

VAGSON LUIZ DE CARVALHO SANTOS

SOLUÇÕES TOPOLÓGICAS DE SPINS NO TORO

Dissertação apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Física Aplicada,  
para obtenção do título de *Magister  
Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2008

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

S237s  
2008 Santos, Vagson Luiz de Carvalho, 1977-  
Soluções topológicas de spins no toro / Vagson Luiz  
de Carvalho Santos. – Viçosa, MG, 2008.  
ix, 74f.: il. (alguns col.); 29cm.

Orientador: Winder Alexander de Moura Melo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 70-74.

1. Matéria condensada. 2. Heisenberg, Modelo de.  
3. Estrutura de domínio. 4. Espaços topológicos.  
5. Toro (Geometria). I. Universidade Federal de Viçosa.  
II. Título.

CDD 22.ed. 530.41

**VAGSON LUIZ DE CARVALHO SANTOS**

**SOLUÇÕES TOPOLÓGICAS DE SPINS NO TORO**

**Dissertação apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Física Aplicada,  
para obtenção do título de *Magister  
Scientiae*.**

APROVADO: 15 de fevereiro de 2008.

---

Prof. Silvio da Costa Ferreira Júnior  
(Co-orientador)

---

Prof. Afrânio Rodrigues Pereira  
(Co-orientador)

---

Prof. Daniel Heber Theodoro Franco

---

Prof. Oswaldo Monteiro Del Cima

---

Prof. Winder Alexander de Moura Melo  
(Orientador)

À minha esposa Josemeire Dourado,  
e aos meus filhos: Giulia Heloísa e Pedro Galileu.

“O essencial é invisível aos olhos!”  
*Antoine de Saint-Exupéri*

## AGRADECIMENTOS

- À comissão orientadora, por tudo o que me ensinou e pelo incentivo.
- A minha mãe, que me apoiou em todos os momentos de minha vida.
- A Pedro e Giulia, que suportaram (quase) pacientemente as longas horas de ausência de um pai que estava em casa, mas quase nunca com tempo para eles.
- A Josemeire, que, assim como meus filhos teve muita paciência para suportar as longas horas que eu tinha de ficar distante de casa, mesmo estando dentro dela, e conseguiu manter a estrutura de uma família enquanto me aguardava. Esta conquista não teria sido possível sem ela.
- Aos meus amigos de Senhor do Bonfim, que mesmo estando distantes, sei que estão torcendo por mim, principalmente a Antonio e Bartolomeu (Valeu Toinho e valeu Bartô), que me disseram palavras de incentivo nos momentos em que me encontrava descrente de mim mesmo.
- Aos professores Sílvio e José Arnaldo, por tudo o que me ensinaram no período de nivelamento, sem o qual não teria segurança de seguir em frente no curso.
- Ao Departamento de Física da Universidade Federal de Viçosa, que me deu oportunidade de ingressar no curso de Pós-Graduação em Física Aplicada, mesmo com minha pouca formação formal na área.
- Aos professores e colegas da física.
- À direção da Escola Agrotécnica Federal de Senhor do Bonfim, pela oportunidade e confiança.

# Sumário

|   |             |
|---|-------------|
| <b>LISTA DE FIGURAS</b>   | <b>vii</b>  |
| <b>RESUMO</b>   | <b>viii</b> |
| <b>ABSTRACT</b>   | <b>ix</b>   |
| <b>1 Introdução Geral</b>                                       | <b>1</b>    |
| 1.1 Conceitos fundamentais . . . . .                            | 2           |
| 1.1.1 Magnetismo . . . . .                                      | 2           |
| 1.1.2 Defeitos topológicos . . . . .                            | 4           |
| <b>2 Considerações gerais</b>                                   | <b>14</b>   |
| 2.1 Motivação . . . . .   | 14          |
| 2.2 O modelo de Heisenberg . . . . .                            | 20          |
| 2.3 A superfície do toro . . . . .                              | 23          |
| <b>3 Modelo de Heisenberg e soluções topológicas no toro</b>    | <b>29</b>   |
| 3.1 O modelo de Heisenberg no toro . . . . .                    | 29          |
| 3.2 O regime isotrópico e soluções solitônicas . . . . .        | 33          |
| 3.2.1 Coordenadas peri-polares . . . . .                        | 33          |
| 3.2.2 Coordenadas polares . . . . .                             | 42          |
| 3.3 Modelo do Rotor Planar e soluções tipo-vórtice . . . . .    | 46          |
| <b>4 Conclusões gerais e perspectivas</b>                       | <b>53</b>   |
| <b>A Aproximação contínua do modelo de Heisenberg</b>           | <b>55</b>   |
| <b>B Limite contínuo da Hamiltoniana de Heisenberg no plano</b> | <b>58</b>   |

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| <b>C Fenômenos magnéticos</b>     | <b>60</b> |
| C.1 Diamagnetismo . . . . .       | 60        |
| C.2 Paramagnetismo . . . . .      | 62        |
| C.3 Ferromagnetismo . . . . .     | 65        |
| <b>Referências Bibliográficas</b> | <b>70</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Representação de diferentes parâmetros de ordem . . . . .                           | 5  |
| 1.2 | Exemplos de superfícies simplesmente e não-simplesmente conexas . . .               | 6  |
| 1.3 | Loops no plano euclidiano . . . . .   | 8  |
| 1.4 | Representação de um vórtice com carga topológica $Q = 1$ . . . . .                  | 10 |
| 1.5 | Comportamento do potencial da equação de sine-Gordon . . . . .                      | 11 |
| 1.6 | Representação de um sóliton com carga topológica $K = 1$ , no plano $R^2$ . . . . . | 12 |
| 2.1 | Representação de uma parede de domínio de 180 graus . . . . .                       | 17 |
| 2.2 | Representação de um ferromagneto e de um antiferromagneto . . . . .                 | 21 |
| 2.3 | Representação de um spin clássico (esfera de spins) . . . . .                       | 21 |
| 2.4 | Representação dos estados tripleto e singleto para a função de onda . . . . .       | 22 |
| 2.5 | Toro embebido num espaço tridimensional . . . . .                                   | 24 |
| 2.6 | Sistema de coordenadas adotado para descrever o toro . . . . .                      | 25 |
| 2.7 | Representação de diferentes tipos de toro . . . . .                                 | 26 |
| 3.1 | Comportamento de $\Theta$ em função de $\varphi$ . . . . .                          | 36 |
| 3.2 | Comprimento característico do sóliton para diferentes valores de $R$ . . . . .      | 37 |
| 3.3 | Comportamento da carga solitônica associada à solução (3.19) . . . . .              | 38 |
| 3.4 | Comportamento do campo de spins clássicos na superfície do toro . . . . .           | 47 |
| 3.5 | Gráfico da energia em função de $R$ para o caso de um vórtice no toro . . . . .     | 49 |
| A.1 | Rede quadrada de spins . . . . .  | 56 |
| C.1 | Material diamagnético na presença de um campo externo, $\vec{H}$ . . . . .          | 61 |
| C.2 | Material paramagnético na ausência de um campo externo . . . . .                    | 63 |
| C.3 | Representação de um cristal com magnetização resultante nula . . . . .              | 67 |
| C.4 | Arranjos espaciais dos spins atômicos . . . . .                                     | 68 |

## RESUMO

SANTOS, Vagson Luiz de Carvalho, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2008. **Soluções topológicas de spins no toro**. Orientador: Winder Alexander de Moura Melo. Co-Orientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Sílvio da Costa Ferreira Junior

Estudamos o modelo de Heisenberg para spins clássicos no suporte toroidal. O regime isotrópico é caracterizado por uma solução solitônica fracionária. Quando o tamanho do toro é muito grande,  $R \rightarrow \infty$ , sua carga se iguala à unidade e o sóliton efetivamente se comporta como no caso do cilindro infinito. Entretanto, para  $R = 0$  a geometria esférica é recobrada e obtemos a configuração e a energia de um sóliton numa esfera. Configurações tipo vórtice também são suportadas: num *ring torus* ( $R > r$ ) tais excitações não apresentam caroço onde a energia poderia divergir. No limite  $R \rightarrow \infty$  estamos efetivamente descrevendo-o em um *annulus* infinito (ou cilindro, equivalentemente), onde os spins aparecem praticamente paralelos um ao outro, não tendo energia líquida. Por outro lado, em um *horn torus* ( $R = r$ ) um caroço singular toma lugar, enquanto para  $R < r$  (*self-intersecting spindle torus*) duas singularidades deste tipo aparecem. Se  $R$  é diminuído até se anular, recuperamos a configuração de vórtice na esfera. Outras soluções formais, sem estabilidade topológica, são obtidas e discutidas com alguns detalhes.

## ABSTRACT

SANTOS, Vagson Luiz de Carvalho, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2008. **Topological spins solutions on the torus.** Adviser: Winder Alexander de Moura Melo. Co-Advisers: Afrânio Rodrigues Pereira and Sílvio da Costa Ferreira Junior

We study Heisenberg model of classical spins lying on the toroidal support. The isotropic regime is characterised by a fractional soliton solution. Whenever the torus size is very large,  $R \rightarrow \infty$ , its charge equals unity and the soliton effectively lies on a infinite cylinder. However, for  $R = 0$  the spherical geometry is recovered and we obtain that configuration and energy of a soliton lying on a sphere. Vortex-like configurations are also supported: in a *ring torus* ( $R > r$ ) such excitations present no core where energy could blow up. At the limit  $R \rightarrow \infty$  we are effectively describing it on an infinite annulus (or cylinder, equivalently), where the spins appear to be practically parallel to each other, yielding no net energy. On the other hand, in a *horn torus* ( $R = r$ ) a singular core takes place, while for  $R < r$  (*self-intersecting spindle torus*) two such singularities appear. If  $R$  is further diminished until vanish we recover vortex configuration on a sphere. Other formal solutions, without topological stability, are obtained and discussed with some details.

# Capítulo 1

## Introdução Geral

A palavra magnetismo tem sua origem ligada ao nome de uma cidade da região da Turquia que era rica em minério de ferro, a Magnésia. A palavra surgiu durante a Antigüidade e está associada à capacidade que fragmentos de ferro têm de serem atraídos pela magnetita, um material encontrado na Natureza, de composição química  $Fe_3O_4$ . Os fenômenos magnéticos foram os primeiros a despertar a curiosidade do homem sobre o interior da matéria [1]. Os primeiros relatos de experiências com a magnetita são atribuídos aos gregos e datam de 800 a.C.

Apesar de ter sido descoberto muito cedo, o estudo do magnetismo só se tornou mais sistemático no século XVII, a partir de estudos realizados pelo médico inglês William Gilbert. O interesse inicial de Gilbert pelos fenômenos magnéticos deveu-se, em parte, às crenças de sua época, pois acreditava-se que como um ímã podia interagir com alguns materiais, produziria também certos efeitos curativos no corpo humano [2]. No entanto, em seu livro *De Magnete Magneticisque Corporibus et de Magno Magnete Tellure (Sobre o Ímã, os Corpos Magnéticos e o Grande Ímã, a Terra)*, Gilbert só descreveu as propriedades magnéticas dos ímãs e apresentou sua teoria de que a Terra se apresenta como um grande ímã.

Durante mais de dois séculos a tentativa do homem em entender a natureza do magnetismo foi frustrada devido à complexidade desse fenômeno. Só com o advento da Mecânica Quântica pôde-se compreender e explicar a origem do magnetismo, bem como diversas propriedades e características do comportamento magnético dos materiais.

Atualmente, magnetismo é um tema de pesquisa extremamente fértil, atraindo interesse de boa parte da comunidade científica, dentre estes, físicos, engenheiros, etc. Os principais objetivos da pesquisa que os cientistas têm nesse campo são a compreensão das origens microscópicas das propriedades magnéticas dos materiais, descoberta

de novos materiais e fenômenos, o estudo das propriedades termodinâmicas e das excitações elementares dos materiais magnéticos, bem como o desenvolvimento de novas aplicações tecnológicas [3].

Neste capítulo discutiremos alguns conceitos fundamentais sobre magnetismo e defeitos topológicos, os quais serão importantes para o entendimento do restante deste trabalho.

## 1.1 Conceitos fundamentais

### 1.1.1 Magnetismo

Existem três quantidades importantes para a descrição do magnetismo na matéria: o campo  $\vec{H}$ , o campo magnético  $\vec{B}$  e a magnetização  $\vec{M}$ . No vácuo, o campo magnético é diretamente proporcional ao campo  $\vec{H}$ , ou seja,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1.1)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética. As quantidades  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  estão relacionados somente com a densidade de corrente elétrica  $\vec{J}$ , e suas intensidades podem ser determinadas a partir da expressão de Biot-Savart (no regime não-relativístico:  $v/c \ll 1$ ):

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x', \quad (1.2)$$

onde a integração é feita sobre toda a região da corrente.

Na presença de um meio magnético, o campo magnético não terá mais a forma simples da equação (1.2), pois o meio responde à presença do campo magnético com uma magnetização  $\vec{M}$  que contribui tanto para  $\vec{B}$  quanto para  $\vec{H}$ .

Microscopicamente, a explicação das propriedades magnéticas adquiridas por um corpo está associada à existência de elétrons que se movem em torno dos núcleos dos átomos, bem como ao momento angular intrínseco dos elétrons (*spin*). A magnetização surge do ordenamento dos momentos magnéticos atômicos, que aparecem em átomos possuindo camadas eletrônicas incompletas. Ela é definida como a quantidade de momentos magnéticos por unidade do volume do material:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{\mu}_i. \quad (1.3)$$

Podemos notar, a partir de uma análise da equação (1.3), que para haver magnetização é necessário que existam momentos magnéticos  $\vec{\mu}_i$  e que estes, na média, apontem na mesma direção, o que ocorre se um campo magnético atuar no sistema e/ou a temperatura for suficientemente baixa. Experimentalmente, as curvas de  $|\vec{M}|$  vs.  $|\vec{H}|$  ou  $|\vec{B}|$  vs.  $|\vec{H}|$  trazem informações sobre a *dureza magnética* do material, sua anisotropia cristalina, o campo de coercisividade, a magnetização remanente, etc. [4]. Qualquer material magneticamente ordenado o deixa de ser a uma temperatura suficientemente elevada. Esta temperatura é chamada temperatura crítica ou temperatura de Curie ( $T_c$ ).

O momento magnético de um átomo livre tem três fontes principais: o spin, com o qual os elétrons são dotados, seus momentos angulares orbitais, e a mudança no momento induzido por um campo magnético aplicado [5]. A relação entre o momento magnético e o momento angular orbital  $\vec{L}$  é dada por

$$\vec{\mu}_l = -g_l \frac{e}{2m} \vec{L}, \quad (1.4)$$

e, similarmente, entre o momento magnético intrínseco e o spin  $\vec{S}$ :

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m} \vec{S}. \quad (1.5)$$

Na equação (1.4), tem-se a relação com o momento angular, onde  $g_l = 1$  é o fator  $g$  orbital. Ao passo que na equação (1.5), tem-se a relação com o momento angular intrínseco (*vetor spin*), e  $g_s \approx 2$  é o fator  $g$  de spin. Momentos magnéticos interagem entre si e, como já foi dito, com campos magnéticos externos.

Em mecânica quântica o momento magnético  $\vec{\mu}$  de um átomo está diretamente relacionado ao seu momento angular total  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , seguindo a relação:

$$\vec{\mu} = g\mu_B \vec{J}, \quad (1.6)$$

onde  $\mu_B = e\hbar/2m$  é uma unidade usual de momento magnético, chamada *magneton de Bohr*,  $m$  é a massa do elétron e  $g$  é o *fator de Landé*, dado por:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (1.7)$$

Outra característica importante para o estudo de materiais magnéticos é a suscetibilidade magnética por unidade de volume, aqui denominada  $\chi$ , que é uma grandeza adimensional definida como:

$$\chi = \frac{\mu_0 |\vec{M}|}{|\vec{B}|}. \quad (1.8)$$

Os materiais magnéticos são classificados de acordo com sua resposta à aplicação de campos magnéticos, e tal resposta pode ser quantificada através da suscetibilidade magnética. Os tipos de materiais mais conhecidos são:

- Diamagnéticos, cuja suscetibilidade tem valor pequeno e é negativa.
- Paramagnéticos, que são caracterizados por uma suscetibilidade positiva que varia linearmente com o inverso da temperatura.
- Ferromagnéticos, que têm uma ordem magnética espontânea abaixo de uma determinada temperatura crítica e também têm uma dependência linear de  $\chi$  com  $1/T$  acima dessa temperatura.
- Ferrimagnéticos, que embora apresentem uma magnetização espontânea não são classificados como ferromagnetos. De qualquer modo, a temperaturas suficientemente altas eles perdem a “imantação”, tornando-se paramagnéticos.
- Antiferromagnéticos, que se caracterizam pela ausência de magnetização espontânea, não devendo ser confundido, no entanto, com o caso paramagnético. A temperatura abaixo da qual um material paramagnético se torna antiferromagnético denomina-se temperatura de Néel ( $T_N$ ).

Uma melhor explicação acerca do diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo pode ser encontrada no Apêndice C.

### 1.1.2 Defeitos topológicos

A linguagem, métodos e teoremas de topologia algébrica, em particular a teoria de homotopia, têm sido usados no estudo de teoria de campos desde a década de 1960, mas sua aplicação em física de matéria condensada começou apenas em 1976 [6]. Aqui, tentaremos aplicar estas teorias ao estudo de defeitos topológicos, em especial, vórtices e sólitons. A discussão que será feita nesta seção é um rápido resumo das referências [6, 7, 8, 9, 10]. Então, o leitor interessado em entender melhor o assunto é remetido a esses trabalhos.

O conceito de defeito topológico está relacionado ao de *meio ordenado*, que pode ser definido como uma região do espaço descrita por uma função,  $f(\vec{r})$ , que associa a cada ponto da região um parâmetro de ordem, cujos possíveis valores constituem o chamado *espaço interno* (ou *parâmetro de espaço ordenado*). Se o valor do parâmetro

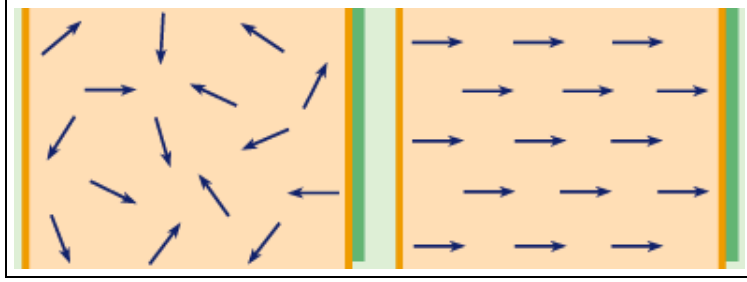


Figura 1.1: Representação de uma superfície plana, na qual o parâmetro de ordem está representado por vetores (no espaço interno). À direita, temos um meio uniforme, no qual o parâmetro de ordem é constante (Ex.: ferromagneto ideal). Na figura a esquerda, vemos um caso onde o parâmetro de ordem muda através do espaço (paramagneto).

de ordem é o mesmo em todo lugar, isto é, se  $f$  é constante, o meio é dito *uniforme* (Ver Fig. 1.1). Geralmente, o interesse maior é em estudar meios nos quais o parâmetro de ordem varia continuamente através do espaço, exceto, às vezes, em pontos isolados, linhas ou superfícies. Essas regiões, cuja dimensionalidade é menor do que a do meio ordenado, constituem os *defeitos* a serem investigados. Alguns exemplos de meios ordenados são: *spins planares*, cujo parâmetro de ordem é um vetor de magnitude fixa e contido num plano; *spins ordinários*, onde o parâmetro de ordem é um vetor unitário livre para apontar em qualquer direção do espaço tridimensional; *hélio-3 superfluido*, cuja descoberta estimulou o desenvolvimento da teoria de homotopia e cujo parâmetro de ordem depende das fases e dos regimes adotados em cada fase.

Antes de continuar discutindo sobre defeitos topológicos, é interessante falar um pouco a respeito de teoria de homotopia. Seja um sistema ordenado caracterizado por um campo  $\vec{f}(\vec{r})$  definido sobre os pontos  $\vec{r}$  de algum domínio espacial  $R$ . Denotaremos por  $F$  o contorno dos possíveis valores de  $\vec{f}$ , por exemplo,  $F = S^1$  é um círculo, se  $\vec{f}$  é um vetor de duas componentes de comprimento fixo ( $\vec{f} = f_1\hat{x} + f_2\hat{y}$ , tal que  $|\vec{f}^2| = 1$ );  $F = S^2$  se  $\vec{f}$  é um vetor de três componentes de comprimento fixo ( $\vec{f} = f_1\hat{x} + f_2\hat{y} + f_3\hat{z}$ , tal que  $|\vec{f}^2| = 1$ ); e assim sucessivamente.

Dado um sistema  $R$  unidimensional, parametrizado por  $0 \leq x \leq 2\pi$  e algum campo  $\vec{f}(\vec{r})$  tal que a cada ponto  $x_i \in R$  há um ponto imagem  $\vec{f}(x_i) \in F$ , temos que o ponto imagem traça uma curva em  $F$  começando em  $\vec{f}(0)$  e terminando em  $\vec{f}(2\pi)$ . Serão tomados apenas os campos que obedecem às condições  $\vec{f}(0) = \vec{f}(2\pi) = \vec{f}_0$ , de forma que os pontos imagem traçam uma curva fechada ancorada em  $\vec{f}_0$ . O estudo do sistema se reduz ao estudo do comportamento do caminho fechado em  $F$ .



Figura 1.2: A esfera representa uma superfície simplesmente conexa. De fato, qualquer loop nessa superfície pode ser reduzido a um ponto. A xícara, por sua vez, representa uma classe de objetos cuja superfície é dita não-simplesmente conexa, pois um loop em torno da “asa” da mesma, não pode ser reduzido a um ponto.

Os caminhos fechados, que passaremos a chamar a partir de agora de “*loops*”, são classificados em classes, tais que:

1. quaisquer loops pertencendo à mesma classe podem ser deformados um no outro. Como exemplo, temos que um triângulo ou um quadrado podem ser deformados continuamente para se obter um círculo. Então, essas três figuras pertencem a mesma classe topológica;
2. loops pertencendo a diferentes classes não podem ser continuamente distorcidos um no outro. Por exemplo, um *2-loop* (duas voltas em torno de um ponto no plano euclidiano, por exemplo) não pode ser continuamente deformado para se obter o *1-loop* (uma volta em torno de um ponto no plano euclidiano).

As classes são chamadas *classes de homotopia* e os membros de uma dada classe são ditos homotópicos um ao outro.

Antes de trazer um exemplo para as classes de homotopia, daremos o conceito de superfícies “simplesmente conexas” e “não-simplesmente conexas”: superfície *simplesmente conexa* é aquela na qual qualquer caminho fechado pode ser continuamente reduzido a um ponto; uma superfície é dita *não-simplesmente conexa* quando nem todas as curvas fechadas sobre esta podem ser continuamente deformadas a um ponto.

Além dos exemplos mostrados na Fig. 1.2, o espaço bidimensional euclidiano,  $E^2$ , também representa uma superfície simplesmente conexa, na qual há apenas uma

classe de homotopia, pois qualquer loop sobre essa superfície pode ser deformado em um outro, e particularmente, em um loop puntiforme em  $\vec{f}_0$ , onde  $\vec{f}_0$  é um ponto qualquer sobre a superfície.

Considerando agora que seja feito um corte no plano, isto é, excluindo do espaço euclidiano um determinado ponto, como por exemplo o ponto  $(0, 0)$ ; teremos assim uma superfície não-simplesmente conexa (Ver Fig. 1.3). Dado que  $\vec{f}_0 \in F$ , fica fácil perceber que qualquer loop que não envolva a origem pode ser continuamente deformado a um loop puntiforme em  $\vec{f}_0$ , enquanto aqueles que são fechados em torno da origem não o podem. Os loops que rodeiam a origem podem então ser classificados por meio de um inteiro  $Q$ , cuja magnitude e sinal especificam o número de vezes e o sentido no qual a origem é envolvida. É claro que mapeamentos pertencendo a diferentes valores de  $Q$  não são homotópicos. Considere o conjunto  $\{\vec{f}^0, \vec{f}^1, \vec{f}^2, \dots\}$ , onde  $\vec{f}^Q$  representa todos os mapeamentos onde o loop circula a origem  $Q$  vezes. Este conjunto forma um grupo, isto é, existe uma lei de combinação dos elementos que obedece aos axiomas da teoria dos grupos. O grupo é chamado de “*grupo fundamental*” ou *primeiro grupo de homotopia* do espaço  $F$ , e é denotado por  $\pi_1(F)$ . Ele foi introduzido por Poincaré em 1895, e é chamado de primeiro grupo de homotopia em  $F$  em antecipação ao fato de que existem outros grupos de homotopia maiores em  $F$ . O índice subscrito 1 nos diz que  $R$  adquire a forma de uma superfície unidimensional fechada, isto é, um loop, o qual é topologicamente equivalente a um círculo,  $S^1$ . O estudo deste grupo revela que suas leis são idênticas à adição dos correspondentes inteiros. Denotaremos por  $\mathbb{Z}$  o conjunto de todos os inteiros que formam um grupo sob adição. Podemos então dizer que:

$$\pi_1\{E^2 - (0, 0)\} = \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

Se  $R$  é uma região bidimensional do espaço e todos os pontos no contorno estabelecido são mapeados em um ponto  $\vec{f}_0$ ,  $R$  assumirá a forma de uma superfície bi-dimensional fechada, topologicamente equivalente a uma superfície esférica,  $S^2$ . O grupo em questão é  $\pi_2(F)$ . De fato, enquanto vórtices (magnéticos, em particular) são caracterizados por uma carga topológica (*vorticidade*) associada ao  $\pi_1(F)$ , isto é, adquirem carga pelo mapeamento de um círculo de spins na superfície magnética em questão, as excitações solitônicas demandam grupos superiores. Nos casos mais simples, como em magnetismo, tal grupo é  $\pi_2(F)$ , ou seja, o mapeamento deve envolver uma esfera de spins. Tentaremos esclarecer essas sutilezas nos momentos oportunos.

Tendo desenvolvido alguns conceitos em teoria de homotopia, podemos agora

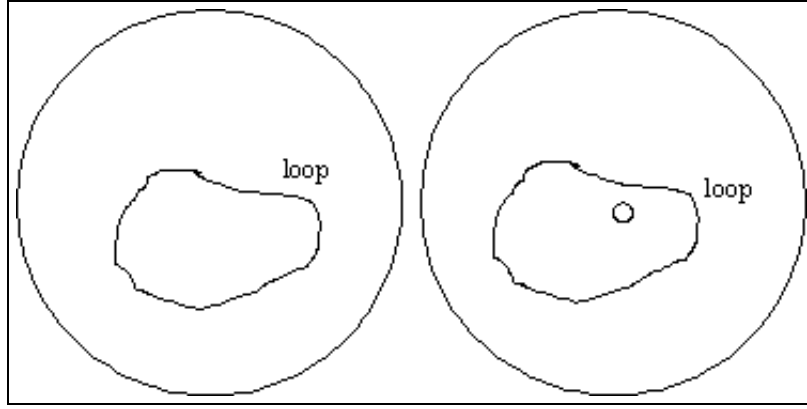


Figura 1.3: O círculo da esquerda representa o plano euclidiano completo, ao passo que a figura da direita representa o plano euclidiano no qual foi feito um *cutoff* do ponto  $(0,0)$ , de forma que um loop em torno desse ponto não pode ser continuamente reduzido a um ponto.

discutir os defeitos topológicos. Um defeito topológico é, em geral, caracterizado como sendo uma *região núcleo* de dimensão menor do que o espaço em estudo (um ponto, se o espaço é unidimensional; uma linha, se o espaço é bidimensional, etc.) onde a ordem é destruída. O parâmetro de ordem é finito em todo lugar, exceto no núcleo, onde há uma divergência. Fora dessa região, o parâmetro de ordem muda lentamente. No caso do hélio-3 superfluido e no âmbito modelo XY, bem como do rotor planar (mais detalhes sobre tais modelos são apresentados no Cap. 3), os defeitos topológicos recebem o nome de vórtices. A singularidade no núcleo pode ser removida por um corte na superfície, gerando um caroço de raio arbitrário  $\zeta_0$ .

Considere o seguinte parâmetro de ordem:

$$\theta(x) = Q\phi + \theta_0,$$

onde  $\theta_0$  é uma constante e  $x = (r, \phi)$ , em coordenadas polares. Vê-se facilmente que  $\nabla\theta = 1/r$  é contínuo em todo lugar, exceto na origem. A configuração de spins assim definida é conhecida como vórtice. O ângulo  $\theta$  especifica a direção do parâmetro de ordem e muda por  $2\pi$  em um circuito ao redor do núcleo. Como o parâmetro de ordem é periódico, vemos que dado um inteiro  $Q$ , há um número infinito de singularidades distintas nas quais  $\theta$  muda de  $2Q\pi$  em um loop ao redor do núcleo.  $Q$  é o número que caracteriza o vórtice e é conhecido como “*carga topológica do vórtice*”. Na Fig. 1.4, vemos um vórtice planar com  $Q = 1$ .

Podemos então associar os vórtices ao primeiro grupo de homotopia,  $\pi_1$ . Dado

que essas excitações apresentam carga topológica não nula,  $Q \neq 0$ , não podem ser destruídas por uma deformação contínua do parâmetro de ordem, adquirindo então estabilidade topológica [7]. Por exemplo, num vórtice de carga topológica  $Q = 1$ , os spins giram num circuito fechado, sendo, dessa forma, impossível mudar sua configuração globalmente para aquele de um estado perfeitamente alinhado sem interferir nos spins a uma distância arbitrária do núcleo. A estabilidade topológica é diferente da estabilidade física, a qual depende da energia livre de diferentes configurações. Contudo, em muitos casos, a estabilidade topológica implica na estabilidade física, como é o caso, por exemplo, dos vórtices com carga  $Q = 1$ , pois distorcer continuamente uma configuração desse tipo para trazê-la ao estado de spins completamente alinhado demandaria uma quantidade de energia considerável. Então, é muito improvável que flutuações estatísticas na energia destruam o vórtice. Por outro lado, vórtices com carga  $Q > 1$  dificilmente adquirem estabilidade física<sup>1</sup>, geralmente decaindo em similares, mas de carga unitária.

Sabe-se que um vórtice está associado ao mapeamento do círculo (essencialmente do *espaço interno*) do parâmetro de ordem no espaço físico. No caso do modelo  $XY$ , onde podemos escrever  $\theta = Q\phi + \theta_0$ , isso implica que:

$$\oint d\theta = \oint_C \frac{d\theta}{d\phi} d\phi = 2\pi Q, \quad Q = 0, 1, 2, \dots, s. \quad (1.10)$$

A energia de um defeito topológico tem duas partes: a energia do núcleo, que está associada à destruição do parâmetro de ordem no caroço do defeito; e a *energia elástica*, associada à lenta variação espacial do parâmetro de ordem. Não nos aprofundaremos aqui numa discussão acerca da energia do vórtice. Nos limitaremos apenas em dizer que para um vórtice com carga  $Q$  no plano, a energia é proporcional a  $\pi Q^2 \ln(R/a)$  [7], onde  $a$  é o raio do caroço e  $R$  o raio da amostra. Este valor será útil na discussão levantada no Apêndice B.

Por outro lado, sólitons surgem como soluções especiais de equações diferenciais não lineares, representando configurações estáveis com energia bem definida e sem singularidades. Já que sólitons são soluções de equações não lineares, o princípio de superposição não é obedecido, implicando que, quando dois sólitons se encontram, a excitação resultante é complicada. Contudo, assintoticamente, os sólitons se separam novamente (passam um através do outro), adquirindo a mesma forma que possuíam antes. Uma outra propriedade interessante dos sólitons é que sua quantização não é trivial, devido ao fato de que eles não obedecem ao princípio da superposição.

---

<sup>1</sup>A demanda energética é muito alta, já que, em geral, a energia do vórtice aumenta com  $Q^2$ .

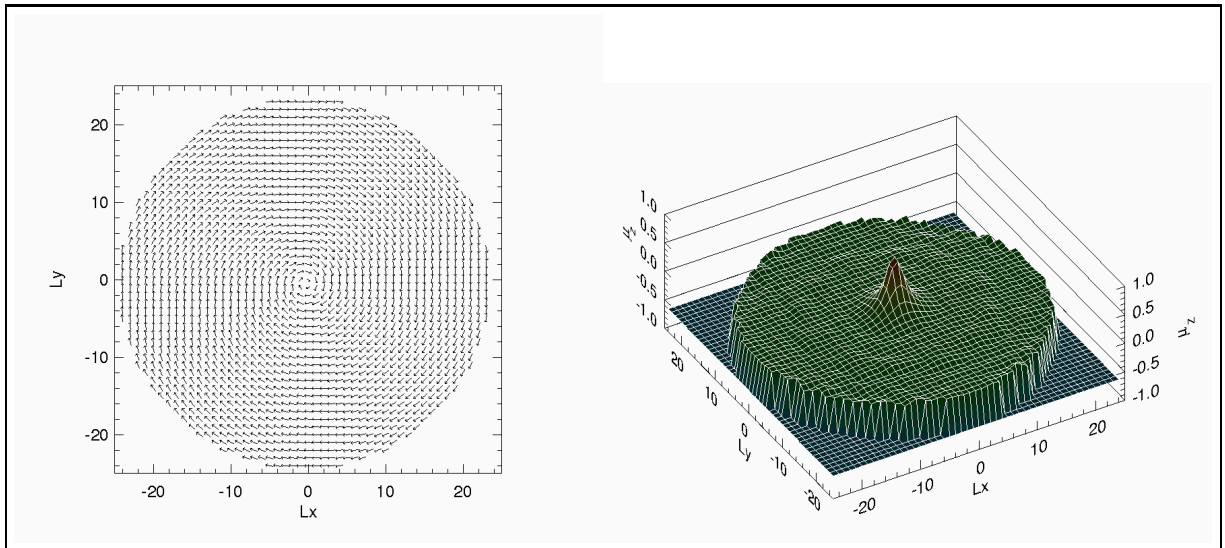


Figura 1.4: Representação de um vórtice com carga topológica  $Q = 1$  numa superfície plana: A figura a esquerda representa uma visão bidimensional do vórtice. A figura a direita mostra o comportamento do mesmo vórtice, porém, a imagem é tridimensional. Pode-se notar, na última figura, o desenvolvimento de uma componente na direção do eixo  $z$  (*out-of-plane*). Como veremos adiante no texto, o desenvolvimento dessa componente se deve ao fato de que a configuração na qual os vetores de spin (espaço interno) mantêm-se preferencialmente no plano  $xy$  (na região do núcleo) demanda energia infinita, de forma que, energeticamente, é preferível tal configuração. Veremos ainda que um vórtice no toro não desenvolve a componente *out-of-plane*.

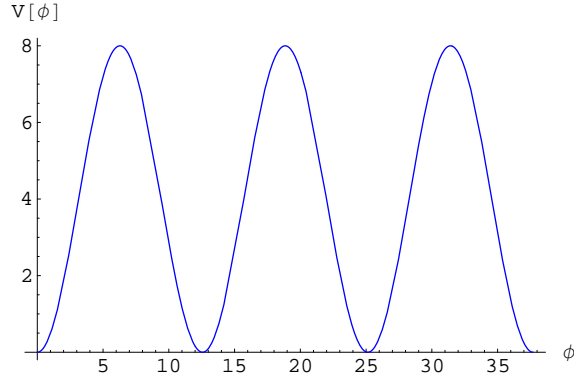


Figura 1.5: Comportamento de  $V(\phi)$  com  $\phi$  variando de 0 a  $12\pi$  e  $\rho = 0,5$ . Pode-se observar a degenerescência do estado fundamental nos pontos onde  $\phi$  obedece à equação (1.12).

Um dos contextos mais estudados e que apresentam soluções solitônicas é aquele descrito pela equação de sine-Gordon, a qual tem sido usado para explicar uma larga gama de fenômenos. A equação de sine-Gordon (em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal) é dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho^2} \sin(\rho\phi) = 0 \quad (1.11)$$

e descreve um campo escalar ( $\phi$ ) que possui soluções tanto estacionárias quanto dinâmicas. A equação (1.11) possui um número infinito de soluções constantes (as quais possuem energia nula, como será demonstrado logo em seguida.):

$$\phi = \frac{2\pi n}{\rho}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

Dessa forma, a equação de sine-Gordon possui um vácuo degenerado, como pode ser visto na Fig. 1.5 (vácuo aqui, não representa um estado no espaço de Hilbert, mas simplesmente uma classe de configurações de energia nula). A Lagrangiana para (1.11) é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi), \quad (1.13)$$

onde:

$$V(\phi) = \frac{1}{\rho^2} [1 - \cos(\rho\phi)]. \quad (1.14)$$

Então, a densidade de energia da configuração de campo é:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi), \quad (1.15)$$

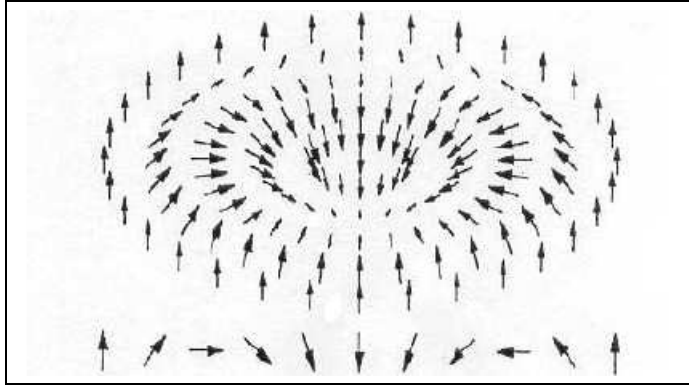


Figura 1.6: Representa3o de um s3liton com carga topol3gica  $K = 1$ , no plano  $R^2$ .

de onde pode-se ver que a energia se anula no m3nimo absoluto de  $V(\phi)$ , os quais s3o dados quando  $\phi$  3 descrito por (1.12). O comportamento de  $V(\phi)$  pode ser visto na Fig. 1.5.

Assim como o v3rtice, o s3liton tamb3m 3 um objeto topol3gico cuja estabilidade permite a exist3ncia de uma lei de conserva3o, ou seja, deve haver uma quantidade  $K$  que se conserva e 3 igual a um inteiro  $n$ . Podemos associar  $K$  a uma carga topol3gica e, novamente, n3o podemos deformar um s3liton com carga igual a 1 ao estado de um campo vetorial perfeitamente alinhado (estado fundamental). A Fig. 1.6 traz a representa3o de um s3liton com carga  $K = 1$ .

Excita3o3es de origem topol3gica s3o importantes tanto na caracteriza3o dos sistemas f3sicos onde se apresentam como em potenciais aplica3o3es tecnol3gicas a elas atribu3das. Por exemplo, paredes de dom3nio s3o largamente utilizadas como elementos b3sicos de grava3o magn3tica [1]. Os v3rtices, por sua vez, est3o associados 3 transi3o de fase topol3gica, quando pares se dissociam. Esse fen3meno pode ser observado em superfluidos [7]. Al3m disso, eles podem desempenhar um papel importante em mecanismos de grava3o e l3gica no 3mbito nanomagn3tico. Dentre outras possibilidades, seus estados de “polariza3o” e de “quiralidade” poderiam armazenar bits de informa3o.

Os estudos de fen3menos magn3ticos (dentre outros) em superf3cies curvas e/ou com topologia n3o-trivial n3o passariam de meros exerc3cios acad3micos, n3o fossem os recentes avan3os na fabrica3o e caracteriza3o de nanodispositivos magn3ticos. Al3m de magnetos com geometrias mais conhecidas como por exemplo, a cil3ndrica e a esf3rica, *nanorings* (portanto, com topologia toroidal) magn3ticos s3o freq3entemente sintetizados e estudados por apresentarem, dentre outras possibilidades, estados de

magnetização remanente (estável na ausência de campo externo) com configuração de vórtice, os quais podem se constituir em elementos de lógica binária [11, 12].

Este trabalho tem como objetivo estudar algumas propriedades do modelo de Heisenberg para ferromagnetos clássicos na geometria/topologia toroidal. Para tal, o restante do texto é dividido em três capítulos: no Capítulo 2, estudaremos o modelo de Heisenberg (anisotrópico) e faremos uma descrição da superfície do toro explicitando algumas de suas propriedades geométricas e topológicas, em especial, aquelas úteis e importantes para a análise que faremos em seguida.

O Capítulo 3 trata do estudo do modelo em questão na superfície toroidal. Aí obtemos soluções especiais como o modelo isotrópico, de onde podemos observar o aparecimento de sólitons como soluções e o modelo do rotor planar (ou XY estático), onde estudamos excitações tipo vórtice. Neste capítulo levantamos ainda algumas discussões sobre nossos resultados.

Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos as conclusões gerais, bem como algumas perspectivas para trabalhos futuros. Na seqüência, são apresentados alguns apêndices que visam facilitar o estudo do presente texto, os quais podem ser omitidos pelo leitor familiarizado com as técnicas e conceitos aqui descritos.

# Capítulo 2

## Considerações gerais

### 2.1 Motivação

Embora os materiais magnéticos sejam conhecidos há cerca de três mil anos, foi somente no primeiro quarto do século XX, com o surgimento da Mecânica Quântica que a origem microscópica do magnetismo pôde ser compreendida [4]. Durante esse período as pesquisas em materiais magnéticos começaram a avançar, e um dos pesquisadores que mais se destacou nessa área foi Sir James Alfred Ewing, que estudou engenharia em Edinburgh e começou a estudar magnetismo enquanto lecionava na Universidade de Tóquio, no Japão. A principal contribuição de Ewing para as pesquisas em magnetismo foi a descoberta da histerese magnética [13]. Ele propôs um modelo de magnetismo para o ferro baseado em bússolas que eram livres para girar, um efeito que podemos associar aos domínios magnéticos e ao movimento dos contornos desses domínios, como se pensa atualmente.

Em 1930, Van Vleck aplicou a Mecânica Quântica ao cálculo de suscetibilidades magnéticas, e por volta de 1935 uma compreensão razoável da suscetibilidade paramagnética em sólidos cristalinos já havia sido desenvolvida. Entretanto, no caso dos materiais hoje conhecidos como ferromagnéticos, as teorias não tiveram tanto sucesso assim, pois esse fenômeno ainda era entendido de acordo com o conceito de campo molecular, proposto por Weiss<sup>1</sup>, com o qual ele tentava explicar a ordem ferromagnética de certos materiais. Um passo importante foi dado quando Heisenberg propôs

---

<sup>1</sup>Historicamente, a idéia de campo molecular surgiu antes da formulação da Mecânica Quântica do magnetismo. Em seu modelo, Weiss postulou que cada momento magnético de uma amostra sente um campo magnético proporcional à magnetização total do espécime [4] ( $B_m = \lambda_m M$ ), onde  $\lambda_m$  é chamada constante de campo molecular.

que a origem do campo molecular estava associado a trocas quanto-mecânicas. Posteriormente, F. Bloch mostrou que a Hamiltoniana de Heisenberg<sup>2</sup> levava ao conceito de ondas de spins, as quais são excitações magnéticas coletivas que não podiam ser observadas diretamente na época, no entanto, a predição de que elas causavam momentos ferromagnéticos que variavam como  $(1 - aT^{3/2})$ , em baixas temperaturas, foi verificado em cuidadosas medidas [13].

Por volta de 1939, o ferro, o níquel, o cobalto e suas ligas eram quase que as únicas substâncias magnéticas conhecidas, mas a descoberta das ferrites<sup>3</sup> mudou este contexto, pois o número de materiais que apresentavam magnetização não nula na ausência de um campo externo aumentou bastante. No entanto, havia um problema teórico devido ao fato de que o momento magnético medido para esses materiais era sempre menor que o momento calculado. Parece ter sido o estudo desse tipo de material, levado a cabo por A. Serres, que levou Néel a sugerir que o baixo momento magnético era provocado pelo alinhamento antiparalelo de momentos iônicos de diferentes magnitudes o que, por consequência, levava ao cancelamento parcial do momento magnético [13]. Com essa sugestão e com o desenvolvimento da teoria de campo molecular, Néel não resolveu apenas o problema das ferrites, mas tornou o antiferromagnetismo inevitável. O estudo das ferrites permitiu ainda aos cientistas de materiais a possibilidade da descoberta de uma vasta gama de compostos que exibissem ordenamento magnético. Dentro de poucos anos, diversos outros sistemas foram estudados, inclusive estruturas cristalinas que permitiam arranjos em planos e folhas, tornando possível estudar o comportamento magnético em uma e duas dimensões, o que levou a um interesse em aproximações teóricas para sistemas magnéticos em baixa dimensionalidade.

Dentre os principais motivos para a importância dada às pesquisas em magnetismo nos dias atuais podemos destacar o fato de que os materiais magnéticos desempenham um papel muito importante nas aplicações e no surgimento de novas tecnologias, sendo ainda o campo da Física de maior aplicação da Mecânica Estatística. Foi graças a ele que poderosas ferramentas desenvolvidas nas últimas décadas foram postas à prova, como as expansões em altas temperaturas da Teoria de Grupos de Normalização e dos métodos de simulação por computador, como o método de Monte Carlo [3]. Nas aplicações tradicionais, como motores, geradores, transfor-

---

<sup>2</sup>Na Seção 2.2, entraremos em mais detalhes sobre a Hamiltoniana de Heisenberg.

<sup>3</sup>São exemplos de ferrites alguns óxidos de ferro com a estrutura cristalina do espinélio natural tais como o  $MgFe_2O_4$ , o  $MnFe_2O_4$ , o  $NiFe_2O_4$ , o  $CoFe_2O_4$  e o  $CuFe_2O_4$ , além de óxidos de ferro com a estrutura cristalina da granada, como a granada de ferro e ítrio  $Y_3Fe_5O_{12}$ .

madores, geração e distribuição de energia elétrica, aplicação automotiva, os materiais magnéticos são utilizados como ímãs permanentes e têm a propriedade de criar um campo magnético constante, dessa forma, torna-se interessante o desenvolvimento de novos materiais que diminuam perdas magnéticas e aumentem o rendimento dessas máquinas [14]. Além disso, a aplicação de compósitos magnéticos na resolução de problemas ambientais têm recebido considerável atenção nos últimos anos [15]. Tais compósitos poderiam ser utilizados para adsorver contaminantes e efluentes industriais que, após a adsorção, seriam separados por um simples processo magnético. Alguns exemplos desta tecnologia são a utilização de partículas magnéticas para acelerar a coagulação em esgoto, remoção de radionucleotídeos do leite e remoção de corantes orgânicos [16]. Um outro desafio para os cientistas que trabalham com magnetismo é o desenvolvimento de novos polímeros para a aplicação na blindagem de radiações eletromagnéticas [17]. Esses polímeros são denominados metais sintéticos pelo fato de possuírem propriedades elétricas, eletrônicas, magnéticas e ópticas semelhantes às dos metais. Finalmente, uma das mais importantes aplicações dos materiais magnéticos que adquiriu grande importância nas últimas décadas é a gravação magnética, usada na tecnologia eletrônica para armazenamento não-volátil de informação e que permite regravação. Ela é essencial para o funcionamento dos gravadores de som e vídeo, bem como de inúmeros equipamentos acionados por cartões magnéticos e tornou-se muito importante nos computadores [15], os quais estão intimamente ligados ao desenvolvimento da chamada era da informação e dos conceitos daí derivados. Esses conceitos são, por sua vez, inseparáveis das mudanças radicais ocasionadas pelas novas tecnologias, as quais orientam acentuadamente o futuro social, econômico, político, cultural e ambiental das populações [18].

A existência da possibilidade de gravação magnética está intimamente relacionada com a existência de domínios magnéticos; esses, por sua vez, são separados por estruturas topológicas, as paredes de domínio. Assim, para que haja uma boa compreensão acerca da gravação magnética, faz-se necessário um estudo das paredes de domínio. A figura 2.1 representa uma parede de domínio de 180 graus, separando dois domínios cujas magnetizações têm sentidos opostos. Essas paredes têm espessura da ordem de 100 a 1000 nanômetros.

Conceitos geométricos e topológicos são uma ferramenta de muita importância em muitas áreas de Ciências Naturais, em especial, Física. A idéia de simetria, intimamente relacionada à geometria, é base para o estudo de propriedades fundamentais de muitos sistemas físicos. Topologia, por sua vez, é crucial para classificar e dar es-

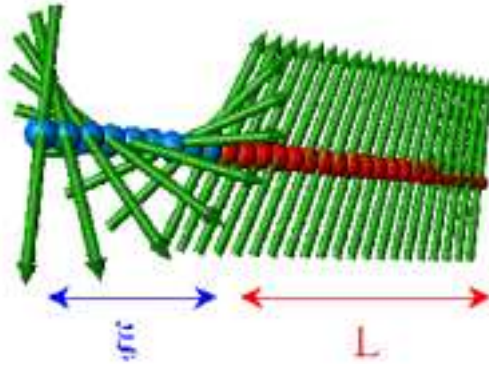


Figura 2.1: Representação de uma parede de domínio de 180 graus. As espessuras da parede e do domínio são representadas por  $\xi$  e  $L$ , respectivamente.

tabilidade a certas excitações, como sólitons e vórtices. Essas e outras excitações têm sido observadas tanto em magnetismo (planar, mais comumente) quanto em sistemas correlatos, como supercondutores, superfluidos, etc. Além disso, propriedades básicas de excitações topológicas têm sido também investigadas em geometrias curvas. As excitações tipo sóliton associadas ao modelo sigma não linear ( $NL\sigma M$ ) foram estudadas em diversas geometrias não planas, tais como: cilíndrica [20, 21, 22, 23, 24, 25]; cônica [26, 27]; esférica [28]; pseudo-esférica [29], etc. Além disso, excitações tipo-vórtice foram estudadas em um suporte cônico [30], esférico [28], pseudo-esférico [29]. Em todos esses trabalhos, fica evidente a influência da geometria do espaço físico nas características de tais objetos. Os sólitons foram ainda estudados em superfícies não simplesmente conexas, tais como o plano sem um disco central e o cone truncado [31].

Além do magnetismo, o estudo dos sólitons é muito importante para diversas áreas da Física, como por exemplo a Cromodinâmica Quântica, que é de fundamental importância para o entendimento das interações fortes. Nesta área, G. t'Hooft [32] e E. Witten [33] propuseram uma generalização dessa teoria, cuja análise dos resultados levam a conceitos de cromodinâmica Quântica nos quais os “*barions*” aparecem como excitações topológicas de energia bem definida (sólitons). Por outro lado, o estudo de tais estruturas, em teorias altamente não lineares, também é importante para o entendimento de processos biofísicos e biológicos [34, 35].

É importante notar que a presença de propriedades, estruturais e dinâmicas, de excitações não-lineares em sistemas magnéticos são de fundamental importância para a caracterização desses sistemas, em especial, quando se pensa em aplicações tecnológicas

que presumem o controle dessas excitações. Vórtices têm sido encontrados em muitos sistemas magnéticos, por exemplo, em nanodiscos ferromagnéticos, onde exibem uma estrutura planar, exceto no núcleo, onde os spins desenvolvem uma componente *out-of-plane* (*fora do plano*) (veja Ref. [36, 37] e as referências lá citadas), no entanto, tal caroço pode deixar de ser exibido se o vórtice nuclear ao redor de um defeito (cavidade) suficientemente grande, como é o caso de nanomagnetos com topologia toroidal (cilíndricas com buracos, *rings*, etc.) [38]. Em conexão com esse ponto, veremos na seção 2.3, que a topologia toroidal exibe um *cutoff* natural, o *genus*, o qual, para o toro do tipo anel (*ring torus*), leva a uma regularização da estrutura do vórtice, prevenindo o desenvolvimento do caroço. Além disso, ao estudar excitações topológicas na geometria do toro, desejamos realizar algumas aproximações assintóticas e comparar nossos resultados com outras soluções que serão discutidas mais tarde neste texto.

Os vórtices também estão presentes em diversas situações físicas além do magnetismo, podendo ser observados no escoamento de água pelo ralo de uma pia, no hélio superfluido, em estruturas galácticas, supercondutores, além de servir de teste experimental para a teoria de cordas (ver por exemplo [39] e os trabalhos aí relacionados). Por outro lado, o aprimoramento de técnicas teóricas e práticas para o estudo dos vórtices podem levar ao desenvolvimento de novas tecnologias, por exemplo, transistores que funcionam utilizando o fluxo de vórtices magnéticos [40]. Uma outra descoberta interessante foi a decodificação da estrutura tridimensional de um vórtice magnético do tamanho de um glóbulo vermelho de sangue. A descoberta dessa estrutura, que se assemelha a um tornado, poderá permitir a construção de discos rígidos para computador com capacidade maior do que os atuais [41].

Vórtices são excitações estáveis, o que os torna estruturas excelentes para o armazenamento de dados (caso de vórtices magnéticos), contudo uma grande quantidade de energia é necessária para alterar o estado de um vórtice de 1 para 0, por exemplo. No entanto, cientistas alemães descobriram um fenômeno que foi batizado de reversão dinâmica do núcleo do vórtice, no qual um pulso de energia é utilizado para construir um campo magnético a determinados ângulos do vórtice, de modo que toda a estrutura é forçada a executar um movimento contínuo de alteração de spin, utilizando para isso, uma pequena quantidade de energia. Isso cria uma magnetização oposta na borda do vórtice original. O resultado é um par vórtice/antivórtice, de tal forma que o antivórtice cancela o vórtice original, restando apenas o vórtice com polarização reversa [42].

Dessa forma, vê-se claramente que o estudo de excitações topológicas tem uma

grande potencialidade interdisciplinar, uma vez que essas aparecem em diversas áreas do conhecimento humano. A geometria do espaço físico influencia consideravelmente o comportamento dessas excitações, logo, torna-se importante o estudo de tais objetos em diferentes geometrias, pois, com o advento da nanociência, estruturas que se encontravam há pouco tempo restritas à imaginação, estão se tornando realidade. Arranjos de alguns poucos átomos com dimensões da ordem de nanômetros têm sido fabricados e manipulados. Não só o tamanho, mas também as formas de tais estruturas são cada vez mais intrigantes. De fato, vários estudos teóricos e experimentais têm sido reportados recentemente [24, 25, 29, 28, 31, 43, 44, 45]. Como as formas e tamanhos distintos dos objetos conduzem a propriedades fundamentais diferentes para tais estruturas, torna-se importante a compreensão da própria geometria de tais objetos. Só para citar um exemplo, dois nanomagnetos cilíndricos, um com face circular, o outro com face elíptica apresentam magnetização remanente bem distintos: enquanto no primeiro caso há o aparecimento de um vórtice isolado, no segundo, um par vórtice/antivórtice é observado [46].

No caso do presente trabalho, estamos interessados em estudar excitações tipo-sóliton e tipo-vórtice numa geometria toroidal, pois nessa superfície, as teorias de ordem cristalina e elasticidade estão pouco desenvolvidas [47]. Além disso, a geometria toroidal tem recebido considerável atenção, por exemplo: armadilhas para condensados de Bose-Einstein, dentro dos quais os átomos desenvolvem comportamento quasi-unidimensional sujeitos a condições de contorno periódicas [48, 49]. Nanotubos de carbono com forma de anel (topologia toroidal) são providos de sistemas quasi-zero-dimensionais sempre que o tamanho do anel for muito pequeno [11, 12]. Em adição, sua topologia também torna possível a realização de transistores de efeito de campo para aplicações tecnológicas [50], bem como o controle de sua magnetização estável pode potencializá-los a ser utilizados em dispositivos magneto-eletrônicos, isto é se estivermos falando a respeito de “*nanorings*” magnéticos. Em biologia, a forma toroidal tem sido observada em um grande número de proteínas envolvidas no metabolismo do DNA, embora essas proteínas tenham funções bastante distintas e sem conexões nesse mecanismo. Por que essa geometria é tão abundante nesses processos e a razão pela qual o processo de evolução a escolheu, entre muitas outras, permanece um quebra cabeças na literatura especializada [51].

Até onde sabemos, soluções solitônicas no toro elástico foram desenvolvidas a partir do modelo de Heisenberg isotrópico nos trabalhos [20, 52], os quais serão aqui discutidos. Assim como os autores desses trabalhos, utilizaremos o limite con-

tínuo da Hamiltoniana de Heisenberg para o ferromagneto clássico. Além do modelo isotrópico, estudaremos também soluções no modelo de Heisenberg anisotrópico, em especial, o chamado modelo XY, encontrando excitações tipo-vórtice, que nesse suporte apresentam-se sem caroço (caso do *ring torus*).

## 2.2 O modelo de Heisenberg

Sabe-se que o comportamento paramagnético de compostos cristalinos pode ser bem explicado por meio de um modelo de spins localizados interagindo apenas com um campo magnético externo (mais detalhes no Apêndice C). No entanto, esse modelo é incapaz de descrever o ordenamento ferromagnético, no qual um cristal permanece com magnetização não nula mesmo na ausência de um campo magnético externo. Como já foi dito na seção 2.1, a primeira tentativa para descrever esse fenômeno se deve a Weiss, que formulou a teoria de campo molecular: cada molécula é um dipolo magnético e está sob a ação dos campos magnéticos gerados pelas outras moléculas. A partir dessa idéia, Heisenberg e outros propuseram um novo mecanismo, baseado em argumentos quânticos e envolvendo interações de troca de natureza coulombiana que seriam suficientemente fortes para dar conta de um estado ferromagneticamente ordenado mesmo a temperaturas mais altas [53].

O Hamiltoniano de Heisenberg para interação entre primeiros vizinhos, numa rede bidimensional, é dado por:

$$H_{latt} = -J' \sum_{\langle i,j \rangle} H_{i,j} = -J' \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + (1 + \lambda) S_i^z S_j^z) \quad (2.1)$$

onde  $J'$  denota a constante de acoplamento entre os primeiros vizinhos e, a depender se  $J' < 0$  ou  $J' > 0$ , a Hamiltoniana descreve um sistema ferro ou antiferromagnético, respectivamente;  $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$  é o operador de spin no sítio  $i$  e o parâmetro  $\lambda$  está relacionado à anisotropia da interação entre os spins. Para  $\lambda > 0$ , os spins tendem a se alinhar ao longo do eixo  $z$  (do espaço interno; Regime de eixo fácil); para  $\lambda = 0$ , tem-se o caso isotrópico; para  $-1 < \lambda < 0$ , temos o regime de plano fácil, enquanto o caso  $\lambda = -1$ , leva ao modelo XY ou ao modelo do Rotor Planar (MRP). A diferença básica entre o MRP e o modelo XY está nos vínculos do espaço interno. No caso do MRP, temos o vínculo  $S^2 = S_x^2 + S_y^2 = 1$ , ao passo que no XY temos  $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1$  (mas apenas  $S_x$  e  $S_y$  aparecem no Hamiltoniano). Veja a Fig. 2.3 para visualizar a orientação do spin clássico no espaço interno.

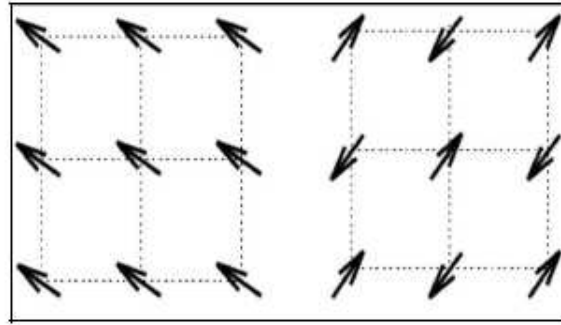


Figura 2.2: Configurações de mínima energia para os casos ferromagnético (esquerda) e antiferromagnético (direita).

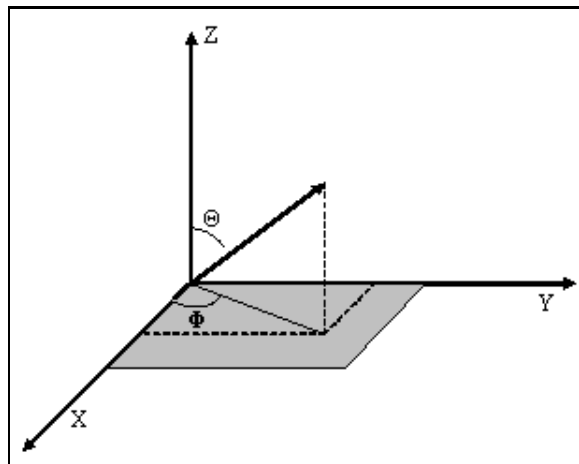


Figura 2.3: Esquema de um spin clássico com orientação determinada pelos ângulos esféricos (Esfera interna de spins). Note que como  $|\vec{S}|^2 = \text{constante}$ , o espaço interno será equivalente a uma esfera,  $S^2$  (se  $S_x, S_y, S_z \neq 0$  e  $\lambda = 0$ ) enquanto, se  $S_x, S_y \neq 0$  e  $S_z = 0$  teremos um círculo de spins. Neste caso,  $\Theta = \pi/2$ , e toda dinâmica de spins estará contida a variável  $\Phi(x, y)$ .

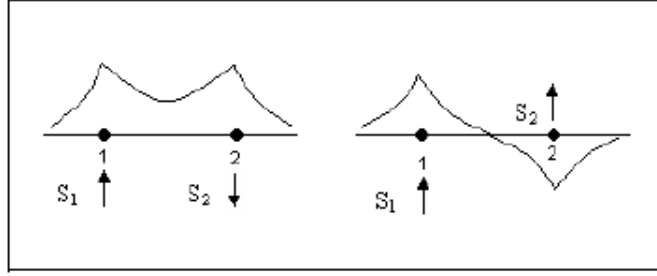


Figura 2.4: As direções dos spins dependem da distribuição espacial (função de onda espacial) de carga dos elétrons dos íons vizinhos. À direita vemos a representação de um estado tripleto e à esquerda, um estado singleto.

A interação entre primeiros vizinhos é chamada de interação de troca e  $J'$ , é a constante de troca. A explicação para esse fenômeno é dada pela mecânica quântica e pela propriedade da *indistinguibilidade de partículas idênticas*. De acordo com os princípios da Mecânica Quântica, as funções de onda que descrevem as partículas devem ser simétricas ou anti-simétricas mediante a troca dessas partículas (ver seção C.3). Funções de onda anti-simétricas podem ser obtidas de duas formas distintas: *i*) a função de onda espacial é simétrica e a função de onda relacionada ao spin é anti-simétrica (spins antiparalelos); *ii*) a função de onda espacial é anti-simétrica e a função de onda relacionada ao spin é simétrica (spins paralelos). No primeiro caso, a função de onda correspondente ao spin é um estado singleto, no segundo, ela é um tripleto. As representações para esses dois estados pode ser vista na Figura 2.4.

Considerando a equação de Schrödinger completa para duas partículas pode-se obter energias diferentes para cada um desses estados:  $E_S$  para o estado singleto e  $E_T$  para o estado tripleto. A diferença entre essas duas energias é associada ao parâmetro de troca  $J$  através da relação:

$$J = E_S - E_T. \quad (2.2)$$

Logo, esse parâmetro mede o custo de energia para que o sistema vá de um estado ao outro. Heisenberg propôs apresentar essa interação diretamente da função de onda dos spins correspondentes: sejam dois elétrons cujos spins são  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$ , nos íons 1 e 2 e descritos por funções de onda anti-simétricas (uma vez que os elétrons são férmions), a energia da interação será:

$$H = -J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \quad (2.3)$$

Numa aproximação contínua das variáveis espaciais e de spin, válida para grandes

comprimentos de onda e temperatura suficientemente baixa, o modelo dado por (2.1) pode ser escrito como (detalhes de tal obtenção são apresentadas no Apêndice A.):

$$H_1 = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 g^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3}\lambda) \left( \frac{\partial S^a}{\partial \eta_i} \right) \left( \frac{\partial S^b}{\partial \eta_j} \right) \sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2 \quad (2.4)$$

onde ( $J \equiv J'/2$ ),  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são as coordenadas curvilíneas da superfície,  $\delta_{a3}$  é o delta de Kronecker,  $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det[g_{ij}]|}$ ,  $g^{ij}$  são os elementos contravariantes da métrica da superfície (então  $g^{ij}g_{jk} = \delta_i^k$ ) e  $h_{ab}$  são os elementos da métrica do espaço interno (spins).

Além disso,  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z) \equiv (\text{sen}\Theta \cos\Phi, \text{sen}\Theta \text{sen}\Phi, \cos\Theta)$  é o campo vetorial de spin clássico avaliado numa esfera unitária (espaço interno), logo  $\Theta = \Theta(\eta_1, \eta_2)$  e  $\Phi = \Phi(\eta_1, \eta_2)$ . A Hamiltoniana (2.4) pode ser vista como sendo o modelo  $\sigma$  não-linear anisotrópico, ocupando uma posição numa geometria bidimensional arbitrária, dessa forma, essas considerações podem ser relevantes em outras áreas, como por exemplo hidrodinâmica, superfluidez e supercondutividade.

## 2.3 A superfície do toro

Um toro ordinário é uma superfície contendo “genus” um, e, dessa forma, possuindo um *buraco*. Ele pode ser construído a partir de um retângulo colando-se os vértices opostos sem voltas, isto é, seja um retângulo com vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ; um toro é formado a partir da identificação dos vértices  $A$  com  $C$ ,  $B$  com  $D$  e da junção desses pares de vértices. O toro mais comum, mergulhado num espaço tridimensional, é semelhante a uma *rosquinha* (*donut*), mas seu conceito matemático é mais sutil e complexo, particularmente em dimensões maiores [54]. A Fig. 2.5 representa o retângulo que pode dar origem ao toro e a aparência de um toro mergulhado num espaço tridimensional.

Um toro com  $n$  buracos internos é um “ $n$ -torus” (genus  $n$ ), geralmente representado por  $T^n$ . Vamos agora discutir algumas propriedades básicas de alguns tipos de toro. Seja  $R$  a distância do centro do buraco ao centro do tubo do toro, e seja  $r$  o raio do tubo (Ver Fig. 2.6). Então, a equação do toro em coordenadas cartesianas com simetria azimutal sobre o eixo  $z$  é dada por:

$$\left( R - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + z^2 = r^2, \quad (2.5)$$

e as equações paramétricas são:

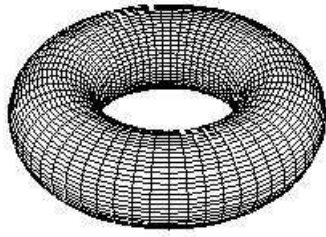


Figura 2.5: À direita vê-se a representação de um toro embebido num espaço tridimensional, e à esquerda, o retângulo e os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , que, ao serem identificados, dão origem ao toro.

$$\begin{aligned}
 x &= (R + r\cos\theta) \cos \phi \\
 y &= (R + r\cos\theta) \sin \phi \\
 z &= r \sin \theta,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

sendo  $\theta$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ . O toro pode ser classificado de acordo com a relação entre  $R$  e  $r$ :

- se  $R > r$ , ele é chamado “*ring torus*”;
- se  $R = r$  temos o “*horn torus*”;
- finalmente, se  $R < r$  o toro é chamado “*self-intersecting spindle torus*”.

Estes são os três toros padrão, cujas ilustrações são feitas na Fig. 2.7.

Para os nossos propósitos, será importante conhecer a métrica e o elemento de linha do toro. Os elementos  $g_{ij}$  da métrica serão determinados a partir da definição dada na referência [55], ou seja:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \tag{2.7}$$

de onde pode-se ver que os elementos da métrica são produtos escalares dos vetores tangentes  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$  às curvas  $\vec{r} = (x, y, z)$  para  $q_j$  constante. Esses coeficientes especificam a natureza do sistema de coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$ , que, no caso das coordenadas descritas na equação (2.6), equivale a  $(r, \theta, \phi)$ .

Neste trabalho, estamos interessados nos elementos da métrica com relação a  $\theta$  e  $\phi$ , uma vez que no modelo aqui desenvolvido, estudaremos excitações na superfície

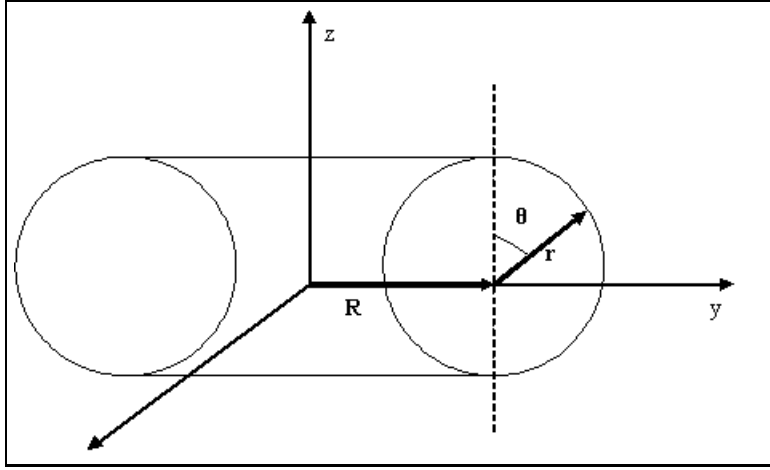


Figura 2.6: Corte feito no toro perpendicularmente ao eixo  $z$ . Vemos o sistema de coordenadas adotado.

do toro rígido, dessa forma, não nos preocuparemos com os elementos da métrica relacionados a  $r$ . Dessa forma, das equações (2.6) e (2.7), temos que:

$$\begin{aligned} g_{\phi\theta} &= g_{\theta\phi} = 0 \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\phi\phi} &= (R + r\text{sen}\theta)^2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

que são válidas para os três tipos de toro. Dessa forma, temos:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} (R + r\text{sen}\theta)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

É interessante observarmos que quando  $R = 0$ , a expressão (2.9) se reduz à métrica de uma esfera parametrizada pelos ângulos polar e azimutal  $\theta$  e  $\phi$ , respectivamente. Além disso, as próprias equações paramétricas dadas em (2.6) se reduzem ao caso esférico.

Pode-se definir os elementos da métrica contravariante,  $g^{ij}$ , a partir dos elementos da métrica covariante  $g_{ij}$  a partir da relação

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \tag{2.10}$$

onde  $\delta_{ij}$  é a delta de Kronecker, que é definida como  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Logo, temos que:

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R+r\text{sen}\theta)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

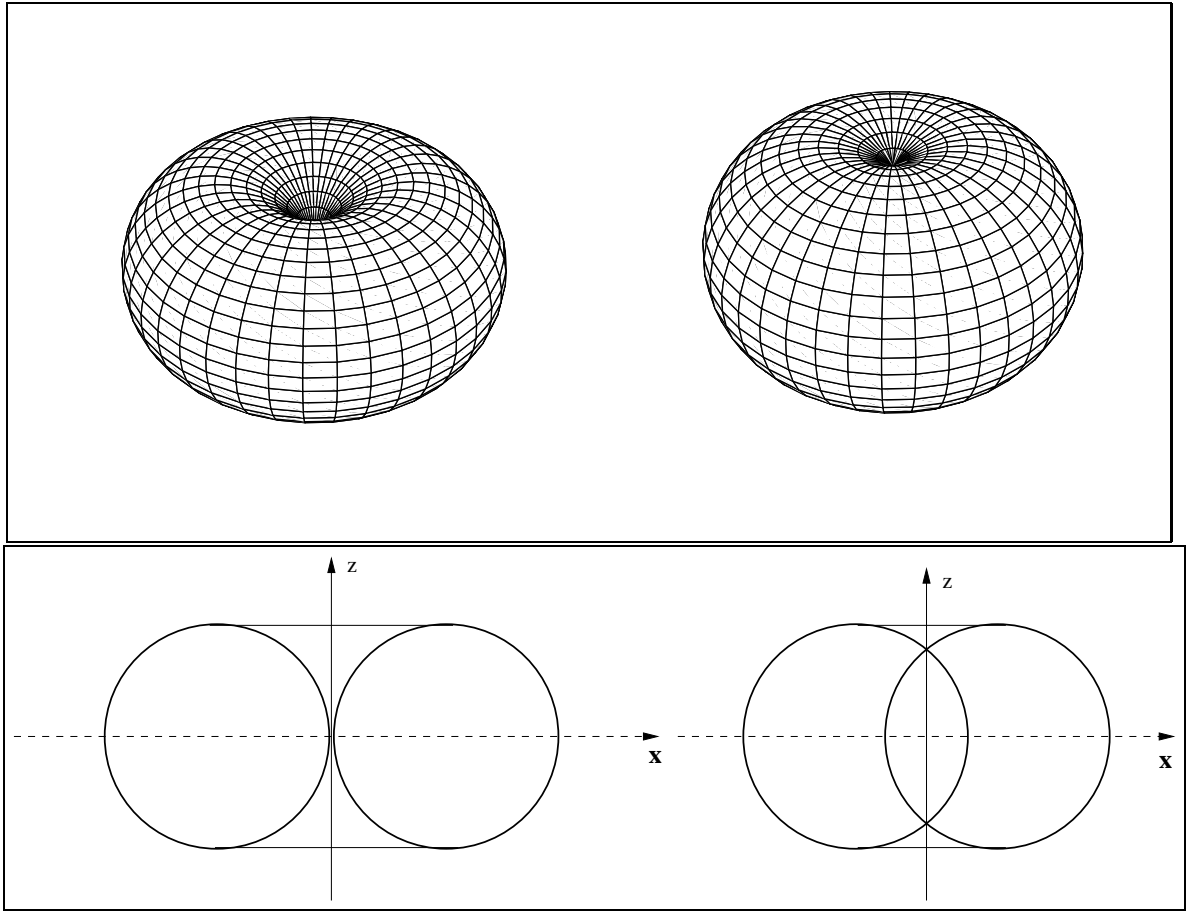


Figura 2.7: Vista global (acima) e seção transversal (abaixo) de um *horn torus* (esquerda) e *self-intersecting spindle torus* (direita). Os parâmetros são aqueles da Fig. 2.6. Note que na seção transversal, o horn torus e o spindle torus apresentam, respectivamente, um e um par de pontos onde eles se auto interceptam. De fato, no caso do spindle torus tais pontos correspondem a dois círculos ao longo dos quais essa superfície se auto-intercepta.

Pode-se determinar agora o elemento de linha para o toro, dado por:

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j = (R + r\sin\theta)^2 d\phi^2 + r^2 d\theta^2, \quad (2.12)$$

onde adotou-se a convenção de Einstein, na qual índices repetidos (uma vez co e outra contravariante) representam somatórios.

A definição para o operador gradiente numa superfície arbitrária qualquer é dada por [55]:

$$\vec{\nabla} = \sum_i \hat{q}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad (2.13)$$

onde  $h_i^2 = g_{ii}$  e  $q_i$  é a coordenada generalizada. Então o operador gradiente para superfície do toro será escrito como:

$$\vec{\nabla} = \hat{\phi} \frac{1}{R + r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (2.14)$$

Finalmente, a curvatura gaussiana do toro é [56]:

$$K = \frac{\operatorname{sen} \theta}{r(R + r \operatorname{sen} \theta)}, \quad (2.15)$$

de onde pode-se notar que o toro possui uma curvatura não trivial, pois, além de não ser constante<sup>4</sup> ao longo da variável<sup>5</sup>  $\theta$ , possui regiões onde a curvatura é positiva ( $0 < \theta < \pi$ ), regiões onde a curvatura é negativa ( $\pi < \theta < 2\pi$ ) e regiões onde a curvatura é nula ( $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ ).

Pode-se notar, a partir da análise da equação (2.15), que no limite  $R \rightarrow \infty$  temos  $K = 0$ , o que corresponde à curvatura do cilindro ou do plano. Entretanto, isso não quer dizer que nesse limite a topologia do toro seja a mesma do cilindro (ou plano). Isso é verdade apenas para a geometria, pois mesmo nesse limite, o toro continua apresentando o genus. Além disso, quando  $R = 0$ , vemos que além da métrica, a curvatura do toro também é a mesma da esfera ( $K = 1/r^2$ ), mas, assim como no caso anterior, isso só é verdade para a geometria e não para a topologia.

Além do sistema de coordenadas dado pelas equações (2.6), existe uma representação mais sutil para o toro, a qual foi utilizada no trabalho da referência [34] para estudar a família de soluções exatas e analíticas da estabilidade de membranas. A família de toros gerados pela revolução de círculos ao redor do eixo  $z$  pode também ser descrita por:

$$\vec{r} = \left( \frac{a \operatorname{senh} b}{\cosh b - \cos \eta} \cos \varphi, \frac{a \operatorname{senh} b}{\cosh b - \cos \eta} \operatorname{sen} \varphi, \frac{a \operatorname{sen} \eta}{\cosh b - \cos \eta} \right), \quad (2.16)$$

onde os parâmetros constantes  $a$  e  $b$  são ambos reais e positivos, enquanto  $\eta$  varia de  $-\pi$  a  $\pi$ . As relações

$$a = \sqrt{(R+r)(R-r)} \quad \text{e} \quad \cosh b = \frac{R}{r}, \quad (2.17)$$

permitem uma simples interpretação geométrica para os novos parâmetros, que podem ser chamados, assim como na referência [20], de *raio geométrico* ( $a$ ) e *ângulo excêntrico*

---

<sup>4</sup>Alguns exemplos de superfícies com curvatura gaussiana constante são a esfera,  $K = 1$ , o cilindro ou o plano, ambos com  $K = 0$  e a pseudo-esfera, onde  $K = -1$ .

<sup>5</sup>Apesar de não ter curvatura constante em  $\theta$ , o toro possui curvatura constante em torno de  $\phi$ .

(b). Deve-se observar então este sistema de coordenadas só é bem definido para o *ring torus*, ou seja, para  $R > r$ . Reciprocamente, os parâmetros naturais  $R$  e  $r$  satisfazem às relações:

$$R = \frac{a}{\tanh b} \quad \text{e} \quad r = \frac{a}{\sinh b}. \quad (2.18)$$

Então, as transformações levam a:

$$\tan\left(\frac{1}{2}\eta\right) = \sqrt{\frac{R-r}{R+r}} \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right), \quad (2.19)$$

onde  $\theta$  é o parâmetro utilizado no sistema de coordenadas descrito na equação (2.6) e representado na Fig. 2.6.

Pode-se determinar então os elementos das métricas covariante ( $g_{ij}$ ) e contravariante ( $g^{ij}$ ) nesse sistema de coordenadas. Temos que,

$$g_{\eta\varphi} = g_{\varphi\eta} = 0,$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 \sinh^2 b}{(\cosh b - \cos \eta)^2}$$

e

$$g_{\eta\eta} = \frac{a^2}{(\cosh b - \cos \eta)^2}.$$

Tomando então as definições dadas pelas equações (2.7) e (2.10), tem-se que:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{a^2 \sinh^2 b}{(\cosh b - \cos \eta)^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(\cosh b - \cos \eta)^2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

e

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{(\cosh b - \cos \eta)^2}{a^2 \sinh^2 b} & 0 \\ 0 & \frac{(\cosh b - \cos \eta)^2}{a^2} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Nesse caso, o operador gradiente para esse sistema de coordenadas será dado por:

$$\vec{\nabla} = \hat{\varphi} \frac{\cosh b - \cos \eta}{a \sinh b} + \hat{\eta} \frac{\cosh b - \cos \eta}{a}. \quad (2.22)$$

Finalmente, encerrando nossa discussão acerca da superfície do toro, temos que o elemento de linha para o sistema de coordenadas (2.16) é:

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = \frac{a^2 \sinh^2 b}{(\cosh b - \cos \eta)^2} d\varphi^2 + \frac{a^2}{(\cosh b - \cos \eta)^2} d\eta^2. \quad (2.23)$$

# Capítulo 3

## Modelo de Heisenberg e soluções topológicas no toro

Na seção 2.2 foi apresentado o limite contínuo da Hamiltoniana de Heisenberg para o ferromagneto clássico. No entanto, a forma como ela está escrita é diferente da forma como aparece em diversos trabalhos [20, 28, 29, 52]. Pode-se testar a validade da Hamiltoniana descrita na equação (2.4) aplicando-a a um problema cujos resultados já são bem conhecidos. Optamos aqui por tratá-la no caso do plano, o que é feito no Apêndice B.

Nosso intuito, no entanto, é estudar o modelo de Heisenberg no toro, para a obtenção de excitações tipo-sóliton e tipo-vórtice nessa superfície.

### 3.1 O modelo de Heisenberg no toro

Nosso objetivo é encontrar excitações topológicas numa geometria toroidal, a qual se apresenta como uma superfície não-simplesmente conexa, uma vez que nem todos os “laços” (loops) definidos em sua superfície podem ser contraídos a um ponto através de deformações contínuas sucessivas.

Diante disso, resolveremos as equações de movimento para os dois sistemas de coordenadas que foram apresentadas na seção 2.3, uma vez que ambos serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho.

Tomando o sistema de coordenadas dado pela equação (2.6), os elementos da métrica contravariante definidos em (2.11), a matriz da métrica covariante (2.9) e parametrizando o espaço de spins (espaço interno) em coordenadas cartesianas, de

forma que  $h_{ab} = \delta_{ab}$ , a Hamiltoniana (2.4) toma a forma:

$$H = J \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} \left[ \left( \frac{\partial S^x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^y}{\partial \phi} \right)^2 + (1 + \lambda) \left( \frac{\partial S^z}{\partial \phi} \right)^2 \right] + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} \left[ \left( \frac{\partial S^x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^y}{\partial \theta} \right)^2 + (1 + \lambda) \left( \frac{\partial S^z}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} d\phi d\theta. \quad (3.1)$$

Tomando agora a representação de  $\vec{S}$  em termos de  $\Theta$  e  $\Phi$ , obtemos:

$$H = J \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} [(1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) (\partial_{\phi} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\phi} \Phi)^2] + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} [(1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) (\partial_{\theta} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\theta} \Phi)^2] \right\} d\phi d\theta, \quad (3.2)$$

onde adotamos  $\partial_{\theta} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}$  e  $\partial_{\phi} \equiv \frac{\partial}{\partial \phi}$ .

Agora, podemos determinar as equações de movimento para a Hamiltoniana dada. Essas expressões são obtidas a partir da equação de *Euler-Lagrange* para campos. Adotaremos aqui a forma como ela é definida na referência [8], ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \right] = 0, \quad (3.3)$$

que representa a equação de movimento para o campo  $\varphi$ , análoga à segunda equação de Newton para o movimento de pontos materiais. Aqui,  $x^{\mu} = (x^1, x^2) = (\phi, \theta)$  e novamente é adotada a convenção de Einstein na qual índices repetidos (um co e outro contravariante) representam somatórios.

Como estamos procurando por soluções estáticas, o papel desempenhado por  $\mathcal{L}$  em (3.3) é assumido pela densidade da Hamiltoniana,  $h$ , porém com sinal negativo, ou seja:

$$H = \sum \pi(q, \dot{q}) \dot{q} - L \Rightarrow H = -L,$$

onde  $q$ ,  $\pi(q, \dot{q})$ ,  $H$  e  $L$  são, respectivamente, a coordenada canônica, o momento conjugado, a Hamiltoniana e a Lagrangiana do sistema. A densidade da Hamiltoniana para o nosso caso é dada por:

$$h = \left\{ \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} [(1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) (\partial_{\phi} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\phi} \Phi)^2] + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} [(1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) (\partial_{\theta} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\theta} \Phi)^2] \right\}. \quad (3.4)$$

Então, tomando as equações (3.3) e (3.4), temos que a equação de movimento em  $\Theta$  é:

$$\frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial h}{\partial (\partial_\phi \Theta)} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial h}{\partial (\partial_\theta \Theta)} \right] = 0. \quad (3.5)$$

Logo, realizando as devidas operações, chegamos à seguinte relação:

$$\begin{aligned} \text{sen}\Theta \cos\Theta \left\{ \frac{r}{R + r\text{sen}\theta} [\lambda (\partial_\phi \Theta)^2 + (\partial_\phi \Phi)^2] + \frac{R + r\text{sen}\theta}{r} [\lambda (\partial_\theta \Theta)^2 + (\partial_\theta \Phi)^2] \right\} = \\ \cos\theta (1 + \lambda \text{sen}^2 \Theta) (\partial_\theta \Theta) + \frac{R + r\text{sen}\theta}{r} [(1 + \lambda \text{sen}^2 \Theta) \partial_\theta^2 \Theta + 2\lambda \text{sen}\Theta \cos\Theta (\partial_\theta \Theta)] + \\ + \frac{r}{R + r\text{sen}\theta} [(1 + \lambda \text{sen}^2 \Theta) \partial_\phi^2 \Theta + 2\lambda \text{sen}\Theta \cos\Theta (\partial_\phi \Theta)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analogamente, obtém-se a equação de movimento em  $\Phi$ :

$$\cos\theta \text{sen}^2 \Theta \partial_\theta \Phi + \frac{R + r\text{sen}\theta}{r} \partial_\theta (\text{sen}^2 \Theta \partial_\theta \Phi) + \frac{r}{R + r\text{sen}\theta} \partial_\phi (\text{sen}^2 \Theta \partial_\phi \Phi) = 0. \quad (3.7)$$

Após desenvolvidas as equações de movimento para o sistema de coordenadas dado por (2.6), podemos fazer o mesmo para o sistema de equações dado em (2.16). Este procedimento será útil para determinar as soluções para o modelo de Heisenberg isotrópico no toro, uma vez que esta representação nos leva a expressões de resolução mais simples. Isto também é verdade para as soluções anisotrópicas, em especial aquelas onde  $\lambda = -1$ , que serão estudadas em detalhes quando nosso objetivo for encontrar soluções tipo-vórtice no toro. No entanto o sistema de coordenadas (2.6) também é interessante para os nossos objetivos devido a algumas analogias que serão feitas nas discussões dos resultados, além do fato de ela ser válida para qualquer tipo de toro, enquanto (2.16) só é válida para o caso do *ring torus*.

Trabalhando agora com o sistema de coordenadas<sup>1</sup> (2.16), temos que a Hamiltoniana<sup>2</sup> (2.4) será escrita como:

---

<sup>1</sup>Tal sistema de coordenada, eq. (2.16), lê-se:

$$\vec{r} = \left( \frac{a \text{sen}hb}{\cosh b - \cos \eta} \cos \varphi, \frac{a \text{sen}hb}{\cosh b - \cos \eta} \text{sen}\varphi, \frac{a \text{sen}\eta}{\cosh b - \cos \eta} \right)$$

<sup>2</sup>Novamente, reescrevemos a Hamiltoniana geral, eq. (2.4):

$$H_1 = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 g^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3}\lambda) \left( \frac{\partial S^a}{\partial \eta_i} \right) \left( \frac{\partial S^b}{\partial \eta_j} \right) \sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2$$

$$H = J \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \left\{ \frac{1}{\operatorname{senhb}} [(1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) (\partial_{\varphi} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\varphi} \Phi)^2] + \operatorname{senhb} [(1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) (\partial_{\eta} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\eta} \Phi)^2] \right\}. \quad (3.8)$$

Fazendo a substituição  $\xi = \varphi \operatorname{senhb} \Rightarrow d\varphi = \frac{d\xi}{\operatorname{senhb}}$ , a Hamiltoniana acima pode ser reescrita na forma:

$$H = J \int_{-\pi \operatorname{senhb}}^{\pi \operatorname{senhb}} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \left\{ (1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) [(\partial_{\xi} \Theta)^2 + (\partial_{\eta} \Theta)^2] + \operatorname{sen}^2 \Theta [(\partial_{\xi} \Phi)^2 + (\partial_{\eta} \Phi)^2] \right\}. \quad (3.9)$$

Pode-se determinar então as equações de movimento procedendo da forma utilizada para encontrar os resultados dados em (3.6) e (3.7). As equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta \left\{ \lambda [(\partial_{\xi} \Theta)^2 + (\partial_{\eta} \Theta)^2] - (\partial_{\xi} \Phi)^2 - (\partial_{\eta} \Phi)^2 \right\} + \\ + (1 + \lambda \operatorname{sen}^2 \Theta) (\partial_{\xi}^2 \Theta + \partial_{\eta}^2 \Theta) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

e

$$\partial_{\xi} [\operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\xi} \Phi)] + \partial_{\eta} [\operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\eta} \Phi)] = 0. \quad (3.11)$$

Como esperado, as equações (3.6), (3.7), (3.10) e (3.11) que descrevem o regime anisotrópico geral do modelo de Heisenberg são altamente não-lineares, de forma que a procura por soluções gerais é uma tarefa muito complicada. Desse modo, apenas soluções especiais parecem ser passíveis de um estudo analítico. Algumas dessas soluções especiais serão desenvolvidas nas seções 3.2 e 3.3.

## 3.2 O regime isotrópico e soluções solitônicas

Teorias de campo clássicas não-lineares podem apresentar soluções comumente chamadas sólitons as quais representam configurações estáveis, com energia finita, bem definida e sem singularidades.

Determinaremos agora a solução das equações no modelo isotrópico ( $\lambda = 0$ ). Veremos que suas soluções mais simples são sólitons com carga fracionária, implicando que argumentos de homotopia não podem ser usados para garantir a estabilidade de tais excitações.

### 3.2.1 Coordenadas peri-polares

No caso isotrópico, a Hamiltoniana (3.9) simplifica-se para:

$$H = J \int_{-\pi \operatorname{sen} b}^{\pi \operatorname{sen} b} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \left\{ [(\partial_\xi \Theta)^2 + (\partial_\eta \Theta)^2] + \operatorname{sen}^2 \Theta [(\partial_\xi \Phi)^2 + (\partial_\eta \Phi)^2] \right\}, \quad (3.12)$$

ao passo que a eq. (3.10) toma a forma:

$$\partial_\xi^2 \Theta + \partial_\eta^2 \Theta = \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta [(\partial_\xi \Phi)^2 + (\partial_\eta \Phi)^2]; \quad (3.13)$$

já a eq. (3.11) permanece inalterada.

Aqui, consideraremos tanto as soluções que admitem simetria cilíndrica  $\Theta(\xi, \eta) = \Theta(\eta)$  e  $\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\xi)$  quanto aquelas que admitem simetria toroidal  $\Theta(\xi, \eta) = \Theta(\xi)$  e  $\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\eta)$ .

#### Simetria toroidal

Até onde sabemos, o modelo isotrópico no toro foi considerado previamente nos trabalhos das referências [20, 52]. Aí, os autores estavam basicamente interessados em estudar o modelo de Heisenberg no limite contínuo (modelo  $\sigma$  não-linear) numa seção do toro elástico exibindo condições de contorno homogêneas. No modelo rígido correspondente, os autores encontraram soluções topológicas tipo-sóliton com frustração geométrica devido à não-conectividade do toro. Ao assumir pequenas e suaves deformações, encontrou-se uma equação de Lamé não-homogênea, o que leva a um novo efeito geométrico: um *encolhimento global com inchaços*, ou seja, a seção do toro é encolhida globalmente e um inchaço aparece na região do sóliton. Para obter mais detalhes, o leitor é remetido à referência [52], na qual foi adotada a simetria toroidal, onde  $\Theta(\xi, \eta) = \Theta(\xi)$  e  $\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\eta)$ . Para essa simetria teremos a Hamiltoniana:

$$H = J \int_{-\pi \operatorname{senh} b}^{\pi \operatorname{senh} b} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta [(\partial_\xi \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_\eta \Phi)^2] \quad (3.14)$$

e as equações de Euler-Lagrange para os campos de spins:

$$\partial_\xi^2 \Theta = \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta (\partial_\eta \Phi)^2 \quad (3.15)$$

e

$$\partial_\eta [\operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_\eta \Phi)] = 0 \Rightarrow \partial_\eta^2 \Phi = 0. \quad (3.16)$$

De (3.16), temos que

$$\partial_\eta \Phi = q_\eta, \quad (3.17)$$

onde  $q_\eta \in \mathbb{Z}$ . Entretanto, soluções com  $q_\eta > 1$  são instáveis, pois demandam energia considerável para manter a configuração, então essas decaem em  $q_\eta = 1$ . Dessa forma, sem perda de generalidade, tomaremos, no restante desta seção, este valor para  $q_\eta$ . Substituindo este último resultado em (3.15), obtemos a equação de sine-Gordon (ESG):

$$\partial_\xi^2 \Theta = \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\Theta), \quad (3.18)$$

cujas soluções mais simples é:

$$\Theta(\xi) = 2 \arctan(e^\xi) \Rightarrow \Theta(\varphi) = 2 \arctan(e^{\varphi \operatorname{senh} b}). \quad (3.19)$$

Sabe-se que a ESG aparece em uma ampla variedade de sistemas físicos, como o estudo de fluxo magnético em funções de Josephson e pêndulos de torção acoplados (ver Ref. [20] e trabalhos aí relacionados), entre outros.

Inicialmente, parece que a equação (3.19) representa um  $\pi$ -sóliton cujo comprimento característico<sup>3</sup> é  $\frac{1}{\operatorname{senh} b}$ . No entanto, vê-se facilmente que quando  $\varphi$  varia de  $-\pi$  a  $\pi$ ,  $\Theta$  não sofre uma variação entre 0 e  $\pi$  para valores de  $R$  e  $r$  finitos e maiores que zero. A solução também depende de  $b$ , que, por sua vez, está relacionado com  $R$  e  $r$ , seguindo a relação:

$$\operatorname{senh} b = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r^2}} \Rightarrow b = \operatorname{arcsenh} \left( \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r^2}} \right). \quad (3.20)$$

Então, se  $R$  variar,  $\Theta$  também o fará, de forma que a solução (3.19) só representará um  $\pi$ -sóliton no limite em que  $R \rightarrow \infty$ . É fácil perceber que nesse limite a curvatura

---

<sup>3</sup>O comprimento característico de um sóliton pode ser interpretado como uma região na qual há uma mudança do parâmetro de ordem. Fora dessa região, o sistema está no estado fundamental [7].

do toro dada pela equação (2.15), é  $K = 0$  (curvatura nula). Ou seja, nesse limite, o toro se assemelha, geometricamente, a um cilindro infinito, ou ao plano punturado. As Figuras 3.1 e 3.2 mostram, respectivamente, o comportamento de  $\Theta$  quando  $\varphi$  varia de  $[-\pi, \pi]$  e a variação do comprimento característico do sóliton em função de  $R$ .

A energia da configuração pode ser determinada se substituirmos o resultado dado em (3.19) na equação (3.14), de forma que obteremos:

$$E_{soliton(\xi)} = 8\pi J \tanh(\pi \text{sen}hb). \quad (3.21)$$

Vê-se assim, que a energia do sóliton também é dependente do *ângulo excêntrico*  $b$ . Já é bem estabelecido que a energia mínima de um sóliton pertencendo à primeira classe de homotopia,  $Q = 1$ , do grupo  $\pi_2(F)$  é dada por  $E_{isotropico}^1 = 8\pi J$ , no entanto, este valor está em desacordo com nossa solução, de forma que seria interessante calcular a energia mínima para o nosso caso e compará-lo com  $E_{isotropico}^1$  e (3.21). Efetuando a decomposição de Bogomol'nyi [57], a equação (3.14) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} H &= J \int_{-\pi \text{sen}hb}^{\pi \text{sen}hb} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta [(\partial_\xi \Theta - \text{sen}\Theta \partial_\eta \Phi)^2 + 2\text{sen}\Theta (\partial_\eta \Phi)(\partial_\xi \Theta)] \Rightarrow \\ H &= J \int_{-\pi \text{sen}hb}^{\pi \text{sen}hb} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta (\partial_\xi \Theta - \text{sen}\Theta \partial_\eta \Phi)^2 + 2J \int_{-\pi \text{sen}hb}^{\pi \text{sen}hb} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta [\text{sen}\Theta (\partial_\eta \Phi)(\partial_\xi \Theta)] \Rightarrow \\ H &= J \int_{-\pi \text{sen}hb}^{\pi \text{sen}hb} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta (\partial_\xi \Theta - \text{sen}\Theta \partial_\eta \Phi)^2 + 2J \int_{2 \arctan(e^{-\pi \text{sen}hb})}^{2 \arctan(e^{\pi \text{sen}hb})} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\Theta d\Phi d\Theta \Rightarrow \\ H &= 8\pi J|Q| + J \int_{-\pi \text{sen}hb}^{\pi \text{sen}hb} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta (\partial_\xi \Theta - \text{sen}\Theta \partial_\eta \Phi)^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Mas o último integrando da expressão acima é sempre maior ou igual a zero, de forma que a energia mínima para o sistema será dada exatamente no limite em que  $\partial_\xi \Theta = \text{sen}\Theta \partial_\eta \Phi$  (equação auto-dual [25, 57]). Então, a decomposição de Bogomol'nyi leva à expressão:

$$E_{min} = 8\pi J|Q|, \quad (3.23)$$

onde  $Q$  é a carga do sóliton, definida como [58]:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \text{sen}\Theta d\Theta d\Phi. \quad (3.24)$$

Conseqüentemente,  $Q$  é o número de vezes que a esfera de spins,  $S^2$ , é mapeada no suporte físico em questão, neste caso, o toro. O resultado dado em (3.23) é independente

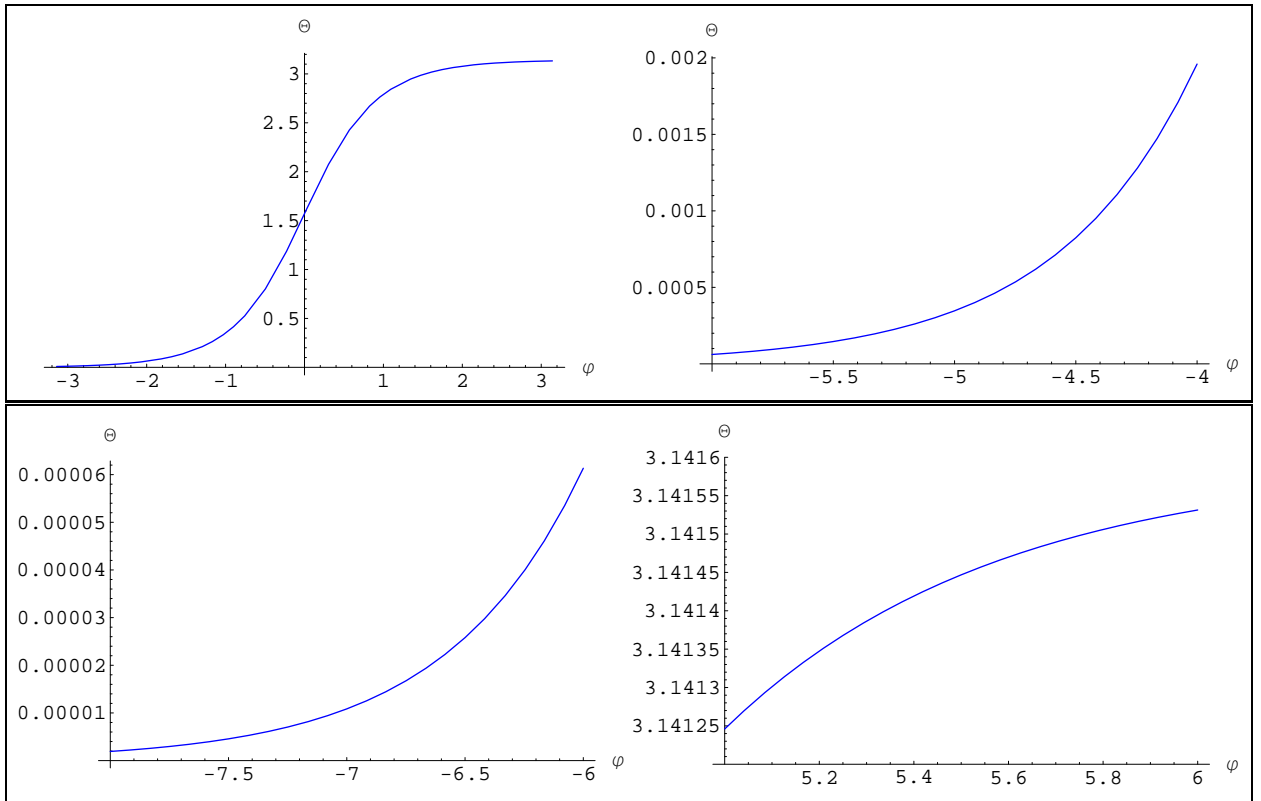


Figura 3.1: Comportamento de  $\Theta$  em função de  $\varphi$ . Inicialmente, ao analisar a figura da esquerda, parece que estamos diante de um  $\pi$ -sóliton, no entanto, após uma melhor observação, vemos que  $\Theta$  não está variando de 0 a  $\pi$  quando  $\phi \in [-\pi, \pi]$ . As figuras acima à direita e abaixo à esquerda mostram um *zoom* feito na primeira figura para  $\varphi < -\pi$ , ao passo que a figura abaixo à direita mostra um *zoom*, também para a primeira figura, porém, para  $\varphi > \pi$ . Note que o valor de  $\Theta$  diminui, mas não chega a zero. Este valor só é obtido quando  $R \rightarrow \infty$ . Da mesma forma,  $\Theta$  só assumirá o valor  $\pi$  nesse limite.

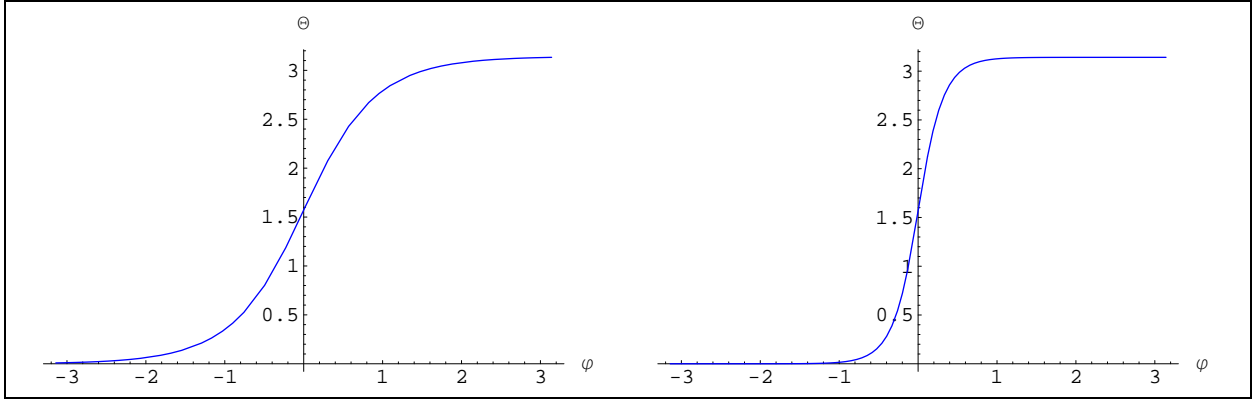


Figura 3.2: Comprimento característico do s3liton para diferentes valores de  $R$ . Aqui,  $r = 2$ ,  $q_\eta = 1$  e  $J = 1$ . Na primeira figura,  $R = 4$ , e na segunda,  $R = 10$ . Note que com o aumento de  $R$ , mantendo  $r$  fixo, o comprimento característico do s3liton diminui.

da m3trica da superf3cie em quest3o [21, 25, 57, 58]. Determinando a rela33o entre o nosso resultado e  $E_{min}$ , temos:

$$\frac{E_{soliton(\varphi)}}{E_{min}} = \frac{\tanh(\pi \operatorname{senh} b)}{Q} \leq E_{min}. \quad (3.25)$$

À primeira vista, pode-se pensar que a solu33o dada em (3.21) n3o obedece à desigualdade de Bogomol'nyi. Entretanto, Se observarmos a defini33o (3.24), e aplicarmos os limites em  $\Theta$  e  $\Phi$ , teremos que

$$|Q| = \tanh(\pi \operatorname{senh} b), \quad (3.26)$$

e ent3o a rela33o  $E/E_{min}$  passa a obedecer a desigualdade de Bogomol'nyi.

A express3o (3.26) nos mostra o comportamento de um s3liton fracion3rio, uma vez que a energia m3nima da excita33o tipo s3liton depende do raio do toro, e ainda, ela exibe uma carga solit3nica fracion3ria, e este resultado est3 em aparente desacordo com um resultado bem estabelecido [57, 58]: a de que a energia m3nima independente da m3trica 3 dada por  $E_{min} = 8\pi J|Q|$ , com  $Q$  podendo assumir apenas valores inteiros. Para o nosso resultado,  $Q$  s3 assumir3 valores inteiros quando  $R \rightarrow \infty$ , ou seja, quando o nosso suporte se torna o cilindro r3gido infinito, de fato, nesse caso, um completo mapeamento da esfera de spins na superf3cie do toro 3 poss3vel, correspondendo ent3o à primeira classe de homotopia do grupo  $\pi_2(S^2 \rightarrow T^1|_{R \rightarrow \infty}) = \mathbb{Z}$ . Este resultado est3 de acordo com o obtido para o cilindro r3gido infinito [21]. Contudo, para  $R$  finito, tal mapeamento 3 incompleto e argumentos de teoria de homotopia n3o podem ser usados

para classificar a solução (3.19) como uma excitação com estabilidade topológica. O fracionamento da carga está associado ao fato da superfície em estudo ser topologicamente não-trivial (não-simplesmente conexa) e apresentar curvatura variável. Tais características são conhecidas por induzirem frustração geométrica, o que impede o mapeamento completo da esfera de spins no espaço físico. Contudo, mesmo com  $Q < 1$ , pode haver estabilidade para a solução se a topologia não-trivial do suporte assim o garantir.

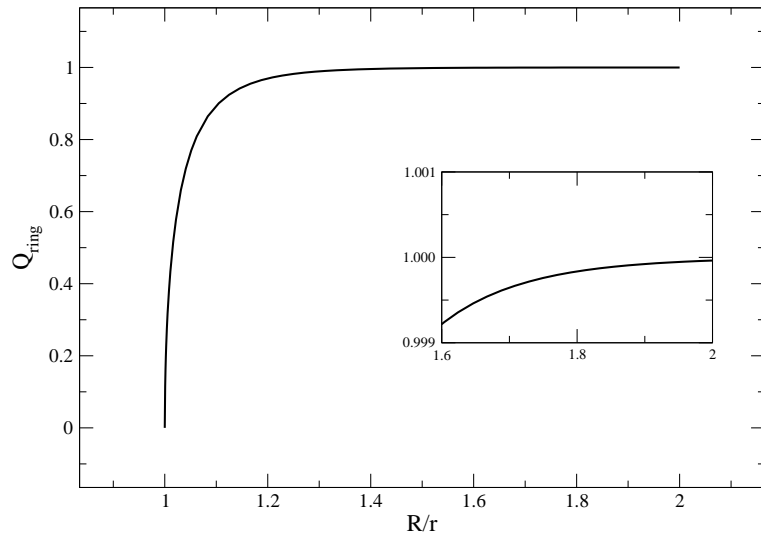


Figura 3.3: Como a carga solitônica associada à solução (3.19) se comporta no *ring torus* como função de  $R/r > 1$ . Embora  $Q$  se aproxime da unidade muito rapidamente (e.g., para  $R/r = 2$  obtemos  $Q_{R=2r} \approx 0.99995$ ; veja gráfico auxiliar), devemos chamar atenção para o fato de que só no limite  $R \rightarrow \infty$  nós obteremos  $Q = 1$ .

O comportamento da carga  $Q$  com o valor de  $R$  pode ser visto na Fig. 3.3. Pode-se notar que a carga varia rapidamente com  $R$  até um certo valor, no qual  $Q$  se torna praticamente estável. No entanto,  $Q$  só assume um valor inteiro e diferente de zero no limite  $R \rightarrow \infty$ . Qualquer outro valor para  $R$  implica numa carga topológica fracionária.

Como a energia está diretamente relacionada ao valor da carga  $Q$ , ela também varia com  $R$ , de forma que podemos fazer uma análise do comportamento da energia da excitação em função do valor de  $R$ . Os casos em que  $R \leq r$  não podem ser analisados para esse sistema de coordenadas, uma vez que a parametrização de  $\vec{r}$ ,

dado em (2.16), não assume valores reais e positivos para este caso. Devemos então analisar estritamente os casos onde  $R > r$  (*ring torus*). Fazendo a análise do nosso resultado, pode-se ver, que tanto a carga  $Q$  quanto a energia da configuração crescem com o valor de  $R$ , de forma que não há invariância de escala. Nesse caso, nota-se que tanto a carga quanto a energia assumem valores sempre menores que 1 e  $8\pi J$ , respectivamente. Soluções solitônicas fracionárias com carga topológica variando de 0 a 1 e energia variando entre 0 e  $8\pi J$  já foram estudadas em superfícies não-simplesmente conexas [31], onde os autores testaram a estabilidade dessas soluções no plano punturado finito e no cone truncado. Nesse trabalho, os autores mostram que a estabilidade do sólito fracionário é garantida pela presença da obstrução topológica do suporte físico em questão, isto é, o buraco. Um outro caso no qual soluções solitônicas fracionárias aparecem é na superfície da pseudo-esfera [29], que, assim como no caso do plano finito e do cone truncado, têm sua estabilidade garantida pela introdução de um buraco (uma obstrução topológica).

Nos casos que acabamos de citar, o sólito se apresenta estável devido à presença de um buraco, o que previne o decaimento da solução ao estado fundamental. Ao observarmos o *ring torus*, vemos que ele apresenta uma obstrução topológica natural (o genus), de forma que a energia do sólito nesta superfície pertence ao intervalo  $(0, 8\pi J)$ . A energia tende a zero (decai ao estado fundamental) no limite em que  $R \rightarrow r$ , entretanto assumindo que a relação  $R - r = \delta > 0$  é sempre válida, ou seja, estudando apenas superfícies toroidais onde  $R$  é sempre maior que  $r$ , podemos notar, em analogia com o caso do plano punturado, que a presença do genus mantém a estabilidade do sólito fracionário na superfície toroidal, pois a energia não pode decair ao estado fundamental, isto é, aquele no qual  $E = 0$ . Além disso, podemos notar também que a energia crescerá com o aumento do valor da relação  $R/r$ , o que implica em um aumento de  $\delta$ . Tal comportamento é inverso ao que acontece no caso da pseudo-esfera, na qual o valor da energia da excitação solitônica fracionária é inversamente proporcional ao tamanho da obstrução topológica [29].

Finalmente, analisando o valor da energia no limite em que  $R \rightarrow \infty$  e  $r$  é mantido fixo, a curvatura do toro anula-se (ver seção 2.3). Neste caso, temos  $Q = 1$  e  $E = 8\pi J$ , ou seja, obtemos assim um  $\pi$ -sólito, pois, nesse limite, obtemos o cilindro rígido infinito e a esfera de spins é completamente mapeada.

Vemos então que a geometria toroidal assume soluções tipo-sólito com carga fracionária, que são estabilizadas pela presença de uma obstrução topológica, o genus. Além disso, tal carga fracionária depende da relação existente entre os raios  $R$  e  $r$ ,

podendo assumir um valor inteiro apenas no limite em que  $R/r \rightarrow \infty$ . Uma outra característica importante dessa solução é que apesar do toro ser uma superfície na qual pode-se, aparentemente, mapear a esfera de spins completamente, esse suporte não tem espaço suficiente para tal mapeamento, se  $R/r$  for finito. Entretanto, nesse caso devemos levar em conta a topologia do suporte geométrico: embora o genus previna o mapeamento completo da esfera de spins sobre o toro, ao mesmo tempo ele assegura a estabilidade topológica, a princípio, impedindo que o sóliton fracionário decaia ao estado fundamental.

### Simetria cilíndrica

Uma segunda simetria que pode ser analisada é aquela na qual  $\Theta(\xi, \eta) = \Theta(\eta)$  e  $\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\xi)$ . Veremos que a solução encontrada também é um sóliton fracionário, porém com um comportamento ligeiramente diferente do caso tratado na seção anterior. Para a simetria cilíndrica, temos:

$$H = J \int_{-\pi \operatorname{sen}hb}^{\pi \operatorname{sen}hb} d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\eta [(\partial_\eta \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_\xi \Phi)^2], \quad (3.27)$$

donde seguem-se:

$$\partial_\eta^2 \Theta = \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta (\partial_\xi \Phi)^2 \quad (3.28)$$

e

$$\partial_\xi [\operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_\xi \Phi)] = 0 \Rightarrow \partial_\xi^2 \Phi = 0. \quad (3.29)$$

Da última equação, vemos facilmente que:

$$\partial_\xi \Phi = q_\xi.$$

Então, temos que:

$$\partial_\eta^2 \Theta = q_\xi^2 \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta = \left(\frac{q_\xi}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 2\Theta. \quad (3.30)$$

Novamente, temos a ESG, e a solução será análoga ao caso anterior, dada por:

$$\Theta(\eta) = 2 \arctan(e^{q_\xi \eta}). \quad (3.31)$$

A energia calculada para este caso é:

$$E_{\text{soliton}(\eta)} = 8\pi J q_\xi \operatorname{sen}hb \tanh(\pi q_\xi). \quad (3.32)$$

Precisamos discutir agora o papel de  $q_\xi$  na solução acima, pois, diferentemente do caso anterior, esse parâmetro não é necessariamente um número inteiro. Uma análise mais simples pode ser feita partindo-se da definição:

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left( \vec{\nabla} \Phi \right) \cdot d\vec{l}, \quad (3.33)$$

de onde pode-se notar que  $\tau$  é um número inteiro. A integração é feita ao longo do caminho fechado  $C$ ,  $\vec{\nabla}$  é o operador gradiente definido em (2.22) e  $d\vec{l}$  é o elemento de linha no toro, em coordenadas peripolares. Fazendo então as devidas operações, temos que:

$$\tau = q_\xi \operatorname{senh} b \Rightarrow q_\xi = \frac{\tau}{\operatorname{senh} b}, \quad \tau \in \mathbb{Z}. \quad (3.34)$$

Como dito anteriormente, podemos tomar  $\tau = 1$ , de forma que a energia dada em (3.32) será escrita como:

$$E_{\text{soliton}(\eta)} = 8\pi J \tanh \left( \frac{\pi}{\operatorname{senh} b} \right). \quad (3.35)$$

Desta vez, podemos notar um comportamento diferente daquele apresentado pela energia da excitação solitônica no caso da simetria toroidal. Aqui, a energia decresce com o tamanho do toro, partindo de um valor máximo ( $8\pi J$ ) quando  $R \rightarrow r$ , e vai diminuindo seu valor até se anular quando  $R \rightarrow \infty$ . Entretanto, a excitação continua apresentando carga fracionária (no caso do *ring torus*), a qual, assim como a energia, diminui à medida que o valor de  $R$  aumenta. Os mesmos argumentos utilizados para discutir a estabilidade da solução solitônica dada na seção anterior são válidas para esse caso, ou seja, a topologia não-trivial do toro não permite o mapeamento completo da esfera de spins quando estamos nos referindo ao *ring torus*, entretanto, essa mesma característica pode, aparentemente, garantir a estabilidade de tais sólitons fracionários. No caso do *horn torus*, aparentemente, um sólito inteiro aparece, isto é, a esfera de spins pode ser completamente mapeada nesse limite, de forma que a energia da excitação corresponde à energia mínima ( $E_{\min} = 8\pi J$ ) de uma excitação solitônica pertencendo à primeira classe do segundo grupo de homotopia.

Apesar das diferenças entre as energias dadas pelas expressões (3.21) e (3.35), existe um limite no qual as duas soluções assumem o mesmo valor, ou seja, quando  $R = r\sqrt{2}$ , temos que  $E_{\text{soliton}(\xi)} = E_{\text{soliton}(\eta)}$ . Veremos que essa característica também é verdade quando estivermos discutindo o modelo do rotor planar.

Passemos a estudar agora o sistema de coordenadas polares, no qual, como veremos a seguir, a obtenção de soluções solitônicas é mais difícil, pois as equações de

Euler-Lagrange para esses casos não têm a forma de uma ESG, mas são não-lineares. Contudo, veremos algumas soluções particulares que não se comportam como sólitons.

### 3.2.2 Coordenadas polares

Começando a estudar agora o sistema de coordenadas dado por (2.6), temos que a Hamiltoniana (3.2) e as equações de movimento (3.6) e (3.7) serão escritas, respectivamente, como:

$$H = J \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} [(\partial_{\phi} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\phi} \Phi)^2] + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} [(\partial_{\theta} \Theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\theta} \Phi)^2] \right\} d\phi d\theta, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta \left[ \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} (\partial_{\phi} \Phi)^2 + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} (\partial_{\theta} \Phi)^2 \right] = \\ & \cos \theta (\partial_{\theta} \Theta) + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} \partial_{\theta}^2 \Theta + \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} \partial_{\phi}^2 \Theta \end{aligned} \quad (3.37)$$

e

$$\cos \theta \operatorname{sen}^2 \Theta \partial_{\theta} \Phi + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} \partial_{\theta} (\operatorname{sen}^2 \Theta \partial_{\theta} \Phi) + \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} \partial_{\phi} (\operatorname{sen}^2 \Theta \partial_{\phi} \Phi) = 0. \quad (3.38)$$

A partir de agora, podemos determinar soluções particulares, seguindo dois tipos principais de simetria: a simetria esférica, onde  $\Theta(\phi, \theta) = \Theta(\theta)$  e  $\Phi(\phi, \theta) = \Phi(\phi)$ ; ou uma simetria mais peculiar, na qual  $\Theta(\phi, \theta) = \Theta(\phi)$  e  $\Phi(\phi, \theta) = \Phi(\theta)$ . Começaremos então a determinar soluções que exibem simetria cilíndrica.

**Primeiro caso:**  $\Theta(\phi, \theta) = \Theta(\theta)$  e  $\Phi(\phi, \theta) = \Phi(\phi)$

Adotando a simetria esférica, temos que a Hamiltoniana (3.36) será simplificada, levando à expressão:

$$H = J \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen}^2 \Theta (\partial_{\phi} \Phi)^2 + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} (\partial_{\theta} \Theta)^2 \right] d\phi d\theta, \quad (3.39)$$

cujas equações de movimento serão dadas por:

$$\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta \left[ \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} (\partial_{\phi} \Phi)^2 \right] = \cos \theta (\partial_{\theta} \Theta) + \frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} \partial_{\theta}^2 \Theta \quad (3.40)$$

e

$$\frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} \partial_{\phi} (\operatorname{sen}^2 \Theta \partial_{\phi} \Phi) = 0 \Rightarrow \partial_{\phi}^2 \Phi = 0. \quad (3.41)$$

A última equação tem solução simples, que pode ser escrita na forma:

$$\partial_\phi \Phi = q_\phi, \quad q_\phi \in \mathbb{Z}. \quad (3.42)$$

Substituindo este resultado em (3.40) e, sem perda de generalidade<sup>4</sup>, fazendo  $q_\phi = 1$ , obtemos:

$$\frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} \partial_\theta^2 \Theta + \cos \theta (\partial_\theta \Theta) = \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta \left( \frac{r}{R + r \operatorname{sen} \theta} \right). \quad (3.43)$$

Este resultado pode ser comparado com o obtido na referência [25], na qual os autores investigaram o modelo de Heisenberg isotrópico na esfera. Lá, os autores estavam basicamente interessados na simetria esférica, cuja equação de movimento para  $\Theta$  pode ser escrita como:

$$\operatorname{sen} \theta (\partial_\theta^2 \Theta) + \cos \theta (\partial_\theta \Theta) = \frac{\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta}{\operatorname{sen} \theta}, \quad (3.44)$$

cuja solução mais simples é o “*hedgehog*” (ourição), dado por  $\Theta_{\text{Soliton}} = \pm \theta$ , a qual tem uma carga topológica ( $|Q| = 1$ ) e apresenta energia finita igual a  $8\pi J$ . Para uma melhor compreensão dos resultados e dos detalhes envolvidos no desenvolvimento das soluções na superfície esférica, remetemos o leitor à referência [25].

É fácil perceber que se fizermos  $R = 0$  em nosso sistema de coordenadas, a equação (3.43) torna-se idêntica à expressão (3.44). Isto se deve ao fato de que nesse limite a métrica e a curvatura do toro igualam-se às da esfera.

Apesar da semelhança entre as duas equações de movimento, é fácil perceber que a solução válida para o caso da esfera, não é válida para a equação (3.43), ou seja, não podemos simplesmente assumir  $\Theta = \pm \theta$  pois uma simples substituição mostra que a solução só é válida no caso de  $R = 0$ . Isto sugere que a solução encontrada para a esfera é um caso particular das soluções solitônicas na superfície do toro.

A expressão (3.43) continua sendo uma equação diferencial não-linear de difícil solução. Devido a isto, procuraremos por soluções onde  $\Phi(\phi) = k$ , onde  $k$  é uma constante. Com isto, temos que:

$$\frac{R + r \operatorname{sen} \theta}{r} \partial_\theta^2 \Theta + \cos \theta (\partial_\theta \Theta) = 0, \quad (3.45)$$

cuja solução é dada por:

$$\Theta(\theta) = 2Q_{S_1} \frac{\arctan \left[ \frac{R+r \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{R^2-r^2}} \right]}{\sqrt{R^2-r^2}} + \theta_0, \quad (3.46)$$

---

<sup>4</sup>Soluções com  $q_\phi > 1$  demandam considerável energia, sendo assim instáveis, decaindo geralmente naquelas com  $q_\phi = 1$ .

onde  $Q_{S_1}$  é uma constante com dimensão de distância e que não pode estar associada a uma carga topológica;  $\theta_0$  é uma constante de integração que não tem influência para a energia da excitação. Com estes resultados em mãos, temos, de (3.39), que a energia da solução será:

$$E_\theta = 4\pi^2 J \frac{Q_{S_1}^2}{r\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (3.47)$$

Como veremos um pouco mais adiante neste trabalho, as equações (3.46) e (3.47) são idênticas àquelas soluções para  $\Phi(\theta)$  no modelo anisotrópico. Naturalmente, não se trata de uma solução tipo-sóliton, uma vez que a exigência de que  $\Phi$  seja constante implica no não mapeamento da esfera de spins na superfície do toro. Dessa forma, a solução desenvolvida aqui é apenas uma solução formal, e sua estabilidade topológica, para o segundo grupo de homotopia, não é garantida. Uma análise mais cuidadosa dessa solução será feita na seção 3.3, uma vez que a solução desenvolvida naquela oportunidade é idêntica à expressão (3.46). Nessa ocasião, veremos que tal solução pertence ao primeiro grupo de homotopia, podendo, dessa forma, ser discutida em termos de uma solução tipo vórtice.

**Segundo caso:**  $\Theta(\phi, \theta) = \Theta(\phi)$  e  $\Phi(\phi, \theta) = \Phi(\theta)$

Adotaremos agora uma segunda simetria, na qual  $\lambda = 0$ ,  $\Theta = \Theta(\phi)$  e  $\Phi = \Phi(\theta)$ . Nesse caso, a Hamiltoniana (3.2) é simplificada, sendo então escrita como:

$$H = J \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r}{R + r\text{sen}\theta} (\partial_\phi \Theta)^2 + \frac{R + r\text{sen}\theta}{r} \text{sen}^2 \Theta (\partial_\theta \Phi)^2 \right] d\phi d\theta \quad (3.48)$$

enquanto as equações (3.6) e (3.7) se tornam, respectivamente:

$$\zeta \text{sen}\Theta \cos \Theta (\partial_\theta \Phi)^2 = \partial_\phi^2 \Theta \quad (3.49)$$

e

$$\cos \theta \text{sen}^2 \Theta \partial_\theta \Phi + \sqrt{\zeta} \text{sen}^2 \Theta (\partial_\theta^2 \Phi) = 0, \quad (3.50)$$

onde  $\zeta = \left(\frac{R+r\text{sen}\theta}{r}\right)^2$ .

Se tomarmos  $\Phi(\theta) = k'$ , com  $k'$  sendo uma constante, a equação (3.50) será escrita como:

$$\partial_\phi^2 \Theta = 0, \quad (3.51)$$

cujas soluções mais simples é dada por:

$$\Theta(\phi) = Q_{S_2} \phi + \phi_0, \quad Q_{S_2} \in \mathbb{Z}. \quad (3.52)$$

Aqui,  $\phi_0$  é uma constante que não influencia no cálculo da energia, a qual é dada por:

$$E_\phi = 4\pi^2 J Q_{S^2}^2 \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (3.53)$$

Novamente, este resultado está intimamente relacionado com o caso anisotrópico onde  $\Phi = \Phi(\phi)$ , como será visto mais adiante. Então, deixaremos as discussões sobre este resultado para a seção 3.3. No entanto, é bom deixar claro que este resultado não se trata de uma solução topológica tipo sólito: a esfera de spin não é completamente mapeada na superfície em estudo. Contudo, há o mapeamento de um círculo de spins em torno de  $\phi$ , o que poderia dar uma estabilidade topológica a essa solução. De fato, a solução tipo-vórtice admite o mapeamento de um círculo sobre uma superfície bidimensional e sua estabilidade é garantida.

A parametrização  $(\theta, \phi)$  é interessante para a comparação com outras superfícies bem como para determinar soluções tipo vórtice, entretanto, como pôde-se notar, não é tão simples encontrar soluções solitônicas mais gerais, sendo preferível trabalhar com a parametrização dada em (2.16).

### 3.3 Modelo do Rotor Planar e soluções tipo-vórtice

Apesar do sistema de coordenadas dado por (2.16) possuir soluções mais simples para o modelo anisotrópico, iremos trabalhar, a partir de agora, com o sistema (2.6). A razão dessa escolha se deve ao fato de que esse sistema é válido para qualquer tipo de toro (independente da relação entre  $R$  e  $r$ ), e ainda, essas expressões se assemelham a suas componentes para os casos planar, esférico ou pseudo-esférico. Ou seja, se  $R + r\text{sen}\theta$  for identificado com  $\mathfrak{r}$ ,  $\mathfrak{R}\text{sen}\theta$  ou  $\varrho\tau$ , enquanto  $\phi$  mantém seu papel de ângulo azimutal, aquela expressão recupera os seus análogos planar, esférico ou pseudo-esférico [28, 29] (aqui,  $\mathfrak{r} = |\vec{\mathfrak{r}}|$  responde pela distância radial em coordenadas polares,  $\mathfrak{R}$  é o raio em coordenadas esféricas enquanto  $\varrho\tau$  responde pela distância medida ao longo de uma geodésica na pseudo-esfera, isto é, uma hipérbole).

Para alcançar nossos objetivos, consideraremos as soluções confinadas ao plano XY, quer dizer, como estaremos lidando com soluções estáticas, apenas a variável de spin  $\Phi$  terá dinâmica (espacial) enquanto  $\Theta$  permanecerá constante. Essas soluções estão associadas ao Modelo do Rotor Planar (MRP), de forma que tomaremos  $\lambda = -1$  e  $\Theta = \pi/2$ . Então, a Hamiltoniana (3.2) para este sistema passa a ser escrita como:

$$H_{RP} = J \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r}{R + r\text{sen}\theta} (\partial_{\phi}\Phi)^2 + \frac{R + r\text{sen}\theta}{r} (\partial_{\theta}\Phi)^2 \right] d\phi d\theta. \quad (3.54)$$

Assumindo que existam soluções não-triviais com simetria cilíndrica em  $\Phi$ , isto é,  $\Phi = \Phi(\phi)$ , temos, da equação (3.54), que:

$$H_{RP} = J \int \int \frac{r}{R + r\text{sen}\theta} (\partial_{\phi}\Phi)^2 d\phi d\theta. \quad (3.55)$$

então:

$$\partial_{\phi}^2 \Phi = 0, \quad (3.56)$$

cujas soluções são da forma:

$$\Phi(\phi) = \kappa\phi + \phi_0, \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \quad (3.57)$$

onde  $\kappa$  é a carga do vórtice, enquanto  $\phi_0$  é uma constante de integração, que não contribui para a energia do vórtice, apenas para seu aspecto global. A configuração de spins dessa solução está representada, esquematicamente, na Fig. 3.4. A carga (vorticidade) é formalmente definida, no limite contínuo, como:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \oint_C (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{l}. \quad (3.58)$$

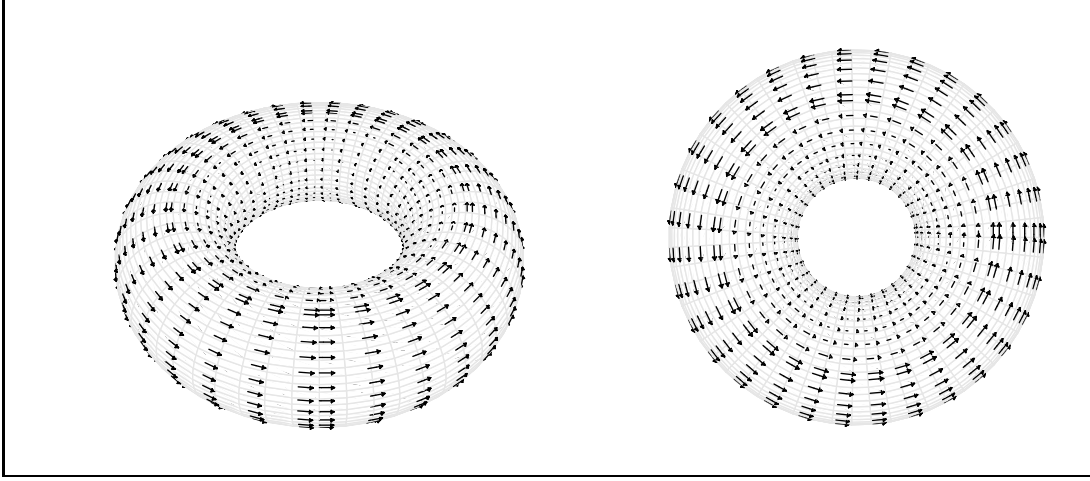


Figura 3.4: Comportamento do campo de spins clássicos na superfície do toro para o caso onde  $\lambda = -1$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\phi_0 = 0$ . Na figura da esquerda, temos uma visão global, e na figura da direita, uma visão superior de um vórtice com carga  $\kappa = +1$ . As setas representam o campo de spins neste suporte,  $\vec{\nabla}\Phi$ .

Dessa vez,  $\vec{\nabla}$  é dado pela expressão (2.14). Podemos agora calcular a energia do vórtice tomando a solução dada em (3.57) e substituindo na Hamiltoniana (3.55), de forma que a energia dessa excitação no *ring torus* ( $R > r$ ) é:

$$E_{v\phi} = 4\pi^2 J\kappa^2 \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad (3.59)$$

donde se nota que, diferentemente dos casos, esférico, planar ou pseudo-esférico, a energia do vórtice no *ring torus* não apresenta divergências espúrias, geralmente associadas ao centro do vórtice, onde a aproximação contínua não é, muitas vezes, apropriada. Em outras palavras, o genus é um regularizador natural para a configuração de vórtice no *ring torus*, não permitindo que essa solução possa apresentar um caroço singular. Nos outros casos ( $R = r$  ou  $R < r$ ), é necessário introduzir um *cutoff* de para impedir as divergências no núcleo do vórtice. Para maiores detalhes sobre tal procedimento, o leitor é remetido às referências [28, 29].

Como foi dito anteriormente, as soluções para o modelo isotrópico em coordenadas polares são idênticas àquelas encontradas no modelo anisotrópico, o que pode ser visto comparando as equações (3.57) e (3.59) com as expressões (3.52) e (3.53), respectivamente. Isso sugere que as soluções encontradas naquele caso eram vórtices, e não sólitons na superfície do toro. As discussões que seguem a partir de agora para a solução em  $\Phi(\phi)$  também valem para as soluções  $\Theta(\phi)$  encontradas naquela oportu-

nidade.

Analisando o limite onde  $R \rightarrow \infty$ , tem-se que a energia do vórtice se anula. Esse resultado é esperado, uma vez que neste limite, efetivamente, estamos lidando com um vórtice num *annulus* infinito (não um plano infinito) com raios interno e externo dados, respectivamente, por  $R - \pi r$  e  $R + \pi r$ . Alternativamente, também podemos pensar que nesse limite o vórtice é levado à superfície de um cilindro infinito, ao longo do eixo de simetria. Nesse caso, os spins aparecem praticamente paralelos (no caso ferromagnético) um ao outro, de tal forma que ao invés de um vórtice, temos o estado fundamental, cuja energia normalizada se anula. Isto poderia sugerir, a princípio, que a configuração em questão seria o estado fundamental do ferromagneto para a superfície do toro. Entretanto vemos que existe uma carga topológica mesmo neste limite, o que não ocorre para o estado fundamental de um ferromagneto cilíndrico, de onde conclui-se que esta configuração não pode ser aquela do estado fundamental para um ferromagneto toroidal. Uma discussão melhor acerca do estado fundamental para um toro ferromagnético poderia ser feita se a energia magnetostática for levada em conta, o que não está nos objetivos deste trabalho.

Da análise da Fig. 3.5 e da expressão (3.59), nota-se que a energia diminui com o aumento de  $R/r$ , entretanto, se  $r$  aumentar proporcionalmente a  $R$ , isto é, se mantivermos a relação  $r/R$  constante, temos que a energia do vórtice permanece constante. Finalmente, se  $R$  for mantido constante enquanto  $r$  varia no intervalo  $[0, R]$ , a energia cresce praticamente linearmente, até um valor crítico, a partir do qual a energia cresce ligeiramente, tendendo a infinito quando  $r \rightarrow R$ . Este comportamento pode ser visto na Fig. 3.5.

A divergência da energia do vórtice no toro, no limite  $R = r$  pode ser explicada pelo fato de que quando  $R \rightarrow r$  o limite contínuo falha, de forma que estaríamos adentrando o núcleo do vórtice, o que agora é possível já que o tamanho do buraco vai a zero, ou seja, o genus do toro se reduz a um ponto. No entanto, cuidado deve ser tomado a curtíssimas distâncias, pois o tratamento contínuo não resolve o problema do cálculo da energia do núcleo (de fato, pode sim desde que os spins neste caroço desenvolvam  $S_z$  diferente de zero, que é possível no modelo XY, mas não no MRP). Já que o genus do toro é reduzido a um ponto, torna-se necessário induzir um *cutoff* na superfície para regularizar a energia. Este *cutoff* pode ser conseguido, para o caso do *horn torus*, introduzindo um buraco de tamanho  $l_0$  no núcleo do vórtice. Fazendo isso,

a energia do vórtice pode ser facilmente calculada:

$$E_{v-horn} = 2\pi J \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{2} - \frac{l_0}{r}} \frac{1}{1 + \sin\theta} (\partial_\phi \Phi)^2 d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2} + \frac{l_0}{r}}^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin\theta} (\partial_\phi \Phi)^2 d\theta \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{v-horn} = 4\pi J \kappa^2 \cot\left(\frac{l_0}{2r}\right), \quad (3.60)$$

a qual depende apenas da relação entre os tamanhos do buraco e do raio do vórtice,  $l_0/r$ .

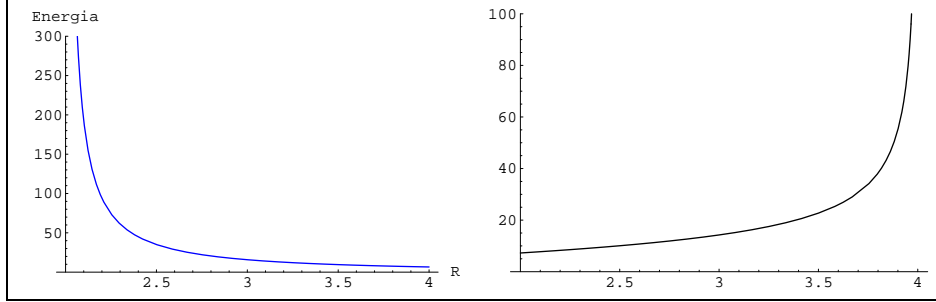


Figura 3.5: À esquerda, temos o gráfico da energia do vórtice e função de  $R$ , com  $R$  variando de 2 até 4. Nesta figura, foi feito  $r = 2$ ,  $J = 1$ ,  $\kappa = 1$ . Notamos que a energia tem inicialmente um valor muito grande, e diminui rapidamente com o crescimento do raio. À direita, o gráfico da energia do vórtice em função de  $r$ , com  $r$  variando de 0 até  $R$ . Nesta figura, foi feito  $R = 4$ ,  $J = 1$ ,  $\kappa = 1$ . Vemos que a energia cresce praticamente linearmente até um determinado valor, onde o seu valor aumenta muito rapidamente e tende a infinito no limite  $r \rightarrow R$ .

No caso do *self-intersecting spindle torus* ( $R < r$ ), a densidade da Hamiltoniana (3.55) não é bem definida nos dois pontos onde a superfície do toro se auto-intercepta, isto é, nos pontos onde  $R + r\sin\theta = 0$ . Nesse caso, mantendo  $\theta$  arbitrário, a energia do vórtice será dada por [60]:

$$E = 2\pi J \kappa^2 r \frac{\ln \left[ \frac{r + R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{r^2 - R^2}}{r + R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{r^2 - R^2}} \right]}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (3.61)$$

O resultado acima deve ser avaliado num intervalo próprio, e, para tal, devemos introduzir dois *cutoffs* ao redor dos pontos onde a densidade de energia é mal definida (com o objetivo de evitar as singularidades), ou seja, em  $\theta_{sing_1} = \arcsin(-R/r)$  e  $\theta_{sing_2} = \pi - \theta_{sing_1}$ , e só após isso podemos valorar a energia do *self-intersecting spindle torus*. Entretanto, este trabalho é muito tedioso e as expressões resultantes têm

comprimento muito grande, de forma que não serão apresentadas aqui. A característica principal é que a energia de vórtice definida nessa superfície mostra claramente o aparecimento de dois caroços singulares localizados em  $\theta_{sing}$ , dado acima. Um outro caso interessante é aquele no qual  $R = 0$ , onde a integração da Hamiltoniana (3.55) para a solução (3.57) nos dá exatamente o resultado obtido no caso esférico [28], isto é, exibindo um par de caroços singulares nos pontos antipodais.

Em resumo, se começarmos a analisar o *ring torus* ( $R > r$ ), onde o vórtice é anucleado (sem caroço singular) e formos diminuindo o valor de  $R$ , eventualmente obteremos o *horn torus*, onde um caroço é formado. Diminuindo ainda mais o valor de  $R$ , um *self-intersecting spindle torus* é obtido e o vórtice apresenta agora um par de caroços singulares nos pontos de auto-intercepção. No limite  $R = 0$ , esses pontos se localizam em posições diametricamente opostas e, efetivamente, temos um vórtice numa esfera de raio  $r$ .

Assim como no caso do sólton, procuraremos aqui por soluções que exibem um outro tipo de simetria, além da esférica. Encontraremos agora soluções onde  $\Phi = \Phi(\theta)$  e logo depois compararemos este resultado para a energia com aquele expresso na equação (3.59). Para essa simetria, a Hamiltoniana (3.54) será escrita como:

$$H_{RP} = J \int \int \frac{R + r \sin \theta}{r} (\partial_\theta \Phi)^2 d\phi d\theta, \quad (3.62)$$

e (3.7) tomará a forma:

$$\cos \theta \partial_\theta \Phi + \frac{R + r \sin \theta}{r} \partial_\theta^2 \Phi = 0, \quad (3.63)$$

cujas soluções são dadas por:

$$\Phi(\theta) = \frac{2\kappa' \arctan \left[ \frac{r + R \tan(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right]}{\sqrt{R^2 - r^2}} + \theta_0, \quad (3.64)$$

onde  $\kappa'$  e  $\theta_0$  são constantes. Obviamente, essa solução não é válida para o caso no qual  $R < r$ , de forma que esse limite não será analisado. Substituindo o último resultado em (3.62), temos que a energia da configuração será:

$$E_\theta = \frac{4\pi^2 J \kappa'^2}{r \sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (3.65)$$

Podemos discutir o papel de  $\kappa'$  nas últimas soluções encontradas. Obviamente uma simples análise dimensional mostra que esse parâmetro deve ter dimensão de distância, enquanto  $\kappa$  é adimensional, logo  $\kappa'$  não deve exercer o papel de carga

topológica da solução. Além disso, como veremos adiante,  $\kappa'$  é função de  $R$  e  $r$ , ou seja,  $\kappa' = \kappa'(R, r)$ . Entretanto, o fato desse parâmetro não estar, efetivamente, associado a uma carga topológica não inviabiliza a existência de tal característica associada à solução (3.64). Partindo da definição (3.33) e da equação (2.12), temos que:

$$\kappa_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_C \partial_\theta \Phi d\theta = \frac{\kappa'}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad (3.66)$$

onde  $\kappa_\theta$  representa um número inteiro, por definição. Dessa forma, temos que  $\kappa_\theta$  tem as propriedades exigidas para que ela seja considerada uma carga topológica, tornando a solução aqui descrita topologicamente estável. Substituindo este último resultado em (3.65), temos que a energia da configuração será dada por:

$$E_\theta = 4\pi^2 J \kappa_\theta^2 \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}. \quad (3.67)$$

Analisando a última expressão, vê-se facilmente que a energia da configuração assim definida diverge com o tamanho do toro. Isto é facilmente explicado pelo fato de que nesse limite ( $R \rightarrow \infty$ ) existem “infinitos” *vórtices* (um para cada valor de  $\phi$ ) que obedecem à equação (3.64), em torno da superfície do toro. Pode-se observar ainda que no limite  $R \rightarrow r$ , a energia da excitação no toro se anula, de forma que efetivamente obtemos o estado fundamental ferromagnético. Pode-se notar então um comportamento inverso ao observado na análise da expressão (3.59), no qual a energia decrescia com o tamanho do toro.

Um outro ponto interessante a se notar é o fato de que existe uma relação específica entre  $R$  e  $r$  na qual a energia das duas simetrias aqui discutidas ( $\Phi = \Phi(\phi)$  e  $\Phi = \Phi(\theta)$ ) se tornam iguais (para  $\kappa = \kappa_\theta$ ). Tal relação é:

$$R = r\sqrt{2}.$$

Esse fato torna-se ainda mais interessante quando lembramos que a mesma expressão possibilitava que as duas soluções estudadas para a energia das excitações no modelo isotrópico (em coordenadas peripolares) fossem iguais.

Podemos concluir então que a solução encontrada em (3.64) apresenta uma carga topológica  $\kappa_\theta$ , garantindo assim sua estabilidade. Devemos lembrar ainda que uma solução idêntica a essa foi encontrada em<sup>5</sup> (3.46), de forma que os argumentos

---

<sup>5</sup>A equação (3.46) é dada por:

$$\Theta(\theta) = 2Q_{S_1} \frac{\arctan \left[ \frac{R+r \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{R^2-r^2}} \right]}{\sqrt{R^2-r^2}} + \theta_0$$

utilizados aqui são válidos para esclarecer o comportamento de tal solução. As soluções apresentadas neste trabalho também são discutidas num artigo submetido à *Physical Review B* [61].

Nanomagnetos com topologia toroidal têm sido estudados tanto teoricamente (cálculos analíticos e simulação computacional) quanto experimentalmente. Em tais estruturas, a configuração tipo vórtice mostrada na Fig. 3.4 aparece como o estado de menor energia e tal excitação pode ser usada para o armazenamento de informação [62, 63]. Dessa forma, os resultados dados pelas equações (3.52) e (3.57) tornam-se importantes por ter estabilidade topológica. Logo, tais excitações podem ser importantes na aplicação em armazenamento de dados. Apesar da simplicidade do modelo utilizado, o presente trabalho vai servir como ponto de partida para um estudo mais detalhado de excitações tipo vórtice no toro, o que pode ser útil para o entendimento das propriedades magnéticas dos *nanorings*.

# Capítulo 4

## Conclusões gerais e perspectivas

Estudamos o modelo de Heisenberg para spins clássicos na superfície do toro e vimos que, apesar de suportar soluções solitônicas fracionárias em sua superfície, tais excitações não são estáveis para o caso do *horn torus*, de forma que o genus do toro se torna uma obstrução topológica de suma importância para a estabilidade de excitações não-lineares nesse suporte. Nesse caso, a energia é interpolada entre 0 e  $8\pi J$ , analogamente ao caso que acontece no plano ponturado, no cone truncado e na pseudo-esfera ponturada. O valor da energia dessa solução cresce com o tamanho do suporte, mas não indefinidamente, tendo um valor limite quando o toro se torna, geometricamente igual ao cilindro infinito. Além dessa solução, vimos que o modelo isotrópico pode levar a outras soluções solitônicas fracionárias.

O regime XY foi utilizado para encontrar soluções tipo vórtice em tal superfície e, de fato, obtemos duas soluções que se caracterizam pelo mapeamento do círculo do espaço de spins num círculo no espaço físico, o que garante a sua estabilidade topológica. Tais excitações têm a mesma energia, a qual decresce com o tamanho do suporte, se anulando no limite em que o toro se torna o cilindro infinito. Uma outra característica importante de tais excitações reside no fato de que, para o caso do *horn torus*, a energia diverge (simetria esférica). Tal divergência decorre do fato de que nesse limite, a obstrução topológica natural do toro se reduz a um ponto. Para evitar divergências espúrias na energia do vórtice, podemos simplesmente introduzir um buraco de tamanho  $l_0$ , o que regulariza sua energia. Vimos ainda que o *self-intersecting spindle torus* aceita soluções tipo vórtice, entretanto, tais excitações apresentam dois caroços singulares, os quais precisam ser removidos pela introdução de dois *cutoffs* para a regularização da energia. Além desse caso, outras soluções tipo vórtice são possíveis, contudo o comportamento de sua energia, no caso do *ring torus*, é inverso ao que foi

observado quando estamos trabalhando com a simetria esférica, isto é, aumenta com o tamanho do toro.

Os resultados apresentados aqui podem ser relevantes em estruturas ferromagnéticas, nas quais as componentes do material possuam spins suficientemente grandes, para que as aproximações de spins clássicos sejam válidas. Apesar de ser uma aproximação, o modelo utilizado aqui tem a propriedade de fazer previsões muito próximas tanto dos resultados experimentais obtidos quanto daqueles obtidos via simulação computacional (boas concordâncias já são observadas em sistemas magnéticos com spin  $\gtrsim 5/2$ ). Dessa forma, nossos resultados podem ser úteis para um estudo mais detalhado do comportamento magnético de nanotoros. Nesse contexto, pretendemos analisar, em futuro próximo, um nanomagneto com geometria toroidal (*ring torus*, por exemplo). Neste caso, além da energia de troca (aqui considerada) devemos acrescentar também o termo magnetostático, advindo de *cargas magnéticas* superficiais e volumétricas associadas à distribuição da magnetização. Aí, um estudo da minimização da energia total (troca + magnetostática) será de suma importância para decidirmos se e como aparece magnetização com perfil de vórtice em tais sistemas. Preliminarmente, parece-nos que no caso de tal perfil, a energia magnetostática anula-se, deixando-nos apenas o termo de troca. Como nesse caso, o vórtice não apresenta caroço e a energia é regular em todo o magneto, de forma que uma possível configuração que minimiza a energia total seja aquela de um vórtice distribuído por todo o magneto, sendo localmente normal à superfície (análogo àquele apresentado na Fig. 3.4).

Além disso, estruturas com topologia toroidal são abundantes na natureza e diversas têm sido as publicações referentes a tal geometria nas mais diversas áreas [12, 38, 48, 49, 51, 64, 65, 66]. Dessa forma, o estudo de superfícies toroidais ainda tem muito a oferecer para o entendimento de fenômenos físicos sensíveis à geometria e topologia tanto das soluções quanto dos espaços nos quais elas são definidas.

Como citado anteriormente, os resultados discutidos aqui estão presentes num artigo submetido à *Physical Review B* [61].

# Apêndice A

## Aproximação contínua do modelo de Heisenberg

Neste apêndice obteremos a equação (2.4), que é a expressão para o limite contínuo do modelo de Heisenberg anisotrópico. Como foi visto na seção 2.2, a Hamiltoniana de Heisenberg para interação entre primeiros vizinhos, numa rede bidimensional, é dada por:

$$H_{latt} = -J' \sum_{\langle i,j \rangle} H_{i,j} = -J' \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + (1 + \lambda) S_i^z S_j^z). \quad (\text{A.1})$$

Aqui,  $\vec{S}_i$  é o operador que atua no sítio  $i$  da rede que interage com os sítios  $i + 1$ ,  $i + 2$ ,  $i - 1$  e  $i - 2$  (ver Figura A.1). Essa Hamiltoniana pode ainda ser escrita como (fazendo  $J = J'/2$ ):

$$H_{latt} = -J \left[ \sum_i \sum_{\alpha=x,y,z} S_i^\alpha (S_{i+1}^\alpha + S_{i+2}^\alpha + S_{i-1}^\alpha + S_{i-2}^\alpha) + \lambda \sum_i S_i^z (S_{i+1}^z + S_{i+2}^z + S_{i-1}^z + S_{i-2}^z) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Mas, podemos expandir as componentes de spin numa série de Taylor, como uma boa aproximação, até segunda ordem:

$$S_{i+1}^\alpha \simeq S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \dots, \quad (\text{A.3})$$

$$S_{i-1}^\alpha \simeq S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} - \dots, \quad (\text{A.4})$$

$$S_{i+2}^\alpha \simeq S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} + \dots, \quad (\text{A.5})$$

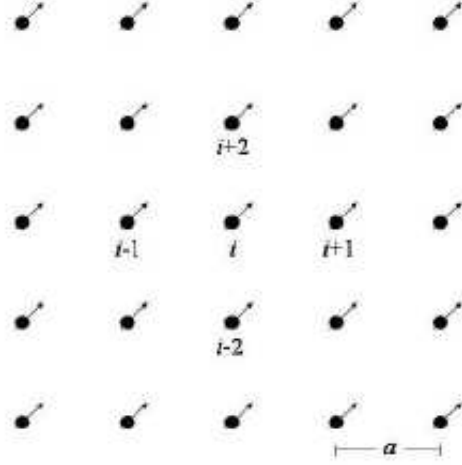


Figura A.1: Rede quadrada de spins indicando os quatro sítios que interagem com o sítio genérico  $i$ .

$$S_{i-2}^\alpha \simeq S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} - \dots, \quad (\text{A.6})$$

onde  $a$  é o espaçamento de rede. Dessa forma, a Hamiltoniana (A.2) poderá ser escrita como:

$$\begin{aligned} H_{latt} \simeq & -J \sum_i \sum_{\alpha=x,y,z} S_i^\alpha \left[ 4S_i^\alpha + a^2 \left( \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} \right) \right] \\ & - J\lambda \sum_i S_i^z \left[ 4S_i^z + a^2 \left( \frac{\partial^2 S_i^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i^z}{\partial y^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Em seguida, substituindo o somatório em  $i$  pela integral dupla  $\int \int \frac{dxdy}{a^2}$ , temos que:

$$\begin{aligned} \left[ H_{latt} = & -\frac{4J\vec{S}^2}{a^2} \int \int dxdy - \frac{4J\lambda S^z{}^2}{a^2} \int \int dxdy \right] \\ & - J \sum_{\alpha=x,y} \int \int S^\alpha \left[ \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2} \right] dxdy \\ & - J(1 + \lambda) \int \int S^z \left[ \frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^z}{\partial y^2} \right] dxdy. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

No limite termodinâmico, onde o tamanho do sistema tende ao infinito, as integrais entre colchetes divergem, devendo ser subtraídas da Hamiltoniana original. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
H_{latt} = & -J \sum_{\alpha=x,y} \int \int S^\alpha \left[ \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2} \right] dx dy \\
& - J(1 + \lambda) \int \int S^z \left[ \frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^z}{\partial y^2} \right] dx dy.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Integrando por partes os termos que sobraram, chegamos à seguinte expressão:

$$H_{latt} = J \int \int \sum_{\alpha=x,y,z} (1 + \delta_{\alpha 3} \lambda) \left[ \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \tag{A.10}$$

que pode ainda ser reescrita como:

$$H_{latt} = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 \delta_{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3} \lambda) \left( \frac{\partial S^a}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial S^b}{\partial x_j} \right) dx dy, \tag{A.11}$$

onde  $\delta_{ij}$  assume o valor 1 se  $i = j$  e 0, caso contrário.  $h_{ab}$  o elemento da métrica do espaço de spins, o qual, no caso de parametrizarmos os spins em coordenadas cartesianas, será dado por  $h_{ab} = \delta_{ab}$ .

A transformação do elemento de superfície de coordenadas cartesianas para um sistema qualquer é dada por [55]:

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta_1} & \frac{\partial y}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} d\eta_1 d\eta_2. \tag{A.12}$$

então, essa transformação pode ser usada para escrever a Hamiltoniana (A.10) numa superfície arbitrária qualquer. Temos então que:

$$H_{latt} = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 \delta^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3} \lambda) \left( \frac{\partial S^a}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial S^b}{\partial x_j} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta_1} & \frac{\partial y}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} d\eta_1 d\eta_2. \tag{A.13}$$

O termo  $\delta^{ij}$  conta para o elemento da métrica no espaço parametrizado em coordenadas cartesianas. No caso de trabalharmos numa superfície arbitrária qualquer, com os elementos da métrica dados por  $g^{ij}$ , a última expressão será escrita como:

$$H_1 = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 g^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3} \lambda) \left( \frac{\partial S^a}{\partial \eta_i} \right) \left( \frac{\partial S^b}{\partial \eta_j} \right) \sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2, \tag{A.14}$$

que é a expressão dada em (2.4). Aqui, definimos  $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta_1} & \frac{\partial y}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} \equiv \sqrt{|g|}$ .

## Apêndice B

# Limite contínuo da Hamiltoniana de Heisenberg no plano

Como foi dito, precisamos testar a validade da Hamiltoniana na forma como ela foi escrita na seção 2.2

Descrevendo o plano em coordenadas polares  $(r, \phi)$ , temos que:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \Rightarrow (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Tomando o espaço de spins parametrizado em coordenadas cartesianas, tem-se que  $h_{ab} = \delta_{ab}$ , logo, a Hamiltoniana (2.4) será escrita como:

$$H = J \int \int \left\{ r \left[ \left( \frac{\partial S^x}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^y}{\partial r} \right)^2 + (1 + \lambda) \left( \frac{\partial S^z}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial S^x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^y}{\partial \phi} \right)^2 + (1 + \lambda) \left( \frac{\partial S^z}{\partial \phi} \right)^2 \right] \right\} dr d\phi. \quad (\text{B.2})$$

Tomando agora a representação de  $\vec{S}$  em termos de  $\Theta$  e  $\Phi$ , isto é, parametrizando  $\vec{S}$  na forma  $\vec{S} = (\text{sen}\Theta \cos\Phi, \text{sen}\Theta \text{sen}\Phi, \cos\Theta)$ , obtemos:

$$H = J \int \int \left\{ r \left[ (1 + \lambda \text{sen}^2\Theta) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} \left[ (1 + \lambda \text{sen}^2\Theta) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Com um pouco de manipulação, pode-se determinar a energia de um vórtice no plano, que é dada por<sup>1</sup>:

$$E_{\text{vórtice}} \propto 2\pi J \ln\left(\frac{L}{a}\right),$$

onde  $L$  é a distância medida do centro do vórtice até um dado ponto no plano, e  $a$  é o raio do núcleo do vórtice. O resultado acima está de acordo com o que foi discutido na seção 1.1.2, logo, podemos concluir que a forma como a equação (2.4) foi escrita está correta.

---

<sup>1</sup>As contas necessárias para se chegar a esse resultado são semelhantes às que foram desenvolvidas para o caso toro.

# Apêndice C

## Fenômenos magnéticos

Nesta seção iniciaremos uma discussão mais detalhada acerca dos fenômenos magnéticos na matéria. Em particular, discutiremos o diamagnetismo, o paramagnetismo e o ferromagnetismo.

### C.1 Diamagnetismo

A origem do diamagnetismo pode ser explicada a partir do teorema de Larmor, que associa o momento angular orbital dos elétrons, ou seja, o movimento de giro dos elétrons em torno do núcleo atômico, ao aparecimento de um momento magnético atômico. Apesar de ser um modelo clássico, ele fornece a idéia básica acerca de como o diamagnetismo se processa [67]. Dado que um elétron tem uma velocidade  $v$  e percorre sua órbita num período  $T$ , a corrente eletrônica associada é dada por:

$$I = \frac{ev}{2\pi R}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $R$  denota o raio da órbita do elétron. Essa corrente gera um momento de dipolo  $\vec{m}$ , que pode ser facilmente calculado

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = -\frac{ev}{2\pi R}\pi R^2\hat{k} = -\frac{evR}{2}\hat{k}, \quad (\text{C.2})$$

onde  $\vec{\mu}$  aponta na direção do eixo  $z$ , mas no sentido negativo do eixo. Se um campo magnético externo for aplicado, haverá uma variação na velocidade orbital do elétron, de forma que o momento de dipolo orbital também irá variar, mas no sentido oposto ao do campo aplicado. A Figura C.1 mostra o comportamento de um material diamagnético na presença de um campo magnético aplicado. A magnetização ( $\vec{M}$ ) e a

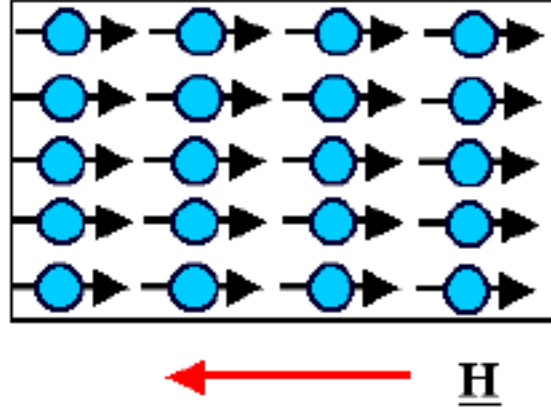


Figura C.1: Material diamagnético na presença de um campo externo,  $\vec{H}$ .

suscetibilidade magnética ( $\chi$ ) do material serão, respectivamente [67]:

$$\vec{M} = -\frac{Ne^2\mu_0}{4me}\vec{H}\sum_i R_i^2 \cos^2 \theta_i$$

$$\chi_\mu = -\frac{Ne^2\mu_0}{4me}\sum_i R_i^2 \cos^2 \theta_i, \quad (\text{C.3})$$

onde  $\cos \theta_i$  aparece para dar conta da orientação da órbita com relação ao campo externo e  $N$  é o número de moléculas por unidade de volume. Da expressão (C.3), pode-se notar uma suscetibilidade negativa de um material diamagnético. No entanto, essa expressão é apenas uma aproximação clássica para um problema que é, na verdade, quântico.

Tratando o problema com o formalismo quântico, temos que a magnetização de um sistema quântico de volume  $V$  em um campo magnético  $H$  é definido como:

$$M(H) \equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial E_0(H)}{\partial H}, \quad (\text{C.4})$$

onde  $E_0(H)$  é a energia do estado fundamental na presença do campo  $H$ . Se o sistema está em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , a magnetização pode ser definida como a média da densidade de magnetização de cada estado excitado de energia  $E_n(H)$ :

$$M(H, T) = \frac{\sum_n M_n(H) e^{-E_n/k_B T}}{\sum_n e^{-E_n/k_B T}}, \quad (\text{C.5})$$

onde

$$M_n(H) = -\frac{1}{V} \frac{\partial E_0(H)}{\partial H}. \quad (\text{C.6})$$

A suscetibilidade magnética é definida como

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial H}. \quad (\text{C.7})$$

Com uma série de cálculos simples podemos encontrar a suscetibilidade de um material diamagnético [68]:

$$\chi = -\frac{e^2}{6mc^2} \frac{N}{V} \langle 0 | \sum_i r_i^2 | 0 \rangle. \quad (\text{C.8})$$

Aqui,  $N$  é o número de moléculas e  $\langle 0 | \sum_i r_i^2 | 0 \rangle$  é o valor médio da soma dos quadrados dos raios das órbitas eletrônicas em torno dos núcleos nos íons. Esta equação é conhecida como a *suscetibilidade magnética de Larmor* e descreve a resposta magnética de alguns sólidos tais como  $\text{NcCl}$ ,  $\text{KBr}$ ,  $\text{LiF}$  e dos gases nobres. As suscetibilidades magnéticas de materiais diamagnéticos são, em geral, muito pequenos quando comparados com o campo externo, sendo da ordem de  $10^{-5}$ .

Comparando os valores de suscetibilidades magnéticas pelo formalismo quântico com os resultados clássicos, vemos que os últimos são uma boa aproximação para os cálculos de suscetibilidades de materiais diamagnéticos.

## C.2 Paramagnetismo

Quando temos um meio magnético cujos átomos possuem elétrons desemparelhados<sup>1</sup>, pode ocorrer o aparecimento do paramagnetismo, já que os momentos de dipolos intrínsecos dos elétrons podem se orientar no sentido do campo magnético externo aplicado. Esta orientação, em geral, não é perfeita, uma vez que ela sofre a influência da temperatura do sistema, que tende a destruir o alinhamento. Do ponto de vista macroscópico, o paramagnetismo é caracterizado por uma resposta linear a um campo magnético aplicado. Materiais paramagnéticos não apresentam uma magnetização espontânea porque colisões térmicas tendem a desalinhar a ordem, tornando os

---

<sup>1</sup>A exigência desse desemparelhamento é devido ao Princípio da Exclusão de Pauli, que afirma que elétrons num dado átomo aparecem em pares com spins opostos, o que neutraliza o momento magnético total do material. Então, o paramagnetismo ocorre normalmente em átomos ou moléculas com um número ímpar de elétrons.

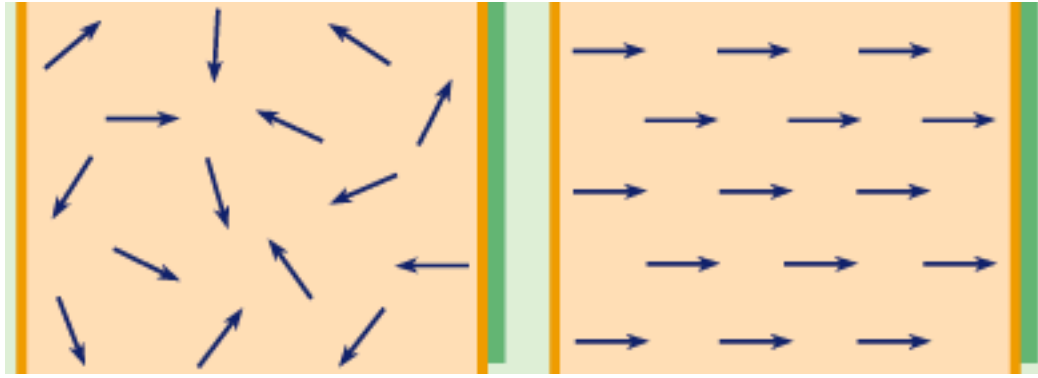


Figura C.2: Representação de um material paramagnético na ausência de um campo externo (à esquerda), e o mesmo material na presença de um campo externo  $\vec{H}$  (à direita).

momentos magnéticos atômicos distribuídos aleatoriamente [70]. Na Figura C.2, pode-se ver a diferença entre o comportamento de um material paramagnético na ausência e na presença de um campo magnético externo.

Assim como no caso diamagnético, pode-se fazer uma aproximação clássica para o estudo do paramagnetismo, entretanto, aqui aparece uma diferença importante, já que os momentos de dipolo magnético possuem valores discretos e bem definidos denominados *spins*. Essa grandeza não pode ser explicada em termos clássicos. Uma possível interpretação seria considerar o elétron como uma esfera que gira em torno de si mesma, de modo que a carga do elétron gera uma corrente elétrica e, consequentemente, um momento de dipolo magnético. Entretanto, não se deve levar essa visualização ao pé da letra, pois o elétron é descrito, quanticamente, em termos de probabilidades, e imaginá-lo como uma esfera é uma descrição pictórica. Além disso, supondo que o elétron seja uma esfera de  $3 \times 10^{-15}$  m (este valor é, aproximadamente, o raio clássico do elétron, o qual é dado por  $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$ , onde  $m_e$  é a massa do elétron,  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo), a velocidade de giro do elétron sobre seu próprio eixo pode ser estimada em  $6 \cdot 10^{10}$  m/s [69], violando etão um dos princípios da relatividade especial:  $v = c$  é a velocidade limite de propagação.

Uma análise clássica para o paramagnetismo pode ser feita a partir de uma análise estatística no Formalismo Canônico da Mecânica Estatística. A energia de

interação relevante no caso dos dipolos magnéticos intrínsecos é dada pela expressão

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\text{C.9})$$

que, para o caso de um dipolo magnético elementar, torna-se

$$E = U_m = -\mu_0 \mu H_m \cos \theta \quad (\text{C.10})$$

onde  $\vec{H}_m$  é o campo auxiliar molecular, relacionado à indução magnética por  $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{H}_m$ . A partir da análise estatística do problema, encontramos a suscetibilidade magnética clássica [67]:

$$\chi_{cl} = \frac{N \mu \mu^2}{3k_B T}. \quad (\text{C.11})$$

É importante notar que a suscetibilidade depende da temperatura de uma forma conhecida como lei de Curie, ou seja, como já foi dito, a temperatura tende a desalinhar a ordem do sistema. Essa expressão é válida, aproximadamente, quando a temperatura não é muito baixa.

A análise quântica do problema também pode ser dada a partir do formalismo canônico da Mecânica Estatística, no entanto, os valores dos momentos de dipolo magnético devem ser relacionados ao seu momento angular  $\ell$  através da relação

$$\vec{\mu} = \Upsilon \vec{\ell} \quad (\text{C.12})$$

onde  $\Upsilon$  é a razão giromagnética, dada por  $\Upsilon = \frac{g e}{2m}$ , sendo  $g$  o fator de Landé. Tomando então a expressão (C.10), pode-se determinar a componente do momento de dipolo magnético na direção do campo magnético  $\mu_z = \frac{g \mu_B}{\hbar} \mathbb{J}_z$ , onde a componente  $\mathbb{J}_z$  segue a regra de quantização dada por  $\mathbb{J}_z = m \hbar$ , sendo  $m$  um número inteiro que só pode assumir os valores  $m = -\mathbb{J}, -\mathbb{J} + 1, \dots, \mathbb{J} - 1, \mathbb{J}$ .

Dessa forma, tem-se que a suscetibilidade magnética é dada, quanticamente, por:

$$\chi_{quant} = \frac{N g^2 \mu_0 \mu_B^2 \mathbb{J}(\mathbb{J} + 1)}{3k_B T} \quad (\text{C.13})$$

que também segue a lei de Curie do tipo inverso da temperatura. É interessante notar que o caso clássico corresponde a tomarmos  $\mathbb{J} \rightarrow \infty$  e concomitantemente  $\mu_B \rightarrow 0$ , de forma que  $\mu_B^2 \mathbb{J}(\mathbb{J} + 1)$  permaneça finito. O motivo para isso é que quando  $\mathbb{J} \rightarrow \infty$ , permite-se que o momento de dipolo magnético aponte em qualquer direção espacial, que é o que ocorre quando fazemos uma aproximação clássica. Os cálculos clássico e quântico para a suscetibilidade paramagnética podem ser encontradas de forma clara e concisa nas referências [5, 67, 68].

### C.3 Ferromagnetismo

É nos materiais ferromagnéticos que o fenômeno do magnetismo se apresenta mais nitidamente, pois são esses materiais que apresentam a propriedade de serem fortemente atraídos por um ímã. A natureza do ferromagnetismo não pode ser explicada classicamente, pois sua origem é de natureza puramente quântica. Existem dois tipos de materiais ferromagnéticos: os doces, que apresentam uma magnetização que se comporta de forma praticamente linear com o campo externo, para campos fracos e moderados, e quando o campo externo é desligado, a magnetização também se anula; os duros, que retêm magnetização residual mesmo quando o campo externo é retirado. Tal retenção está intimamente ligada ao comportamento não-linear da magnetização com o campo externo nesses materiais. O nome dado a essa propriedade é histerese magnética.

Para entender o ferromagnetismo, é interessante uma breve revisão de alguns conceitos quânticos.

Considere os elementos do espaço de Hilbert,  $\mathcal{H}_\mu \otimes \mathcal{H}_\nu$ , para duas partículas, escritos sucintamente como:

$$|a^{(\mu)}, a^{(\nu)}\rangle, |a^{(\mu)}, b^{(\nu)}\rangle, |b^{(\mu)}, a^{(\nu)}\rangle, \dots, |j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle, |k^{(\mu)}, j^{(\nu)}\rangle, \dots \quad (\text{C.14})$$

Seja  $P_{(\mu\nu)}$  o operador que representa a permutação das partículas  $\mu$  e  $\nu$ , então,

$$P_{(\mu\nu)}|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle = |j^{(\nu)}, k^{(\mu)}\rangle \quad (\text{C.15})$$

e o segundo membro, por razões físicas (Condição de normalização da função de onda), só pode diferir de  $|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle$  por um fator de fase, isto é,

$$|j^{(\nu)}, k^{(\mu)}\rangle = e^{i\alpha}|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle \quad (\text{C.16})$$

onde  $\alpha$  é uma constante real. Aplicado o operador  $P^{(\mu\nu)}$  novamente, temos

$$P_{(\mu\nu)}|j^{(\nu)}, k^{(\mu)}\rangle = e^{i\alpha}P_{(\mu\nu)}|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle = e^{2i\alpha}|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle \quad (\text{C.17})$$

o que resulta em  $e^{2i\alpha} = 1 \Rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1$ . Então (C.15) pode ser escrita como

$$P_{(\mu\nu)}|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle = \pm |j^{(\nu)}, k^{(\mu)}\rangle \quad (\text{C.18})$$

ou seja, o vetor de estado para ter significado físico tem de ser simétrico ou anti-simétrico com relação à permutação de partículas indistinguíveis. Como consequência

de (C.18) a base do espaço de Hilbert para partículas indistinguíveis tem de ser formada por vetores simétricos ou vetores anti-simétricos, que podem ser construídos com os vetores de estado dados em (C.14). Então, temos que:

$$\begin{aligned}
 |j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle^A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle - |j^{(\nu)}, k^{(\mu)}\rangle) \\
 |j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle^S &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|j^{(\mu)}, k^{(\nu)}\rangle + |j^{(\nu)}, k^{(\mu)}\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{C.19}$$

são os vetores anti-simétrico e simétrico, respectivamente. Essas expressões têm consequências diferentes, pois se o sistema de partículas for descrito por vetores de estado anti-simétricos, então cada estado só poderá ser ocupado por no máximo uma partícula. Este é o Princípio de Exclusão de Pauli, mas esse princípio não se aplica a sistemas de partículas indistinguíveis descritos por vetores de estado simétricos. Para compreender o formalismo do comportamento de um sistema com  $N$  partículas, remetemos o leitor à referência [71].

Como o elétron é descrito por vetores anti-simétricos, eles obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli, logo, dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado quântico. Assim, considerando dois átomos vizinhos, quando seus elétrons da camada de valência têm spins paralelos, eles não podem estar muito próximos um do outro, e não podem ocupar o mesmo orbital, no entanto, se os spins forem antiparalelos, eles podem ocupar o mesmo orbital. Por outro lado, a interação coulombiana entre dois elétrons "prefere" configurações que privilegiam distâncias maiores entre os elétrons, o que corresponde a termos momentos magnéticos de spin paralelos entre si, de modo que os momentos magnéticos gerem uma magnetização não nula. Portanto, o mecanismo responsável pelo aparecimento do ferromagnetismo são as fortes interações eletrostáticas de origem quântica, chamadas *interações de troca*, que existem entre os elétrons do material [67]. No caso do ferro, por exemplo, dois elétrons na camada  $3d$  tendem a ficar mais afastados se seus spins forem paralelos.

Esse favorecimento da situação em que os spins estão alinhados produz no material o aparecimento de regiões chamadas de *domínios magnéticos*. Essas regiões contêm milhões ou mesmo bilhões de spins orientados numa certa direção, de modo que existe um momento magnético resultante. No entanto, a orientação dos domínios dentro do material é aleatória, o que faz com que a magnetização macroscópica seja muito pequena, ou até mesmo nula antes de um campo magnético ser aplicado no material. Na Figura C.3 está representada uma região de um material ferromagnético e alguns

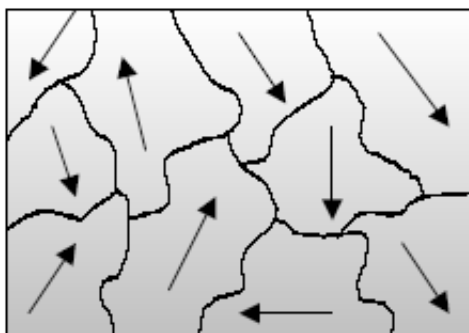


Figura C.3: Representação de um cristal com magnetização resultante nula, embora cada domínio esteja magnetizado.

domínios. É por isso que nem todo pedaço de ferro é um ímã, mas pode vir a sê-lo se um campo magnético for aplicado.

Quando um campo magnético externo é aplicado, os dipolos intrínsecos dos elétrons tendem a orientá-los na direção e sentido do campo. No entanto, nas regiões internas dos domínios as interações quânticas entre os dipolos são muito fortes e é muito difícil girar esses dipolos. Já nas frentes entre os domínios, conhecidas como paredes de domínios, os dipolos vizinhos não estão necessariamente paralelos, e as interações entre os dipolos nessas regiões são menores, o que permite que eles possam sofrer alterações em seu alinhamento, o que faz com que os domínios orientados na direção e sentido do campo cresçam, incorporando spins dos domínios adjacentes, cuja orientação é desfavorável. Isso faz com que o material adquira uma magnetização apreciável, que depende do campo aplicado, até que se atinja um certo valor máximo, chamado de *magnetização de saturação*. O efeito de histerese está relacionado ao fato de que quando o campo magnético externo é retirado, os limites das paredes de domínio não retornam todos à sua posição de origem, o que pode ser ocasionado por imperfeições na rede cristalina, tais como impurezas e tensões. É importante notar que a temperatura do sistema influencia essa orientação, tornando-a mais aleatória com o aumento da temperatura. A uma temperatura crítica, denominada temperatura de Curie, os ferromagnetos sofrem uma transição de fase, passando a se comportar como um material paramagnético.

A descrição quantitativa do ferromagnetismo é mais complexa do que aquelas para os materiais diamagnéticos e paramagnéticos, pois ela pode depender do material específico e do modo como foi produzido. O primeiro modelo teórico para explicar a

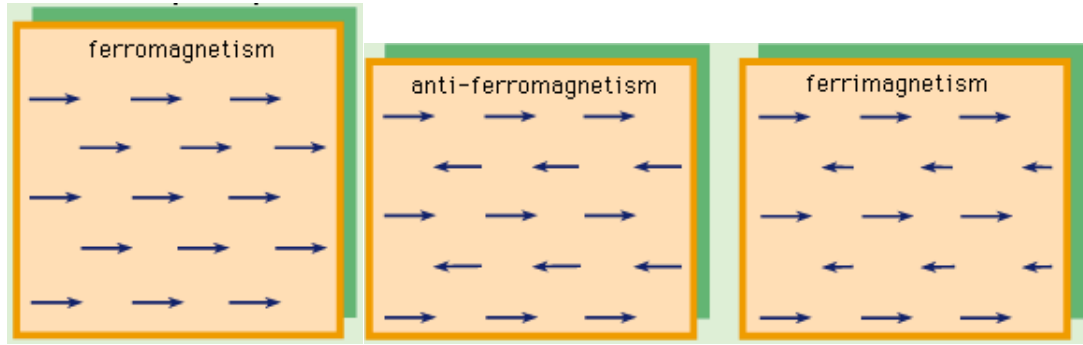


Figura C.4: Representação dos arranjos espaciais dos spins atômicos nos casos: ferromagnético, à esquerda; antiferromagnético, no centro; e ferrimagnético, à direita. Retirado de <http://www.geocities.com/castanhola2000/figura.htm>

magnetização foi proposto por Pierre Weiss, no início do século XX, o qual supunha que cada dipolo magnético de uma rede sofre a ação de um campo efetivo criado pelos dipolos vizinhos. Entretanto, a origem do *campo molecular* só foi compreendida anos mais tarde, com o advento da Mecânica Estatística Quântica, e está relacionada com a diferença entre as energias eletrostáticas de dois elétrons na situação de spins paralelos e antiparalelos. Quando o estado de menor energia corresponde a spins paralelos, temos o caso do ferromagnetismo. Caso contrário, teremos os casos ferrimagnético ou antiferromagnético. Atualmente, existem modelos teóricos que tentam descrever o ferromagnetismo e as transições de fase apresentadas por determinados materiais. Em geral, esses modelos tentam fazer uma aproximação do campo molecular de Weiss. Um dos modelos mais famosos e que é base dos modelos de magnetismo nos sólidos é descrito pelo *Hamiltoniano de Heisenberg* [4], que já foi discutido na seção 2.2 .

A suscetibilidade magnética de materiais ferromagnéticos acima da temperatura de Curie, no modelo de Weiss é dada por:

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2 S(S+1)}{k_B(T - T_C)} \quad (\text{C.20})$$

onde  $T_C$  é a temperatura de Curie,  $S$  é o número quântico relacionado ao momento de dipolo intrínseco do elétron,  $N$  é o número de átomos ou moléculas e  $k_B$  a constante de Boltzman. Vê-se assim, que quando  $T \rightarrow T_C$ , a suscetibilidade diverge, e isso corresponde ao material passar da fase paramagnética para a ferromagnética. Quantitativamente, o modelo clássico de Weiss reproduz, em certos regimes, fenômenos associados ao ferromagnetismo. Para maiores detalhes do cálculo da equação (C.20), o leitor é remetido às referências [4, 67].

Os casos ferrimagnéticos e antiferromagnéticos também podem ser explicados, numa primeira aproximação, pela teoria de Weiss. No entanto, nesses dois casos, os spins dos elétrons dos átomos vizinhos tendem a se orientar antiparalelamente de forma que, nos materiais antiferromagnéticos, não existe magnetização espontânea. No caso dos materiais ferrimagnéticos, apesar de os spins de elétrons adjacentes se orientarem antiparalelamente, há uma magnetização residual, uma vez eles possuem magnitudes diferentes. A temperatura na qual um material antiferromagnético se torna paramagnético, é chamada *temperatura de Néel*. A Figura C.4 trás a representação de diferentes tipos de arranjos de spins atômicos originados da interação de troca.

Para o leitor interessado, uma explicação sucinta e com pouco formalismo matemático sobre o magnetismo é feita nas referências [1, 69] nas quais os autores estão mais interessados nos conceitos e aplicações do comportamento magnético de materiais do que no desenvolvimento das equações relacionadas aos fenômenos aqui discutidos.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. M. Rezende, “*Materiais e Dispositivos Eletrônicos*”, Ed. Livraria da Física, 2<sup>a</sup> ed., São Paulo, (2004).
- [2] G. Leon, “*The Story of Electricity*”, Dover, New York, (1988).
- [3] G. J. B. Rodriguez, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **20** (1998) 315.
- [4] I. S. Oliveira e V. L. B. Jesus, “*Introdução à Física do Estado Sólido*”, Livraria da Física Editora, São Paulo, (2005).
- [5] C. Kittel, “*Introduction to Solid State Physics*”, 7<sup>a</sup> ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, (1996)
- [6] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 591.
- [7] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, “*Principles of Condensed Matter Physics*”, Cambridge Univ. Press, 3<sup>rd</sup> printing, (2006).
- [8] L. H. Ryder, “*Quantum Field Theory*”, 2nd. ed., Cambridge University Press, (1996).
- [9] R. Rajaraman, “*Solitons and Instantons: An introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*”, North Holland, Amsterdam, (1982).
- [10] R. Shankar, *Le Journal de Physique* **38** (1977) 1405.
- [11] Veja, por exemplo: B.I. Dunlap, *Phys. Rev.* **B 76** (1992) 1933;  
J. Liu et al, *Nature (London)* **385** (1997) 780.
- [12] S. Zhao et al, *Phys. Lett.* **A 331** (2004) 238.

- [13] E. W. Lee, “*Magnetism Since 1947*” in A. P. Cracknell and R. A. Vaugan, “*Magnetism in Solids: Some Current Topics*”, Redwood Burn Limited, Trowbridge, (1981)
- [14] F. J. G. Landgraf e M. Emura, *J. of Magn. and Mag. Mat.* **242** (2002) 152.
- [15] S. M. Gueno, R. R. Corrêa e P. I. Paulin Filho, *Cerâmica* **51** (2005) 139.
- [16] S. B. C. Pergher et al, *Química Nova* **28** (2005) 751.
- [17] R. Faez et al, *Polímeros: Ciência e Tecnologia* **10** (2000) 130.
- [18] J. M. Jardim, *Estudos Históricos*, **5** (2002) 251.
- [19] V.L. Berezinskii, *Sov. Phys. JETP* **32** 493 (1970); *ibid* **34**, 610 (1972);  
J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973).
- [20] A. Saxena, R. Dandoloff, T. Lookman, *Physica A* **261** (1998) 13.
- [21] S. Villain-Guillot, R. Dandoloff, A. Saxena, *Phys. Lett. A* **188** (1994) 343.
- [22] R. Dandoloff, S. Villain-Guillot, A. Saxena, A. R. Bishop, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 813.
- [23] A. Saxena, R. Dandoloff, *Phys. Rev.* **B 58** (1998) 563.
- [24] R. Dandoloff, A. Saxena, *Eur. Phys. Jour.* **B 29** (2002) 265.
- [25] S. Villain-Guillot, R. Dandoloff, A. Saxena, A. R. Bishop. *Phys. Rev.* **B 52** (1995) 6712.
- [26] A. R. Pereira, *J. Mag. Magn. Mat.* **285** (2005) 60.
- [27] W. A. Freitas, W. A. Moura-Mello, A. R. Pereira, *Phys. Lett. A* **336** (2005) 412.
- [28] G.S. Milagre, W. A. Moura-Melo, *Phys. Lett. A* **368** (2007) 155.
- [29] L.R.A. Belo et al, *Phys. Lett. A* **365** (2007) 463.
- [30] W. A. Moura-Melo et al, *Phys. Lett. A* **360** (2007) 472.
- [31] A. Saxena, R. Dandoloff, *Phys. Rev.* **B 66** (2002) 104414.
- [32] G.'t. Hooft, *Nucl. Phys.* **B 72** (1974) 461; *ibid.* **B 75** (1974) 461.

- [33] E. Witten, Nucl. Phys. **B 223** (1983) 422; *ibid.* **B 223** (1983) 433.
- [34] O.-Y. Zhong-Can, Phys. Rev. **A 41** (1990) 4517.
- [35] H. Jian- Guo, O.-Y Zhong-Can, Phys. Rev. **E 47** (1993) 461.
- [36] A. Wachowiak, et al, Science 298 (2002) 577.
- [37] M. Rahm et al, App. Phys. Lett. **85** (2004) 1553; M. Rahm, J. Stahl, D. Weiss, App. Phys. Lett. **87** (2005) 182107; A. R. Pereira et al, J. Appl. Phys. **101** (2007) 034310.
- [38] V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. B. Gaididei, Jour. Magn. Mag. Mat. **310** (2007) 116.
- [39] P. Voll, N. apRoberts-Warren, R. J. Zieve, “*Surface Curvature and Vortex Stability*”, arXiv:cond-mat/0601395 v1 (2006).
- [40] F. Raissi, Appl. Phys. Lett. **86** (2005) 263503.
- [41] J. Li, C. Rau, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 107201.
- [42] B. Van Waeyenberge et al Nature **444** (2006) 461.
- [43] A. Krishnan *et al*, Nature **388** (1997) 51.
- [44] C. A. Ross *et al*, J. Appl. Phys. **89** (2001) 1310; *ibid* 91 (2002) 6848.
- [45] R. Dandoloff *et al*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 813.
- [46] K. S. Buchanan et al, Phys. Rev. **B 74**, (2006) 064404.
- [47] X. Xing, “*Geometry and Topology of 1D Translational Order on Curved Surface*”, arXiv:0708.3182v1 [cond-mat.soft], (2007).
- [48] S. Gupta et al, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 143201.
- [49] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, Phys. Rev. **A 74** (2006) 065601.
- [50] H. Watanabe et al, App. Phys. Lett. **78** (2001) 2928.
- [51] M. M. Hingorani, M. O’Donnell, Nature Rev. Mol. Cell. Biology **1** (2000) 22.
- [52] J. Benoit, R. Dandoloff, Phys. Lett. **A 248** (1998) 439.

- [53] S. R. A. Salinas, “*Introdução á Física Estatística*”, edusp, São Paulo, (2005).
- [54] S. Wolfram, “*Mathematica*”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1999).
- [55] G. B. Arfken, H. J. Weber, “*Mathematical Methods for Physicists*”, Sixth Editon, Elsevier Inc., (2005).
- [56] A. Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, (1997).
- [57] E. B. Bogomol’nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 49.
- [58] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, JETP Lett, **22** (1975) 245.
- [59] A. Saxena, R. Dandoloff, Phys. Rev. **B 55** (1997) 11049.
- [60] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products*”, 7<sup>th</sup> ed., (2007) 171.
- [61] V. L. Carvalho-Santos, A. R. Moura, W. A. Moura-Melo and A. R. Pereira, “*On Topological Spin Excitations on a Rigid Torus*”, Submetido à Phys. Rev. **B** (2008).
- [62] A. Killinger, R. Höllinger, U. Krey, Jour. Magn. Mag. Mat. **272** (2004) 724.
- [63] B. A. Ivanov, C. E. Zaspel, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 027205.
- [64] X. Michalet, D. Bensimon, B. Fourcade, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 168.
- [65] J. Roustekoski, J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 3934.
- [66] T. S. Li, M. F. Lin, Phys. Rev. **B 76** (2007) 073409.
- [67] K. D. Machado, “*Teoria do Eletromagnetismo*”, Vol. II, Editora UEPG, Ponta Grossa, (2002).
- [68] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, “*Solid State Physics*”, Brooks/cole (1976).
- [69] R. N. Faria, L. F. C. P. Lima, “*Introdução ao Magnetismo de Materiais*”, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).
- [70] D. J. Griffiths, “*Introduction to Electrodynamics*”, Prentice-Hall Inc., New Jersey, (1999).

- [71] J. D. M. Vianna, A. Fazzio, S. Canuto, “*Teoria Quântica de Moléculas e Sólidos: Simulação Computacional*”, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2004).