i^{s_0,s_1,\dots,s_i}$ ,  $y \in X_i^{t_0,t_1,\dots,t_i}$  ambos elementos em  $\mathcal{P}_i$ . Como estas interseções possuem um único ponto, então  $s_r = t_r$  para cada  $0 \leq r \leq i$ . Logo,  $x$  e  $y$  pertencem ao mesmo elemento da cobertura, ou seja,  $x = y$ . Portanto,  $h$  é injetora.

4. Seja  $y \in \Delta_{\alpha^+}$ , como  $\bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i} = \{y\}$  e em cada  $\mathcal{Q}_i$  os cilindros  $C_{0,1,\dots,i}^{s_0,s_1,\dots,s_i}$  são associados unicamente com  $X_i^{l_0,l_1,\dots,l_i} \in \mathcal{P}_i$ , então existe único  $x \in X$  tal que  $h(x) = y$ .

5. Como  $X$  é compacto, pela Proposição 2.1.1, afirmamos que  $h$  é um homeomorfismo.

Mostremos agora que  $h \circ f = f_{\alpha^+} \circ h$ . Sabemos que, dado  $x \in X$ , existe um único par  $i$  tal que  $x \in X_i^{l_0,l_1,\dots,l_i}$  em  $\mathcal{P}_i$ . Como  $f$  permuta ciclicamente os elementos de  $\mathcal{P}_i$ , então

$$f\left(X_i^{l_0,l_1,\dots,l_i}\right) = X_i^{l_0+1,l_1+t_1,\dots,l_i+t_i} \in \mathcal{P}_i.$$

Dessa forma, dado  $x \in X_i^{l_0,l_1,\dots,l_i}$ ,  $f(x) \in X_i^{l_0+1,l_1+t_1,\dots,l_i+t_i}$  e assim

$$h(f(x)) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{l_0+1,l_1+t_1,\dots,l_i+t_i},$$

com os cilindros acima pertencentes a partição  $\mathcal{Q}_i$ . Por outro lado, dado  $x \in X$ , para cada  $i$ , existe um único  $X_i^{l_0,l_1,\dots,l_i}$  que contenha  $x$ , logo

$$h(x) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{l_0,l_1,\dots,l_i},$$

com cada cilindro acima pertencente a partição  $\mathcal{Q}_i$ . Como os cilindros são permutados ciclicamente por  $f_{\alpha^+}$ , então

$$f_{\alpha^+}(h(x)) = (l_0 + 1, l_1 + t_1, \dots, l_i + t_i, \dots) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{0,1,\dots,i}^{l_0, l_1, \dots, l_i}.$$

Como a interseção é única, então  $h \circ f = f_{\alpha^+} \circ h$ . □

**Exemplo 4.0.3.** *É necessário ter atenção ao construir as partições para o espaço  $\Delta_{\alpha^+}$  já que nem toda coleção que cobre este espaço satisfaz os Itens 1, 2 e 3 do Teorema. Por exemplo, a coleção  $\{C_0^0 \cup C_{0,1}^{1,1}, C_0^1\}$  cobre o espaço mas não é uma partição pois possui interseção. A coleção  $\{C_{0,1}^{1,1} \cup C_{0,1}^{0,0}, C_{0,1}^{0,1} \cup C_{0,1}^{1,0}\}$  não satisfaz o Item 1 pois não vale a ciclicidade.*

**Definição 4.0.5.** *Sejam  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Se  $X$  for um conjunto  $f$ -minimal, denotamos por  $S(f)$  o conjunto dos inteiros positivos  $i$  tais que para algum  $N \subset X$ ,  $N$  é  $f^i$ -minimal mas  $N$  não é  $f^j$ -minimal com  $j = 1, \dots, i - 1$ .*

**Definição 4.0.6.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Dado  $x \in X$ , dizemos que  $x$  é um ponto **regularmente recorrente** se para qualquer vizinhança  $V$  de  $x$ , existe um inteiro positivo  $n$  tal que para qualquer inteiro não negativo  $k$ ,  $f^{nk}(x) \in V$ .*

**Proposição 4.0.4.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  semiconjugadas. Se  $x \in X$  é regularmente recorrente para  $f$ , então  $y = \pi(x) \in Y$  é regularmente recorrente para  $g$ , onde  $\pi$  é a semiconjugação entre  $f$  e  $g$ .*

*Demonstração.* Fixemos uma vizinhança  $U$  de  $y \in Y$ . Como  $f$  e  $g$  são semiconjugadas, então existe uma aplicação  $\pi : X \rightarrow Y$  contínua tal que  $\pi^{-1}(U)$  é uma vizinhança de  $x$  em  $X$ . Como  $x$  é regularmente recorrente, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$f^{kn}(x) \in \pi^{-1}(U), \text{ para todo } k \geq 0.$$

E sendo  $\pi$  sobrejetora,  $\pi(f^{kn}(x)) \in U$ . Como  $\pi \circ f = g \circ \pi$ , temos:

$$g^{kn}(y) = g^{kn}(\pi(x)) = \pi(f^{kn}(x)) \in U, \text{ para todo } k \geq 0.$$

Assim, para cada vizinhança  $U$  de  $y$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g^{kn}(y) \in U$  para todo  $k \geq 0$ . Portanto,  $y$  é regularmente recorrente para  $g$ . □

**Observação 4.0.2.** *Pela proposição anterior, como pontos regularmente recorrentes são preservados pela semiconjugação, então também são preservados pela conjugação topológica.*

**Definição 4.0.7.** Para cada inteiro  $j > 1$  e cada primo  $p$  divisor de  $j$ . Definimos  $M_j(p)$  a multiplicidade de  $p$  na decomposição primária de  $j$ . Caso  $j = 1$  ou se  $j > 1$  e  $p$  não divide  $j$ , definimos  $M_j(p) = 0$ . Se  $M_j(p)$  for arbitrariamente grande para algum  $p$  primo fator de  $j \in S(f)$ , então  $M_j(p) = \infty$ . Definimos também  $M(p) = \max_{j \in S(f)} M_j(p)$ .

**Teorema 4.0.2.** Sejam  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Se  $X$  for um conjunto infinito,  $f$ -minimal e existe  $x \in X$  regularmente recorrente. Então existe uma sequência  $\alpha^+$  de números primos e uma aplicação  $\pi : X \rightarrow \Delta_{\alpha^+}$  contínua e sobrejetora tal que  $f_{\alpha^+} \circ \pi = \pi \circ f$ . Além disso, se  $x \in X$  é regularmente recorrente, então  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ .

*Demonstração.* Antes de iniciarmos a demonstração, nas hipóteses do teorema, provemos as seguintes afirmações:

1.  $S(f)$  é um conjunto infinito:

*Demonstração.* Basta mostrarmos que dado  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , existe  $n \in S(f)$  tal que  $n > k$ . Com efeito, seja  $x \in X$  um ponto regularmente recorrente e  $V$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $f^i(x) \notin \bar{V}$  para  $i = 1, \dots, k$ . Por hipótese, existe  $t \in \mathbb{Z}_+^*$  tal que  $f^{it}(x) \in V$  para qualquer  $i$  inteiro não negativo. Pelo Lema 4.0.3,  $\overline{\mathcal{O}_{f^t}^+(x)}$  é  $f^t$ -minimal, assim, podemos considerar  $n$  o menor inteiro positivo tal que  $\overline{\mathcal{O}_{f^t}^+(x)}$  seja  $f^n$ -minimal, logo  $n \in S(f)$ . E como  $\overline{\mathcal{O}_{f^t}^+(x)} \subset \bar{V}$ , então  $n > k$ .  $\square$

2. Se  $k, n \in S(f)$  e  $k$  é um múltiplo de  $n$ , então  $\mathcal{Q}_k$  refina  $\mathcal{Q}_n$ :

*Demonstração.* Pelo Lema 4.0.3, para cada elemento de  $S(f)$ , é possível construir uma única cobertura para  $X$ . Consideremos  $\mathcal{Q}_k$  uma cobertura de  $X$  e  $N \subset \mathcal{Q}_k$  tal que  $z \in N$ . Assim, pelo Lema 4.0.3,  $\overline{\mathcal{O}_{f^k}^+(z)}$  é um conjunto  $f^k$ -minimal. Como existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que  $k = tn$  então  $\mathcal{O}_{f^k}^+(z) \subset \mathcal{O}_{f^n}^+(z)$ , daí,  $\overline{\mathcal{O}_{f^k}^+(z)} \subset \overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(z)}$ . E como  $\overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(z)} \in \mathcal{Q}_n$ , podemos concluir que  $\mathcal{Q}_k$  refina  $\mathcal{Q}_n$ .  $\square$

3. Sejam  $k \in S(f)$  e  $n$  é um inteiro positivo. Se  $k$  for um múltiplo de  $n$  então  $n \in S(f)$ :

*Demonstração.* Por hipótese, existe  $q$  um inteiro positivo tal que  $k = qn$ . Como  $k \in S(f)$ , existe  $N \subset X$  tal que  $N$  é  $f^k$ -minimal mas não é  $f^j$ -minimal para  $j = 1, \dots, k-1$ . Podemos então construir o seguinte conjunto

$$N_1 = N \cup f^{-n}(N) \cup f^{-2n}(N) \cup \dots \cup f^{-(q-2)n}(N) \cup f^{-(q-1)n}(N).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 f^{-n}(N_1) &= f^{-n}(N \cup f^{-n}(N) \cup f^{-2n}(N) \cup \dots \cup f^{-(q-1)n}(N)) \\
 &= f^{-n}(N) \cup f^{-n}(f^{-n}(N)) \cup f^{-n}(f^{-2n}(N)) \cup \dots \cup f^{-n}(f^{-(q-2)n}(N)) \cup f^{-n}(f^{-(q-1)n}(N)) \\
 &= f^{-n}(N) \cup f^{-2n}(N) \cup f^{-3n}(N) \cup \dots \cup f^{-n(q-1)}(N) \cup f^{-qn}(N) \\
 &= f^{-n}(N) \cup f^{-2n}(N) \cup f^{-3n}(N) \cup \dots \cup f^{-n(q-1)}(N) \cup N \\
 &= N_1.
 \end{aligned}$$

Assim,  $N_1$  é um conjunto  $f^n$ -invariante e pelo Teorema 2.3.2, afirmamos que existe  $N_2 \subset N_1$  o qual é  $f^n$ -minimal. Suponhamos que  $N_2$  é  $f^j$ -minimal para algum  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , dessa forma,  $N_2 \cap f^{-j}(N_2) \neq \emptyset$ . Como  $N_2 \subseteq N_1$ , então  $N_1 \cap f^{-j}(N_1)$ . Mas pela construção de  $N_1$ ,  $f^i(N_1) \cap N_1 = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Portanto,  $N_2$  não é  $f^j$ -minimal para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  e  $n \in S(f)$ .  $\square$

4. Se  $k, n \in S(f)$  e são primos entre si, então  $kn \in S(f)$ :

*Demonstração.* Como  $k, n \in S(f)$ , então existem  $N_1, N_2 \subset X$  tais que  $N_1$  é  $f^k$ -minimal mas não é  $f^j$ -minimal para  $j = 1, \dots, k-1$  e  $N_2$  é  $f^n$ -minimal mas não é  $f^i$ -minimal para  $i = 1, \dots, n-1$ . Escolha  $x \in N_1$ , então  $x$  está em algum conjunto  $f^n$ -minimal  $N_2$ . Considerando  $Y = N_1 \cap N_2$ , então  $f^t(Y) \cap Y \neq \emptyset$  se, e somente se,  $t$  for um múltiplo de  $n$ , e da mesma forma,  $f^t(Y) \cap Y \neq \emptyset$  se, e somente se,  $t$  for um múltiplo de  $k$ . Portanto,  $f^t(Y) \cap Y = \emptyset$  para  $t = 1, \dots, kn-1$ , daí,  $kn \in S(f)$ .  $\square$

Seja  $\alpha^+ = (p_0, p_1, \dots)$  uma sequência de números primos tal que cada primo aparece em  $\alpha^+$  exatamente  $M(p)$ -vezes. Para cada  $i$  inteiro positivo, definimos  $m_i = p_0 \cdot p_1 \cdots p_i$ , pelo Afirmação 3,  $p_j \in S(f)$  para  $j = 0, \dots, i$  e pela Afirmação 4,  $m_i \in S(f)$ .

Pelo Lema 4.0.3, dado  $N \subset X$   $f^n$ -minimal, então é possível descrevermos  $X = N \dot{\cup} f(N) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} f^{t-1}(N)$  para algum  $t \leq n$ . Assim, para cada  $n \in S(f)$ , existe uma única cobertura  $\mathcal{Q}_n$  de  $X$  consistindo de conjuntos  $f^n$ -minimais, não vazios, *clopens* e dois a dois disjuntos. Dessa forma, podemos obter a cobertura  $\mathcal{Q}_{m_i}$  de  $X$  com estas mesmas propriedades, e concluímos que o Item 1 do Teorema 4.0.1 é válido. Pela Afirmação 2, também conseguimos garantir que o Item 2 do Teorema 4.0.1 é verdadeiro. Por fim, basta construirmos uma aplicação de forma equivalente à demonstração do Teorema 4.0.1 para obtermos a aplicação contínua e sobrejetora  $\pi : X \rightarrow \Delta_{\alpha^+}$  tal que  $f_{\alpha^+} \circ \pi = \pi \circ f$ .

Por fim, consideremos  $x \in X$  um ponto regularmente recorrente. Vamos supor que  $x, y \in \pi^{-1}(\pi(x))$  com  $y \neq x$ . Como  $\pi$  é semiconjugação, existe uma sequência de conjuntos encaixados  $W_i \in \mathcal{Q}_i$  para cada  $i$  tal que  $\bigcap_{i=0}^{\infty} W_i$  que contém  $x$  e  $y$ .

Seja  $V$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $y \notin \bar{V}$ . Como  $x$  é regularmente recorrente, existe  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  tal que para qualquer  $k$  inteiro não negativo  $f^{kn}(x) \in V$ . Pelo Lema 4.0.3,  $\overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)}$

é  $f^n$ -minimal, logo,  $\overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)} \subset \overline{V}$ . Assim, podemos tomar  $t$  o menor inteiro positivo com  $t \leq n$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)}$  seja  $f^t$ -minimal, logo,  $t \in S(f)$ . Por outro lado, sabemos que existe uma coordenada  $j$  na sequência  $\alpha^+$  tal que  $m_j$  é um múltiplo de  $t$ . Da forma em que foi construído, como  $x \in X$ , existe algum  $j$  tal que  $x \in W_j$ , assim,  $x \in W_j \cap \overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)}$ . E pela Afirmação 2,  $W_j \subset \overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)}$ , o que não pode acontecer pois  $y \notin \overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)} \subset \overline{V}$ . Portanto,  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ .  $\square$

**Corolário 4.0.2.1.** *Sejam  $X$  um conjunto compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Existe uma sequência  $\alpha^+$  de números primos tal que  $f$  é topologicamente conjugada a  $f_{\alpha^+}$  se, e somente se,  $X$  é  $f$ -minimal, infinito e todo ponto de  $X$  é ponto regularmente recorrente.*

*Demonstração.* Sendo  $f$  e  $f_{\alpha^+}$  topologicamente conjugadas. Como  $\Delta_{\alpha^+}$  é infinito,  $X$  também é. Vimos anteriormente que  $\Delta_{\alpha^+}$  é  $f_{\alpha^+}$ -minimal, logo,  $X$  é  $f$ -minimal. Basta então mostrarmos que todo ponto de  $X$  é regularmente recorrente. Com efeito, como  $\Delta_{\alpha^+}$  é  $f_{\alpha^+}$ -minimal, então

$$\mathcal{O}_{f_{\alpha^+}}^+(x) \cap V \neq \emptyset, \text{ para cada } x \in \Delta_{\alpha^+} \text{ e para cada } V \text{ aberto em } \Delta_{\alpha^+}.$$

Em particular,

$$\mathcal{O}_{f_{\alpha^+}}^+(x) \cap U \neq \emptyset, \text{ para cada } x \in \Delta_{\alpha^+} \text{ e para cada } U \text{ vizinhança de } x.$$

Queremos mostrar que  $x \in \Delta_{\alpha^+}$  é regularmente recorrente, isto é, exibir um inteiro positivo  $n$  tal que  $f_{\alpha^+}^{kn}(x) \in U$  para cada inteiro positivo  $k$ . Com efeito, basta considerarmos  $n = m_i$ , pois  $\mathcal{O}_{f_{\alpha^+}^{nk}}(x) \cap U \neq \emptyset$ . Portanto, como todo ponto de  $\Delta_{\alpha^+}$  é regularmente recorrente, pela Proposição 4.0.4, todo ponto em  $X$  também é regularmente recorrente. Para a outra implicação, basta notar que para todo  $x \in X$ ,  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ .  $\square$

**Corolário 4.0.2.2.** *Se a aplicação máquina de adição é semiconjugada à aplicação  $g : Y \rightarrow Y$ , então, ou  $g$  é topologicamente conjugada à aplicação da máquina de adição ou  $Y$  é uma órbita periódica.*

*Demonstração.* Vimos anteriormente que todo ponto em  $\Delta_{\alpha}$  é regularmente recorrente pela  $f_{\alpha}$ , como  $f_{\alpha^+}$  e  $g$  são semiconjugadas, então todo ponto de  $Y$  também é regularmente recorrente pela  $g$ . Se  $Y$  não for  $g$ -minimal, então existe  $A \subset Y$  tal que  $A$  é fechado em  $Y$  e  $g$ -invariante. Como  $f_{\alpha^+}$  e  $g$  são semiconjugadas, então existe  $\pi : X \rightarrow Y$  contínua e sobrejetora tal que  $\pi \circ f_{\alpha^+} = g \circ \pi$ . Dessa forma,  $\pi^{-1}(A)$  seria fechado e não vazio em  $X$  e  $f_{\alpha^+}$ -invariante pois:

$$\begin{aligned} x \in f_{\alpha^+}^{-1}(\pi^{-1}(A)) &\Leftrightarrow f_{\alpha^+}(x) \in \pi^{-1}(A) \Leftrightarrow \pi(f_{\alpha^+}(x)) \in A \Leftrightarrow g(\pi(x)) \in A \\ &\Leftrightarrow \pi(x) \in g^{-1}(A) = A \Leftrightarrow x \in \pi^{-1}(A). \end{aligned}$$

Absurdo, pois  $\Delta_{\alpha^+}$  é  $f_{\alpha^+}$ -minimal. Concluimos então que  $Y$  é  $g$ -minimal. Se  $Y$  for um conjunto infinito, pelo corolário 4.0.2.1  $g$  é topologicamente conjugada à  $f_{\alpha^+}$ . Caso  $Y$  seja finito, como  $Y$  é  $g$ -minimal, concluimos que  $Y$  é uma órbita periódica.  $\square$

A proposição a seguir nos mostra que a máquina de adição unilateral constitui um exemplo relevante de uma aplicação contínua que não admite conjugação topológica com o *Shift* unilateral.

**Proposição 4.0.5.** *Seja  $\sigma_+$  a função *Shift* unilateral, e seja  $X \subset \Sigma_S^+$  um *subshift*. Então não existe uma sequência  $\alpha^+$  tal que  $\sigma_+|_X : X \rightarrow X$  que seja topologicamente conjugada à aplicação da máquina de adição  $f_{\alpha^+} : \Delta_{\alpha^+} \rightarrow \Delta_{\alpha^+}$ .*

*Demonstração.* Pelo Item 3 do Teorema 4.0.1, para todo  $\delta > 0$  existem  $x, y \in \Delta_{\alpha^+}$ , com  $x \neq y$ , pertencentes a um mesmo cilindro  $C_i \in \mathcal{Q}_i$ , com  $\text{diam}(C_i) < \delta$ . Já pelo Item 1,  $f_{\alpha^+}$  permuta ciclicamente os elementos de  $\mathcal{Q}_i$ , então  $f_{\alpha^+}^k(x), f_{\alpha^+}^k(y) \in C'_i \in \mathcal{Q}_i$ , daí

$$d(f_{\alpha^+}^k(x), f_{\alpha^+}^k(y)) < \delta \text{ para todo } k \geq 0.$$

Assim, a aplicação da máquina de adição unilateral não é positivamente expansiva. Como o *Shift* unilateral é positivamente expansivo, pela Proposição 2.3.8, não é possível que  $\sigma_+$  e  $f_{\alpha^+}$  sejam topologicamente conjugadas.  $\square$

## 5 *Zip – Shift* e Máquina de Adição Bilateral

Neste capítulo vamos estudar alguns conceitos básicos do espaço *Zip* com o objetivo de definirmos a máquina de adição bilateral e comparar com a aplicação *Zip – Shift*.

### 5.1 Espaço *Zip*

Nesta seção vamos introduzir o conceito de um espaço *Zip*. Consideremos dois alfabetos finitos  $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  e  $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  com  $k \leq n$ .

**Definição 5.1.1.** Dizemos que a aplicação  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$  é um **mapa de transição** se  $\tau$  for sobrejetora e não necessariamente invertível.

**Definição 5.1.2.** Seja  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  o espaço  $\mathcal{S}$ -completo e  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$  um mapa de transição. Definimos o espaço *Zip* denotado por  $\Sigma_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}}$  onde cada  $y \in \Sigma_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}}$  corresponde a um ponto  $x \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  de modo que

$$y_i = \begin{cases} x_i \in \mathcal{S}, & \text{se } i \geq 0 \\ \tau(x_i), & \text{se } i < 0. \end{cases}$$

**Exemplo 5.1.1.** Consideremos os alfabetos  $\mathcal{Z} = \{a, b\}$  e  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ . Dessa forma, podemos definir um mapa de transição  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$  dado por

$$\tau(0) = \tau(2) = a \text{ e } \tau(1) = \tau(3) = b.$$

Assim, se tomarmos a sequência  $(\dots, 2, 0, 1; 3, 0, 1, \dots) \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  então uma sequência  $y \in \Sigma_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}}$  associada a  $x$  tem a forma

$$y = (\dots, \tau(2), \tau(0), \tau(1); 3, 0, 1, \dots) = (\dots, a, a, b; 3, 0, 1, \dots).$$

**Definição 5.1.3.** Seja  $\Sigma_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}}$  o espaço *Zip*. Definimos a métrica  $\bar{d} : \Sigma_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}} \times \Sigma_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{M(x, y)}}, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$$

onde  $M(x, y) = \min_{i \in \mathbb{Z}} \{|i|; x_i \neq y_i\}$ .

Da forma em que foi definida, esta métrica  $\bar{d}$  é equivalente a métrica definida no espaço  $\mathcal{S}$ -completo. Assim, também é possível consideramos cilindros no espaço *Zip* com as mesmas propriedades vistas no capítulo 2.

**Definição 5.1.4.** Seja  $(\Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}, \bar{d})$  e  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$  um mapa de transição. A aplicação  $\sigma_\tau : \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$  dada por:

$$\sigma_\tau(\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, \tau(x_0); x_1, \dots, x_n, \dots),$$

é chamada de *Zip-Shift*. E se  $X \subset (\Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}})$  for fechado e invariante por  $\sigma_\tau$  então  $X$  é dito **espaço Zip-Shift**.

**Exemplo 5.1.2.** Consideremos  $\mathcal{Z} = \mathcal{S} = \{0, 1\}$  onde  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  é a aplicação identidade. Então o mapa *Zip-Shift* coincide com a função *Shift bilateral* já que

$$\begin{aligned} \sigma_\tau(\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) &= (\dots, x_{-2}, x_{-1}, \tau(x_0); x_1, x_2, \dots) \\ &= (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0; x_1, x_2, \dots) \\ &= \sigma(\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, \dots). \end{aligned}$$

**Exemplo 5.1.3.** Consideremos as hipóteses do exemplo 5.1.1. Dessa forma,

$$\sigma_\tau(\dots, a, a, b; 3, 0, 1, \dots) = (\dots, a, a, b, \tau(3); 0, 1, \dots) = (\dots, a, a, b, b; 0, 1, \dots)$$

**Exemplo 5.1.4.** Como o mapa de transição é uma aplicação não necessariamente invertível, então a aplicação *Zip-Shift* não é uma aplicação injetora. Basta notarmos que as seqüências  $x = (\dots, a, a, b; 2, 0, 1, \dots)$  e  $y = (\dots, a, a, b; 0, 0, 1, \dots)$  possuem a mesma imagem.

**Proposição 5.1.1.** A aplicação *Zip-Shift* é um homeomorfismo local.

*Demonstração.* Seja  $x = (\dots, x_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, x_2, \dots) \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$  e o cilindro  $C_{-1,0,1}^{s_{-1},s_0,s_1}$  uma vizinhança de  $x$ . Notemos:

1. A aplicação *Zip-Shift* é injetora na vizinhança de  $x$ :

Seja  $y \in C_{-1,0,1}^{s_{-1},s_0,s_1}$  tal que  $\sigma_\tau(x) = \sigma_\tau(y)$ . Logo,

$$(\dots, x_{-2}, s_{-1}, \tau(s_0); s_1, x_2, \dots) = (\dots, y_{-2}, s_{-1}, \tau(s_0); s_1, y_2, \dots).$$

Assim,  $x_i = y_i$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$  e concluímos que  $\sigma_\tau|_{C_{-1,0,1}^{s_{-1},s_0,s_1}}$  é injetora.

2. A aplicação *Zip-Shift* é sobrejetora:

Dado  $y = (\dots, x_{-1}, \tau(x_0); x_1, \dots) \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ , existe  $x = (\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots)$  tal que

$$\sigma_\tau(x) = \sigma_\tau(\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) = (\dots, x_{-1}, \tau(x_0); x_1, \dots) = y.$$

3. A aplicação *Zip-Shift* é contínua:

Basta notar que pré-imagem de um cilindro é a união de cilindros (aberto).

4. A aplicação *Zip-Shift* possui inversa contínua na vizinhança de  $x$ :

Ora,

$$\sigma_\tau^{-1}(C_{-1,0,1}^{s_{-1},s_0,s_1}) = \{x \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}; \sigma_\tau(x) \in C_{-1,0,1}^{s_{-1},s_0,s_1}\} = \bigcup_{c \in \tau^{-1}(s_{-1})} C_{-1,0,1}^{x_{-2},c,s_0}$$

onde  $c \in \mathcal{S}$  e  $\tau(c) = s_{-1} \in \mathcal{Z}$ . Como  $\sigma_\tau^{-1}(C_{-1,0,1}^{s_{-1},s_0,s_1})$  é um aberto, então  $\sigma_\tau|_{C_{-1,0,1}^{s_{-1},s_0,s_1}}$  é possui inversa contínua.

Portanto, a aplicação *Zip-Shift* é um homeomorfismo local.  $\square$

**Proposição 5.1.2.** *Se a aplicação Zip-Shift for um homeomorfismo, então é também expansiva.*

*Demonstração.* Vamos separar essa demonstração em dois casos:

1. Dados  $x, y \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$  distintos, suponhamos que  $x, y$  diferem numa coordenada maior ou igual a zero:

Por hipótese, sejam  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, \dots, x_k, \dots)$  e  $y = (\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, \dots, y_k, \dots)$ .

Notemos:

$$\sigma_\tau^k(x) = (\dots, x_{-1}, \tau(x_0), \dots, \tau(x_{k-1}); x_k, x_{k+1}, \dots)$$

$$\sigma_\tau^k(y) = (\dots, x_{-1}, \tau(x_0), \dots, \tau(x_{k-1}); y_k, x_{k+1}, \dots)$$

Assim,  $d(\sigma_\tau^k(x), \sigma_\tau^k(y)) = 1 > \frac{1}{2}$ .

2. Dados  $x, y \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$  distintos, suponhamos que diferem numa coordenada negativa:

Como por hipótese,  $x = (\dots, x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}; x_0, \dots)$  e

$y = (\dots, y_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}; x_0, \dots)$ , temos:

$$\sigma_\tau^{-k}(x) = (\dots, x_{-k}; \tau^{-1}(x_{-k+1}), \dots, \tau^{-1}(x_{-1}), x_0, \dots)$$

$$\sigma_\tau^{-k}(y) = (\dots, y_{-k}; \tau^{-1}(y_{-k+1}), \dots, \tau^{-1}(y_{-1}), y_0, \dots).$$

Assim,  $d(\sigma_\tau^{-k}(x), \sigma_\tau^{-k}(y)) = 1 > \frac{1}{2}$ .

Portanto, a aplicação *Zip-Shift* homeomorfismo é expansiva.  $\square$

## 5.2 A Máquina de Adição Bilateral

Nesta seção, propomos uma generalização da máquina de adição unilateral  $(\Delta_{\alpha^+}, f_{\alpha^+})$ , introduzindo a noção de Máquina de adição bilateral. Enquanto a definição tradicional se restringe ao comportamento futuro da dinâmica, nossa proposta amplia esse conceito de modo a descrever o comportamento para o futuro e também para o passado. Essa nova estrutura possui algumas propriedades análogas a máquina de

adição unilateral, e além disso, fornece um exemplo de um sistema dinâmico que não é do tipo *Zip-Shift*. Para esta seção, nos baseamos em [18].

Inicialmente, consideremos  $\alpha = (\dots, 2, 2; j, j, \dots)$  com  $j \geq 2$  e os alfabetos finitos  $\mathcal{Z} = \{a_0, b_1\}$  e  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, j-1\}$  com  $j \geq 2$ . Definimos o conjunto  $\Delta_\alpha$  chamado **Máquina de Adição Bilateral  $\alpha$ -ádica** sendo um espaço *Zip* associado aos conjuntos  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{S}$ .

Pela definição do espaço *Zip*, sabemos que a máquina de adição bilateral está associada a um mapa de transição arbitrário. A partir daqui vamos fixar o conjunto  $\mathcal{Z} = \{a_0, b_1\}$  e o mapa de transição

$$\tau(x_i) = \begin{cases} a_0, & x_i < j-1 \\ b_1, & x_i = j-1. \end{cases}$$

**Observação 5.2.1.** *O nosso objetivo é generalizar a máquina de adição unilateral, do ponto de vista binário,  $a_0 = 0$  e  $b_1 = 1$ . Assim,  $a_0 + 1 = b_1$  e  $b_1 + 1 = a_0$ .*

**Exemplo 5.2.1.** *Uma seqüência em  $\Delta_\alpha$  tem a forma  $(\dots, a_0, b_1, b_1; 2, 0, 3, \dots)$ .*

**Exemplo 5.2.2.** *Consideremos  $\alpha = (\dots, 2, 2; 2, 2, \dots)$ , isto é,  $\mathcal{S} = \mathcal{Z}$  e  $\tau(x) = id$ . Note-mos que, as seqüências em  $\Delta_\alpha$  correspondem as seqüências no espaço  $\mathcal{S}$ -completo  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ , isto pois o mapa de transição  $\tau$  coincide com a função identidade.*

Assim como no caso unilateral, definimos uma operação de soma entre os elementos do conjunto  $\Delta_\alpha$ , de modo que:

**Definição 5.2.1.** *Dadas as seqüências  $x, y, z \in \Delta_\alpha$ . A soma  $x + y = z$  é dada por*

- $i \geq 0$ :

*As coordenadas resultantes são:  $z_0 = (x_0 + y_0) \bmod j$ ,  $z_1 = (x_1 + y_1 + t_1) \bmod j$  onde*

$$\begin{cases} t_1 = 0, & \text{se } x_0 + y_0 < j \\ t_1 = 1, & \text{se } x_0 + y_0 \geq j. \end{cases}$$

*$z_2 = (x_2 + y_2 + t_2) \bmod j$  onde*

$$\begin{cases} t_2 = 0, & \text{se } x_1 + y_1 + t_1 < j \\ t_2 = 1, & \text{se } x_1 + y_1 + t_1 \geq j, \end{cases}$$

*Para obter os próximos termos, basta prosseguirmos com este raciocínio. Neste caso, a soma é feita como na máquina de adição unilateral.*

- $i < 0$ : *As coordenadas resultantes são:  $z_{-1} = (x_{-1} + y_{-1} + s_1) \bmod 2$  com  $s_1 = \tau(x_0 + y_0 \bmod j)$ ,  $z_{-2} = (x_{-2} + y_{-2} + s_2) \bmod 2$  onde*

$$\begin{cases} s_2 = 0, & \text{se } x_{-1} + y_{-1} + s_1 < 2 \\ s_2 = 1, & \text{se } x_{-1} + y_{-1} + s_1 \geq 2. \end{cases}$$

Para obter os termos anteriores, basta prosseguirmos com este raciocínio.

**Proposição 5.2.1.** *A operação da soma está bem definida.*

*Demonstração.* Dados  $x, y \in \Delta_\alpha$ , a soma  $x + y$  é dada por

$$x + y = (\dots, (x_{-2} + y_{-2} + s_2) \bmod 2, (x_{-1} + y_{-1} + s_1) \bmod 2; (x_0 + y_0) \bmod j, x_1 + y_1 + t_1) \bmod j, \dots).$$

Como em cada coordenada a soma é feita via  $\bmod 2$  se  $i < 0$  e via  $\bmod j$  se  $i \geq 0$ , então a soma está definida em cada coordenada e cada coordenada é um elemento do alfabeto  $\mathcal{Z}$  ou  $\mathcal{S}$ . Portanto,  $x + y \in \Delta_\alpha$ .  $\square$

**Exemplo 5.2.3.** *Seja  $\alpha = (\dots, 2, 2; 3, 3, \dots)$  e As seqüências  $x = (\dots, b_1, a_0; 3, 1, \dots)$ ,  $y = (\dots, b_1, b_1; 2, 0, \dots) \in \Delta_\alpha$ . Assim,*

$$\begin{aligned} x + y &= (\dots, (b_1 + b_1 + s_2) \bmod 2, (a_0 + b_1 + \tau(5 \bmod 3)) \bmod 2; (3 + 2) \bmod 3, (1 + 0 + t_1) \bmod 3, \dots) \\ &= (\dots, (b_1 + b_1 + 1) \bmod 2, (a_0 + b_1 + b_1) \bmod 2; 5 \bmod 3, 2 \bmod 2, \dots) \\ &= (\dots, b_1, a_0; 2, 0, \dots) \end{aligned}$$

**Definição 5.2.2.** *Seja  $f_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha$  dada por*

$$f_\alpha(x) = (\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) + (\dots, a_0, a_0; 1, 0, \dots)$$

chamada **Aplicação da máquina de adição bilateral**.

**Observação 5.2.2.** *Notemos que a aplicação da máquina de adição bilateral  $f_\alpha$  está bem definida, pois:*

- *Para qualquer  $x \in \Delta_\alpha$ , existe  $y = f_\alpha(x) \in \Delta_\alpha$ :  
Basta notarmos que dado  $x \in \Delta_\alpha$ , a imagem  $f_\alpha(x) \in \Delta_\alpha$ , pois a soma de duas seqüências ainda é uma seqüência em  $\Delta_\alpha$ ;*
- *Para qualquer  $x \in \Delta_\alpha$ ,  $f_\alpha(x)$  é único:  
Suponhamos que  $x = y$ , então  $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$ , pois a função consiste na soma de uma dada com uma seqüência fixa, e essa operação preserva a igualdade.*

**Exemplo 5.2.4.** *Seja  $\alpha = (\dots, 2, 2; 4, 4, \dots)$  e Se  $x = (\dots, a_0, b_1; 2, 1, \dots) \in \Delta_\alpha$ , então*

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= (\dots, (a_0 + a_0 + s_2) \bmod 2, (b_1 + a_0 + \tau(2 + 1 \bmod 4)) \bmod 2; (2 + 1) \bmod 4, (1 + 0 + t_1) \bmod 4, \dots) \\ &= (\dots, (a_0 + a_0 + 1) \bmod 2, (b_1 + a_0 + b_1) \bmod 2; 3 \bmod 4, 1 \bmod 4, \dots) \\ &= (\dots, b_1, a_0; 3, 1, \dots) \end{aligned}$$

Para não carregarmos as demonstrações a seguir, a partir daqui iremos omitir a soma módulo  $j$  e módulo 2. Mas que fique claro ao leitor que as operações são feitas de acordo com a Definição 5.2.1.

**Proposição 5.2.2.** *A aplicação da máquina de adição bilateral é um homeomorfismo.*

*Demonstração.*

1.  $f_\alpha$  é injetora:

Sejam  $x, y \in \Delta_\alpha$  distintos tal que  $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$ . Então,

$$(\dots, z_{-2}, z_{-1}; x_0 + 1, x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots) = (\dots, z_{-2}, z_{-1}; y_0 + 1, y_1 + s_1, y_2 + s_2, \dots).$$

Ou seja,

$$\begin{cases} x_0 + 1 = y_0 + 1 \Rightarrow x_0 = y_0 \\ x_1 + t_1 = y_1 + s_1 \\ x_2 + t_2 = y_2 + s_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Dessa forma,  $z_{-1} = x_{-1} + \tau(x_0 + 1 \bmod j) = y_{-1} + \tau(y_0 + 1 \bmod j)$ . Por definição,

$$\begin{cases} t_1 = 0, \text{ se } x_0 + 1 < j_1 \\ t_1 = 1, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s_1 = 0, \text{ se } y_0 + 1 < j_1 \\ s_1 = 1, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Como  $x_0 = y_0$ , os dois sistemas são equivalentes. Assim,  $t_1 = s_1$  e  $x_1 = y_1$  e  $x_{-1} = y_{-1}$ . Continuando com este raciocínio, obtemos que  $x_i = y_i$  para  $i \in \mathbb{Z}$ . Podemos concluir que  $f_\alpha$  é injetora.

2.  $f_\alpha$  é sobrejetora:

Seja  $y = (\dots, y_{-2}, y_{-1}; y_0, y_1, \dots) \in \Delta_\alpha$ . Por definição,  $y_i \in \{a_0, b_1\}$  para cada  $i < 0$ .

Dessa forma, obtemos os seguintes casos:

a)  $y_{-1} = a_0$ :

Como  $y_0 \leq j - 1$ , então existe  $x = (\dots, y_{-3}, y_{-2}, a_0; y_0 - 1, y_1, y_2, \dots)$  tal que

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= (\dots, y_{-3}, y_{-2}, a_0; y_0 - 1, y_1, y_2, \dots) + (\dots, a_0, a_0; 1, 0, \dots) \\ &= (\dots, y_{-3} + s_3, y_{-2} + s_2, a_0 + \tau(y_0); y_0 - 1 + 1, y_1 + t_1, y_2 + t_2, \dots) \\ &= (\dots, y_{-3} + s_3, y_{-2} + s_2, a_0 + \tau(y_0); y_0, y_1, y_2, \dots) \end{aligned}$$

Se  $\tau(y_0) = a_0$ , então  $f_\alpha(x) = y$  como queríamos. Por outro lado, caso  $\tau(y_0) = b_1$ , então basta considerarmos  $x = (\dots, y_{-3}, y_{-2}, b_1; y_0 - 1, y_1, y_2, \dots)$ .

b) Se  $y_{-1} = b_1$ :

Como  $y_0 \leq j - 1$ , então existe  $x = (\dots, y_{-3}, y_{-2}, b_1; y_0 - 1, y_1, y_2, \dots)$  tal que

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= (\dots, y_{-3}, y_{-2}, b_1; y_0 - 1, y_1, y_2, \dots) + (\dots, a_0, a_0; 1, 0, \dots) \\ &= (\dots, y_{-3} + s_3, y_{-2} + s_2, b_1 + \tau(y_0); y_0 - 1 + 1, y_1 + t_1, y_2 + t_2, \dots) \\ &= (\dots, y_{-3} + s_3, y_{-2} + s_2, b_1 + \tau(y_0); y_0, y_1, y_2, \dots) \end{aligned}$$

Se  $\tau(y_0) = a_0$ , então  $f_\alpha(x) = y$  como queríamos. Por outro lado, caso  $\tau(y_0) = b_1$ , então basta considerarmos  $x = (\dots, y_{-3}, y_{-2}, a_0; y_0 - 1, y_1, y_2, \dots)$ .

Como estudamos os dois casos possíveis, podemos afirmar que a função da máquina de adição bilateral é sobrejetora.

3.  $f_\alpha$  é contínua:

Devemos mostrar a pré-imagem de um cilindro pela aplicação  $f_\alpha$  também é um cilindro. Com efeito, como os cilindros de tamanho 1 formam uma sub-base para o espaço  $(\Delta_\alpha, d)$  então basta mostrarmos que  $f_\alpha^{-1}(C_i^{s_i})$  é um cilindro. Com efeito, notemos que

$$f_\alpha^{-1}(C_i^{s_i}) = \begin{cases} C_i^{s_i}, & \text{se } i \geq 0 \text{ e } x_i \text{ não atinge simultaneamente o seu máximo} \\ C_{0, \dots, i}^{x^*, x^*, \dots, x^*, s_i - 1}, & \text{caso contrário (com } x^* = j - 1). \end{cases}$$

ou

$$f_\alpha^{-1}(C_i^{s_i}) = \begin{cases} C_i^{s_i}, & \text{se } i < 0 \text{ e } x_i \text{ não atinge simultaneamente o seu máximo} \\ \cup_{x^*} C_{i, \dots, -1, 0}^{s_i - 1, b_1, \dots, b_1, x^*} & \text{caso contrário (com } x^* \in \tau^{-1}(b_1)). \end{cases}$$

Assim, dado  $x \in f_\alpha^{-1}(C_i^{s_i})$  tal que  $f_\alpha(x)$  não é carregado para a  $i$ -ésima coordenada, tomamos  $x$  de modo que  $x_i^* = s_i$ . Se  $f_\alpha(x)$  for carregado para a  $i$ -ésima coordenada, simplesmente tomamos  $x_i^* = s_i - 1$ . Portanto, a pré-imagem de um cilindro também é um aberto, logo,  $f_\alpha$  é contínua.

4.  $f_\alpha^{-1}$  é contínua:

Como a máquina de adição bilateral é um espaço compacto e a aplicação  $f_\alpha$  é contínua e bijetora, pela proposição 2.1.1,  $f_\alpha^{-1}$  também é contínua.

□

Não apresentamos as demonstrações dos lemas a seguir pois são semelhantes ao caso unilateral.

**Lema 5.2.1.** *Seja  $x \in C$  um cilindro de tamanho  $n$ . Então existe  $C'$  um cilindro de tamanho  $n + 1$  tal que  $f_\alpha(x) \in C'$ .*

**Lema 5.2.2.** *Se  $x_i \in S$  para  $i \geq 0$  e  $x_i \in \{a_0, b_1\}$  para  $i < 0$ , então  $\Delta_\alpha = \cup C_{-n, \dots, 0, \dots, k}^{x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_k}$ .*

Aqui, estabelecemos que a máquina de adição bilateral também preserva a propriedade de minimalidade a qual é fundamental no estudo da versão clássica. Esse resultado é novo na literatura e constitui uma das principais contribuições desta dissertação, uma vez que demonstra que a generalização não apenas amplia o conceito, mas também mantém sua característica essencial.

**Proposição 5.2.3.** *O espaço  $\Delta_\alpha$  é  $f_\alpha$ -minimal.*

**Demonstração.** Para facilitar a compreensão, omitiremos os carregamentos que acompanham as iterações da função a fim de não sobrecarregar as equações.

Queremos mostrar que  $\Delta_\alpha$  é um conjunto  $f_\alpha$ -minimal, como  $f_\alpha$  é um homeomorfismo, pela Proposição 2.3.5 e pela Observação 2.3.4, basta mostrarmos:

$$\forall x \in \Delta_\alpha, \mathcal{O}_{f_\alpha}^+(x) \cap C_{-k, \dots, -1, 0, \dots, k}^{y_{-k}, \dots, y_{-1}, x_0, \dots, x_k} \neq \emptyset$$

onde  $y_i \in \{a_0, b_1\}$  para  $i < 0$  e  $x_i \in \mathcal{S}$  para  $i \geq 0$ . Para isto, provemos usando o método de indução matemática, com efeito:

### 1. Cilindros de tamanho 1:

Pelo Lema 5.2.2, sabemos que  $\Delta_\alpha = C_{-1}^{a_0} \cup C_{-1}^{b_1}$ . Aqui fixamos a coordenada  $y_{-1}$  e variamos os elementos que podem ser assumidos nesta posição. De modo geral, se fixarmos  $x_i$  para  $i \geq 0$  o raciocínio é análogo ao caso unilateral. Dessa forma, dado  $x \in \Delta_\alpha$  tal que

$$\begin{aligned} x \in C_{-1}^{a_0} &\Rightarrow x = (\dots, y_{-2}, a_0; x_0, x_1, \dots) \\ &\Rightarrow f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2}, a_0; x_0, x_1, \dots) + (\dots, a_0, a_0; 1, 0, \dots) \\ &\Rightarrow f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2} + s_2, a_0 + \tau(x_0 + 1); x_0 + 1, x_1 + t_1, \dots) \end{aligned}$$

Temos então dois casos a serem analisados:

- Se  $\tau(x_0 + 1) = a_0$ , então não há carregamentos para o passado e  $f_\alpha(x) \in C_{-1}^{a_0}$ .
- Se  $\tau(x_0 + 1) = b_1$ , então não há carregamentos para o passado e  $f_\alpha(x) \in C_{-1}^{b_1}$ .

Portanto,  $\mathcal{O}_{f_\alpha}^+(x) \cap C_{-1}^{y_i} \neq \emptyset$  para  $y_i \in \{a_0, b_1\}$ .

### 2. Cilindros de tamanho 2:

Pelo Lema 5.2.2, temos:

$$\Delta_\alpha = C_{-1,0}^{a_0, x_0} \cup C_{-1,0}^{b_1, x_0}$$

onde  $x_0 \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ . Agora, suponhamos que  $x \in C_{-1,0}^{a_0, 0}$ . Logo,

$$\begin{aligned} x \in C_{-1,0}^{a_0, 0} &\Rightarrow x = (\dots, y_{-2}, a_0; 0, x_1, \dots) \\ &\Rightarrow f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2}, a_0; 0, x_1, \dots) + (\dots, a_0, a_0; 1, 0, \dots) \\ &\Rightarrow f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2} + s_2, a_0 + \tau(1); 1, x_1 + t_1, \dots) \end{aligned}$$

Se  $\tau(1) = a_0$ , então  $f_\alpha(x) \in C_{-1,0}^{a_0, 1}$ . Caso  $\tau(1) = b_1$ , então  $f_\alpha(x) \in C_{-1,0}^{b_1, 1}$ .

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) \in C_{-1,0}^{a_0, 1} &\Rightarrow f_\alpha(x) = (\dots, y_2, a_0; 1, x_1, \dots) \\ &\Rightarrow f_\alpha^2(x) = (\dots, y_2, a_0; 1, x_1, \dots) + (\dots, a_0, a_0; 1, 0, \dots) \\ &\Rightarrow f_\alpha^2(x) = (\dots, y_{-2} + s_2, a_0 + \tau(2); 2, x_1 + t_1, \dots) \end{aligned}$$

Se  $\tau(2) = a_0$ , então  $f_\alpha(x) \in C_{-1,0}^{a_0,2}$ . Caso  $\tau(2) = b_1$ , então  $f_\alpha(x) \in C_{-1,0}^{b_1,2}$ .

Se continuarmos com este processo, podemos observar que as iteradas de  $x$  pela  $f_\alpha$  intersecta todos os cilindros de tamanho 2 que descrevem o espaço.

### 3. Cilindros de tamanho $2k + 1$ :

Suponhamos então que a hipótese é válida para cilindros de tamanho  $2k + 1$ , isto é

$$\forall x \in \Delta_\alpha, \mathcal{O}_{f_\alpha}^+(x) \cap C_{-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k} \neq \emptyset.$$

Como a interseção acima é não vazia, pelo Lema 5.2.1 deve existir  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f_\alpha^m(x) \in C_{-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k}$ . Nosso objetivo é exibir um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $(f_\alpha^m)^n(x)$  pertence a algum cilindro de tamanho  $2k + 2$ . Sabemos que

$$C_{-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k} = C_{-k-1,-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{a_0,y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k} \cup C_{-k-1,-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{b_1,y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k}.$$

Observemos que também é possível descrever o espaço  $\Delta_\alpha$  tomando cilindros de tamanho  $2k + 1$  com a coordenada  $k + 1$  possuindo elemento em  $\mathcal{S}$ , e neste caso, a demonstração coincide com o resultado análogo da máquina de adição unilateral.

Suponhamos que  $f_\alpha^m(x) \in C_{-k-1,-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{a_0,y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k}$ , daí

$$\begin{aligned} f_\alpha^m(x) &= (\dots, a_0, y_{-k}, \dots, y_{-2}, y_{-1}; x_0, x_1, \dots, x_k, \dots) \\ \Rightarrow f_\alpha(f_\alpha^m(x)) &= (\dots, a_0, y_{-k}, \dots, y_{-2}, y_{-1}; x_0, x_1, \dots, x_k, \dots) + (\dots, a_0, a_0; 1, 0, \dots) \\ \Rightarrow f_\alpha(f_\alpha^m(x)) &= (\dots, a_0 + s_{k-1}, y_{-k} + s_k, \dots, y_{-2} + s_2, y_{-1} + s_1; x_0 + 1, x_1 + t_1, \dots) \end{aligned}$$

Omitindo os carregamentos obtidos a cada iteração da aplicação  $f_\alpha$ , obtemos

$$f_\alpha^2(f_\alpha^m(x)) = (\dots, a_0 + s_{k-1} + \dots, y_{-k} + \dots, \dots, y_{-1} + s_1 + \dots; x_0 + 2, x_1 + t_1 + \dots, x_k + \dots, \dots)$$

e prosseguindo com estas iterações, obtemos

$$f_\alpha^j(f_\alpha^m(x)) = (\dots, a_0 + s_{k-1} + \dots, y_{-k} + \dots, \dots, b_1 + y_{-1} + \dots; x_0, 1 + x_1 + \dots, x_k + \dots, \dots)$$

Assim, para carregar  $b_1$  na coordenada  $-1$  da sequência, basta iterarmos  $j$ -vezes. Da mesma forma, para carregar  $b_1$  na coordenada  $-2$  da sequência, basta iterarmos  $(j \cdot 2)$ -vezes:

$$f_\alpha^{j \cdot 2}(f_\alpha^m(x)) = (\dots, a_0 + s_{k-1} + \dots, \dots, b_1 + y_{-2} + \dots, y_{-1} + \dots; x_0 \dots, 2 + x_1 + \dots, 1 + x_2 + \dots, \dots)$$

Para carregarmos  $b_1$  na coordenada  $-3$ , basta iterarmos  $(3 \cdot 4)$ -vezes:

$$f_\alpha^{j \cdot 2^2}(f_\alpha^m(x)) = (\dots, a_0 + s_{k-1} + \dots, \dots, b_1 + y_{-3} + \dots, y_{-2} + \dots, y_{-1} + \dots; x_0 + \dots, 1 + x_1 + \dots, \dots)$$

Seguindo o processo de forma recorrente, para obtermos 1 em uma dada coordenada  $k$ , calculamos o seguinte iterado

$$(f_\alpha^m)^{j \cdot 2^{(-k-1)}}(x).$$

Portanto, para carregar  $b_1$  na coordenada  $-k - 1$ , pela equação acima, basta iterarmos exatamente  $n = j \cdot 2^k$ -vezes. Sem perda de generalidade, podemos

escolher todos os carregamentos iguais a zero, daí,  $(f_\alpha^m)^n(x) \in C_{-k-1, -k, \dots, -1, 0, \dots, k}^{b_1, y_{-k}, \dots, y_{-1}, x_0, \dots, x_k}$  e a interseção com a órbita de  $f_\alpha^m(x)$  é não vazia. Portanto,  $\Delta_\alpha$  é um conjunto minimal para  $f_\alpha$ .

□

Agora, vamos apresentar um teorema que fornece condições para que uma função com determinadas propriedades seja conjugada topologicamente com a aplicação da máquina de adição bilateral.

**Teorema 5.2.1.** *Sejam  $\alpha = (\dots, 2, 2; j, j, \dots)$  uma seqüência de inteiros positivos com  $j \geq 2$  e  $m_{(-i,k)} := 2^i \cdot j^{k+1}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Então  $f$  é topologicamente conjugada à  $f_\alpha$  se, e somente se, as afirmações abaixo forem válidas:*

1. *Para cada par de inteiros  $(-i, k)$ , existe uma cobertura  $\mathcal{P}_{(-i,k)}$  de  $X$  consistindo de  $m_{(-i,k)}$  conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos, clopens e que são ciclicamente permutados por  $f$ ;*
2. *Para cada par  $(-i, k)$ ,  $\mathcal{P}_{(-i-n, k+n)}$  com  $n \in \mathbb{N}$  particiona  $\mathcal{P}_{(-i-n+1, k+n-1)}$ ;*
3. *Se  $W_{(-i-1, k+1)} \supset W_{(-i-2, k+2)} \supset \dots$  é uma seqüência encaixada com  $W_{(-i,k)} \in \mathcal{P}_{(-i,k)}$  para cada  $(-i, k)$ , então  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} W_{(-i,k)}$  consiste de um único ponto.*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ )

Suponhamos que a aplicação  $f$  é conjugada à aplicação  $f_\alpha$ . Vamos mostrar que os itens 1, 2 e 3 são válidos para  $\Delta_\alpha$  e usaremos a conjugação para mostrar o equivalente para  $X$ .

De fato, como a coleção de todos os cilindros compõe uma base para o espaço  $\Delta_\alpha$ , é natural definir as coberturas neste espaço por meio de cilindros. Iremos definir as coberturas a partir de cilindros disjuntos de tamanho 2 que incluem as coordenadas negativas e positivas, para mais detalhes, leiamos a Observação 5.2.3. Dessa forma, obtemos a seguinte cobertura:

$$\mathcal{Q}_{(-1,0)} = \{C_{-1,0}^{s_{-1}, s_0}; s_{-1} \in \{a_0, b_1\}, s_0 \in \{0, 1, \dots, j-1\}\}$$

com exatamente  $m_{(-1,0)} = 2 \cdot j$ . Para cilindros de tamanho 3, obtemos a cobertura:

$$\mathcal{Q}_{(-2,0)} = \{C_{-2,-1,0}^{s_{-2}, s_{-1}, s_0}; s_{-2}, s_{-1} \in \{a_0, b_1\}, s_0 \in \{0, 1, \dots, j-1\}\}$$

com exatamente  $m_{(-2,0)} = 2^2 \cdot j$ . Para cilindros de tamanho 4, obtemos

$$\mathcal{Q}_{(-2,1)} = \{C_{-2,-1,0,1}^{s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1}; s_i \in \{a_0, b_1\} \text{ para } i < 0, s_i \in \{0, 1, \dots, j-1\} \text{ para } i \geq 0\}$$

uma cobertura com exatamente  $m_{(-2,1)} = 2^2 \cdot j^2$  elementos. De modo geral, para cada par  $(-i, k)$  que define cilindros de tamanho  $i + k + 1$ , obtemos

$$\mathcal{Q}_{(-i,k)} = \{C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k} ; s_i \in \{0, 1, \dots, j-1\} \text{ para } i \geq 0 \text{ e } s_i \in \{a_0, b_1\} \text{ para } i < 0\}$$

como uma cobertura para  $\Delta_\alpha$  com  $m_{(-i,k)} = 2^{-i} \cdot j^{k+1}$ . Observemos:

1. a) As coberturas definidas em  $\Delta_\alpha$  foram construídas de modo que, dado um cilindro de tamanho  $i + k + 1$ , a cobertura  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$  possua todos os cilindros que podem ser construídos por permutações de  $i$  elementos que residem no conjunto  $\{a_0, b_1\}$  e de  $k + 1$  elementos que residem no conjunto  $\{0, 1, \dots, j-1\}$ . Por sua vez, todas as permutações possíveis são dadas por  $m_{(-i,k)}$ ;
  - b) Basta notarmos que os cilindros são conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos e *clopens*;
  - c) Dado um cilindro  $C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k}$  em  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$ ,  $f_\alpha^{m_i}(C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k}) = C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k}$ .
2. Dado um cilindro  $C_{-i-1,-i,\dots,0,\dots,k,k+1}^{s_{-i-1},s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k,s_{k+1}}$  em  $\mathcal{Q}_{(-i-1,k+1)}$ , existe  $C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k}$  em  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$  tal que

$$C_{-i-1,-i,\dots,0,\dots,k,k+1}^{s_{-i-1},s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k,s_{k+1}} \subset C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k},$$

3. Consideremos uma sequência encaixada

$$C_{-1,0}^{s_{-1},s_0} \supset C_{-2,-1,0,1}^{s_{-2},s_{-1},s_0,s_1} \supset C_{-3,-2,-1,0,1,2}^{s_{-3},s_{-2},s_{-1},s_0,s_1,s_2} \supset \dots$$

com cada  $C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k}$  em  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$ . Como o diâmetro de um cilindro de tamanho  $i + k + 1$  é  $\frac{1}{n^{i+k+1}}$ , então quando  $i, k \rightarrow \infty$ , o  $\text{diam}(C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k}) = 0$ . Pelo Item 1, podemos aplicar os Teoremas 2.2.2 e 2.2.3, logo

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k} = \{x\}$$

com  $x \in \Delta_\alpha$ .

Assim,  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$  satisfaz os Itens 1, 2 e 3 do enunciado. Por hipótese,  $f$  é topologicamente conjugada à  $f_\alpha$ , logo, existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow \Delta_\alpha$  tal que  $h \circ f = f_\alpha \circ h$ . Dessa forma, podemos construir uma cobertura  $\mathcal{P}_{(-i,k)} = \{X_{-i,\dots,0,\dots,k}^{l_{-i},\dots,l_0,\dots,l_k} ; l_r \in \{a_0, b_1\} \text{ para } r < 0, l_r \in \{0, 1, \dots, j-1\} \text{ para } r \geq 0\}$  de  $X$  onde  $X_{-i,\dots,0,\dots,k}^{l_{-i},\dots,l_0,\dots,l_k} = h^{-1}(C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k})$ .

1. a) Como  $h$  é um homeomorfismo,  $h$  preserva a cardinalidade de conjuntos, daí,  $|\mathcal{P}_{(-i,k)}| = m_{(-i,k)}$ ;
- b) Sendo  $h$  um homeomorfismo, então  $X_{-i,\dots,0,\dots,k}^{l_{-i},\dots,l_0,\dots,l_k} = h^{-1}(C_{-i,\dots,0,\dots,k}^{s_{-i},\dots,s_0,\dots,s_k}) \neq \emptyset$ , é *clopen*, e quaisquer dois elementos em  $\mathcal{P}_{(-i,k)}$  são disjuntos pois os cilindros em  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$  são dois a dois disjuntos;

c) Seja  $X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k} = h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k})$  um elemento em  $\mathcal{P}_{(-i, k)}$ , como  $f_\alpha$  permuta os cilindros ciclicamente, então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f_\alpha^n(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}) = C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}$ . Sendo  $f$  e  $g$  conjugadas, temos

$$\begin{aligned} f^n &= h^{-1} \circ f_\alpha^n \circ h \Rightarrow f^n(h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k})) = h^{-1}(f_\alpha^n(h(h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k})))) \\ &\Rightarrow f^n(h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k})) = h^{-1}(f_\alpha^n(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k})) \\ &\Rightarrow f^n(h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k})) = h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}) \\ &\Rightarrow f^n(X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}) = X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  permuta os elementos da cobertura ciclicamente.

2. Como  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$  particiona  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$ , então  $C_{-i-1, -i, \dots, 0, \dots, k, k+1}^{s_{-i-1}, s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k, s_{k+1}} \subset C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}$ . Logo,  $h^{-1}(C_{-i-1, -i, \dots, 0, \dots, k, k+1}^{s_{-i-1}, s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k, s_{k+1}}) \subset h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k})$ . Portanto,  $X_{-i-1, -i, \dots, 0, \dots, k, k+1}^{l_{-i-1}, l_{-i}, \dots, l_0, l_k, l_{k+1}} \subset X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, l_k}$  e  $\mathcal{P}_{(-i-1, k+1)}$  particiona  $\mathcal{P}_{(-i, k)}$ ;

3. Consideremos uma seqüência encaixada

$$X_{(-1, 0)}^{l_{-1}, l_0} \supset X_{(-2, -1, 0, 1)}^{l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1} \supset \dots$$

com cada  $X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k} \in \mathcal{P}_{(-i, k)}$ . Ora,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} h^{-1}(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}) = h^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}\right) = h^{-1}(\{x\})$$

com  $x \in \Delta_\alpha$ . Sendo  $h$  é um homeomorfismo, em particular,  $h$  é bijetor, então  $h^{-1}(\{x\})$  consiste de um único ponto.

Portanto, os itens 1, 2 e 3 são válidos.

( $\Leftarrow$ )

Agora, vamos considerar que para cada par de inteiros  $(-i, k)$ ,  $\mathcal{P}_{(-i, k)}$  representa uma cobertura para  $X$  que satisfaz os Itens 1, 2 e 3. Usaremos a notação

$$\mathcal{P}_{(-i, k)} = \{X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}; l_i \in \{a_0, b_1\} \text{ para } i < 0, l_i \in \{0, 1, \dots, j-1\} \text{ para } i \geq 0\}.$$

Observe que pelo Item 1 as coberturas são da forma que a cardinalidade caracteriza cada cobertura. Vimos na implicação anterior que existem coberturas  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$ , do espaço  $(\Delta_\alpha, f_\alpha)$  tal que satisfazem os itens 1, 2 e 3 do Teorema. Dessa forma, podemos definir uma aplicação  $h : X \rightarrow \Delta_\alpha$ , onde  $\Delta_\alpha$  está coberto por coleções  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$  de modo que satisfazem os itens 1, 2 e 3 do Teorema e os elementos de cada  $\mathcal{P}_{(-i, k)}$  se associam unicamente com elementos de  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$  para algum  $(-i, k)$  fixo e  $|\mathcal{Q}_{(-i, k)}| = |\mathcal{P}_{(-i, k)}|$ . Dado  $x \in X$ , para cada  $(-i, k)$ , existe um único elemento  $X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}$  que contém  $x$ . Como

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k} = \{y\}$$

onde  $y \in \Delta_\alpha$  e os cilindros acima pertencem a partição  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$ , então definimos  $h(x) = y$ . Provemos então que  $h$  é um homeomorfismo:

1. Afirmamos que a aplicação  $h$  está bem definida pois para todo  $x \in X$ , a interseção

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}$$

possui um único ponto  $y$ .

2. Seja

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}$$

um aberto em  $\Delta_\alpha$  para algum  $(-i, k)$ . Notemos;

$$h^{-1}(V) = h^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} h^{-1}\left(C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}\right),$$

onde os cilindros acima pertencem a partição  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$ . Como as duas coberturas (para  $X$  e para  $\Delta_\alpha$ ) satisfazem item 1 e a cardinalidade caracteriza cada cobertura, então  $h^{-1}(V)$  é *clopen* em  $(X, f)$ . Portanto,  $h$  é contínua.

3. Sejam  $x, y \in X$  tal que  $x \neq y$ , assim, existem  $X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}, X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{m_{-i}, \dots, m_0, \dots, m_k} \in \mathcal{P}_{(-i, k)}$  distintos que contêm  $x$  e  $y$  respectivamente. Por definição,

$$h(x) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k} \text{ e } h(y) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{m_{-i}, \dots, m_0, \dots, m_k},$$

onde os cilindros acima pertencem à partição  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$  e as interseções acima possuem um único ponto. Considerando  $\mathcal{Q}_{(-i-u, k+v)}$  é uma partição de  $\Delta_\alpha$ , então existem cilindros nesta partição tais que contenham  $h(x)$  e  $h(y)$ , como a interseção destes cilindros é vazia, então  $h(x) \neq h(y)$ . Portanto,  $h$  é injetora.

4. Seja  $y \in \Delta_\alpha$ , como  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k} = \{y\}$  e em cada  $\mathcal{Q}_{(-i, k)}$  os cilindros  $C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}$  são associados unicamente com  $X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k} \in \mathcal{P}_{(-i, k)}$ , então existe único  $x \in X$  tal que  $h(x) = y$ .

5. Como  $X$  é compacto, pela Proposição 2.1.1, afirmamos que  $h$  é um homeomorfismo.

Por fim, mostremos que  $h \circ f = f_\alpha \circ h$ . Sabemos que dado  $x \in X$ , existe um único par  $(-i, k)$  tal que  $x \in X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}$  em  $\mathcal{P}_{(-i, k)}$ . Como  $f$  permuta ciclicamente os elementos de  $\mathcal{P}_{(-i, k)}$ , então

$$f\left(X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}\right) = X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i+u_{-i+1}}, \dots, l_0+1, \dots, l_k+t_k} \in \mathcal{P}_{(-i, k)}.$$

Dessa forma, dado  $x \in X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}$ ,  $f(x) \in X_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i+u_{-i+1}}, \dots, l_0+1, \dots, l_k+t_k}$  e assim

$$h(f(x)) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i+u_{-i+1}}, \dots, l_0+1, \dots, l_k+t_k}$$

com os cilindros acima pertencentes a partição  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$ . Por outro lado, dado  $x \in X$ ,

$$h(x) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i}, \dots, l_0, \dots, l_k}$$

com cada cilindro acima na partição  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$ . Como os cilindros são permutados ciclicamente por  $f_\alpha$ , então

$$f_\alpha(h(x)) = (\dots, l_{-i} + u_{-i+1}, \dots, s_{-1} + u_0; l_0 + 1, \dots, l_k + t_k, \dots) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{l_{-i} + u_{-i+1}, \dots, l_0 + 1, \dots, l_k + t_k} \in \mathcal{Q}_{(-i,k)}.$$

Como a interseção é única, então  $h \circ f = f_\alpha \circ h$ . □

**Observação 5.2.3.** *Dada uma cobertura de  $\Delta_\alpha$ , é importante que o refinamento desta cobertura aconteça para o índice positivo e negativo simultaneamente, pois caso o refinamento seja feito apenas para um lado, o Item 3 do Teorema não é satisfeito. De fato, consideremos  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$  uma cobertura de  $\Delta_\alpha$ , com  $i$  fixo, notemos que*

$$C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k} \supset C_{-i, \dots, 0, \dots, k, k+1}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k, s_{k+1}} \supset \dots$$

a interseção

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+} C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}$$

não é um único ponto, basta notarmos que as sequências  $(\dots, a_0, s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k, \dots)$  e  $(\dots, b_1, s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k, \dots)$  pertencem a interseção acima.

O resultado central desta dissertação oferece condições para que uma função contínua definida em um espaço métrico compacto seja conjugada topologicamente com a aplicação da máquina de adição bilateral. Esse teorema constitui a principal contribuição deste trabalho.

**Teorema 5.2.2.** *Sejam  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Se  $X$  for um conjunto infinito,  $f$ -minimal e existe  $x \in X$  regularmente recorrente. Então existe uma sequência  $\alpha$  de números primos e uma aplicação  $\pi : X \rightarrow \Delta_\alpha$  contínua e sobrejetora tal que  $\pi \circ f = f_\alpha \circ \pi$ . Além disso, se  $x \in X$  é regularmente recorrente, então  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $n \in S(f)$ , por definição, existe  $N \subset X$  tal que  $N$  é  $f^n$ -minimal mas não é  $f^l$ -minimal com  $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Assim, pelo 4.0.3, existe  $t \leq n$  tal que

$$X = N \dot{\cup} f(N) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} f^{t-1}(N).$$

Assim, para cada  $n \in S(f)$ , existe uma única cobertura  $\mathcal{Q}_n$  de  $X$  consistindo de  $n$  conjuntos  $f^n$ -minimais dois a dois disjuntos, *clopens* e que são ciclicamente permutados por  $f$ . Seja  $p$  um número primo, consideremos  $\alpha = (\dots, 2, 2; p, p, \dots)$  uma sequência de números primos tal que  $M(2) = M(p) = \infty$  e definimos  $m_i = m_{(-i,k)} = 2^i \cdot p^{k+1}$ . Sabemos

que o primo  $p$  aparece  $M(p)$ -vezes, como  $p$  é um primo na sequência, então deve existir um  $j \in S(f)$  tal que  $p$  divide  $j$  e pela Afirmação 3,  $p \in S(f)$ . E pela Afirmação 4, concluímos que  $m_i \in S(f)$ .

Para cada  $i$ , consideremos  $\mathcal{Q}_{m_i} = \{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,m_i}\}$  uma cobertura de  $X$ . Pelo Lema 4.0.3, segue o item 1 do Teorema 5.2.1, e pela Afirmação 2, segue o Item 2 do Teorema 5.2.1. Dessa forma, podemos construir uma aplicação  $\pi : X \rightarrow \Delta_\alpha$  contínua e sobrejetora assim como foi feito na demonstração do Teorema 5.2.1 de tal forma que  $\pi \circ f = f_\alpha \circ \pi$ .

Por fim, provemos que  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ , com efeito, seja  $x \in X$  um ponto regularmente recorrente e suponhamos que existe  $y \in X$  com  $y \neq x$  tal que  $y \in \pi^{-1}(\pi(x))$ . Dessa forma, pela definição da aplicação  $\pi$ , existe uma sequência encaixada de conjuntos  $W_i \in \mathcal{Q}_{m_i}$  para cada  $i$  tal que

$$x, y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i.$$

Consideremos  $V$  uma vizinha de  $x$  tal que  $y \notin \bar{V}$ . Como  $x$  é regularmente recorrente, então existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $f^{nk}(x) \in V$  para todo  $k$  inteiro positivo. Sabemos  $\overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)} \subset \bar{V}$ , e pelo Lema 4.0.3 que  $\overline{\mathcal{O}_{f^n}^+(x)}$  é um conjunto  $f^n$ -minimal. Novamente, pelo Lema 4.0.3, existe  $t \leq n$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_{f^t}^+(x)}$  é  $f^t$ -minimal e  $t \in S(f)$ , assim, podemos escolher a sequência  $\alpha$  de modo que exista  $j$  tal que  $m_j = m_{(-j,k)}$  seja um múltiplo de  $t$ . Logo,  $x \in W_j$  e pela Afirmação 2, temos que  $W_j \subset \overline{\mathcal{O}_{f^t}^+(x)}$ . Como  $y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+} W_i$  então  $y \in \overline{\mathcal{O}_{f^t}^+(x)}$ , absurdo. Portanto,  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ .  $\square$

Embora o teorema principal estabeleça o resultado mais geral, na prática a formulação que se mostra mais frequentemente usada é a de seu corolário, apresentado a seguir.

**Teorema 5.2.3.** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Existe uma sequência  $\alpha$  de números primos tal que  $f$  é topologicamente conjugada a  $f_\alpha$  se, e somente se,  $X$  é  $f$ -minimal, infinito e todo ponto de  $X$  é ponto regularmente recorrente.*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ )

Sendo  $f$  e  $f_\alpha$  topologicamente conjugadas. Como  $\Delta_\alpha$  é infinito,  $X$  também é. Vimos anteriormente que  $\Delta_\alpha$  é  $f_\alpha$ -minimal, logo,  $X$  é  $f$ -minimal. Basta então mostrarmos que todo ponto de  $X$  é regularmente recorrente. Com efeito, como  $\Delta_\alpha$  é  $f_\alpha$ -minimal, então

$$\mathcal{O}_{f_\alpha}^+(x) \cap V \neq \emptyset, \text{ para cada } x \in \Delta_\alpha \text{ e para cada } V \text{ aberto em } \Delta_\alpha.$$

Em particular,

$$\mathcal{O}_{f_\alpha}^+(x) \cap U \neq \emptyset, \text{ para cada } x \in \Delta_\alpha \text{ e para cada } U \text{ vizinhança de } x.$$

Notemos que, por meio da caracterização dos abertos neste espaço, podemos considerar  $U = C_{-i, \dots, 0, \dots, k}^{s_{-i}, \dots, s_0, \dots, s_k}$ . Como queremos mostrar que  $x \in \Delta_\alpha$  é regularmente recorrente, isto é, exibir um inteiro positivo  $n$  tal que  $f^{kn}(x) \in U$  para cada inteiro positivo  $k$ . Com efeito, basta considerarmos  $n = 2 \cdot j^{k+1}$ , pois  $\mathcal{O}_{f^{nk}}^+(x) \cap U \neq \emptyset$ . Portanto, como todo ponto de  $\Delta_\alpha$  é regularmente recorrente, pela conjugação, todo ponto em  $X$  também é regularmente recorrente.

( $\Leftarrow$ )

Para a outra implicação, basta notarmos que para todo  $x \in X$ ,  $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ , logo,  $\pi$  é injetora.  $\square$

Além dos resultados obtidos acima, a aplicação da máquina de adição bilateral nos oferece um exemplo relevante de um homeomorfismo que não é do tipo *Zip-Shift*.

**Proposição 5.2.4.** *Seja  $\sigma_\tau$  a função *Zip-Shift* e  $X \subset \Delta_\alpha$  um espaço *Shift*. Então não existe uma sequência  $\alpha$  tal que  $\sigma_\tau|_X : X \rightarrow X$  seja topologicamente conjugada à aplicação da máquina de adição bilateral  $f_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha$ .*

*Demonstração.* Pelo Item 3 do Teorema 5.2.1, para todo  $\delta > 0$  existem  $x, y \in \Delta_\alpha$ , com  $x \neq y$ , pertencentes a um mesmo cilindro  $C_{(-i,k)} \in \mathcal{Q}_{(-i,k)}$ , com  $\text{diam}(C_{(-i,k)}) < \delta$ . Já pelo Item 1,  $f_\alpha$  permuta ciclicamente os elementos de  $\mathcal{Q}_{(-i,k)}$ , então  $f_\alpha^k(x), f_\alpha^k(y) \in C'_{(-i,k)} \in \mathcal{Q}_{(-i,k)}$ , daí

$$d(f_\alpha^k(x), f_\alpha^k(y)) < \delta \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, a aplicação da máquina de adição unilateral não é expansiva. Como o *Zip-Shift* homeomorfismo é expansivo, pela Proposição 5.1.2 e pela Observação 2.3.4, não é possível que  $\sigma_\tau$  e  $f_\alpha$  sejam topologicamente conjugadas.  $\square$

## 6 Considerações Finais

Neste trabalho estudamos a máquina de adição unilateral, suas propriedades dinâmicas e, principalmente, sua caracterização conforme apresentada em [3]. Para isso, iniciamos os estudos com uma introdução aos principais conceitos de sistemas dinâmicos topológicos, com ênfase em dinâmica simbólica.

Em seguida, apresentamos uma generalização da máquina de adição unilateral utilizando a estrutura dos espaços *Zip-Shifts*. Inicialmente, fixamos o alfabeto  $\mathcal{Z}$  com cardinalidade 2 e fixamos todas as coordenadas da sequência bi-infinita  $\alpha$  iguais a  $j$ . Nesse contexto, definimos a aplicação da máquina de adição bilateral e demonstramos alguns resultados que associam o espaço com à sua aplicação. Nesta etapa do estudo, podemos observar que a dinâmica da máquina de adição unilateral apresenta forte semelhança com a da máquina de adição bilateral, ou seja, até o ponto desenvolvido nesta pesquisa, ambas compartilham as mesmas propriedades dinâmicas relevantes.

O objetivo principal foi fornecer condições necessárias e suficientes para a existência de uma conjugação topológica entre essa aplicação da máquina de adição bilateral e uma função contínua definida em um espaço métrico compacto. Essa caracterização é de grande relevância no estudo de sistemas dinâmicos, pois a existência de uma conjugação topológica — ou mesmo de uma semiconjugação — indica que os espaços em questão compartilham um comportamento dinâmico semelhante. Como a conjugação preserva propriedades dinâmicas fundamentais, como a densidade de órbitas periódicas, ela se torna uma poderosa ferramenta na análise qualitativa de sistemas. Além disso, observamos que assim como a aplicação máquina de adição unilateral, a aplicação da máquina de adição bilateral constitui um exemplo de homeomorfismo que não é conjugado à uma aplicação do tipo *Zip-Shift*. Esse resultado comprova que, embora compartilhem aspectos simbólicos, há dinâmicas que exibem comportamentos essencialmente distintos do *Zip-Shift*, reforçando a importância de sua análise como objeto próprio na teoria.

Por fim, concluímos que este estudo também contribui para uma melhor compreensão de alguns conceitos da dinâmica simbólica, ao apresentar uma aplicação concreta dos espaços *Zip-Shifts* a um conjunto minimal infinito — no caso, a máquina de adição bilateral — que atua como modelo de referência na classificação de comportamentos regulares em sistemas dinâmicos [3]. Como perspectiva para trabalhos futuros, pretendemos ampliar esta abordagem, considerando  $\mathcal{Z}$  um alfabeto arbitrário e permitindo a variação dos elementos na sequência  $\alpha$ . Essa generalização poderá revelar uma estrutura dinâmica ainda mais rica, com novas possibilidades de caracterização topológica.

# Referências

- [1] BACKES, L; BARAVIERA, A.; BRANCO, F. **Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2023. Citado na página [22](#).
- [2] BEZUGLYI, S.; KARPEL, O. **Invariant measures for Cantor dynamical systems**. **Dynamics: Topology and Numbers**, Contemporary Mathematics, Volume 744, 2020. Citado na página [9](#).
- [3] BLOCK, L; KEESLING, J. **A characterization of adding machine maps**. *Topology and its Applications*, v. 140, n. 2-3, p. 151-161, 2004. Citado 3 vezes nas páginas [10](#), [35](#) e [68](#).
- [4] BRIN, M.; STUCK, G. **Introduction to dynamical systems**. Cambridge university press, 2002. Citado 2 vezes nas páginas [9](#) e [11](#).
- [5] Caprio, Danilo A.; Messaoudi, A.; Valle, G. **Stochastic adding machines based on Bratteli diagrams**. *Annales de l'Institut Fourier*, v. 70, n. 6, p. 2543–2581, 2020. Citado na página [9](#).
- [6] DEVANEY, R. **Chaotic Dynamical Systems**, Addison-Wesley Publ. Co., New York and Reading, MA. 1989. Citado na página [17](#).
- [7] DOWNAROWICK, T.; Maass, A. **Finite-rank Bratteli–Vershik diagrams are expansive**. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28(3):739–747, 2008. Citado na página [9](#).
- [8] DYSKTRA, A.; Şahin, A. **The Morse minimal system is nearly continuously Kakutani equivalent to the binary odometer**. *JAMA* 132, 311–353 (2017). Citado na página [9](#).
- [9] EINSIEDLER, M.; WARD, T. **Ergodic theory**. Springer, 2011. Nenhuma citação no texto.
- [10] GAO, S.; LI, R. **Subshifts of finite symbolic rank**. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2025;45(3):807–848. Citado na página [9](#).
- [11] GOTTSCHALK, W. H.; HEDLUND, G. **Topological Dynamics**. Providence: American Mathematical Society, 1955. Citado na página [9](#).
- [12] HENSEL, K. **Neue Grundlagen der Arithmetik**, *J. Reine Angew. Math.* 127, 1904. Citado na página [9](#).

- [13] IACO, M.R.; STEINER, W.; TICHY, R.F. **Linear Recursive Odometers and Beta-Expansions**. *Uniform Distribution Theory*, 11(1):175–186, 2016. Citado na página [9](#).
- [14] KATOK, A. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems**. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, v. 54, 1995. Citado na página [22](#).
- [15] LAMEI, S.; MEHDIPOUR, P. **Zip-Shift space**, 2022. [arXiv:2502.11272v1](#). Citado na página [9](#).
- [16] LIMA, E.L. **Espaços métricos**. Projeto Euclides, Brasília-DF, 1977. Citado na página [11](#).
- [17] LIND, D; MARCUS, B. **An introduction to symbolic dynamics and coding**. Cambridge university press, 1995. Citado 4 vezes nas páginas [9](#), [22](#), [28](#) e [33](#).
- [18] MEHDIPOUR, P.; SANTOS, R. M. S. **On a bi-lateral Adding Machine and its characterization**, 2025. [arXiv:2505.02149](#). Citado na página [55](#).
- [19] MUNKRES, J. **Topology**. Second Edition. Prentice Hall, 2000. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [16](#) e [23](#).
- [20] NEUMANN, J. **Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen**. *Annals of Mathematics*. 1933. Citado na página [9](#).
- [21] NIA, M. F. **Adding machine maps and minimal sets for iterated function systems**. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 15(1), 71–83, 2017. Citado na página [9](#).

# A Apêndice

## A.1 Propriedade da métrica associada à máquina de adição unilateral

**Proposição A.1.1.** *Sejam  $d_{\alpha^+}$  e  $d$  métricas sobre  $\Delta_{\alpha^+}$ , onde  $d$  é a métrica estabelecida no espaço  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^+}$ . Então as métricas  $d_{\alpha^+}$  e  $d$  são métricas equivalentes.*

*Demonstração.* Precisamos mostrar que existem números reais  $r, s > 0$  tais que

$$r \cdot d(x, y) \leq d_{\alpha^+}(x, y) \leq s \cdot d(x, y).$$

Sejam  $x, y \in \Delta_{\alpha^+}$  distintos, então  $d(x, y) = \frac{1}{2^n}$  com  $n = N(x, y)$ . Porém,  $\delta(x_i, y_i) = 0$  para  $i < n$  e  $\delta(x_n, y_n) = 1$ . Assim,

$$d_{\alpha^+}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{i+1}}.$$

Como

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{i+1}}$$

para  $r = 1$ ,  $1 \cdot d(x, y) \leq d_{\alpha^+}(x, y)$ .

Por outro lado, suponhamos que as sequências  $x$  e  $y$  diferem pela primeira vez no índice  $n$ . Então

$$d_{\alpha^+}(x, y) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} = d(x, y).$$

Para  $s = 1$ , obtemos  $d_{\alpha^+}(x, y) \leq s \cdot d(x, y)$ . Concluimos então que as métricas são de fato equivalentes.  $\square$