

RONAN SILVA FERREIRA

SIMULAÇÕES QUASE ESTACIONÁRIAS DO PROCESSO
DE CONTATO EM REDES COMPLEXAS

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física Aplicada,
para obtenção do título de *Magister
Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2009

RONAN SILVA FERREIRA

**SIMULAÇÕES QUASE ESTACIONÁRIAS DO PROCESSO
DE CONTATO EM REDES COMPLEXAS**

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física Aplicada, para
obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 13 de fevereiro de 2009.

Prof. José Arnaldo Redinz
(Coorientador)

Prof. Marcelo Lobato Martins
(Orientador)

Prof. Everaldo Arashiro

Hallan Souza e Silva

Prof. Silvio da Costa Ferreira Junior
(Orientador)

À minha família e meus amigos.

"O homem não sabe mais que os outros animais; sabe menos. Eles sabem o que precisam saber. Nós não."

Fernando Pessoa (1888-1935)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer imensamente ao Professor Silvio da Costa Ferreira Junior por ter me guiado neste trabalho, pelas discussões deste tema e também a respeito de Mecânica Quântica, Física Estatística e Sistemas Complexos. Muito, muito obrigado! A todo o Departamento de Física da Universidade Federal de Viçosa, em especial, aos Professores Daniel Franco, Winder Melo, Marcelo Martins, Ricardo Cordeiro e Álvaro Neves pelas aulas na Pós-Graduação. À Sueli, Luiza, Delmara e ao “Seu João”.

Ao Departamento de Física da Universidade Federal de Ouro Preto em especial aos meus orientadores da graduação Professores Américo Bernardes e Romuel Machado e também ao Professor A. Claret Sabioni.

Aos meus amigos da Pós-Graduação e também aos da graduação na pacata Ouro Preto. Ao José Antônio Santos e Davidson Viana por editarem as figuras 4.1 e 4.2.

À Fapemig pelo suporte financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Resumo	x
Abstract	xii
1 Introdução	1
2 O processo de contato	5
2.1 Modelo na rede regular unidimensional	5
2.2 Aproximação de campo médio	8
2.3 Diagrama de fase	9
2.4 Comportamento dependente do tempo	11
2.4.1 Teoria de escala	12
2.5 Teoria de escalonamento de tamanho finito	16
2.5.1 Implementação computacional	18
3 Fundamentos de redes complexas	21
3.1 Conceitos e definições básicas	21
3.2 Classificação	22
3.3 Rede aleatória, Watts-Strogatz e sem escala	23
3.3.1 Rede aleatória	25
3.3.2 Rede Watts-Strogatz	27
3.3.3 Rede sem escala	32

3.4	Modelos epidêmicos e redes complexas	34
3.4.1	Modelo SIS	35
4	O processo de contato na rede Watts-Strogatz	40
4.1	Equação para a densidade de sítios infectados	40
4.2	Análise da rede Wattz-Strogatz	41
4.3	Aproximação de campo médio	44
4.4	Análise numérica - resultados	45
5	O processo de contato na rede Barabási-Albert	52
5.1	Análise da rede Barabási-Albert	52
5.2	Análise numérica - resultados	53
6	Conclusões	55
	Referências Bibliográficas	57

Lista de Figuras

2.1	Ilustração para o modelo de rede regular unidimensional.	6
2.2	Densidade estacionária em função da taxa de infecção.	10
2.3	Evolução temporal do PC na rede regular.	12
2.4	Probabilidade de sobrevivência epidêmica. Expoente δ	15
2.5	Média do número de sítios infectados. Expoente η	15
2.6	Medida do espalhamento epidêmico. Expoente z	16
2.7	Densidade quase estacionária em função do tempo.	19
2.8	Densidade quase estacionária em função da taxa de infecção.	20
3.1	Matriz de adjacências.	22
3.2	Matriz de ligações.	22
3.3	Classificação de redes complexas.	24
3.4	Relação entre o número de nós e suas conexões em uma rede aleatória.	26
3.5	Ilustração da rede Erdős-Rényi.	26
3.6	Ilustração para a configuração em anel de uma rede social.	27
3.7	Topologias na rede WS.	28
3.8	Grau de distribuição da rede WS.	29
3.9	Comportamento do coeficiente de agregação da rede WS.	30
3.10	Menor caminho médio entre dois nós e a agregação da rede WS.	31
3.11	Grau de distribuição para o modelo BA.	34
3.12	Modelo SIS na rede WS e na rede BA.	38
4.1	Correlação entre nós na rede WS.	43
4.2	Esboço para a estimativa do ponto crítico.	46

4.3	Análise quase estacionária do PC na topologia mundo pequeno.	48
4.4	Análise quase estacionária do PC na topologia aleatória.	48
4.5	Tempo de relaxação para a topologia mundo pequeno.	49
4.6	Tempo de relaxação para a topologia aleatória.	49
4.7	Evolução temporal do PC na rede WS.	51
5.1	Correlações entre nós da rede BA.	53
5.2	Análise quase estacionária do PC na rede BA.	54

Lista de Tabelas

2.1	Expoentes críticos para o PC para 1, 2, 3 e 4 dimensões.	16
2.2	Expoentes críticos de CM para o PC.	18
4.1	Expoentes críticos para o PC na rede WS.	50
5.1	Expoentes críticos para o PC na rede BA.	54

Resumo

FERREIRA, Ronan Silva, Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2009. **Simulações quase estacionárias do processo de contato em redes complexas.** Orientador: Silvio da Costa Ferreira Junior. Coorientadores: Marcelo Lobato Martins e José Arnaldo Redinz

O estudo da estrutura e de propriedades de correlação entre os agentes interligados em uma rede complexas têm atraído o interesse da comunidade de Física Estatística através da investigação de processos dinâmicos nestas topologias. Tais investigações têm aberto discussões na literatura a respeito da validade de previsões feitas a partir de teorias de Campo Médio (CM), quando essas são confrontadas com resultados alcançados através de simulações computacionais. O Processo de Contato (PC) é um modelo matemático para o processo epidêmico sobre uma população. Na abordagem de redes complexas, identificamos cada indivíduo a um nó da rede, enquanto suas relações são representadas pelas ligações entre eles. No PC cada indivíduo pode estar infectado ou não, com uma probabilidade determinada pela taxa de infecção da epidemia. Esta taxa poderá ser capaz de promover a disseminação da doença por tempos longos ou sua erradicação, já que também existe uma chance dos infectados se tornarem saudáveis. Isso levará à demarcação de uma fase livre de doenças (fase absorvente) e outra na qual a doença persiste por longos tempos (fase ativa). Com a implementação computacional do PC em diferentes topologias de rede, pudemos comparar nossos resultados numéricos com as previsões de teorias de CM encontradas na literatura. A principal ênfase do trabalho foi o estudo da teoria de escalonamento de tamanho finito para o PC nas redes complexas propostas por Watts-Strogatz (modelo WS) e por Barabási-Albert (modelo BA), através de simulações quase estacionárias. Deste estudo resultou um

conjunto de expoentes críticos que caracterizam a transição de fase absorvente-ativa para a rede BA e também para as topologias mundo pequeno e aleatória encontradas na rede WS. Embora as previsões de CM tenham sido confirmadas para este conjunto de expoentes críticos, as taxas de transição de fase obtidas não foram corretamente preditas. Esse fato está em contraste com outros modelos epidêmicos, tais como SIS e SIR, já investigados na literatura em tais topologias de redes complexas.

Abstract

FERREIRA, Ronan Silva, Universidade Federal de Viçosa, February, 2009. **Quasi-stationary simulations of the contact process on complex networks.** Orientador: Silvio da Costa Ferreira Junior. Coorientadores: Marcelo Lobato Martins e José Arnaldo Redinz

The study of the structure and correlations properties among interconnected agents on complex networks has attracted the attention of the Statistical Physics community through investigation of dynamical process on this topologies. These investigations have opened discussions in the literature concerning on the validity of the predictions from mean field (MF) approaches, when these results are compared with those obtained from computer simulations. The contact process (CP) is a toy model for the epidemic spreading on a population. Using the complex network approach, we identify each individual as a network node, while their relations are represented by links among them. In the CP model, each individual may be infected or not, with a probability depending on the epidemic infection rate. This rate can lead to the dissemination of the epidemic at long times or its complete eradication, given that exists also a chance to the infected individuals become healthy, determining a phase free of the disease (absorbing) and other in which the disease persists (active). The computer implementation of the CP and different network topologies allows us to compare our results with those predicted by MF theory found in the the literature. The main aim of the present work was the study of the finite size scaling theory for the PC in the complex network proposed by Watts-Strogatz (WS) and by Barabási-Albert (BA) by quasistationary simulations. This study provided a set of critical exponents for the characterization of the phase transition absorbing-active on BA network and also on

two topologies found at the WS model, namely, small world and random. Although the predictions made by MF approaches have been verified for this set of critical exponents, the phase transition rates obtained was not predicted correctly. This fact is on contrast with others epidemic models, such as SIS and SIR, already studied in the literature on these complex networks.

Capítulo 1

Introdução

Existem sistemas estudados pela Física Estatística que obedecem ao que chamamos de “balanço detalhado”, o qual se refere à condição de “reversibilidade microscópica”. Podemos entendê-lo usando como exemplo uma reação química [1]. Suponha uma reação da forma $\{A\} \Leftrightarrow \{X\} \Leftrightarrow \{F\}$, em que $\{A\}$ é um conjunto de produtos iniciais, $\{X\}$ um conjunto de produtos intermediários e $\{F\}$ um conjunto de produtos finais. No equilíbrio, temos tanto transições de $\{A\}$ para $\{X\}$ quanto de $\{X\}$ para $\{A\}$. O mesmo ocorre entre $\{X\}$ e $\{F\}$. Dessa forma, temos uma reversão microscópica obedecendo o princípio de balanceamento.

Por outro lado, podemos ter situações que não respeitam o balanço detalhado. Em um caso simples, imaginemos uma única partícula para a qual será permitido transitar somente por quatro estados, que chamaremos de estados A , B , C e D . Porém, o estado D é um estado de aprisionamento, do qual não será permitido à partícula escapar. Temos então, que nossa partícula transitará, reversivelmente, entre os estados A , B e C , tendo sua dinâmica absorvida, caso ela visite o estado D . Desse ponto, não será permitido visitar outros estados em tempos futuros. Temos aqui um sistema que não respeita o balanceamento microscópico, sendo o estado de absorção D chamado de “estado absorvente”. Aos demais estados dos quais é permitida a fuga e, portanto, a reversão, daremos o nome de “estados ativos” do sistema.

Essa última situação é a que acontece, por exemplo, na disseminação de uma doença sobre uma população. Neste fenômeno, uma epidemia pode se alastrar por

1. Introdução

uma população passando por várias configurações com os indivíduos estando sujeitos à doença e a sua cura, caracterizando assim um estado ativo. Se, por algum motivo, a população se ver livre dessa infecção, isto é, caso nenhum de seus indivíduos esteja infectado, a epidemia não terá meios para continuar sua propagação, sendo então eradicada. A esta situação, identificamos um estado absorvente. Logo, percebemos aqui que a dinâmica de um processo epidêmico poderá levar a população para uma “fase ativa”, onde a epidemia persiste para tempos futuros ou para uma “fase absorvente”, livre da doença.

A modelagem matemática para a propagação de uma epidemia pode ser feita por meio do modelo de Processo de Contato (PC) [2, 3]. Neste modelo, a fase ativa da doença é determinada pela probabilidade de um indivíduo ser infectado. Há também a fase absorvente, já que existe a chance de um indivíduo se recuperar da doença - estando assim, sujeito a uma nova infecção. Todo o cálculo da probabilidade de um indivíduo ser infectado se baseia na quantidade de vizinhos de contato infectados que ele possui, juntamente com uma taxa de infecção que associamos à epidemia. É o estudo do comportamento deste sistema na região crítica, onde ocorre a transição entre as fases absorvente e ativa, que nos ajudará a entender suas características.

Na vizinhança do ponto crítico de transição entre fases algumas grandezas físicas podem se comportar da mesma maneira em sistemas diferentes, exibindo diferentes fenômenos. Esta similaridade levou os físicos a separarem os sistemas que possuem os mesmos comportamentos críticos em classes, chamadas “classes de universalidade”. De forma geral, cada classe de universalidade determina singularidades no comportamento de certas grandezas físicas na vizinhança do ponto crítico a partir de um conjunto de características básicas, tais como dimensionalidade espacial e tipos das interações entre seus agentes. Encontrar e catalogar essas classes é um ponto chave para questões sobre modelos longe do equilíbrio, como o PC [4, 5].

Como uma primeira aproximação, as propriedades desta região crítica são frequentemente estudadas através de teorias de Campo Médio (CM) [6, 7]. Para o PC, a probabilidade de um indivíduo estar infectado dependerá, em última análise, do estado de saúde de todos os indivíduos da população, já que seu estado dependerá do estado

1. Introdução

de seus vizinhos de contato, que por sua vez, também possuem outros vizinhos e assim por diante. Essa hierarquia, devido às correlações entre indivíduos é muito complexa para ser tratada exatamente. O que a aproximação de CM faz é truncar essa hierarquia ao nível de um único, ou um grupo limitado de indivíduos (e somente seus vizinhos), tratando assim cada um deles como sendo estatisticamente independentes [8]. Estamos portanto, nessa aproximação, negligenciando correlações entre partes do sistema, o que em geral, nos fornecerá no máximo uma informação qualitativamente correta sobre o sistema em estudo.

O erro consiste no tratamento de diferentes sítios como estatisticamente independentes. A partir de uma certa dimensão, quando estas flutuações se tornarem desprezíveis, estas correlações serão descritas de forma quantitativamente correta pela aproximação de CM. Cada sistema possui sua *dimensão crítica*, abaixo da qual a teoria de CM nos fornece no máximo uma descrição qualitativa. De forma geral, para o limite de uma dimensão infinita, a teoria de CM seria uma descrição perfeita.

Ainda no campo da Física Estatística, nos últimos anos observa-se um grande interesse pela modelagem de sistemas que possuem um grande número de agentes realizando de alguma forma interações entre si através das *Redes Complexas* [9–12]. Esta procura é estimulada pelo grande sucesso que essas redes vêm alcançando em diversas áreas, desde redes protéicas à estrutura da internet [11, 13–17].

Na abordagem de redes complexas, de forma geral, estamos interessados somente nos agentes e suas interações em um sistema. Podemos então associar os nós de uma rede aos indivíduos de uma população e o contato entre eles sendo representados por ligações entre esses nós.

Com isso é possível estudar um processo dinâmico com estado absorvente nestas topologias de redes complexas através do modelo de PC. Aqui encontramos uma motivação: recentemente, surgiu um debate na comunidade de física estatística dedicada ao estudo das redes complexas sobre a validade das predições feitas por aproximações de CM para o PC nessas topologias e os resultados obtidos por meio de simulações computacionais [7, 18–21]. As redes complexas são entendidas como objetos de dimensão $d \rightarrow \infty$. Será a Teoria de CM válida para a descrição quantitativa do PC em

1. Introdução

uma topologia de rede complexa? Trazemos neste texto um estudo destas questões em topologias de rede que não foram até então investigadas nos trabalhos já citados, através de simulações quase estacionárias do PC nestes ambientes complexos.

A organização deste trabalho será da seguinte forma: no capítulo 2, descreveremos o PC e sua análise na rede regular unidimensional. Faremos uma revisão da aproximação de CM onde apresentaremos um conjunto de expoentes caracterizando a transição de fase absorvente-ativa do PC. Mostraremos que nossos resultados para os expoentes críticos, que caracterizam essa transição, vão ao encontro dos encontrados na literatura [8, 22]. Também apresentaremos uma implementação computacional e faremos uma discussão da teoria de escalonamento finito usada para o tratamento do PC em um sistema finito, mostrando que nossos resultados estão de acordo com os já apresentados por outros autores [8]. No capítulo 3, apresentaremos o tratamento computacional para a manipulação de nós e suas ligações de uma rede complexa por meio de matrizes. Faremos também uma breve apresentação de alguns tipos de redes que vêm sendo tratadas atualmente. Apresentaremos três importantes topologias de rede (Erdős-Rényi [23], Watts-Strogatz [9] e Barabási-Albert [10]) e discutiremos, com base nos resultados de nossas simulações computacionais, que são corroborados pela literatura [11, 13], as características importantes para analisarmos a atual discussão mencionada acima. Na última seção apresentaremos brevemente o modelo epidêmico SIS nos modelos de redes complexas WS e BA, apresentando resultados da literatura que também serão importantes para nossas conclusões finais. No capítulo 4, apresentaremos nossos resultados encontrados para o PC na rede WS e também nossas conclusões sobre o comportamento do PC nessa rede comparando nossos resultados com a descrição prevista pelas duas aproximações de CM apresentadas por Castellano *et al* [18] e Hong *et al* [21]. As mesmas análises serão apresentadas no capítulo 5, agora para o PC na rede BA. Finalmente, o capítulo final contém as conclusões retiradas deste trabalho.

Capítulo 2

O processo de contato

O Processo de Contato (PC) foi apresentado por T. E. Harris [2] como um *toy model* para o processo epidêmico. No espalhamento de uma epidemia em uma população seus indivíduos podem ser levados a uma fase ativa da epidemia com a proliferação da doença ou a uma fase absorvente, na qual todos eles estejam saudáveis. Nesta última configuração, o espalhamento da epidemia é cessado porque não há indivíduos infectados para espalhá-la. Desta forma, a população se vê livre da doença permanecendo saudável para tempos futuros.

2.1 Modelo na rede regular unidimensional

Para o PC na rede regular unidimensional, cada indivíduo da população é identificado a um sítio i de uma rede com, por exemplo, N indivíduos, como esboçado na Figura 2.1. Cada sítio poderá ser representado em um determinado instante por uma de duas situações: infectado ou saudável. A cada um deles, associamos uma variável do tipo “gás de rede” (onde cada sítio pode ou não conter uma partícula) [4]: $\sigma_i = 0, 1$. Para a nossa situação, iremos definir que:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= 0, & \text{sítio vazio (indivíduo saudável),} \\ \sigma_i &= 1, & \text{sítio ocupado (indivíduo infectado).}\end{aligned}$$

A contaminação de um sítio saudável poderá ocorrer se ao menos um dos seus primeiros vizinhos (vizinhos de contato) estiverem infectados. Este contágio ocorre

2. O processo de contato



Figura 2.1: Ilustração para o modelo de rede regular unidimensional com N sítios. Os sítios infectados são representados na cor preta. Neste instante t , a configuração ativa do sistema nos diz que o sítio i possui seus dois primeiros vizinhos infectados.

com uma taxa de transição igual a $n\lambda/z$, em que n representa o número de vizinhos infectados, λ é um parâmetro positivo (a taxa de infecção da epidemia) e z , o número de coordenação da rede (o número de primeiros vizinhos). Existe também a chance de um sítio infectado tornar-se saudável. Essa transição ocorre a uma taxa unitária que independe do estado em que seus vizinhos se encontram. Uma vez que o indivíduo tenha sido curado, estará sujeito a uma nova infecção.

A equação para a taxa de transição do sítio i , que identifica uma variável aleatória no vetor de configuração $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N)$ pode ser escrita da seguinte forma [4]:

$$w_i(\sigma) = \frac{\lambda}{z} (1 - \sigma_i) \sum_j \sigma_j + \sigma_i, \quad (2.1)$$

onde a soma em j envolve os primeiros vizinhos do sítio i . Se acaso o sítio i for igual a zero (saudável), então,

$$w_i(\sigma) = \frac{\lambda}{z} \sum_j \sigma_j, \quad (2.2)$$

o que representa um termo de *criação* de partículas. Já se o sítio i for igual a um (infectado),

$$w_i(\sigma) = 1, \quad (2.3)$$

que por sua vez, representa um termo de *aniquilação* de partículas.

Para descrevermos a dinâmica do PC, podemos escrever a equação mestra para o sistema [4] em termos da transição de um único sítio e sua distribuição de probabilidades em função do tempo. Adotaremos a dinâmica assíncrona onde a cada instante

2. O processo de contato

de tempo um único sítio da rede é alterado:

$$\frac{d}{dt}P(\xi, t) = \sum_{i=1}^N [w_i(\xi^i)P(\xi^i, t) - w_i(\xi)P(\xi, t)], \quad (2.4)$$

onde, de forma geral, temos $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N)$ representando o vetor de configurações em um instante t , sendo ξ_i uma variável gás de rede localizada no sítio i e $\xi^i = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, (\xi_i)^*, \dots, \xi_N)$, o mesmo vetor, porém, alterado no sítio i . Esta alteração está simbolizada pelo índice “estrela”. A probabilidade de o sistema, em um certo instante t , estar na configuração ξ é dada por $P(\xi, t)$.

A partir dessa distribuição de probabilidades podemos calcular o valor esperado de qualquer função $f(\xi)$ e de sua taxa de variação temporal:

$$\begin{aligned} \langle f(\xi) \rangle &= \sum_{\{\xi\}} f(\xi)P(\xi, t), \\ \frac{d}{dt} \langle f(\xi) \rangle &= \frac{d}{dt} \sum_{\{\xi\}} f(\xi)P(\xi, t) \\ &= \sum_{\{\xi\}} f(\xi) \frac{d}{dt} P(\xi, t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

que usando a equação (2.4), encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f(\xi) \rangle &= \sum_{\{\xi\}} f(\xi) \sum_{i=1}^N [w_i(\xi^i)P(\xi^i, t) - w_i(\xi)P(\xi, t)] \\ &= \sum_{\{\xi\}} \sum_{i=1}^N [w_i(\xi)P(\xi, t) - w_i(\xi)P(\xi, t)] f(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\{\xi\}} [f(\xi^i)w_i(\xi)P(\xi, t) - f(\xi)w_i(\xi)P(\xi, t)] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\{\xi\}} \{ [f(\xi^i) - f(\xi)] w_i(\xi)P(\xi, t) \} \\ &= \sum_{i=1}^N \langle [f(\xi^i) - f(\xi)] w_i(\xi) \rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como estamos tratando no PC com uma variável gás de rede, então: $\sigma^i = 1 - \sigma_i$, com

2. O processo de contato

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N)$ e $\sigma^i = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, (\sigma_i)^*, \dots, \sigma_N)$. Segue então, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle &= \langle [\sigma^i - \sigma_i] w_i(\sigma) \rangle \\ &= \langle [1 - \sigma_i - \sigma_i] w_i(\sigma) \rangle \\ &= \langle [1 - 2\sigma_i] w_i(\sigma) \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.1) na equação (2.7), podemos escrever que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle &= \left\langle [1 - 2\sigma_i] \left[\frac{\lambda}{z} (1 - \sigma_i) \sum_j \sigma_j + \sigma_i \right] \right\rangle \\ &= \frac{\lambda}{z} \sum_j \langle (1 - \sigma_i) \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \\ &= \lambda(\rho - \phi) - \rho \\ &= (\lambda - 1)\rho - \lambda\phi, \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que foi assumido que $\rho \equiv \langle \sigma_i \rangle$ e $\phi \equiv \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$. Note que essa expressão é de intricada integração graças ao termo ϕ , que lida com as correlações entre os sítios da rede. Como vimos no primeiro capítulo, é a teoria de CM nos ajudará a entender o comportamento do PC truncando essa hierarquia de correlações entre os sítios. Para isso, precisaremos fatorar o termo ϕ , decorrelacionando-o. Desta forma, trataremos cada sítio como sendo estatisticamente independente.

2.2 Aproximação de campo médio

Com a aproximação de CM poderemos obter informações acerca do comportamento do PC na região crítica, onde ocorre a transição de fase.

Imaginemos então um vetor qualquer de configurações $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$ e sua probabilidade associada, $P(\sigma)$. Tomemos agora, o termo ϕ referente às correlações entre dois sítios, i e j da rede:

$$\phi = \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j P(\sigma)}{\sum_{\sigma} P(\sigma)}. \quad (2.9)$$

Decorrelacionando este termo ϕ , teremos que a probabilidade anteriormente associada

2. O processo de contato

a ele será agora dada por $P(\sigma) = P(\sigma^i) P(\sigma^j)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j P(\sigma^i) P(\sigma^j)}{\sum_{\sigma} P(\sigma^i) P(\sigma^j)} \\ &= \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Assumindo uma homogeneidade espacial, podemos escrever que $\phi \equiv \langle \sigma_i \rangle^2 \equiv \rho^2$. Logo, podemos reescrever a equação (2.8) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\rho = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2.\tag{2.11}$$

Vemos que a equação (2.11) apresenta uma bifurcação do tipo transcritical [24] em $\lambda = \lambda_c = 1$. Para taxas inferiores a 1, a fase absorvente é a fase estável, invertendo-se este quadro para valores iguais ou superiores a $\lambda_c = 1$. A partir daí, a fase absorvente torna-se instável.

Em resumo, temos que,

$$\begin{cases} \bar{\rho} = 0, & \lambda \leq 1 & \text{(regime subcrítico)} \\ \bar{\rho} = 1 - \lambda^{-1}, & \lambda > 1 & \text{(regime supercrítico)} \end{cases}$$

onde $\bar{\rho}$ é o estado de densidade estacionária ($t \rightarrow \infty$) estável para cada fase. Note que o estado estacionário para o regime subcrítico não contém nenhum indivíduo infectado (estado absorvente), o que não ocorre para o regime supercrítico, onde $\bar{\rho} = 0$ é o estado instável.

2.3 Diagrama de fase

De acordo com a equação (2.11), a densidade estacionária de sítios infectados $\bar{\rho}$ é diferente de zero somente para $\lambda > \lambda_c$. Em uma expansão na vizinhança do ponto crítico, podemos escrever que, para $\Delta = \lambda - \lambda_c > 0$,

$$\bar{\rho} = \Delta^\beta + O(\Delta^2).\tag{2.12}$$

Segue então que, para uma aproximação de primeira ordem, devemos ter o expoente $\beta = 1$.

2. O processo de contato

A Figura 2.2 nos mostra um esboço para o comportamento da densidade de sítios infectados em função da taxa de infecção λ . Nesta figura é contemplado o fato de que a densidade ρ apenas é diferente de zero para valores acima de um valor crítico λ_c , que separa as duas fases, absorvente e ativa¹. Acima deste valor, a relação segue a lei de potência apresentada na aproximação de primeira ordem da expansão dada anteriormente.

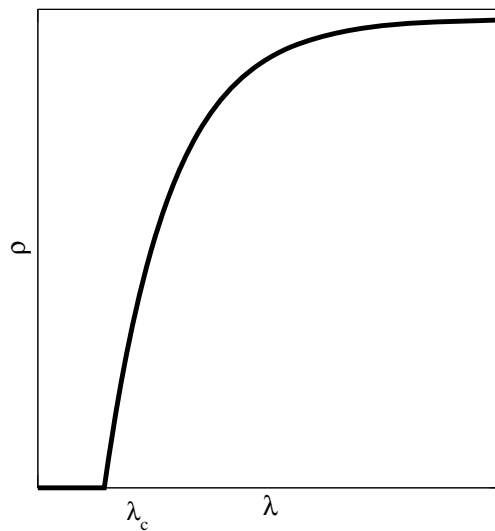


Figura 2.2: Esboço para a densidade estacionária em função da taxa λ . Seu valor crítico λ_c marca a transição entre as duas fases, absorvente e ativa.

A integração da equação (2.11) com $\lambda \neq 1$ resulta em

$$\rho(t) \sim \frac{\Delta}{\lambda - e^{-\Delta t}}, \quad (2.13)$$

de onde podemos obter uma informação acerca do tempo de relaxação, τ . Ele diverge quando $\lambda \rightarrow \lambda_c$, proporcionalmente a $|\Delta|^{-1}$. Dessa forma, podemos caracterizar este comportamento do tempo de relaxação definindo o expoente ν_{\parallel} , via

$$\tau \propto |\Delta|^{-\nu_{\parallel}}. \quad (2.14)$$

Se definirmos um comprimento ξ para as correlações entre partes do sistema, espera-se

¹Nesse caso, dizemos que ρ é um parâmetro de ordem, com o qual identificamos cada uma das fases. Já λ é um parâmetro de controle da transição entre elas.

2. O processo de contato

que esse também diverja quando $\lambda \rightarrow \lambda_c$:

$$\xi \propto |\Delta|^{-\nu_{\perp}}, \quad (2.15)$$

em que definimos um expoente ν_{\perp} .

2.4 Comportamento dependente do tempo

Algumas características dependentes do tempo serão importantes para entendermos a evolução do PC. Informações como a probabilidade de sobrevivência da epidemia e o número médio de sítios infectados nos dão um conjunto de expoentes que nos ajudarão a entender a dinâmica do processo. O número médio de sítios infectados será dado por:

$$n(t) = \left\langle \sum_{\mathbf{r}=1}^N \sigma_{\mathbf{r}}(t) \right\rangle, \quad (2.16)$$

em que $\sigma_{\mathbf{r}}$ identifica um sítio infectado na rede, \mathbf{r} é um vetor de posição e os símbolos $\langle \rangle$ devem ser tomados como uma média sobre várias amostras de rede. Podemos também calcular o raio médio de alcance do espalhamento de uma partícula a partir do centro da rede (origem),

$$R^2(t) = \frac{1}{n(t)} \left\langle \sum_{\mathbf{r}} r^2 \sigma_{\mathbf{r}} \right\rangle. \quad (2.17)$$

A Figura 2.4 ilustra o espalhamento de uma epidemia sobre uma população partindo da configuração inicial comentada acima com a evolução temporal do sistema no eixo vertical, sentido para baixo. Cada um dos três quadros são apresentados de acordo com diferentes taxas de infecção a que a população foi submetida. São apresentadas as fases subcrítica, supercrítica, bem como o espalhamento sobre a taxa crítica λ_c .

Não existem resultados exatos para a taxa crítica λ_c , apenas valores aproximados. Por meio de técnicas numéricas e expansões em séries [25, 26], podemos dizer que

2. O processo de contato

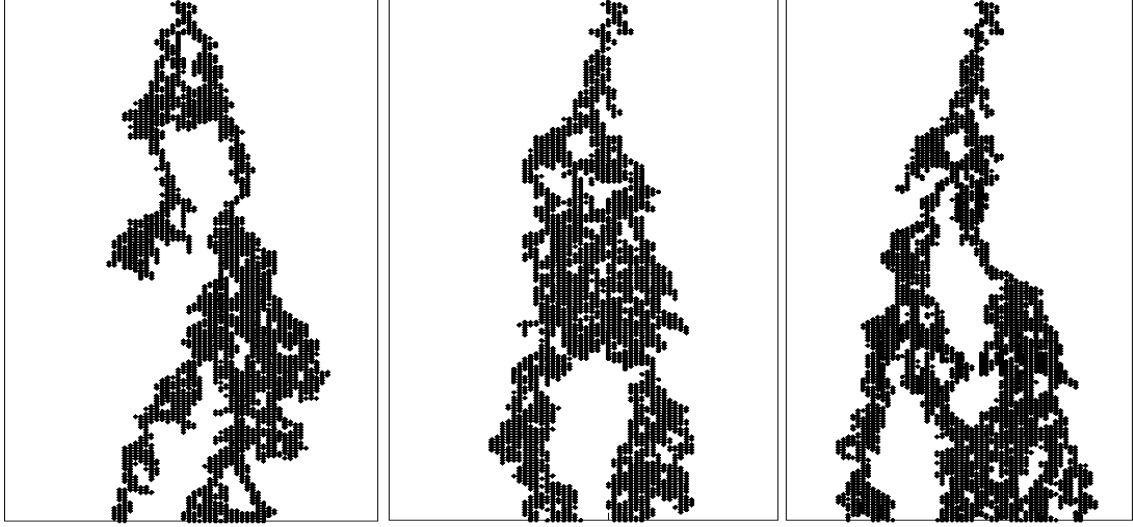


Figura 2.3: Evolução temporal (eixo vertical sentido para baixo) para o PC partindo de uma configuração com um único sítio infectado (pontos escuros) no centro da rede. Da esquerda para a direita, temos as taxas de infecção $\lambda = 3.0$, $\lambda = 3.29785$ e $\lambda = 3.5$.

$\lambda_c = 3.297848(20)$ (valores entre parênteses denotam incertezas), para o PC em uma dimensão.

2.4.1 Teoria de escala

No regime suficientemente próximo ao ponto crítico, $\Delta \rightarrow 0$ (com $\xi \rightarrow \infty$ e $\tau \rightarrow \infty$), a probabilidade condicional de encontrarmos uma partícula em r , dado que em $t = 0$ havia uma única partícula no centro da rede (origem), obedece à relação

$$\rho(r, t; 0, 0) \simeq t^{\eta-dz/2} f(r/t^{z/2}, \Delta t^{1/\nu_{\parallel}}), \quad (2.18)$$

que é a descrição fenomenológica proposta por Grassberger *et al* na referência [27] para sistemas grandes e tempos longos. Esta hipótese é feita com base no comportamento para a densidade de uma partícula, conforme o parágrafo anterior, e na hipótese de que propriedades assintóticas do sistema próximo ao ponto crítico são invariantes sobre transformações de escala. Na equação acima, d é a dimensão do sistema e f é uma função de escala. Os demais expoentes, η e z serão trabalhados abaixo. Eles nos informam a respeito do comportamento das grandezas (2.16) e (2.17) sobre o ponto

2. O processo de contato

crítico.

Como um exemplo das consequências da hipótese de invariância sobre escala, podemos trabalhar com a probabilidade de sobrevivência da epidemia $P(t)$. No regime supercrítico uma amostra pode sobreviver indefinidamente com $P(t) \rightarrow P_\infty > 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Para essa situação $P_\infty \rightarrow \bar{\rho}$ [8, 27]. Com isso, podemos efetuar reescalas do tipo [28]

$$\begin{aligned} P &\rightarrow a^\beta P, \\ \Delta &\rightarrow a\Delta, \\ t &\rightarrow a^{-\nu_\parallel} t. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Na vizinhança do ponto crítico, a invariância sobre escala exige que

$$P(\Delta, t) = a^\beta P(a\Delta, a^{-\nu_\parallel} t). \tag{2.20}$$

Se o parâmetro $a > 0$ for tal que $ta^{-\nu_\parallel} = 1$, resulta que

$$P(\Delta, t) = t^{-\beta/\nu_\parallel} P(\Delta t^{1/\nu_\parallel}, 1). \tag{2.21}$$

Essa expressão pode ser reescrita como

$$P(t) \simeq t^{-\delta} \Phi(\Delta t^{1/\nu_\parallel}), \tag{2.22}$$

em que Φ é uma função de escala dependente apenas do argumento $\Delta t^{1/\nu_\parallel}$ e $\delta \equiv \beta/\nu_\parallel$.

O pré-fator $t^{\eta-dz/2}$ na hipótese de escala (2.18) pode ser justificado pelo fato de que sobre o ponto crítico $\Delta = 0$, se integramos a equação (2.18) sobre todo o espaço, devemos recuperar o comportamento esperado para a grandeza (2.16), que é dado por $n(t) \propto t^\eta$:

$$\begin{aligned} n(t) &= \left\langle \sum_{\mathbf{r}=1} \sigma_{\mathbf{r}}(t) \right\rangle \\ &= \int \rho(r, t) d^d r \\ &= \int t^{\eta-dz/2} f(r/t^{z/2}, \Delta t^{1/\nu_\parallel}) d^d r \\ &= t^{\eta-dz/2} \int f(r/t^{z/2}, \Delta t^{1/\nu_\parallel}) d^d r. \end{aligned} \tag{2.23}$$

2. O processo de contato

Usando-se a troca de variáveis $u = r/t^{z/2}$, resulta que

$$n(t) \sim t^\eta f'(\Delta t^{1/\nu_0}). \quad (2.24)$$

Podemos agir da mesma forma para a grandeza (2.17). No ponto crítico, o comportamento dessas grandezas dinâmicas se reduzem a:

$$P(t) \propto t^\delta, \quad (2.25)$$

$$n(t) \propto t^\eta, \quad (2.26)$$

$$R^2(t) \propto t^z. \quad (2.27)$$

Na Tabela 2.1, vemos que os valores esperados para a análise de campo médio (CM) concordam com os valores obtidos a partir de 4 dimensões. Os valores ali colocados com índices (a), (b), (c), (d), devem-se a simulações numéricas e expansões em série das referências [22, 25, 29, 30], respectivamente. Para o leitor interessado são também recomendadas as referências [28, 31] para o tratamento da aproximação de campo médio para o PC, bem como para outros modelos com estado absorvente.

Nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6, mostramos os resultados das simulações realizadas a fim de encontrar os valores (com correções de escala para tempos finito [8]) para os expoentes das relações (2.25), (2.26) e (2.27). Estes valores possuem uma incerteza que está indicada entre parênteses.

2. O processo de contato

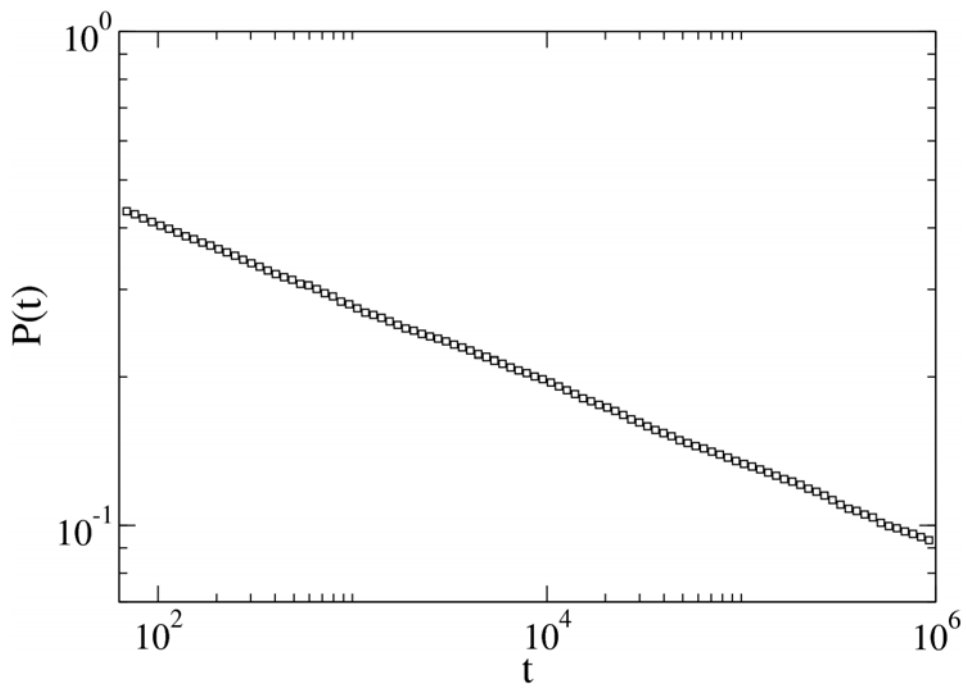


Figura 2.4: Expoente δ . Inclinação igual a $-0.159(2)$

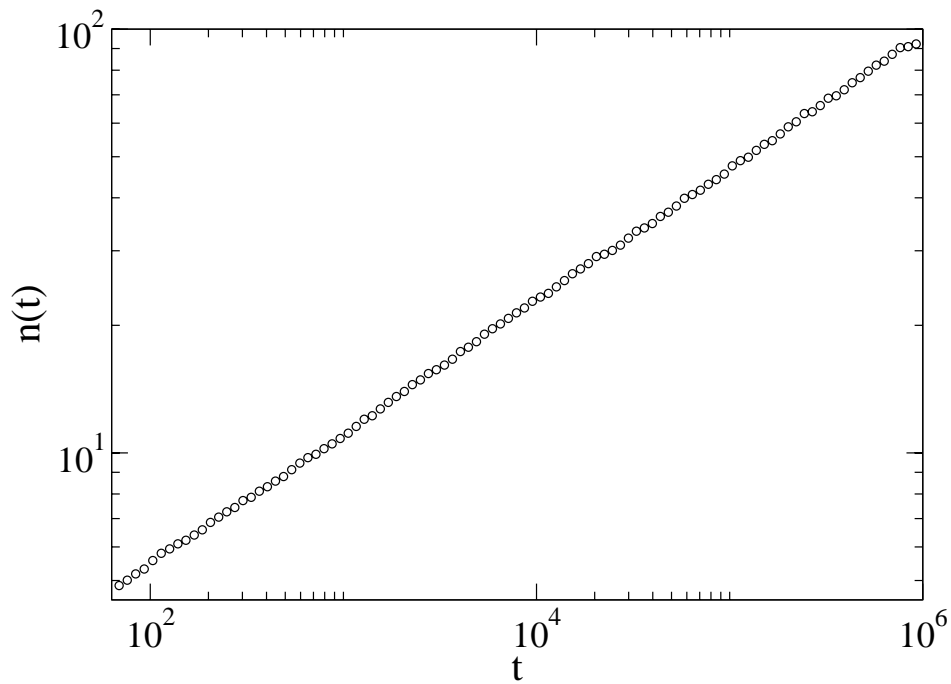


Figura 2.5: Expoente η . Inclinação igual a $0.313(1)$

2. O processo de contato

expoente	CM	1D	2D	3D	4D
δ	1	0.15947(3) ^a	0.4505(10) ^b	0.730(4) ^c	1 ^d
η	0	0.31368(4) ^a	0.2295(10) ^b	0.114(4) ^c	0 ^d
z	1	1.26523(3) ^a	1.1325(10) ^b	1.052(3) ^c	1 ^d

Tabela 2.1: Expoentes críticos do PC em d dimensões. Os valores em parênteses denotam incertezas. Para a dimensão crítica $d_c = 4$ seus valores são os previstos pela aproximação de CM.

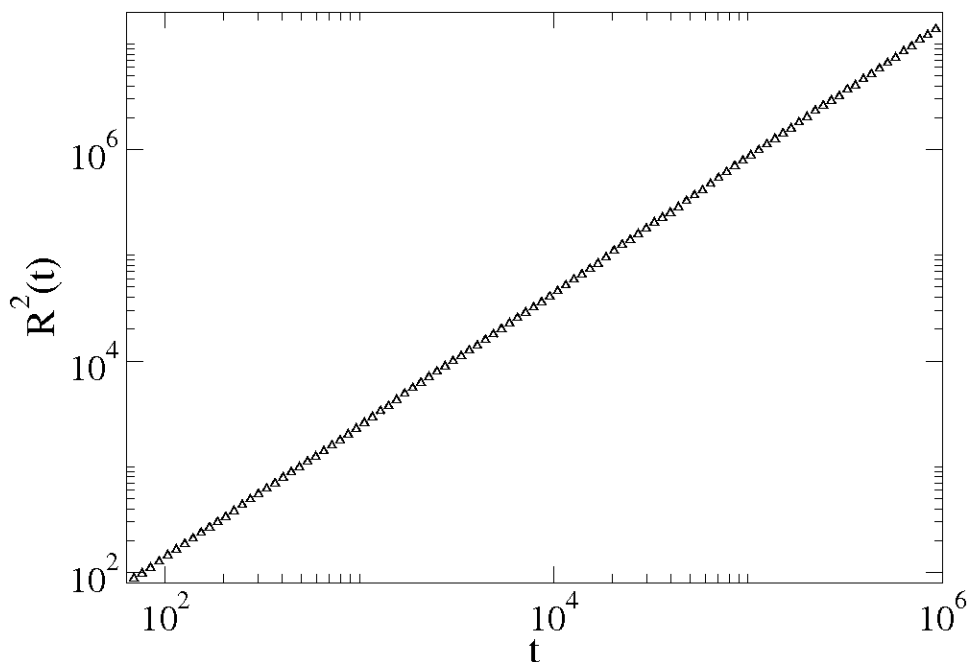


Figura 2.6: Expoente z . Inclinação igual a 1.265(2)

2.5 Teoria de escalonamento de tamanho finito

Ao analisarmos as divergências em torno do ponto crítico e as correlações entre partes do sistema, devemos nos lembrar que em uma análise computacional, qualquer que seja o tamanho do sistema, ele será finito! Nesse caso, o único verdadeiro estado estacionário é o estado absorvente. Isso se deve ao número finito de configurações acessíveis ao sistema, que eventualmente, visitará o estado absorvente. Iremos, então, nos ocupar do emprego da teoria de escalonamento de tamanho finito (ETF) [8] e estudar o estado dito *quase estacionário*. Esse estado é alcançado partindo-se de uma

2. O processo de contato

configuração em que o sistema se encontre na fase ativa, após um transiente que tem sua duração dependente de N e da distância Δ para o ponto crítico.

Na vizinhança do ponto crítico, onde ξ é grande, propriedades intensivas dependem fortemente do tamanho do sistema. Esta dependência se expressa em termos da razão entre o comprimento do sistema e o comprimento de correlação, N/ξ - convencionalmente representado por $\Delta N^{1/\nu_\perp}$.

Um fato importante é que por meio da análise de ETF podemos estimar o ponto crítico λ_c . Isso pode ser feito via simulações computacionais com amostras de diversos tamanhos do sistema. Evidentemente, esperamos que para o limite de um sistema infinito $N \rightarrow \infty$, a densidade de sítios infectados siga a relação $\bar{\rho} \propto \Delta^\beta$. Para N grande e Δ pequeno, a densidade quase estacionária pode ser descrita pela relação

$$\rho_q(\Delta, N) \propto N^{-\beta/\nu_\perp} f(\Delta N^{1/\nu_\perp}), \quad (2.28)$$

onde a função de escala $f(x)$ possui um comportamento assintótico $f(x) \rightarrow x^\beta$ para $x \rightarrow \infty$ e vai para um valor constante quando $x \rightarrow 0$. A notação ρ_q se refere ao estado quase estacionário. Quando tivermos $\Delta = 0$, i.e., no ponto crítico, a equação acima se reduz a:

$$\bar{\rho}_q(0, N) \propto N^{-\beta/\nu_\perp}, \quad (2.29)$$

de onde podemos estimar o valor do ponto crítico através do expoente β/ν_\perp .

Para caracterizarmos este comportamento através do expoente ν_\perp , iremos estender a equação (2.11) para uma dependência também espacial e acrescentar um termo difusivo com coeficiente de difusão D :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) = (\lambda - 1) \rho(\vec{x}, t) - \lambda \rho^2(\vec{x}, t) + D \nabla^2 \rho(\vec{x}, t). \quad (2.30)$$

Reescalando a densidade de sítios $\rho(t) \rightarrow \zeta^{-\beta/\nu_\perp} \rho(\zeta \vec{x}, \zeta^{2/z} t)$ (ver seção anterior) na equação (2.30), resulta em que,

$$\zeta^{2/z} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) = (\lambda - 1) \rho(\vec{x}, t) - \zeta^{-\beta/\nu_\perp} \lambda \rho^2(\vec{x}, t) + D \zeta^2 \nabla^2 \rho(\vec{x}, t). \quad (2.31)$$

onde temos a imposição de que $2/z = -\beta/\nu_\perp = 2$ para respeitar a invariância sobre escala.

2. O processo de contato

Podemos resumir os expoentes críticos obtidos para o PC, tratados nessa seção, a partir da aproximação de CM como na Tabela 2.2.

Expoente	Campo Médio
β	1
ν_{\parallel}	1
ν_{\perp}	$\frac{1}{2}$

Tabela 2.2: Valores obtidos pela aproximação de Campo Médio para os expoentes críticos do Processo de Contato.

2.5.1 Implementação computacional

No modelo computacional, a cada passo de tempo escolhemos aleatoriamente um sítio infectado da rede e um entre dois eventos: *criação*, no qual ocorre a infecção (criação de uma partícula) de um sítio vizinho com probabilidade $p_c = \lambda/(1 + \lambda)$ ou *aniquilação*, no qual ocorre a cura (aniquilação de uma partícula) com probabilidade $p_a = 1 - p_c$. No processo de criação, escolhemos ao acaso um dos primeiros vizinhos do sítio escolhido e com probabilidade p_c , o infectamos caso esse não esteja infectado. Já no processo de aniquilação de partículas, ao escolhermos em um processo aleatório um sítio dentre os já infectados, com probabilidade p_a o curamos. A cada passo, incrementamos o contador de tempo em $1/N_o$, em que N_o é o número de sítios infectados, alcançando assim, em média, um evento por sítio até um número de iterações já estipulado (o tempo máximo). Este procedimento, em que trabalhamos com uma *lista* de sítios ocupados (note que apenas tomamos indivíduos infectados), promove um melhor desempenho computacional. Uma vez que todo esse processo é realizado sobre um grande espaço amostral, essa estratégia não acarreta em perda de informação.

Voltando ao estado quase estacionário mencionado anteriormente, esse nos ajudará a estudar o comportamento na vizinhança do ponto crítico em simulações de sistemas computacionais finitos. O que fazemos aqui é retirar propriedades estatísticas somente sobre amostras que sobreviveram a tempos finitos estipulados nas simulações computacionais. Isto é, apenas analisamos estatísticas sobre o espaço amostral que não

2. O processo de contato

visitou o estado absorvente.

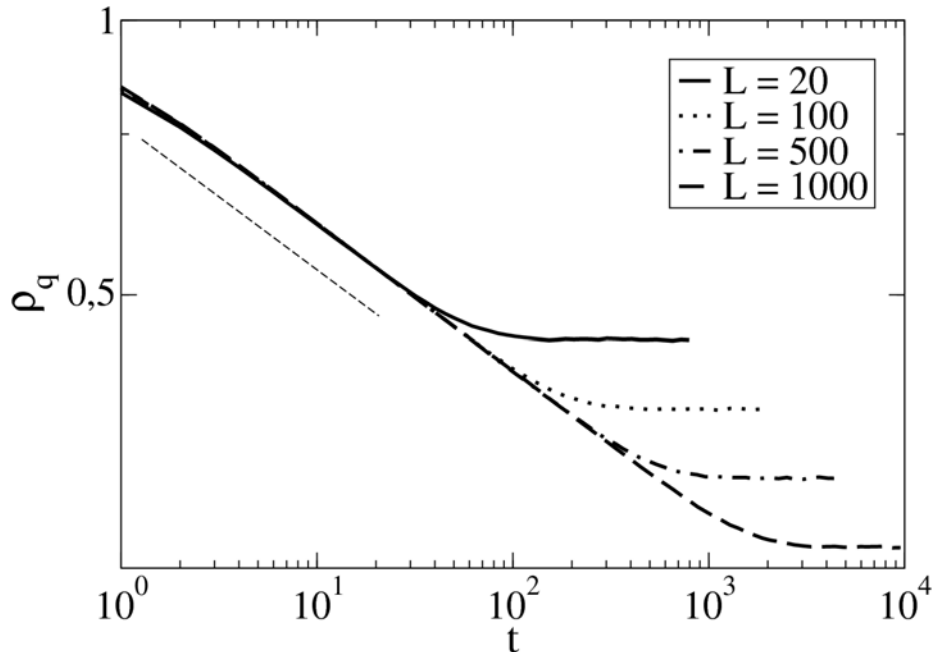


Figura 2.7: Simulação quase estacionária da densidade de sítios infectados em função do tempo do PC em uma rede regular unidimensional com $\lambda = \lambda_c$. De cima para baixo, os tamanhos de rede quadrada simulados foram, respectivamente, $N = 25, 50, 100$ e 200 . A curva que melhor se ajusta aos dados (linha tracejada) possui inclinação $\delta = -0.16$.

Na Figura 2.7 mostramos o resultado das simulações para a análise quase estacionária realizadas a partir do modelo computacional descrito acima.

Os valores calculados como médias convergem para seu valor estacionário no limite termodinâmico em que $N \rightarrow \infty$. Para ilustrarmos este fato importante, mostramos na Figura 2.8 o resultado para o comportamento da densidade de sítios infectados em função da taxa de infecção. Note, que como dito acima, ao simularmos sistemas cada vez maiores, o comportamento do gráfico tende ao comportamento apresentado na Figura 2.2.

Na Figura 2.7 as simulações foram realizadas com $\lambda = \lambda_c$. Já na Figura 2.8, podemos perceber o valor da taxa crítica convergindo para o valor $\lambda_c = 3.297848(20)$ apresentado na referência [25], à medida que cresce o valor de N .

2. O processo de contato

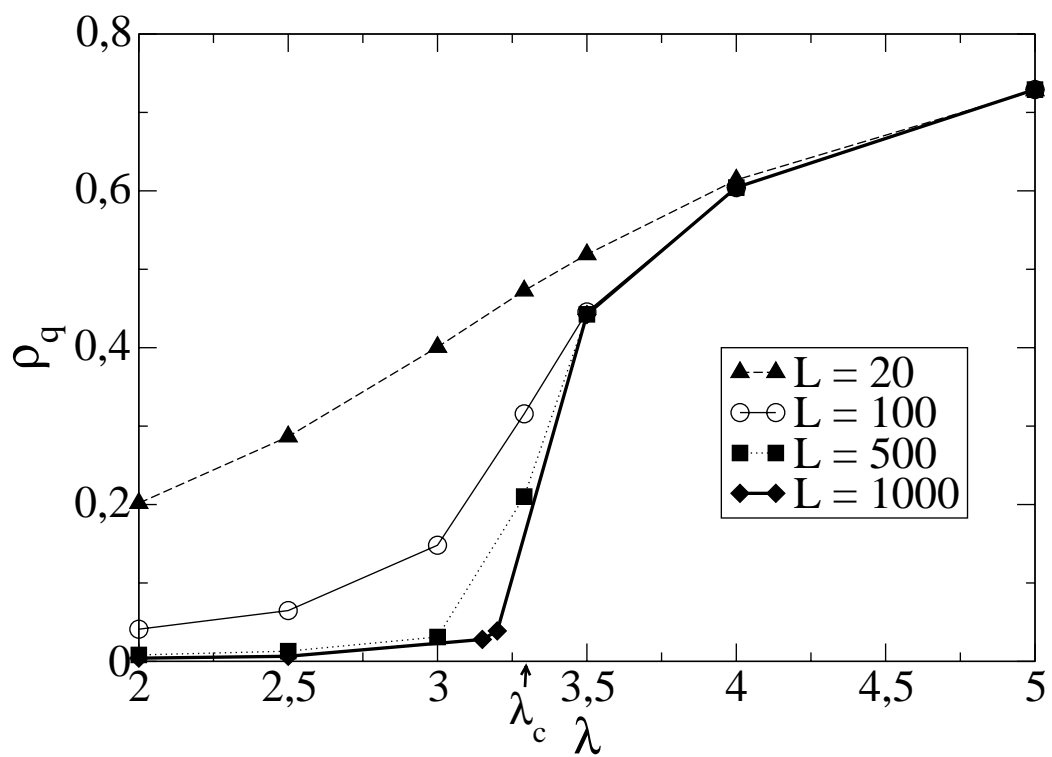


Figura 2.8: Densidade quase estacionária em função da taxa de infecção. A taxa crítica é indicada no gráfico.

Capítulo 3

Fundamentos de redes complexas

Redes complexas tem suas raízes na teoria de grafos [35, 36]. Nesta teoria, estamos interessados nos elementos e suas relações em um sistema. Identificamos os elementos interagentes aos nós de uma rede e suas relações às conexões entre eles. As características destes componentes de uma rede dependem do tipo de sistema que buscamos estudar.

3.1 Conceitos e definições básicas

Matematicamente, uma rede R é definida por um par de conjuntos $R = (v, \varepsilon)$, em que v é um conjunto contável e não vazio de elementos que podemos denominar *vértices* ou *nós*, enquanto ε é um conjunto não ordenado de pares de diferentes vértices, que podemos chamar de *ligações* ou *links*. Como vínhamos fazendo ao longo do texto, referenciamos os nós em uma rede usando uma letra minúscula i ou j . Logo, a ligação (i, j) une dois nós, i e j , e dizemos então que eles são *adjacentes*. Desta forma, podemos construir o que chamamos de matriz de adjacência, $M = \{a_{ij}\}$, $N \times N$, definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in \varepsilon; \\ 0, & \text{se } (i, j) \notin \varepsilon. \end{cases}$$

Para o nosso caso, trabalhando com uma rede não direcionada, $a_{ij} = a_{ji}$ (ver seção 3.2), isso implica que essa matriz contém informações redundantes. A Figura 3.1 é a representação de uma rede. Ao lado está escrita a matriz de adjacências correspon-

3. Fundamentos de redes complexas

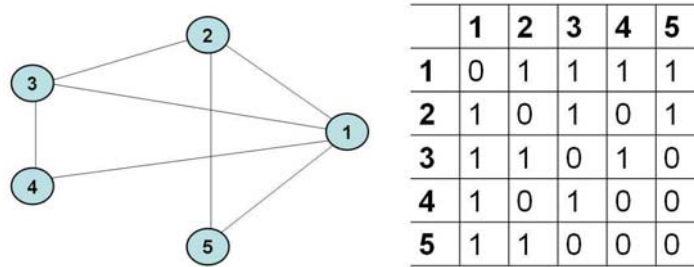


Figura 3.1: Representação da matriz de adjacências.

dente.

Há uma outra abordagem em que podemos trabalhar com uma lista que identifica cada ligação de um certo nó da rede. Desta forma, poderemos construir uma matriz de ligações, na qual cada linha diz respeito a um nó da rede, enquanto que nas colunas, fazemos uma listagem das conexões que este nó realiza. Na Figura 3.2, o desenho ilustra uma rede construída conforme sua matriz de ligações ao lado.

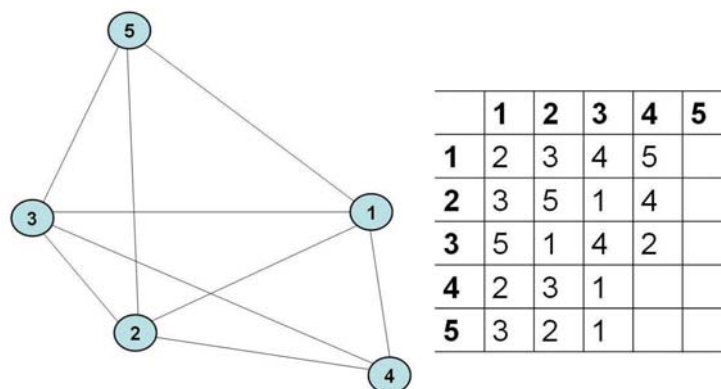


Figura 3.2: Representação da matriz de ligações.

Buscando uma otimização computacional para nosso trabalho, onde teremos redes com um grande número de nós, podemos minimizar o gasto com memória adotando esta matriz de ligações.

3.2 Classificação

Há diferentes maneiras de se identificar uma rede complexa a uma rede real. As ligações entre os nós podem ser simétricas como, por exemplo, em um círculo

3. Fundamentos de redes complexas

de amigos, no qual as pessoas mantêm laços de amizades recíprocos. Ou podem ser também assimétricas, como é o caso de pessoas famosas, um ator por exemplo, em que várias pessoas o conhecem mas ele não conhece todos os seus fãs. Ao primeiro caso damos o nome de rede *não direcionada*, e ao segundo caso de *direcionada*.

Também podemos pensar, por exemplo, em uma rede de citações científicas [37] onde devemos levar em conta o fato de um autor fazer referência a um de seus trabalhos anteriores, criando assim, em uma abordagem de rede uma *auto conexão*.

Como em uma rede de telefonia, há também a possibilidade de verificarmos a força de uma relação de amizade a partir da frequência com que duas pessoas se falam. Para isso, podemos atribuir *pesos* para as conexões entre dois indivíduos quaisquer.

As características atribuídas aos nós também podem influenciar a abordagem de rede. Pode-se construir uma rede em que não se faz necessário diferenciar seus nós, o que não aconteceria em uma rede de relações sexuais em que devemos diferenciar o “nó masculino” do “nó feminino” [15]. Estas particularidades têm uma enorme implicação na forma como processos dinâmicos se desenrolam em uma rede complexa.

Na Figura 3.3, ilustramos as diferentes modalidades de redes complexas que comentamos brevemente acima. Em nosso estudo, utilizamos apenas redes complexas do tipo não direcionadas devido à simetria entre as ligações dos nós, que também não são diferenciados.

Nas próximas seções, discutiremos três importantes topologias de redes complexas e suas principais características estatísticas. De fato, discutiremos apenas aquelas de relevância direta para nosso estudo, indicando ao leitor interessado algumas referências ao longo do texto.

3.3 Rede aleatória, Watts-Strogatz e sem escala

Dentre as topologias de redes complexas que vêm sendo estudadas nos últimos anos, duas delas recebem grande atenção: a rede proposta por D. Watts e S. Strogatz (WS) [9] e a sem escala [10]. Anteriormente a essas duas topologias, Erdős e Rényi [23] introduziram um modelo de rede com ligações aleatórias entre seus nós (modelo ER)

3. Fundamentos de redes complexas

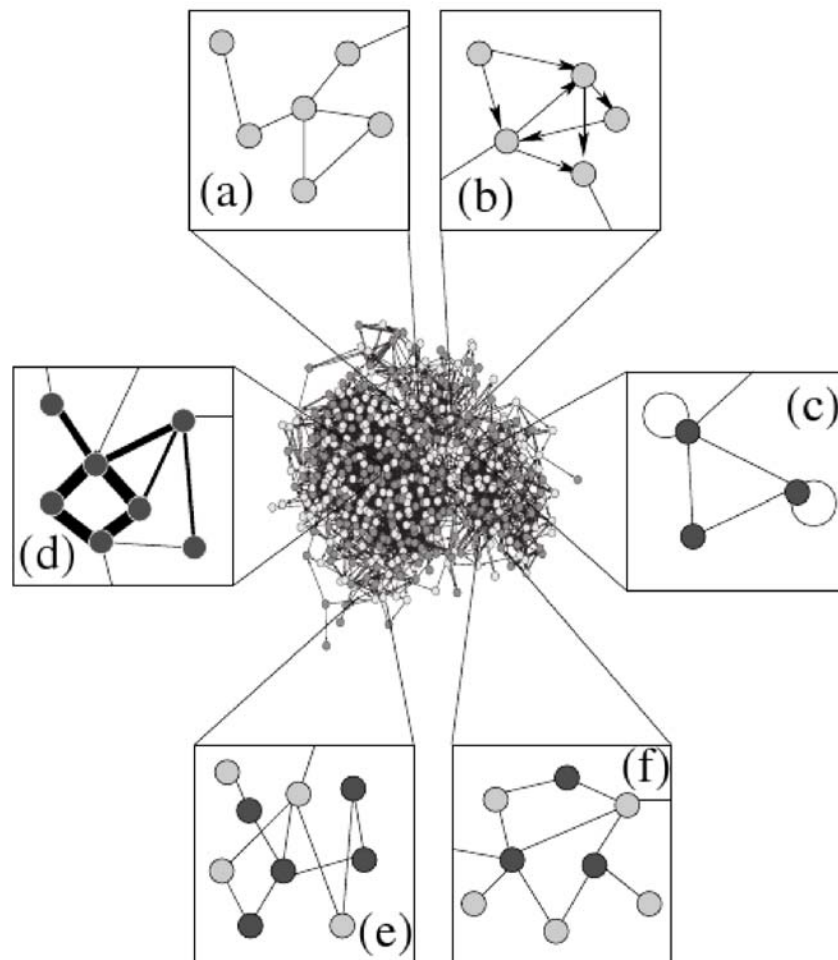


Figura 3.3: Classificação de redes complexas. Ilustração para diferentes tipos de redes complexa, sendo (a) *não direcionada*, (b) *direcionada*, (c) com *auto conexão*, (d) com *pesos*, (e) sem diferenciação entre nós e (f) com diferenciação dos nós. Retirada da referência [38].

com o objetivo de entender melhor algumas redes reais. A rede WS [9], de certa forma supriu uma deficiência da rede aleatória de reproduzir uma característica corriqueira da vida social. Essa característica reflete o fato de que em nossos círculos sociais nossos amigos também podem ser amigos entre si, e por sua vez, conhecer outras pessoas de outros grupos, que eventualmente, de uma forma ou de outra, também se relacionam conosco. Isso nos dá uma idéia de que por maiores que sejam as *distâncias* entre dois indivíduos quaisquer, há sempre uma relação de *grupo* que acaba sendo mais forte. Este efeito nos dá a sensação de um “encurtamento geográfico”. Deverá ser fácil, por exemplo, traçar um elo de colegas que ligue o autor ao leitor...

3. Fundamentos de redes complexas

Em outras situações, como a rede de *hyperlinks* na *www*, passando também por redes aéreas até redes protéicas, encontramos apenas alguns nós muito conectados, frente a um grande grupo com poucas conexões e também um crescimento do número de nós da rede. Nestes casos, a topologia sem escala mostra-se uma ferramenta eficiente para o estudo das propriedades desses sistemas. Ainda dentro dessa última variedade de rede complexa, há um grande interesse atualmente em redes sem escala na qual seus nós possuem uma preferência a se conectarem com outros de igual número de ligação. Dessa forma, fica evidente a necessidade de se estudar as correlações vigentes entre os nós de uma rede complexa. Destacaremos algumas propriedades das topologias citadas, que serão alvo das seções seguintes. Para o leitor interessado, são indicadas as referências [11–13,38] para uma revisão mais abrangente.

3.3.1 Rede aleatória

Redes aleatórias foram introduzidas por Erdős e Rényi (modelo ER) na década de 1950, a partir de estudos sobre métodos probabilísticos na teoria de grafos [23,36]. Esta rede é tal que seus nós possuem conexões feitas de forma aleatória entre si.

Para construirmos a rede ER, devemos primeiramente estabelecer o seu número de nós. Em seguida, devemos aleatoriamente escolher dois dos pares de nós dentre os $N(N - 1)/2$ possíveis e com probabilidade p , conectá-los, não repetindo ligações.

O modelo ER possui um número *estático* de nós. Assim, sua dinâmica é exclusivamente atribuída às conexões que são realizadas sobre pares de nós. Segue também, que cada nó terá um número k de conexões com outros da rede. A esse número denominamos *grau de conexão*, ou seja, k_i é o número de conexões realizadas pelo nó i da rede. Relações entre nós e seus graus de conexões guardam importantes características sobre uma rede, como comentamos na seção anterior.

Na Figura 3.4, apresentamos o resultado das simulações computacionais de uma rede aleatória buscando a relação entre o número de nós e a média do número de conexões na rede aleatória. Esta relação mostra o comportamento de uma distribuição binomial que desvia pouco da distribuição de Poisson para p pequeno. Já na Figura 3.5, mostramos uma ilustração para uma possível organização espacial dos nós para o

3. Fundamentos de redes complexas

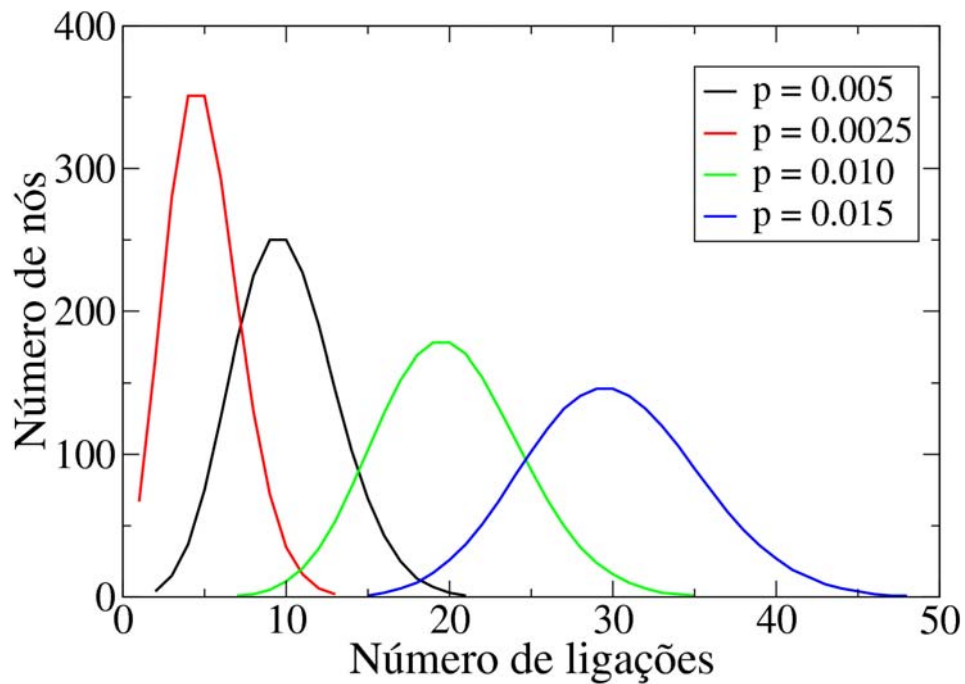


Figura 3.4: Relação do número de nós e a média do número de conexões realizadas em uma rede aleatória com 2000 nós. São apresentadas curvas para diferentes probabilidades p .

modelo ER. Nesta situação, temos uma rede constituída de 50 nós e probabilidade de conexão igual a 0.3.

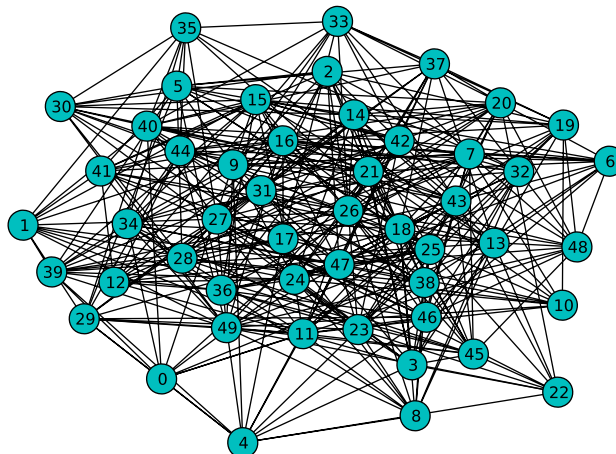


Figura 3.5: Ilustração da rede Erdős-Rényi constituída por 50 nós e com probabilidade de conexão $p = 0.3$.

3. Fundamentos de redes complexas

3.3.2 Rede Watts-Strogatz

A rede Watts-Strogatz (modelo WS) foi proposta na década de 1990 com o intuito de reproduzir uma característica corriqueira encontrada nas redes sociais de que nossos amigos também são amigos entre si. Para construirmos essa rede podemos imaginar inicialmente um grupo de N indivíduos (nós) conectados em uma configuração de anel, cada com seus n primeiros vizinhos. Note que n representa o número de



Figura 3.6: Ilustração para a configuração em anel de uma rede social para o algoritmo da rede Watts-Strogatz.

primeiros vizinhos, $n/2$ de cada lado de um indivíduo qualquer (como mostrado na Figura 3.6, em que $n = 2$). Com essa configuração, escolhemos aleatoriamente um nó e sua ligação com seu vizinho mais próximo no sentido horário. Com probabilidade p , redirecionamos esta ligação para qualquer outro nó do anel (rede), sem que esta seja uma duplicata. O mesmo procedimento é feito para o próximo nó, completando assim toda a volta na rede. Após a primeira volta completa, repete-se o procedimento para os segundos vizinhos e assim por diante, no caso de $n > 4$. Note que com a variação da probabilidade de redirecionamento, teremos nós com diferentes valores para k . A Figura 3.7 ilustra esta dinâmica à partir do redirecionamento de ligações na rede WS. Variando os valores de probabilidade de redirecionamento, alcançamos três diferentes topologias: regular, mundo pequeno e aleatória.

Partindo da idéia apresentada na seção 3.3.1 de que o número k nos dá o número de ligações de um nó qualquer da rede, podemos definir uma função *grau de distribuição*

3. Fundamentos de redes complexas

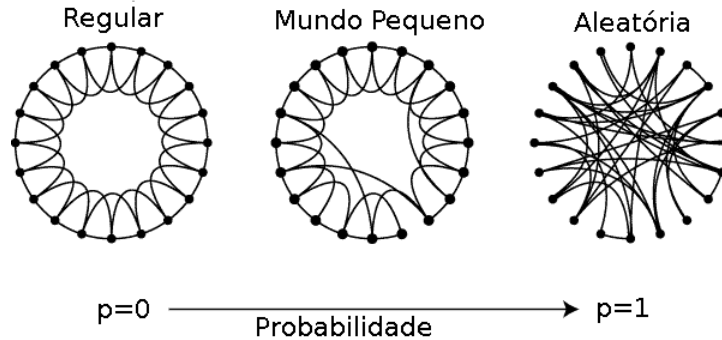


Figura 3.7: Variando a probabilidade de 0 para 1, a rede Watts-Strogatz apresentará três regiões com diferentes topologias: regular (anel à esquerda com cada indivíduo possuindo 4 vizinhos de contato), mundo pequeno e aleatória (anel à direita).

de conectividades, dada por $P(k)$. Essa é igual à fração de nós que possuem grau de conexão k . Iremos assumi-la normalizada. Não podemos nos esquecer, que ao atribuímos uma probabilidade de conexão igual a zero no modelo WS, todos os nós terão um mesmo número de conexões k . Isso implica que o grau de distribuição é uma função delta centrada em k e que a rede é regular.

Mas quando aumentamos a probabilidade de conexão, surgem eventualmente, conexões entre nós com diferentes valores para k . Podemos obter uma informação a esse respeito através da *probabilidade condicional* de um nó de grau k estar conectado com um nó de grau k' . Segue então a normalização

$$\sum_k P(k) = \sum_{k'} P(k'|k) = 1. \quad (3.1)$$

Na Figura 3.8, mostramos o resultado das simulações computacionais do modelo WS buscando identificar o grau de distribuição para diferentes valores de probabilidade para o redirecionamento de ligações. São mostradas curvas para probabilidades dentro da faixa de $p = 0.01$ até $p = 1.0$. As curvas correspondentes às probabilidades $p = 0.45$ e $p = 1.0$ estão dentro da região aleatória, onde vamos ao encontro do comportamento apresentado na seção 3.3.1 para redes aleatórias. Ainda na Figura 3.6, para as curvas com probabilidades $p = 0.01, 0.045$ e 0.1 , surge um efeito caracterizado por um pico em $k = 4$.

Para entendermos melhor as características destas três regiões, iremos introduzir

3. Fundamentos de redes complexas

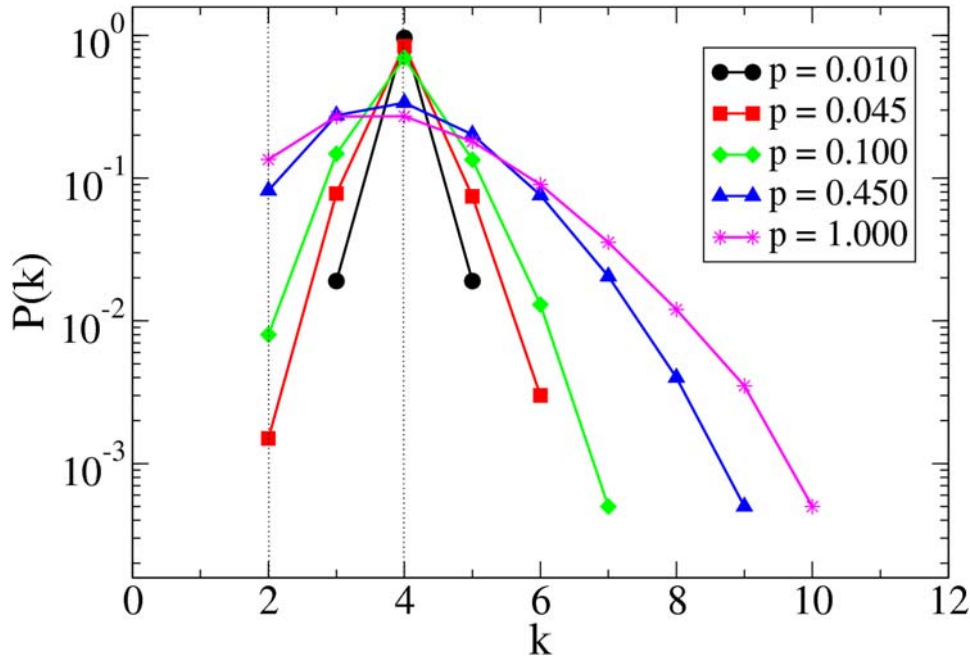


Figura 3.8: Grau de distribuição da rede Watts-Strogatz para diferentes valores da probabilidade p de redirecionamento. Nesta simulação foi usada uma rede com 2.000 nós e $n = 4$.

dois novos conceitos. O primeiro deles reflete o que discutimos na seção 3.3 sobre o caráter de grupo em uma rede social. Essa característica da rede será dada pelo *coeficiente de agregação* denotado por C . Para entendermos este coeficiente é sugestivo que o leitor, se imaginando um nó da rede, se faça a seguinte pergunta: Quantos são os meus vizinhos que são também vizinhos entre si? Ou em outras palavras, em nossas relações de amizade, poderíamos nos perguntar: Quais dos meus amigos são também amigos entre si? Supondo que você tenha k_i vizinhos, então existem $k_i(k_i - 1)/2$ conexões possíveis entre seus vizinhos. Supondo c_i conexões efetivamente realizadas por eles, então o coeficiente C_i será dado por (o subíndice i refere-se ao nó i da rede),

$$C_i = \frac{2c_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (3.2)$$

A Figura 3.9 mostra o resultado das simulações computacionais realizadas para verificar o comportamento do coeficiente de agregação na rede WS sendo normalizado ao valor obtido para o caso regular, $p = 0$. A região em destaque é a região onde sabemos ocorrer o comportamento com o pico em $k = 4$ (ver Figura 3.8). Podemos ver

3. Fundamentos de redes complexas

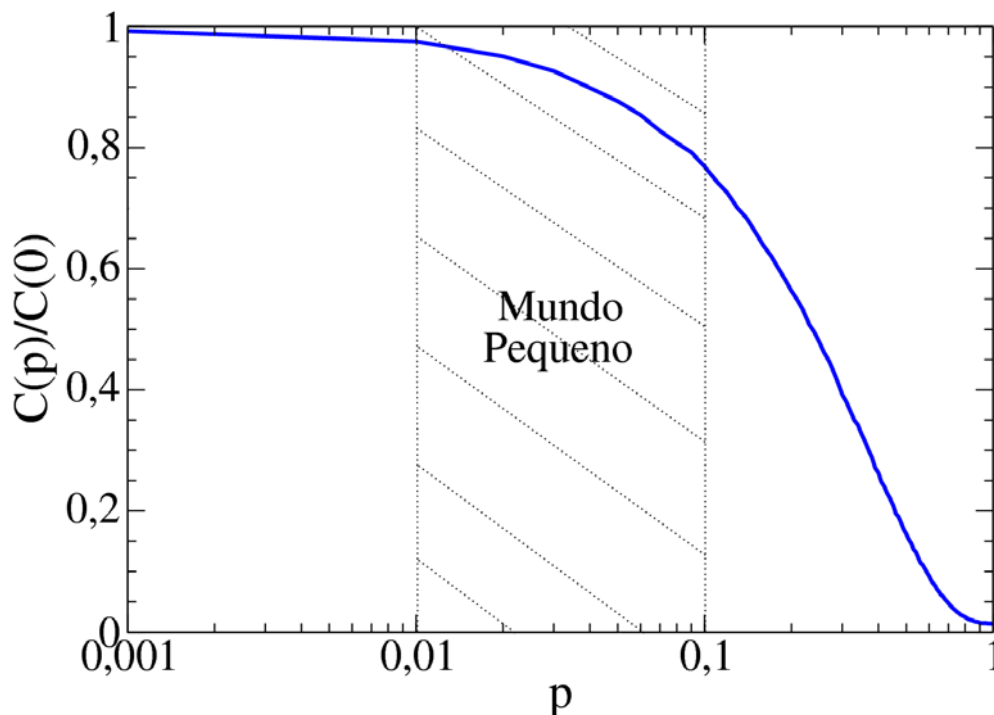


Figura 3.9: Comportamento do coeficiente de agregação em uma rede Watts-Strogatz.

que esta região é marcada pelo início da queda no comportamento constante de grande agregação da rede, terminando em valores ainda assim altos, principalmente quando comparados à queda observada na região à direita. Mais adiante somaremos esta verificação com mais uma importante informação. Note que o coeficiente de agregação para o caso regular ($p = 0$) é independente do tamanho da rede, somente de sua topologia.

O segundo conceito do qual precisamos para identificar propriedades características de cada uma das três topologias citadas na Figura 3.7 é o *comprimento médio do menor caminho*, L , entre dois nós quaisquer na rede. A idéia para alcançarmos esse coeficiente é bem simples, embora computacionalmente, um algoritmo eficiente não seja de trivial implementação¹. O leitor pode se perguntar: O quanto distante estou de um nó qualquer escolhido aleatoriamente na rede? Quais são os caminhos, através de outros indivíduos, que me levam a ele? Devemos, portanto, contar o número médio de conexões entre dois nós sorteados na rede. Lembrando que deveremos calcular o menor

¹Uma eficiente implementação para o cálculo de L é o algoritmo de Dijkstra (ver referências [38,39]).

3. Fundamentos de redes complexas

caminho dentre *todos* os existentes entre os dois nós. A Figura 3.10, retirada da referência [13], nos mostra o comportamento do comprimento médio do menor caminho, L , bem como do coeficiente de agregação, C , ambos normalizados para o caso regular. É importante notarmos que L depende do tamanho da rede. O coeficiente L não começa a declinar enquanto $p \geq 2/Nk$ (em que N é o tamanho da rede) [40] garantindo assim a existência de ao menos um atalho, dado por um redirecionamento de longo alcance na rede. Para redes grandes não faz sentido falarmos de uma região regular. Neste caso, $N \rightarrow \infty$ fazendo com que o comportamento de mundo pequeno apareça para p pequeno.

Nas investigações sobre a dinâmica do PC na rede WS (Capítulo 4) não apresentaremos resultados para a “topologia regular”, apenas para as topologias de mundo pequeno e aleatória.

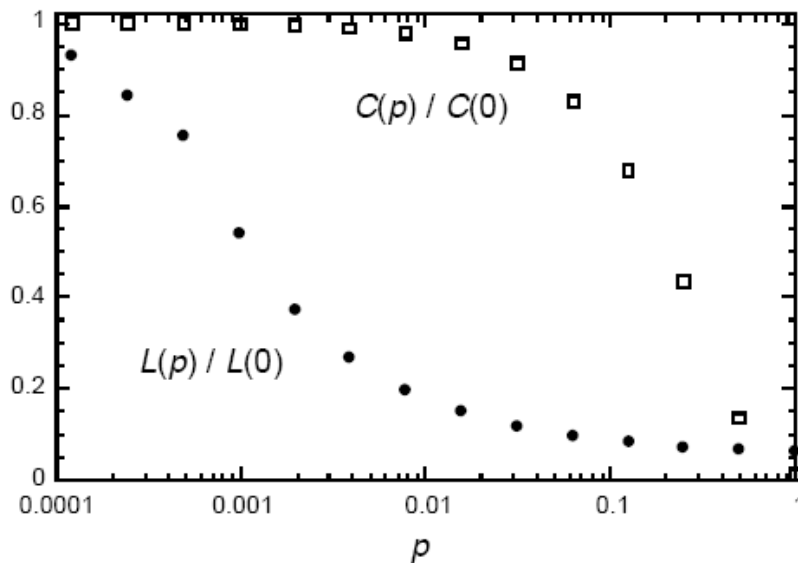


Figura 3.10: Comportamento do comprimento médio do menor caminho, L , e do coeficiente de agregação, C , ambos normalizados para o caso regular. A rápida queda no logaritmo de $L(p)$ corresponde ao quadro de mundo pequeno da rede. Durante essa queda, $C(p)$ permanece quase constante, mostrando a difícil detecção da transição para o efeito de mundo pequeno em um nível local (retirada da referência [13]).

A primeira topologia, regular, possui um *alto* coeficiente de agregação entre nós e, também um valor *alto* para o comprimento médio do menor caminho entre pares.

3. Fundamentos de redes complexas

Para valores altos de probabilidade associados ao redirecionamento, já na topologia aleatória, a rede WS produz um valor *baixo* tanto para o coeficiente de agregação quanto para o comprimento médio do menor caminho.

Entre estas duas topologias encontramos um comportamento típico das redes sociais. Enquanto encontramos um valor *baixo* para o comprimento médio do menor caminho, nos deparamos com um coeficiente de agregação significativamente *alto*. Nesta faixa, um número pequeno de conexões de longo alcance entre nós garantem um encurtamento das distâncias na rede, enquanto as várias conexões de curto alcance garantem sua alta agregação. Isso é mostrado no anel central da Figura 3.7. Este efeito de mundo pequeno reflete a teoria dos “Seis graus de separação” [41], em que existem em média apenas seis laços de amizade (dentre outros tipos de laços) separando dois indivíduos quaisquer no mundo.

3.3.3 Rede sem escala

Diferentemente dos dois modelos apresentados nas seções 3.3.1 e 3.3.2, onde as redes possuíam um número fixo de nós, existem sistemas que evoluem no tempo apresentando um crescimento. É o que acontece, por exemplo, na internet onde a cada dia surge um novo número de *sites*. No surgimento desses *sites*, eles se conectam a outros já existentes, a fim de se tornarem mais visados e conseguirem um maior número de acessos. Para isso, os sítios da internet mais acessados são aqueles que conseguem mais conexões novas e possuem um número de ligações (*links*) muito grande - são os chamados *hubs*.

Esses dois novos ingredientes (o crescimento da rede com o passar do tempo e a conexão preferencial) foram modelados por Barabási e Albert (BA) [10] para a construção de redes que guardam uma característica tal como a exemplificada no caso da www. Esses ingredientes fazem com que esse modelo de rede complexa apresente características bem diferentes dos modelos ER e WS. Enquanto os modelos ER e WS apresentam, digamos, um caráter democrático, onde a maioria dos nós apresentam aproximadamente o mesmo número de ligações, no modelo BA, essa relação do grau

3. Fundamentos de redes complexas

de distribuição é dada por uma lei de potência do tipo

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (3.3)$$

É como se pensássemos em uma fila de adultos e medíssemos suas alturas. A resposta a esse experimento estará dentro de uma escala para alturas de humanos adultos, apresentando um comportamento típico de Poisson. Mas, ao invés disso, aparecesse um número significativo de pessoas, digamos, gigantes! Isso colocaria nosso experimento fora da nossa escala de alturas. Essa classe de redes complexas recebeu o nome de redes *sem escala*.

Para construirmos o modelo BA, iniciamos com um número m_0 de nós, conectados entre si. A cada passo um novo nó é acrescentado à rede e fará um número m de ligações menor ou igual ao número inicial de nós. Estas conexões serão feitas com base em uma probabilidade, Π , que dependerá do número de conexões realizadas pelos nós que já se encontravam na rede. Isso irá gerar uma *conexão preferencial*, privilegiando os nós mais conectados a receberem novas ligações. Essa probabilidade poderá ser escrita como

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (3.4)$$

em que a soma presente no denominador é feita sobre todos os nós da rede. Após t passos de tempo, iniciando a rede com m_0 nós e realizando m ligações para cada novo nó que entra na rede, teremos então um total de $N = t + m_0$ nós e mt ligações entre eles. Na Figura 3.11, mostramos o resultado alcançado à partir de simulações computacionais para o grau de distribuição do modelo BA partindo de $m_0 = 3$ nós e cada novo nó realizando $m = 3$ novas conexões de acordo com a equação (3.4).

Pelo comportamento do gráfico da Figura 3.11 com uma cauda pesada do grau de distribuição, vemos que poucos nós fazem muitas ligações, enquanto a maioria dos nós tem poucas. Isso faz com que a rede tenha um caráter heterogêneo para as conectividades, com grandes flutuações. Matematicamente, podemos estudá-las através do segundo momento da distribuição de conectividade [42].

$$\langle k^2 \rangle = \int_{m_0}^{\infty} k^2 P(k) dk \quad (3.5)$$

3. Fundamentos de redes complexas

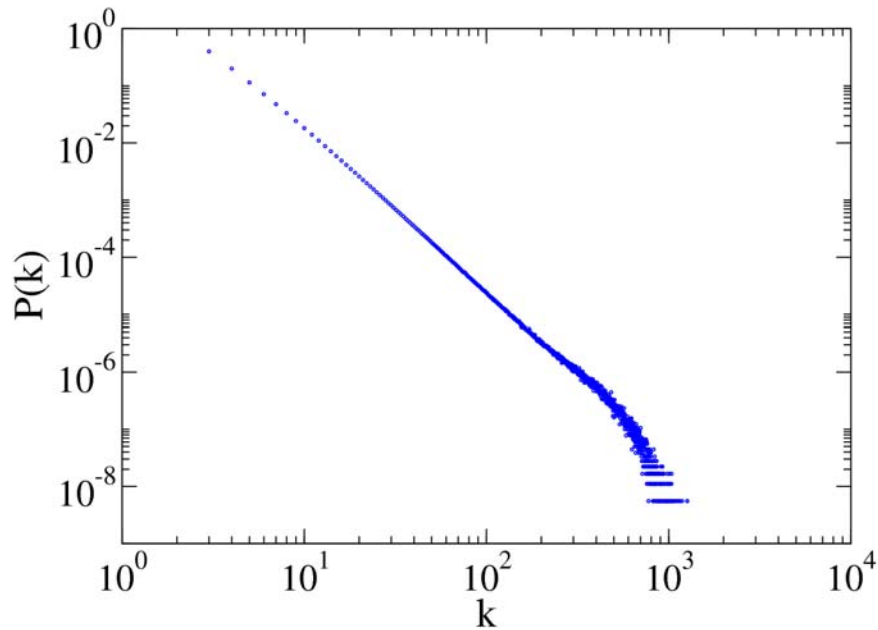


Figura 3.11: Grau de distribuição para o modelo Barabási-Albert. Partindo de $m_0 = 3$ nós interconectados e cada novo nó realizando $m = 3$ novas ligações até um total de 300.000 nós. A figura mostra o comportamento do grau de distribuição da rede livre de escala seguindo uma lei de potencia. A inclinação da linha pontilhada, que melhor se ajusta aos dados é de -2.9.

em que $m_0 \geq 1$ é o menor grau possível na rede e tratamos k como uma variável contínua por simplicidade. Usando a relação (3.3), resulta que

$$\langle k^2 \rangle \sim \int_{m_0}^{\infty} k^{2-\gamma} dk. \quad (3.6)$$

Um fato importante que será usado no próximo capítulo é que para valores de $\gamma > 3$ a equação (3.6) fornece uma dispersão finita e um valor bem definido para $\langle k \rangle$ dado por

$$\langle k \rangle = \int_{m_0}^{\infty} k P(k) dk. \quad (3.7)$$

Este comportamento é o mesmo observado na rede WS. Para $2 < \gamma < 3$ a dispersão é infinita, embora o valor médio seja definido.

3.4 Modelos epidêmicos e redes complexas

O modelo de PC discutido no capítulo 1 é um modelo muito explorado pela Física Estatística e considerado um sistema para o desenvolvimento de novos métodos

3. Fundamentos de redes complexas

para problemas longe do equilíbrio [8]. Talvez por este motivo, o PC tenha recebido o apelido de “modelo de Ising” dos processos longe do equilíbrio.

Já para a epidemiologia, os modelos matemáticos mais usados são outros. Os principais modelos básicos são os modelos *susceptível-infectado* (SI), *susceptível-infectado-susceptível* (SIS) e *susceptível-infectado-removido* (SIR) [43, 44]. Estas generalizações do PC ganharam grande atenção na literatura de redes complexas [?, 32–34, 42]. Iremos tratar brevemente dos resultados encontrados para a transição de fase com estado absorvente para o modelo SIS nos modelos de redes complexas WS e BA, devido a sua relação com o PC em redes regulares.

3.4.1 Modelo SIS

No modelo SIS cada indivíduo, tratado como um nó da rede, estará em um de dois diferentes estados: saudável (e susceptível à doença) e infectados. Cada um deles percorre estocasticamente o ciclo *susceptível-infectado-susceptível*, daí o nome do modelo.

A cada passo de tempo, cada nó susceptível, que tenha ao menos um vizinho infectado, contrai a doença com uma taxa λ . Ao passo que nós infectados são curados a uma taxa unitária e estão novamente sujeitos a uma reinfecção. Observe que o modelo não faz menção alguma sobre a possibilidade de indivíduos serem removidos devido sua morte ou imunização à doença. Estas últimas características são contempladas no modelo SIR [42–44].

Em uma correlação entre os conceitos da física estatística e os da epidemiologia, podemos ligar o conceito de transição de fase descrito nos capítulos 1 e 2 com o de limiar epidêmico, o qual determina a taxa crítica a partir da qual a epidemia persiste por tempos longos. O limiar epidêmico (ponto crítico) separa uma fase ativa com uma densidade estacionária de nós infectados de uma fase absorvente com apenas nós saudáveis.

3. Fundamentos de redes complexas

Modelo SIS na rede Watts-Strogatz

Como vimos na seção 3.3.2, a rede WS apresenta uma distribuição de conectividade $P(k)$ com um pico no valor de conexão médio entre nós $\langle k \rangle$ que decai exponencialmente para valores $k \gg \langle k \rangle$ e $k \ll \langle k \rangle$. Neste cenário a hipótese de homogeneidade da rede pode ser adotada. A equação para a densidade de nós infectados no modelo SIS na rede WS será dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -\rho(t) + \lambda \langle k \rangle \rho(t) [1 - \rho(t)]. \quad (3.8)$$

O primeiro termo do lado direito desta equação refere-se aos indivíduos infectados que são curados a uma taxa unitária. Já o segundo termo representa a densidade média de novos indivíduos infectados que é proporcional à taxa de infecção λ , o número médio de conexões de um nó² e a probabilidade desta ligação está sendo feita com um indivíduo susceptível. Impondo a condição estacionária $\partial_t \rho(t) = 0$, obtemos o limiar epidêmico $\lambda_c = \langle k \rangle$ e resulta que

$$\begin{cases} \rho = 0, & \text{se } \lambda < \lambda_c \\ \rho \sim \Delta \equiv \lambda - \lambda_c, & \text{se } \lambda > \lambda_c \end{cases}$$

Novamente, podemos recorrer aos conceitos da Física Estatística e identificar ρ como o parâmetro de ordem e λ como o de controle. Assim, podemos também recorrer às mesmas análises de CM realizadas no capítulo 2, sendo que para o modelo SIS, a transição de fase absorvente-ativa acontece em $\lambda_c = 1/K$, em que K é o número inicial de vizinhos conectados a um nó qualquer da rede WS.

No trabalho apresentado por Pastor-Satorras e Vespignani [34] foram mostrados os resultados de simulações computacionais por eles obtidos, em que tanto os expoentes críticos como a taxa de transição absorvente-ativa estão de acordo com as previsões de CM feitas. O valor predito por CM para a taxa crítica é $\lambda_c = 1/K = 0.1666$, onde foi usado $K = 3$. O valor obtido através de simulações computacionais foi $\lambda_c = 0.1643 \pm 0.01$ [34].

²Para redes homogêneas cada nó possui em média o mesmo número de ligações $k \simeq \langle k \rangle$.

3. Fundamentos de redes complexas

Modelo SIS na rede Barabási-Albert

Como vimos na seção 3.3.3, a ausência de uma escala característica induz uma forte flutuação na distribuição de conectividade da rede que não pode mais ser negligenciada. A equação para a densidade de nós infectados no modelo SIS é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_k(t) = -\rho(t) + \lambda k[1 - \rho_k(t)]\Theta(\rho(t)), \quad (3.9)$$

em que $\rho_k(t)$ é a densidade relativa de nós infectados com k ligações. Novamente, o primeiro termo do lado direito desta equação está associado aos indivíduos infectados que são curados a uma taxa unitária. Já o segundo termo, representando a densidade média de novos indivíduos infectados na rede, considera a probabilidade de que um nó com k ligações esteja susceptível $[1 - \rho_k(t)]$. A probabilidade deste evento é proporcional à taxa de infecção λ , o número de conexões k e a probabilidade $\Theta(\rho(t))$ de que uma ligação qualquer aponte para um nó infectado. No estado estacionário, ρ é apenas uma função de λ . Logo, a probabilidade Θ também passa a depender implicitamente da taxa de infecção. Impondo $\partial_t \rho(t) = 0$, obtemos que:

$$\rho_k = \frac{k\lambda\Theta(\lambda)}{1 + k\lambda\Theta(\lambda)}. \quad (3.10)$$

A heterogeneidade da rede deve ser levada em conta no cálculo de Θ . De fato, a probabilidade de que uma ligação qualquer aponte para um nó com s ligações é proporcional a $sP(s)$, i.e., uma ligação tomada em um processo aleatório estará com maior probabilidade conectada a um nó infectado com um grande número de conexões. Disto resulta a relação,

$$\Theta(\lambda) = \sum_k \frac{kP(k)\rho_k}{\sum_s sP(s)}. \quad (3.11)$$

Finalmente, podemos calcular o parâmetro de ordem ρ usando a relação,

$$\rho = \sum_k P(k)\rho_k. \quad (3.12)$$

Para realizar o cálculo para o modelo BA, vamos considerar k como uma variável contínua e substituir os somatórios por integrais [10]. A distribuição de conectividade completa é dada por $P(k) = 2m^2/k^{-3}$ [13], em que m é o número mínimo de conexões

3. Fundamentos de redes complexas

de cada nó. Sendo a conectividade média dada por

$$\langle k \rangle = \int_m^\infty kP(k)dk = 2m, \quad (3.13)$$

a equação (3.11) pode ser reescrita como

$$\Theta(\lambda) = m\lambda\Theta(\lambda) \int_m^\infty \frac{1}{k^3} \frac{k^2}{1 + k\lambda\Theta(\lambda)} dk, \quad (3.14)$$

que tem como solução,

$$\Theta(\lambda) = \frac{e^{-1/m\lambda}}{m\lambda} (1 - e^{-1/m\lambda})^{-1}. \quad (3.15)$$

Resolvendo a equação (3.12), levando em conta a expressão para Θ acima, encontramos

$$\rho \sim e^{-1/m\lambda}. \quad (3.16)$$

Surpreendentemente, não há ponto crítico finito neste modelo. Isto é, $\lambda_c = 0$. Na referência [34] são mostrados resultados obtidos através de simulações computacionais que confirmam esta previsão de CM.

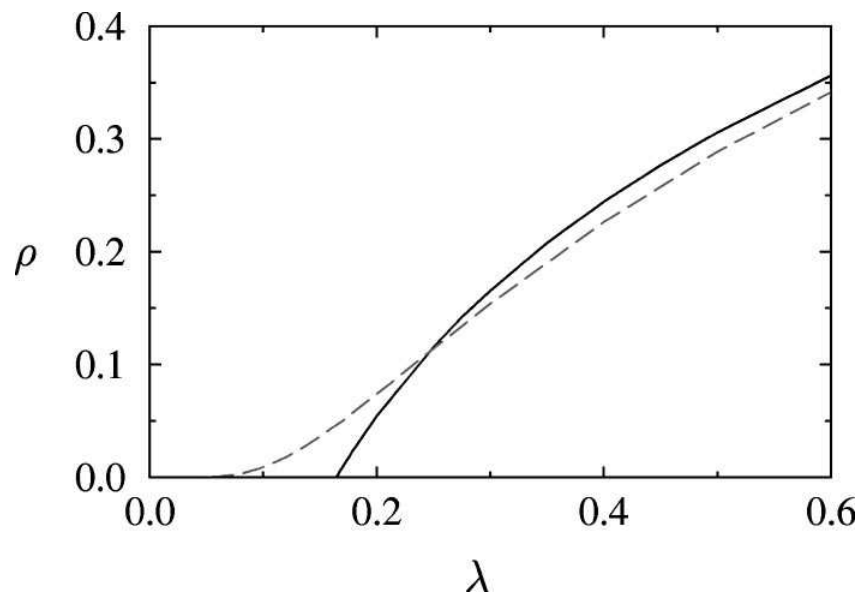


Figura 3.12: Densidade de nós infectados como uma função de λ na rede WS (linha cheia) e na rede BA (linha pontilhada). Retirada da referência [34].

Para não deixarmos o foco do nosso texto, que é o PC em redes complexas, são deixadas as referências [34,42] onde o leitor interessado poderá obter informações sobre

3. Fundamentos de redes complexas

outros comportamentos e propriedades sobre a transição de fase desse modelo nas redes WS e BA. O fato de relevância para nosso trabalho é que apesar da grande semelhança entre os dois modelos SIS e PC, os resultados pela teoria de CM para as taxas críticas do PC nas redes WS e BA não são confirmados por simulações computacionais, como poderemos ver nos próximos capítulos.

Capítulo 4

O processo de contato na rede Watts-Strogatz

Neste Capítulo, apresentamos uma análise da transição de fase com estado absorvente do PC na rede WS. Recorrendo à teoria de ETF, pudemos estudar o estado quase estacionário do PC determinando um conjunto de expoentes críticos e valores para as taxas de transição de fase nas topologias de mundo pequeno e aleatória da rede do modelo WS. Usando a abordagem para a aproximação de CM [7, 45] discutida na literatura [7, 18–21], verificamos que embora ela falhe na determinação dessas taxas críticas, o conjunto de expoentes críticos previstos por essas abordagens de CM concordam com nossos resultados numéricos.

4.1 Equação para a densidade de sítios infectados

Precisamos de uma equação que nos revele a densidade de sítios ocupados em função do tempo. Com ela, poderemos retirar informações sobre o comportamento do PC em uma rede complexa.

A equação que procuramos constitui-se de dois ingredientes básicos: (i) um termo de criação de partículas e (ii) um outro de aniquilação. O termo de aniquilação deve ser proporcional à densidade de nós ocupados, enquanto seu termo de criação deverá levar em conta o número de nós vazios.

Vamos então definir uma densidade média $\rho_k(t)$ de partículas encontradas nos

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

nós com k ligações. Com isso,

$$\rho(t) = \sum_k \rho_k(t) P(k), \quad (4.1)$$

em que $\rho(t)$ é a densidade total. O termo de criação deverá ser proporcional à probabilidade $[1 - \rho_k(t)]$ de que um nó com k conexões esteja vazio. Além disso, precisamos levar também em conta a probabilidade de que este nó vazio, com k conexões, esteja conectado com um outro nó com k' conexões ocupado. Podemos expressar esse fato como sendo o termo $P(k'|k) \rho_{k'}(t)$. A equação para a evolução temporal da densidade $\rho_k(t)$ é então dada pela equação de CM [18] para a fração de sítios

$$\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = -\rho_k(t) + \lambda k [1 - \rho_k(t)] \sum_{k'} \frac{P(k'|k) \rho_{k'}(t)}{k'}. \quad (4.2)$$

O fator $1/k'$ mostra que uma nova partícula é criada como a mesma probabilidade em qualquer vizinho vazio de um nó com k' ligações.

O primeiro termo da equação (4.2) é o termo de destruição de partículas com taxa unitária e seu segundo termo representa a criação de partículas com taxa λ . Note que o termo de criação de partículas é proporcional ao tipo de correlação entre nós com diferentes graus de conexões k na rede, já que é proporcional à probabilidade condicional $P(k'|k)$. Vamos então analisar esta característica na rede WS.

4.2 Análise da rede Wattz-Strogatz

As correlações entre os nós descrevem importantes características em diversas redes [9, 15, 16, 46]. Para analisarmos essas correlações o *grau médio de conexão dos vizinhos próximos* de um nó com k conexões (k_{nn}) [14] nos dirá qual é, em média, o grau de conexão dos vizinhos de um nó com k conexões:

$$\langle k_{nn}(k) \rangle \equiv \sum_{k'} k' P(k'|k). \quad (4.3)$$

Voltando ao Capítulo 3, vemos que a análise do grau de distribuição para as topologias de rede apresentadas divide as redes complexas em duas classes. A primeira delas contém modelos que apresentam um aspecto “democrático”, caracterizado pelo

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

comportamento binomial para a rede ER e similarmente para a rede WS. Essa última tem um pico em $\langle k \rangle = K/2$, em que K é o número inicial de vizinhos de cada nó, e decai exponencialmente para k grande (Figura 3.5). Temos então que essa topologia é homogênea, isto é, todos os nós tem aproximadamente o mesmo número de ligações [13]. A segunda classe são as redes sem escala que fogem do modelo democrático, sendo seu grau de distribuição caracterizado por uma lei de potência (equação 3.3). Nesta sociedade dos nós, “o rico fica mais rico” - em uma referência à conexão preferencial apresentada na seção 3.3.3.

Quando as correlações seguem o caráter democrático, as contribuições relevantes ocorrerão para

$$k \in [\langle k \rangle - \sigma, \langle k \rangle + \sigma] \quad (4.4)$$

em que σ é a dispersão em torno do valor médio $\langle k \rangle$. Isso também implica que

$$\rho_k(t) \simeq \rho(t). \quad (4.5)$$

para $k \in [\langle k \rangle - \sigma, \langle k \rangle + \sigma]$. Da mesma forma, quando não ocorrem tais correlações, a probabilidade condicional $P(k'|k)$ toma a forma

$$P(k'|k) = \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle}, \quad (4.6)$$

o que resulta que a equação (4.3) pode ser reescrita como

$$\langle k_{nn}(k) \rangle = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}, \quad (4.7)$$

ou seja, para uma rede descorrelacionada o grau médio dos vizinhos de um nó, não depende de k , assumindo um valor constante. A Figura 4.1 mostra esse comportamento para as topologias de mundo pequeno e aleatória da rede WS. Note que quando a probabilidade encontra valores maiores, já dentro da topologia aleatória, surge um efeito de correlação com uma cauda na extremidade esquerda. Porém, não chega a variar o valor de $\langle k_{nn} \rangle$ em uma unidade, deixando o caráter de descorrelação da rede estritamente majoritário.

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

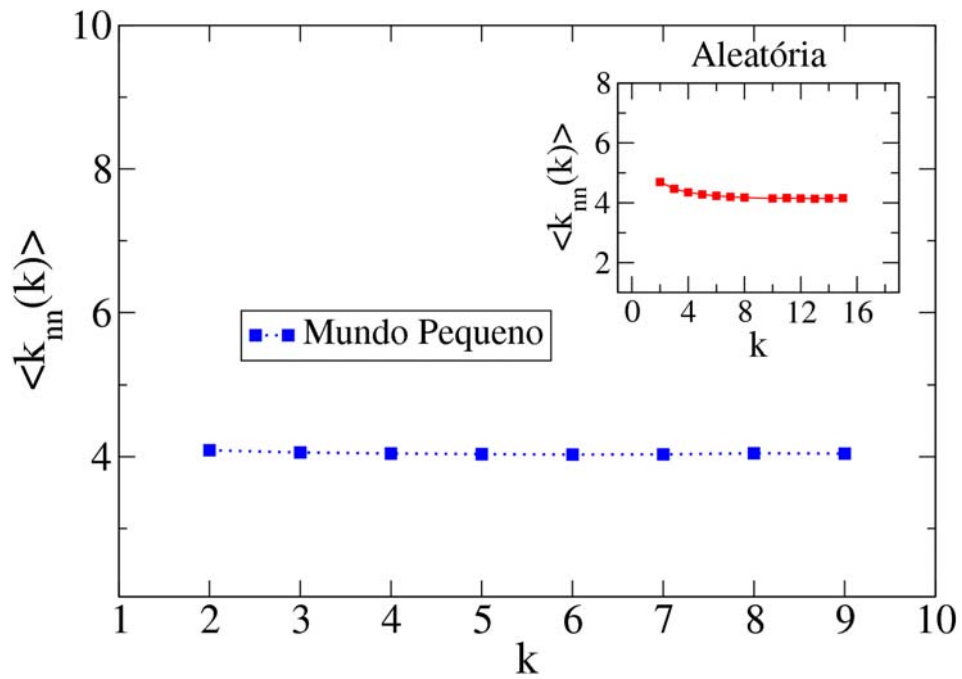


Figura 4.1: Correlação entre nós na rede Watts-Strogatz. O caráter “democrático” da rede revela uma desconexão associada a seus nós ($N = 10^5$).

4.3 Aproximação de campo médio

Usando os resultados obtidos das análises feitas na seção anterior, podemos reescrever a equação (4.2),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} &= -\rho_k(t) + \lambda \frac{k}{\langle k \rangle} [1 - \rho_k(t)] \rho(t) \\
 &= -\rho(t) + \frac{\lambda \rho(t)}{\langle k \rangle} \sum_k (kP(k) - kP(k)\rho_k(t)) \\
 &= -\rho(t) + \frac{\lambda \rho(t)}{\langle k \rangle} [\langle k \rangle - \sum_k k\rho_k(t)P(k)] \\
 &\simeq -\rho(t) + \frac{\lambda \rho(t)}{\langle k \rangle} [\langle k \rangle - \int k\rho_k(t)P(k)dk] \\
 &\simeq -\rho(t) + \frac{\lambda \rho(t)}{\langle k \rangle} [\langle k \rangle - \int_{\langle k \rangle - \sigma}^{\langle k \rangle + \sigma} k\rho(t)P(k)dk] \\
 &\simeq -\rho(t) + \frac{\lambda \rho(t)}{\langle k \rangle} [\langle k \rangle - \rho(t) \int_{\langle k \rangle - \sigma}^{\langle k \rangle + \sigma} kP(k)dk] \\
 &\simeq -\rho(t) + \frac{\lambda \rho(t)}{\langle k \rangle} [\langle k \rangle - \langle k \rangle \rho(t)].
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Desprezando as contribuições de baixa ocorrência para valores de k longe de $\langle k \rangle$, podemos escrever que

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\lambda \rho^2(t) + (\lambda - 1)\rho(t). \tag{4.9}$$

Essa equação é rapidamente identificada à equação (2.11). A transição de fase do PC poderá ser caracterizada pelos expoentes críticos β , ν_{\parallel} e ν_{\perp} . Perto do ponto crítico a densidade de partículas ρ se comporta como

$$\rho_q(\Delta = 0, N) \sim N^{-\beta/\nu_{\perp}} F(\Delta N^{1/\nu_{\perp}}), \tag{4.10}$$

em que $F(x)$ é uma função de escala com comportamentos assintóticos como os descritos para a relação (2.28). O expoente ν_{\perp} depende de características da rede. Para redes com $\langle k \rangle$ bem definido e $\langle k^2 \rangle$ finito, $\nu_{\perp} = 2$ em ambas as abordagens de CM [18, 21].

4.4 Análise numérica - resultados

O modelo computacional utilizado é a junção da implementação para o PC (seção 2.5.1) e a construção apresentada na seção 3.3.2 da rede WS, usando a segunda abordagem com matrizes comentada na seção 3.1.

Estabelecemos um número fixo de nós, todos com um número inicial n de vizinhos. Ao variarmos a probabilidade para que uma das extremidades de uma ligação seja redirecionada para um outro nó escolhido em um processo aleatório, surgem as topologias de mundo pequeno e aleatória da rede WS.

Uma vez gerada a rede WS, conhecemos quais e quantos são os vizinhos de cada nó. Com essa informação, associamos a cada nó um indivíduo de uma população e escolhemos em um processo aleatório um de dois eventos possíveis: a criação ou a aniquilação de partículas, que representará a infecção ou a recuperação de um indivíduo, respectivamente. Este indivíduo será escolhido, também de forma aleatória, dentro de uma lista dos indivíduos infectados, podendo então, ser recuperado com probabilidade $p_a = 1/(1 + \lambda)$, em que o índice a refere-se ao processo de aniquilação de partículas, ou infectar um de seus vizinhos, com igual probabilidade $p_c = 1 - p_a$, em que o índice c refere-se ao processo de criação de partículas. Sua dinâmica para tempos discretos é marcada pela iteração do tempo dada por $t \rightarrow t + 1/N_o$, em que N_o é o número de indivíduos infectados. Dessa forma, alcançamos, em média, um evento por sítio até um número máximo de iterações (tempo máximo) estipulado nas simulações. As amostras do sistema podem alcançar o tempo máximo ou não, dependendo da capacidade de espalhamento da epidemia que é determinada pela taxa de infecção λ . As amostras do sistema que não visitam o estado absorvente (em que não há indivíduos infectados) são ditas sobreviventes.

Usando a hipótese de escala e a teoria de escalonamento de tamanho finito (ETF) (seção 2.5), baseamos as análises dos nossos resultados com o estudo do estado quase estacionário. As topologias estudadas foram obtidas com as probabilidades de redirecionamento $p = 0.045$ para a topologia de mundo pequeno e $p = 0.45$ para a aleatória. No ponto crítico, e considerando apenas as amostras sobreviventes, a relação

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

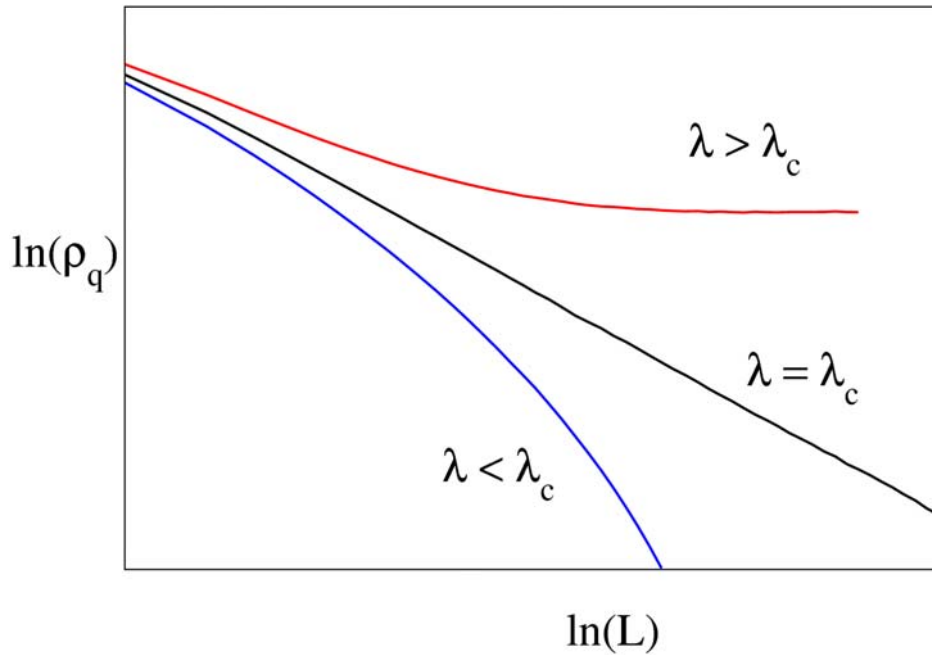


Figura 4.2: Esboço para a estimativa do ponto crítico por meio da utilização teoria de escalonamento de tamanho finito.

entre a densidade de sítios ocupados e o tamanho do sistema é esperada assumir a forma (equação (2.28)),

$$\rho_q(0, N) \propto N^{-\beta/\nu_\perp}. \quad (4.11)$$

Este fato é útil para estimar o valor do ponto crítico a partir do expoente β/ν_\perp .

Em um gráfico log-log, a relação (4.11) será representada por uma reta ($\lambda = \lambda_c$) com inclinação $-\beta/\nu_\perp$. Os desvios para esse comportamento de lei de potência, ou seja, curvas abaixo ou acima desta reta sobre o ponto crítico, caracterizam, respectivamente, a erradicação da epidemia ($\lambda < \lambda_c$) e sua persistência ($\lambda > \lambda_c$). A Figura 4.2 ilustra as situações de erradicação e persistência da epidemia intermediadas pelo comportamento de lei de potência quando $\lambda = \lambda_c$, em que ocorre a transição de fase absorvente-ativa.

Novamente, assumindo a hipótese de invariância sobre escala e ETF (seções 2.4.1 e 2.5), esperamos que a relação entre o tempo de relaxação τ_{ρ_q} e o tamanho do sistema N , na vizinhança do ponto crítico ($\Delta \rightarrow 0$) se comporte da forma

$$\tau_{rho_q} \propto N^{\nu_\parallel/\nu_\perp} g(\Delta N^{1/\nu_\perp}). \quad (4.12)$$

A função g possui comportamentos assintóticos tais que $g(x) \rightarrow x^{-\nu_\parallel}$, quando

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

$x \rightarrow \infty$ e $g(x) \rightarrow (\text{Constante})$, quando $x \rightarrow 0$. Com isso, no ponto crítico ($\Delta = 0$)

$$\tau_{\rho_c}(0, N) \propto N^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}}. \quad (4.13)$$

Nas Figuras 4.3 e 4.4, mostramos os resultados das simulações computacionais para a análise da taxa crítica λ_c , por meio da relação (4.11). Já o comportamento do tempo de relaxação com relação ao tamanho do sistema é o resultado mostrado nas Figuras 4.6 e 4.6, que foram obtidos a partir da relação (4.13) com um dos valores aproximados para λ_c obtidos em nossos resultados para cada uma das duas topologia da rede WS. O resumo desses resultados para os valores estimados das taxas e expoentes críticos para o PC na rede WS são mostrados na Tabela 4.1.

Embora falhe para a previsão dos valores encontrados para as taxas críticas de transição de fase nas topologias de mundo pequeno e aleatória, o conjunto de expoentes obtido por meio de nossas simulações computacionais confirmam tanto a abordagem de CM proposta por Castellano *et al* [18], quanto a abordagem fenomenológica proposta por Hong *et al* [21]. Estes resultados se aplicam as previsões de CM para uma rede com características como as descritas na seção 4.3, em que a função de distribuição das conectividades dos nós da rede possui tanto um valor médio do número de ligações de um nó $\langle k \rangle$, quanto sua dispersão $\langle k^2 \rangle$, bem definidos. Nos dois trabalhos citados anteriormente [18, 21] e também no trabalho apresentado por Dorogovtsev *et al* [7], foram verificadas por meio de simulações computacionais, as previsões feitas para redes sem escala, descorrelacionadas, que apresentam um $\langle k \rangle$ bem definido, mas com $\langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$. Seus resultados indicam que nesse regime, apenas a abordagem fenomenológica apresentada por Hong *et al* [21] é correta. No próximo capítulo, apresentaremos resultados para a transição de fase do PC usando uma rede sem escala com as mesmas características, porém, do tipo correlacionada (modelo BA).

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

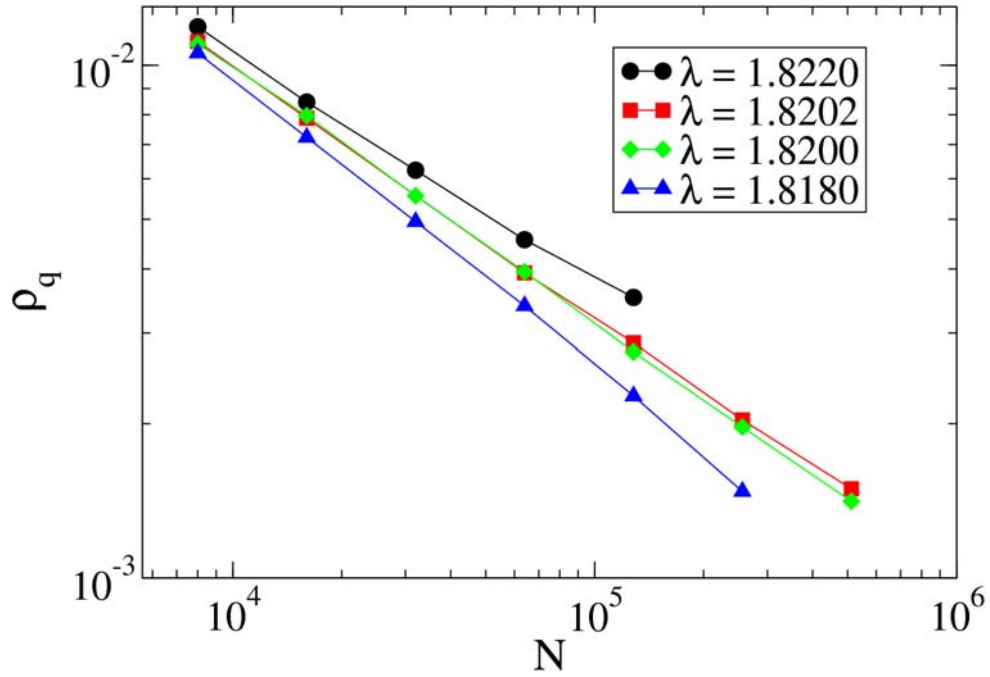


Figura 4.3: Análise quase estacionária do PC na topologia de mundo pequeno ($p = 0.045$). São mostrados valores para λ nas vizinhanças do ponto crítico para sistemas com diferentes tamanhos N .

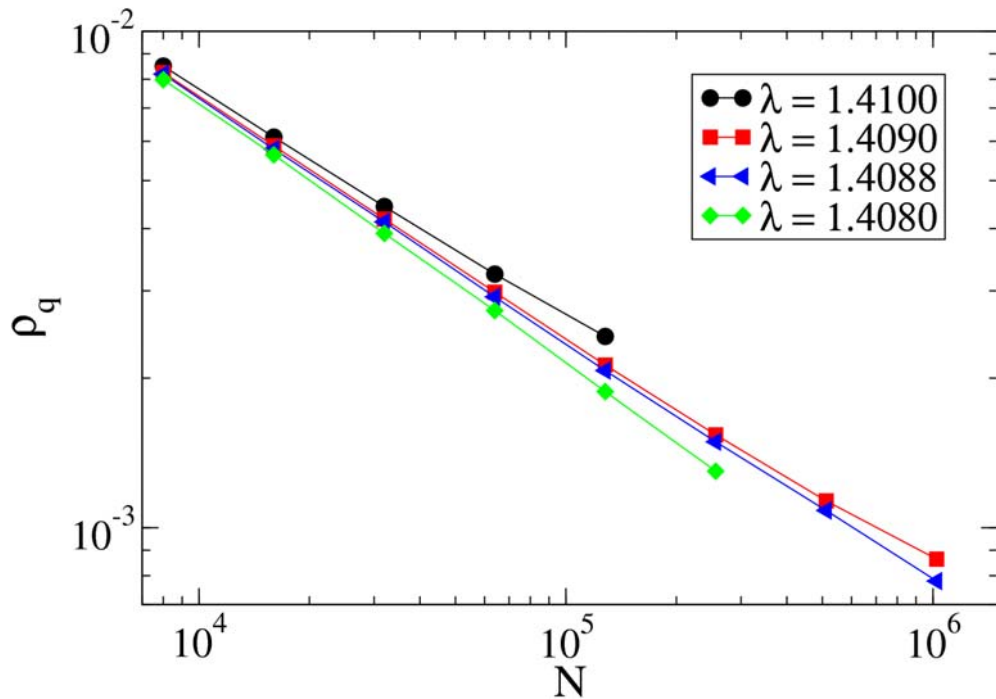


Figura 4.4: Análise quase estacionária do PC na topologia aleatória ($p = 0.45$). São mostrados valores para λ nas vizinhanças do ponto crítico para sistemas com diferentes tamanhos N .

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

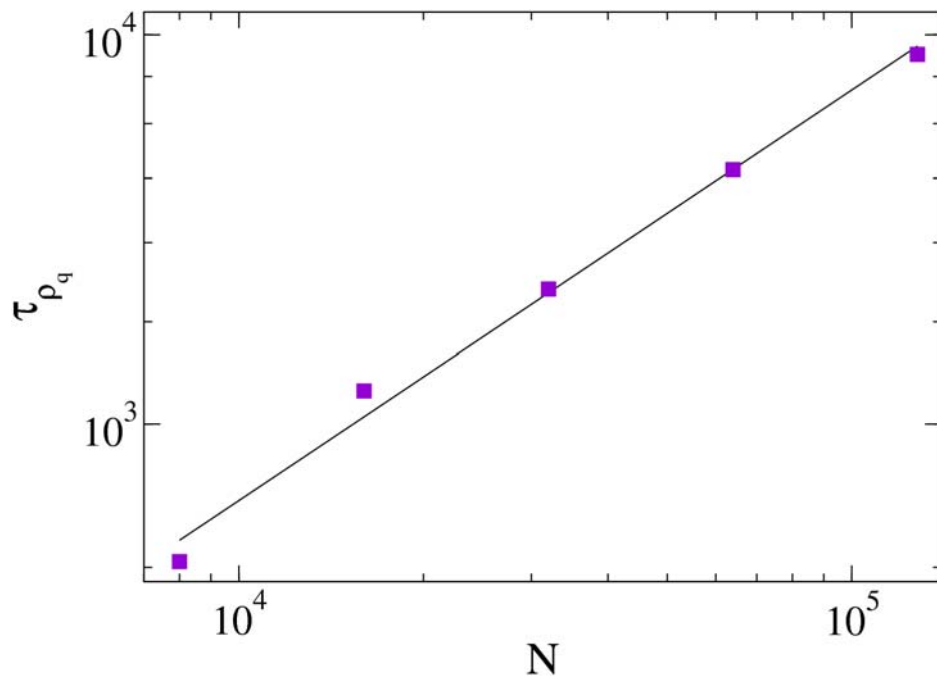


Figura 4.5: Comportamento do tempo de relaxação com diferentes tamanhos N de rede com (topologia mundo pequeno) para $\lambda = 1.8202$.

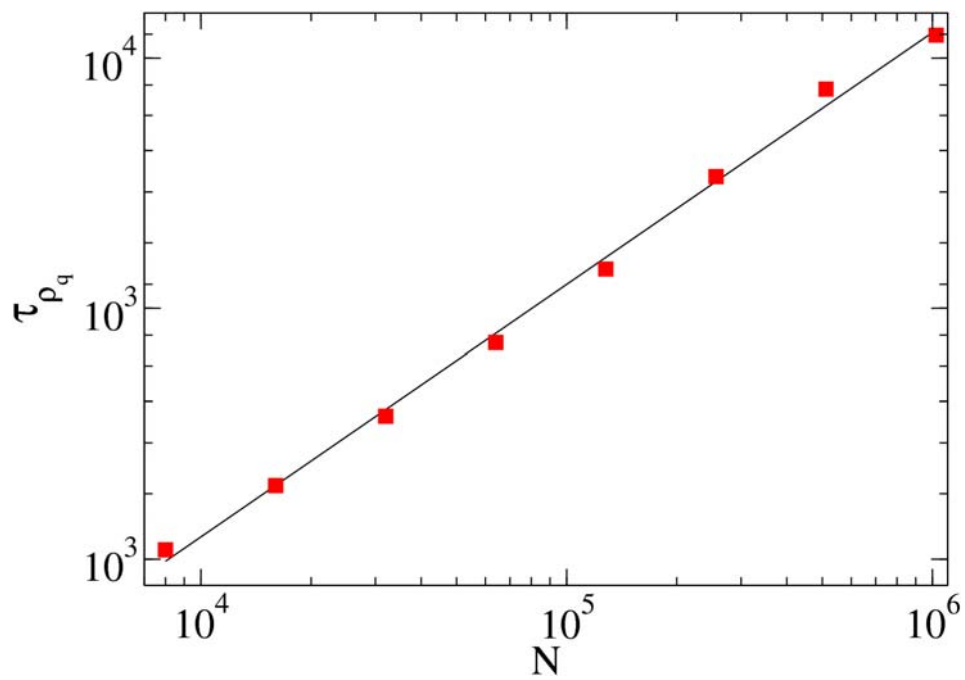


Figura 4.6: Comportamento do tempo de relaxação com diferentes tamanhos N de rede (topologia aleatória) para $\lambda = 1.409$.

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

expoente	CM	Mundo Pequeno	Aleatória
λ_c	1	1.821 ± 0.001	1.409 ± 0.001
$\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$	1/2	0.50 ± 0.01	0.49 ± 0.03
β/ν_{\perp}	1/2	0.48 ± 0.02	0.48 ± 0.03

Tabela 4.1: Estimativas para o valor dos expoentes críticos do Processo de Contato em Rede Watts-Strogatz.

Na Figura 4.7, apresentamos a evolução temporal do PC nas duas topologias estudadas. O PC evolui de um estado inicial em que todos os sítios contêm uma partícula. As simulações foram realizadas nas fases absorvente e ativa e também sobre os valores que apresentamos para as taxas críticas de transição de fase. Note que apesar dessas duas topologias terem seus comportamentos descritos pelo mesmo conjunto de expoentes, podemos ver que o processo dinâmico evolui com características diferentes para cada uma delas. Nesta figura, podemos perceber o caráter de agregação e a presença de conexões de longo alcance na topologia de mundo pequeno. Já na topologia aleatória, embora essas conexões de longo alcance também existam, o caráter de agregação da rede é baixo.

4. O processo de contato em rede Watts-Strogatz

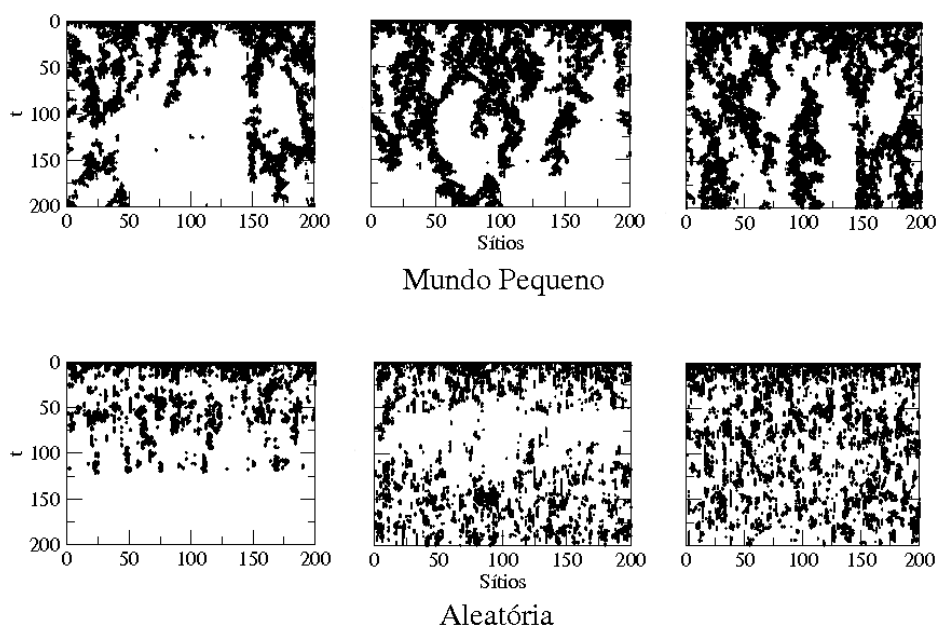


Figura 4.7: Evolução temporal do Processo de Contato na rede Watts-Strogatz iniciada de uma configuração em que todos os sítios ($N = 200$) estão ocupados. Da esquerda para a direita, temos as taxas críticas $\lambda = 1.72$, $\lambda_c \simeq 1.8202$ e $\lambda = 1.92$ para a topologia mundo pequeno e $\lambda = 1.35$, $\lambda_c \simeq 1.4090$ e $\lambda = 1.45$ para a aleatória.

Capítulo 5

O processo de contato na rede Barabási-Albert

Nos trabalhos apresentados nas referências [7, 18, 21] foram estudadas redes des-correlacionadas que apresentam um $\langle k \rangle$ bem definido, mas com $\langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$. Nesta seção apresentaremos algumas análises e resultados de simulações computacionais do PC realizadas na rede Barabási-Albert (seção 3.3.3), que também apresenta essas características, porém, é do tipo correlacionada.

5.1 Análise da rede Barabási-Albert

No modelo BA, apresentado na seção 3.3.3, a dinâmica das conexões realizadas a cada novo nó que entra na rede é regida pela probabilidade de conexão preferencial dada pela equação (3.4). Espera-se que este modelo apresente uma correlação entre seus nós, já que os mais conectados são preferenciais para a realização de novas conexões. Desta forma, devemos observar uma dependência explícita de k_{nn} com k na equação (3.4), que é frequentemente encontrada em redes reais [10, 15, 17, 37]. Nestes casos, poucos nós com um grande número de ligações possui a maioria de seus vizinhos pouco conectados. Esse comportamento faz com que k_{nn} seja uma função decrescente de k [42]. Quando encontramos este comportamento o chamamos de mistura *disassortative*¹. Na Figura

¹Em outras situações é observado que nós muito conectados preferem se conectar a outros também com alto grau de conexão. A essa propriedade chamamos de mistura *assortative*, caracterizada por

5. O processo de contato na rede Barabási-Albert

5.1, mostramos o resultado de simulações computacionais do modelo BA, a fim de verificar o comportamento de k_{nn} em função de k .

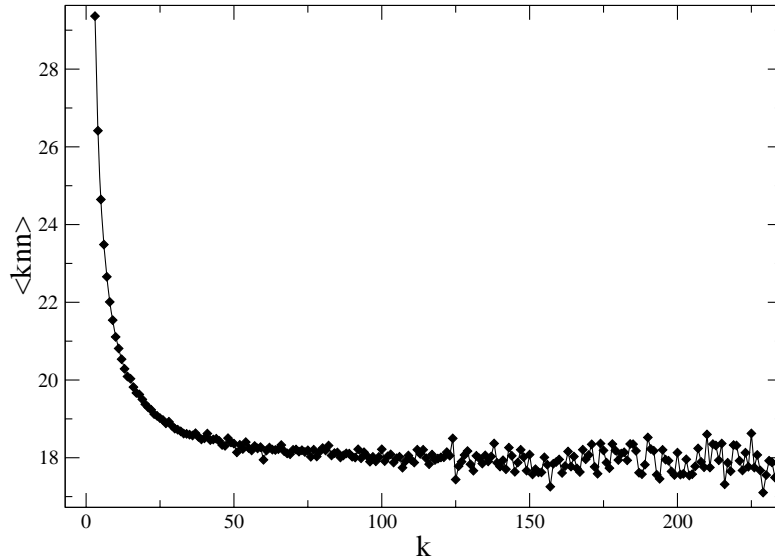


Figura 5.1: Correlação entre nós da rede BA. É revelado um caráter de correlação do tipo mistura *disassortative* em que k_{nn} é uma função decrescente do número de ligações k .

5.2 Análise numérica - resultados

Usando a teoria de escalonamento de tamanho finito (ETF), estudamos o estado quase estacionário do PC na rede BA. Novamente, usamos a relação (2.28), que é útil para estimar o valor do ponto crítico, já que em $\Delta \equiv \lambda - \lambda_c = 0$, isto é, no ponto crítico, essa relação toma a forma da relação (2.29).

Abaixo, mostramos os resultados do PC na rede BA. Na Tabela 5.1, apresentamos os valores obtidos para a taxa crítica de transição de fase e para o expoente β/ν_{\perp} que a caracteriza. Apresentamos também as previsões de CM propostas por Castellano *et al* [18] e também as previstas por Hong *et al* [21].

uma função crescente k_{nn} de k .

5. O processo de contato na rede Barabási-Albert

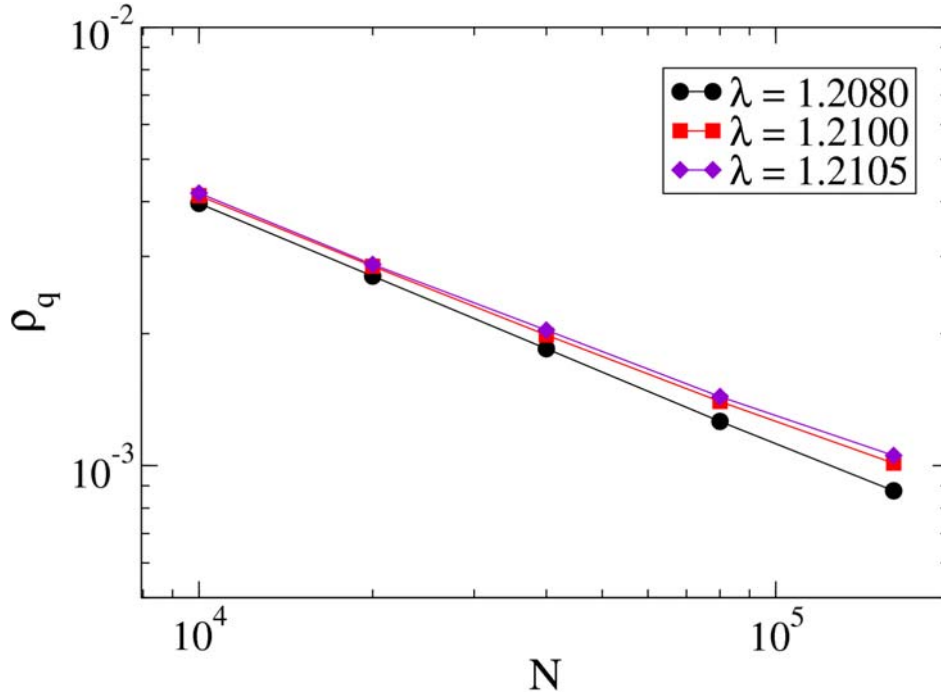


Figura 5.2: Análise quase estacionária do PC na rede BA. São mostrados valores para λ nas vizinhanças do ponto crítico para sistemas com diferentes tamanhos N .

	λ_c	β/ν_{\perp}
CM [21]	1	$\frac{1}{\gamma-1}$
CM [18]	1	$\frac{1}{2}$
$\gamma = 2.98$	1.209 ± 0.001	0.52 ± 0.02

Tabela 5.1: Resultados para o valor dos expoentes críticos do PC na rede BA.

Capítulo 6

Conclusões

Estudamos a transição de fase de um processo dinâmico com estado absorvente em uma rede complexa através da implementação das regras do Processo de Contato (PC) na rede Watts-Strogatz (WS) e também na rede Barabási-Albert (BA). Verificamos a validade de nossas implementações de redes complexas com dados já existentes na literatura. Da mesma forma, recorrendo à teoria de escalonamento de tamanho finito (ETF), em que estudamos o estado quase estacionário do PC, confrontamos nossos resultados obtidos a partir de simulações computacionais em uma rede regular unidimensional. Usamos nossos resultados inéditos do PC na rede WS e BA para verificar a validade de duas abordagens de CM que têm sido alvo de discussões na comunidade de Física Estatística de redes complexas recentemente.

Trabalhamos em um primeiro momento com a rede WS que apresenta uma dispersão finita para sua distribuição de conectividades entre nós e também um grau médio do número de ligações de um nó qualquer bem definido. Além disso, de acordo com a probabilidade que permitimos o redirecionamento de conexões da rede WS, pudemos trabalhar em duas diferentes topologias: mundo pequeno, onde a distância média entre dois nós quaisquer da rede é baixa, porém, com um forte caráter de agregação entre eles; e a topologia aleatória, que além de possuir um baixo valor para a distância média entre seus nós, possui fraca agregação entre eles. Obtivemos valores para as taxas críticas de transição de fase e um conjunto de expoentes críticos que a caracterizam para cada uma das duas topologias.

6. Conclusões

Depois, trabalhamos a dinâmica do PC em uma rede sem escala correlacionada utilizando o modelo BA. Ao contrário do trabalhos já existentes na literatura, nós trabalhamos com uma rede sem escala já próxima da fronteira entre uma distribuição de conectividade entre nós apresentando um caráter homogêneo, para uma representação de caráter heterogêneo. O caráter de correlação da rede Barabási-Albert (BA) não é capaz de influenciar nas previsões de CM, como pudemos constatar em nossos estudos.

Apesar de encontrar um mesmo conjunto de expoentes críticos para as duas topologias trabalhadas na rede WS, mostramos a partir de simulações computacionais, que o processo dinâmico evolui com características diferentes para cada uma delas.

Embora as previsões de CM tenham sido confirmadas para este conjunto de expoentes críticos em ambos os modelos de rede estudados, as taxas de transição de fase obtidas não foram corretamente previstas. Este fato está em contraste com outros modelos epidêmicos, tais como SIS e SIR, já investigados na literatura em tais topologias de redes complexas.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Prigogine, O fim das certezas, Editora UNESP (1996).
- [2] T. E. Harris, Contact Interactions on a Lattice, The Annals of Probability **2** (1974) 969-988.
- [3] M. Salzano, The contact process on graphs, IMPA-Publicações matemáticas (2003).
- [4] T. Tomé e M. Oliveira, Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade, EDUSP (2001).
- [5] A. G. Dickman, R. Dickman e F. A. Barbosa, Transições de fase sem termodinâmica, Revista Brasileira de Ensino de Física **28** (2006) 23-33.
- [6] H. E. Stanley, Introduction To Phase Transitions and Critical Phenomena, Oxford University Press (1971).
- [7] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, Critical phenomena in complex networks, Reviews of Modern Physics **80** (2008) 1275-61.
- [8] J. Marro and R. Dickman, Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models, Cambridge University Press (1999).
- [9] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks, Nature (London) **393** (1998) 440-442
- [10] A. L. Barabási and R. Albert, Emergence of scaling in random networks, Science **286** (1999) 509-512.

7. Referências Bibliográficas

- [11] M. E. J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Review* **45** (2003) 167-256.
- [12] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, Complex networks: Structure and dynamics, *Physics Reports*, **424** (2006) 175-308.
- [13] R. Albert and A. L. Barabási, Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics* **74** (2002) 47-97.
- [14] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani, Dynamical and Correlation Properties of the Internet, *Physical Review Letters* **87** (2001) 258701.
- [15] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley, and Y. Aberg, The web of human sexual contacts, *Nature* **411** (2001) 907-908.
- [16] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Epidemic Spreading in Scale-Free Networks, *Physical Review Letters* **86** (2001) 3200-3203.
- [17] S. Maslov and K. Sneppen, Specificity and Stability in Topology of Protein Networks, *Science* **296** (2002) 910-913.
- [18] C. Castellano and R. Pastor-Satorras, Non-Mean-Field Behavior of the Contact Process on Scale-Free Networks, *Physical Review Letters* **96** (2006) 038701.
- [19] M. Ha, H. Hong, and H. Park, Comment on ‘Non-Mean-Field Behavior of the Contact Process on Scale-Free Networks’, *Physical Review Letters* **98** (2007) 029801.
- [20] C. Castellano and R. Pastor-Satorras, Reply on ‘Comment on Non-Mean-Field Behavior of the Contact Process on Scale-Free Networks’, *Physical Review Letters* **98** (2007) 038701.
- [21] M. Ha, H. Hong, and H. Park, Finite-Size Scaling in Complex Networks, *Physical Review Letters* **98** (2007) 258701.
- [22] I. Jensen, Low-density series expansions for directed percolation on square and triangular lattices, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **29** (1996) 7013-7040.

7. Referências Bibliográficas

- [23] P. Erdos and A. Renyi, On random graphs, *Publications Mathematics Debrecen* **6** (1959) 290-297.
- [24] S. H. Strogatz, *Nolinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Books Publishing (1994).
- [25] I. Jensen and R. Dickman, Time-dependent perturbation theory for nonequilibrium lattice models, *Journal Statistical Physics* **71** (1993) 89.
- [26] I. Jensen, Low-density series expansions for directed percolation: I. a new efficient algorithm with applications to the square lattice, *Journal Physics A* **32** (1999) 5233-5249.
- [27] P. Grassberger and A. de La Torre, Reggeon field theory (Schlögl's first model) on a lattice: Monte Carlo calculations of critical behaviour, *Annals of Physics* **122** (1979) 373-396.
- [28] M. M. de Oliveira, *Simulações de sistemas com estados absorventes: método e aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas gerais, Departamento de Física (2007).
- [29] I. Jensen, Critical behavior of the three-dimensional contact process, *Physical Review A* **45** (1992) R563-R566.
- [30] J. B. BRONZAN and J. W. DASH, Higher-order epsilon-terms in renormalization group approach to reggeon field-theory, *Physical Letters B* **51** (1974) 496-498.
- [31] W. G. Dantas, *Estudo de propriedades críticas para modelos de rede com estados absorventes*, Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física (2006).
- [32] C. Moore and M. E. J. Newman, Epidemics and percolation in small-world networks, *Physical Review E* **61** (2000) 5678-5682.
- [33] M. Boguñá and R. Pastor-Satorras, Epidemic spreading in correlated complex networks, *Physical Review E* **66** (2002) 047104.

7. Referências Bibliográficas

- [34] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Epidemic dynamics and endemic states in complex networks, *Physical Review E* **63** (2001) 066117.
- [35] G. Chartrand, *Introductory Graph Theory*, Dover Publications (1984).
- [36] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer (2002).
- [37] M. E. J. Newman, The structure of scientific collaboration networks, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **98** (2001) 404-409.
- [38] P. G. Lind, The network approach: basic concepts and algorithms, arXiv:0711.3972v1 [physics.soc-ph] (2007).
- [39] A. K. Hartmann and H. Rieger, *Optimization Algorithms in Physics*, Wiley-VCH (2001).
- [40] D. J. Watts, *Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness*, Princeton University (1999).
- [41] S. Milgram, The Small World Problem, *Psychology Today* **1** (1967) 60-70.
- [42] A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, *Dynamical processes on complex networks*, Cambridge University Press (2008).
- [43] N. T. Bailey, *The mathematical theory of infectious diseases*, Griffin, London (1975).
- [44] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Berlin (1993).
- [45] M. Boguna, C. Castellano, and R. Pastor-Satorras, Langevin approach for the dynamics of the contact process on annealed scale-free networks, arXiv.org:0810.3000 (2008).
- [46] M. E. J. Newman, Assortative Mixing in Networks, *Physical Review Letters* **89** (2002) 208701.