

GERALDO MOREIRA DA ROCHA FILHO

**SÓLITONS DINÂMICOS EM FERROMAGNETOS DE
HEISENBERG BIDIMENSIONAIS DE EIXO-FÁCIL**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada para a obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2002**

Á minha querida mamãe Laurinda do Carmo
Rocha e em memória de meu pai Geraldo
Moreira da Rocha.

AGRADECIMENTOS

- À minha mãe, pelo seu incentivo e apoio.
- Ao professor Afranio Rodrigues Pereira, pela orientação.
- Aos professores e funcionários do departamento de Física da UFV.
- A CAPES, pela bolsa concedida.
- Aos colegas de mestrado e companheiros de mais esta jornada.
- Ao professor Ismael Lima Menezes Sobrinho, pela sua amizade e atenção.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELA	vi
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1. INTRODUÇÃO GERAL	1
1.1 Materiais Magnéticos em dimensões baixas.....	1
1.2 Sistemas bidimensionais: hamiltoniana de Heisenberg e excitações não lineares...	4
2. O SÓLITON DE BELAVIN E POLYAKOV	9
2.1 Teorema de Derrick-Hobart.....	9
2.2 O modelo σ não linear.....	11
2.3 O modelo σ não linear e o ferromagneto isotrópico.....	22
2.4 Sóliton de carga topológica $Q = 1$	26
3. SÓLITONS DINÂMICOS EM FERROMAGNETOS DE HEISENBERG BIDIMENSIONAIS DE EIXO-FÁCIL	30
3.1 Introdução.....	30
3.2 Desenvolvimento teórico.....	31
CONCLUSÕES GERAIS	43
BIBLIOGRAFIA	46

LISTA DE FIGURAS

1.1 Estrutura típica de um material magnético unidimensional ($CsNiF_3$)	2
1.2 Estrutura típica de um material magnético bidimensional (K_2NiF_4)	3
1.3 Um vórtice livre.....	5
1.4 Um par vórtice-antivórtice ligado.....	6
1.5 Distribuição de magnetização de um sóliton localizado.....	7
2.1a e 2.1b Exemplo de mapeamento que dá origem ao sóliton.....	14
2.2 Campo de spin do sóliton de Belavin-Polyakov.....	15
2.3 Spin S_i^α e seus quatro primeiros vizinhos mais próximos.....	23
2.4 Vetor de spin \vec{S}^μ escrito em coordenadas esféricas.....	28
3.1 Vetor unitário de spin $\vec{\psi}$ parametrizado em coordenadas esféricas.....	31
3.2 Gráfico de $m \times r$ para $\omega = 0.4\omega_0$, $R = 1a$ e $\lambda = 10^{-2}$	38
3.3 Gráfico de $m \times r$ para $\omega = \omega_0$, $R = 1a$ e $\lambda = 10^{-2}$	40
3.4 Gráfico de $m \times r$ para $\omega = 1.3\omega_0$, $R = 1a$ e $\lambda = 10^{-2}$	41

LISTA DE TABELA

1.1 Exemplos de alguns materiais uni e bidimensionais, com seus respectivos valores de spin.....	3
--	---

RESUMO

ROCHA FILHO, Geraldo Moreira da, M. S., Universidade Federal de Viçosa, dezembro, 2002. **Sólitons Dinâmicos em Ferromagnetos de Heisenberg Bidimensionais de Eixo-Fácil**. Orientador: Afranio Rodrigues Pereira; Conselheiros: José Arnaldo Redinz, Marcelo Lobato Martins e Ricardo Reis Cordeiro.

Avanços técnicos na preparação de materiais produzem um número considerável de compostos ferro e antiferromagnéticos reais quase bidimensionais disponíveis, incluindo estruturas de camada, grafite intercalada magneticamente e supercondutores à alta temperatura baseados em cobre. Esses vários materiais não exibem apenas modos espacialmente estendidos (ondas de spin) como excitações, mas também estruturas espacialmente locais, tais como pares de vórtices, sólitons (skyrmions), paredes de domínio, etc, que são características de sistemas altamente não lineares. Sólitons dinâmicos podem ser gerados em materiais ferromagnéticos bidimensionais ao fazermos uso do bombeamento de microondas. A condição para a geração de sólitons dinâmicos é que a anisotropia de eixo-fácil seja fraca. Nesse trabalho, estudamos a possibilidade da existência de sólitons dinâmicos com frequência de precessão alta ($\omega \geq \omega_0$, onde ω_0 é a frequência de ressonância) nos ferromagnetos clássicos bidimensionais com anisotropia de eixo-fácil. Nossos resultados mostram que na frequência de ressonância ($\omega = \omega_0$), a estrutura de um sóliton parece com um vórtice tendo energia que aumenta logarithmicamente com o tamanho do sistema. Para $\omega > \omega_0$, o sóliton tem um diâmetro que depende da competição entre a anisotropia de eixo-fácil e o termo dinâmico. O comportamento da possibilidade $\omega < \omega_0$ mostra que a solução sóliton é instável e portanto nosso tratamento perturbativo não pode ser aplicado para esta situação.

ABSTRACT

ROCHA FILHO, Geraldo Moreira da, M. S., Universidade Federal de Viçosa, dezembro, 2002. **Sólitos Dinâmicos em Ferromagnetos de Heisenberg Bidimensionais de Eixo-Fácil**. Orientador: Afranio Rodrigues Pereira; Conselheiros: José Arnaldo Redinz, Marcelo Lobato Martins e Ricardo Reis Cordeiro.

Technical advances in materials preparation have made a considerable number of real quasi-two-dimensional ferro and antiferromagnetic compounds available, including layered structures, magnetically intercalated graphite and Cu-based high-temperature superconductors. These various materials exhibit not only spatially extended modes (spin waves) as excitations, but also spatially local structures, such as vortex-pairs, solitons (skyrmions), domain walls, etc, characteristic of highly non-linear systems. Dynamical solitons may be generated in two-dimensional ferromagnetic materials by using microwave pumping. The condition of successful generation of dynamical solitons demands the weakness of easy-axis anisotropy. In this work, we study the possibility of existence of dynamical solitons with high precession frequency ($\omega \geq \omega_0$, where ω_0 is the resonance frequency) in two-dimensional classical ferromagnets with easy-axis anisotropy. To obtain the soliton solutions we use a perturbative treatment. Our results show that at the resonance frequency ($\omega = \omega_0$), the soliton structure looks like a vortex having energy increasing logarithmically with the system size. For $\omega > \omega_0$, the soliton has a diameter that depends on the competition between the easy-axis anisotropy and the dynamic term. The behavior of the case $\omega < \omega_0$ shows that the soliton solution is unstable and hence our perturbative treatment cannot be applied to this situation.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

1.1 Materiais magnéticos em dimensões baixas

O estudo sobre o magnetismo em dimensões baixas (1 e 2 dimensões) teve seu impulso devido à simplificação dos cálculos matemáticos relacionados à dimensionalidade baixa do sistema. Um exemplo particular é o modelo de Ising, resolvido exatamente em uma e duas dimensões.

Um aspecto importante em estudar materiais magnéticos em dimensões baixas é o fato de que a natureza nos fornece uma grande variedade de compostos com estas características. Há aproximadamente três décadas atrás, físicos e principalmente químicos passaram a produzir materiais magnéticos que crescem em estruturas constituídas de cadeias ou de camadas, dando apoio às idéias de magnetos uni e bidimensionais. Assim novas teorias de campo e de matéria condensada em dimensões abaixo de três se desenvolveram muito, pois elas poderiam ser elaboradas e principalmente testadas através destes materiais artificiais. De fato, hoje em dia podemos dizer que, em muitas situações, as leis da Física são mais complexas e complicadas e conseqüentemente mais interessantes de serem analisadas em dimensões mais baixas, do que as existentes no mundo real tridimensional.

No magnetismo, as cadeias ou camadas que formam as estruturas dos materiais são separadas por radicais orgânicos ou íons de metais alcalinos que produzem uma interação de troca inter-cadeia ou inter-camada muito fraca. O resultado disso é que o material apresenta um comportamento de dimensão mais baixa. Apesar da interação de troca entre cadeias ou camadas ser muito pequena, estes materiais podem ainda apresentar uma ordem tridimensional em temperaturas muito baixas, como a do hélio líquido. Assim para uma temperatura acima da de ordenamento tridimensional, o

material magnético apresentará um comportamento de dimensionalidade baixa, sendo sua composição particular constituída de uma estrutura de cadeia (unidimensional) ou de camada (bidimensional). Esta é a denominada “região de flutuações” e é nela que modelos teóricos sobre o magnetismo $1D$ e $2D$ são testados experimentalmente.

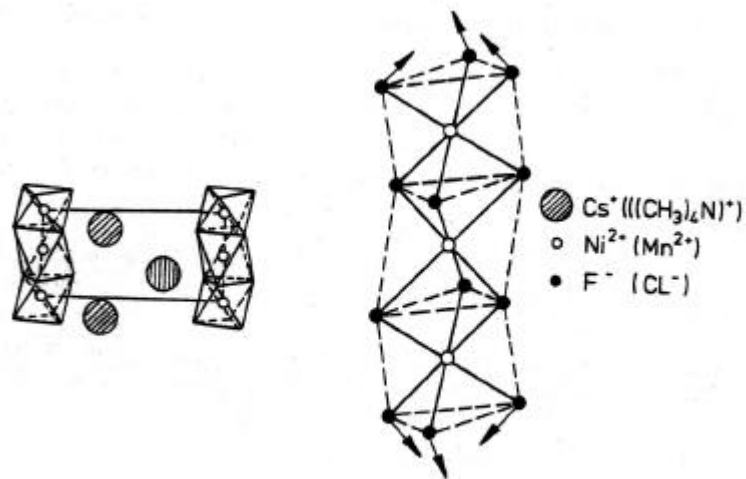


Fig. 1.1: Estrutura típica de um material magnético unidimensional ($CsNiF_3$).

Um exemplo de material magnético unidimensional, talvez o mais ideal, é o cristal de $CsNiF_3$, mostrado na figura 1.1. Como exemplo de material magnético que possui um comportamento basicamente bidimensional podemos citar a estrutura típica de grafite magneticamente intercalada (K_2NiF_4) (figura 1.2).

A teoria geral sobre o magnetismo supõe que o spin do íon constituinte da estrutura de um material é responsável pela sua magnetização. Spin é um conceito puramente quântico, portanto sistemas magnéticos reais são descritos pelas leis da mecânica quântica. Porém, em magnetismo, a importância relativa de efeitos quânticos é dada pela razão entre $S(S + 1)$ e S^2 , onde S é o número quântico de spin. O produto $S(S + 1)$ representa o auto-valor do operador de spin S^2 . Assim os efeitos quânticos intrínsecos têm um “peso” dado pelo fator $1/S$. Para spin $5/2$, $1/S$ é suficientemente pequeno de maneira que o uso de uma aproximação clássica torna-se razoável.

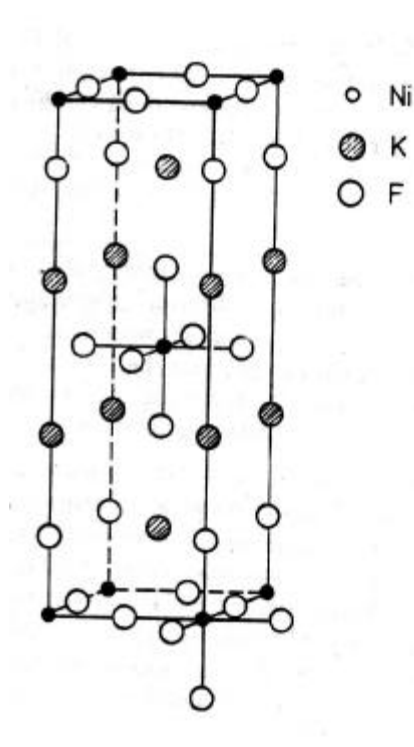


Fig. 1.2: Estrutura típica de um material magnético bidimensional (K_2NiF_4).

Cristais $1d$		Cristais $2d$	
Material	Spin (S)	Material	Spin (S)
$CuSO_4 \cdot 5H_2O$	1/2	K_2MnF_4	5/2
$CuCl_2 \cdot 2N.C_5H_5$ (CPC)	1/2	K_2CuF_4	1/2
$\alpha - Cu.N.Sal$	1/2	K_2NiF_4	1
$CsNiCl_3$	1	Rb_2MnF_4	5/2
$CsNiF_3$	1	$BaCo_2(PO_4)_2$	1/2
$CsNiCl_3 \cdot 2H_2O$	5/2	$BaCo_2(AsO_4)_2$	1/2
$CH_3N.MnCl_3$ (TMMC)	5/2	$BaNi_2(PO_4)_2$	1

Tabela 1.1: Exemplos de alguns materiais uni e bidimensionais, com seus respectivos valores de spin.

Tal aproximação consiste em considerar o spin como um vetor clássico. Obviamente, o problema se torna mais simples se spins grandes são tomados como variáveis clássicas, isto é, vetores. Um exemplo que se encaixa bem nesta aproximação é o cristal de

$(CH_3)_4NMnCl_3$, onde o magnetismo está associado ao íon de Mn^{++} . O Mn^{++} tem um número quântico de spin grande cujo valor é $S = 5/2$. Evidentemente, existem muitos outros sistemas uni e bidimensionais, com números quânticos de spin grandes, tais que a aproximação clássica pode ser aplicada, levando a excelentes resultados. A tabela 1.1 mostra alguns exemplos de materiais magnéticos uni e bidimensionais com seus respectivos spins.

1.2 Sistemas bidimensionais: hamiltoniana de Heisenberg e excitações não lineares

Como enfatizado antes, o melhoramento nas técnicas de preparação e produção de novos materiais tem colocado em disponibilidade no mercado um número expressivo de sistemas ferro e antiferromagnéticos bidimensionais, incluindo estruturas de camadas, grafites intercaladas magneticamente ($CoCl_2 - GIC$) [1,2], K_2XF_4 ($X = Cu, Ni, Mn$) [3], $BaM_2(XO_4)$ ($M = Co, Ni; X = P, As$) [4] e supercondutores à alta temperatura baseados em cobre. Do ponto de vista magnético, estes vários materiais não exibem apenas modos que se estendem espacialmente (ondas de spin) como excitações, mas também estruturas espacialmente locais, tais como vórtices, sólitons, paredes de domínio etc, que são características de sistemas fortemente não lineares. A maioria destes sistemas pode ser descrita (em primeira aproximação) pelo modelo de Heisenberg anisotrópico ($2D$) cuja hamiltoniana é dada por

$$H = \pm J \sum_{(i,j)} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \lambda S_i^z S_j^z), \quad (1.1)$$

em que \vec{S}_i é o spin do átomo localizado no sítio i , (i, j) indica pares de sítios vizinhos mais próximos em uma rede bidimensional, $J > 0$ é a constante de acoplamento, os sinais $(-)$ e $(+)$ implicam em constantes ferromagnética e antiferromagnética respectivamente e λ é a constante de anisotropia. As redes podem ter vários tipos de geometria, podendo ser quadrada, triangular, hexagonal etc.

A hamiltoniana acima reproduz, para certos valores de λ , os seguintes modelos teóricos que são muito usados no magnetismo:

- 1 - $\lambda = 0$, modelo de Heisenberg isotrópico;
- 2 - $\lambda = -1$, modelo XY ;
- 3 - $-1 < \lambda < 0$, modelo de plano-fácil (tipo - XY);
- 4 - $\lambda > 0$, modelo de eixo-fácil (tipo - Ising).

Estes modelos são classificados dessa forma devido à tendência de orientação dos spins para minimizar a energia do estado fundamental do sistema. Por exemplo, nos casos 2 e 3 ($-1 \leq \lambda < 0$) os spins tendem a se orientar paralelamente ao plano (XY), isto é, o eixo z é um eixo difícil. No caso 4 os spins tendem a apontar em uma direção perpendicular ao plano, ou seja, na direção z . O caso 1 é caracterizado pela falta de qualquer direção preferencial para os spins.

As excitações não lineares (topológicas) que apresentam um comportamento de pseudopartículas surgem nesses sistemas magnéticos ($2D$) por causa da dimensionalidade baixa e a não linearidade dos modelos teóricos usados no magnetismo. Assim para o caso de magnetos bidimensionais de plano-fácil ($-1 \leq \lambda < 0$), as excitações topológicas recebem o nome de vórtices (ver figuras 1.3 e 1.4). Esses vórtices têm uma participação ativa nas propriedades estáticas [5] do sistema, e também, acredita-se que eles são importantes na dinâmica [6-9] de spins. Para

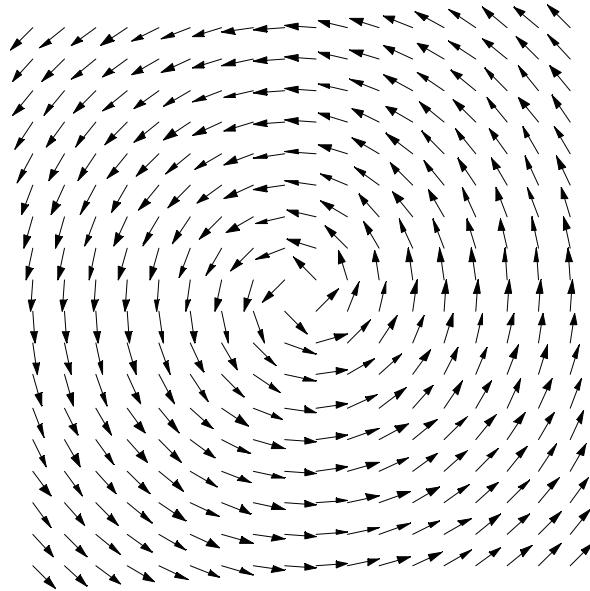


Fig.1.3: Um vórtice livre. Esta estrutura desempenha papel importante nas propriedades estáticas de materiais magnéticos bidimensionais, em sistemas de plano-fácil.

o caso isotrópico, $\lambda = 0$ (modelo de Heisenberg $2D$), essas excitações foram obtidas por Belavin e Polyakov, usando métodos topológicos e são conhecidas pelo nome de sólitons [10] (ver figura 1.5). No entanto, existe muita coisa para ser explicada, quando é considerada a aplicação dos sólitons em sistemas reais, desde que, uma hamiltoniana de spin mais realista deva incluir anisotropia. Infelizmente, magnetos com anisotropia de eixo-fácil ($\lambda > 0$) não sustentam soluções estáticas do tipo sólitons, como pode ser demonstrado pelo teorema de Derrick-Hobart [11]. De fato tais excitações são instáveis e acabam por colapsar. Entretanto, tais excitações topológicas podem ter um tempo de vida longo para o caso da anisotropia de eixo-fácil pequena, e assim, existe a possibilidade delas desempenharem um papel importante nas propriedades do sistema [12].

Em sistemas de plano-fácil, existem muitas propriedades estáticas e dinâmicas que estão relacionadas diretamente com vórtices [5-8] (ver figura 1.3). Aqui faremos apenas um breve relato sobre tais sistemas de plano-fácil, já que este não é o caso de nosso interesse principal. No entanto, o resumo sobre tal assunto poderá servir como um guia para nossos estudos sobre sistemas magnéticos $2D$ de eixo-fácil.

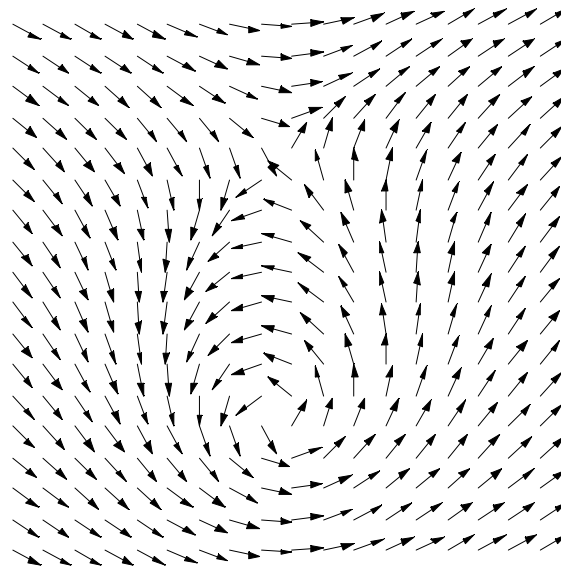


Fig.1.4: Um par vórtice-antivórtice ligado. A interação entre o vórtice e o antivórtice é uma função logarítmica da distância entre eles. Em geral, estas excitações são criadas aos pares. Em uma temperatura crítica conhecida pelo nome de temperatura de Kosterlitz-Thouless, eles começam a se separar gerando vórtices livres.

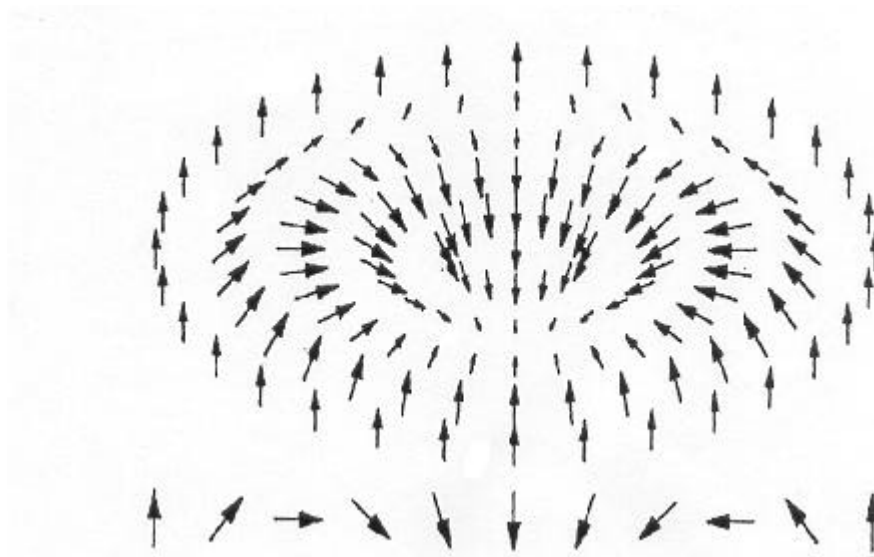


Fig. 1.5: Distribuição de magnetização de um sóliton localizado.

A possibilidade de transição de fase e a natureza da ordem de longo alcance (*OLA*) que podem ocorrer em sistemas magnéticos são especialmente interessantes. Dos quatro modelos bidimensionais apresentados podemos dizer o seguinte: no modelo de Heisenberg $2D$ isotrópico ($\lambda = 0$), não é esperado ocorrer nenhuma transição à temperatura finita. Um tipo de transição de fase que merece realmente ser discutida, por seu caráter peculiar, acontece nos modelos com anisotropia de plano-fácil, incluindo o modelo XY , que abrangem uma faixa entre $-1 \leq \lambda < 0$. Os sistemas magnéticos $2D$ de plano-fácil não possuem ordem de longo alcance, ou seja, o valor esperado da magnetização é zero em qualquer temperatura finita ($T \neq 0$). Esta ordem é destruída por excitações chamadas ondas de spin, em qualquer temperatura $T > 0$. No entanto, um fato extraordinário conhecido é que, apesar de não possuírem *OLA*, existem evidências de várias naturezas de que tais sistemas exibem uma transição de fase, mas é claro que ela não pode ser do tipo usual com magnetização média finita abaixo de certa temperatura crítica T_c . Estes sistemas exibem uma transição de fase em uma temperatura $T_{kT} > 0$. Em um trabalho de relevância fundamental [5], esta transição de fase foi explicada por Kosterlitz-Thouless como sendo devida a vórtices. Para $T < T_{kT}$ só existem pares ligados vórtice-antivórtice (ver figura 1.4). Para $T > T_{kT}$, estes pares se desligam e o sistema passa a abrigar vórtices livres (ver figura 1.3). A temperatura T_{kT} é

estimada como sendo aproximadamente $0.89|J|S^2$. Excitações do tipo vórtice são também importantes nas propriedades dinâmicas destes sistemas de plano-fácil.

Enquanto sistemas magnéticos $2D$ de plano-fácil são razoavelmente bem compreendidos, o mesmo não pode ser dito sobre os sistemas $2D$ de eixo-fácil ($\lambda > 0$), tipo Ising. Um fato conhecido é que estes sistemas possuem *OLA* em temperaturas baixas e exibem uma transição de fase de 2^a ordem a uma temperatura crítica T_c . No entanto nada é conhecido sobre a contribuição de sólitons (se é que eles contribuem) para a transição de fase do sistema.

Em sistemas $2D$, a contribuição de sólitons (vórtices) para função correlação dinâmica pode, em princípio, ser verificada experimentalmente, devido ao fato do movimento de translação destas estruturas produzir o denominado pico central na função de correlação dinâmica [7,8,13-15]. O movimento de sólitons também leva a um aumento na largura de linha *EPR* em temperaturas na região de flutuação e isso fornece mais uma maneira experimental para sua detecção. Outra forma de observarmos a presença destas estruturas é através de suas interações com mágnons (ondas de spin) em que possíveis estados ligados de mágnons estariam localizados no sóliton. Estes modos locais possuem frequências características [16-19] bem definidas que podem ser detectadas por ressonância magnética ou espalhamento de nêutrons.

CAPÍTULO 2

O SÓLITON DE BELAVIN E POLYAKOV

Sólitons são soluções estáticas, com energia finita diferente de zero das equações de movimento obtidas do limite contínuo da hamiltoniana (1.1) para o caso isotrópico. Antes de apresentarmos a solução sóliton de Belavin e Polyakov, comentaremos sobre o teorema de Derrick-Hobart (teorema do virial). Este teorema nos dá um resultado essencialmente negativo, pois ele nos mostra que sólitons estáticos são instáveis em modelos de teoria de campo em dimensões espaciais maiores que 3. A discussão em questão é análoga ao do livro texto de R. Rajaraman [20].

2.1 Teorema de Derrick-Hobart

O teorema de Derrick-Hobart nos diz que soluções de ondas solitárias estáticas (sólitons) não podem existir quando a dimensionalidade do espaço é maior ou igual a 3 e quando a lagrangiana do sistema tem a seguinte forma relativística padrão,

$$\mathcal{L}(\dot{x}, t) = (\partial_\mu \Psi)(\partial^\mu \Psi) - U(\Psi(\dot{x}, t)), \quad (2.1)$$

em que $\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^N} \right)$ é a derivada covariante e $\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x^N} \right)$ é a derivada contravariante. Aqui $\Psi(\dot{x}, t) = [\psi_i(\dot{x}, t); i = 1 \dots N]$ é um conjunto de N campos escalares acoplados no espaço com D dimensões espaciais e uma temporal. Explicitamente o produto escalar é escrito como

$$(\partial_\mu \overset{\rho}{\Psi}) \cdot (\partial^\mu \overset{\rho}{\Psi}) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \overset{\rho}{\Psi}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \overset{\rho}{\Psi}}{\partial x^1} \right)^2 - \left(\frac{\partial \overset{\rho}{\Psi}}{\partial x^2} \right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial \overset{\rho}{\Psi}}{\partial x^N} \right)^2,$$

onde foi adotada a convenção da soma de Einstein. O potencial $U(\overset{\rho}{\Psi}(\overset{\rho}{x}, t))$ é uma função positiva, indo a zero apenas em seu mínimo absoluto. As equações de movimento para o campo $\overset{\rho}{\Psi}(\overset{\rho}{x}, t)$ podem ser obtidas da condição de extremo $\delta W = 0$, ou seja

$$\partial_\mu (\partial^\mu \overset{\rho}{\Psi}) - (\partial^\mu \overset{\rho}{\Psi})_{,\mu} = 0.$$

Assim, no caso estático $(\partial \overset{\rho}{\Psi} / \partial t) = 0$, obtemos:

$$\nabla^2 \overset{\rho}{\Psi} = \frac{\partial U(\overset{\rho}{x})}{\partial \overset{\rho}{\Psi}}, \quad (2.2)$$

onde ∇^2 é o laplaciano tomado em D dimensões. No caso estático, a energia funcional fica

$$\begin{aligned} W[\overset{\rho}{\Psi}] &\equiv \int d^D x \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\overset{\rho}{\nabla} \psi_i)^2 + U(\overset{\rho}{\Psi}(\overset{\rho}{x})) \right] \\ &\equiv V_1[\overset{\rho}{\Psi}] + V_2[\overset{\rho}{\Psi}], \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde os funcionais são $V_1 = \frac{1}{2} \int d^D x \sum_{i=1}^N (\overset{\rho}{\nabla} \psi_i)^2$ e $V_2 = \int d^D x U(\overset{\rho}{\Psi}(\overset{\rho}{x}))$. Note que W , V_1 e V_2 são positivos. Agora suponha que $\overset{\rho}{\Psi}_I(\overset{\rho}{x})$ seja uma solução estática. Considere a família de configurações de parâmetro δ dada por

$$\overset{\rho}{\Psi}_\delta(\overset{\rho}{x}) = \overset{\rho}{\Psi}_I(\delta \overset{\rho}{x}). \quad (2.4)$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned}
W[\Psi_\delta^0] &= V_1[\Psi_\delta^0] + V_2[\Psi_\delta^0] \\
&= \delta^{2-D} V_1[\Psi_1^0] + \delta^{-D} V_2[\Psi_1^0].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Visto que $\Psi_1^0(x)$ é uma solução estática e portanto é um extremo de $W[\Psi]$, ele deve fazer $W[\Psi_\delta^0]$ estacionário com respeito a variações em δ , isto é,

$$(d/d\delta) W[\Psi_\delta^0] = 0 \text{ para } \delta = 1. \tag{2.6}$$

Diferenciando (2.5) e usando (2.6), obtemos

$$(2-D) V_1[\Psi_1^0] = D V_2[\Psi_1^0]. \tag{2.7}$$

Desde que V_1 e V_2 são positivos, (2.7) não pode ser satisfeito para dimensões $D \geq 3$, exceto se $V_1[\Psi_1^0] = V_2[\Psi_1^0] = 0$. Isto significa que $\Psi_1^0(x)$ tem de ser independente do espaço e igual a um dos zeros de $U[\Psi]$. Este teorema, portanto impede soluções não nulas dependentes do espaço. Os resultados mantêm apenas para soluções estáticas e para lagrangianas do tipo dado pela equação (2.1). No entanto ondas solitárias dependentes do tempo podem existir para campos escalares em $(D+1)$ dimensões mesmo quando $D \geq 3$.

2.2 O modelo s não linear

A equação (2.7) nos diz que se $D = 2$, $V_2[\Psi_1^0] = 0$. Isto significa que, $\Psi_1^0(x)$, para todo x , deva ser um dos zeros (que também é o mínimo absoluto) do potencial $U[\Psi]$. Se $U[\Psi]$ tem apenas mínimos discretos então, pela continuidade, $\Psi_1^0(x)$ deve ser o mesmo mínimo de $U[\Psi]$ para todo x . Se $U[\Psi]$ tem um conjunto contínuo de mínimos, então (2.7) permitiria, quando $D = 2$, uma solução possível dependente de x , onde Ψ muda continuamente dentro deste conjunto de mínimos.

É claro que o exemplo mais simples de $U[\overset{\rho}{\Psi}]$ com mínimos contínuos é $U[\overset{\rho}{\Psi}] = 0$. Entretanto isto faz o modelo simples demais. A equação obedecida por uma solução estática, quando derivada da lagrangiana (2.1), seria

$$\nabla^2 \overset{\rho}{\Psi} = 0, \quad (2.8)$$

cujas únicas soluções não-singulares são funções constantes. Mas nós podemos introduzir uma mudança não trivial ao modelo pela imposição da identidade $\overset{\rho}{\Psi} \cdot \overset{\rho}{\Psi} = 1$. Tal modelo é conhecido por O(N) não linear. Nós estudaremos o caso $N = 3$ e veremos que ele produz soluções interessantes [21,22].

O modelo O(3) não linear ou modelo σ não linear consiste de três campos escalares reais $\psi(\overset{\rho}{x}, t) = \{\psi_a(\overset{\rho}{x}, t); a = 1, 2, 3\}$, com o vínculo

$$\sum_a \psi_a^2(\overset{\rho}{x}, t) \equiv \overset{\rho}{\Psi} \cdot \overset{\rho}{\Psi} = 1. \quad (2.9)$$

obedecido para todo $(\overset{\rho}{x}, t)$. A dinâmica é determinada pela densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}(\overset{\rho}{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_a \sum_a (\partial_\mu \psi^a) \cdot (\partial^\mu \psi^a) \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \overset{\rho}{\Psi}) \cdot (\partial^\mu \overset{\rho}{\Psi}). \quad (2.10)$$

Note que $\overset{\rho}{\Psi}$ pode ser considerado como um vetor tridimensional cujas componentes são rotuladas pelo índice a pertencentes ao espaço interno ou espaço campo. Usa-se isto para distinguí-lo de vetores no espaço de coordenadas, os quais são rotulados por índices de Lorentz, tal como μ em (2.10). Assim em (2.10), um produto escalar entre $\partial_\mu \overset{\rho}{\Psi}$ com ele próprio está indicado pelo ponto, no espaço interno. No espaço de coordenadas este produto é expresso pelo índice repetido μ . Nós notamos também, que ambas, a lagrangiana (2.10) e a identidade (2.9), são invariantes sob rotações globais O(3) no espaço interno.

A equação de campo é obtida ao aplicarmos o princípio variacional de Euler-Lagrange para a ação, com a identidade (2.9) imposta através de um multiplicador de Lagrange. Isto é, nós encontramos o extremo da função

$$S[\Psi^{\rho}] \equiv \int d\vec{x} \int dt \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu} \Psi^{\rho}) (\partial^{\mu} \Psi^{\rho}) + \lambda(\vec{x}, t) (\Psi^{\rho} \cdot \Psi^{\rho} - 1) \right]. \quad (2.11)$$

A equação de campo resultante é

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \Psi^{\rho} + \lambda \Psi^{\rho} = (\square + \lambda) \Psi^{\rho} = 0. \quad (2.12)$$

O multiplicador de Lagrange $\lambda(\vec{x}, t)$ é eliminado ao usarmos a identidade (2.9).

$$\lambda(\vec{x}, t) = \lambda \Psi^{\rho} \cdot \Psi^{\rho} = -\Psi^{\rho} \cdot \square \Psi^{\rho}, \quad (2.13)$$

onde $\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu}$ é o Dalambertiano definido por

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

Restringindo-nos ao espaço bidimensional e considerando soluções estáticas, a equação de campo fica, ao substituírmos (2.13) em (2.12),

$$\nabla^2 \Psi^{\rho} - (\Psi^{\rho} \cdot \nabla^2 \Psi^{\rho}) \Psi^{\rho} = 0. \quad (2.14)$$

Ao contrário de (2.8), a equação (2.14) produz soluções não singulares interessantes em duas dimensões. Além disso, as soluções podem ser classificadas dentro de setores homotópicos caracterizados por um índice topológico.

A energia de uma solução estática, quando obtida da lagrangiana (2.10), é dada por

$$E = \frac{1}{2} \int (\partial_{\mu} \Psi^{\rho}) \cdot (\partial^{\mu} \Psi^{\rho}) d^2 x; \quad \mu = 1, 2. \quad (2.15)$$

Consideremos primeiro as soluções de energia-zero. Obviamente elas devem satisfazer para todo \vec{x} a condição $\partial_{\sigma} \Psi^{\rho} = 0$. Isto é, $\Psi^{\rho}(\vec{x}) = \Psi^{\rho 0}$, onde $\Psi^{\rho 0}$ é um vetor constante e unitário no espaço interno. Enquanto $\Psi^{\rho 0}$ é independente de \vec{x} para uma solução $E = 0$,

ele pode apontar em uma direção qualquer no espaço interno, onde ele é um vetor unitário (por causa da identidade (2.9)). Assim temos uma família de soluções contínuas e degeneradas com $E = 0$, correspondentes às direções nas quais $\vec{\Psi}^0$ poderia apontar. Isto implica em uma quebra de simetria espontânea a nível clássico.

Agora nós passamos para soluções sólitons, isto é, aquelas com E finito e diferente de zero. De (2.15), está claro que elas devem satisfazer, ao usarmos coordenadas (r, φ) no espaço \vec{x} , as condições,

$$r \|\text{grad } \vec{\Psi}^0\| \rightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

ou

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\Psi}^0(\vec{x}) = \vec{\Psi}^0(\theta), \quad (2.17)$$

onde $\vec{\Psi}^0$ é novamente algum vetor unitário no espaço interno. Note que quando $r \rightarrow \infty$ no espaço de coordenadas em direções diferentes, $\vec{\Psi}^0(\vec{x})$ deve aproximar do mesmo limite de $\vec{\Psi}^0$. Caso contrário $\vec{\Psi}^0(\vec{x})$ dependerá da coordenada angular φ , mesmo em $r = \infty$, e a componente angular do gradiente, $(1/r)(\partial\psi/\partial\varphi)$ não satisfaz a equação (2.16).

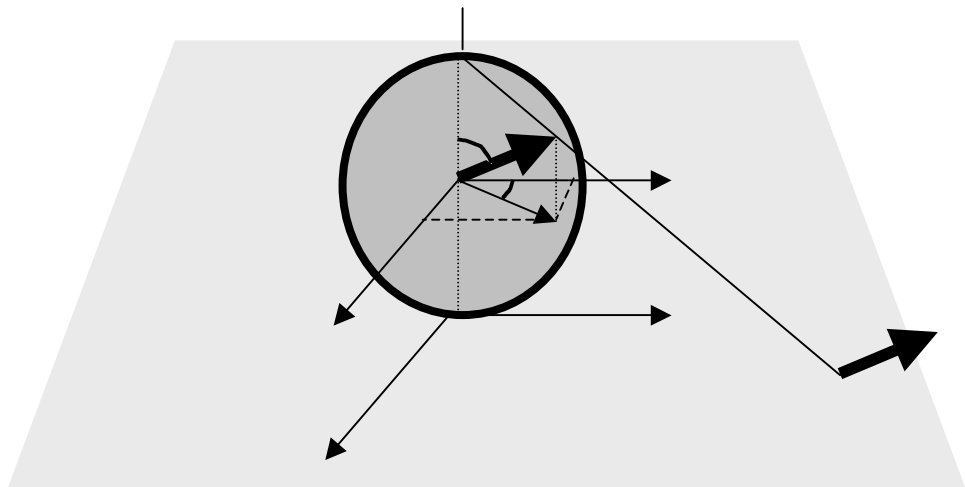


Fig. 2.1a

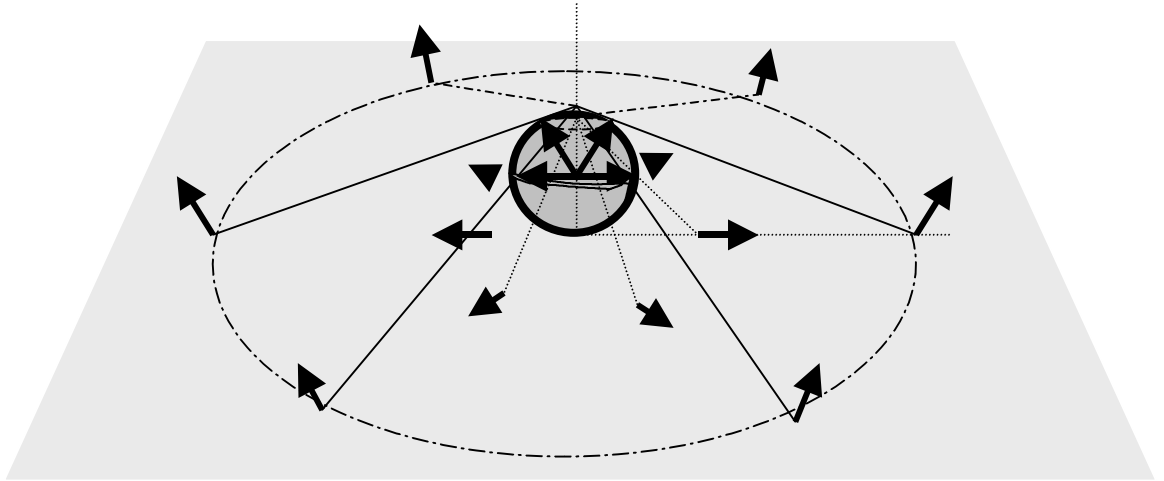


Fig. 2.1b

Figs. 2.1a e 2.1b: Exemplo de mapeamento que dá origem ao sóliton. O espaço dos spins é uma esfera. O espaço físico bidimensional é o plano.

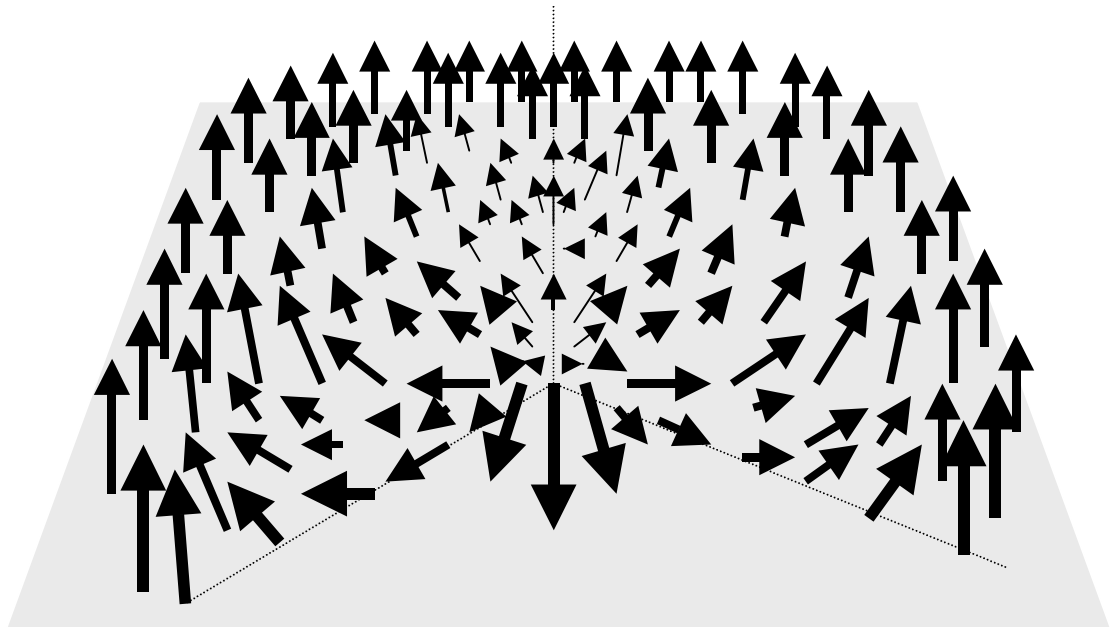


Fig. 2. 2: Campo de spin do sóliton de Belavin-Polyakov.

Desde que $\Psi(x)$ aproxima do mesmo valor de Ψ^0 para todos os pontos no infinito, o plano físico de coordenada R_2 é essencialmente compactado em uma superfície esférica, que chamaremos $S_2^{(fis)}$ (ver figura 2.1a). Assim, o plano R_2 pode

ser moldado em uma superfície esférica, com o círculo no infinito reduzido ao pólo norte da esfera. Enquanto isso, o espaço interno, isto é, o espaço dos campos Ψ_a , sujeito a $\sum_{a=1}^3 \Psi_a^2 = 1$, é também uma superfície esférica, de raio unitário. Vamos chamar isto de $S_2^{(int)}$. Então, qualquer configuração estática com energia finita para o campo $\Psi(x)$ é justamente um mapeamento de $S_2^{(fis)}$ em $S_2^{(int)}$.

Agora, assumiremos um resultado muito conhecido em topologia. Todos os mapeamentos não singulares de uma superfície esférica S_2 em uma outra S_2 podem ser classificadas dentro de setores homotópicos. Mapeamentos de setores diferentes não podem ser continuamente deformados um no outro. Além disso, existe uma infinidade desses setores ou classes homotópicos que podem ser caracterizados por um grupo de inteiros, positivo, negativo e zero. Mais precisamente, essas classes homotópicas formam um grupo que é isomórfico ao grupo de números inteiros. Formalmente, tudo isto é escrito na fórmula

$$\pi_2(S_2) = Z, \quad (2.18)$$

onde $\pi_n(S_m)$ significa o grupo homotópico associado com os mapeamentos $S_n \rightarrow S_m$, e Z é o grupo de inteiros.

Resumindo o que vimos até agora, configurações estáticas de energia finita para $\Psi(x)$ em duas dimensões espaciais podem ser classificadas dentro de setores homotópicos, caracterizados por algum número inteiro que nós rotularemos por Q . No modelo σ , o papel da condição de contorno (2.17) é essencialmente compactar o espaço de coordenadas em uma superfície esférica $S_2^{(fis)}$. Ela não especifica univocamente o valor de contorno Ψ_0 . Enquanto Ψ_0 deve ser o mesmo em todos os pontos no infinito espacial, ele poderia apontar em qualquer direção no “espaço interno” (espaço campo). Entretanto, configurações de campo com direções diferentes de Ψ_0 podem ser obtidas uma da outra, continuamente, através de rotações $O(3)$ no espaço interno. Portanto, escolhas diferentes de Ψ_0 não levam a setores homotópicos diferentes para este modelo σ . Em vez disto, os setores surgem do comportamento dos campos através de todo espaço, incluindo o interior.

A esfera $S_2^{(\text{int})}$ no espaço interno pode ser descrita por duas variáveis $\{\xi_1, \xi_2\}$, tais como os ângulos polares, em vez das três variáveis cartesianas ψ_a sujeitas a $\sum_{a=1}^3 \psi_a^2 = 1$. Existe uma expressão muito conhecida, que relaciona o elemento de área da superfície quando esta é escrita em termos de variáveis cartesianas e esféricas:

$$dS_a^{(\text{int})} = d^2\xi \left(\frac{1}{2} \xi_{rs} \xi_{abc} \frac{\partial \psi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \psi_c}{\partial \xi_s} \right). \quad (2.19)$$

Agora, definindo

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{8\pi} \int \xi_{\mu\nu} \xi_{abc} \psi_a \frac{\partial \psi_b}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi_c}{\partial x^\nu} d^2x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \xi_{\mu\nu} \xi_{abc} \psi_a \frac{\partial \psi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi_c}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x^\nu} d^2x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \xi_{rs} \xi_{abc} \psi_a \frac{\partial \psi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \psi_c}{\partial \xi_s} d^2x. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Onde $\mu = 1, 2$ e $\nu = 1, 2$ referem-se aos índices de coordenadas cartesianas espaciais, enquanto o produto escalar e vetorial referem-se a vetores no espaço interno. Mas o jacobiano da mudança de variáveis de $\{x_1, x_2\}$ para $\{\xi_1, \xi_2\}$ é dado por

$$\xi_{rs} d^2\xi = \xi_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_\nu} d^2x. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.19) em (2.20), temos

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int dS_a^{(\text{int})} \cdot \psi_a = \frac{1}{4\pi} \int dS^{(\text{int})}, \quad (2.22)$$

desde que ψ_a é um vetor unitário normal à superfície. Lembrando que $S_2^{(\text{int})}$ é a superfície de uma esfera unitária, com área 4π , vemos que Q dá o número de vezes que

a esfera interna é coberta quando giramos o espaço de coordenada R_2 que está compactado dentro de $S_2^{(fis)}$.

Esta classificação homotópica é válida para uma configuração de campo estático, pelo qual o funcional da energia (2.15) é finito. Ela não exige que os campos sejam soluções da equação (2.14). De fato, soluções de energia finita correspondem a subgrupos que têm configurações de energia finita e a mesma classificação permanece para eles. Para acharmos algumas soluções para algum setor Q , repetimos um truque simples feito por Belavin e Polyakov (1975).

Começamos usando a desigualdade

$$\int d^2x [(\partial_\mu \overset{p}{\Psi} \pm \xi_{\mu\nu} \overset{p}{\Psi} \times \partial_\nu \overset{p}{\Psi}) \cdot (\partial_\mu \overset{p}{\Psi} \pm \xi_{\mu\sigma} \overset{p}{\Psi} \times \partial_\sigma \overset{p}{\Psi})] \geq 0. \quad (2.23)$$

A desigualdade permanece desde que o integrando é o próprio produto escalar do vetor em parênteses com ele mesmo. Ao expandirmos a equação acima temos,

$$\int d^2x [(\partial_\mu \overset{p}{\Psi}) \cdot (\partial_\mu \overset{p}{\Psi}) + \xi_{\mu\nu} (\overset{p}{\Psi} \times \partial_\nu \overset{p}{\Psi}) \cdot \xi_{\mu\sigma} (\overset{p}{\Psi} \times \partial_\sigma \overset{p}{\Psi})] \geq \pm 2 \int d^2x [\xi_{\mu\nu} \overset{p}{\Psi} \cdot (\partial_\mu \overset{p}{\Psi} \times \partial_\nu \overset{p}{\Psi})].$$

Os dois termos do lado esquerdo são iguais um ao outro já que

$$\begin{aligned} \xi_{\mu\nu} \xi_{\mu\sigma} (\overset{p}{\Psi} \times \partial_\nu \overset{p}{\Psi}) \cdot (\overset{p}{\Psi} \times \partial_\sigma \overset{p}{\Psi}) &= \delta_{\nu\sigma} [(\overset{p}{\Psi} \cdot \overset{p}{\Psi})(\partial_\nu \overset{p}{\Psi} \cdot \partial_\sigma \overset{p}{\Psi}) + (\overset{p}{\Psi} \cdot \partial_\nu \overset{p}{\Psi})(\overset{p}{\Psi} \cdot \partial_\sigma \overset{p}{\Psi})] \\ &= (\partial_\nu \overset{p}{\Psi}) \cdot (\partial_\nu \overset{p}{\Psi}), \end{aligned}$$

onde foi usado a identidade $\overset{p}{\Psi} \cdot \overset{p}{\Psi} = 1$ e sua derivada $\overset{p}{\Psi} \cdot (\partial_\nu \overset{p}{\Psi}) = 0$.

Assim, chegamos a

$$2 \int d^2x (\partial_\mu \overset{p}{\Psi}) \cdot (\partial_\mu \overset{p}{\Psi}) \geq \pm 2 \int d^2x \xi_{\mu\nu} \overset{p}{\Psi} \cdot (\partial_\mu \overset{p}{\Psi} \times \partial_\nu \overset{p}{\Psi})$$

ou da equação (2.15),

$$E \geq 4\pi|Q|. \quad (2.24)$$

Esta desigualdade fixa um limite inferior para a energia de uma configuração estática em um dado setor Q . Agora, a equação de campo estático (2.14) é obtida ao encontrarmos o extremo do funcional de energia (2.15), sujeito à identidade (2.9). Uma vez que a configuração de um setor não pode, sob variação contínua, mover para dentro de outro setor, o extremo pode ser encontrado em cada setor separadamente. Em um dado setor Q , a energia é minimizada quando a igualdade (2.24) é satisfeita. Como consequência, a igualdade (2.23) também é satisfeita. Isto acontecerá se e somente se

$$\partial_\mu \overset{p}{\Psi} = \pm \xi_{\mu\nu} \overset{p}{\Psi} \times (\partial_\nu \overset{p}{\Psi}). \quad (2.25)$$

Uma configuração de campo que satisfaz (2.25), bem como a identidade (2.9), minimizará E em algum setor Q , e, portanto automaticamente concordará com a condição extrema dada pela equação de campo (2.14). Isto pode ser explicitamente verificado. Por exemplo, para uma configuração satisfazendo (2.25),

$$\begin{aligned} \nabla^2 \overset{p}{\Psi} &= \partial_\mu \partial_\mu \overset{p}{\Psi} = \pm \partial_\mu (\xi_{\mu\nu} \overset{p}{\Psi} \times \partial_\nu \overset{p}{\Psi}) \\ &= \pm \xi_{\mu\nu} (\partial_\mu \overset{p}{\Psi}) \times (\partial_\nu \overset{p}{\Psi}) \\ &= \xi_{\mu\nu} (\xi_{\mu\sigma} \overset{p}{\Psi} \times \partial_\sigma \overset{p}{\Psi}) \times (\partial_\nu \overset{p}{\Psi}) \\ &= \delta_{\nu\sigma} [\partial_\sigma \overset{p}{\Psi} (\overset{p}{\Psi} \cdot \partial_\nu \overset{p}{\Psi}) - \overset{p}{\Psi} (\partial_\nu \overset{p}{\Psi} \cdot \partial_\sigma \overset{p}{\Psi})] \\ &= \overset{p}{\Psi} (\overset{p}{\Psi} \cdot \nabla^2 \overset{p}{\Psi}). \end{aligned}$$

Esta é justamente a equação de campo. No último passo, usamos

$$\overset{p}{\Psi} \cdot \partial_\nu \overset{p}{\Psi} = 0 = \partial_\nu \overset{p}{\Psi} \cdot \partial_\nu \overset{p}{\Psi} + \overset{p}{\Psi} \cdot \nabla^2 \overset{p}{\Psi},$$

que resulta da diferenciação da identidade (2.9). Notamos que a equação (2.25) é mais fácil de resolver do que a equação de campo (2.14), pois (2.25) é uma equação diferencial de primeira ordem, enquanto (2.14) é uma equação diferencial de segunda ordem.

De fato (2.25) pode ser simplificada por uma mudança de variáveis. Lembramos que os valores permitidos de $\overset{p}{\Psi}$, sujeitos à $\overset{p}{\Psi} \cdot \overset{p}{\Psi} = 1$, formam a superfície da esfera

unitária $S_2^{(\text{int})}$. Vamos estereograficamente projetar a superfície desta esfera sobre um plano. Assim os pontos sobre a superfície vão ser representados por pontos descritos pelas coordenadas cartesianas ω_1 e ω_2 localizados no plano. As variáveis ω_1 e ω_2 estão relacionadas com as variáveis ψ_a por

$$\omega_1 = 2\psi_1/(1 - \psi_3) \text{ e } \omega_2 = 2\psi_2/(1 - \psi_3), \quad (2.26)$$

onde o plano pelo qual a projeção é feita está paralela ao plano $\{\omega_1, \omega_2\}$ e contém o pólo sul. Também será útil construir a quantidade complexa

$$\omega \equiv \omega_1 + i\omega_2 = 2(\psi_1 + i\psi_2)/(1 - \psi_3) = 2\psi/(1 - \psi_3)$$

onde $\psi \equiv \psi_1 + i\psi_2$. Então

$$\begin{aligned} \partial_1 \omega &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 2[(1 - \psi_3)\partial_1 \psi + \psi \partial_1 \psi_3]/(1 - \psi_3)^2 \\ &= [2/(1 - \psi_3)^2](\partial_1 \psi + \overset{\cup}{\psi} \partial_1 \psi_3). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sendo $\overset{\cup}{\psi} \partial_1 \psi_3 = \psi \partial_1 \psi_3 - \psi_3 \partial_1 \psi$. Agora a equação (2.25) nos diz que

$$\partial_1 \psi = \mu i \overset{\cup}{\psi} \partial_2 \psi_3 \text{ e } \partial_2 \psi = \pm i \overset{\cup}{\psi} \partial_1 \psi_3. \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.27), obtemos

$$\partial_1 \omega = \mu i \partial_2 \omega. \quad (2.29)$$

Em termos de ω_1 e ω_2 , isto nos dá

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \text{ e } \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad (2.30)$$

onde x_1 e x_2 são coordenadas cartesianas de nosso espaço físico bidimensional original; ω_1 e ω_2 descrevem o plano no espaço interno pelo qual $S_2^{(\text{int})}$ tem sido projetado esterograficamente.

A equação (2.30) é também familiar quando a condição de Cauchy-Reimann para ω for uma função analítica de z^* (para os sinais superiores) ou z (para os sinais inferiores), onde $z \equiv x_1 + ix_2$. Assim, uma função analítica $\omega(z)$ ou $\omega(z^*)$ automaticamente satisfaz (2.25) e portanto também a equação de campo, quando escrita em termos das variáveis ψ_a e x . Além disso, enquanto ω deve ser analítica em z ou z^* , ela não necessita ser uma função inteira. Enquanto cortes são proibidos pelos valores de $\psi_a(x)$, pólos isolados em $\omega(z)$ são permitidos. A condição $\omega \rightarrow \infty$ meramente corresponde ao pólo norte em $S_2^{(\text{int})}$, isto é, para $\psi_3 = 1$.

Será útil escrever abaixo as expressões para E e Q , em termos de ω para o caso quando ω é analítico em, digamos, z . Eles são dados por

$$E = \int d^2x \frac{|d\omega/dz|^2}{(1 + |\omega|^2/4)^2} \text{ e } |Q| = \frac{E}{4\pi}. \quad (2.31)$$

Uma solução para Q arbitrário e positivo é dada por

$$\omega(z) = [(z - z_0)/\delta]^n, \quad (2.32)$$

onde n é um número inteiro positivo, δ é um número real e z_0 é um número complexo. Desde que (2.32) é uma função analítica, nossa análise nos garante que ela produzirá uma solução estática exata da equação de campo quando reescrita em termos de ψ_a e x . Sob transformação de Lorentz para um sistema de referência movendo-se em relação a outro, ela produzirá soluções dependentes do tempo. Note que a teoria é invariante de Lorentz.

Em (2.32), ω representa um ponto no espaço campo, enquanto z significa um ponto no espaço de coordenadas. Obviamente (2.32) permite n raízes para z , para um

dado ω . Portanto ele deve corresponder ao setor $Q = n$. Isto pode ser verificado ao substituirmos (2.32) em (2.31). Assim temos

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \frac{n^2 |z - z_0|^{2n-2} \delta^{2n}}{(\delta^{2n} + \frac{1}{4} |z - z_0|^{2n})^2}. \quad (2.33)$$

Usando

$$z - z_0 = \rho e^{i\phi} \text{ e } d^2x = \rho d\rho d\phi, \quad (2.34)$$

a integração fica simples e o resultado é $Q = n$. Portanto $E = 4\pi Q = 4\pi n$ é finito. Logicamente, essas são soluções de onda solitária, para um determinado n inteiro positivo.

As constantes δ e z_0 (que significam um par de coordenadas $(x_1)_0$ e $(x_2)_0$) referem-se ao tamanho e a localização do sóliton. O fato de que a solução existe para δ e z_0 arbitrários e o fato de que nem Q nem E dependam dessas constantes é consequência das invariâncias de escala e translacional do modelo. Notamos que $E[\psi]$ em (2.15) é obviamente invariante se fizermos $x \rightarrow x - a$ e $x \rightarrow \delta x$.

2.3 O modelo S não linear e o ferromagneto isotrópico

Fazendo $\lambda = 0$, $J > 0$, na equação (1.1), obtemos a hamiltoniana que descreve o ferromagneto isotrópico, isto é,

$$H = -J \sum_{i,j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -J \sum_{i,j} [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z]. \quad (2.35)$$

Agora nós consideramos um spin localizado no sítio i . Trabalhando em uma rede quadrada bidimensional, este spin tem como seus primeiros vizinhos mais próximos, os spins localizados nos seguintes sítios: sítio $i+1$ à direita, sítio $i-1$ à esquerda, sítio $i+2$ acima, sítio $i-2$ embaixo (ver figura 2.3). Também definimos

explicitamente a função T que descreve a interação de uma componente do spin localizado no sítio i com seus quatro primeiros vizinhos mais próximos

$$T = S_i^\alpha (S_{i+1}^\alpha + S_{i-1}^\alpha) + S_i^\alpha (S_{i-2}^\alpha + S_{i+2}^\alpha), \quad (2.36)$$

onde $\alpha = x, y, z$.

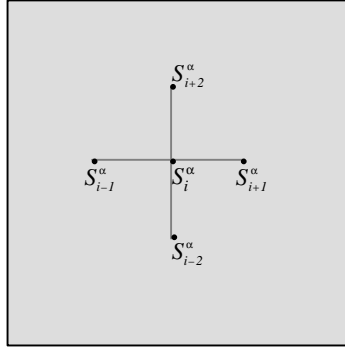


Fig. 2.3: Spin S_i^α e seus quatro primeiros vizinhos mais próximos.

O ferromagneto é um material sólido macroscópico que contém milhares de átomos ou moléculas que se organizam formando redes ordenadas (que se repetem) com certos parâmetros bem definidos tais como o “espaçamento de rede” (distância entre dois átomos ou moléculas que formam a rede). Obviamente, em todos os sistemas, as redes são discretas. No entanto, podemos fazer cálculos aproximados, considerando a rede como contínua. Para estabelecermos o limite contínuo do modelo de Heisenberg isotrópico 2D, usaremos o spin S_i^μ como referência. Então escrevemos as componentes dos spins primeiros vizinhos de S_i^μ como sendo uma expansão em série de Taylor da seguinte forma

$$S_{i+1}^\alpha = S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \dots, \quad (2.37)$$

$$S_{i-1}^\alpha = S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \dots, \quad (2.38)$$

$$S_{i+2}^\alpha = S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} + \dots, \quad (2.39)$$

$$S_{i-2}^\alpha = S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} + \dots, \quad (2.40)$$

onde a é o espaçamento de rede. Substituindo as equações de (2.37) a (2.40) em (2.36), podemos escrever

$$T = 2S_i^\alpha S_i^\alpha + a^2 \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} S_i^\alpha + 2S_i^\alpha S_i^\alpha + a^2 \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} S_i^\alpha + \dots, \quad (2.41)$$

ou de outra maneira

$$T = 4(S_i^\alpha)^2 + 2a^2 \left[\frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} \right] S_i^\alpha, \quad (2.42)$$

onde consideramos apenas termos até segunda ordem na expansão. A expressão é válida para qualquer $\alpha = x, y, z$. Então, considerando as 3 componentes e trocando as somas em (2.35) por integrais da forma $\int \frac{dx dy}{a^2}$, obtemos

$$H = -4J \iint \sum_{\alpha=1}^3 (S^\alpha)^2 \frac{dx dy}{a^2} - 2Ja^2 \iint \sum_{\alpha=1}^3 \left[\frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2} \right] \frac{S^\alpha dx dy}{a^2}, \quad (2.43)$$

sendo $S^1 = S^x$, $S^2 = S^y$ e $S^3 = S^z$. O spin agora pode estar localizado em qualquer sítio, por isto o índice i foi omitido. Os termos envolvendo as derivadas $\partial^2 S^\alpha / \partial x^2$ em (2.43) podem ser integrados por partes. Particularmente

$$\int dy S^\alpha \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2} = - \int \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (2.44)$$

Assim, (2.43) é escrita como

$$H = -\frac{4J}{a^2} \iint \sum_{\alpha=1}^3 (S^\alpha)^2 dx dy + 2J \iint \sum_{\alpha=1}^3 \left[\left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2.45)$$

Mas no somatório duplo na equação (2.35), somamos sobre i e j que são os vizinhos de cada sitio. O termo T é o somatório sobre os vizinhos do sitio i . No entanto ao considerarmos os sítios $i+1$, $i-1$, $i+2$ e $i-2$ estaremos de novo contando o sitio i , via termos cruzados. Mas no cálculo de T fizemos a suposição de que ali era o único lugar onde apareciam todos os S_i^α . Assim devemos dividir nosso resultado final por 4 (que é o número de primeiros vizinhos). Então a hamiltoniana (2.45) fica,

$$H = -\frac{J}{a^2} \iint \sum_{\alpha=1}^3 (S^\alpha)^2 dx dy + \frac{J}{2} \iint \sum_{\alpha=1}^3 \left[\left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.46)$$

Lembrando que $\hat{S} = S^x \hat{i} + S^y \hat{j} + S^z \hat{k}$, a hamiltoniana (2.46) agora fica

$$H = -\frac{J}{a^2} \iint (\hat{S})^2 d^2x + \frac{J}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y} \right)^2 \right] d^2x, \quad (2.47)$$

onde $d^2x = dx dy$. A hamiltoniana (2.47) pode ser escrita de maneira compacta

$$H - E_0 = \frac{J}{2} \iint (\partial_\mu \hat{S})^2 d^2x. \quad (2.48)$$

Sendo $\mu = 1, 2$ e $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Mas $E_0 = -\frac{J}{a^2} \iint (\hat{S})^2 d^2x$ é a energia do estado fundamental do sistema, que é infinita para uma rede infinita. Renormalizando a hamiltoniana anterior, ou seja, tomando a energia do estado fundamental como sendo $E_0 = 0$, nós finalmente obtemos

$$H = \frac{J}{2} \iint (\partial_\mu \hat{S})^2 d^2x, \quad (2.49)$$

que é o limite contínuo da hamiltoniana de Heisenberg para o ferromagneto isotrópico, escrita de uma maneira elegante. Note que (2.49) é exatamente o modelo σ não linear (2.10) com o vínculo (2.9) dado por $(S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2 = \frac{\mu}{2}$.

2.4 Sóliton de carga topológica $Q = 1$

Agora reproduziremos a solução sóliton obtida do modelo σ não linear por Belavin e Polyakov. Partimos do limite contínuo da hamiltoniana de Heisenberg para o ferromagneto isotrópico, dado pela equação (2.49). Comparando as equações (2.49) e (2.15), vemos que elas são basicamente iguais, a menos de uma constante multiplicativa J (constante de acoplamento). Assim substituímos o campo vetorial $\vec{\psi}$ pelo campo vetorial de spin \vec{S} . A estrutura espacial do sóliton é obtida pelo mapeamento da esfera dos spins no plano físico (os valores de \vec{S} sujeitos a identidade $\vec{S} \cdot \vec{S} = I$, formam a superfície de uma esfera unitária). Portanto, vamos representar os spins no plano físico bidimensional através das coordenadas cartesianas ω_1 e ω_2 . Estas coordenadas estão relacionadas com as três componentes do vetor de spin (S^x , S^y e S^z) da seguinte maneira

$$\omega_1 = 2S^x / (I - S^z) \text{ e } \omega_2 = 2S^y / (I - S^z). \quad (2.50)$$

O espaço físico bidimensional é o plano (x, y) , descrito pelas coordenadas polares r, ϕ . Para um sóliton de carga topológica ou setor $Q = n = 1$, obtemos através da equação (2.32),

$$\omega(z) = \frac{(z - z_0)}{\delta}, \quad (2.51)$$

com $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Entretanto, estabelecendo o centro do sóliton como sendo localizado na origem do sistema de coordenadas, (2.51) fica,

$$\omega = \frac{z}{\delta} = \frac{x}{\delta} + \frac{y}{\delta} i.$$

Lembrando que $\omega \equiv \omega_1 + \omega_2 i$, teremos,

$$\omega_1 + \omega_2 i = \frac{x}{\delta} + \frac{y}{\delta} i, \quad (2.52)$$

de (2.52) chegamos a

$$\omega_1 = \frac{x}{\delta} \text{ e } \omega_2 = \frac{y}{\delta}. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.50) em (2.53), obtemos,

$$\frac{2S^x}{(I - S^z)} = \frac{x}{\delta} \text{ e } \frac{2S^y}{(I - S^z)} = \frac{y}{\delta}. \quad (2.54)$$

Considerando o raio do s3liton dado por $\delta = R/2$, temos,

$$S^x = \frac{x}{R}(I - S^z) \text{ e } S^y = \frac{y}{R}(I - S^z). \quad (2.55)$$

Usando a identidade $(S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2 = I$, chegamos 3 seguinte equa33o do 2^o grau a ser resolvida para S^z ,

$$\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)(S^z)^2 - 2\frac{r^2}{R^2}S^z + \left(\frac{r^2}{R^2} - I\right) = 0, \quad (2.56)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$. A solu33o obtida para (2.56) 3 dada por,

$$S^z = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2}, \quad (2.57)$$

onde descartamos a solução trivial $S^z = 1$. Substituindo (2.57) em (2.55), as outras duas componentes do vetor \vec{S} são,

$$S^x = \frac{2xR}{r^2 + R^2} = \frac{2Rr \cos \phi}{r^2 + R^2} \text{ e } S^y = \frac{2yR}{r^2 + R^2} = \frac{2Rr \sin \phi}{r^2 + R^2}. \quad (2.58)$$

Parametrizando o vetor de spin em termos dos ângulos θ e ϕ (ver figura 2.4), teremos

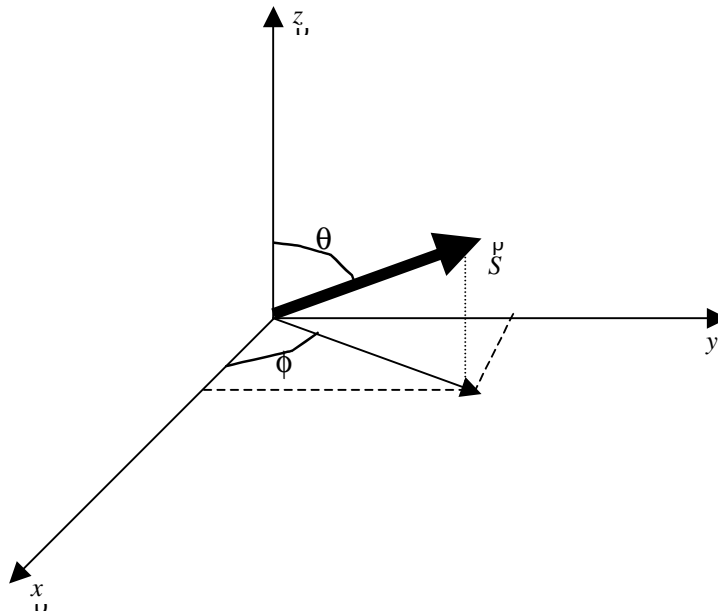


Fig. 2.4: Vetor de spin \vec{S} escrito em coordenadas esféricas.

$$S^x = \sin \theta \cos \phi, \quad S^y = \sin \theta \sin \phi \text{ e } S^z = \cos \theta, \quad (2.59)$$

onde

$$\cos \theta = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2} \text{ e } \sin \theta = \frac{2rR}{r^2 + R^2}.$$

Por outro lado, $S^x/S^y = x/y = \tan \phi$. Logo

$$\phi = \tan^{-1}(y/x), \quad (2.60)$$

Assim a solução sólito de Belavin e Polyakov com $Q = 1$ (ver figura 2.2) é dada por,

$$\phi = \tan^{-1}(y/x) \text{ e } \cos \theta = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2}. \quad (2.61)$$

E sua energia é $E = 4\pi J$ e não depende de R , o tamanho do sólito. É fácil ver que para $S^2 = cte \neq 1$, $E = 4\pi JS^2$.

Para concluir este capítulo, gostaria de comentar que algumas características do modelo σ não linear bidimensional (ou, como já vimos, o ferromagneto de Heisenberg clássico em 2 dimensões espaciais no limite contínuo) possuem muitas similaridades com a teoria de Gauge não-Abeliana em 4 dimensões. Por exemplo, ambas teorias são invariantes de escala e assintoticamente livres. Ambas possuem soluções multi-sólitos exatas. No caso da teoria de Yang-Mills quadridimensional, o trabalho de 'tHooft e Polyakov (1974) mostrou que soluções estáticas não singulares (sólitos) são monopolos magnéticos (monopolo de 'tHooft-Polyakov). Visto que o modelo σ não linear em 2 dimensões é muito mais simples que a teoria de Yang-Mills em 4 dimensões, este modelo se apresenta como ideal para testar quaisquer especulações sobre o efeito de sólitos (instantons) em teorias de Gauge quadridimensionais.

CAPÍTULO 3

SÓLITONS DINÂMICOS EM FERROMAGNETOS DE HEISENBERG BIDIMENSIONAIS DE EIXO-FÁCIL

3.1 Introdução

No capítulo 1, comentamos que sólitons estáticos são instáveis em materiais magnéticos bidimensionais possuindo anisotropia de eixo-fácil. Agora, daremos a justificativa para este fato com base no teorema de Derrick-Hobart. De fato, quando tomamos o limite contínuo da equação (1.1), seguindo os mesmos passos do capítulo 2 obtemos,

$$H = \frac{1}{2} JS^2 \int \left[(\partial_\mu \Psi^\mu)^2 + \lambda (\partial_\mu \Psi^z)^2 - \frac{1}{l_0^2} (\Psi^z)^2 \right] d^2x \quad , \mu = 1, 2, \quad (3.1)$$

onde $l_0 = a/\sqrt{2\lambda}$ é uma escala de comprimento característico do sistema (a é o espaçamento de rede) e $\lambda > 0$ é a anisotropia de eixo-fácil assumida ser pequena. O campo de vetores unitários Ψ é dado por $\Psi_i = \hat{S}_i/S$. A equação (3.1) é a hamiltoniana do modelo \mathbf{S} não linear anisotrópico, com um termo de massa $(1/l_0^2)(\Psi^z)^2$ somado a $\lambda(\partial_\mu \Psi^z)^2$. Note que se fizermos $\lambda = 0$, $l_0 \rightarrow \infty$ recuperamos o caso isotrópico. O termo de massa quebra a invariância de escala do modelo e é o responsável pela instabilidade do sóliton.

No entanto, a possibilidade de sólitons dinâmicos (com alguma precessão na magnetização) parece viável. Voronov et al [23] consideraram esta possibilidade e

obtiveram sólitons com “baixas” frequências de precessão $\omega < \omega_0$ através da função tentativa $tg(\mathbf{q}/2) \propto K_n(x)$, onde $x = \sqrt{(1 - \mathbf{w}/\mathbf{w}_0)}r/l_0$ e $K_n(x)$ é a função Macdonald. Nosso objetivo nesta tese é verificar se tais sólitons são possíveis para $\omega \geq \omega_0$.

3.2 Desenvolvimento teórico

Nossos cálculos foram feitos para spins grandes, portanto podemos usar a aproximação clássica, isto é, considerar os spins como vetores. Assim parametrizamos \mathbf{y}^μ por meio de dois campos $\theta(r)$ e $\phi(r)$ (ver figura 3.1), ou seja, escrevemos o campo de vetor de spin em coordenadas esféricas da seguinte maneira

$$\mathbf{y}^\mu = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (3.2)$$

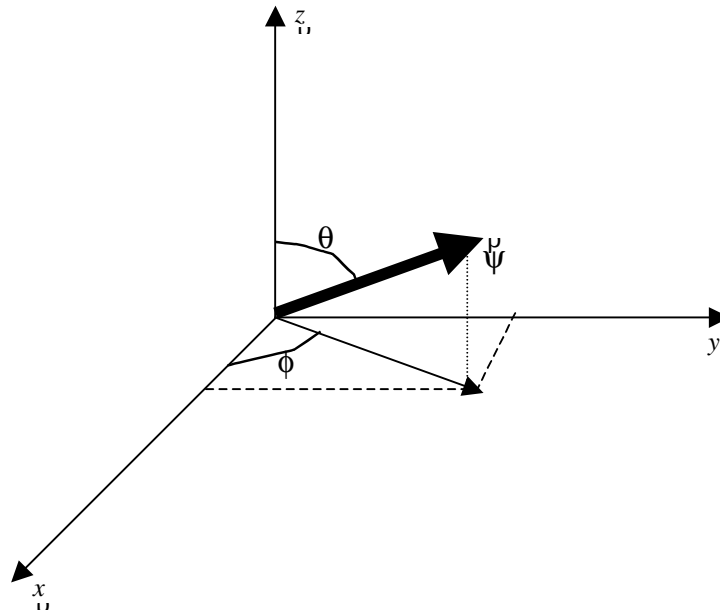


Fig. 3.1: Vetor unitário de spin \mathbf{y}^μ parametrizado em coordenadas esféricas.

É fácil ver que o quadrado das componentes de \mathbf{y}^μ obedece a relação de vínculo

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 1. \quad (3.3)$$

Em termos dos dois campos escalares $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, a hamiltoniana (3.1) pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{2} JS^2 \int \left[\frac{(\nabla m)^2}{(1-m^2)} + (1-m^2)(\nabla \phi)^2 + \lambda (\nabla m)^2 - \frac{1}{l_0^2} m^2 \right] d^2 x, \quad (3.4)$$

onde $m = \cos \mathbf{q}$. A equação de movimento do campo de vetor unitário Ψ é obtida da correspondente equação de movimento quântica,

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{i}{\eta} [\Psi, h], \quad (3.5)$$

onde $[\Psi, h] = \Psi h - h \Psi$ é o comutador de Ψ e h . Aqui h é a densidade hamiltoniana em (3.4) dada por,

$$h = \frac{JS^2}{2} \left[\frac{(\nabla m)^2}{(1-m^2)} + (1-m^2)(\nabla \phi)^2 + \lambda (\nabla m)^2 - \frac{1}{l_0^2} m^2 \right]. \quad (3.6)$$

Tomando os limites clássicos $\Psi \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$ e $\eta \Psi \rightarrow cte$ em (3.5) obtemos [24],

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\Psi \times \frac{\delta h}{\delta \Psi}, \quad (3.7)$$

onde $\delta h / \delta \Psi$ é uma derivada funcional de h . Assim a equação de movimento do campo Ψ clássico (3.7) se reduz a [24]

$$\dot{\mathbf{m}} = \frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\delta h}{\delta \phi} = -\nabla \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial (\nabla \phi)} \right] + \frac{\partial h}{\partial \phi}, \quad (3.8)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\delta h}{\delta m} = \overset{\rho}{\nabla} \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial (\overset{\rho}{\nabla} m)} \right] - \frac{\partial h}{\partial m}. \quad (3.9)$$

As equações (3.8) e (3.9) mostram que m e ϕ constituem um par de variáveis canonicamente conjugadas. Assim através das equações (3.6), (3.8) e (3.9) obtemos as seguintes equações de movimento para um sistema ferromagnético [25],

$$\overset{\rho}{\nabla} \cdot [(1-m^2) \overset{\rho}{\nabla} \phi] + \frac{1}{\omega_0 l_0^2} \frac{\partial m}{\partial t} = 0, \quad (3.10)$$

$$\left[1 + \lambda(1-m^2) \right] \nabla^2 m + \frac{m(\overset{\mu}{\nabla} m)^2}{(1-m^2)} + m(1-m^2)(\overset{\rho}{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{l_0^2} m(1-m^2) - \frac{1}{\omega_0 l_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} (1-m^2) = 0. \quad (3.11)$$

onde $\omega_0 = 4\lambda JS$ é a frequência de ressonância ferromagnética homogênea que surge naturalmente nas equações de movimento.

No limite isotrópico ($\lambda = 0, l_0 \rightarrow \infty$) e considerando o caso estático ($\partial m / \partial t = \partial \phi / \partial t = 0$), as equações (3.10) e (3.11) ficam

$$\overset{\mu}{\nabla} \cdot [(1-m^2) \overset{\mu}{\nabla} \phi] = 0, \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 m + \frac{m(\overset{\rho}{\nabla} m)^2}{(1-m^2)} + m(1-m^2)(\overset{\rho}{\nabla} \phi)^2 = 0. \quad (3.13)$$

Usando coordenadas cilíndricas (r, ϕ) as equações (3.12) e (3.13) tem como solução, a expressão analítica do sóliton de Belavin e Polyakov (2.61), para qualquer valor de carga topológica. Para uma carga topológica unitária e com sóliton localizado na origem, temos

$$\phi_0 = \tan^{-1}(y/x), \quad m_0 = \cos\theta_0 = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2}, \quad (3.14)$$

onde R é o tamanho do sóliton. Esta solução tem a seguinte condição de contorno ($\cos\theta_0 \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow \infty$, $\cos\theta_0 \rightarrow -1$ quando $r \rightarrow 0$) (ver figura 1.5). Na seção (2.4) mostramos como Belavin e Polyakov [22] obtiveram esta solução pelo mapeamento no plano, na qual os spins são colocados sobre uma esfera de parâmetro de ordem. Uma das características desta solução, é que longe do centro da excitação as direções do vetor $\vec{\Psi}$ estão praticamente paralelas.

O modelo de Heisenberg em duas dimensões é invariante de escala, isto indica que os sólitons correspondentes não têm tamanhos preferidos e que eles não interagem entre si. De fato, a energia da configuração (3.14) é finita e dada por $E_S = 4\pi JS^2$ e não depende de R . Um fato a ressaltar diz respeito ao termo de massa $(1/l_0^2)(\psi^z)^2$ que aparece nas equações (3.1) e (3.4). Ele tem um papel muito importante em teoria de campo. O caso anisotrópico sem o termo de massa (isto é $\lambda \neq 0$ mas $l_0 \rightarrow \infty$) é também invariante de escala e sua natureza foi estudada por Watanabe e Otsu [26]. Eles demonstraram a existência de estados metaestáveis não triviais que produzem um mínimo local de energia, mas apenas para o valor de $\lambda = -1$ a configuração sóliton pode ser obtida analiticamente. Este modelo foi também estudado nas refs. [27,28]. Porém a presença do termo de massa na hamiltoniana quebra a invariância de escala do modelo. Este fato é o responsável pela instabilidade de sólitons estáticos. Esta instabilidade pode também ser explicada por meio de considerações energéticas simples ao analisarmos a equação (3.4).

Suponhamos que o raio R do sóliton em um material magnético anisotrópico seja muito menor que l_0 . Neste caso, os termos com λ e $1/l_0^2$ em (3.4) são pequenos quando comparados com os demais. Portanto (3.14) pode ser usada como uma primeira aproximação ou uma função tentativa, e, a energia do magneto com o sóliton, como uma função de R pode ser encontrada, sendo dada aproximadamente por

$$E(R) \approx \frac{1}{2} JS^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\vec{\nabla} m_0)^2}{(1-m_0^2)} + (1-m_0^2)(\vec{\nabla} \phi)^2 \right] r dr d\phi, \quad (3.15)$$

a condição de mínimo para $E(R)$ em $R = R_0$ determina o raio de um sólito estático. A contribuição dos termos anisotrópicos da hamiltoniana (3.4), ao substituirmos a solução m_0 de (3.14) produz,

$$\frac{I}{2} JS^2 \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} \left[\lambda \left(\frac{\rho}{\sqrt{V}} m_0 \right)^2 - \frac{I}{l_0^2} m_0^2 \right] r dr d\phi. \quad (3.16)$$

Esta equação dá um valor a mais para a energia do sólito com $Q = I$, cujo fator dominante é da forma $(R^2 / l_0^2) \ln \left(\frac{l_0^2 + R^2}{R^2} \right)$. Portanto agora a função $E(R)$ não tem um mínimo para $R \neq 0$ finito, o que implica na instabilidade para o colapso.

A condição de mínimo para a energia não é de fato essencial para a estabilidade do sólito. Se assumirmos que um material magnético puramente uniaxial tem uma integral de movimento, ou seja, a componente z do vetor de spin ψ^z obedece a

$$I_z = \int (I - \psi^z) d^2x, \quad (3.17)$$

então a energia do sólito E_S poderia representar um mínimo para um valor fixo de I_z . Fixando I_z (ou outras integrais de movimento) impedimos o sólito de colapsar. A análise da estrutura sólito se reduz ao problema de um extremo condicional, pelo qual o correspondente multiplicador de Lagrange pode ser interpretado como a frequência de precessão do campo de vetor de spin do sólito. Nós temos,

$$\delta \left[E_S - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) I_z \right] = 0, \quad (3.18)$$

onde $\omega_0 = 4IJS$. Assim a solução para uma precessão sólito em ferromagnetos bidimensionais clássicos exibindo anisotropia de eixo-fácil tem a forma

$$\phi = \phi_0 + \omega t, \quad m_0 = \cos \theta_0 = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2}, \quad (3.19)$$

onde ω é a frequência de precessão do sóliton dinâmico. As propriedades da precessão sóliton foram estudadas em detalhes por Kosevich et al na referência [29]. A presença de precessão viola as condições do teorema de Derrick-Hobart sobre a instabilidade de sólitons não unidimensionais. No entanto, para estudarmos as modificações na forma sóliton (especificada pela equação (3.19)) devido à anisotropia λ , adotaremos um tratamento perturbativo aproximado inserindo,

$$\phi = \phi_0 + \omega t + \phi_I, \quad m = m_0 + m_I, \quad (3.20)$$

nas equações de movimento. Aqui assumimos que f_1 e m_1 são quantidades pequenas que se reduzem a zero se $I = 0$. Assumindo que m_1 e f_1 não dependem do tempo (t), então, se considerarmos apenas termos de primeira ordem para estas quantidades, as equações para ϕ e m em (3.10) e (3.11) tornam-se as seguintes equações a serem resolvidas para f_1 e m_1 dadas por

$$\overset{\mu}{\nabla} \cdot [(1 - m_0^2) \overset{\mu}{\nabla} f_1] - 2 \overset{\mu}{\nabla} \cdot (m_0 m_1 \overset{\mu}{\nabla} f_0) = 0, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 m_I + 2 \left[\frac{(\overset{\rho}{\nabla} m_0)^2 + m_0 \overset{\rho}{\nabla} m_0 \cdot \overset{\rho}{\nabla}}{(1 - m_0^2)} \right] m_I + 2 m_0 (1 - m_0^2) \overset{\rho}{\nabla} \phi_0 \cdot \overset{\rho}{\nabla} \phi_I \\ = 2 \lambda m_0 (\overset{\rho}{\nabla} m_0)^2 + \frac{1}{l_0^2} (1 - m_0^2) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - m_0 \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde temos usado a identidade $(1 - m_0^2)^2 (\overset{\mu}{\nabla} f_0)^2 = (\overset{\mu}{\nabla} m_0)^2$ e assumimos λ ser também muito pequeno. A condição para gerarmos sólitons dinâmicos é que a anisotropia de eixo-fácil seja pequena. Técnicas avançadas na síntese de filmes magnéticos ultra-finos dão uma possibilidade para criarmos amostras com este tipo de anisotropia [30].

A simetria circular ($m_1 = m_1(r)$) leva para a solução $\phi_I = \text{constante}$ na equação (3.21). Desde que $\overset{\mu}{\nabla} \phi_I = 0$, então quando $I = 0$ ($l_0 = \infty$), a equação (3.22) se reduz a seguinte equação diferencial de segunda ordem homogênea

$$\nabla^2 m_l + 2 \left[\frac{(\overset{\rho}{\nabla} m_0)^2 + m_0 \overset{\rho}{\nabla} m_0 \cdot \overset{\rho}{\nabla}}{(1 - m_0^2)} \right] m_l = 0, \quad (3.23)$$

as soluções para esta equação são dadas por

$$\mathbf{x}_1 = 1 - m_0^2, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{x}_2 = m_0 + (1 - m_0^2) \ln \left(\frac{r}{R} \right). \quad (3.25)$$

Sabendo as soluções da equação diferencial homogênea e usando o wronskiano $W = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1' \mathbf{x}_2 = 2(1 - m_0^2)/r$, a solução para a equação (3.22) é dada por

$$m_l = \xi_2 \int_R^r \frac{\xi_1(x) F(x)}{W(x)} dx - \xi_1 \int_R^r \frac{\xi_2(x) F(x)}{W(x)} dx, \quad (3.26)$$

onde

$$F = 2\mathbf{l} m_0 (\overset{\rho}{\nabla} m_0)^2 + \frac{1}{l_0^2} (1 - m_0^2) \left(\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_0} - m_0 \right). \quad (3.27)$$

Após um trabalho longo mas direto, a solução (3.26), que zera quando $r \rightarrow 0$ pode ser obtida exatamente e tem a forma dada por

$$m_l = -\frac{R^2}{l_0^2} \left[m_0 \ln \left(\frac{r^2 + R^2}{R^2} \right) + M \left(\ln \frac{r}{R} \ln \left(\frac{r^2 + R^2}{R^2} \right) - \frac{1}{2} M \ln \frac{r}{R} - \frac{1}{4} \left(\frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) m_0 \right) - 2w_1 \right] \\ + \frac{\mathbf{w}}{2\mathbf{w}_0} \frac{R^2}{l_0^2} \left[2m_0 \ln \left(\frac{r^2 + R^2}{R^2} \right) + 2 \ln(2) M \ln \frac{r}{R} - (m^2 + m) - \frac{1}{2} M \left(\frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) + 2Mw_2 \right], \quad (3.28)$$

onde

$$M = 1 - m_0^2, \quad w_1 = 2 \int_R^r \frac{x \ln(x/R)}{(x^2 + R^2)} dx, \quad w_2 = \int_R^r \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x^2 + R^2}{2R^2}\right) dx.$$

Em termos da frequência de precessão do sóliton ω apresentamos três possibilidades para a solução (3.20): $w < w_0$, $w = w_0$ e $w > w_0$. Abaixo, estas três possibilidades são analisadas em detalhes [25].

a. Possibilidade $w < w_0$

O comportamento da primeira possibilidade para valores grandes de r mostra que as componentes de spin fora do plano tendem a zero quando $r \rightarrow \infty$, e portanto, esta solução não é estável desde que cada spin é inclinado na direção do plano (ver figura 3.2). Apesar desta tendência ser muito lenta (ver figura 3.2) nosso tratamento perturbativo não pode ser aplicado para esta situação, porque como podemos ver na equação (3.22), o termo estático que não depende de ω em $(1 - m_0^2)[(\omega/\omega_0) - m_0]$, responsável pela instabilidade do sóliton, domina o dinâmico no limite $r \rightarrow \infty$. De certo

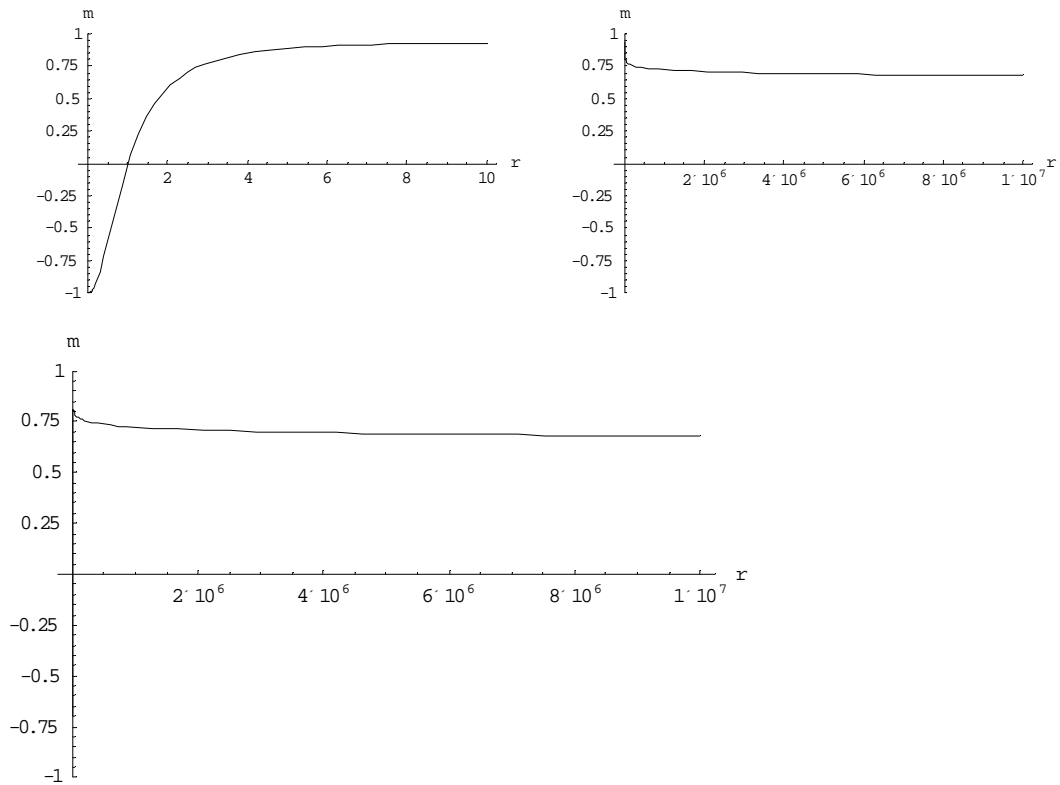


Fig. 3.2: Gráfico de $m \times r$ para $\omega = 0.4\omega_0$, $R = 1a$ e $\lambda = 10^{-2}$.

modo, Voronov et al [23], em um modelo semelhante, consideram o comportamento de $\mathbf{q}(r)$ para distâncias grandes pelo uso de uma função tentativa da forma $\text{tg}(\theta/2) \propto K_\nu(x)$, onde $x = \sqrt{(I - \omega/\omega_0)} r/l_0$ e $K_\nu(x)$ é a função Macdonald. Esta fórmula para $r \leq R \ll l_0$ transforma em $\cos \mathbf{q} = m_0$, mas dá a exponencial assintótica $\theta \propto (I/\sqrt{r}) \exp(-\sqrt{(I - \omega/\omega_0)} r/l_0)$ para $r \rightarrow \infty$. Porém, quando a frequência de precessão $\omega \rightarrow \omega_0$, esta solução implica em $R \rightarrow 0$.

b. Possibilidade $w = w_0$

O caso de ressonância ($w = w_0$) é o mais interessante. A equação (3.28) mostra que no limite $r \rightarrow \infty$, a componente de spin fora do plano é constante e seu valor é menor do que S (ver figura 3.3). De fato, neste limite, $m \rightarrow 1 - 2I(R/a)^2 = 1 - (R/l_0)^2$ e portanto, para $R \ll l_0$, a energia da configuração de nossa estrutura é maior que a energia do sóliton de Belavin e Polyakov e o termo dominante aumenta com

$$\frac{1}{2} JS^2 \int_R^d (1 - m^2) (\nabla \mathbf{f})^2 d^2 x = \frac{1}{2} JS^2 \int_R^d \left[1 - \left(1 - 2I \frac{R^2}{a^2} \right)^2 \right] (\nabla \mathbf{f})^2 d^2 x \cong \frac{R^2}{l_0^2} JS^2 \ln \left(\frac{d}{R} \right), \quad (3.29)$$

onde d é o tamanho do sistema. A energia desta estrutura e também de outras estruturas não locais deste tipo dependem logarithmicamente do tamanho do sistema d . A dependência da energia com R reflete a estrutura do sóliton, desde que $\ln(d/R)$ é devido à presença de componentes pequenas de spin no plano em $r \rightarrow \infty$ e R^2 é a modificação induzida no termo logarítmico devido às componentes de spin fora do plano.

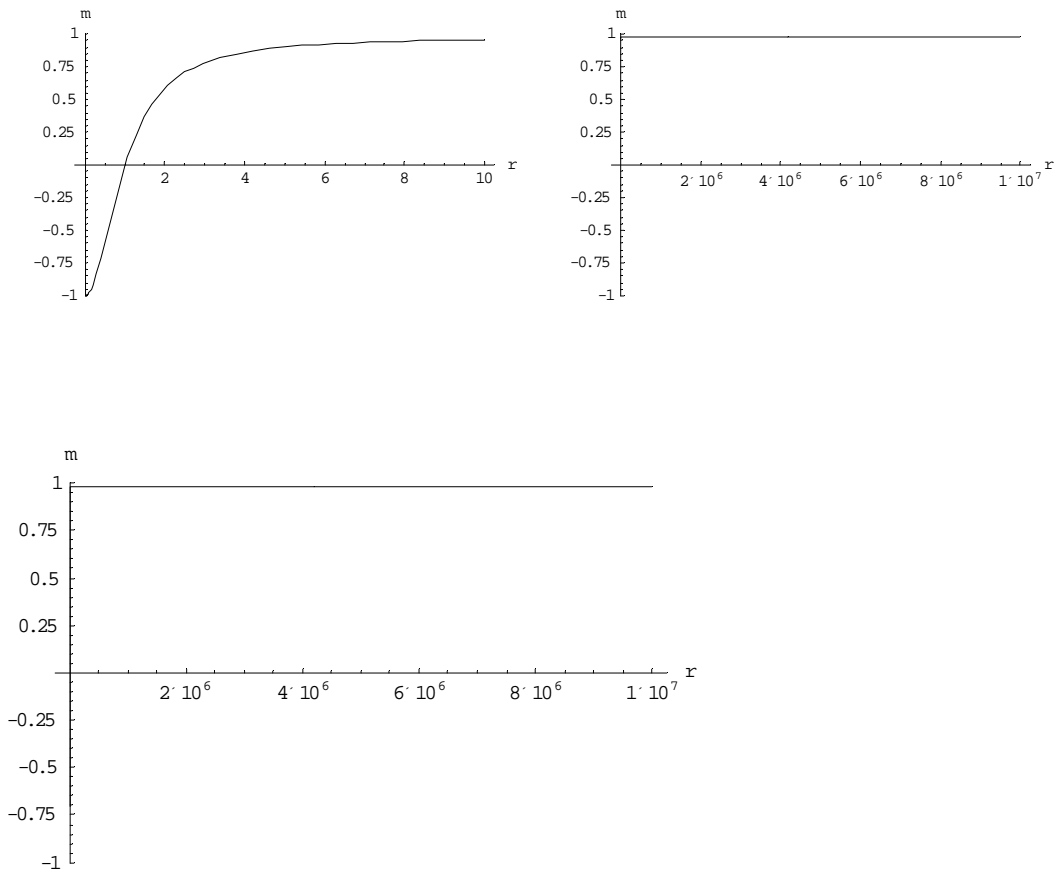
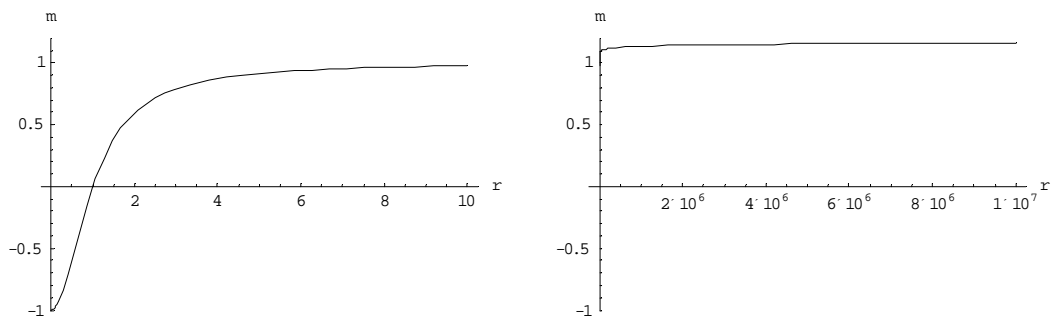


Fig. 3.3: Gráfico de $m \times r$ para $\omega = \omega_0$, $R = 1a$ e $\lambda = 10^{-2}$.

c. Possibilidade $w > w_0$

Para $w > w_0$, o comportamento de nossa solução para valores grandes de r mostra que a correção m_1 diverge (por causa de $\ln r$) quando $r \rightarrow \infty$ (ver figura 3.4).



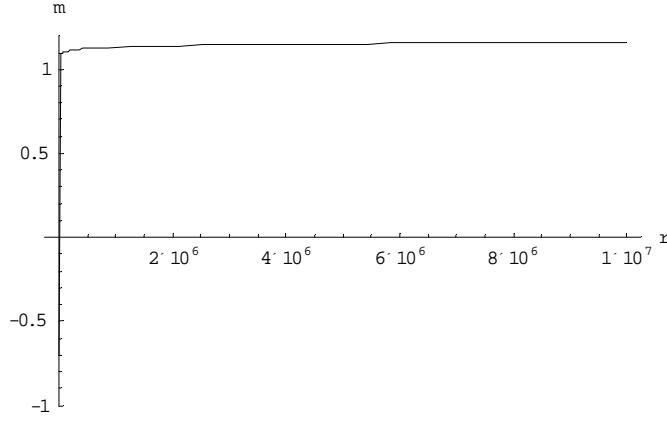


Fig. 3.4: Gráfico de $m \times r$ para $\omega = 1.3\omega_0$, $R = 1a$ e $\lambda = 10^{-2}$.

Esta divergência vem do fato que neste caso, o termo dinâmico domina o estático. Porém, podemos controlar esta circunstância ao notarmos que $m = \cos \mathbf{q}(r)$, e portanto, a condição $|m_0 + m_1| \leq 1$ deve ser satisfeita. Isto significa que nossa solução para este caso é válida apenas para distâncias menores do que um tamanho crítico r_c determinado por $m_0(r_c) + m_1(r_c) = 1$. Para $r > r_c(\mathbf{w}, \mathbf{I}, R)$, assumimos que a não homogeneidade da magnetização desaparece e $m = \cos \mathbf{q}(r) = 1$. De fato, r_c é uma função de \mathbf{w}, \mathbf{I} e R , podendo ser facilmente obtido numericamente. Como exemplos, usando os valores $\lambda = 10^{-3}$, $R = a$ e $\omega = 1.01\omega_0$, o tamanho crítico r_c é $2.24 \times 10^{37} a$, e para $R = 2a$, $r_c = 4.49 \times 10^{37} a$. Para $\lambda = 10^{-2}$ e $\omega = 1.01\omega_0$, os valores de r_c são essencialmente os mesmos que o anterior, mas para $\omega = 1.1\omega_0$, $r_c = 1.8 \times 10^4 a$ e $r_c = 3.6 \times 10^4 a$ para $R = a$ e $R = 2a$, respectivamente. Isto indica que o tamanho crítico tem uma dependência mais forte com ω do que com a anisotropia λ . Esses resultados mostram que o parâmetro r_c é também grande para $\omega \sim \omega_0$ e diminui rapidamente quando ω aumenta. Também notamos numericamente que o tamanho crítico é proporcional a R para uma faixa apreciável de frequências $\mathbf{w} > \mathbf{w}_0$, e assim, escrevemos

$$r_c = \alpha(\lambda, \omega)R, \quad (3.30)$$

onde $\alpha(\lambda, \omega)$ é uma função de λ e ω . Esses cálculos mostram que o termo dinâmico na solução (3.28) faz com que seja energeticamente desfavorável para os spins apontarem

para baixo no limite $r \rightarrow \infty$ e isto resulta em um s3liton de tamanho finito com diâmetro $D = 2r_c(\mathbf{w}, \mathbf{I}, R)$. Ele é formado por um campo de spin em que os spins est3o apontando para baixo na origem e ent3o giram suavemente, movendo radialmente para fora do plano at3 todos os spins apontarem para cima em um raio de $D/2$. Tal estrutura é um s3liton no campo de spin cuja configuraç3o é muito relevante no efeito Hall quântico, onde o diâmetro do s3liton depende de uma competiç3o entre as interaç3es elétron-elétron, que tentam maximizar o diâmetro $D = 2r_c$, e as energias Zeeman, que tentam minimiza-lo. Em nosso caso, enquanto a anisotropia de eixo-fácil tenta maximizar D , o termo dinâmico dependente de ω tenta minimiza-lo [31]. A energia desta estrutura é finita e dada por

$$E_S = 4\pi JS^2 \left[\frac{r_c^2}{r_c^2 + R^2} + \frac{\lambda r_c^4 (r_c^2 + 3R^2)}{3 (r_c^2 + R^2)^3} - \frac{I}{l_0^2} \left(\frac{R^2 r_c^2}{2(r_c^2 + R^2)} + R^2 \ln \left(\frac{R^2}{r_c^2 + R^2} \right) \right) \right]. \quad (3.31)$$

Substituindo a equaç3o (3.30) em (3.31), obtemos

$$E_S = 4\pi JS^2 \left[\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + I} + \frac{\lambda \alpha^4 (\alpha^2 + 3)}{3 (\alpha^2 + I)^3} - \frac{I}{l_0^2} \left(\frac{R^2 \alpha^2}{2(\alpha^2 + I)} + R^2 \ln \left(\frac{I}{\alpha^2 + I} \right) \right) \right], \quad (3.32)$$

mostrando que a energia do s3liton tem uma depend3ncia simples com o tamanho do s3liton R . Para $\omega = I.l\omega_0$ e $\lambda = 10^{-2}$, a energia desta pseudo-partícula é $E_s = 5.54\pi JS^2$ para $R = a$ e $E_s = 10.13\pi JS^2$ para $R = 2a$. Embora a n3o homogeneidade da magnetizaç3o suma para $r \geq r_c$ e como conseqüência, essas excitaç3es t3m um diâmetro finito, sua energia é maior que a energia do s3liton de Belavin e Polyakov por causa dos termos anisotr3picos na hamiltoniana (3.4).

CONCLUSÕES GERAIS

Em resumo, encontramos soluções sólitons dinâmicos que podem em princípio desempenhar um papel importante nas propriedades dinâmicas de frequências altas em materiais ferromagnéticos clássicos bidimensionais com anisotropia de eixo-fácil, contribuindo assim para a função resposta, largura de linha *EPR* [32], etc. A largura de linha *EPR* está relacionada com a função correlação de spin dependente do tempo, portanto sólitons estáticos ($\omega = 0$) não podem contribuir para a largura de linha *EPR*.

Como é de conhecimento geral, o papel de excitações não lineares no estudo de materiais artificialmente estruturados de dimensões baixas está ganhando muito destaque devido a seus efeitos observáveis sobre as propriedades físicas dos sistemas da matéria-condensada. Outro motivo deste interesse em estruturas não lineares está relacionado a experimentos cosmológicos em física da matéria condensada [33]. Além disto, a bem conhecida técnica de estados de spin coerentes (ESC), vêm reforçar este interesse. A princípio, estes resultados, podem ser aplicados a sistemas de “spin quântico”, mesmo com a aproximação clássica usada. Isto por que a técnica ESC efetivamente troca operadores de spins por vetores clássicos $S(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ e incorpora as características quânticas por meio da integral de caminho sobre todas as configurações no espaço-tempo de (θ, ϕ) .

A aproximação proposta acima pode também ser tomada para outros problemas bidimensionais. Por exemplo, a análise da existência de sólitons com $\omega \geq \omega_0$ para o modelo σ anisotrópico invariante de Lorentz, que descreve um antiferromagneto clássico de eixo-fácil, e também sistemas magnéticos na presença de um campo magnético perpendicularmente aplicado ao plano, seria executado essencialmente da mesma forma, e acreditamos que os resultados possam ser semelhantes.

No efeito Hall quântico é de essencial importância que as pseudopartículas estejam localizadas pela desordem. Nós acreditamos que a interação com uma impureza, presente no sistema, dê ao sóliton um tamanho finito, por meio da disputa entre a atração pela impureza e a repulsão colombiana, desta forma, os sólitons são

localizados pela sua desordem. Os efeitos de desordem favorecem a presença de pseudopartículas (sólitons) menores, assim, a ligação é provavelmente mais fraca para sólitons menores, e isto pode ter conseqüências observáveis. Desse modo, nossas investigações podem ser aplicadas para sistemas Hall quântico, onde o desenvolvimento da tecnologia de semicondutores tem levado para observações interessantes de sólitons [31] no campo de spin.

Recentemente a atenção para a dinâmica interna do sóliton tem alcançado destaque. O estudo da dinâmica interna do sóliton é investigado em partículas ferromagnéticas pequenas que estão no conhecido estado vórtice (pontos magnéticos). Pontos magnéticos são amostras de tamanhos extremamente pequenos, colocados sobre um substrato não magnético. Eles podem ter formas diferentes: circular, quadrática, etc. Pontos magnéticos são interessantes pelo seu uso nos dispositivos de armazenagem com alta densidade magnética. Quando os pontos são preferivelmente grandes (o tamanho do ponto magnético excede o tamanho crítico de um único domínio), seu estado fundamental poderia ser não homogêneo. Um ponto no estado vórtice pode conter uma singularidade no centro do vórtice, ou um sóliton do tipo Belavin-Polyakov. Num trabalho futuro, poderemos desenvolver uma teoria de modos locais sobre a configuração deste sóliton. Esta teoria pode ser um bom guia para o estudo dos modos normais no estado vórtice dos pontos magnéticos. No nosso trabalho o sóliton é estabilizado pela frequência de precessão interna. Está claro que nosso modelo apresentado não pode garantir a correspondência quantitativa para o caso do estado vórtice dos pontos magnéticos, em que a estrutura sóliton estático é estabilizada pela interação magnética de dipolo. Dessa forma nossas investigações teóricas podem ser aplicadas depois de feitas modificações apropriadas, para a descrição da configuração sóliton em pontos magnéticos [34].

Finalmente uma investigação teórica futura importante é mencionada: a interação entre os sólitons obtidos aqui com ondas de spin. Este estudo é essencial para possíveis observações experimentais dessas estruturas [18,19,31]. Recentemente, estados ligados de mágnons localizados sobre sólitons dinâmicos com $\omega < \omega_0$ foram previstos para ferromagnetos bidimensionais com anisotropia de eixo-fácil [35,36]. Porém, essas questões são quase completamente não investigadas no presente momento, mas gostaríamos de considerar em um trabalho futuro a influência quantitativa da

interação desses sólitons com mágnons e sua influência sobre a termodinâmica. Isto com certeza é um novo e interessante tópico [31,37].

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Rogerir et al, de Phys. Colloq. C-8, 49, 1437 (1988).
- [2] D. G. Wiesier, H. Zabel and S. M. Shapiro, Physica B 156 e 157, 292 (1989); Z. Phys. B 93, 277 (1994).
- [3] K. Hirakawa and Ikeda, in “Magnetic Properties of Layered Transition Metal Compounds”, Eds. L. J. de Jongh and R. D. Willet (Reidel, Dordrecht 1987).
- [4] L. P. Regnault and J. Rossad-Mignod, in “Magnetic Properties of Layered Transition Metal Compounds”, Eds. L. J. de Jongh and R. D. Willet (Reidel, Dordrecht 1987).
- [5] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C6, 1181 (1973).
- [6] A. R. Pereira and A. S. T. Pires, Phys. Rev. B 51, 996 (1995)
- [7] M. E. Gouvêa, G. M. Wysin, A. R. Bishop and F. G. Mertens, Phys. Rev. B 39, 840 (1989).
- [8] A. R. Pereira and J. E. R. Costa, J. Magn. Mater. 162, 219 (1996).
- [9] F. G. Mertens, A. R. Bishop, G. M. Wysing and C. Kawabata, Phys. Rev. B 39, 591 (1989).
- [10] Esta denominação não está ainda bem estabelecida na literatura. Alguns autores costumam usar o nome “instantons”. A diferença conceitual entre instantons e sólitons pode ser encontrada com maiores detalhes no livro: “Solitons and Instantons, an introduction to sólitons and instantons in quantum field theory”, R. Rajaraman, North-Holland Company (1992).
- [11] R. H. Hobart, Pros. Phys. Soc. 82, 201 (1963); G. H. Derrick, J. Math. Phys. 5, 1252 (1963).
- [12] F. Waldner, J. Magn. Mater. 54-57, 873 (1986).
- [13] F. G. Mertens, A. R. Bishop, G. M. Wysin, C. Kawabara, Phys. Rev. B 39, 591 (1989).
- [14] A. R. Pereira, A. S. T. Pires, M. E. Gouvêa, B. V. Costa, Z. Phys. B 89, 109 (1989).
- [15] B. A. Ivanov, D. D. Sheka, Phys. Rev. Lett. 72, 404 (1994).

- [16] J. P. Boucher, G. Rius, Y. Henry, *Europhys. Lett.* 4, 1073 (1987).
- [17] B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, G. M. Wysin, *Phys. Rev. Lett.* 76, 511 (1996).
- [18] A. R. Pereira, F. O. Coelho, A. S. T. Pires, *Phys. Rev. B* 54, 6084 (1996).
- [19] G. M. Wysin, M. E. Gouvêa, A. S. T. Pires, *Phys. Rev. B* 57, 8274 (1998).
- [20] R. Rajaramam, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- [21] T. H. R. Skyrme, *Proc. R. Soc. London* 262, 237 (1961).
- [22] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, *JETP Lett.* 22, 245 (1975).
- [23] V. P. Voronov, B. A. Ivanov, A. M. Kosevich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 84, 2235 (1983) [*JETP Lett.* 57, 1303 (1983)].
- [24] T. Schneider and E. Stoll, in *Solitons* 129, editado por V. M. Agranovich and A. A. Maradudin (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- [25] G. M. Rocha Filho, A. R. Pereira, *Solid State Communications* 122, 83 (2002).
- [26] T. Watanabe, H. Otsu, *Prog. Theor. Phys.* 65, 164 (1981).
- [27] A. R. Pereira, A. S. T. Pires, M. E. Gouvêa, *Phys. Rev. B* 51, 15974 (1995).
- [28] A. R. Pereira, *Phys. Rev. B* 54, 11918 (1996).
- [28] A. M. Kosevich, B. A. Ivanov e A. S. Kovalev, *Phys. Reports* 194, 117 (1990).
- [30] A. Hucht, K. D. Usadel, *Phys. Rev. B* 55, 12309 (1997).
- [31] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, E. H. Rezayi, *Phys. Rev. B* 47, 16419 (1993).
- [32] C. E. Zaspel, T. E. Grigerereit, J. E. Drumheller, *Phys. Rev. Lett.* 74, 4539 (1995).
- [33] W. H. Zurek, *Physcs Reports* 276, 177 (1996).
- [34] N. A. Usov, S. E. Peschany, *J. Magn. Magn. Mater.* 118, L290 (1993).
- [35] F. K. Abdullaev, R. M. Galimzyanov, A. S. Kirakosyan, *Phys. Rev. B* 60, 6552 (1999).
- [36] D. D. Sheka, B. A. Ivanov, F. G. Mertens, *Phys. Rev. B* 64, 24432 (2001).
- [37] A. R. Pereira, A. S. T. Pires, *Phys. Rev. B* 60, 6226 (1999).