FREDERICO VENTURA BATISTA

LADRILHAMENTOS IRREGULARES, DISCOS EXTREMOS E GRAFOS DE BALÃO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2012

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T
B333l
2012

Batista, Frederico Ventura, 1986-
Ladrilhamentos irregulares discos extremos e grafos de balão / Frederico Ventura Batista. – Viçosa, MG, 2012.
vii, 68f. : il. (algumas col.) ; 29cm.

Orientador: Mercio Botelho Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 65-68

1. Geometria hiperbólica. 2. Geometria diferencial. 3. Topologia. 4. Polígonos. 5. Teoria dos grafos. I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22. ed. 516.9

FREDERICO VENTURA BATISTA

LADRILHAMENTOS IRREGULARES, DISCOS EXTREMOS E GRAFOS DE BALÃO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

APROVADA: 28 de fevereiro de 2012.

Catarina Mendes de Jesus (Coorientadora)	Allan de Oliveira Moura

Jorge Tadashi Hiratuka

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

DEDICATÓRIA

"Meu filho,

Se você tropeçar e cair nas pedras que aparecerem na sua vida, guarde-as.
Pois, no futuro, você irá aprender e fazer um grande castelo com elas."
Maria Imaculada Ventura.

Assim como todas as vitórias alcançadas em minha vida, dedico esta dissertação a minha mãe Maria Imaculada Ventura

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Santíssima Virgem Maria, por me darem forças mesmo quando eu pensei que não iria conseguir.

A minha mãe, *Maria Imaculada*, por ser a minha maior incentivadora e por ter me ensinado, com toda a simplicidade e carinho, as lições mais valiosas de minha vida.

A todos os meus amigos da UFV, em especial *Vinícius, Fernando, Ana Paula, Isaque e Artur*, que estiveram ao meu lado nas "aventuras"que o mestrado proporcionou.

Ao meu orientador, *Mercio*, e minha coorientadora, *Catarina*, por toda a atenção e compreensão durante os estudos.

A todos os professores e funcionários do DMA pela dedicação desde os tempos de graduação.

Aos professores Jorge e Allan por aceitarem o convite de participar da banca.

A CAPES por me dar uma oportunidade de fonte de renda.

A minha esposa, *Gláucia*, por estar sempre ao meu lado, suportando todos os momentos de dificuldades e por ser sempre um porto seguro para meus sentimentos.

E, de forma muito especial, gostaria de agradecer ao meu anjo da guarda, minha filha *Lívia*, que sempre me animou com seu sorriso e brincadeiras. E também, por sempre me fazer acreditar que tudo é possível. Tudo isso apenas me chamando carinhosamente de papai.

Te amo filha!!!

SUMÁRIO

RESUMO **vi**

ABSTRACT **vii**

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Topologia das Superfícies 3

1.2 Geometria Hiperbólica Plana 7

1.2.1 Modelos para Geometria Hiperbólica Plana 7

1.2.2 Distâncias, Geodésicas e Isometrias Hiperbólicas 8

1.2.3 Trigonometria e Área Hiperbólicas 11

1.3 Superfícies de Riemann que podem ser obtidas por meio de Grupos Fuchsianos 13

1.3.1 Superfícies de Riemann e Aplicações de Recobrimento . . . 13

1.3.2 Grupos Fuchsianos 15

1.3.3 Domínio Fundamental e Grupos Co-Compactos 18

1.4 Teoria dos Grafos 22

1.4.1 Grafos 22

1.4.2 Classificação de Grafos 23

1.4.3 Rotações de Grafos Trivalentes (σ_3) 25

2 Discos Extremos **28**

2.1 Empacotamentos e Coberturas 28

2.2 Densidade 29

2.3 Densidade no Plano Hiperbólico 30

2.3.1 A Densidade Simplicial 31

2.3.2 Decomposição de Delaunay 33

2.4 Discos Extremos 33

3 Ladrilhamentos Irregulares 40

3.1 Emparelhamento de Arestas 40

3.2 O Teorema de Poincaré para Emparelhamento de Arestas de um Polígono Hiperbólico 43

3.3 Existência de Polígonos Hiperbólicos Inscritos em Circunferências 43

3.4 Ladrilhamento Irregular 49

4 Cirurgias, Emparelhamentos e Árvores de Balão 53

4.1 Propriedades da Cirurgia S_1 53

4.2 Grafos 1, 2 e 3-Balão 57

4.2.1 Emparelhamento de Arestas de Polígonos que são obtidos por meio de Grafos Trivalentes 57

4.2.2 1-Balão 59

4.2.3 2-Balão 59

4.2.4 3-Balão 62

Referências Bibliográficas 65

RESUMO

BATISTA, Frederico Ventura, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2012. **Ladrilhamentos Irregulares, Discos Extremos e Grafos de Balão**. Orientador: Mercio Botelho Faria. Coorientadora: Catarina Mendes de Jesus.

Esta dissertação tem como objetivo o estudo de dois temas ligados a topologia e a geometria moderna. O primeiro destes temas é dedicado ao estudo de empacotamento e coberturas de discos do plano hiperbólico, no qual tratamos de estudar resultados devidos a Bavard (1996) [3]. Já o segundo tema que foi abordado se refere ao estudo de emparelhamento de arestas para polígonos irregulares. Nesta parte tratamos de expor um exemplo, criado durante nossos estudos, para um emparelhamento que gera um ladrilhamento do plano hiperbólico por um polígono irregular. Além disso utilizamos as técnicas desenvolvidas por Mercio Botelho Faria, Catarina Mendes de Jesus e Panteleón D. R. Sanchez em [14] para obtermos emparelhamentos de arestas de polígonos regulares por meio de cirurgias em superfícies associadas a grafos trivalentes.

ABSTRACT

BATISTA, Frederico Ventura, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2012. **Irregular Tiling, Extremes Discs and Graphs of Balloon**. Adviser: Mercio Botelho Faria. Co-adviser: Catarina Mendes de Jesus.

This dissertation aims to study two topics related to modern topology and geometry. The first of these themes is dedicated to the study of packaging and record covering spheres in the hyperbolic plane, in which we treat the study results due to Bavard (1996) [3]. The second issue that was addressed refers to the study of edges pairing for irregular polygons. In this part we try to expose an example, created during our studies, for a pairing that generates a tiling of the hyperbolic plane by an irregular polygon. Also use the techniques developed by Mercio Botelho Faria, Catarina Mendes de Jesus and Panteleón D. R. Sanchez in [14] to obtain matching of edges of regular polygons through surgeries in surfaces associated with trivalent graphs.

Introdução

O desenvolvimento da teoria de empacotamentos e coberturas foi estimulada devido a sua conexão com a teoria dos números e com a cristalografia. Atualmente, muitas pesquisas relacionadas a este assunto tem sido desenvolvidas e sendo aplicadas a diversas áreas.

De acordo com John G. Ratcliffe, referência [35], dentre os matemáticos que apresentaram as primeiras contribuições a respeito de empacotamentos e coberturas podemos citar Joseph L. Lagrange (1773) e Johann C. F. Gauss (1831). Através da noção de densidade de empacotamentos introduzida de modo explicito por Gauss é que os trabalhos de Lagrange relacionados ao estudo de formas quadráticas ganharam significado dentro desta teoria.

Devemos ressaltar o trabalho de Hermann Minkowski (1911) que sistematizou estes temas dentro de uma teoria isolada e que foi denominada de Geometria dos Números.

Podemos destacar os trabalhos de Fejes Tóth (1953), Helmut Groemer (1963) e Károly Böröczky (1978), que pesquisaram limitantes relacionados a densidade de empacotamento e/ou cobertura de discos.

Através desta teoria, Christophe Bavard (1996) determinou o tamanho máximo de discos métricos mergulhados em uma superfície de Riemann S compacta de gênero $g \geq 2$, e o tamanho mínimo de discos que cobrem S.

O segundo tema relacionado a nosso trabalho está ligado a ladrilhamentos do plano hiperbólico por meio de polígonos fundamentais.

Os primeiros resultados de expressão dentro desta teoria se devem a Henri Poincaré (1881), que introduziu os conceitos de emparelhamento de arestas e ciclos de vértices determinados por um polígono fundamental associado a um grupo fuchsiano em trabalhos publicados em 1881 e 1882.

Já o termo polígono fundamental foi utilizado pela primeira vez por Felix C. Klein (1873). A Harold S. M. Coxeter (1956) é devido a classificação de ladrilhamentos regulares de $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$.

Podemos exemplificar aplicações recentes da teoria de ladrilhamentos através da referência [10], onde foi proposto pela primeira vez um sistema de comunicação hiperbólico considerando ladrilhamentos gerados por polígonos regulares.

Este fato foi um dos responsáveis por nos motivar a explorar o outro vies da teoria de ladrilhamentos, ou seja, a pesquisa de ladrilhamentos irregulares. Para estudar polígonos hiperbólicos irregulares, nos apoiamos no estudo realizado por Ernesto Martinez (1987) na referência [37].

Sendo assim, para dar base a todo nosso estudo, damos início ao texto com a exposição dos conceitos necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho que são: Geometria Hiperbólica Plana, Topologia das Superfícies e Grupos Fuchsianos. Estes tópicos são trabalhados nas seções do capítulo 1 que tem como propósito apresentar as preliminares. Ainda em relação a este primeiro capítulo, podemos citar as referências [4], [21] e [25] como os principais textos utilizados para desenvolver os conceitos relacionados a Geometria Hiperbólica Plana e Grupos Fuchsianos. Já as referências mais utilizadas para dar base aos conceitos relacionados a Topologia das Superfícies são [23], [26] e [39].

No capítulo 2 tratamos de expor o resultado obtido por Bavard, referência [3], que nos permite determinar um limitante superior para o tamanho do raio de um discos que determina um empacotamento de uma superfície S compacta de gênero $g \geq 2$. Bem como um limitante inferior para um disco que determina uma cobertura de uma superfície com as características mencionas acima. Isto torna o resultado um importante exemplo da aplicação dos estudos referentes a densidade de empacotamentos e coberturas por domínios fechados, e dos conceitos vistos durante o capítulo 1. Além da referência já citada, utilizamos no capítulo 2 as referências [2], [5], [9], [17] e[21].

Já no capítulo 3 apresentamos um exemplo, elaborado durante nossos estudos, de um ladrilhamento irregular, que é obtido através de um emparelhamento hiperbólico que, ao ser aplicado a um polígono hiperbólico irregular de dezoito arestas, atende as condições do teorema de Poincaré pare emparelhamento de arestas. Nesta parte fizemos uso das referencias [1] e [31] para exibir tal ladrilhamento. Sendo assim, neste capítulo exibimos um exemplo até então inédito. E, baseado nisso, acreditamos ser possível generalizar o caso deste exemplo, tal fato é apresentado por meio de uma conjectura.

Encerramos o texto com o capítulo 4, que tem como proposta expor uma técnica bastante útil para determinar emparelhamentos de polígonos hiperbólicos regulares que possuem $12g-6$ arestas e tem ciclos de vértices com comprimentos constante igual a três. A relevância deste assunto se dá pelo fato de que reticulados hiperbólicos do tipo $\{12g-6, 3\}$ fornecem empacotamentos ótimos com relação a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Este capítulo tem como base o uso do conceito de cirurgia entre superfícies que é foi originalmente proposto na referência [14] por Mercio B. Faria, Catarina Mendes de Jesus e Panteleón D. R. Sanchez.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como principal objetivo introduzir a teoria básica para a leitura de todo texto. Começaremos expondo alguns tópicos relacionados a linguagem de topologia das superfícies passando, rapidamente, para a apresentação dos elementos básicos da teoria da geometria hiperbólica plana. Já no fim deste capítulo trataremos de expor alguns aspectos relacionados à teoria de grafos. As principais referências para esta parte são [4], [21], [23], [25], [26] e [39].

1.1 Topologia das Superfícies

Iniciaremos esta seção com as definições de variedade n-dimensional e variedade n-dimensional com bordo. Alguns conceitos relacionados a teoria de topologia utilizados nesta seção como, vizinhança de um ponto, interior de um conjunto, fecho de um conjunto, conjuntos compactos, conjunto conexos, homeomorfismos e espaço de Hausdorff podem ser verificados nas referências [12] (págs. 160 - 166) ou [34] (Cap. 2).

Definição 1.1.1 *Uma **variedade n-dimensional** (ou variedade de dimensão n) é um espaço topológico de Hausdorff tal que todo ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto n-dimensional $D^n(x, r)$, centrado em um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e com raio $r > 0$, isto é*

$$D^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}.$$

*Quando não houver dúvidas quanto à dimensão iremos dizer simplesmente **variedade**.*

Definição 1.1.2 *Uma **variedade n-dimensional com bordo** é uma variedade de dimensão n que, além de admitir vizinhanças de pontos homeomorfas a discos abertos, também admite vizinhanças de pontos homeomorfas a um meio disco D^n_+ dado por*

$$D^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r,\ x_n \geq 0\}.$$

Em uma variedade n-dimensional, um ***ponto do bordo*** *é um ponto cuja vizinhança é um meio disco.*

Com o objetivo de apresentar o conceito de característica de Euler, definiremos neste momento o que são complexos regulares.

Para isso, considere $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ o disco n-dimensional. Denotando por $int(D^n)$, $cl(D^n)$ e $fr(D^n)$, respectivamente, o interior, o fecho e a fronteira de D^n temos:

1. $int(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} = B^n$;
2. $cl(D^n) = D^n$;
3. $fr(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$.

Com isso, podemos apresentar o conceito de complexo regular.

Definição 1.1.3 *Seja M uma variedade n-dimensional. Define-se um* ***complexo regular*** *K em M da seguinte forma:*

(0) *Seja K_0 um conjunto finito de pontos de M. Os elementos de K_0 são chamados de* ***0-células****.*

(1) *Construímos K_1 adicionando um número finito de* ***1-células*** *conectando as 0-células de K_0. O conjunto de pontos $K_1 \setminus K_0$ é uma união disjunta finita de $1-$células abertas. Se a é uma 1-célula, então existe um homeomorfismo do intervalo $[0,1]$ num subconjunto de M que leva $(0,1)$ na $1-$células a, e os pontos finais 0 e 1 nos pontos finais de a em K_0.*

(2) *Construímos K_2 adicionando um número finito de* ***2-células****, expandindo essas $1-$células, de forma que o conjunto de pontos em $K_2 \setminus K_1$ seja uma união disjunta finita de* ***2-células*** *abertas. Se P é uma dessas* ***2-células****, então existe um homeomorfismo do disco unitário D^2 em um subconjunto de M que leva a bola aberta $B^2 = int(D^2)$ em P e o círculo $\mathbb{S}^1 = cl(D^2) \setminus int(D^2)$ em $cl(P) \setminus int(P) \subset K_1$.*

Prosseguindo desta forma, no n-ésimo passo apresentamos a seguinte descrição:

(n) *Construímos K_n de modo que o conjunto de pontos em $K_n \setminus K_{n-1}$ é uma união disjunta finita de $n-$**células**, ou seja, se W é uma dessas $n-$**células** então existe um homeomorfismo do disco unitário D^n em um subconjunto de M que leva a bola aberta $B^n = int(D^n)$ em P e $\mathbb{S}^{n-1} = cl(D^n) \setminus int(D^n)$ em $cl(W) \setminus int(W) \subset K_{n-1}$.*

Desta maneira, construímos conjuntos $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n$ tais que todos os pontos de M estão em uma célula em algum K_i, $i = 0, \ldots, n$. Definimos então o n-complexo regular K como sendo:

$$K = \bigcup_{i=0}^{n} K_i.$$

Observação 1.1.4 *Note que o n-complexo regular K deve ser distinguido da variedade M pois, os elementos de K são células enquanto que os elementos de M são pontos.*

Para definir a característica de Euler de uma superfície iremos definir, primeiramente a característica de Euler de um complexo regular.

Definição 1.1.5 *A **característica de Euler de um n-complexo regular** K, denotada por $\chi(K)$, é definida através da soma alternada abaixo:*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i |\{i\text{−}células\}|,$$

onde $|\{i\text{−}células\}|$ denota o número total de $i-$células com $i = 0, \ldots n$.

Definição 1.1.6 *Uma **superfície conexa** S é uma variedade conexa bidimensional, isto é, um espaço Hausdorff no qual cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa ao disco aberto de dimensão 2:*

$$B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}.$$

*Uma **superfície compacta** é a superfície obtida através de um espaço topológico compacto.*

Exemplo 1.1.7 *Os exemplos mais comuns de superfícies são, a esfera $\mathbb{S}^2$ e o toro $\mathbb{T}^2$.*

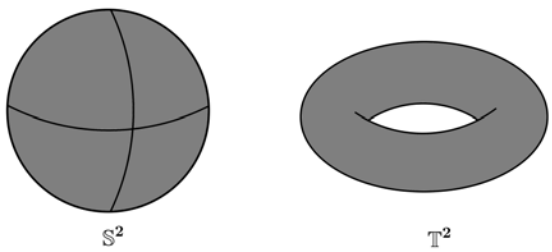

Figura 1.1: Representação da esfera $\mathbb{S}^2$ e do toro $\mathbb{T}^2$.

Definição 1.1.8 *Seja τ uma família finita de conjuntos fechados $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ que formam uma cobertura para S, e uma família ψ de homeomorfismos $\psi_i : \tau_i' \longrightarrow \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$, onde cada τ_i' é um triângulo do plano $\mathbb{R}^2$. Os conjuntos τ_i são chamados de "triângulos". Os subconjuntos de τ_i que são imagens de vértices ou de arestas dos triângulos τ_i' por meio de ψ_i também são chamados de "vértices"* *ou "arestas", respectivamente. Dizemos que τ (ou (τ, ψ)) é uma* ***triangulação*** *se dois triângulos distintos de τ ou são disjuntos, ou possuem apenas um único vértice em comum, ou possuem apenas uma aresta em comum.*

Observação 1.1.9 *Observe que, uma triangulação de uma superfície S dá origem a um 2-complexo regular.*

Definição 1.1.10 *A* ***característica de Euler de uma superfície*** *S é dada pela característica de Euler de um 2-complexo regular obtido por meio de uma triangulação τ de S. Sendo assim:*

$$\chi(S) = |\{\textit{vértices de } \tau\}| - |\{\textit{arestas de } \tau\}| + |\{\textit{faces de } \tau\}|,$$

onde $|\{\textit{vértices de } \tau\}|, |\{\textit{arestas de } \tau\}|$ e $|\{\textit{faces de } \tau\}|$ representam, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces do 2-complexo gerado em S por meio da triangulação τ.

Apresentamos agora o conceito de soma conexa, que é uma operação topológica definida entre superfícies compactas e conexas.

Definição 1.1.11 *Dadas M e N duas superfícies compactas e conexas distintas, remova um pequeno disco de cada uma. Obtemos assim duas superfícies M' e N', cada uma com uma nova componente de bordo que denotaremos, respectivamente, por c_1 e c_2. Identificando c_1 e c_2 formamos uma nova superfície. O processo descrito será chamado de* ***soma conexa*** *e denotada por $\#$. Assim, a superfície obtida por meio da soma conexa entre M e N será denotada por $M\#N$.*

A seguir apresentamos a figura 1.2 que ilustra, em três etapas, a soma conexa entre dois toros.

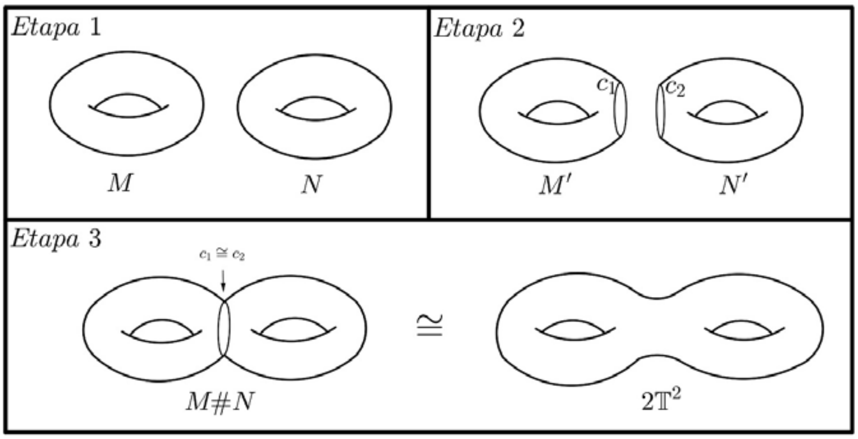

Figura 1.2: Soma conexa realizada entre dois toros.

Com isso, encerramos esta seção definindo o gênero de uma superfície como segue:

Definição 1.1.12 *O **gênero** de uma superfície M, denotado por $g(M)$, corresponde ao número de toros presentes nela.*

Na seção 1.3 deste capítulo veremos a relação entre gênero e característica de Euler.

1.2 Geometria Hiperbólica Plana

Nosso trabalho tem como base a geometria hiperbólica plana. Sendo assim, nesta seção, iremos apresentar os dois modelos euclidianos mais utilizados para esta geometria: os modelos do semi-plano de Lobatchevsky (ou semi-plano superior) e o do disco de Poincaré (ou disco unitário) que são modelos de variedades riemannianas de dimensão dois. Para isso, iremos denotar um ponto complexo $z \in \mathbb{C}$, na forma $z = x + iy$, onde a parte real e a parte imaginária de z são denotadas respectivamente por $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

1.2.1 Modelos para Geometria Hiperbólica Plana

A seguir, apresentaremos os modelos para o plano hiperbólico que utilizaremos durante todo o texto. Nesta subseção, o conceito de métrica riemanniana é citado durante a definição dos modelos para o plano hiperbólico. Isto é feito com o objetivo de dar base para conceitos que definiremos na próxima subseção. Tal conceito está relacionado a teoria de geometria riemanniana, e pode ser visto com mais detalhes na referência [6] (pág. 38).

Definição 1.2.1 *Os modelos do **plano de Lobatchevsky** e do **disco de Poincaré** são, respectivamente, os conjuntos*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\} \tag{1.1}$$

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \tag{1.2}$$

munidos com as respectivas métricas riemannianas

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \tag{1.3}$$

$$ds^* = \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - (x^2 + y^2)}. \tag{1.4}$$

As métricas definidas em 1.3 e 1.4 são chamadas de **métricas de Poincaré**. Já as fronteiras dos modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$ são dadas, respectivamente , pelos conjuntos

$$fr(\mathbb{H}^2) = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}, \tag{1.5}$$

$$fr(\mathbb{D}^2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \tag{1.6}$$

Utilizamos também a notação,

$$\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup fr(\mathbb{H}^2), \tag{1.7}$$

$$\overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{D}^2 \cup fr(\mathbb{D}^2). \tag{1.8}$$

para denotar a união dos modelos com suas respectivas fronteiras.

1.2.2 Distâncias, Geodésicas e Isometrias Hiperbólicas

Apresentamos agora a definição de distância em cada um dos modelos estudados. Isso nos permitirá explorar o conceito de geodésicas bem como determinar expressões analíticas para as funções distância em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$. Além disso, definimos o conceito de isometrias com o objetivo de estabelecer a equivalência entre cada os modelos da geometria hiperbólica já mencionados. Nesta parte do texto, verificamos que as métricas definidas em 1.3 e 1.4 são essenciais. Alguns aspectos básicos da teoria de espaços métricos, que podem ser verificados na referência [28] (Seções 1 e 5, Cap. 1), também são importantes para esta subseção.

Começamos com a definição de comprimento hiperbólico.

Definição 1.2.2 *Seja $I = [0,1]$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes, onde $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$. O **comprimento** $\|\gamma\|$ **da curva** $\gamma([0,1])$ é dado por*

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt. \tag{1.9}$$

De maneira análoga, definimos:

Definição 1.2.3 *Seja $I = [0,1]$ e $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{D}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes, onde $\widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{x}(t) + i\widetilde{y}(t)$, o* **comprimento** *$\|\widetilde{\gamma}\|$ da curva $\widetilde{\gamma}([0,1])$ é dado por*

$$\|\widetilde{\gamma}\| = \int_0^1 \frac{2\sqrt{(\widetilde{x}'(t))^2 + (\widetilde{y}'(t))^2}}{1 - ((\widetilde{x}(t))^2 + (\widetilde{y}(t))^2)} dt. \tag{1.10}$$

Da definição de comprimento hiperbólico segue a definição de distância hiperbólica.

Definição 1.2.4 *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, a **distância hiperbólica** entre z_1 e z_2 é definida por*

$$d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \inf \|\gamma\|, \tag{1.11}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas γ, diferenciáveis por parte, ligando z_1 e z_2 em $\mathbb{H}^2$. De modo análogo, define-se a distância hiperbólica para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$ o qual denotaremos por $d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2)$.

Observação 1.2.5 *Os modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, com as respectivas distâncias definidas em 1.2.4, são espaços métricos. Este fato pode ser verificado em [21] (págs. 19-20).*

Apresentamos agora um resultado que nos fornecem expressões analíticas para as funções distância em cada um dos modelos estudados.

Teorema 1.2.6 ([21] (pág. 32) e [25] (pág. 6)) *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ valem as seguintes igualdades:*

$$d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{|z_1 - \overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}\right).$$

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$ valem as seguintes igualdades:

$$d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{|1 - z_1\overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}\right).$$

Tendo em vista a definição de comprimento e distância do plano hiperbólico, apresentamos agora a definição de geodésica.

Definição 1.2.7 *Uma curva $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é dita **geodésica em** $\mathbb{H}^2$, se para quaisquer pontos $s, r \in I$ tivermos*

$$d_{\mathbb{H}^2}(\gamma(s), \gamma(r)) = \int_s^r \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{y(t)} dt, \tag{1.12}$$

*ou seja, se γ minimizar a distância entre os pontos de seu traçado. De modo análogo, uma curva $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{D}^2$ é dita **geodésica em** $\mathbb{D}^2$, se para quaisquer pontos $s, r \in I$ tivermos*

$$d_{\mathbb{D}^2}(\widetilde{\gamma}(s), \widetilde{\gamma}(r)) = \int_s^r \frac{2\sqrt{(\widetilde{x}'(t))^2 + (\widetilde{y}'(t))^2}}{1 - ((\widetilde{x}(t))^2 + (\widetilde{y}(t))^2)} dt, \tag{1.13}$$

Neste momento uma questão interessante seria perguntar quais são as geodésicas desse modelo. Será que são segmentos de retas como no plano euclidiano? Em resposta a esta pergunta apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.8 ([21] (págs. 24-28)) *Considerando os modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, com suas respectivas métricas riemannianas, temos o seguinte:*

1. *As geodésicas de $(\mathbb{H}^2, ds)$ são as semi-retas euclidianas de $\mathbb{H}^2$ ortogonais a $fr(\mathbb{H}^2)$ e os semicírculos euclidianos de $\mathbb{H}^2$ com centro em $fr(\mathbb{H}^2)$.*

2. *As geodésicas de $(\mathbb{D}^2, ds^*)$ são os diâmetros de $\mathbb{D}^2$ e os arcos de circunferência euclidianas de $\mathbb{D}^2$ ortogonais à $fr(\mathbb{D}^2)$.*

Tendo em vista a observação 1.2.5 apresentamos neste momento a definição de isometria e faremos um estudo breve das isometrias de cada modelo.

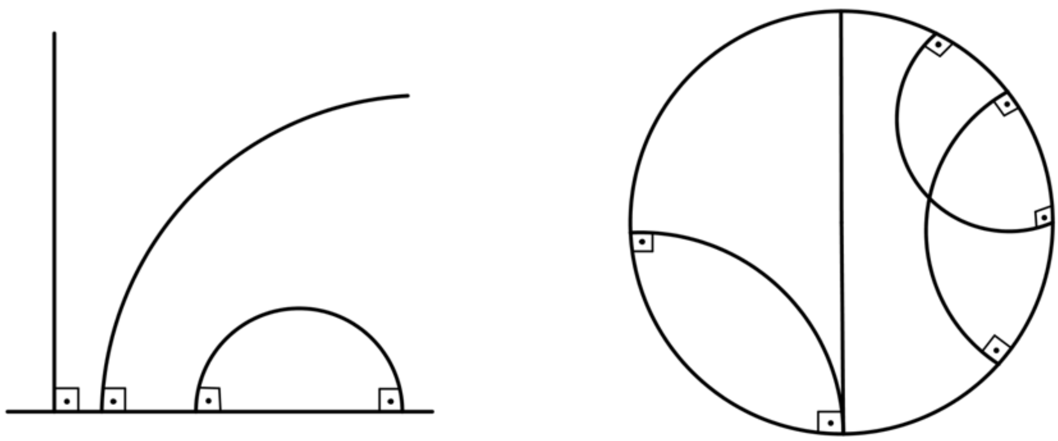

Figura 1.3: Da esquerda para a direita: Geodésicas de $\mathbb{H}^2$; Geodésicas de $\mathbb{D}^2$

Definição 1.2.9 *Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ espaços métricos. Uma* ***imersão isométrica*** *de M em N é uma aplicação $f : M \to N$ tal que $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Se a imersão isométrica f é também sobrejetiva dizemos que f é uma* ***isometria****.*

Assim, denotando por $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $Isom(\mathbb{D}^2)$ os respectivos conjuntos das isometrias de $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, temos por definição que:

- $T : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ pertence a $Isom(\mathbb{H}^2) \Leftrightarrow T$ é sobrejetiva e $d_{\mathbb{H}^2}(T(z_1), T(z_2)) = d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$;
- $T : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ pertence a $Isom(\mathbb{D}^2) \Leftrightarrow T$ é sobrejetiva e $d_{\mathbb{D}^2}(T(z_1), T(z_2)) = d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$.

Observe também que, decorre imediatamente da definição 1.2.9, toda isometria é injetora. Portanto, segue que $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $Isom(\mathbb{D}^2)$ possuem estrutura de grupo em relação a operação de composição.

Uma aplicação importante que nos permite ora trabalhar com o modelo do semiplano $\mathbb{H}^2$ e ora trabalhar com o modelo disco $\mathbb{D}^2$ é a transformação Υ, dada por:

$$\begin{aligned} \Upsilon : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto \frac{iz+1}{z+i}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Levando-se em consideração as métricas riemannianas definidas em 1.3 e 1.4, a isometria Υ define uma isometria entre $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$.

O resultado que segue caracteriza as isometrias do plano hiperbólico, tanto para o modelo $\mathbb{H}^2$ como também para o modelo de $\mathbb{D}^2$, como sendo tipos especiais de transformações lineares fracionárias.

Teorema 1.2.10 ([4] (pág. 137)) *Sejam $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $Isom(\mathbb{D}^2)$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, respectivamente. Sendo assim:*

1. *$Isom(\mathbb{H}^2)$ é constituído pelas aplicações da seguinte forma:*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad e \quad z \mapsto \frac{a(-\overline{z})+b}{c(-\overline{z})+d}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

2. *$Isom(\mathbb{D}^2)$ é constituído pelas aplicações da seguinte forma:*

$$z \mapsto \frac{az+\overline{c}}{cz+\overline{a}} \quad e \quad z \mapsto \frac{a(\overline{z})+\overline{c}}{c(\overline{z})+\overline{a}}$$

onde $a, c \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

1.2.3 Trigonometria e Área Hiperbólicas

Nesta subseção, apresentamos expressões que nos permitem relacionar ângulos de figuras hiperbólicas com a sua área. Tais expressões são de fundamental importância em nosso trabalho, principalmente no que se refere aos capítulos 2 e 3. Devido à equivalência entre os modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$ apresentada em 1.14, nesta parte, nos restringimos apenas ao modelo do semiplano $\mathbb{H}^2$. Entretanto nos próximos capítulos iremos voltar a tratar do modelo do disco de Poincaré. Principalmente quando estivermos interessados em esboçar polígonos hiperbólicos que possuem um grande número de arestas.

Começamos esta subseção com a seguinte definição:

Definição 1.2.11 *Um ponto pertencente a fronteira de $\mathbb{H}^2$ (ou $\mathbb{D}^2$) é chamado de **ponto ideal**..*

Dados três pontos $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{H}^2$, consideramos as geodésicas, raios ou segmentos geodésicos ligando estes pontos e obtemos assim um **triângulo geodésico** Δ. Note que a possibilidade de se ter um ou mais vértices na fronteira $fr(\mathbb{H}^2)$ não é descartada.

Por este motivo, admitimos a possibilidade de termos arestas por geodésicas completas ou raios geodésicos.

Denotemos por L_1, L_2 e L_3 as arestas de um triângulo Δ e por α, β e ρ os ângulos internos opostos, respectivamente, às arestas de Δ. Supondo que os três ângulos sejam estritamente positivos temos o seguinte:

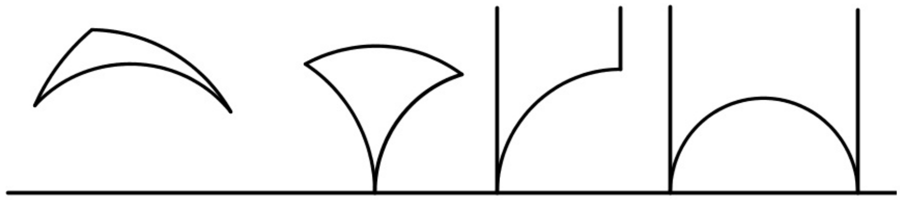

Figura 1.4: Triângulos geodésicos com 0, 1, 2 e 3 vértices ideais, respectivamente.

Teorema 1.2.12 ([4] (pág. 148)) *Seja Δ um triângulo, sem vértices ideais, com ângulos α, β, ρ e lados opostos L_1, L_2, L_3 com comprimentos $|L_1|, |L_2|, |L_3| < \infty$ respectivamente. Então valem as seguintes igualdades:*

$$\cosh(L_3) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\rho)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}. \tag{1.15}$$

Observação 1.2.13 *[[21] (pág. 42)] A expressão 1.15 é conhecida como segunda lei dos cossenos. Tal expressão não possui análogo euclidiano, pois esta significa que os ângulos de um triângulo determinam o comprimento de suas arestas. Uma consequência deste fato é que dados dois triângulos com os mesmos ângulos, existe uma isometria de $\mathbb{H}^2$ em que um é a imagem do outro.*

Exploramos agora o conceito de área de regiões do plano hiperbólico. Daremos inicio a este assunto com a definição de polígono hiperbólico.

Definição 1.2.14 *Um **polígono hiperbólico** de n-arestas é um conjunto de $\overline{\mathbb{H}}^2$ delimitados por n segmentos geodésicos hiperbólicos.*

Definição 1.2.15 *Dado um conjunto $U \subset \overline{\mathbb{H}}^2$. A **área hiperbólica**, denotada por $\mu(U)$, é a integral*

$$\mu(U) = \int_U \frac{dxdy}{y^2},$$

se esta existir e for finita.

Observação 1.2.16 *[[25] (pág. 11)] Áreas hiperbólicas são invariantes por isometrias hiperbólicas, isto é, dada $T \in Isom(\mathbb{H}^2)$ temos que $\mu(T(U)) = \mu(U)$.*

Finalizaremos esta parte com resultados referentes a área de um triângulo, de um polígono e de um circulo hiperbólico. Tais resultados podem ser verificados em [4] (págs. 132, 150 e 153).

Teorema 1.2.17 *Seja $\triangle$ um triângulo em $\overline{\mathbb{H}}^2$ com ângulos internos α, β e ρ. Então,*

$$\mu(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \rho).$$

Corolário 1.2.18 *Se P é um polígono hiperbólico de n arestas, com ângulos internos $\theta_1, ..., \theta_n$, então:*

$$\mu(P) = (n-2)\pi - (\theta_1 + ... + \theta_n).$$

Teorema 1.2.19 *Seja B um disco hiperbólico de raio r. A área de um setor circular $B(\theta)$ correspondente a um ângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, em $\mathbb{H}^2$, denotada por $\mu(B(\theta))$, é dada por $\mu(B(\theta)) = \theta(\cosh(r) - 1)$. Assim, a área de B, denotada por $\mu(B)$, é dada por $\mu(B) = 2\pi(\cosh(r) - 1)$.*

1.3 Superfícies de Riemann que podem ser obtidas por meio de Grupos Fuchsianos

O objetivo desta seção é apresentar os conceitos básicos referentes ao estudo das superfícies de Riemann que podem ser obtidas por meio do quociente do semiplano $\mathbb{H}^2$ por grupos de isometrias discretas do plano hiperbólico. Desta forma, abordaremos apenas o necessário para o desenvolvimento dos próximos capítulos do texto.

Com o intuito de tornar a leitura do texto mais dinâmica, deixamos alguns conceitos desta seção referentes ao estudo homotopia e grupo fundamental para serem tratados com mais detalhes na referência [29].

1.3.1 Superfícies de Riemann e Aplicações de Recobrimento

Damos início a esta subseção apresentado a definição conceitos de aplicações holomorfas e biholomorfas que são definições necessárias para o entendimento do conceito de superfície de Riemann. Primeiramente, vamos recordar o a definição de função complexa diferenciável.

Definição 1.3.1 *Uma função complexa $f : U \to \mathbb{C}$, definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$, diz-se **diferenciável** no ponto $z = x + iy \in U$ quando existe o limite*

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} = z_0,$$

*o quociente acima sendo tomado no sentido dos números complexos. O número complexo $z_0 = f'(z)$ chama-se a **derivada** da função complexa f no ponto z.*

Definição 1.3.2 *A função complexa $f : U \to \mathbb{C}$ diz-se **holomorfa** quando possui derivada $f'(z)$ em todos os pontos do aberto U. Uma aplicação é **biholomorfa**, quando ela e sua inversa são holomorfas.*

Segue agora a definição de superfície de Riemann.

Definição 1.3.3 *Seja R uma variedade conexa, associada um sistema de coordenadas $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$, onde cada U_λ é um subconjunto aberto de S, $S = \bigcup_\lambda U_\lambda$ e cada ϕ_λ um homeomorfismo de U_λ sobre um subconjunto aberto V_λ do plano complexo $\mathbb{C}$. Dizemos que S é uma **superfície de Riemann** se $U_\lambda \cap U_{\widetilde{\lambda}} \neq \emptyset$, então a função de transição*

$$\phi_{\lambda\widetilde{\lambda}} = \phi_{\widetilde{\lambda}} \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda\left(U_\lambda \cap U_{\widetilde{\lambda}}\right) \longrightarrow \phi_{\widetilde{\lambda}}\left(U_\lambda \cap U_{\widetilde{\lambda}}\right)$$

é uma aplicação biholomorfa, isto é, um homeomorfismo holomorfo.

Um fato importante a ser considerado, que pode ser verificado em [24] (págs. 37 e 54), é que toda superfície de Riemann é orientável e admite uma triangulação. Com isso, concluímos toda superfície de Riemann compacta é uma superfície fechada de gênero finito. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.3.4 *Seja S uma superfície de Riemann compacta, o **gênero** de S, denotado por $g(S)$, é dado por*

$$g(S) = \frac{1}{2}\left(2 - \chi(S)\right).$$

Quando não houver dúvidas em relação à superfície de Riemann S estamos nos referindo, iremos denotar $g(S)$ apenas por g.

Os conceitos de espaço de recobrimento e de recobrimento universal são parte importante de nosso trabalho, principalmente para demonstração de resultados referentes aos capítulos 2 e 3.

Definição 1.3.5 *Dizemos que uma aplicação contínua $f : \widetilde{X} \to X$ entre espaços topológicos conexos por caminhos é uma **aplicação de recobrimento** se para cada $x \in X$:*

1 Existe uma vizinhança $V_x \subset X$ tal que

$$f^{-1}(V_x) = \bigcup_\lambda U_\lambda,$$

onde $\mathcal{U}_\lambda$ são abertos conexos de $\widetilde{X}$, dois a dois disjuntos;

2 $f\,|_{U_\lambda} : U_\lambda \longrightarrow V_x$ é um homeomorfismo para todo λ.

*Neste caso, chamamos a terna $\left(p, \widetilde{X}, X\right)$ de **recobrimento** e o espaço $\widetilde{X}$ de **espaço de recobrimento** de X.*

As aplicações $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, tais que $f \circ h = f$, formam um grupo em relação a operação composição, chamado **grupo de recobrimento**.

Se $\widetilde{X}$ for **simplesmente conexo**, isto é, se $\pi_1(\widetilde{X}) = \{0\}$, então o grupo de recobrimento de $\left(f, \widetilde{X}, X\right)$ é o grupo fundamental de X e chamamos $\widetilde{X}$ de **recobrimento universal** de X. Como exemplos de espaços simplesmente conexos podemos citar $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$.

Já a noção de recobrimento universal é a de que se existe uma outra aplicação de recobrimento $h_1 : Y \to X$ então existe uma aplicação $h_2 : \widetilde{X} \to Y$ tal que $h_1 \circ h_2 = f$.

1.3.2 Grupos Fuchsianos

As isometrias do plano hiperbólico que preservam a orientação são objetos centrais de nosso texto. Sendo assim, começamos agora um breve estudo sobre o assunto. Desta forma, considere o grupo:

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\},$$

das matrizes reais quadradas de ordem dois com determinante igual a um. Para cada $A \in SL(2, \mathbb{B})$, considere a transformação linear fracionária

$$\begin{array}{rccc} T_A : & \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{H}^2 \\ & z & \longmapsto & \dfrac{az + b}{cz + d}. \end{array}$$

Note que, para cada $A \in SL(2, \mathbb{R})$, T_A está bem definida. Para isto, basta observar que $Im(T_A(z)) = \dfrac{Im(z)}{|cz + d|^2} > 0$, uma vez que $Im(z) > 0$.

Além disso, podemos estender a ação de T_A à $\overline{\mathbb{H}^2}$ de forma contínua, impondo que $T_A(\infty) = \infty$, se $c = 0$ e $T_A\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, $T_A(\infty) = -\dfrac{d}{c}$, se $c \neq 0$.

Por outro lado, existem matrizes $A_1, A_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ distintas que estão associadas a mesma transformação. Porém, dada uma matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$ é possível determinar o seguinte: se $A \in SL(2, \mathbb{R})$, então $\{\widetilde{A} \in SL(2, \mathbb{R}) : T_{\widetilde{A}} = T_A\} = \{-A, A\}$. Sendo assim, passamos a seguinte definição:

Definição 1.3.6 *O **grupo projetivo**, denotado por $PSL(2, \mathbb{R})$, é dado por :*

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1 \right\}.$$

O resultado que segue estabelece a importância do estudo do grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ em relação às isometrias de $\mathbb{H}^2$ que preservam a orientação.

Teorema 1.3.7 ([25] (pág. 57)) *O grupo* $PSL(2,\mathbb{R})$ *é o subgrupo de* $Isom(\mathbb{H}^2)$ *constituído das isometrias que preservam orientação.*

Os elementos de $PSL(2,\mathbb{R})$ podem ser classificados em três tipos, de acordo com o valor do absoluto da função **traço** da matriz quadrada de ordem dois que está associada a cada elemento de $SL(2,\mathbb{R})$. Esta classificação é dada através da seguinte definição:

Definição 1.3.8 *Seja* $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ *e defina* $Tr(T) = |a+b|$, *onde* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. *Com isso temos que:*

1. *se* $Tr(T) < 2$, *então* T *é chamada de* ***elíptica****;*
2. *se* $Tr(T) = 2$, *então* T *é chamada de* ***parabólica****;*
3. *se* $Tr(T) > 2$, *então* T *é chamada de* ***hiperbólica***.

Com esta classificação de elementos de $PSL(2,\mathbb{R})$, apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.9 ([21] (pág. 55)) *Seja* $T \in PSL(2,\mathbb{R}) \setminus \{Id\}$. *Então:*

1. T *fixa um único ponto de* $\mathbb{H}^2 \Leftrightarrow T$ *elíptica;*
2. T *fixa um único ponto de* $fr(\mathbb{H}^2) \Leftrightarrow T$ *parabólica;*
3. T *fixa apenas dois pontos de* $(fr\mathbb{H}^2) \Leftrightarrow T$ *hiperbólica.*

Podemos ver o grupo $Isom(\mathbb{H}^2)$ como um espaço topológico ao considerarmos a **topologia compacto-aberta** induzida de $C(\mathbb{H}^2,\mathbb{H}^2)$. Para mais detalhes sobre a topologia compacto-aberta, veja [13] (pág. 257).

Nesta topologia, uma sequência $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $Isom(\mathbb{H}^2)$ converge para $T \in Isom(\mathbb{H}^2)$ se T_n converge para T uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{H}^2$. Na topologia de $PSL(2,\mathbb{R})$ que é induzida pela topologia de $Isom(\mathbb{H}^2)$, temos que uma sequência $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $PSL(2,\mathbb{R})$ com

$$[T_n] = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$$

converge para

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em $PSL(2,\mathbb{R})$ se, e só se, a_n, b_n, c_n e d_n convergem para a, b, c e d, respectivamente.

Definição 1.3.10 *Um subgrupo* Γ *de* $Isom(\mathbb{H}^2)$ *é* ***discreto*** *se* Γ *é um subconjunto discreto de* $Isom(\mathbb{H}^2)$*, isto é, consiste de pontos isolados em relação à topologia de* $Isom(\mathbb{H}^2)$*. Quando,* Γ *é um subgrupo discreto de* $PSL(2,\mathbb{R})$*, chamamos* Γ *de um* ***grupo fuchsiano****.*

Note que $PSL(2,\mathbb{R})$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Sendo assim, temos que um grupo fuchsiano consiste de pelo menos um número enumerável de elementos.

A importância de se classificar as transformações de $PSL(2,\mathbb{R})$ se torna clara quando consideramos a seguinte proposição:

Proposição 1.3.11 ([21] (pág. 59)) *Os subgrupos cíclicos de* $PSL(2,\mathbb{R})$ *gerados por elementos hiperbólicos ou parabólicos são fuchsianos. Um subgrupo cíclico gerado por elemento elíptico é fuchsiano se, e somente se, for finito.*

Agora consideremos a seguinte definição relacionada a ação de grupos. Para mais detalhes sobre a ação de grupos em variedades recomendamos a leitura da referência [7] (págs. 4-6).

Definição 1.3.12 *Considere a ação de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{G}\times X & \rightarrow & X \\ & \varphi(\varrho,x) & \mapsto & \varrho(x) \end{array}.$$

de um grupo $\mathcal{G}$ *de homeomorfismos agindo em uma variedade diferenciável* X*. Dizemos que a ação de* $\mathcal{G}$ *é* ***propriamente descontínua****, se para todo* $x\in X$ *existe uma vizinhança aberta* $U\subset X$ *tal que* $\varrho(U)\cap U=\emptyset$ *para todo elemento* ϱ *de* $\mathcal{G}$ *diferente da identidade.Além disso, dizemos que a ação de* $\mathcal{G}$ *é* ***livre****, se* $\varrho(x)=x$ *para algum* $x\in X$ *se, e somente se* $\varrho=Id$*;*

A seguir, temos algumas propriedades muito úteis a respeito de grupos fuchsianos.

Proposição 1.3.13 ([25] (pág. 32)) *Dado um subgrupo* Γ *de* $PSL(2,\mathbb{R})$ *são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. Γ *é um grupo fuchsiano;*
2. Γ *age de maneira propriamente descontínua sobre* $\mathbb{H}^2$*;*

Proposição 1.3.14 ([21] (pág. 61)) *Sejam* Γ *um grupo fuchsiano de* $PSL(2,\mathbb{R})$*. Então os pontos fixos por elementos de* Γ*, ou seja, o conjunto*

$$\{z\in\mathbb{H}^2 : \exists\ T\in\Gamma,\ T(z)=z\}$$

é discreto.

1.3.3 Domínio Fundamental e Grupos Co-Compactos

Comecemos esta subseção com a seguinte definição:

Definição 1.3.15 *Seja Γ um grupo fuchsiano. Um subconjunto conexo com interior não vazio $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^2$ é dito* ***domínio fundamental*** *de Γ se satisfizer as seguintes condições:*

1. $\displaystyle\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = \mathbb{H}^2$.

2. $int(\mathcal{D}) \bigcap T(int(\mathcal{D})) = \emptyset$, *para todo* $T \in \Gamma \backslash \{Id\}$.

3. $int(\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

O conjunto $fr(\mathcal{D}) = cl(\mathcal{D}) \setminus int(\mathcal{D})$ é chamado de ***fronteira*** *de $\mathcal{D}$ e a família $\{T(\mathcal{D}) | T \in \Gamma\}$ é dita um* ***ladrilhamento*** *(ou* ***tesselação****) de $\mathbb{H}^2$.*

Note que se $\mathcal{D}$ é um domínio fundamental de Γ então $T(\mathcal{D})$ também o é para todo $T \in \Gamma$.

Definição 1.3.16 *Um domínio fundamental $\mathcal{D}$ de um grupo fuchsiano Γ é dito* ***localmente finito*** *se o ladrilhamento $\{T(\mathcal{D}) | T \in \Gamma\}$ é uma família localmente finita.*

Definição 1.3.17 *Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de $\mathbb{H}^2$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é um* ***polígono fundamental de um grupo fuchsiano*** *Γ quando $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental localmente finito de Γ.*

Um fato importante em relação a domínios fundamentais de um grupo fuchsiano diz respeito à invariância da área. Mais precisamente,

Teorema 1.3.18 ([4] (pág. 205)) *Sejam $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ domínios fundamentais de um grupo fuchsiano Γ, com $\mu(\mathcal{D}_1) < \infty$. Suponha que $\mu(fr(\mathcal{D}_1)) = \mu(fr(\mathcal{D}_2)) = 0$. Então $\mu(\mathcal{D}_1) = \mu(\mathcal{D}_2)$.*

Pela proposição 1.3.14 o conjunto de elementos de $\mathbb{H}^2$ que são fixados por elementos de um grupo fuchsiano Γ é discreto. Isso nos garante que sempre é possível obter um elemento de $\mathbb{H}^2$ que não é fixado por nenhum elemento de $\Gamma \setminus \{Id\}$, ou seja, existe $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(p) \neq p$ para todo $T \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Com isso, apresentamos a seguinte definição:

Definição 1.3.19 *Sejam Γ um grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(p) \neq p$ para todo $T \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Chamamos de* ***domínio de Voronoi-Dirichlet*** *centrado em p o conjunto:*

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(z, p) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z, T(p)), \text{ para todo } T \in \Gamma\}.$$

Considere um grupo fuchsiano Γ e $p \in \mathbb{H}^2$ que não é fixo por elementos de $\Gamma \setminus \{Id\}$.

Dado $T \in \Gamma \setminus \{Id\}$, denotemos por

$$L_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(z,p) = d_{\mathbb{H}^2}(z,T(p))\}.$$

o bissetor perpendicular de p e $T(p)$. Temos que este é a fronteira de

$$H_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(z,p) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z,T(p))\}.$$

Logo, de acordo com a definição 1.3.19, constatamos que

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \bigcap_{T \in \Gamma \setminus \{Id\}} H_p(T).$$

Apresentamos agora um exemplo de domínio de Voronoi-Dirichlet.

Exemplo 1.3.20 *Seja Γ o grupo cíclico gerado por $T(z) = z + 1$. Observe que T é, por definição, parabólico. Desta forma, Γ não possui pontos fixos em $\mathbb{H}^2$. Então seja $p \in \mathbb{H}^2$ um elemento qualquer e defina:*

$$U_p(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |Re(z) - Re(p)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Mostraremos que $U_p(\Gamma)$ é um domínio de Voronoi-Dirichlet de Γ. De fato, podemos constatar que

$$H_p(T) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |Re(z) - Re(p)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

e

$$H_p(T^{-1}) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |Re(z) - Re(p)| \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

de forma que $\mathcal{D}_p(\Gamma) \subseteq U_p(\Gamma)$. Mas dado $z \in \mathbb{H}^2$ com $\frac{1}{2} < Re(z) - Re(p) < \frac{1}{2}$, temos que $Re(T^n(z)) = Re(z) + n$. Logo para, $|n| > 1$, segue que

$$|Re(T^n(z)) - Re(p)| > \frac{1}{2}(|n| - 1) > \frac{1}{2}, \forall |n| > 1.$$

Ou seja, se z for ponto interior de $U_p(\Gamma)$, $T^n(z)$ não o será, a menos que $T^n = Id$. Portanto, $\mathcal{D}_p = U_p(\Gamma)$.

Teorema 1.3.21 ([4] (pág. 227) ou [25] (pág. 54)) *Sejam Γ grupo fuchsiano e $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Voronoi-Dirichlet centrado em p. Então $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é domínio fundamental da ação de Γ.*

Através do conceito de domínio de Voronoi-Dirichlet podemos estabelecer uma relação entre domínios fundamentais, grupos fuchsianos e o conceito de família localmente finita. Podemos verificar este fatos através do resultado abaixo, cuja demonstração pode ser verificada em [21] (pág. 87).

Teorema 1.3.22 *Sejam Γ grupo fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Voronoi-Dirichlet. Então o ladrilhamento $\{T(\mathcal{D}) : T \in \Gamma\}$ é localmente finito.*

Neste momento, veremos qual é a relação entre superfícies de Riemann compactas e grupos fuchsianos. Para isso, consideremos primeiro um resultado que pode ser verificado em [21] (pág. 102).

Teorema 1.3.23 *Seja X uma variedade Hausdorff e Γ um grupo agindo em X como homeomorfismos. Então, o espaço quociente X/Γ é uma variedade Hausdorff e a projeção $\Pi : X \to X/\Gamma$ é uma aplicação de recobrimento se, e só se, a ação de Γ em X e livre e propriamente descontínua. No caso em que X é simplesmente conexo temos que $\pi_1(X/\Gamma) = \Gamma$.*

Consideremos $\Gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ um grupo fuchsiano. Sabemos que os elementos de Γ são isometrias (portanto homeomorfismos) de $\mathbb{H}^2$. Além disso, pela proposição 1.3.13 temos que Γ age de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$. Tendo em vista estes fatos, dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, vamos definir a seguinte relação de equivalência

$$\forall z, w \in \mathbb{H}^2, z \sim_\Gamma w \Longleftrightarrow \exists T \in \Gamma \text{ tal que } w = T(z).$$

Note que, nesta relação, a classe de equivalência de um elemento $z \in \mathbb{H}^2$, denotada por $\Gamma(z)$, é dada por

$$\Gamma(z)\{w \in \mathbb{H}^2; w \sim_\Gamma z\} = \{T(z) : T \in \Gamma\}. \tag{1.16}$$

As classes de equivalência de $\sim_\Gamma$ são denominadas $\Gamma-$**órbitas**. Ou seja, nesta relação, dois pontos são congruentes se, e só se, pertencem a mesma $\Gamma-$órbita.

Isto é, por meio da relação $\sim_\Gamma$, podemos obter uma partição de $\mathbb{H}^2$ de modo que:

$$\mathbb{H}^2 = \dot{\bigcup_{z \in \mathbb{H}^2}} \Gamma(z).$$

Neste caso, o espaço das $\Gamma-$órbitas é dado por:

$$\mathbb{H}^2/\Gamma = \mathbb{H}^2/\sim_\Gamma = \{\Gamma(z) : z \in \mathbb{H}^2\},$$

é um espaço topológico com a topologia induzida pela projeção:

$$\Pi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma. \tag{1.17}$$

Dessa forma, como $\mathbb{H}^2$ é uma superfície Hausdorff e Γ age em $\mathbb{H}^2$ por homeomorfismos segue, pelo teorema 1.3.23, que $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma superfície Hausdorff, a aplicação $\Pi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma aplicação de recobrimento e $\pi_1(\mathbb{H}^2/\Gamma) = \Gamma$, uma vez que $\mathbb{H}^2$ é simplesmente conexo. Isto nos permite demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1.3.24 *Se Γ um grupo fuchsiano, então $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma superfície de Riemann.*

Demonstração: Primeiramente, devemos lembrar que que a topologia quociente em $\mathbb{H}^2/\Gamma$ (ou em qualquer espaço topológico módulo uma relação de equivalência) é a maior topologia que torna a projeção $\Pi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2/\Gamma$ contínua. Sendo assim, pela projeção $\Pi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2/\Gamma$ cada ponto de $\mathbb{H}^2$ é levado em sua classe de equivalência. Temos também que, cada ponto de $\mathbb{H}^2$ possui uma vizinhança V tal que $g(V) \cap V = \emptyset$, para todo $g \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Desta forma, temos que $\Pi(V) = U$ é aberto em $\mathbb{H}^2/\Gamma$ e $\Pi|_V : V \to U$ é um homeomorfismo, cuja a inversa $\Pi|_V^{-1} : U \to V \subset \mathbb{H}^2(\subset \mathbb{C})$ é uma parametrização local. É possível cobrir $\mathbb{H}^2/\Gamma$ por abertos do mesmo tipo de V. Podemos concluir também que as funções de transição correspondem a elementos do grupo Γ. Assim conclui-se que $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma superfície de Riemann.

$\square$

Nosso interesse é estudar as superficies de Riemann compactas que podem ser obtidas meio do quocientes de $\mathbb{H}^2$ por grupos fuchsianos Γ. Baseado nisto, apresentamos resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [25] (págs. 85-86), que nos permite obter informações relacionadas a compacidade da superfície de Riemann dada por $\mathbb{H}^2/\Gamma$, onde Γ é um grupo fuchsiano .

Definição 1.3.25 *Um grupo fuchsiano Γ é dito* ***co-compacto*** *se o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é compacto.*

Teorema 1.3.26 *Um grupo fuchsiano Γ é co-compacto se, e somente se, todo domínio de Voronoi-Dirichlet de Γ for compacto.*

Teorema 1.3.27 *Se Γ é um grupo fuchsiano co-compacto, então Γ não possui elementos parabólicos e $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$.*

A fim de obtermos uma imagem geométrica que estabeleça uma relação entre uma superfície de Riemann $\mathbb{H}^2/\Gamma$ usamos um domínio fundamental da ação de Γ. De fato, se Γ não possui elementos elípticos, a ação de Γ em $\mathbb{H}^2$ é livre, assim sendo a projeção $\Pi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma aplicação de recobrimento. Caso Γ

possua elementos elípticos, a projeção Π não será mais um recobrimento. Mas em todos os casos teremos que os espaços $\mathbb{H}^2/\Gamma$ e $\mathcal{D}_p(\Gamma)/\Gamma$ serão homeomorfos, para qualquer $p \in \mathbb{H}^2$ que não é fixado por elementos de $\Gamma \setminus \{Id\}$. Tal fato é mostrado na referência [21] (pág. 129).

Essas informações nos permitem dizer que a superfície $\mathbb{H}^2/\Gamma$ pode ser considerada como $\mathcal{D}_p(\Gamma)$, com pontos em $fr(\mathcal{D}_p(\Gamma))$ identificadas pelo grupo de recobrimento. Assim, devido ao que foi exposto no teorema 1.3.18, definimos a área de $\mathbb{H}^2/\Gamma$ como sendo igual a área de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$, da mesma forma como é feito em na referência [25] (Seção 3.6).

Por este motivo, faremos um abuso de notação para dentar a área de $\mathbb{H}^2/\Gamma$ por $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma)$. Com isso, temos:

$$\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = \mu(\mathcal{D}_p(\Gamma)). \tag{1.18}$$

Baseado nisto apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.28 ([24] (pág. 59)) *Dada uma superfície de Riemann $R = \mathbb{H}^2/\Gamma$ compacta de gênero $g \geq 2$ temos que sua área hiperbólica, $\mu(R)$, é dada por:*

$$\mu(R) = \mu\Big(\mathbb{H}^2/\Gamma\Big) = 2\pi[(2g-2)] = 4\pi(g-1).$$

Observação 1.3.29 *Na verdade, o resultado acima é consequência de um teorema que estabelece que toda superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ pode ser modelada pelo plano hiperbólico, no sentido de que qualquer superfície compacta de gênero $g \geq 2$ é homeomorfa ao quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ por algum grupo fuchsiano Γ. Para mais detalhes ver [21] (pág. 135).*

1.4 Teoria dos Grafos

Nesta seção, apresentaremos os conceitos básicos relacionados a grafos. Para esta parte, as principais referências utilizadas são [11], [20], [23], [30] e [39].

1.4.1 Grafos

Esta subseção contém um dos conceitos fundamentais de nosso texto, que é a definição de grafo.

Definição 1.4.1 *Um **grafo** G consiste de um par de conjuntos $(V(G), A(G))$, onde:*

- *$V(G)$ é um conjunto não vazio, chamado de **conjunto de vértices de** G;*
- *$A(G)$ é um conjunto de pares ordenados de elementos de $V(G)$, chamado de **conjunto de arestas** G.*

*Os elementos de $V(G)$ são chamados de **vértices** do grafo G, e os elementos de $A(G)$ são chamados de **arestas** do grafo G.*

Em todo o texto iremos considerar apenas grafos finitos, ou seja, os grafos G cujo conjunto $V(G)$ é finito. Sendo assim, $|V(G)|$ e $|A(G)|$ denotarão o número, respectivamente, de vértices e arestas do grafo G.

Dados $v_1, v_2 \in V(G)$ usaremos a notação $\mathcal{A} = [v_1, v_2]$ para indicar a aresta $\mathcal{A}$ pertencente a $A(G)$.

Assim, diremos que os vértices v_1 e v_2 são **vértices extremos** (ou **finais**)da aresta $\mathcal{A} = [v_1, v_2]$.

Outra definição necessária para o texto é a de subgrafo.

Definição 1.4.2 *Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subset V(G)$ e $A(H) \subset A(G)$.*

A relação entre grafos e superfícies se dá através da seguinte definição:

Definição 1.4.3 *Dizemos que um grafo G está **mergulhado** em uma superfície S se este pode ser "desenhado" em S de modo que as arestas tenham interseção comum apenas em seus vértices em comum.*

1.4.2 Classificação de Grafos

Agora iremos apresentar conceitos que nos permitirão extender a definição de grafos.

Por exemplo, considere os seguintes conjuntos:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e } A = \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{A}_1 = [v_1, v_2], & \mathcal{A}_2 = [v_1, v_2], & \mathcal{A}_3 = [v_1, v_4] \\ \mathcal{A}_4 = [v_1, v_4], & \mathcal{A}_5 = [v_2, v_3], & \mathcal{A}_6 = [v_3, v_4] \\ \mathcal{A}_7 = [v_1, v_3], & \mathcal{A}_8 = [v_3, v_5], & \mathcal{A}_9 = [v_5, v_5] \end{array} \right\}$$

Estes conjuntos podem ser relacionados através do diagrama ilustrado na figura 1.5.

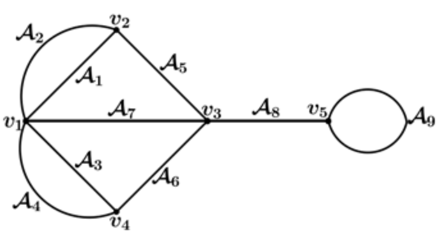

Figura 1.5: Grafo 1.

Podemos verificar também que v_3 é vértice extremo das arestas $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ e $\mathcal{A}_8$. Mais ainda, as arestas $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ e $\mathcal{A}_8$ possuem exatamente um vértice extremo em comum.

Já a aresta $\mathcal{A}_9$ se inicia e termina no mesmo vértice. Isto nos motiva a apresentar as seguintes definições:

Definição 1.4.4 *Em relação as arestas de um grafo G, utilizamos a seguinte classificação:*

1. *Duas arestas (ou mais) são* ***paralelas*** *(ou* ***múltiplas****) se possuem exatamente os mesmos vértices extremos.*
2. *Duas arestas (ou mais) são* ***adjacentes*** *se possuem exatamente um vértice extremo.*
3. *Um* ***laço*** *é uma aresta que possui vértices extremos iguais.*

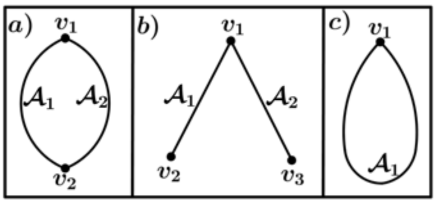

Figura 1.6: *a*) Arestas paralelas; *b*) Arestas adjacentes; *c*) Laço.

Ainda em relação ao exemplo do grafo representado pela figura 1.5, temos que v_2 é vértice extremo de três arestas, assim como o vértice v_4. O vértice v_1 é extremo de cinco arestas e o vértice v_3 é extremo de quatro arestas. Já o vértice v_5 figura três vezes como vértice extremo: uma vez para a aresta $\mathcal{A}_8 = [v_3, v_5]$ e duas vezes para o laço $\mathcal{A}_9 = [v_5, v_5]$.

Este fato nos leva a apresentar a seguinte definição:

Definição 1.4.5 *Dado um grafo G, temos que*

1. *Uma aresta $\mathcal{A} \in A(G)$* ***incide*** *em um vértice $v \in V(G)$ se v é vértice extremo de $\mathcal{A}$.*
2. *Dado $v \in V(G)$, definimos o* ***grau*** *(ou* ***valência****) de v, denotado por $gr(v)$, como*

$$gr(v) = |\{\mathcal{A} \in A(G) : v \text{ é vértice extremo de } \mathcal{A}\}|,$$

   onde $|\{\mathcal{A} \in A(G) : v\text{é vértice extremo de } \mathcal{A}\}|$ denota número de arestas que incidem em v.

3. *Se todos vértices de G tem o mesmo grau, digamos n, então chamamos G de um grafo $n-$****valente*** *(ou $n-$****regular****).*

Exemplo 1.4.6 *Para os vértices v_3 e v_5, na figura 1.5, temos $gr(v_3) = 4$ e $gr(v_5) = 3$.*

Os conceitos apresentados na definição 1.4.5 se fazem necessários pois, por exemplo, parte de nosso trabalho se baseia no uso de grafos trivalentes.

Finalizamos esta subseção com um resultado que relaciona o número de vértices com o número de arestas, através do grau dos vértices de um grafo.

Proposição 1.4.7 *Seja G um grafo. Então:*

$$\sum_{i=1}^{|V(G)|} gr(v_i) = 2|A(G)|.$$

Demonstração: De fato. Seja $\mathcal{A}$ uma aresta com extremos v_m e v_n. Então a aresta $\mathcal{A}$ contribui uma unidade para o grau de v_m e uma unidade para grau de v_n. Isso significa que, cada aresta de G contada exatamente duas vezes quando fazemos o somatório $\displaystyle\sum_{i=1}^{|V(G)|} gr(v_i)$. Portanto, segue o resultado.

$\square$

1.4.3 Rotações de Grafos Trivalentes (σ_3)

Na definição 1.4.5, apresentamos os conceitos de grau de vértices de um grafo. Além disso, na subseção anterior, mencionamos o fato de que nosso estudo é baseado em grafos trivalentes, ou seja, grafos em que todos os vértices tem grau três. Sendo assim, nesta subseção, encerraremos este capítulo apresentando um dos conceitos fundamentais para a obtenção de emparelhamentos: Rotação de um grafo trivalente.

Para que possamos entender este conceito, consideremos um grafo G trivalente e um vértice $v \in V(G)$. Suponha que estamos caminhando sobre as arestas de G e que chegamos ao vértice v por alguma das suas três arestas que incidentes. Assim, para continuar nosso caminho, devemos nos decidir qual das duas outras arestas que incidem e v iremos percorrer.

A decisão em relação qual aresta devemos escolher será tomada com base no modo como o vértice v está representado. Observe a figura 1.7 a seguir.

Na figura 1.7 o vértice v está representado de duas formas distintas. No quadro $a)$ temos a representação de v por um círculo vazio ($\circ$), enquanto que o quadro $b)$ mostra v representado por um círculo preenchido ($\bullet$). Assim, se chegamos em v através da aresta $\mathcal{A}_1$ e v estiver representado por ($\circ$), iremos prosseguir pela aresta $\mathcal{A}_2$. Caso v esteja sendo representado por ($\bullet$), devemos tomar a aresta $\mathcal{A}_3$.

Observe que a escolha de aresta que fizemos, supondo que já passamos pela aresta $\mathcal{A}_1$, é indicada pelas setas do seguimentos pontilhados ilustrados na figura

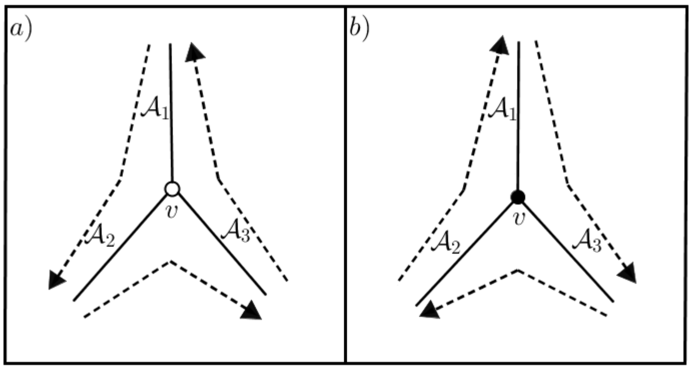

Figura 1.7: Representações do vértice v. Figura reproduzida da página 34 de [36].

1.7. Seguindo a orientação das setas temos e supondo agora que estamos chegando a v pela aresta $\mathcal{A}_3$, devemos tomar a aresta $\mathcal{A}_1$ para a representação de v no quadro a), e a aresta $\mathcal{A}_1$ será a escolhida se estivermos na situação do quadro b).

Desta forma apresentamos a seguinte definição:

Definição 1.4.8 *A representação de vértices trivalentes utilizando os símbolos* ($\circ$) *e* ($\bullet$)*, e tomando como base as direções indicadas pela figura 1.7 é chamada de* ***rotação de grau três.*** *Assim, se G é um grafo trivalente, usaremos a notação* (G, σ_3) *para indicar que os vértices de G estão sendo representados de acordo com a rotação de grau três.*

Exemplo 1.4.9 *Vejamos um exemplo da aplicação da rotação σ_3 no grafo G representado pela figura 1.8. Vamos supor que chegamos ao vértice v_1 por meio*

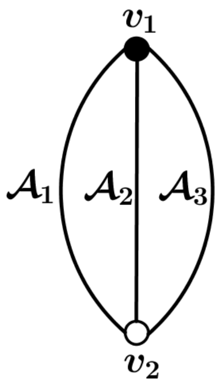

Figura 1.8: Grafo G com a rotação σ_3 reproduzida da página 34 da referência [36].

da aresta $\mathcal{A}_1$. Agora vamos dar início a um caminho começando em v_1. Como chegamos a v_1 por meio de $\mathcal{A}_1$ temos agora a aresta $\mathcal{A}_2$ ou a aresta $\mathcal{A}_3$ como os possíveis trajetos a serem seguidos. De acordo com a rotação do vértice v_1, e com as orientações dadas pela figura 1.7, devemos começar o caminho pela aresta

$\mathcal{A}_3$ que nos leva até o vértice $\mathcal{A}_2$. A rotação do vértice v_2 nos leva até a aresta $\mathcal{A}_2$ como a segunda parte do caminho. Retornamos agora ao vértice v_1. Note que é possível continuar o caminho, de modo a percorremos todas as arestas em dois sentidos. Devido a rotação de v_1 devemos escolher a aresta $\mathcal{A}_1$ como terceira parte do caminho. Continuando desta forma o restante do caminho é dado por

$\mathcal{A}_3$ *: quarta parte do caminho;*

$\mathcal{A}_2$ *: quinta parte do caminho;*

$\mathcal{A}_1$ *: sexta parte do caminho.*

Ao final do sexto passo obtemos um caminho fechado de modo que todas as arestas de G tenham sido percorridas duas vezes em sentidos contrários.

Observação 1.4.10 *Para mais detalhes sobre rotação em grafos trivalentes, recomendamos a leitura da referência [36] (pág. 34).*

Capítulo 2

Discos Extremos

Este capítulo tem como objetivo expor um teorema, originalmente demonstrado em [3], que é válido para qualquer superfície de Riemann S compacta de gênero $g \geq 2$, munida da métrica de Poincaré. Tal resultado apresenta um limitante superior para o raio de um disco métrico imerso em S e um limitante inferior para o raio de um disco que recobre S que dependem apenas do gênero g.

O teorema a ser apresentado é, essencialmente, um problema de empacotamento e coberturas por discos. Por este motivo na seção 2.1 faremos uma exposição destes conceitos. Outro conceito fundamental para o desenvolvimento deste capítulo é o de densidade. As referências utilizadas para elaborar este capítulo foram [2], [3], [6], [8], [9], [15], [16], [17], [19] e [29].

2.1 Empacotamentos e Coberturas

Começaremos esta seção apresentando algumas ferramentas necessários para o estudo da teoria de empacotamento e cobertura de discos. Sendo assim, devido à equivalência entre os dois modelos do plano hiperbólico que adotamos durante o capítulo 1, $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$ serão representados por $\mathbb{E}$ nesta seção.

Definição 2.1.1 *Um* ***domínio*** $\mathcal{D} \in \mathbb{E}$ *é um subconjunto conexo com interior não vazio. Um* ***domínio geodesicamente convexo*** $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}$ *é domínio tal que toda geodésica* $\gamma : [0, l] \to \mathbb{E}$ *com pontos inicial e final* $\gamma(0)$ *e* $\gamma(l)$ *em* $\mathcal{D}$ *está inteiramente contida em* $\mathcal{D}$.

Neste momento apresentamos a definição de empacotamento e coberturas.

Definição 2.1.2 *Sejam* $\mathcal{D}$ *um domínio de* $\mathbb{E}$, *e* $\mathcal{H}$ *um subconjunto de* $\mathbb{E}$. *Dada uma família* $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ *em* $\mathbb{E}$ *de conjuntos isométricos a* $\mathcal{D}$, *dizemos que:*

- $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ *é um* ***empacotamento*** *de* $\mathcal{D}$ *para* $\mathcal{H}$ *se,*

$$int(\mathcal{D}_i) \cap int(\mathcal{D}_k) = \emptyset, \text{ para } i \neq k \text{ e } \bigcup_{i\in I} \mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{H}.$$

Neste caso, dizemos que $\mathcal{H}$ é ***empacotado*** *por $\mathcal{D}$, ou que $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ é um* ***empacotamento para $\mathcal{H}$****.*

- *$\{\mathcal{D}_j\}_{j\in J}$ é uma* ***cobertura*** *de $\mathcal{D}$ para $\mathcal{H}$, se*

$$\bigcup_{j\in J} \mathcal{D}_j = \mathcal{H}.$$

Neste caso, dizemos que $\mathcal{H}$ é ***coberto*** *pelo domínio $\mathcal{D}$, ou que $\{\mathcal{D}_j\}_{j\in J}$ é uma* ***cobertura para $\mathcal{H}$****.*

Em geral, consideramos que os domínios são geodesicamente convexos.

2.2 Densidade

A noção mais importante associada a empacotamentos e coberturas é a de densidade.

Intuitivamente, a noção de densidade está relacionada a razão entre a soma das áreas dos domínios geodesicamente convexos que geram o empacotamento ou cobertura, e a área do espaço que é empacotado ou coberto pelos domínios em questão. Isto é, a noção de densidade de um empacotamento (ou cobertura) é dada por:

$$\text{densidade} = \frac{\text{Soma das áreas dos conj. empacotados(ou cobertos)}}{\text{área do espaço}}.$$

Iremos denotar por D a **densidade de um empacotamento**, e C representará a **densidade de uma cobertura**. Note que, pela definição, a densidade de um empacotamento é sempre menor ou igual a 1. Isso se deve ao fato de que os elementos que geram o empacotamento não podem se sobrepor, isto é, em um empacotamento a área de cada domínio é considerada apenas uma vez. É justamente devido à esta questão de sobreposição de elementos que, para uma cobertura, a densidade C será sempre maior ou igual a 1.

Dado um domínio K, considere a família de todos os empacotamentos ou coberturas para $\mathbb{E}$ consistindo de cópias congruentes de K. Sendo assim,

$$D(K) \leq 1 \leq C(K),$$

onde $D(K)$ denota a **densidade do empacotamento de** K, e $C(K)$ a **densidade da cobertura de** K.

Então, sabendo que as densidades $D(K)$ e $C(K)$ são limitadas, superiormente e inferiormente, respectivamente, podemos pensar na seguinte questão: dada uma família de empacotamentos é possível encontrar uma densidade máxima? Da mesma forma, dada uma família de coberturas é possível selecionar uma densidade que é mínima?

Segundo [17], uma demonstração de que a densidade máxima para empacotamentos é atingida pode ser encontrada no artigo *Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum* de 1963 do matemático Helmut Groemer. Esta densidade máxima é denotada por $D_M(K)$, e chamada de **densidade máxima do empacotamento de** K.

A **densidade mínima de cobertura de** K, $C_m(K)$, é determinada de modo análogo.

2.3 Densidade no Plano Hiperbólico

Verificaremos agora como é tratada a questão da densidade para o plano hiperbólico. A maioria dos conceitos desta seção são definidos utilizando o modelo do plano de Lobatchevsky $\mathbb{H}^2$. Porém tais conceitos também podem ser definidos de maneira análoga para o modelo do disco $\mathbb{D}^2$. Comecemos com a seguinte definição:

Definição 2.3.1 *Um subgrupo discreto* $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^2)$ *é um* ***reticulado*** *se* $\mathbb{H}^2/\Gamma$ *tiver área finita.*

Observação 2.3.2 *Note que, devido ao que foi estabelecido em 1.18 no capítulo 1 podemos dizer que, um subgrupo discreto* Γ *é reticulado se, e só se, para algum (e portanto todo) domínio de Voronoi-Dirichlet* $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ *tiver área finita.*

A seguir, temos as definições de empacotamentos e coberturas associadas as reticulados.

Definição 2.3.3 *Um empacotamento* $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ *de* $\mathbb{H}^2$ *é um* ***empacotamento reticulado****, se para algum domínio* $\mathcal{D}_{i_0}$ *existir um reticulado* Γ *tal que:*

$$\Gamma(\mathcal{D}_{i_0}) = \bigcup_{T\in\Gamma} T(\mathcal{D}_{i_0}) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{D}_i.$$

De maneira análoga, uma cobertura $\{\mathcal{D}_j\}_{j\in J}$ *de* $\mathbb{H}^2$ *é uma* ***cobertura reticulada*** *se para algum domínio* $\mathcal{D}_{j_0}$ *existir um reticulado* Γ *tal que:*

$$\Gamma(\mathcal{D}_{j_0}) = \bigcup_{T\in\Gamma} T(\mathcal{D}_{j_0}) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{D}_j.$$

O motivo de considerarmos a definição 2.3.3 se deve ao fato de que, os empacotamentos e coberturas que serão considerados neste capítulo são reticulados.

Determinar os valores de densidades é um problema diferente para cada conjunto K e cada reticulado Γ em $\mathbb{H}^2$. Devido a este fato, o principal problema da teoria de empacotamentos e coberturas é obter boas estimativas da densidade em termos de limites superiores e inferiores para empacotamentos e/ou coberturas gerados por uma classe de conjuntos geodesicamente convexos, em especial discos. Podemos verificar em [17] (Seção 3.3, Cap. 3) que a definição de densidade em $\mathbb{H}^2$ requer um certo cuidado pois, no caso da geometria hiperbólica por exemplo, para empacotamentos de discos, as densidades não são independentes da escolha das origens dos discos. Para contornar este problema definimos o conceito de densidade local.

A partir de agora, iremos utilizar apenas empacotamentos e coberturas geradas por famílias de discos. Portanto, seja B **um disco de raio** r e considere a família $\mathcal{B}(r) = \{B_i : i \in I\}$ **de discos isométricos a** B.

Definição 2.3.4 *A* ***densidade local*** *de B em $\mathcal{B}(r)$, denotada por $ld_2(B, \mathcal{B}(r))$, é dada pela densidade de B com respeito a seu domínio de Voronoi-Dirichlet $\mathcal{D}$ $(= \mathcal{D}_p(\Gamma))$, isto é,*

$$ld_2(B, \mathcal{B}(r)) := \frac{\mu(B)}{\mu(\mathcal{D})} \quad (< 1),$$

onde $\mathcal{D}$ é o domínio de Voronoi-Dirichlet que contém B.

Podemos constatar que, se $\mathcal{B}(r)$ é um empacotamento reticulado, então a densidade local independe da escolha de $B_i \in \mathcal{B}(r)$, pois neste caso, todos os domínios de Voronoi-Dirichlet são isométricos. Esta é a definição de densidade que adotaremos em $\mathbb{H}^2$.

2.3.1 A Densidade Simplicial

Boa parte da literatura sobre empacotamentos e coberturas se dedica a encontrar limitantes superiores para a densidade local (veja [5], [9], [17] e [22]). O principal limitante que veremos aqui é o da densidade simplicial.

Definição 2.3.5 *Considere em $\mathbb{H}^2$ três discos de mesmo raio r, mutuamente tangentes um entre si. Seus centros determinam um triângulo equilátero $\Delta_r \subset \mathbb{H}^2$ de lados $2r$. A* ***densidade simplicial****, denotada por $\delta_2(r)$, é dada por:*

$$\delta_2(r) = 3\frac{\mu(B \cap \Delta_r)}{\mu(\Delta_r)},$$

onde B é um dos discos em questão.

Observação 2.3.6 *Note que os discos representados pela figura 2.1 estão ligeiramente deslocados para baixo. Isto se deve ao fato de que, a topologia induzida em $\mathbb{H}^2$ pela métrica $d_{\mathbb{H}^2}$ é a mesma do que a induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, dada um disco aberto euclidiano:*

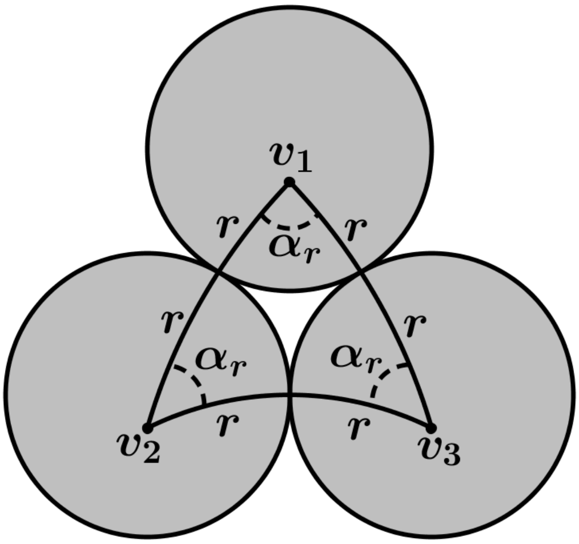

Figura 2.1: Arranjo que ilustra a densidade simplicial.

$$B = \{x \in \mathbb{H}^2 : |x - p| < 1\},$$

com $p = (p_1, p_2)$ *e* $r < p_2$*, temos que:*

$$B = \left\{ x \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(x, p') = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_2 + r}{p_2 - r} \right) \right\},$$

onde $p' = (p_1, p_2')$*, com* $p_2' = \sqrt{p_2^2 - r^2}$*. Ou seja, discos euclidianos também são discos hiperbólicos, embora com centro deslocado e raio alterado. Para mais detalhes, recomendamos a leitura de [21] (pág. 29).*

A definição de $\delta_2(r)$ envolve a área hiperbólica de um disco hiperbólico. Portanto, considerando o teorema 1.2.19, temos a seguinte expressão analítica para a densidade simplicial $\delta_2(r)$:

$$\delta_2(r) = \frac{3\alpha_r(\cosh(r) - 1)}{\pi - 3\alpha_r}, \tag{2.1}$$

onde α_r é o ângulo de um triângulo equilátero de lados igual a $2r$.

A densidade simplicial $\delta_2(r)$ é um limitante universal para empacotamentos de discos. Este fato foi demonstrado em 1978, por Károly Böröczky no artigo Packing of Spheres in Spaces of Constant Curvature. Tal resultado é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.3.7 (Böröczky - 1978) *Para todo empacotamento de discos de mesmo raio* r *em* $\mathbb{H}^2$*, a densidade local de cada disco é majorada por* $\delta_2(r)$*, ou seja,*

$$ld_2(B, \mathcal{B}(r)) \leq \frac{3\alpha_r(\cosh(r) - 1)}{\pi - 3\alpha_r},$$

onde α_r é o ângulo de um triângulo equilátero de lados igual a $2r$.

A demonstração de 2.3.7, pode ser encontrada em [5] pág. 201.

2.3.2 Decomposição de Delaunay

O ladrilhamento do plano hiperbólico por meio dos domínios de Voronoi-Dirichlet geram uma decomposição que chamaremos de **decomposição de Voronoi-Dirichlet**.

Por meio da decomposição de Voronoi-Dirichlet do plano hiperbólico, podemos definir um outro tipo de decomposição que utilizaremos neste capítulo: **decomposição de Delaunay**.

Definição 2.3.8 *Seja v um vértice da decomposição de Voronoi-Dirichlet associado a uma cobertura para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$. Os centros dos domínios de Voronoi-Dirichlet que contém v determinam um círculo centrado em v. O conjunto convexo constituído por todos centros dos domínio de Voronoi-Dirichlet que determinam o círculo de centro v é chamado de* ***célula de Delaunay.*** *Assim, o conjunto de todas as células de Delaunay é chamada de* ***decomposição de Delaunay****.*

Para maiores detalhes recomendamos as referências [2] e [8].

Pela definição 2.3.8, temos que a decomposição de Delaunay é dual a decomposição de Voronoi-Dirichlet. A importância da decomposição de Delaunay se dá através do próximo resultado, demonstrado em 1953 por Fejes Tóth no artigo Kreisüberdeckungen der Hyperbolischen Ebene, referência [3].

Teorema 2.3.9 (Tóth - 1953) *A densidade de toda cobertura de $\mathbb{H}^2$ por discos abertos de mesmo raio r em relação a uma célula de Delaunay é minorado por $\widetilde{\delta}_r$, onde*

$$\widetilde{\delta}_r = \frac{3\alpha'_r(\cosh(r) - 1)}{\pi - 3\alpha'_r}$$

representa a densidade obtida quando consideramos a cobertura de um triângulo Δ_r equilátero de ângulo α'_r inscrito em um círculo de raio r, por três discos de raio r centrado nos vértices de Δ_r.

Podemos verificar a demonstração do teorema 2.3.9 na referência [3] pág. 202.

2.4 Discos Extremos

Nesta seção, apresentaremos e também iremos expor a prova do principal resultado deste capítulo. Tal resultado foi originalmente demonstrado em [3] por Christophe Bavard.

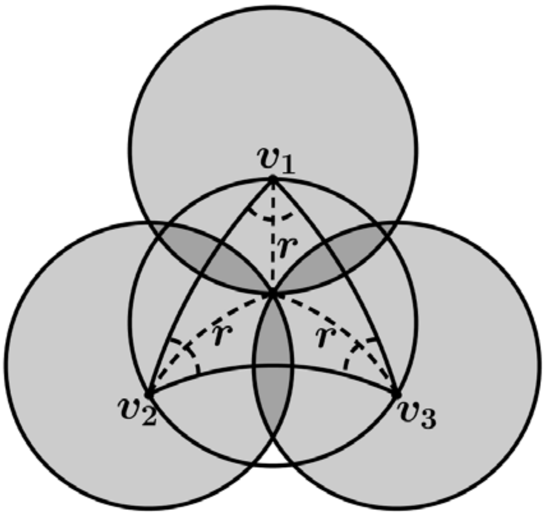

Figura 2.2: Arranjo que ilustra o limitante obtido no teorema 2.3.9.

Primeiramente, vamos considerar dois resultados que serão de grande utilidade durante a demonstração do teorema de Bavard.

Lema 2.4.1 *Seja* Δ *um triângulo hiperbólico equilátero, de ângulo* α *e lado* L*, com* $0 < \alpha < \pi$*. Então,* α *e* L *satisfazem a seguinte igualdade:*

$$2\cosh\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1. \tag{2.2}$$

Demonstração: De fato, observe a figura 2.3 que ilustra um triângulo hiper-

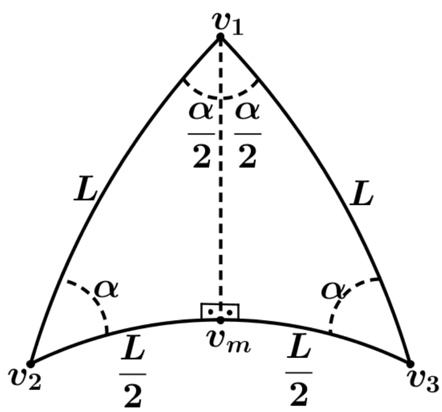

Figura 2.3: Ilustração do triângulo Δ.

bólico equilátero de vértices v_1, v_2, v_3, ângulos iguais a α e lados iguais a L. Considerando a mediatriz relativa ao lado determinado pelos vértices v_2 e v_3 obtemos dois novos triângulos hiperbólicos de ângulos α, $\alpha/2$ e $\pi/2$. Destes triângulos, consideremos o de vértices v_1, v_2 e v_m que denotaremos por Δ'. Em Δ', os lados opostos aos ângulos $\alpha/2$ e $\pi/2$ medem, respectivamente, $L/2$ e L. Assim, utilizando o teorema 1.2.12, temos que:

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{\cos(\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Logo, $2\cosh\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1$.

□

Lema 2.4.2 *Suponha que $\widetilde{\Delta}$ seja um triângulo hiperbólico de ângulos $\widetilde{\alpha}, \pi/3$ e $\pi/2$, com $0<\widetilde{\alpha}<\pi$, cujo lado oposto ao ângulo $\pi/2$ seja igual a $\widetilde{L}$. Então, $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{L}$ satisfazem a igualdade:*

$$\sqrt{3}\cosh(\widetilde{L})\operatorname{tg}(\widetilde{\alpha})=1. \tag{2.3}$$

Demonstração: Considere a figura 2.4 do triângulo Δ'. Então, fazendo nova-

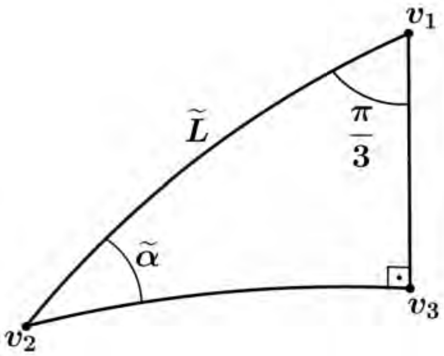

Figura 2.4: Ilustração do triângulo Δ'.

mente o uso do teorema teorema 1.2.12, temos que

$$\begin{aligned}
\cosh(\widetilde{L}) &= \frac{\cos(\widetilde{\alpha})\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\widetilde{\alpha})\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \operatorname{cotg}(\widetilde{\alpha})\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

De 2.4, temos que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}(\widetilde{\alpha})\cosh(\widetilde{L})=1$. Ou seja, $\sqrt{3}\cosh(\widetilde{L})\operatorname{tg}(\widetilde{\alpha})=1$.

$\square$

De posse dos resultados dos lemas 2.4.1 e 2.4.2, iremos utilizar as os conceitos de empacotamento e coberturas para apresentar o último teorema deste capítulo.

No que segue, um disco métrico **mergulhado** em uma superfície de Riemann S é um disco isométrico a um disco de $\mathbb{H}^2$.

Teorema 2.4.3 (Bavard - 1996) *Seja S uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$, e considere $\beta_g = \pi/(12g-6)$. Então:*

1. *Se um disco aberto de raio r é mergulhado em S então:*
$$\cosh(r) \leq \frac{1}{2\operatorname{sen}(\beta_g)}.$$
2. *Se um disco fechado de raio r recobre S então:*
$$\cosh(r) \geq \frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}(\beta_g)}.$$

Demonstração: Primeiramente, devido a observação 1.3.29, temos que S é identificada com o quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ de modo que Γ é um grupo fuchsiano co-compacto. Com isso, temos que $\mathbb{H}^2$ é o recobrimento universal de S. Sendo assim, seja B um disco aberto de raio r mergulhado em S. Desta forma, temos que B é homeomorfo a um disco $\widetilde{B}$ de $\mathbb{H}^2$. Note que, $\widetilde{B}$ é geodesicamente convexo. Assim, considere $\mathcal{B}(r) = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ um empacotamento de $\mathbb{H}^2$, onde B_λ é isométrico a $\widetilde{B}$ (e consequentemente isométrico a B), para todo $\lambda \in \Lambda$. Sendo assim, considerando que c_λ é o centro do disco B_λ defina o seguinte conjunto:

$$\mathcal{D}_\lambda = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(c_\lambda, z) \leq d(T(c_\lambda), z), \forall T \in \Gamma\}.$$

Note que, $\mathcal{D}_\lambda$ é um domínio de Voronoi-Dirichlet da ação de Γ que contém B_λ. Então, a densidade local do empacotamento $\mathcal{B}$ é dada por:

$$ld_2(\widetilde{B}, \mathcal{B}(r)) = \frac{\mu(\widetilde{B})}{\mu(\mathcal{D}_\lambda)}$$

Observe que, o fato de que $\widetilde{B}$ e B serem isométricos, implica que $\mu(\widetilde{B}) = \mu(B)$. Além disso, da equação 1.18, temos $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = \mu(\mathcal{D}_\lambda)$, para qualquer $\lambda \in \Lambda$. Com isso, temos que:

$$ld_2(\widetilde{B}, \mathcal{B}(r)) = \frac{\mu(B)}{\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma)} = \frac{2\pi(\cosh(r)-1)}{2\pi(2g-2)} = \frac{\cosh(r)-1}{2(g-1)}. \tag{2.5}$$

Utilizando o último membro da igualdade 2.5, e o teorema 2.3.7, temos que

$$\begin{aligned}
ld_2(B_i, \mathcal{B}(r)) &\leq \delta_r \\
\frac{\cosh(r) - 1}{2g - 2} &\leq \frac{3\alpha_r(\cosh(r) - 1)}{\pi - 3\alpha_r} \\
\pi - 3\alpha_r &\leq 6\alpha_r(g - 1) \\
\pi &\leq \alpha_r(6g - 3) \\
\alpha_r &\geq \frac{\pi}{6g - 3}. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Para obtermos a primeira desigualdade do teorema usaremos o lema 2.4.1. Note que o triângulo dado pela figura 2.1 é um triângulo hiperbólico equilátero de ângulos α_r e lados iguais a $2r$. Sendo assim, pelo lema 2.4.1 temos que:

$$2\cosh(r)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_r}{2}\right) = 1. \qquad (2.7)$$

Portanto, utilizando as expressões obtidas em 2.6 e 2.7, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_r &\geq \frac{\pi}{6g - 3} \\
\Rightarrow \frac{\alpha_r}{2} &\geq \frac{\pi}{12g - 6} \\
\Rightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_r}{2}\right) &\geq \mathrm{sen}\left(\beta_g\right) \\
\Rightarrow 2\cosh(r)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_r}{2}\right) &\geq 2\cosh(r)\,\mathrm{sen}\left(\beta_g\right) \\
\Rightarrow 1 &\geq 2\cosh(r)\,\mathrm{sen}\left(\beta_g\right).
\end{aligned}$$

Desta forma, conclui-se que $\cosh(r) \leq \dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}(\beta_g)}$. Agora, para demonstrar a segunda desigualdade, iremos considerar B um disco de raio r que gera uma cobertura $\widetilde{\mathcal{B}(r)} = \{B_{\widetilde{\lambda}}\}_{\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}}$, para a superfície S. A esta cobertura, de acordo com a definição 2.3.8, associamos uma decomposição de Delaunay. Note que, tanto a cobertura $\widetilde{\mathcal{B}(r)}$ quanto a decomposição de Delaunay são identificadas no plano $\mathbb{H}^2$ e são invariantes pela ação do grupo fundamental de S, uma vez que, pelo teorema 1.3.23, $\pi_1(S) = \pi_1(\mathbb{H}^2/\Gamma) = \Gamma$. Desta forma, existe uma reunião finita de células de Delaunay $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ que formam um domínio fundamental. Agora, consideremos θ_i como sendo a soma dos ângulos da célula $C_i (i = 1, \ldots, k)$. Note que as células $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ também são cobertas pelos elementos da família $\widetilde{\mathcal{B}(r)}$. Assim, considerando os setores circulares que cobrem a célula $\mathcal{C}_i$, o teorema 1.2.19

e o teorema 2.3.9, obtemos a seguinte relação para a densidade da cobertura $\widetilde{\mathcal{B}(r)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\theta_i(\cosh(r)-1)}{\mu(\mathcal{C}_i)} &\geq \widetilde{\delta}_r \\ \Rightarrow \theta_i(\cosh(r)-1) &\geq \widetilde{\delta}_r \mu(\mathcal{C}_i). \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Observe que, como as células $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ formam um domínio fundamental, seus vértices são identificados em S de forma que $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi$.. Com isso, de 2.8, segue que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \theta_i(\cosh(r)-1) &\geq \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\delta}_r \mu(\mathcal{C}_i) \\ \Rightarrow 2\pi(\cosh(r)-1) &\geq 4\pi(g-1)\widetilde{\delta}_r \\ \Rightarrow \frac{2\pi(\cosh(r)-1)}{4\pi(g-1)} &\geq \frac{3\alpha'_r(\cosh(r)-1)}{\pi-3\alpha'_r} \\ \Rightarrow \frac{\pi}{6g-3} &\geq \alpha'_r. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Agora, precisaremos do lema 2.4.2. Note que, pela pelo fato da cobertura $\widetilde{\mathcal{B}(r)}$, ser invariante pela ação de $\Gamma(\simeq \pi_1(S))$ temos que os a imagens de centros de de discos da família $\widetilde{\mathcal{B}(r)}$ são levados em centros de discos da família $\widetilde{\mathcal{B}(r)}$. Com isso, temos que $\alpha'_r/2$ e r satisfazem o lema 2.4.2. Logo, de 2.9 e 2.3, segue

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{6g-3} &\geq \alpha'_r \\ \beta_g = \frac{\pi}{12g-6} &\geq \frac{\alpha'_r}{2} \\ \sqrt{3}\cosh(r)\operatorname{tg}(\beta_g) &\geq 1.\end{aligned}$$

Ou seja $\cosh(r) \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}(\beta_g)}$.

□

Ainda em relação a este resultado, é possível mostrar que se alguma destas igualdades é atingida por um certo disco, a outra também o será atingida por um disco concêntrico. Também, podemos demonstrar que para todo gênero $g \geq 2$, estes limites são atingidos simultaneamente por certas superfícies modulares.

Uma outra consequência deste teorema é a obtenção de dois invariantes globais de S: a *systole* $l(S)$ e o diâmetro $d(S)$. A *systole*, em superfícies com curvatura negativa, é o menor comprimento de uma geodésica fechada.

Corolário 2.4.4 *Para toda superfície de Riemann S compacta, orientável de* *gênero $g \geq 2$ temos:*

$$\cosh\left(\frac{l(S)}{2}\right) \leq \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,(\beta_g)} \;\; e \; \cosh(d(S)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(\beta_g)},$$

onde $l(S)$ denota a systole *de S e $d(S)$ o diâmetro de S.*

Capítulo 3

Ladrilhamentos Irregulares

O objetivo desde capítulo é utilizar os conceitos da teoria de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos para apresentarmos um exemplo, elaborado durante o período de estudos da dissertação, de ladrilhamento irregular do plano hiperbólico.

Tal ladrilhamento é obtido quando consideramos o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$. Por sua vez, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$ é um polígono hiperbólico irregular que possui 18 arestas, para o qual existe uma circunferência centrada em $int(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}})$ que circunscreve $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$. A garantia da existência de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$ é garantida pelos resultados demonstrados por Ernesto Martinez (1987) em [31]. Utilizando o teorema de Poincaré para emparelhamento de arestas, é possível garantir que o conjunto de isometrias que geram o emparelhamento para $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$, denotado por $\Phi_{\mathcal{F}_{18}}$, gera um grupo discreto de isometrias do plano hiperbólico.

Assim, segundo [1] e [16], podemos obter é uma superfície de Riemann compacta gênero $g \geq 2$ por meio do quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$, onde $\Gamma = \langle \Phi_{\mathcal{F}_{18}} \rangle$.

Além disso, se considerarmos o maior disco que está inscrito em $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$ podemos, futuramente, explorar empacotamentos e/ou coberturas de discos associadas ao ladrilhamento do plano hiperbólico gerado por $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$.

Sendo assim, este capítulo tem como proposta procurar uma nova abordagem para o estudo de emparelhamentos de polígonos hiperbólicos, tendo em vista que o caso de ladrilhamentos gerados por polígonos regulares tem sido explorado em trabalhos como por exemplo [10] e [17].

3.1 Emparelhamento de Arestas

Nesta seção apresentaremos a definição de emparelhamento de arestas de domínios de Voronoi-Dirichlet $\mathcal{D}$ de um grupo fuchsiano Γ. Este conceito é uma das principais ferramentas para o desenvolvimento do próximo capítulo. Desta forma, começaremos com as definições de arestas e vértices de um domínio de Voronoi-Dirichlet.

Definição 3.1.1 *Uma* ***aresta*** *em $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é um segmento geodésico $\mathcal{A}$, pertencente a fronteira de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$, de forma que $\mathcal{A} = \mathcal{D}_p(\Gamma) \cap T(\mathcal{D}_p(\Gamma))$ onde $T \in \Gamma$.*

Definição 3.1.2 *Um* ***vértice*** *v de um domínio de Voronoi-Dirichlet, é um ponto da fronteira de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ que é a interseção de duas arestas, isto é, $v = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, onde $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são arestas de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$.*

Na seção 1.3.3 do capítulo 1 vimos que, dado um grupo fuchsiano $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ podemos definir a seguinte relação de equivalência:

$$\forall z, w \in \mathbb{H}^2, z \sim_\Gamma w \Longleftrightarrow \exists T \in \Gamma \text{ tal que } w = T(z).$$

Vimos também que, nesta relação, a classe de equivalência de um elemento $z \in \mathbb{H}^2$ é dada por:

$$\{w \in \mathbb{H}^2; w \sim_\Gamma z\} = \{T(z); T \in \Gamma\} = \Gamma(z), \tag{3.1}$$

isto é, na relação $\sim_\Gamma$, dois pontos são congruentes se, e só se, pertencem a mesma $\Gamma-$órbita. Neste momento restringiremos a relação $\sim_\Gamma$ ao conjunto de vértices e ao conjunto de arestas de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ e passaremos a estudar as classes de equivalências que são geradas por esta restrição. Assim, considerando as arestas de um domínio de Voronoi-Dirichlet, apresentamos o próximo teorema cuja demonstração decorre da referência [25] (págs. 73-74).

Teorema 3.1.3 *Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Voronoi-Dirichlet $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ contém exatamente dois elementos.*

O teorema 3.1.3 nos mostra que $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ possui um número finito de arestas, e que este número é necessariamente par. Além disso, o teorema acima nos motiva a dar a seguinte definição:

Definição 3.1.4 *Dada uma aresta $\mathcal{A}$ existem uma única outra aresta $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$ e um único elemento $T_\mathcal{A} \in \Gamma$ tal que $T(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$. Dizemos, neste caso, que $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}'\}$ é um par de* ***arestas congruentes*** *e que $T_\mathcal{A}$* ***emparelha*** *o par $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}'\}$. Neste caso dizemos também que $T_\mathcal{A}$ é uma* ***transformação de emparelhamento****.*

Observe que se T emparelha o par $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$, então T^{-1} também emparelha este par de arestas. Baseado nisso, apresentamos um dos teoremas fundamentais para o nosso trabalho.

Teorema 3.1.5 ([25](pág. 74)) *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Voronoi-Dirichlet do grupo fuchsiano Γ. Considere o conjunto $\{T_i : i \in I\}$ de elementos de Γ que emparelham arestas distintas de $\mathcal{D}$. Então $\{T_i : i \in I\}$ é um conjunto de geradores de Γ, isto é $\Gamma = \langle T_i : i \in I\rangle$.*

Outra definição importante em nosso estudo é a definição de ciclo.

Definição 3.1.6 *Um* ***ciclo*** *de um vértice $v \in \mathcal{D}_p(\Gamma)$, denotado por $[v]$, é uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, é um conjunto da forma*

$$[v] = \{T(v) : T \in \Gamma \text{ e } T(v) \text{ são vértices de } \mathcal{D}_p\}.$$

Observação 3.1.7 *Note que, sendo Γ um grupo fuchsiano, o teorema 1.3.22 nos garante que o ladrilhamento $\{T(\mathcal{D}_p(\Gamma))\}$ é localmente finito. Portanto, para um domínio de Voronoi-Dirichlet, temos que os ciclos são finitos. Neste caso, dado $v \in \mathcal{D}_p(\Gamma))$ temos que:*

$$[v] = \{v_1, \ldots, v_r\},$$

para algum $r \in \mathbb{N}^*$.

A observação 3.1.7 motiva a seguinte definição:

Definição 3.1.8 *Seja v um vértice de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$. O* ***ângulo total*** *do ciclo $[v] = \{v_1, \ldots, v_r\}$ é dado por*

$$\theta[v] = \sum_{i=1}^{r} \theta_i,$$

onde θ_i corresponde ao ângulo de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ em v_i, para todo $1 \leq i \leq r$.

O próximo resultado relaciona a soma dos ângulos de vértices de um ciclo com a ordem do estabilizador do vértice.

Teorema 3.1.9 ([4] (pág. 221)) *Seja $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Voronoi-Dirichlet de Γ. Sejam $v_1, \ldots, v_r$ vértices de um ciclo e sejam $\theta_1, \ldots, \theta_r$ os ângulos internos nos respectivos vértices. Então, se denotarmos por m a ordem do estabilizador em Γ de um dos vértices do ciclo, temos:*

$$\theta_1 + \ldots + \theta_r = \frac{2\pi}{m}.$$

Assim, chegamos a definição de emparelhamento.

Definição 3.1.10 *Seja $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^2$ um polígono fechado convexo, considerando $A(\mathcal{P})$ como sendo o conjunto de arestas de $\mathcal{P}$, um* ***emparelhamento*** *de arestas de $\mathcal{P}$ é um conjunto $\Phi = \{T_{\mathcal{A}} | \mathcal{A} \in A(\mathcal{P})\}$ de isometrias que, para toda aresta $\mathcal{A}$ pertencentes a $A(\mathcal{P})$ cumpre as seguintes condições:*

1. *existe aresta $\mathcal{A}' \in A(\mathcal{P})$ tal que $T_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$;*
2. *as isometrias $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{A}'}$ satisfazem a relação $T_{\mathcal{A}'} = T_{\mathcal{A}}^{-1}$;*
3. *se $\mathcal{A}$ for uma aresta de P, então $\mathcal{A}' = \mathcal{P} \cap T_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{P})$.*

3.2 O Teorema de Poincaré para Emparelhamento de Arestas de um Polígono Hiperbólico

A partir das condições da definição 3.1.10, podemos constatar que $\mathcal{A}'$ é unicamente determinada por $\mathcal{A}$, isto é $(\mathcal{A}')'$, e $T_{\mathcal{A}} \neq Id$ para todas as arestas $\mathcal{A} \in A(\mathcal{P})$. Nestas circunstâncias, temos que $\mathcal{A}$ são emparelhadas por $T_{\mathcal{A}}$. A posteriori, é possível verificar que, se Φ gera um grupo fuchsiano, então podemos considerar $\mathcal{P}$ como um domínio de Voronoi-Dirichlet do grupo $\Gamma = \langle \Phi \rangle$.

Dizemos que dois pontos $z_1, z_2 \in \mathcal{P}$ são emparelhados se existir $\mathcal{A} \in A(\mathcal{P})$ tal que $T_{\mathcal{A}}(z_2) = z_1$. Sendo assim, temos que $z_1 \sim_\Gamma z_2$. Observe que dois pontos $z, w \in \mathcal{P}$ estão relacionados segundo a relação $\sim_\Gamma$ se, e só se, existe uma sequência finita $z_1, \ldots, z_m \in \mathcal{P}$ tal que:

$$z = z_1 \sim_\Gamma \ldots \sim_\Gamma z_m = w.$$

Da terceira condição da definição 3.1.10, segue que, se z for um ponto interior de $\mathcal{P}$, então $[z] = \{z\}$. E da segunda condição da definição de emparelhamento de arestas, segue que um ponto z exterior a uma aresta $\mathcal{A} \in A(\mathcal{P})$, está relacionada apenas com o ponto com o qual é emparelhado, $[z] = \{z, T_{\mathcal{A}'}(z)\}$.

Consideramos em $\mathcal{P}$ a métrica induzida de $\mathbb{H}^2$ e com isto o conjunto das classes de equivalência $\mathcal{P}/\sim_\Gamma = \mathcal{P}/\Gamma$ é dotado de uma topologia quociente. Com isso, encerramos esta seção apresentando o teorema de Poincaré para emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Poincaré) *Sejam $\mathcal{P}$ um polígono fechado convexo em $\mathbb{H}^2$ e $\Phi = \{T_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in A(\mathcal{P})\}$ um emparelhamento de arestas e $\Gamma = \langle \Phi \rangle$, o grupo gerado pelas funções de emparelhamento. Se todo ciclo de vértices $[v]$ é finito e tem ângulo total $\theta[v] = 2\pi$, então o grupo Γ é discreto e $\mathcal{P}$ é domínio fundamental de Γ.*

A demonstração deste teorema pode ser verificada em [21] (pág. 100).

3.3 Existência de Polígonos Hiperbólicos Inscritos em Circunferências

Apresentaremos agora três resultados que nos permitem garantir, sob certas condições, polígonos hiperbólicos inscritos em circunferências. Toda esta seção tem como base a referência [31].

Uma condição necessária para a existência de um polígono hiperbólico com ângulos $\theta_i, \quad i = 1, ..., n$ é

$$\Theta = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i > 0. \tag{3.2}$$

Se algum dos ângulos é nulo, então o raio da circunferência circunscrita é infinito e, portanto, todo ângulo deve ser nulo. Desta forma, iremos considerar que

$$0 < \theta_i < \pi, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.3}$$

As condições dadas em 3.2 e 3.3, estão relacionadas com a área do polígono $\mathcal{P}$.

Podemos verificar, por exemplo, que a expressão 3.2 é a mesma expressão que aparece no corolário 1.2.18 do capítulo 1.

Denotemos por $\sum_I$ a soma dos ângulos θ_i, para i ímpar, e por $\sum_P$ a soma dos ângulos θ_i, para i par. Agora, vamos definir a seguinte soma alternada:

$$\xi_i = \theta_i - \theta_{i-1} + \theta_{i-2} - \theta_{i-3} + \ldots \pm \theta_1, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Observe que, pela definição de ξ, temos:

$$\xi_i = \theta_i - \xi_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.5}$$

Definimos também o seguinte conjunto

$$\mathcal{M}_\xi = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left(\bigcap_{i,\text{IMPAR}} \left(\xi_i - \frac{\pi}{2}, \xi_i\right) \right) \cap \left(\bigcap_{i,\text{PAR}} \left(-\xi_i, \frac{\pi}{2} - \xi_i\right) \right).$$

Considerando os fatos e as expressões definidas acima, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1 *(Martinez 1, 1987) Dada uma coleção ordenada de ângulos $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ que satisfazem as condições 3.2 e 3.3 existe um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ tal que θ_i é o ângulo do vértice v_i para todo $1 \leq i \leq n$, inscrito em uma circunferência de centro $O \in int(\mathcal{P})$ se, e somente se:*

a) *Se n é ímpar, então $\dfrac{\sum_I - \sum_P}{2} \in \mathcal{M}_\xi$.*

b) *Se n é par, então $\sum_I = \sum_P$ e $\mathcal{M}_\xi \neq \emptyset$. Neste caso, para qualquer parâmetro pertencente a $\mathcal{M}_\xi$ podemos construir um polígono.*

Demonstração: Primeiramente, suponha que exista tal polígono. Desta forma, de acordo com a figura 3.1, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_n = \theta_1 \\ \beta_{i-1} + \beta_i = \theta_i \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n. \tag{3.6}$$

O sistema 3.6 está definido para $0 < \beta_i \leq \dfrac{\pi}{2}$, $i = 1, \dots, n$ uma vez que $\beta_i \geq \dfrac{\pi}{2}$ implica que a área do triângulo de ângulos β_i será negativa. Consideremos agora as seguintes afirmações:

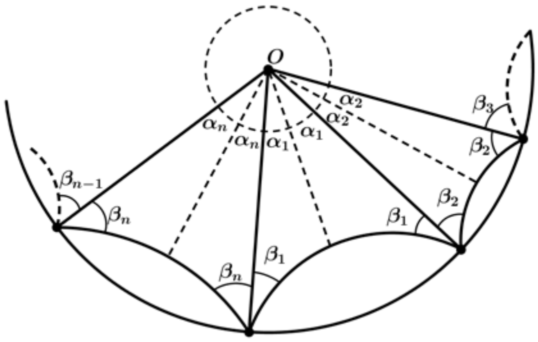

Figura 3.1: Polígono com ângulos θ_i inscrito em uma circunferência. Figura reproduzida da página 93 de [31].

Afirmação I: *A solução do sistema 3.6 é dada por*

$$\beta_i = \xi_i - \beta_n, \quad \textit{para } i \textit{ ímpar} \tag{3.7}$$
$$\beta_i = \xi_i + \beta_n, \quad \textit{para } i \textit{ par.} \tag{3.8}$$

De fato, por definição, temos que $\beta_1 + \beta_n = \theta_1$. Assim, como $\xi_1 = \theta_1$ temos que $\beta_1 = \theta_1 - \beta_n$. Utilizando β_1 e o fato de que $\beta_1 + \beta_2 = \theta_2$, temos

$$\beta_2 = \theta_2 - \beta_1 \overset{\beta_1=\theta_1-\beta_n}{=} \theta_2 - \xi_1 + \beta_n \overset{3.6}{=} \xi_2 + \beta_n.$$

Da mesma forma, utilizando β_2, conclui-se que $\beta_3 = \xi_3 - \beta_n$. De modo geral, utilizando-se o fato de que $\beta_i = \xi_i - \beta_{i-1}$, temos, por recorrência, que

$$\beta_i = \xi_i + (-1)^i \beta_n. \tag{3.9}$$

Desta forma,temos que $\beta_i = \xi_i - \beta_n$, para i ímpar, e $\beta_i = \xi_i + \beta_n$, para i par.
Afirmação II:

- *Se n é ímpar, então* $\dfrac{\sum_I - \sum_P}{2} = \beta_n$.
- *Se n é par, então* $\sum_I = \sum_P$.

De fato, se n é ímpar, então $n = 2m + 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo:

$$\begin{aligned} \sum_I - \sum_P &= (\theta_{2m+1} + \theta_{2m-1} + \ldots + \theta_3 + \theta_1) - (\theta_{2m} + \theta_{2m-2} + \ldots + \theta_4 + \theta_2) \\ &= \theta_{2m+1} - \theta_{2m} + \theta_{2m-1} - \theta_{2m-2} + \ldots + \theta_3 - \theta_2 + \theta_1 \\ &= \xi_{2m+1} = \xi_n. \end{aligned}$$

Se n é par, então $n = 2m$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo:

$$\begin{aligned}\sum_I - \sum_P &= (\theta_{2m-1} + \theta_{2m-3} + \ldots + \theta_3 + \theta_1) - (\theta_{2m} + \theta_{2m-2} + \ldots + \theta_4 + \theta_2) \\ &= -\theta_{2m} + \theta_{2m-1} - \theta_{2m-2} + \theta_{2m-3} - \ldots + \theta_3 - \theta_2 + \theta_1 \\ &= -\xi_{2m} = -\xi_n.\end{aligned}$$

Desta forma, de 3.7 e 3.8 segue que

- $\sum_I - \sum_P = \xi_n \overset{3.7}{=} \beta_n + \beta_n = 2\beta_n$, se n é ímpar.

- $\sum_I - \sum_P = -\xi_n \overset{3.8}{=} \beta_n - \beta_n = 0$, se n é par.

Assim, pelas afirmações I e II, o sistema 3.6 possui uma única solução se n é ímpar. E, no caso em que n é par, o sistema 3.6 será possível e indeterminado, de modo que β_n pode ser tomado como parâmetro.
Recordando que $0 < \beta_i \leq \dfrac{\pi}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, de 3.7 e 3.8 segue que:

$$\xi_i - \frac{\pi}{2} < \beta_n < \xi_i, \quad \text{para } i \text{ impar} \tag{3.10}$$

$$-\xi_i < \beta_n < \frac{\pi}{2} - \xi_i, \quad \text{para } i \text{ par.} \tag{3.11}$$

Assim, temos que $\beta_n \in \mathcal{M}_\xi$ para n par ou ímpar, ou seja $\mathcal{M}_\xi = \emptyset$. Portanto, se n é ímpar $\beta_n = \dfrac{\sum_I - \sum_P}{2}$ pertence a $\mathcal{M}_\xi$. Se n é par, $\sum_I = \sum_P$ e β_n pode ser tomado como sendo um parâmetro qualquer de $\mathcal{M}_\xi$. Provaremos agora que as condições a) e b) do teorema são suficientes. Se n é ímpar, seja $\beta_n = \dfrac{\sum_I - \sum_P}{2}$, e, se n é par, tome β_n um valor qualquer de $\mathcal{M}_\xi$. Assim, defina os ângulos β_i como em 3.7 e 3.8. Queremos garantir a existência de $t_0 > 0$ de forma que os triângulos, como o ilustrado a seguir pela figura 3.2,

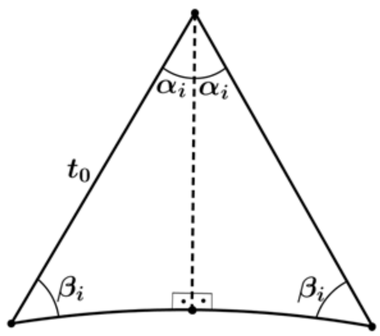

Figura 3.2: Decomposição do Polígono $\mathcal{P}$ em triângulos. Figura reproduzida da página 94 de [31].

atendam a condição de que $\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_{i,t_0} = 2\pi$, ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,t_0} = \pi. \tag{3.12}$$

Desta forma, a existência de t_0 nos assegurará a existência de n triângulos ($\Delta'_{i,t_0}s$) que colocados lado a lado ao redor de um ponto $O \in \mathbb{D}^2$ darão origem ao polígono $\mathcal{P}$. Note que, pelo teorema 1.2.12, temos que:

$$\cosh(t_0) = \operatorname{cotg}(\alpha_{i,t_0}) \operatorname{cotg}(\beta_i) \Rightarrow \alpha_{i,t_0} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\beta_i)}{\cosh(t_0)}\right). \tag{3.13}$$

Assim, levando em consideração que a área de triângulo Δ_{i,t_0} é dada por $\mu(\Delta_i) = \pi - 2(\alpha_{i,t_0} + \beta_i)$, temos:

$$\alpha_{i,t_0} = \frac{\pi}{2} - \beta_i - \frac{\mu(\Delta_{i,t_0})}{2}. \tag{3.14}$$

De 3.14 segue que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\beta_i)}{\cosh(t_0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,t_0} &= \frac{n\pi}{2} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(\Delta_{i,t_0})}{2} \\ &= \\ &= \pi + \frac{\Theta}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(\Delta_{i,t_0})}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\beta_i)}{\cosh(t_0)}\right) = \pi + \frac{\Theta}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(\Delta_{i,t_0})}{2}. \tag{3.15}$$

Observe que $\mu(\Delta_{i,t_0}) = 0$, caso em que os triângulos são degenerados, é equivalente a termos $t_0 = 0$. Ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}(\beta_i)\right) = \pi + \frac{\Theta}{2}. \tag{3.16}$$

Desta forma, considere a função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\beta_i)}{\cosh(t)}\right).$$

Note que F é contínua. Além disso:

$$F'(t) = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\beta_i)\operatorname{senh}(t)}{1 + \operatorname{cotg}^2(\beta_i)}\right).$$

Assim, temos que $F'(t) \leq 0$ para $t \geq 0$. Isto é, F é decrescente, para $t \geq 0$.

Verificamos também que $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$ e, de 3.15, segue que $F(0) = \pi + \frac{\Theta}{2}$. Assim, existe um valor $r > 0$ tal que $F(r) = \pi$. Logo, existem $\alpha_{i,r}$ de forma que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,r} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\beta_i)}{\cosh(t)}\right) = \pi.$$

Portanto, temos garantida a existência de triângulos como os da figura 3.2, que colocados lado a lado ao redor de um ponto O determinam o polígono $\mathcal{P}$.

$\square$

Observe que os polígonos construídos são geodesicamente convexos.

Além deste teorema, podemos verificar resultados análogos para o caso em que se garante a existência de polígonos $\mathcal{P}$ inscritos em circunferências cujo centro pertence a $fr(\mathcal{P})$ e para o caso em que o centro está situado no exterior de $\mathcal{P}$. Apresentaremos este resultados deixando as demonstrações para serem verificadas em [31](págs. 94-97).

Teorema 3.3.2 (Martinez 2, 1987) *Dada uma coleção ordenada de ângulos θ_i que satisfazem as condições 3.2 e 3.3, existe um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ com ângulos θ_i em seus vértices inscrito em uma circunferência de centro $O \in fr(\mathcal{P})$ se, e somente se, $\sum_I = \sum_P$ e se para todo $i < n$, $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Consideremos agora o seguinte conjunto:

$$\mathcal{M}_\xi^* = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left(\bigcap_{i,\text{IMPAR}} \left(-\xi_i, \frac{\pi}{2} - \xi_i\right)\right) \cap \left(\bigcap_{i,\text{PAR}} \left(\xi_i - \frac{\pi}{2}, \xi_i\right)\right).$$

Teorema 3.3.3 (Martinez 3, 1987) *Dada uma coleção ordenada de ângulos θ_i que satisfazem as condições 3.2 e 3.3 existe um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ com ângulos θ_i em seus vértices inscrito em uma circunferência de centro $O \notin \mathcal{P}$ se, e somente se,*

a) *n é ímpar, então $\beta = (\sum_P - \sum_I) \in \mathcal{M}_\xi^*$ e $\operatorname{tg}(\beta)$ é menor que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cotg}(\beta_i)\right)^{-1}.$$

b) *n é par, então $\sum_P = \sum_I$ e $\mathcal{M}_\xi^* \neq \emptyset$. E neste caso para cada $\beta \in \mathcal{M}_\xi^*$ com*

$$\operatorname{tg}(\beta) < \left(\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cotg}(\beta_i)\right)^{-1}$$

existe um polígono.

3.4 Ladrilhamento Irregular

Baseado nos teoremas apresentados nas seções anteriores deste capítulo, criamos durante nossa pesquisa um emparelhamento para um polígono hiperbólico irregular de 18 arestas que atende as condições do Teorema de Poincaré. Sendo assim, apresentamos um ladrilhamento irregular constituída de domínios de Voronoi-Dirichlet com 18 arestas. Para isso considere a coleção $\mathcal{F}_{18} = \{\theta_i\}_{i=1}^{18}$ onde

- $\theta_1 = \theta_4 = \theta_7 = \theta_8 = \theta_{13} = \theta_{14} = \theta_{15} = \theta_{18} = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\theta_3 = \theta_9 = \theta_{12} = \theta_{16} = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\theta_2 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_{10} = \theta_{11} = \theta_{17} = \dfrac{2\pi}{3}$;

Note que $0 < \theta_i < \pi, \quad i = 1, \ldots, 18$. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{18} \theta_i = 8\pi. \tag{3.17}$$

Assim, temos que

$$\Theta = (18-2)\pi - \sum_{i=1}^{18} \theta_i = 16\pi - 8\pi > 0. \tag{3.18}$$

Portanto, a coleção $\mathcal{F}_{18}$ satisfaz as condições 3.2 e 3.3.

Considerando $\sum_I$ e $\sum_P$ como sendo, respectivamente, a soma dos ângulos de índices ímpares e a soma dos ângulos de índices pares de $\mathcal{F}_{18}$, temos

$$\sum_I = \sum_P = 4\pi. \tag{3.19}$$

Já as somas alternadas, definidas em 3.3, para $\mathcal{F}_{18}$ são dadas por:

Índices Ímpares:

$\xi_1 = \dfrac{\pi}{4}$; $\xi_3 = \dfrac{\pi}{12}$; $\xi_5 = \dfrac{\pi}{2}$; $\xi_7 = \dfrac{\pi}{12}$; $\xi_9 = \dfrac{\pi}{3}$; $\xi_{11} = \dfrac{\pi}{3}$; $\xi_{13} = \dfrac{\pi}{12}$; $\xi_{15} = \dfrac{\pi}{12}$; $\xi_{17} = \dfrac{\pi}{4}$.

Índices Pares:

$$\xi_2 = \frac{5\pi}{12};\ \xi_4 = \frac{\pi}{6};\ \xi_6 = \frac{\pi}{6};\ \xi_8 = \frac{\pi}{6};\ \xi_{10} = \frac{\pi}{3};\ \xi_{12} = \frac{\pi}{6};\ \xi_{14} = \frac{\pi}{6};\ \xi_{16} = \frac{5\pi}{12};\ \xi_{18} = 0.$$

Desta forma, considerando os intervalos

$$\left(\xi_i - \frac{\pi}{2}, \xi_i\right), \text{ para } i \text{ ímpar}$$

e

$$\left(-\xi_i, \frac{\pi}{2} - \xi_i\right), \text{ para } i \text{ par},$$

temos que o conjunto μ_ξ para $\mathcal{F}_{18}$ é dado por:

$$\mathcal{M}_\xi = \left(0, \frac{\pi}{12}\right).$$

Assim, pelo teorema 3.3.1, existe um polígono hiperbólico $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$ de 18 arestas, tais que seus ângulos são dados pela coleção ordenada $\mathcal{F}_{18}$.[1]

De posse do polígono $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$, seja $A(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}) = \{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{18}$ o conjunto de suas arestas e considere os seguintes pares de arestas.

$$\begin{bmatrix} \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_6\} & \{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_9\} & \{\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_{12}\} \\ \{\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_{17}\} & \{\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_{10}\} & \{\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_{14}\} \\ \{\mathcal{A}_8, \mathcal{A}_{15}\} & \{\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{16}\} & \{\mathcal{A}_{13}, \mathcal{A}_{18}\} \end{bmatrix}$$

Note que, de acordo com os ângulos de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$, as arestas que estão no mesmo par possuem o mesmo comprimento. Assim, podemos garantir a existência de um conjunto $\Phi_{\mathcal{F}_{18}}$ de isometrias de $\mathbb{D}^2$

$$\Phi_{\mathcal{F}_{18}} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_7, T_8, T_{11}, T_{13}\}$$

tais que:

$$\begin{array}{lll} T_1(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_6; & T_2(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_9; & T_3(\mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_{12}; \\ T_4(\mathcal{A}_4) = \mathcal{A}_{17}; & T_5(\mathcal{A}_5) = \mathcal{A}_{10}; & T_7(\mathcal{A}_7) = \mathcal{A}_{14}; \\ T_8(\mathcal{A}_8) = \mathcal{A}_{15}; & T_{11}(\mathcal{A}_{11}) = \mathcal{A}_{16}; & T_{13}(\mathcal{A}_{13}) = \mathcal{A}_{18}. \end{array}$$

Nestas circunstâncias temos que, pela definição, $\Phi_{\mathcal{F}_{18}}$ é um emparelhamento de arestas para o polígono $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$. Neste caso, $\Phi_{\mathcal{F}_{18}}$ gera quatro ciclos de vértices, dados por:

[1] O teorema também garante existência de uma circunferência circunscrita a $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$ cujo centro se encontra no interior deste polígono

- $[v_1] = \{v_1, v_3, v_7, v_9, v_{13}, v_{15}\}$;

- $[v_4] = \{v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{18}\}$;

- $[v_2] = \{v_2, v_6, v_{10}\}$;

- $[v_5] = \{v_5, v_{11}, v_{17}\}$.

Calculando os ângulos totais de cada ciclo de vértices, temos

$$\theta[v_1] = \theta[v_2] = \theta[v_4] = \theta[v_5] = 2\pi.$$

Desta forma, pelo teorema de Poincaré, segue que o grupo

$$\Gamma = \langle \Phi_{\mathcal{F}18} \rangle.$$

é um grupo discreto e que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$ é um domínio fundamental da ação de Γ.

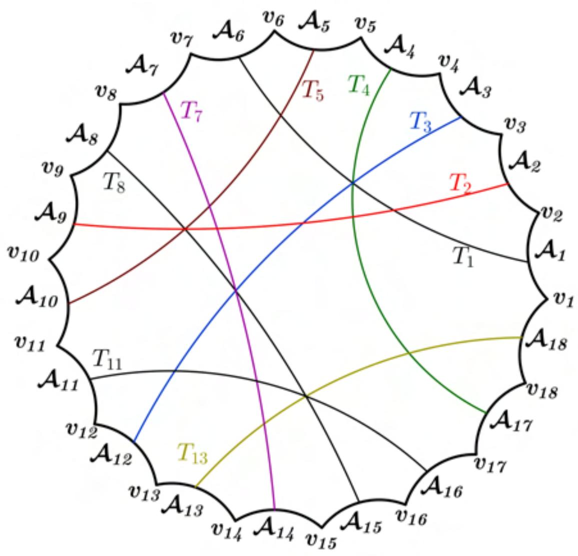

Figura 3.3: Ilustração do emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$.

Acreditamos que o emparelhamento descrito para o polígono $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{18}}$ possa ser generalizado para polígonos que tenham $12\eta - 6$ arestas com $\eta \geq 2$. Por isto apresentamos a seguinte conjectura:

Conjectura 3.4.1 *Para cada $\lambda \geq 2$ existam polígonos com $12\lambda - 6$ arestas, que determinam grupos fuchsianos ao serem emparelhadas de acordo com a regra:*

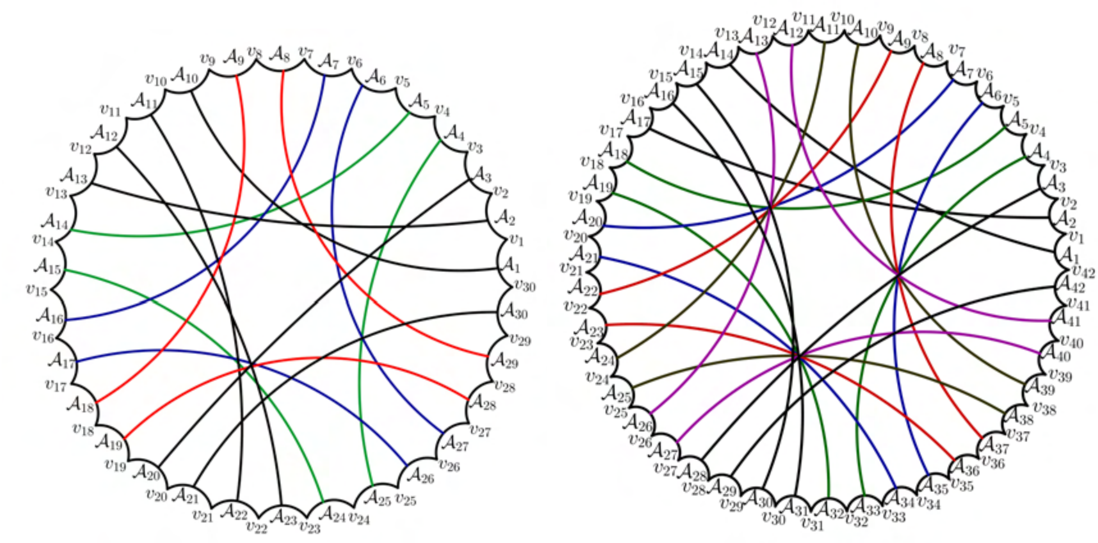

Figura 3.4: Da esquerda para a direita: Emparelhamento correspondente ao exemplo 3.4.2; Emparelhamento correspondente ao exemplo 3.4.3

- $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{4\lambda-2}\}, \{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{4\lambda+1}\}, \{\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_{8\lambda-4}\}, \{\mathcal{A}_{4\lambda-1}, \mathcal{A}_{8\lambda-2}\}, \{\mathcal{A}_{4\lambda}, \mathcal{A}_{8\lambda-1}\}$

- *Para* $4 \leq n \leq 4\lambda - 3$ *temos os pares* $\begin{cases} \{\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+4\lambda-3}\}, & \textit{se } n \textit{ é impar} \\ \{\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+8\lambda-3}\}, & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$

- $\{\mathcal{A}_{2n+4\lambda+3}, \mathcal{A}_{2n+8\lambda}\}$, *se* $0 \leq n \leq 2\lambda - 3$.

Exemplo 3.4.2 *Para* $\lambda = 3$ *teremos um polígono com* 30 *lados. Segundo a regra de emparelhamento apresentada, temos os seguintes pares de arestas:*

$$\begin{cases} \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{10}\}, & \{\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_{27}\}, & \{\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{23}\} \\ \{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{13}\}, & \{\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_{16}\}, & \{\mathcal{A}_{15}, \mathcal{A}_{24}\} \\ \{\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_{20}\}, & \{\mathcal{A}_8, \mathcal{A}_{29}\}, & \{\mathcal{A}_{17}, \mathcal{A}_{26}\} \\ \{\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_{25}\}, & \{\mathcal{A}_9, \mathcal{A}_{18}\}, & \{\mathcal{A}_{19}, \mathcal{A}_{28}\} \\ \{\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_{14}\}, & \{\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}\}, & \{\mathcal{A}_{21}, \mathcal{A}_{30}\} \end{cases}$$

Exemplo 3.4.3 *Para* $\lambda = 4$ *teremos um polígono com* 42 *lados. Segundo a regra de emparelhamento apresentada, temos os seguintes pares de arestas:*

$$\begin{cases} \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{14}\}, & \{\mathcal{A}_8, \mathcal{A}_{37}\}, & \{\mathcal{A}_{16}, \mathcal{A}_{31}\} \\ \{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{17}\}, & \{\mathcal{A}_9, \mathcal{A}_{22}\}, & \{\mathcal{A}_{19}, \mathcal{A}_{32}\} \\ \{\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_{28}\}, & \{\mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}_{39}\}, & \{\mathcal{A}_{21}, \mathcal{A}_{34}\} \\ \{\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_{33}\}, & \{\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{24}\}, & \{\mathcal{A}_{23}, \mathcal{A}_{36}\} \\ \{\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_{18}\}, & \{\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{41}\}, & \{\mathcal{A}_{25}, \mathcal{A}_{38}\} \\ \{\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_{35}\}, & \{\mathcal{A}_{13}, \mathcal{A}_{26}\}, & \{\mathcal{A}_{27}, \mathcal{A}_{40}\} \\ \{\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_{20}\}, & \{\mathcal{A}_{15}, \mathcal{A}_{30}\}, & \{\mathcal{A}_{29}, \mathcal{A}_{42}\} \end{cases}$$

Capítulo 4

Cirurgias, Emparelhamentos e Árvores de Balão

Neste capítulo, apresentamos uma ferramenta para auxiliar na busca de grafos associados a emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos. Veremos que é fácil obter famílias de grafos com um número de vértices pré determinado.

Sejam M_1 e M_2 duas superfícies distintas, compactas, conexas e orientáveis. Iremos supor que G_1 e G_2 sejam grafos, que chamaremos de **grafos de emparelhamento**, imersos em M_1 e M_2, respectivamente. Podemos construir uma soma conexa "especial" entre M_1 e M_2 chamada de **cirurgia $\mathcal{S}_1$** . Mais detalhes sobre a cirurgia $\mathcal{S}_1$ podem ser verificados na referência [14], que é onde tal conceito é originalmente apresentado.

Além disso, outra importante ferramenta que utilizaremos neste capítulo, e que também é originalmente apresentada por [14], é o de **ponte livre**.

Sendo assim, [14] é uma das principais referências deste capítulo. Outras referências que também foram utilizadas para esta parte do texto são [32] e [36]. Iniciamos apresentado algumas propriedades da cirurgia $\mathcal{S}_1$.

4.1 Propriedades da Cirurgia S_1

Uma das propriedades mais importantes em relação a cirurgia $\mathcal{S}_1$ é dada através do seguinte resultado:

Lema 4.1.1 *Se as regiões que são o complemento dos grafos G_1 em relação M_1 e G_2 em relação M_2 são conexas, então a região que é o complemento do grafo $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ em relação superfície $\bigoplus_{i=1}^{2} M_i$ também o será.*

Demonstração: De fato, se as regiões que são os complementos dos grafos G_1 e G_2, respectivamente, em relação M_1 e M_2 são conexas, então estas regiões podem ser representadas por polígonos. Isto se deve ao fato de que, neste caso, a imersão dos grafos na superfícies geram 2-complexos regulares que possuem apenas uma face. Assim, recortando as superfícies M_1 e M_2 ao longo das arestas de G_1 e G_2, respectivamente, iremos obter polígonos cujo número de arestas é igual ao dobro do número de arestas dos grafos que geraram a imersão. Ou seja, as regiões de imersão $M_1 \setminus G_1$ e $M_2 \setminus G_2$ são identificadas, respectivamente, com polígonos P_{G_1} e P_{G_2}. Para que possamos aplicar a cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre M_1 e M_2 devemos escolher duas arestas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ tais que $\mathcal{A}_1 \subset G_1$ e $\mathcal{A}_2 \subset G_2$, e dois pontos p_1 e p_2 de modo que $p_1 \in \mathcal{A}_1$ e $p_2 \in \mathcal{A}_2$. Observe que, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_2$ não são laços pois, por hipótese, G_1 e G_2 são conexos e as regiões de imersão $M_1 \setminus G_1$ e $M_2 \setminus G_2$ também o são. Assim, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_2$ determinam em P_1 e P_2, nessa ordem, pares de arestas opostas, como podemos verificar através da figura 4.1. Agora, consideremos as

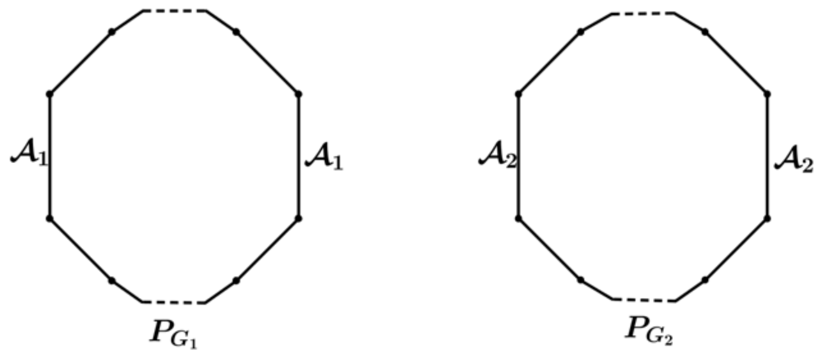

Figura 4.1: Polígonos P_{G_1} e P_{G_2}.

regiões conexas de uma ponte livre e pontos $z \in \mathcal{A}_a \setminus \{v_a\}$ e $w \in \mathcal{A}_b \setminus \{v_b\}$. Desta forma, ao realizarmos a retirada dos discos vizinhanças dos pontos p_1, p_2 as arestas dos polígonos P_1 e P_2 que são obtidas por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente, são rompidas dando origem a regiões abertas que representam os elementos de bordo ∂_{p_1} e ∂_{p_2}. O mesmo ocorre para as regiões conexas da ponte livre com a retirada dos discos vizinhanças dos pontos z e w, isto é, em $\widetilde{\mathcal{P}_1}, \widetilde{\mathcal{P}_2}$ e $\widetilde{\mathcal{P}_3}$ são originadas componentes abertas que correspondem aos elementos de bordo ∂_z e ∂_w. Logo,

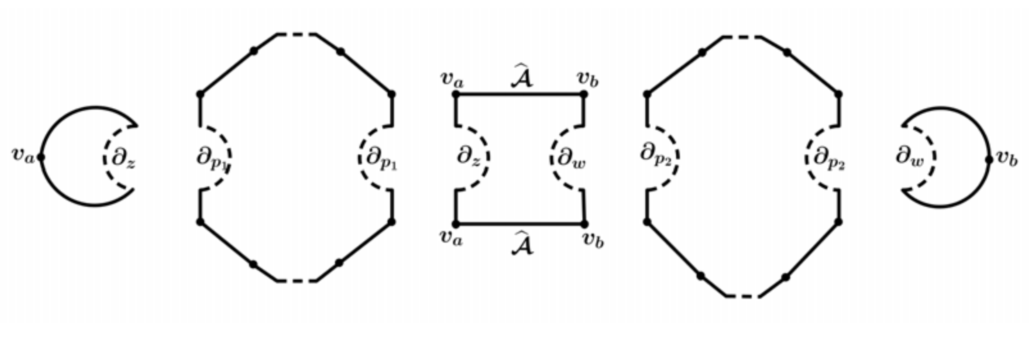

Figura 4.2: Identificação dos elementos de bordo.

ao realizarmos as identificações de ∂_{p_1} com ∂_z e de ∂_{p_2} com ∂_w indicadas pela definição da cirurgia $\mathcal{S}_1$ obtemos um único polígono que, pela construção, indica a região que é o complemento do grafo $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ em relação a superfície $\bigoplus_{i=1}^{2} M_i$.

$\square$

Na demonstração do lema 4.1.1, vimos que é possível associar polígonos a superfícies compactas e conexas. Tal associação é feita por meio de grafo G conexo que é mergulhado na superfície, de modo que o o complemento de G em relação a superfície é uma região conexa homeomorfa ao polígono em questão. Isto motiva a próxima definição.

Definição 4.1.2 *O polígono homeomorfo ao complemento de G em M, chamaremos de **polígonos de emparelhamento**. Assim chamaremos **emparelhamento** a 3-upla (G, M, P) , onde*

- *G denota o grafo trivalente conexo;*
- *M é uma superfície compacta e conexa onde G_P está mergulhado;*
- *P o polígono que representa a região conexa dada pelo complemento de G em M.*

Assim, segue o seguinte resultado:

Teorema 4.1.3 *Se (G_1, M_1, P_1) e (G_2, M_2, P_2) são emparelhamentos, então a soma conexa $(G_1, M_1, P_1) \oplus_{S_1} (G_2, M_2, P_2)$, onde*

$$(G_1, M_1, P_1) \oplus_{S_1} (G_2, M_2, P_2) = \left(\bigoplus_{i=1}^{2} G_i, \bigoplus_{i=1}^{2} M_i, \bigoplus_{i=1}^{2} P_i \right),$$

também é um emparelhamento.

Demonstração: De fato, pelo que foi visto no lema 4.1.1, dados dois emparelhamentos (G_1, M_1, P_1) e (G_2, M_2, P_2) os polígonos de emparelhamento P_{G_1} e P_{G_2} dão origem a um polígono $\bigoplus_{i=1}^{2} P_i$ que também é um polígono de emparelhamento. Isto significa que, o polígono $\bigoplus_{i=1}^{2} P_i$ representa a região de imersão do grafo $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ na superfície $\bigoplus_{i=1}^{2} M_i$.

$\square$

Note então que, os polígonos de emparelhamento estão diretamente ligados ao tipo de grafo que é mergulhado na superfície.

Uma característica importante é que os polígonos de emparelhamento, por construção, possuem um número par de arestas. E tal número é dado através do número de arestas do grafo ao qual o polígono de emparelhamento está associado por meio da relação $|A(P_G)| = 2|A(G)|$.

Notação:

De agora em diante, utilizaremos a notação $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ *para indicar sucessivas cirurgias entre um número finito de superfícies. Assim,* $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ *e* $\bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ *indicarão os grafos e os polígonos de emparelhamentos obtido através destas cirurgias.*

Considerando as definições dadas até o presente momento, apresentamos agora um teorema de nossa autoria. Tal resultado diz respeito ao número de arestas de um polígono de emparelhamento.

Teorema 4.1.4 *Sejam* $(G_1, M_1, P_1), \ldots, (G_n, M_n, P_n)$ *emparelhamentos. Então, o número de arestas do polígono de emparelhamento* $\bigoplus_{i=1}^{n} P_i$*, que denotamos por* $\left|A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} P_i\right)\right|$*, é dado por:*

$$\left|A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} P_i\right)\right| = 6(n-1) + \sum_{i=1}^{n} |A(P_i)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.1}$$

Demonstração: Observe que 4.1 se verifica para $n = 1$. Do lema 4.1.1 segue que o número de arestas do polígono de emparelhamento que está sendo gerado ao final da operação é igual à soma do número de arestas dos polígonos de emparelhamento iniciais acrescido de seis novas arestas. A figura 4.2 nos ajuda a ilustrar este fato. Sendo assim, suponha que 4.1 seja verdadeira para $k \in \mathbb{N}^*$, com $k > 1$. Isto é, dados os emparelhamentos $(G_1, M_1, P_1), \ldots, (G_k, M_k, P_k)$, temos a seguinte resultado:

$$\left|A\left(\bigoplus_{i=1}^{k} P_i\right)\right| = 6(k-1) + \sum_{i=1}^{k} |A(P_i)|. \tag{4.2}$$

Assim, ao realizarmos a cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre as superfície $\bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ com uma superfície dada pelo emparelhamento $(G_{k+1}, M_{k+1}, P_{k+1})$, temos a seguinte relação entre as arestas dos polígonos $P_1, \ldots, P_k, P_{k+1}$:

$$\left|A\left(\bigoplus_{i=1}^{k+1} P_i\right)\right| \overset{4.1.1}{=} \sum_{i=1}^{k} |A(P_i)| + |A(P_{k+1})| + 6. \tag{4.3}$$

Assim, usando a hipótese de indução 4.2 na equação 4.3, temos

$$\left| A\left(\bigoplus_{i=1}^{k+1} P_i \right) \right| = 6(k-1) + \sum_{i=1}^{k} |A(P_i)| + |A(P_{k+1})| + 6 = 6(k) + \sum_{i=1}^{k+1} |A(P_i)|. \quad (4.4)$$

Sendo assim, por indução, segue o resultado.

□

Observação 4.1.5 *Note que, em função da relação $|A(P_G)| = 2|A(G)|$, a equação 4.1 toma o seguinte formato*

$$\left| A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} P_{G_i} \right) \right| = 6(n-1) + 2\sum_{i=1}^{n} |A(G_i)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.5)$$

4.2 Grafos 1, 2 e 3-Balão

Veremos nesta seção como as propriedades decorrentes da cirurgia $\mathcal{S}_1$ são de grande importância na obtenção de emparelhamentos por intermédio de superfícies. Começaremos esta seção verificando como utilizar a rotação σ_3, introduzida na subseção 1.4.3 do capítulo 1, para obter emparelhamentos em grafos trivalentes.

4.2.1 Emparelhamento de Arestas de Polígonos que são obtidos por meio de Grafos Trivalentes

Comecemos recordando a figura 1.8, vista no exemplo 1.4.9, que ilustra um grafo trivalente G conexo com dois vértices e três arestas com a rotação σ_3.

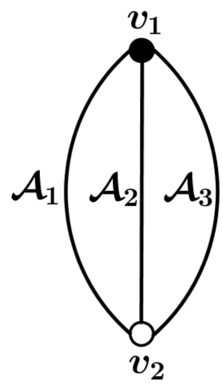

Figura 4.3: Grafo G com a rotação σ_3 reproduzida da página 34 da referência [36].

Vimos, no exemplo 1.4.9, que por meio de σ_3 é possível caminhar sobre as arestas de G de modo a se obter um caminho que começa e termina no vértice

v_1. Uma característica importante deste caminho é que cada aresta é percorrida apenas duas vezes, sendo que uma única vez em cada sentido. Na figura 4.4. as setas mostram a ordem e o sentido em que percorremos as arestas de G no caminho dado pelo exemplo 1.4.9.

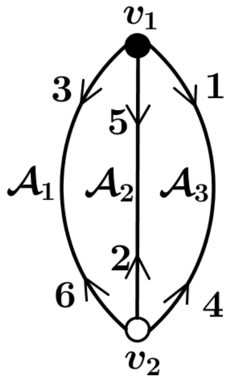

Figura 4.4: As setas nos indicam a ordem e o sentido em que percorremos as arestas de G.

Através da sequência indicadas pelas setas podemos obter um emparelhamento de arestas para um polígono $\mathcal{P}$ cujo conjunto de arestas e vértices são dados, respectivamente por:

$$A(\mathcal{P}) = \{\widetilde{\mathcal{A}_1}, \widetilde{\mathcal{A}_2}, \widetilde{\mathcal{A}_3}, \widetilde{\mathcal{A}_4}, \widetilde{\mathcal{A}_5}, \widetilde{\mathcal{A}_6}\} \text{ e } V(\mathcal{P}) = \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \widetilde{v_3}, \widetilde{v_4}, \widetilde{v_5}, \widetilde{v_6}\}.$$

Isto é feito da seguinte forma: A aresta $\mathcal{A}_1$ do grafo G, de acordo com as indicações dadas pelas setas na figura 4.4, corresponde a terceira e a sexta parte do caminho obtido no exemplo 1.4.9. Assim no polígono $\mathcal{P}$ iremos emparelhar a aresta $\widetilde{\mathcal{A}_3}$ com a aresta $\widetilde{\mathcal{A}_6}$ obtendo assim o par $\{\widetilde{\mathcal{A}_3}, \widetilde{\mathcal{A}_6}\}$. Da mesma forma, na aresta $\mathcal{A}_2$ estão segunda e a quinta parte do caminho, logo obtemos no polígono $\mathcal{P}$ o emparelhamento representado pelo par de arestas dado por $\{\widetilde{\mathcal{A}_2}, \widetilde{\mathcal{A}_5}\}$. E a aresta $\mathcal{A}_3$ de G nos fornece o par $\{\widetilde{\mathcal{A}_1}, \widetilde{\mathcal{A}_4}\}$ em $\mathcal{P}$. A figura 4.5 ilustra tal emparelhamento.

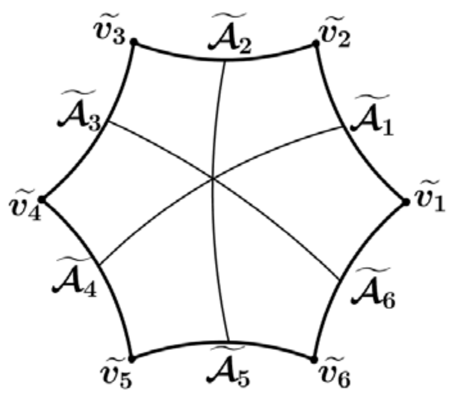

Figura 4.5: Emparelhamento do polígono $\mathcal{P}$ obtido através do grafo G.

Os ciclos de vértices para este emparelhamento são $[\{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_3}, \widetilde{v_5}\}, \{\widetilde{v_2}, \widetilde{v_4}, \widetilde{v_6}\}]$.

4.2.2 1-Balão

Neste momento apresentaremos o conceito de grafos e superfícies $1-$balão. Para isso, considere o toro $\mathbb{T}$ obtido pela identificação topológica dos lados opostos de um polígono $\mathcal{P}$ com seis arestas. Neste toro, podemos mergulhar um grafo G como os ilustrados nas figuras 1.8 e 4.4, de forma que o complemento de G em relação ao toro seja uma região conexa homeomorfa a $\mathcal{P}$.

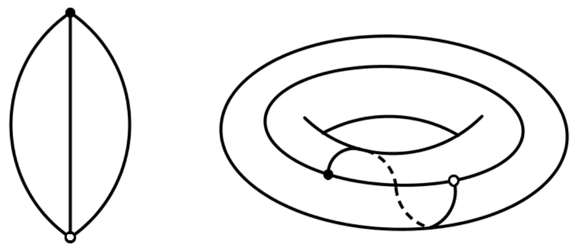

Figura 4.6: Grafo trivalente com três arestas e dois vértices mergulhado em um toro.

Definição 4.2.1 *Chamaremos de* ***grafo 1-balão*** *o grafo trivalente sem laços com dois vértices e três arestas. E um toro associado a um grafo 1-balão será chamado simplesmente de* ***superfície*** 1***-balão***.

Já o polígono $\mathcal{P}$ da figura 4.5 representa o polígono de emparelhamento associado ao grafo $1-$balão. O próximo passo será generalizar a definição 4.2.1 para superfícies compactas e orientáveis de gênero $g \geq 2$.

4.2.3 2-Balão

Nesta seção iremos restringir o uso da cirurgia $\mathcal{S}_1$ a uma certa classe de superfícies que estão associadas a grafos com características especiais. Na realidade, pretendemos fazer o uso da cirurgia $\mathcal{S}_1$ para que o conceito de 1-balão relacionados tanto a superfícies quanto para grafos possa ser ampliado. E que essa extensão dependa apenas do gênero da superfície em questão.

Sendo assim, sejam $\mathbb{T}_1$ e $\mathbb{T}_2$ duas superfícies 1-balão. Como foi visto na subseção 4.2.2, cada superfície $\mathbb{T}_i,\ i = 1,2$ está associado a um grafo 1-balão $G_i,\ i = 1,2$ de vértices e arestas dados, respectivamente, por:

$$V(\mathcal{P}) = \{v_1^i, v_2^i\} \text{ e } A(G_i) = \{\mathcal{A}_1^i, \mathcal{A}_2^i \mathcal{A}_3^i\},\ i = 1,2.$$

Além disso, daqui em diante iremos sempre considerar que os grafos 1-balão estão associados com a rotação σ_3.

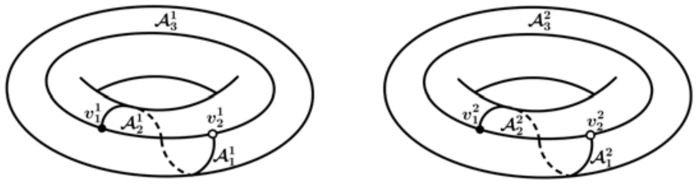

Figura 4.7: Toros associados com seus respectivos grafos 1-balão.

Observe que, por definição, a cirurgia $\mathcal{S}_1$ pode ser aplicada entre quaisquer superfícies compactas, conexas e orientáveis que tenham um grafo mergulhado. Porém, para realizar $\mathcal{S}_1$ entre duas superfícies $\mathbb{T}_1$ e $\mathbb{T}_2$ iremos exigir, por questões de organização, a seguinte condição:

Condição $\mathfrak{C}_1$ 4.2.2 *Ao se realizar uma cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre duas superfícies 1-balão iremos assumir que a ponte livre acrescentada entre as arestas $\mathcal{A}_3^1 \subset G_1$ e $\mathcal{A}_3^2 \subset G_2$.*

Na figura 4.8 mostra a superfície $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{T}_1$ com o grafo $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{2} G_1$, e também a representação de $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{2} G_1$ através de um diagrama.

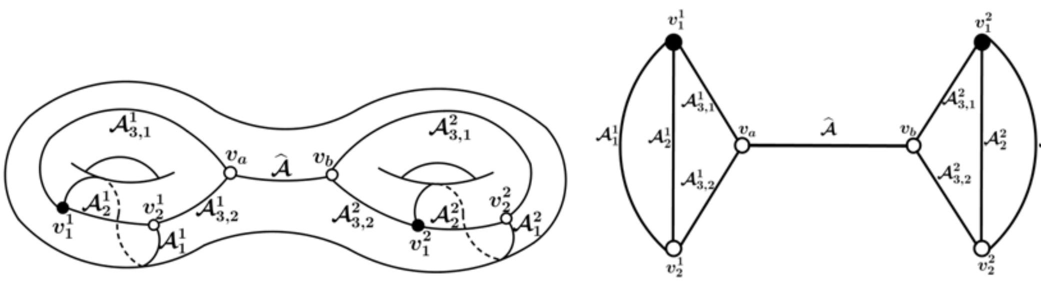

Figura 4.8: De esquerda para a direita: Superfície resultante da realização da cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre duas superfícies 1−balão; Representação do grafo $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$.

Da mesma forma como definimos o conceito de superfícies e grafos 1-balão, apresentamos agora a seguinte definição:

Definição 4.2.3 *Uma* ***superfície 2-balão*** *é uma superfície resultante da cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre duas superfícies 1-balão. O grafo associado a uma superfície 2-balão é um* ***grafo 2-balão****.*

Note que a aresta $\widehat{\mathcal{A}}$ tem o papel de estabelecer a conexão entre dois grafos 1-balão.

Como a superfície 2-balão é resultado de uma cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre duas superfícies

1-balão, o teorema 4.1.3 nos garante que a região de imersão do grafo $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ é conexa.

E, como o grafo 2-balão $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ possui nove arestas, o polígono de emparelhamento $\widetilde{\mathcal{P}}$ associado a $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ terá dezoito arestas. A seguir temos a figura 4.9 onde está representado o polígono $\widetilde{\mathcal{P}}$.

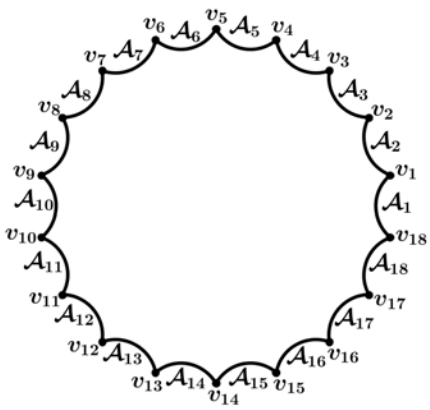

Figura 4.9: Representação do polígono de emparelhamento associado ao grafo $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$.

Assim, para obter um emparelhamento de arestas do polígono $\widetilde{\mathcal{P}}$ basta utilizarmos o grafo 2-balão da figura 4.9 da mesma forma como fizemos para obter um emparelhamento ilustrado pela figura 4.5. Isto é, iremos considerar a rotação σ_3 do grafo $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ herdada dos grafos G_1 e G_2, e escolher um vértice para que possamos percorrer as arestas todas as arestas de $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ formando um caminho fechado, de forma que cada aresta seja percorrida apenas uma vez em cada sentido. Desta forma, ao percorremos as arestas de $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ tomando o vértice v_a como ponto de partida obtemos um emparelhamento dado por:

$$\begin{bmatrix} \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4\} & \{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_6\} & \{\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_7\} \\ \{\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_8\} & \{\mathcal{A}_9, \mathcal{A}_{18}\} & \{\mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}_{13}\} \\ \{\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{15}\} & \{\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{16}\} & \{\mathcal{A}_{14}, \mathcal{A}_{17}\} \end{bmatrix}.$$

E os ciclos de vértices são dados por :

$$\begin{bmatrix} \{v_1, v_5, v_9\} & \{v_2, v_4, v_7\} & \{v_3, v_6, v_8\} \\ \{v_{10}, v_{14}, v_{18}\} & \{v_{11}, v_{13}, v_{16}\} & \{v_{12}, v_{15}, v_{17}\} \end{bmatrix}.$$

A figura 4.10 ilustra o caminho obtido ao caminharmos sobre as arestas de $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$, bem como a representação do emparelhamento das arestas para o polígono $\widetilde{\mathcal{P}}$.

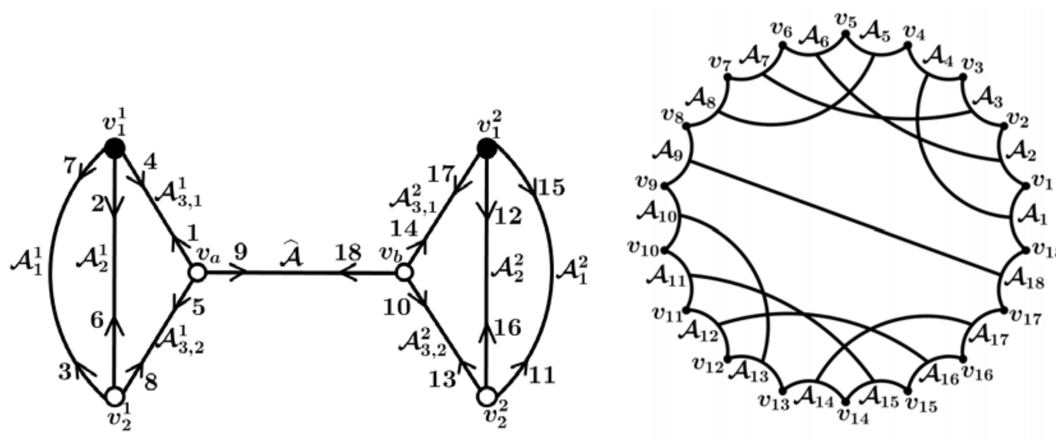

Figura 4.10: Da esquerda para a direita: Representação do caminho no grafo $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$; Representação do emparelhamento do polígono $\widetilde{\mathcal{P}}$.

4.2.4 3-Balão

Podemos realizar uma nova cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre o 2-balão $\bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{T}_i$ e um terceiro balão $\mathbb{T}_3$. Mas para isso iremos exigir que cirurgia $\mathcal{S}_1$ entre as superfícies $\bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{T}_i$ e $\mathbb{T}_3$ seja realizada de modo que uma ponte livre seja construída sobre a ponte já existente na superfície $\bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{T}_i$. Mais precisamente, temos que $\bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{T}_i$ possui um grafo associado, que está representado na figura 4.8.

Assim, iremos criar uma nova aresta conectando a aresta $\widehat{\mathcal{A}}$ em $\bigoplus_{i=1}^{2} G_i$ à aresta $\mathcal{A}_3^3$ de $\mathbb{T}_3$, obtendo desta forma três novas arestas adjacentes cada uma conectada a um 1-balão.

Com isso, ao final desta cirurgia teremos uma nova superfície denotada por $\bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{T}_i$ com um grafo mergulhado $\bigoplus_{i=1}^{3} G_i$. A seguir temos a figura 4.11 que traz a ilustração de uma superfície com grafo mergulhado que equivale à representação do resultado final da cirurgia realizada entre as superfícies $\bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{T}_i$ e $\mathbb{T}_3$. Assim, como no caso dos grafos 1-balão e 2-balão, um grafo 3-balão gera uma região de imersão que pode ser vista como um polígono com trinta arestas, uma vez que um grafo 3-balão possui quinze arestas. Este polígono é representado pela figura 4.12.

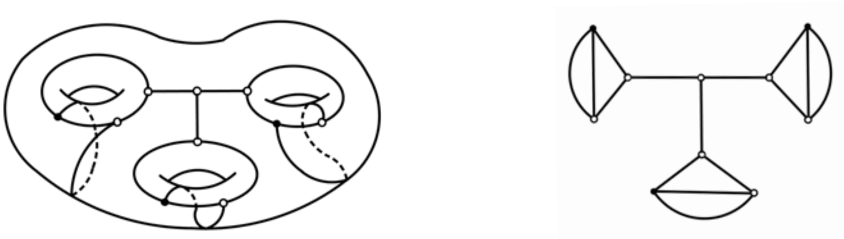

Figura 4.11: Da esquerda para a direita: Representação de uma superfície equivalente a $\bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{T}_i$; Representação de um grafo equivalente a $\bigoplus_{i=1}^{3} G_i$.

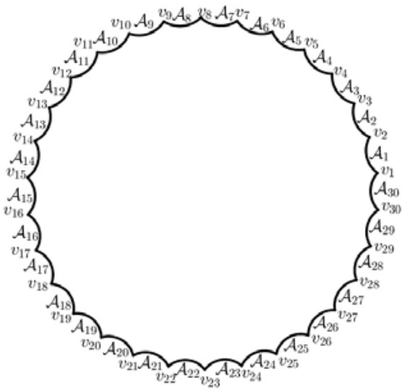

Figura 4.12: Representação do polígono de emparelhamento associado ao grafo $\bigoplus_{i=1}^{3} G_i$.

Definição 4.2.4 *Um superfície equivalente a representada pela figura 4.11 é chamada de **superfície** 3-**balão**. E o grafo associado a uma superfície 3-balão é chamado de **grafo** 3-**balão**.*

Levando-se em conta o grafo representado pela figura 4.11 e sua rotação, geramos um emparelhamento de arestas para o polígono representado pela figura 4.12. Para isso iremos proceder da mesma forma como fizemos nos casos de 1-balão e 2-balão. Porém, desta vez chamamos a atenção para um detalhe. Considere os grafos ilustrados na figura figura 4.13.

Estes grafos mostram duas possibilidades para que possamos gerar um emparelhamento do polígono mostrado na figura 4.12 tomando como base o grafo

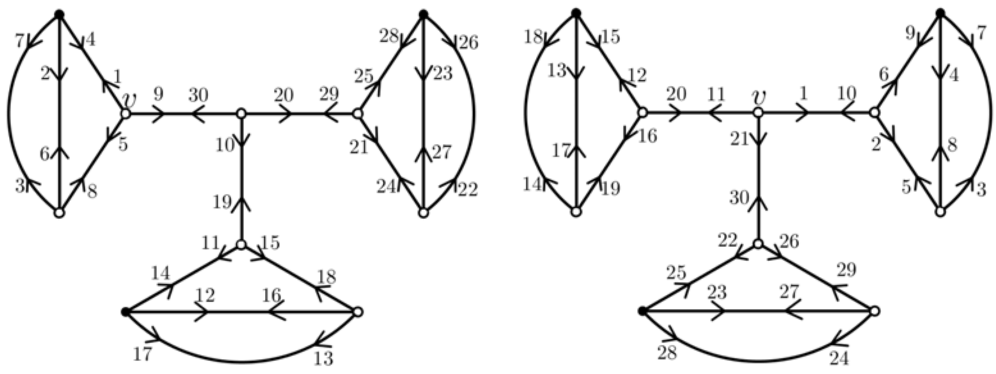

Figura 4.13: Da esquerda para a direita: Grafo A; Grafo B.

ilustrado em 4.11. Os emparelhamentos correspondentes aos grafos da figura 4.13 são mostrados na figura 4.14.

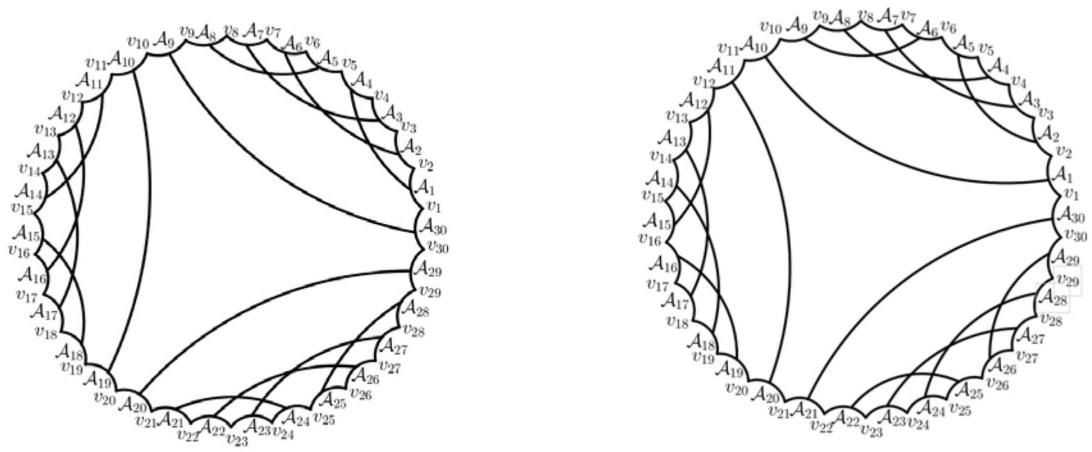

Figura 4.14: Da esquerda para a direita: Emparelhamento correspondente ao caminho indicado pelo grafo A; Emparelhamento correspondente ao caminho indicado pelo grafo B.

Note que a estrutura dos emparelhamentos descritos pela figura 4.14 é a mesma.

Até o presente momento, verificamos como são obtidos as superfícies 1-balão, e como estes são utilizados para se obter as superfícies 2-balão e 3-balão por meio da cirurgia $\mathcal{S}_1$.

Vimos também que estes três tipos de superfícies tem como principal característica o fato de possuírem grafos trivalentes imersos, cuja região de imersão gerada é conexa e pode ser associada a um polígono. E mais, o número de arestas dos grafos como o número de arestas do polígono estão em relação, respectivamente, com os números $6g-3$ e $12g-6$ quando $g = 1, 2, 3$.

Além disso, vimos que através da rotação σ_3 induzidas nos grafos 1-balão, 2-balão e 3-balão, podemos obter emparelhamentos de arestas para os polígonos, em que todos os ciclos de arestas possuem comprimento igual a três.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, F.A.; PALAZZO JUNIOR, R. *Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais.* ERMAC 2010 - UFSJ, pp. 237- 243, 2010.

[2] ARAKAKI, E.; BONILLA, D.; ZANG, A. R. *Triangulação de Delaunay.* Resumo, http://w3.impa.br/ dalia/gc/ 2007. [Online; acessado em 02 de julho de 2011].

[3] BAVARD, C. *Disques Extrémaux et Surfaces Modulaire.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulose, vol. V, n. 2, pp. 191-202, 1996.

[4] BEARDON, A. F. *The Geometry of Discrete Groups.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[5] BÖRÖCZKY, K. J. *Finite Packing and Covering.* Cambridge University Press, 2004.

[6] DoCARMO, M. P. *Geometria Riemanninana.* Projeto Euclides, IMPA, 2008.

[7] CARNE, T. K. *Geometry and Groups.* Notes Lent, Cambridge University, 2011.

[8] CAROLI, M.; TEILLAUD, M.; VEGTER, G. *Delaunay Triangulations of Point Sets on The Double Torus of Constant Curvature.* Géométrica Monday Seminar. OrbiCG Associate Team, 2010.

[9] CONWAY, J. H. *Sphere Packings, Lattice and Groups - 3rd ed.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[10] COSTA, S. I. R.; FIRER, M.; PALAZZO JUNIOR, R.; SILVA, E. B. *Signal Constellations in the Hyperbolic Plane: A proposal for new communication systems".* Journal of the Franklin Institute. Engineering and Applied

Mathematics, v. 343, n. 1, pp. 69-82, 2005.

[11] DIESTEL, R. *Graphy Theory - 4th Eletronic Edition.* Springer-Verlag, New York, 2010.

[12] DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia.* Ed. Atual, 1982.

[13] DUNGUNDJI, J. *Topology.* Allyn and Bacon INC, 1966.

[14] FARIA, M. B.; MENDES DE JESUS, C.; SANCHEZ, P.D.R. *Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graph.* Preprint.

[15] FARIA, M. B. *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos.* Tese de Doutorado. Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, Campinas - São Paulo, 2005.

[16] FARIA, M. B.; PALAZZO JUNIOR, R. *Dois Casos de Emparelhamentos Generalizados Associadosa Tesselação {12g-6,3}.* Anais do CNMAC v.2, pp. 342-348, 2009.

[17] FARIA, M. B. *Empacotamento de esferas em espaços hiperbólicos.* Dissertação de mestrado. Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, Campinas - São Paulo. 2001.

[18] FARKAS, H. M. *Riemann Surfaces.* Springer-Verlag, New York, 1980.

[19] FEJES TÓTH, G.; ZANFIRESCO, T. *For most Convex Discs Thinnest Covering is not Lattice-like.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 63. Intuitive Geometry, Szeged (Hungary), pp. 105-108, 1991.

[20] FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos.* http://www.ime.usp.br/ pf/teoriadosgrafos/, 2007. [Online; acessado em 18 de abril de 2011].

[21] FIRER, M. *Grupos Fuchsianos.* Notas de Aula, http://www.ime.unicamp.br/ mfirer/fuchs.html , 1999. [Online; acessado em 14 de dezembro de 2010].

[22] GOODMAN, E. J.; O'ROURKE, J. *Handbook of Discrete and Computarional Geometry.* CRC Press Boca Rator, New York, 1997.

[23] HIRSCH, M. W. *Differential Topology.* Graduate Text in Mathematics 33, Springer-Verlag, New York, 1976.

[24] JOST, J. *Compact Riemann Surfaces: An Introduction to Contemporary Mathematics - 3rd Edition.* Universitext - Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[25] KATOK, S. *Fuchsian Groups.* University of Chicago, 1992.

[26] KINSEY, L.C. *Topology of Surfaces.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[27] LIMA, E. L. *Curso de Análise - Vol.2.* IMPA, 2011.

[28] LIMA, E. L. *Espaços Métricos.* IMPA, 2007.

[29] LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento.* IMPA, 1993.

[30] MASSEY , W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[31] MARTINEZ, E. *Polígonos Hiperbólicos Con Circunferencia Circunscrita.* Departamento de Matemáticas Fundamentales - UNDE, 1987.

[32] MENDES DE JESUS, C. *Extension of graphs associated to decomposition of surfaces.* preprint.

[33] MIRANDA, R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces-Vol.5.* The American Mathematical Society, 1995.

[34] MUNKRES, J.R. *Topology-A First Course.* Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[35] RATCLIFFE, J.G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds- Secund Edition.* Springer, 2006.

[36] SILVA, Gheyza F. *Emparelhamento de Arestas de Polígonos Gerados por Grafos.* Dissertação de mestrado. Departamento de Matemática, DMA-UFV, Viçosa - Minas Gerais, 2011.

[37] STILLWELL, J. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory - 2ed.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[38] SIERADSKI, A. *An Introduction to Topology and Homotopy.* PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1992.

[39] WHITE, A. T. *Graphs,Group and Surfaces.* North-Holland Mathematicas Studies, 1984.