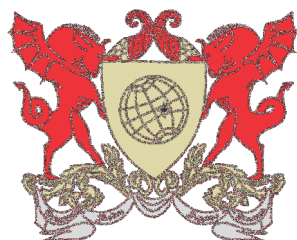


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



JOARDSON JUNIO FERNANDES SOARES

# CURVAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2018

JOARDSON JUNIO FERNANDES SOARES

## CURVAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal**

T

S676c  
2018 Soares, Joardson Junio Fernandes, 1988-  
Curvas planas no ensino médio : . / Joardson Junio  
Fernandes Soares. – Florestal, MG, 2018.  
x,62f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Inclui bibliografia.

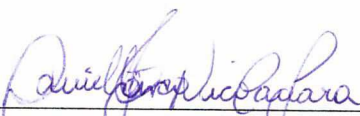
1. Curvas Planas. 2. Parametrizações . 3. Teorema de  
Jordan. 4. GeoGebra. 5. Matemática (ensino médio).  
I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e  
Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.


JOARDSON JUNIO FERNANDES SOARES

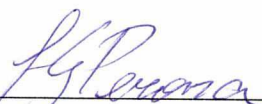
## CURVAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO

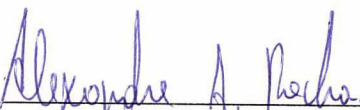
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,  
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,  
para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 06 de abril de 2018.

  
\_\_\_\_\_  
Danielle Franco Nicolau Lara

  
\_\_\_\_\_  
Juliano Soares Amaral Dias

  
\_\_\_\_\_  
Luiz Gustavo Perona Araújo  
(Coorientador)

  
\_\_\_\_\_  
Alexandre Alvarenga Rocha  
(Orientador)

# Dedicatória

---

Dedico esse trabalho:

às duas princesas, minha esposa Jéssica Cristina e minha filha Laura Soares que participaram de todas as fases desse projeto;

à minha mãe Ilma Fernandes, que é a verdadeira incentivadora e patrocinadora de fé nas minhas conquistas;

aos meus avós, Odete Fernandes e Leontino Ferreira(*in memoriam*) verdadeiros mestres na arte de viver.

# Agradecimentos

---

Agradeço:  
aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos, compreensão e incentivo,  
aos amigos que acreditaram e ajudaram diretamente ou indiretamente.

# Lista de Símbolos

---

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

$\alpha$	letra grega Alfa	$\notin$	Não pertence
$\beta$	letra grega Beta	$\setminus$	Divide
$\delta$	letra grega Delta	$\rightarrow$	Seta de função
$\epsilon$	letra grega Épsilon	$\Rightarrow$	Implicação
$\theta$	letra grega Teta	$\Leftrightarrow$	Equivalência
$\pi$	letra grega Pi	$\ $	Norma
$\pi$	letra grega Gama	$\ $	Módulo
$\zeta$	letra grega Zeta	$\subset$	Contido
$\xi$	letra grega Xi	$\supset$	Contém
$\eta$	letra grega Eta	$\cup$	União
$\Pi$	letra grega Pi	$\cap$	Interseção
$\emptyset$	Conjunto vazio	$\int$	Integral
$\forall$	Para todo	$\lim$	Limite
$\partial$	Fronteira	$\langle \rangle$	Produto misto
$\in$	Pertence		

# Lista de Figuras

---

2.1	Circunferência $c$ de centro $C = (a,b)$ e raio $r$ .	3
2.2	Circunferência $c$ de centro $C = (a,b)$	4
2.3	Parametrização da Circunferência	5
2.4	Construção da Ciclóide.	7
2.5	Hipérbole de centro na origem.	9
2.6	Hipérbole de centro em $(x_0, y_0)$ .	10
2.7	A Parábola.	12
2.8	Construção da Ciclóide.	13
2.9	Curvas Planas	14
2.10	Construção da Epitrocóide.	14
2.11	Demonstração do $\angle HCP$ .	16
2.12	Epitrocóide onde $d > r$ .	17
2.13	Epitrocóide onde $d < r$ .	17
2.14	Epitrocóide onde $d = r$ .	17
2.15	Limaçon onde $R = r$ .	17
2.16	Construção da Hipotrocóide.	18
2.17	Hipotrocóide onde $R = r$ .	19
2.18	Hipotrocóide onde $d < r$ .	19
2.19	Hipotrocóide onde $d > r$ .	19
2.20	Epitrocóide e Hipotrocóide.	19
2.21	Lemniscata de Bernoulli.	20
2.22	Folium de Descartes	22
3.1	Traço de uma curva parametrizada diferenciável.	24
3.2	Traço das aplicações $\alpha$ e $\beta$ .	24
3.3	Vetor Velocidade.	26
3.4	Comprimento de Arco - Linhas Poligonais.	28
3.5	Referencial de Frenet da Curva de $\alpha$ em $s$ .	30
4.1	Disco aberto.	34
4.2	Conjunto aberto.	34
4.3	O conjunto aberto $A = (a,b) \times (c,d)$ .	35
4.4	Fronteira de $A$ .	35

---

5.1	Curva de Jordan. . . . .	40
5.2	Estrutura dos lados e vértices do polígono de Jordan. . . . .	41
5.3	Vizinhança de $L_i$ . . . . .	42
5.4	Interseção das componentes. . . . .	42
5.5	Polígono de vértices distintos onde $x_i \neq x_j \neq x_k$ . . . . .	43
5.6	$v_j$ contável. . . . .	44
5.7	$v_j$ não contável. . . . .	44
5.8	$C = \bigcup_{(t \in [0,1])} B(\pi(t), \epsilon_t)$ . . . . .	45
5.9	$\bar{C} = \bigcup_{k=t_1}^{t_m} B(\pi(t_k), \epsilon_k)$ . . . . .	45
5.10	Teorema de Jordan . . . . .	46
5.11	Teorema de Jordan . . . . .	48
6.1	Interface do Geogebra. . . . .	51
6.2	Barra de Ferramenta. . . . .	52
6.3	Função da Ferramenta. . . . .	52
6.4	Barra de Ferramenta - Elipse. . . . .	53
6.5	Focos da Elipse. . . . .	53
6.6	Barra de Ferramenta - Ponto. . . . .	54
6.7	Barra de Ferramenta - Segmento. . . . .	54
6.8	Barra de Ferramenta - Reta. . . . .	54
6.9	Barra de Ferramenta - Mediatriz. . . . .	54
6.10	Barra de Ferramenta - Controle Deslizante. . . . .	55
6.11	Funções Paramétricas. . . . .	56
6.12	Barra de ferramenta - Circunferência. . . . .	56
6.13	Construção da Ciclóide. . . . .	57
6.14	Animação da Ciclóide. . . . .	57
6.15	Funções Paramétricas. . . . .	58
6.16	Barra de Ferramentas - Função Rotação. . . . .	59
6.17	Curva de Jordan - Dentro ou Fora?. . . . .	59
6.18	“Rosto de Jordan”. . . . .	60

# Resumo

---

SOARES, Joardson Junio Fernandes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2018. **Curvas Planas no Ensino Médio**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha. Coorientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.

Este trabalho terá um enfoque nas Curvas Planas no Ensino Médio com uma perspectiva literária de aprofundamento teórico e de sugestão pedagógica. Introduziremos as noções de curvas planas com definições, teoremas e apresentaremos algumas curvas parametrizadas no plano, tais como: Elipse, Hipérbole, Ciclóide, Lemniscata de Bernoulli, dentre outras, para tanto, recorreremos ao GeoGebra. Além disso, utilizando os conceitos de geometria diferencial, vamos representar várias curvas regulares com mesmo traço, através da mudança de parâmetro e demonstraremos o conceito de Curvaturas, apresentando a fórmula de Frenet para curvas parametrizadas pelo comprimento do arco. Com intuito de demonstrar o Teorema de Jordan, forneceremos uma ideia geral de topologia, incluindo definições e resultados básicos, além de algumas noções de espaços métricos, funções e caminhos conexos, a fim de facilitar a execução e compreensão do teorema. Por fim, usando a propriedade de separação de polígonos no plano, iremos apresentar e demonstrar o Teorema de Jordan, que se enuncia: “Uma curva de Jordan separa o plano em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada, sendo o traço da curva a fronteira comum das duas regiões” de fácil compreensão mas possui uma demonstração complexa. Como intervenção em sala de aula, apresentaremos uma proposta de atividades envolvendo parametrização e construção de curvas planas no GeoGebra.

# Abstract

---

SOARES, Joardson Junio Fernandes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, April, 2018. **Flat Curves in High School**. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha. Co-adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo.

This paper will have a focus on the Flat Curves in High School with a literary perspective of theoretical deepening and pedagogical suggestion. We will introduce the notions of flat curves with definitions and theorems and present some curves parameterized in the plane, such as: Ellipse, Hyperbole, Cycloid, Lemniscate of Bernoulli, among others, and for this we will resort to GeoGebra. Beyond that, using the concepts of the differential geometry, we will represent several regular curves with the same trace, through the parameter change and we'll demonstrate the concept of Curvatures, presenting the Frenet formula for parameterized curves by the length of the arc. In order to demonstrate the Jordan Theorem, we will provide a general idea of topology, including basic definitions and results, as well as some notions of metric spaces, functions and connected ways, in order to facilitate the execution and understanding of the theorem. Finally, using the property of separation of polygons on flat, we will present and demonstrate the Jordan Theorem, which enunciates: "A Jordan curve separates the flat into two regions, one limited and one unlimited, being the trace of the border curve, common of the two regions" It's easy to understand but has a complex demonstration. As a classroom intervention, we'll present a proposal of activities involving parameterization and construction of flat curves in GeoGebra.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Curvas Planas - Ensino Médio</b>	<b>2</b>
2.1	Introdução a Curvas Planas . . . . .	2
2.1.1	Curvas fechadas, Periódicas e Simples . . . . .	2
2.2	Parametrização das cônicas . . . . .	3
2.2.1	Circunferência . . . . .	3
2.2.2	Elipse . . . . .	6
2.2.3	Hipérbole . . . . .	8
2.2.4	Parábola . . . . .	11
2.3	Parametrização das Roletas . . . . .	13
2.3.1	Ciclóide . . . . .	13
2.3.2	Epitrocóide . . . . .	14
2.3.3	Hipotrocóide . . . . .	17
2.4	Curvas Clássicas . . . . .	19
2.4.1	Lemniscata de Bernoulli . . . . .	19
2.4.2	Folium de Descartes . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Curvas Planas - Geometria Diferencial</b>	<b>23</b>
3.1	Diferenciabilidade e Vetor Tangente . . . . .	23
3.2	Mudança de Parâmetro . . . . .	26
3.3	Comprimento de Arco . . . . .	27
3.4	Curvatura - Fórmulas de Frenet . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Noções de Topologia</b>	<b>33</b>
4.1	Bolas Abertas . . . . .	33
4.2	Conjuntos Abertos . . . . .	34
4.3	Conjunto Fronteira . . . . .	35
4.4	Ponto Aderente . . . . .	36
4.5	Conjuntos Fechados . . . . .	36
4.6	Densidade . . . . .	36
4.7	Função . . . . .	36
4.8	Conexidade . . . . .	37

---

<b>5</b>	<b>Teorema de Jordan</b>	<b>40</b>
5.1	Polígono de Jordan . . . . .	41
5.1.1	O Polígono de Jordan é fronteira das componentes limitada e ilimitada. . . . .	45
5.2	O Teorema de Jordan . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Proposta de Atividades</b>	<b>51</b>
6.1	Apresentação do Software Geométrico . . . . .	51
6.1.1	Barra de Menus . . . . .	52
6.1.2	Janela de Álgebra . . . . .	52
6.1.3	Campo de entrada de Texto . . . . .	52
6.1.4	Barra de Ferramenta . . . . .	52
6.2	Atividade 1 . . . . .	52
6.3	Atividade 2 . . . . .	55
6.4	Atividade 3 . . . . .	55
6.5	Atividade 4 . . . . .	55
6.6	Atividade 5 . . . . .	57
6.7	Atividade 6 . . . . .	59
6.8	Atividade 7 . . . . .	59
6.9	Atividade 8 . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>61</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>62</b>

# Introdução

---

Este trabalho tem o enfoque no aprofundamento da teoria das curvas planas apresentando seus teoremas, definições e demonstrações. Entende-se como curva plana uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, um rastro de uma partícula em  $\mathbb{R}^2$ . A parametrização dessa curva é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um intervalo de  $\mathbb{R}$  no espaço euclidiano bi-dimensional e seu traço é a imagem dessa aplicação.

Inciaremos o estudo com a parametrização das cônicas, que foram objetos de estudos por volta de (400-150 a.C.) e hoje está no plano curricular básico comum do terceiro ano do ensino médio. Mostraremos a parametrização das Roletas cuja definição é: o lugar geométrico determinado por um partícula afixada em uma curva que rola, sem deslizar, ao longo de outra curva ou reta. Vamos usar os conhecimentos das cônicas e aprofundar na teoria dos conteúdos de Matemática básica. Além disso, iremos explorar o campo visual nas construções das curvas no software geométrico Geogebra. Em especial, trataremos da ciclóide, uma das curvas mais debatidas e estudadas pelos célebres matemáticos no século XVII. Também serão apresentadas as curvas clássicas chamadas de Lemniscata de Bernoulli e Folium de Descartes.

Serão abordados alguns conceitos de Geometria Diferencial, tais como diferenciabilidade e vetor tangente a fim de analisarmos as características das curvas, sua reparametrização, seu traço e medir a distância total percorrida por uma partícula em uma curva, também chamada de comprimento de arco. Em posse disso, trabalharemos o conceito de curvatura, ou seja, o quanto a curva deixa de ser reta, que define o campo de vetores tangentes e unitários ao longo da curva.

O elegante Teorema de Jordan, que diz que uma curva plana simples e fechada divide o plano em duas regiões, favorece para uma grande e sofisticada demonstração matemática e nos mostra o quanto a intuição ou o esboço de uma ideia pode ser diferente da formalidade Matemática.

As atividades propostas para alunos do terceiro ano do Ensino Médio fecham o trabalho mostrando a acessibilidade e a oportunidade de se apresentar as curvas planas no Ensino Médio. Essas propostas vêm com a apresentação do software geométrico (Geogebra), seguidamente de passo a passo para construções de curvas planas parametrizadas e identificação das regiões formadas pela curva de Jordan.

# Curvas Planas - Ensino Médio

---

## 2.1 Introdução a Curvas Planas

Uma curva plana, em termos simples, é aquela curva que se localiza em um só plano euclidiano, ou ainda, qualquer esboço contínuo feito no plano.

É fácil ver que uma curva no plano pode ser considerada como a trajetória de uma partícula que se desloca no plano em um dado intervalo de tempo. Uma maneira de analisarmos essas trajetórias consiste em determinar as coordenadas de um ponto da curva em relação a um parâmetro. Descrevemos essas curvas através de funções  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ , que também podem ser chamadas de forma paramétrica da curva, cuja definição está expressa abaixo.

**Definição 2.1:** Uma curva plana parametrizada é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um intervalo de  $\mathbb{R}$  no espaço euclidiano bi-dimensional e seu traço é a imagem dessa aplicação.

A parametrização de  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , é contínua se  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas. O conjunto imagem da parametrização de  $\alpha$  é:

$$\alpha(t) = \{(x(t), y(t)), t \in I\}.$$

### 2.1.1 Curvas fechadas, Periódicas e Simples

**Definição 2.2:** Seja  $\alpha$  uma curva plana definida num intervalo  $I = [a, b]$ , onde  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são os pontos inicial e final, respectivamente. Dizemos que  $\alpha(a)$  é uma curva fechada se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .

**Definição 2.3:** Uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita periódica, se existe um número real  $l > 0$ , tal que:

$$\alpha(t + l) = \alpha(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chama-se de período de  $\alpha$  o menor valor de  $l = l_0$  para o qual a equação se torne verdadeira.

**Definição 2.4:** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita simples, se a parametrização  $\alpha$  for injetiva.

Quando temos  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ , com  $t_1, t_2 \in I$  e  $t_1 \neq t_2$  dizemos que  $\alpha$  possui um ponto múltiplo em  $t_1$  e  $t_2$ . Portanto, uma curva fechada  $\alpha : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita fechada e simples se  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2) \forall t_1 \neq t_2 \in [a,b)$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , ou seja, o único ponto múltiplo de  $\alpha$  ocorre no seu ponto inicial e final. Quando  $\alpha$  é uma curva fechada e simples, é classificada como curva de *Jordan*, que separa o plano em duas regiões disjuntas das quais ela mesmo é fronteira e será abordada com mais detalhe no Capítulo 5 deste trabalho.

## 2.2 Parametrização das cônicas

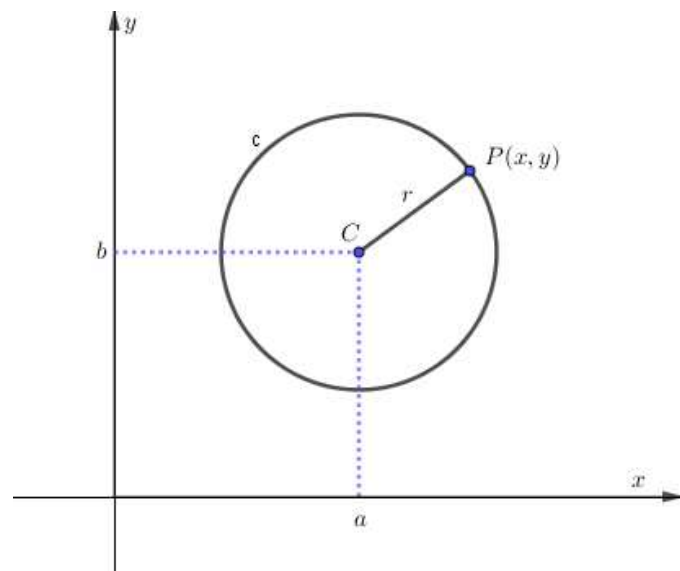
As cônicas foram objetos de estudos por volta de (400-150 a.C.) por vários Matemáticos gregos da época, em destaque, Euclides de Alexandria que evitou aprofundar-se na sua obra *Os Elementos* e Manaecmus (380-320 a.C. aproximadamente) que foi o primeiro a esboçar Elipse, Hipérbole e Parábola como secções de um plano não paralelo a base de um cone, porém foi Apolônio de Perga (262-190 a.C.) que reuniu e aprimorou os resultados conhecidos, inclusive registrando as nomenclaturas das curvas na sua obra *Seções Cônicas*.

### 2.2.1 Circunferência

Iniciaremos com a parametrização da circunferência, sendo que irá nos auxiliar e familiarizar com as seguintes demonstrações das cônicas.

Dada a circunferência  $c$  de raio  $r$ , centro  $C(a,b)$  e o ponto  $P(x,y) \in c$ .

**Definição 2.5:** Uma Circunferência é o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $d(P, C) = r$ .



**Figura 2.1:** Circunferência  $c$  de centro  $C(a,b)$  e raio  $r$ .

Se o centro da circunferência é  $C(a,b)$ , então essa circunferência é o conjunto dos pontos  $P(x,y)$  tais que a distância entre os dois pontos é igual a:

$$d_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

A forma canônica da equação da circunferência com centro  $C(a,b)$  e raio  $r$  é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

A forma canônica da equação centrada na origem é:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

**Exemplo 2.2.1:** A equação  $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 36$  é uma equação da circunferência de  $r = 6$  e  $C(4, -5)$ .

Construindo as paralelas aos eixos das abscissas e ordenadas passando por  $P$  e  $C$  obtemos o triângulo  $\triangle PCD$ , retângulo na intersecção das paralelas, determinado pelo ponto  $D$  e de hipotenusa  $r$  e ângulo  $\angle PCD = \theta$  veja Figura 2.2

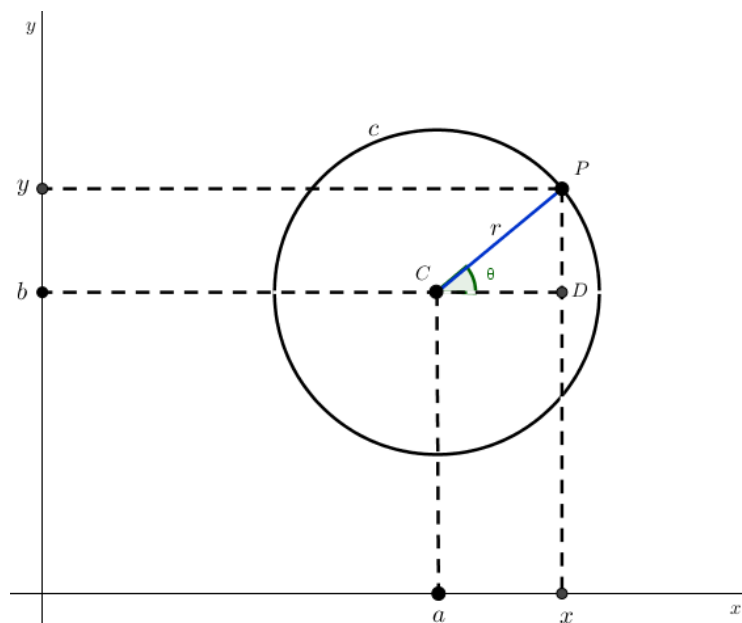


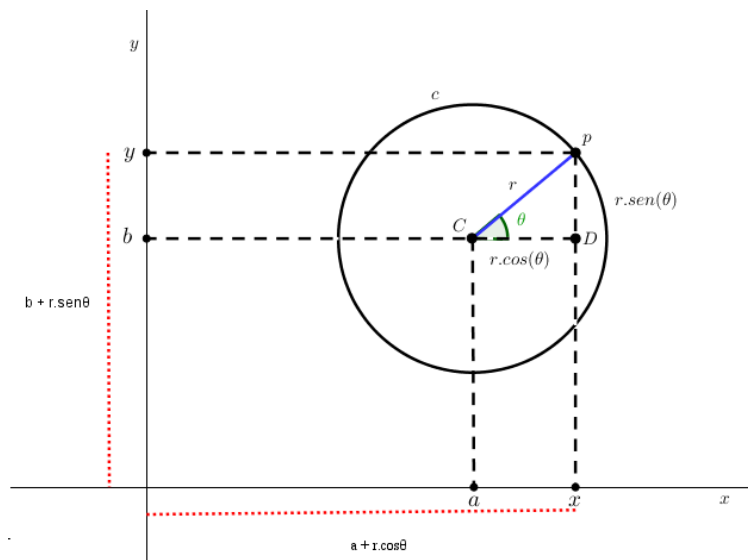
Figura 2.2: Circunferência  $c$  de centro  $C = (a,b)$

Usando as relações trigonométricas temos que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \implies \text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{r} \implies \text{cateto oposto} = r \cdot \text{sen}(\theta) \quad (2.1)$$

da mesma forma,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \implies \cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{r} \implies \text{cateto adjacente} = \\ &= r \cdot \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.2)$$



**Figura 2.3:** Parametrização da Circunferência

Observando a Figura 2.3 temos que as coordenadas do ponto  $P$  são:

$$x = a + r \cdot \cos(\theta)$$

$$y = b + r \cdot \text{sen}(\theta).$$

Portanto, a parametrização da circunferência  $c$  de centro  $C = (a, b)$  e raio  $r$ , tal que  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por:

$$c(\theta) = (a + r \cdot \cos(\theta), b + r \cdot \text{sen}(\theta)).$$

No caso particular de centro na origem temos que:

$$c(\theta) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \text{sen}(\theta)). \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Elipse

**Definição 2.6:** Uma Elipse  $\xi$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos  $P$  cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2p > 0$ , maior do que a distância entre os focos  $2c \geq 0$ , ou seja:

$$\xi = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2p\}.$$

#### Terminologia

- $F_1$  e  $F_2$  são os *focos* da Elipse.
- A reta que contém os focos é chamada de *reta focal*.
- A intersecção da Elipse com a reta focal forma-se os *vértices* sobre a reta focal, chamados de  $A_1$  e  $A_2$ .
- O segmento  $A_1A_2$  é denominado *eixo focal* da elipse e seu comprimento é igual a  $2p$ .
- O ponto médio do eixo focal é o *centro* da Elipse. Esse ponto também é ponto médio do segmento  $F_1F_2$ .
- A reta que passa pelo centro e é perpendicular a reta focal e denominada *reta não focal*.
- A intersecção da Elipse com a reta não focal forma-se os *vértices* sobre a reta não focal, chamados de  $B_1$  e  $B_2$ .
- O segmento  $B_1B_2$  é denominado *eixo não focal* da elipse e seu comprimento é igual a  $2q$ , tal que  $q^2 = p^2 - c^2$ .
- O número  $e = \frac{c}{p}$  é chamado de *excentricidade* da elipse. Note que  $0 \leq e < 1$ .
- O número  $p$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal,  $q$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e  $c$  a distância do centro aos focos.

A demonstração da forma canônica das cônicas não serão demonstradas neste trabalho, mas poderão ser encontradas na Referência [3].

A forma canônica da equação da elipse com centro no ponto  $C(x_0, y_0)$  e eixo focal paralelo ao eixo  $OX$  é:

$$\xi : \frac{(x - x_0)^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1,$$

onde  $q^2 = p^2 - c^2$ .

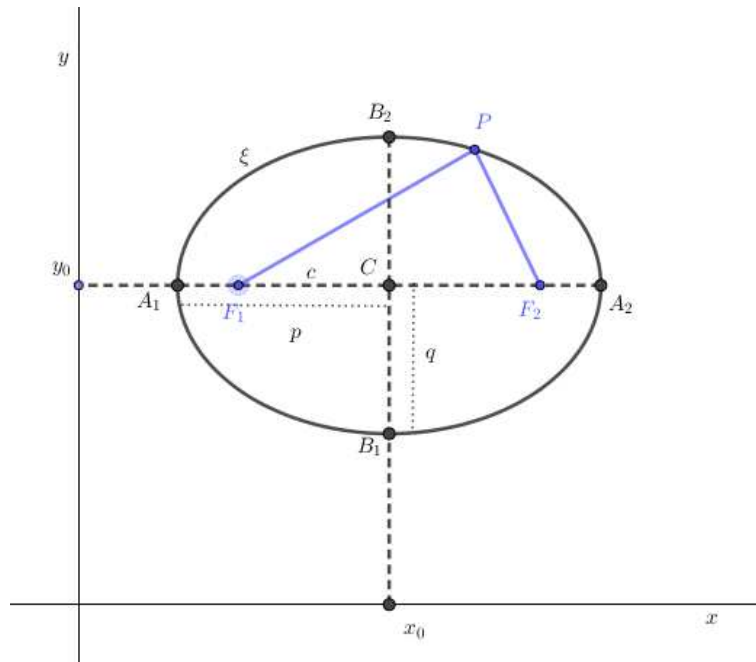


Figura 2.4: Elipse de centro  $C(x_0, y_0)$ .

Fazendo as seguintes substituições

$$\beta = \frac{(x - x_0)}{p}$$

$$\theta = \frac{(y - y_0)}{q},$$

temos que a forma canônica da elipse se transforma em:

$$\beta^2 + \theta^2 = 1$$

ou seja, uma circunferência de centro na origem porém não representada no mesmo plano da Elipse. Usando a equação 2.3 temos que:

$$\beta = 1 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\theta = 1 \cdot \text{sen}(\alpha)$$

então:

$$\beta = \frac{(x - x_0)}{p} = 1 \cdot \cos(\alpha) \implies x = x_0 + p \cos(\alpha)$$

$$\theta = \frac{(y - y_0)}{q} = 1 \cdot \text{sen}(\alpha) \implies y = y_0 + q \text{sen}(\alpha).$$

Logo a parametrização da Elipse tal que  $\xi(\alpha) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por:

$$\xi(\alpha) = (x_0 + p \cos(\alpha), y_0 + q \text{sen}(\alpha)).$$

Se escolhermos o caso particular de modo que a Elipse seja descrita pela equação:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

a sua parametrização é dada por:

$$\xi(\alpha) = (p \cdot \cos(\alpha), q \cdot \sin(\alpha)).$$

### 2.2.3 Hipérbole

**Definição 2.7:** Uma Hipérbole,  $\eta$ , de focos  $F_1$  e  $F_2$ , é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos  $P$  tais que o módulo da diferença das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2p > 0$ , menor do que a distância entre os focos  $2c > 0$ .

$$\eta = \{P \in \mathbb{R}^2; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2p\}, 0 < p < c; d(F_1, F_2) = 2c$$

#### Terminologia

- Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os *focos* da Hipérbole.
- A reta que contém os focos é denominada de *reta focal*
- A intersecção da Hipérbole com a reta focal forma-se os *vértices* sobre a reta focal, chamados de  $A_1$  e  $A_2$ .
- O segmento  $A_1A_2$  é denominado *eixo focal* da Hipérbole e seu comprimento é  $d(A_1A_2) = 2p$ .
- A reta que passa pelo centro e é perpendicular a reta focal e denominada *reta não focal*.
- A intersecção da Hipérbole com a reta não focal forma-se os *vértices* sobre a reta não focal, chamados de  $B_1$  e  $B_2$ .
- O segmento  $B_1B_2$  é denominado *eixo não focal* da Hipérbole e seu comprimento é igual a  $2q$ , tal que  $q^2 = c^2 - p^2$ .
- O número  $e = \frac{c}{p}$  é chamado de *excentricidade* da Hipérbole. Note que  $e > 1$ , pois  $c > p$ .
- O *retângulo de base* da Hipérbole é o retângulo que contém os pontos  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  como pontos médios de seus lados e as retas que contém as diagonais do retângulo de base da Hipérbole são suas *assíntotas*.

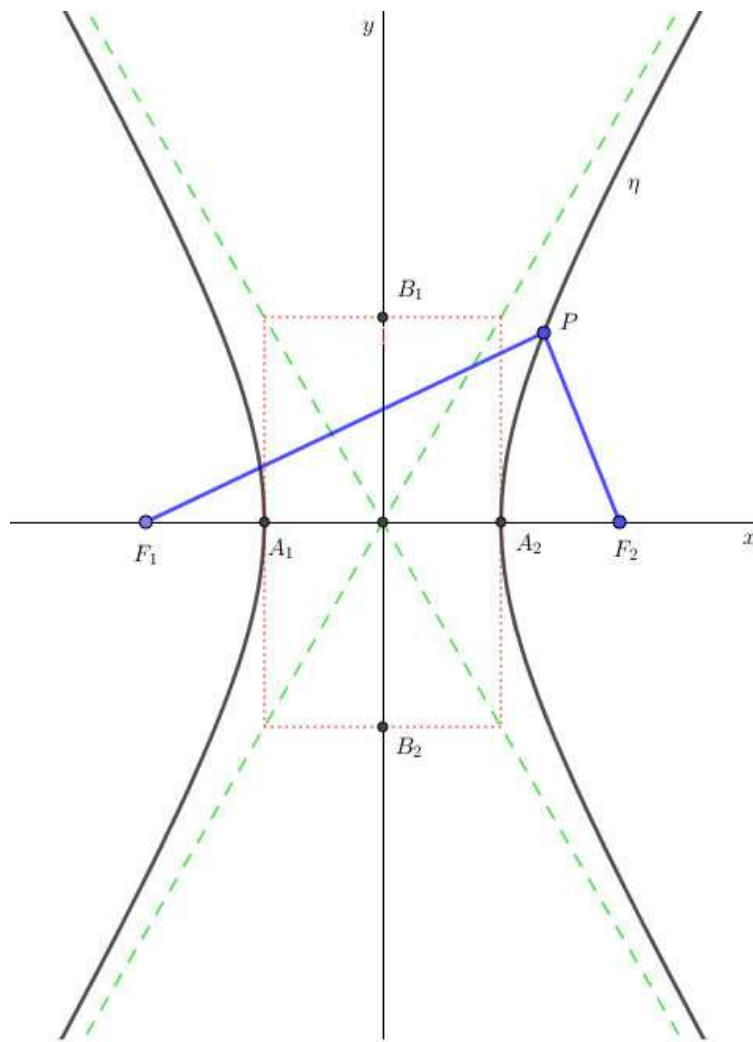
As assíntotas são as retas que passam pelo centro Hipérbole e tem *inclinação*  $\pm \frac{q}{p}$  em relação a reta focal.

Procedendo de maneira análoga da demonstração anterior, temos que a forma canônica da equação da Hipérbole com centro  $C(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$  é

$$\eta : \frac{(x - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1.$$

A equação da Hipérbole centrada na origem e assíntotas  $x = y$  e  $x = -y$  é:

$$x^2 - y^2 = 1$$



**Figura 2.5:** Hipérbole de centro na origem.

Usando a função hiperbólica, temos que  $x = \cosh(\alpha)$  e  $y = \sinh(\alpha)$ , como  $\cosh(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$  obtemos as equações paramétricas do ramo  $x^2 - y^2 = 1$  situado no semiplano  $x > 0$ .

$$\begin{cases} x(\alpha) = \cosh(\alpha) \\ y(\alpha) = \sinh(\alpha). \end{cases}$$

O ramo situado no semiplano  $x < 0$  tem as equações paramétricas

$$\begin{cases} x(\alpha) = -\cosh(\alpha) \\ y(\alpha) = \sinh(\alpha) \end{cases}$$

sendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

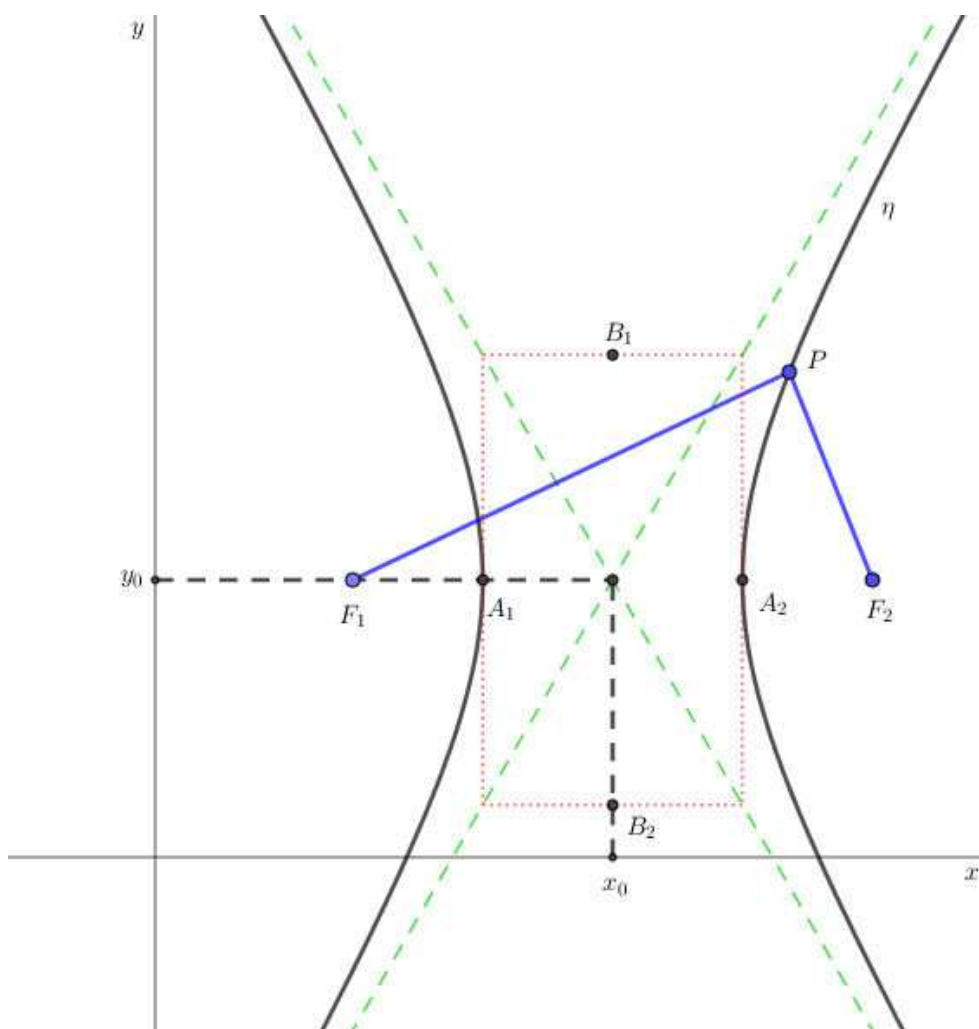
A Hipérbole centrada em  $(0,0)$  e assíntotas  $qx = \pm py$  tem equação:

$$\eta: \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1; p, q \neq 0$$

fazendo  $x = pu$  e  $y = qv$  temos que  $u^2 - v^2 = 1$ , logo as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(\alpha) = \pm p \cosh(\alpha) \\ y(\alpha) = q \sinh(\alpha) \end{cases}$$

por translação, as equações paramétricas da Hipérbole centrada em  $(x_0, y_0)$  são:



**Figura 2.6:** Hipérbole de centro em  $(x_0, y_0)$ .

$$\begin{cases} x(\alpha) = \pm p \cosh(\alpha) + x_0 \\ y(\alpha) = q \sinh(\alpha) + y_0. \end{cases}$$

### 2.2.4 Parábola

**Definição 2.8:** Sejam  $\Gamma$  uma reta do plano e  $F$  um ponto no plano não pertencente a  $\Gamma$ . A Parábola  $P$  de diretriz  $\Gamma$  e foco  $F$  é o conjunto que consiste de todos os pontos  $P$  do plano que são equidistante do ponto  $F$  e da reta  $\Gamma$

$$P = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P, F) = d(P, \Gamma)\}.$$

#### Terminologia

- O ponto  $F$  é o *foco* e a reta  $\Gamma$  é a *diretriz* da Parábola.
- A reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz é denominada *reta focal* da Parábola.
- O *Vértice* da Parábola é o ponto  $V$  da reta focal que equidista de  $F$  e de  $\Gamma$ .
- Se  $A$  o ponto onde a diretriz intersecta a reta que contém o foco, então  $V$  é o ponto médio do segmento  $AF$ , logo:

$$V = \frac{A + F}{2}.$$

- O número  $2p = d(F, \Gamma)$  é o *parâmetro* da parábola. Note que,

$$d(V, F) = d(V, \Gamma) = p.$$

A forma canônica da Parábola em que o vértice pertence à origem e a reta focal é paralela ao eixo  $y$ , é a seguinte:

$$y^2 = 4px.$$

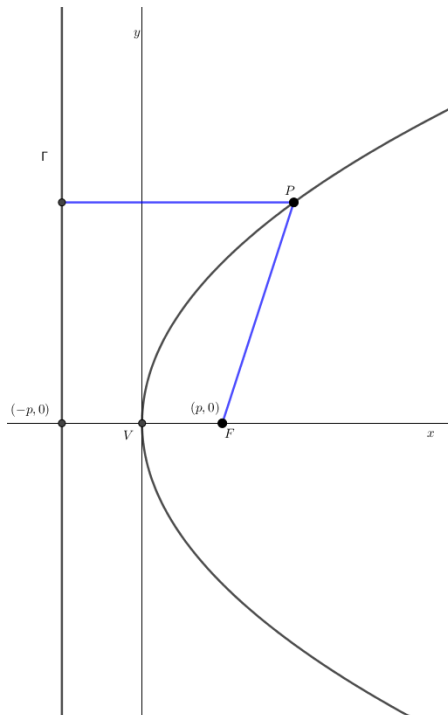


Figura 2.7: A Parábola.

Fazendo a translação, a Parábola com vértice igual a  $(-p,0)$ , foco na origem e diretriz paralela ao eixo das ordenadas tem como equação:

$$y^2 = 4p(x + p),$$

substituindo  $y = 2p\alpha$  em  $y^2 = 4px$ , temos que  $x = p\alpha^2$  e as equações paramétricas da Parábola com vértice na origem são:

$$\begin{cases} x(\alpha) = p\alpha^2 \\ y(\alpha) = 2p\alpha \end{cases}$$

por translação, as equações paramétricas da Parábola  $y^2 = 4p(x + p)$  são:

$$\begin{cases} x(\alpha) = p(\alpha^2 - 1) \\ y(\alpha) = 2p\alpha. \end{cases}$$

De maneira análoga, a Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas  $x^2 = 4py$  e a transladada  $x^2 = 4p(y + p)$  tem as respectivas paramétricas:

$$\begin{cases} x(\alpha) = 2p\alpha \\ y(\alpha) = p\alpha^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\alpha) = 2p\alpha \\ y(\alpha) = p(\alpha^2 - 1), \end{cases}$$

sendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## 2.3 Parametrização das Roletas

Uma Roleta é o lugar geométrico determinado por uma partícula afixada em uma curva que rola, sem deslizar, ao longo de outra curva ou reta.

### 2.3.1 Ciclóide

A Ciclóide foi uma das curvas mais estudadas e debatidas pelos célebres matemáticos do século XVII dentre eles; Blaise Pascal, Jakob e Johann Bernoulli e Galileu. Por esse motivo, a curva ganhou fama de “Helena da geometria” fazendo menção à “Helena de Tróia” que foi cobiçada e disputada por vários homens, segundo a mitologia.

Dado um ponto qualquer, fixado em uma circunferência, a Roleta Ciclóide é uma curva delineada quando essa circunferência rola, sem deslizar, por uma reta.

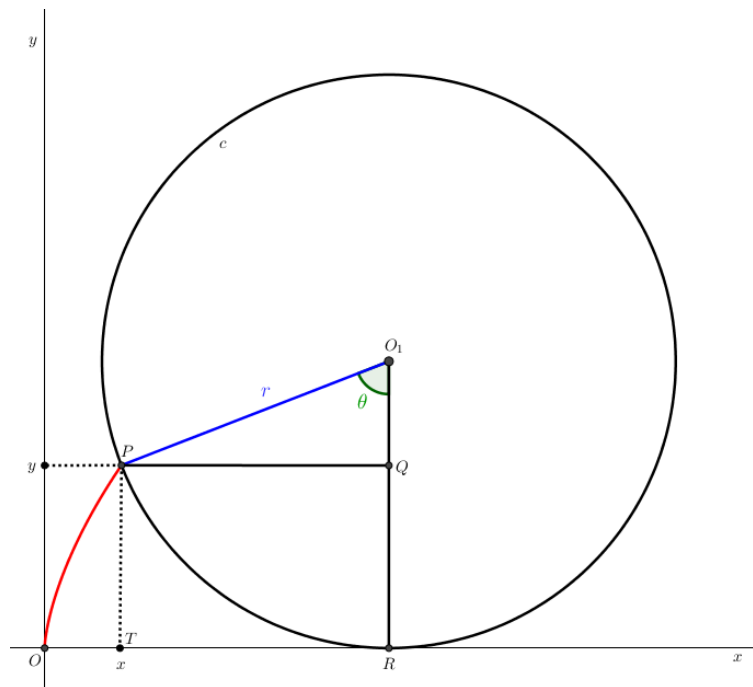


Figura 2.8: Construção da Ciclóide.

Seja  $\theta$  o ângulo  $\angle PO_1Q$ , em que  $PQ$  é perpendicular a  $O_1R$ , como a circunferência  $c$  rola sem deslizar de  $O$  a  $R$  temos que o segmento  $\overline{OR}$  é igual ao comprimento do arco percorrido por  $P$ , então:

$$\overline{OR} = \widehat{PR} = \theta.r,$$

a coordenada do ponto  $P$  é igual a:

$$x = OR - TR$$

$$y = O_1R - O_1Q$$

usando as relações trigonométricas no  $\triangle PQ_1O_1$  temos:

$$O_1Q = r \cos(\theta)$$

$$PQ = r \operatorname{sen}(\theta).$$

Então as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(\theta) = r\theta - r \operatorname{sen}(\theta) \\ y(\theta) = r - r \cos(\theta). \end{cases}$$

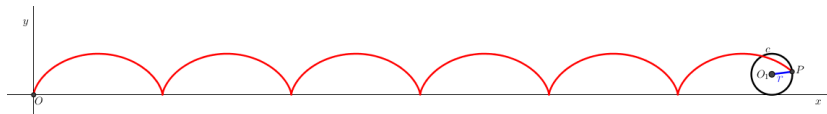


Figura 2.9: A Ciclóide.

### 2.3.2 Epitrocóide

**Definição 2.9:** A Epitrocóide é uma roleta descrita por um ponto  $P$ , associado a um círculo de raio  $r$  que rola externamente ao redor de outro círculo de raio  $R$ .

Onde  $R$  é o raio do círculo fixo,  $r$  é o raio do círculo que gira e  $d$  é a distância do ponto  $P$  ao centro do círculo móvel. Observe que essa distância do ponto  $P$  pode ser menor, igual ou maior ao raio  $r$ .

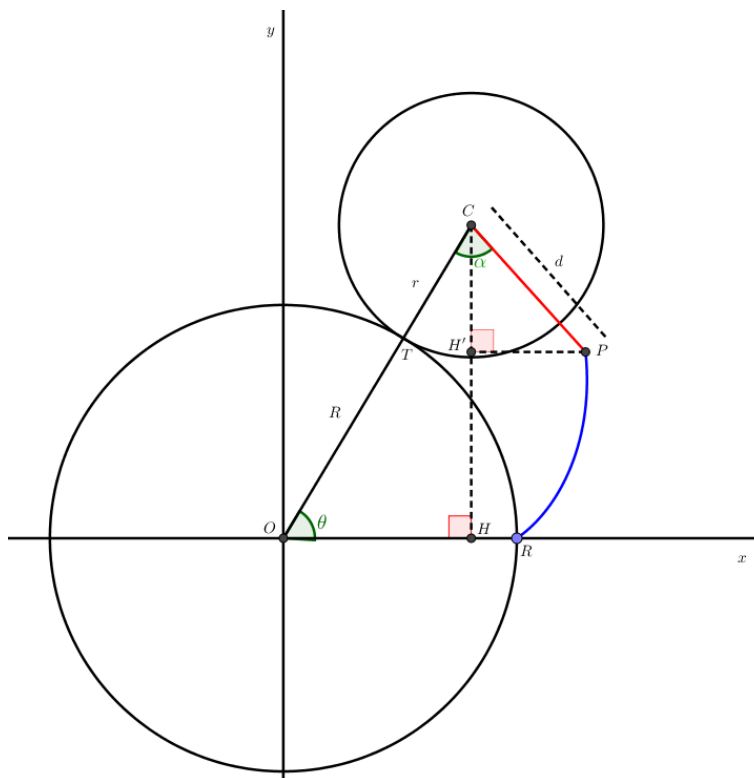


Figura 2.10: Construção da Epitrocóide.

Considera-se como origem do sistema cartesiano o centro  $O$  do círculo fixo e as seguintes construções:

- a reta que contém o segmento  $\overline{CH}$  é perpendicular ao eixo das abscissas,
- a reta que contém o segmento  $\overline{PH}$  é perpendicular ao eixo das ordenadas.

**Lema 2.1:** O único ponto de tangência entre duas circunferências pertence ao segmento que une os dois centros.

*Demonstração.* Seja  $T$  o ponto de tangência das circunferências de centros  $O$  e  $C$  e de raios respectivamente  $R$  e  $r$ . Construindo uma reta  $s$  tangente as circunferências que passa por  $T$ , temos que:

$$\overline{OT} \perp s$$

e

$$\overline{CT} \perp s$$

então,

$$\angle OTC = 180^\circ.$$

Logo  $O, T, C$  são colineares e  $T$  pertence a  $\overline{OC}$ .

□

Tomamos, sem perda de generalidade que o ponto  $P$  coincida com o ponto de tangência de coordenada  $(R, 0)$  no início do movimento.

Fazendo  $\theta$  como o ângulo formado entre o segmento  $OC$  e o eixo  $x$  positivo. temos as seguintes coordenadas de  $C$ :

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos(\theta) \\ y = (R + r) \sin(\theta) \end{cases}.$$

Como não ocorre deslizamento, os arcos formados pelas duas circunferências possuem a mesma medida, seja  $l$  o comprimento do arco, temos que:

$$l = \theta.R = \alpha.r$$

logo,

$$\alpha = \frac{R}{r}.\theta \tag{2.4}$$

E com isso, podemos determinar as coordenadas do ponto  $P(X_p, Y_p)$ . Observe a Figura 2.11:

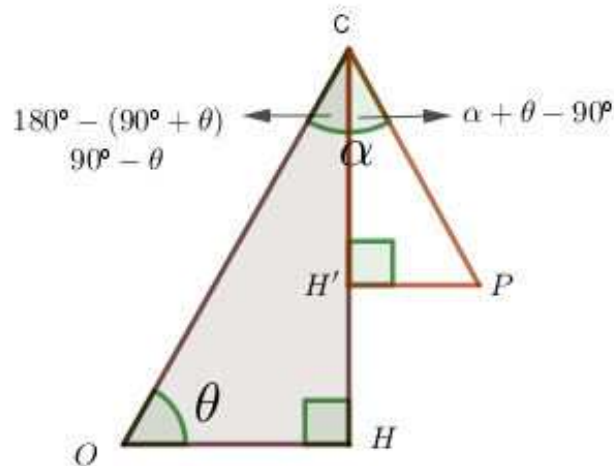


Figura 2.11: Demonstração do  $\angle HCP$ .

Temos que,

$$\angle HCP = \angle H'CP = \alpha + \theta - 90^\circ$$

usando a Igualdade 2.4

$$\angle HCP = \theta + \frac{R}{r}\theta - 90^\circ$$

logo

$$\angle HCP = \frac{(R+r)}{r}\theta - 90^\circ.$$

Fazendo  $d > r$ , a hipotenusa do triângulo  $\triangle H'CP$  conclui-se que:

$$\cos\left(\frac{(R+r)}{r}\theta - 90^\circ\right) = \frac{H'C}{d}$$

$$H'C = d \cdot \cos\left(\frac{(R+r)}{r}\theta - 90^\circ\right)$$

e

$$\text{sen}\left(\frac{(R+r)}{r}\theta - 90^\circ\right) = \frac{H'P}{d}$$

$$H'P = d \cdot \text{sen}\left(\frac{(R+r)}{r}\theta - 90^\circ\right).$$

portanto,

$$X_p = (R+r) \cos(\theta) + d \cdot \text{sen}\left(\frac{(R+r)}{r}\theta - 90^\circ\right)$$

$$Y_p = (R+r) \text{sen}(\theta) - d \cdot \cos\left(\frac{(R+r)}{r}\theta - 90^\circ\right).$$

Usando as identidades trigonométricas<sup>1</sup> infere-se que a equação paramétrica da Epitrocóide é:

<sup>1</sup> $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha)$   
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha).$

$$\begin{cases} X_p = (R + r) \cos(\theta) - d \cdot \cos\left(\frac{(R+r)}{r}\theta\right) \\ Y_p = (R + r) \sin(\theta) - d \cdot \sin\left(\frac{(R+r)}{r}\theta\right) \end{cases} .$$

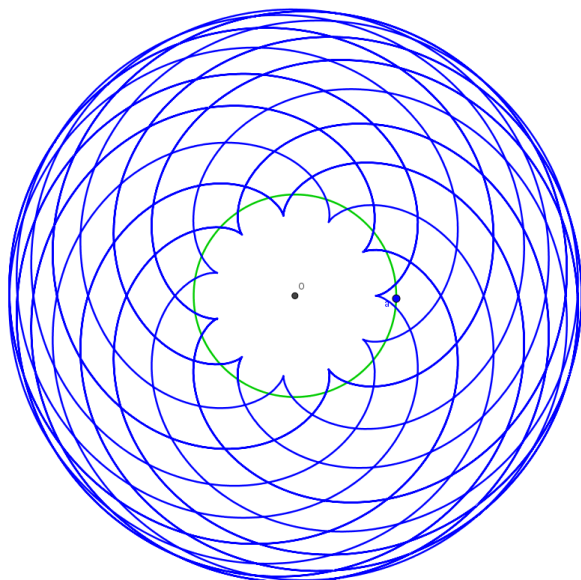


Figura 2.12: Epitrocóide onde  $d > r$ .

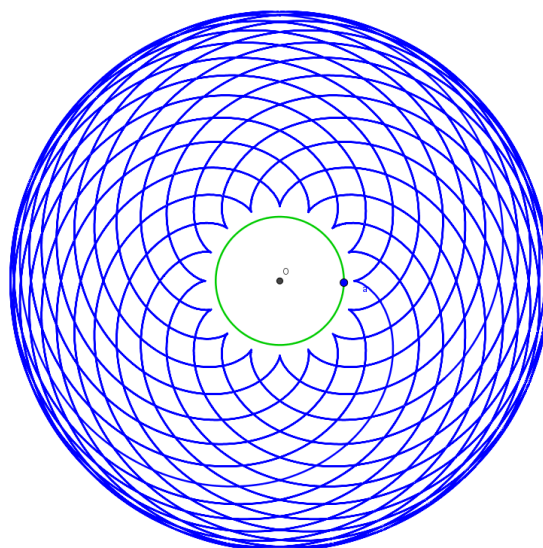


Figura 2.13: Epitrocóide onde  $d < r$ .

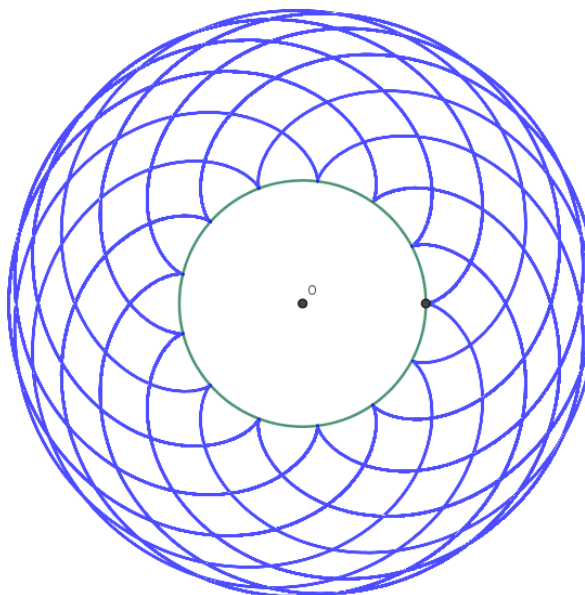


Figura 2.14: Epitrocóide onde  $d = r$ .

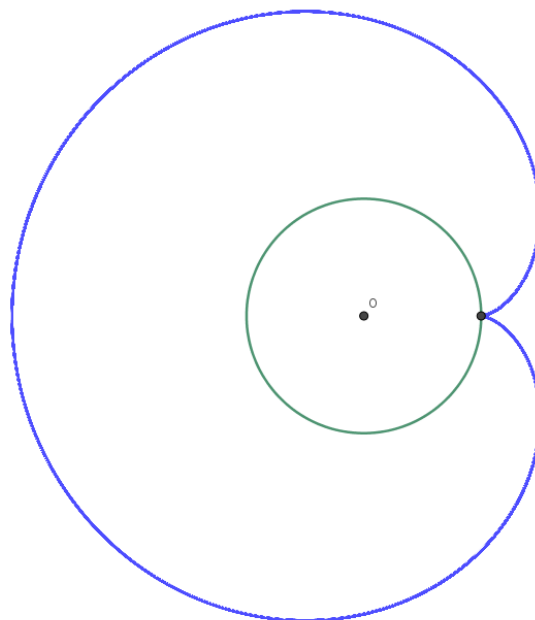
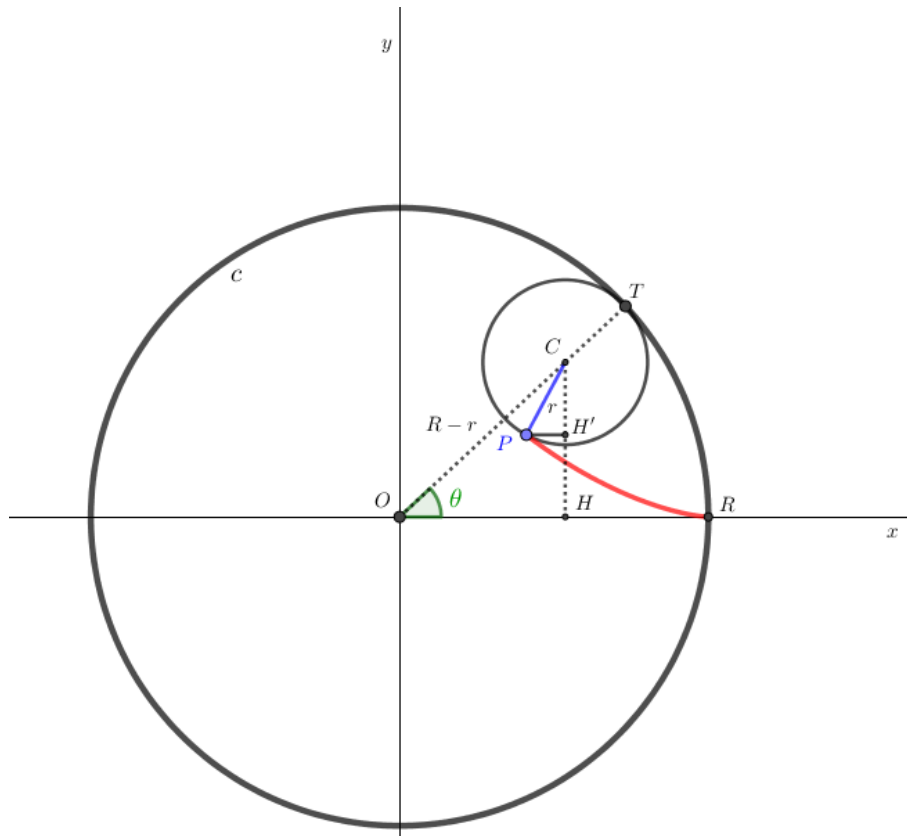


Figura 2.15: Limaçon onde  $R = r$ .

### 2.3.3 Hipotrocóide

**Definição 2.10:** É uma roleta descrita por um ponto  $P$ , associado a um círculo de raio  $r$  que rola internamente ao redor de outro círculo de raio  $R$ .



**Figura 2.16:** Construção da Hipotrocóide.

Onde  $R$  é o raio do círculo fixo,  $r$  é o raio do círculo que gira e  $d$  é a distância do ponto  $P$  ao centro  $C$  da circunferência interna.

De modo análogo à demonstração da Epitrocóide, temos que:

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos(\theta) \\ y = (R - r) \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

e

$$\alpha = \frac{R}{r} \cdot \theta,$$

com isso, temos que as coordenadas do ponto  $P$  são:

$$X_p = (R - r) \cos(\theta) - d \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{(R - r)}{r} \theta - 90^\circ\right)$$

$$Y_p = (R - r) \operatorname{sen}(\theta) - d \cdot \cos\left(\frac{(R - r)}{r} \theta - 90^\circ\right).$$

Usando as identidades trigonométricas infere-se que a equação paramétrica da Hipotrocóide é:

$$\begin{cases} X_p = (R - r) \cos(\theta) + d \cdot \cos\left(\frac{(R - r)}{r} \theta\right) \\ Y_p = (R - r) \operatorname{sen}(\theta) - d \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{(R - r)}{r} \theta\right). \end{cases}$$

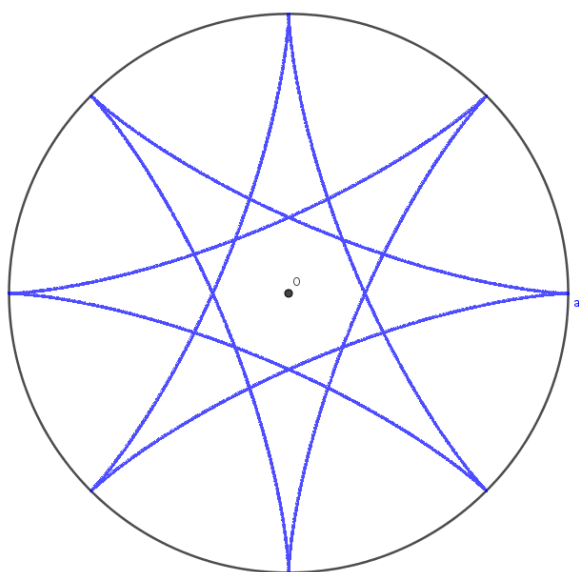


Figura 2.17: Hipotrocóide onde  $R = r$ .

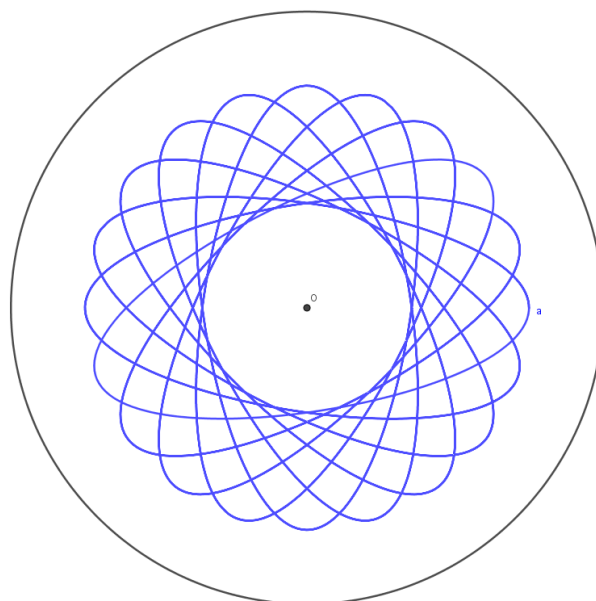


Figura 2.18: Hipotrocóide onde  $d < r$ .

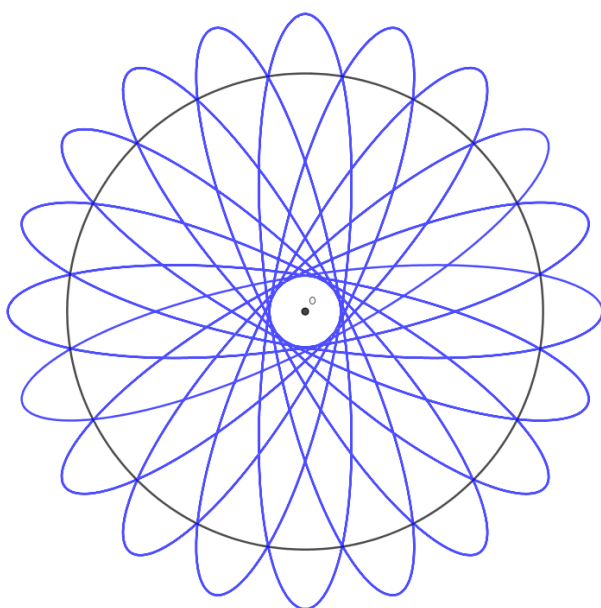


Figura 2.19: Hipotrocóide onde  $d > r$ .

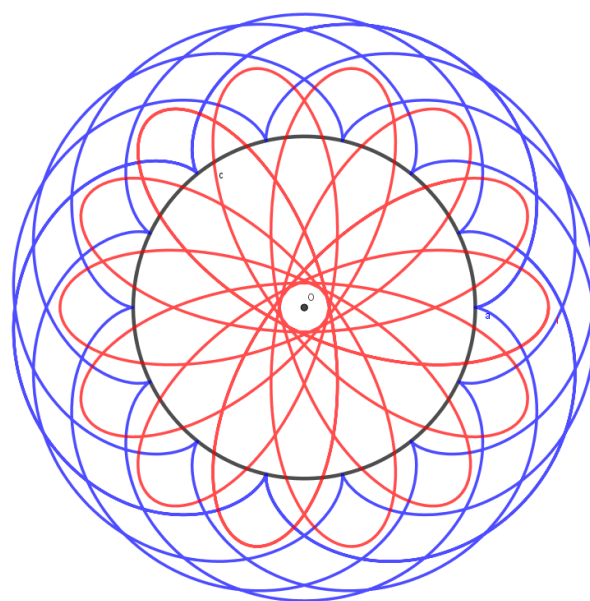


Figura 2.20: Epitrocóide e Hipotrocóide.

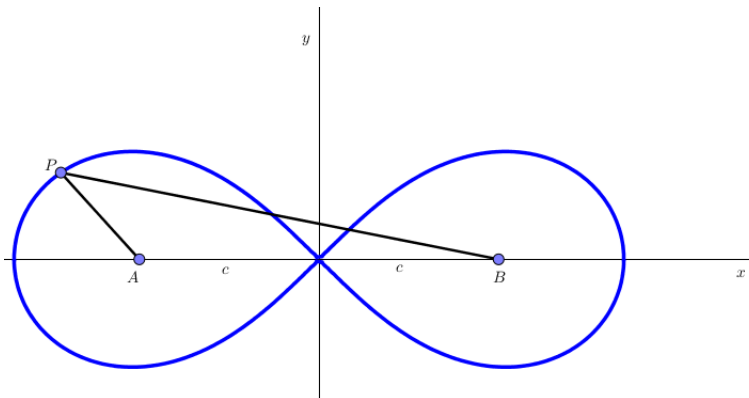
## 2.4 Curvas Clássicas

### 2.4.1 Lemniscata de Bernoulli

Em 1684 Jacob Bernoulli publicou um artigo que falava sobre a curva com aspecto de nó, oito ou fita, motivo pelo qual ele chamou de *Lemniscus*, que em latim significa fita pendente. Em 1680 sem a ciência de Bernoulli a curva também foi descrita por Cassini e após meio século, Giovanni Fagnano e Euler aprofundaram os estudos.

Dados dois pontos fixos  $A$  e  $B$ , distantes  $2c > 0$  entre si, e um ponto genérico  $P$

de um plano, representamos por  $PA$  e por  $PB$  as respectivas distâncias do ponto  $P$  ao ponto  $A$  e do ponto  $P$  ao ponto  $B$ . Denominaremos por Lemniscata de Bernoulli de focos  $A$  e  $B$  o lugar geométrico dos pontos  $P$  desse plano que satisfazem a condição do produto das distâncias  $PA.PB$  ser constante igual a  $c^2$ .



**Figura 2.21:** Lemniscata de Bernoulli.

Sejam os focos  $A$  e  $B$  dados por  $A(c,0)$ ,  $B(-c,0)$ ,  $c > 0$  usando a fórmula da distância de dois pontos, temos que a condição para que um ponto  $P(x,y)$  pertença a Lemniscata de Bernoulli de focos  $A$  e  $B$  é:

$$\begin{aligned}
 PA.PB = c^2 &\implies \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = c^2 \\
 ((x-c)(x+c))^2 + (x-c)^2 y^2 + (x+c)^2 y^2 + y^4 &= c^4 \\
 (x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2 - 2xcy^2 + c^2 y^2 + x^2 y^2 + 2xcy^2 + c^2 y^2 + y^4 - c^4 &= 0 \\
 (x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2 + c^2 y^2 + x^2 y^2 + c^2 y^2 + y^4 - c^4 &= 0 \\
 x^4 - 2x^2 c^2 + c^4 + 2x^2 y^2 + 2c^2 y^2 + y^4 - c^4 &= 0 \\
 x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - 2x^2 c^2 + 2c^2 y^2 &= 0 \\
 x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 &= 2x^2 c^2 - 2c^2 y^2
 \end{aligned}$$

Logo a equação cartesiana da Lemniscata é:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

### Equação Paramétrica

Considerando a equação cartesiana, fazendo a substituição de  $y = x \operatorname{sen}(\alpha)$  e  $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 (x^2 + x^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))^2 &= 2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2(x^2 - x^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)) \\
 (x^2(1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)))^2 &= a^2(x^2(1 - \operatorname{sen}^2(\alpha))) \\
 x^2(1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)) &= \sqrt{a^2 x^2(1 - \operatorname{sen}^2(\alpha))} \\
 x^2(1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)) &= \sqrt{a^2 x^2 \cos^2(\alpha)}
 \end{aligned}$$

$$x^2(1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)) = ax \cos(\alpha)$$

$$x = \frac{a \cos(\alpha)}{1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)}.$$

Substituindo a equação  $x = \frac{y}{\operatorname{sen}(\alpha)}$  em  $x = \frac{a \cos(\alpha)}{1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)}$  temos:

$$y = \frac{a \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)}{1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)}.$$

Portanto, a Lemniscata de Bernoulli determinada pela constante  $c$ , possui equações paramétrica dadas por:

$$\lambda(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha)) = \left( \frac{a \cos(\alpha)}{1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)}, \frac{a \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)}{1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)} \right)$$

sendo  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$  onde  $a = \sqrt{2}c$ .

## 2.4.2 Folium de Descartes

A Folium de Descartes é o lugar geométrico determinado pela seguinte equação cartesiana

$$3y^2(a - x) = x^2(x + 3a) \tag{2.5}$$

sendo  $a \neq 0$ .

Como sua definição não é geométrica, vamos parametrizá-la usando apenas meios algébricos.

Considere o parâmetro  $t = \frac{y}{x}$ , para  $x \neq 0$ .

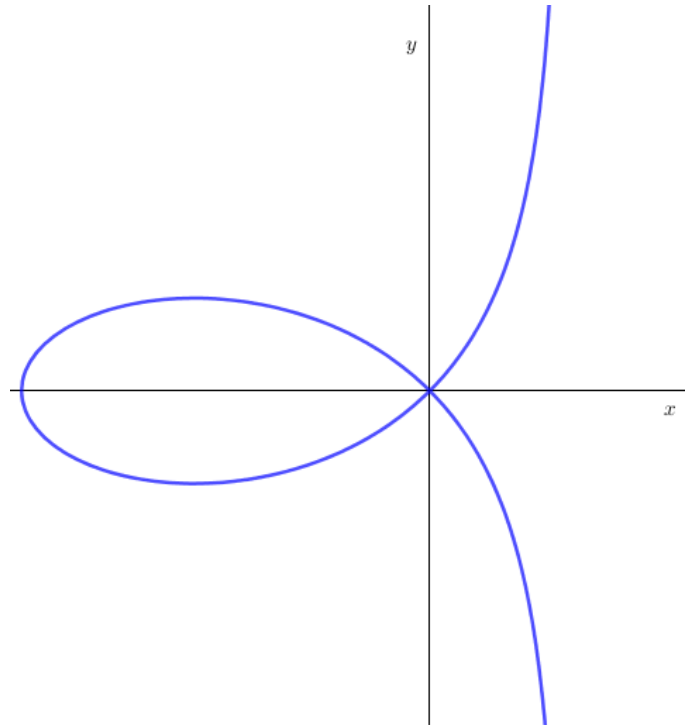
Substituindo  $y = tx$  na equação 2.5, obtemos:

$$3t^2x^2(a - x) = x^2(x + 3a)$$

$$3t^2x + x = 3t^2a - 3a$$

$$x = \frac{3a(t^2 - 1)}{3t^2 + 1}$$

$$y = \frac{3at(t^2 - 1)}{3t^2 + 1}.$$



**Figura 2.22:** Folium de Descartes

Assim, a figura também conhecida como laço tem a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} X(t) = \frac{3a(t^2-1)}{3t^2+1} \\ Y(t) = \frac{3at(t^2-1)}{3t^2+1}, \end{cases}$$

com  $t \in \mathbb{R}$ .

# Curvas Planas - Geometria Diferencial

---

## 3.1 Diferenciabilidade e Vetor Tangente

A Geometria Diferencial surgiu no século XVII com a união da Geometria e o Cálculo Diferencial, de certo modo, como uma ciência aplicada. De modo genérico, Geometria Diferencial é o estudo das propriedades locais das curvas e superfícies.

Neste capítulo, abordaremos uma parte do estudo local da teoria das curvas planas, apresentando os conceitos e definições de curvas parametrizadas diferenciáveis e sua reparametrização. Em seguida, analisaremos as características das curvas para vetor tangente e vetor normal, curvatura e a fórmula de Frenet.

Descreve-se uma curva plana em Geometria Diferencial dando suas coordenadas em função de uma variável independente. Definindo-se essa curva como um subconjunto unidimensional em relação ao plano e através de funções diferenciáveis, como segue.

**Definição 3.1:** Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável  $\alpha$  de classe  $C^\infty$ , de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ . A variável  $t \in I$  é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dos pontos  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , é chamado traço da Curva.

**Exemplo 3.1.1:** A aplicação

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt), t \in \mathbb{R},$$

onde  $a^2 + b^2 \neq 0$ , é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto  $(x_0, y_0)$  paralela ao vetor de coordenadas  $(a, b)$ .

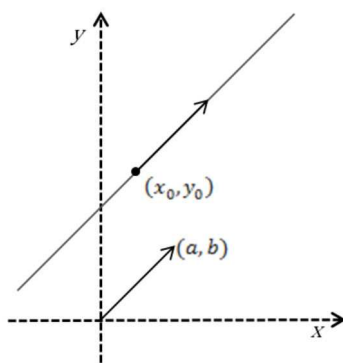


Figura 3.1: Traço de uma curva parametrizada diferenciável.

**Definição 3.2:** Duas aplicações distintas podem ter o mesmo traço de curva desde que a diferença entre elas esteja somente na velocidade que seu traço é percorrido.

**Exemplo 3.1.2:** Considere o ponto  $A = (a, b) \neq B = (a', b')$  pontos pertencentes ao plano. Sejam as equações paramétricas dadas por:

$$\alpha(t) = A + t(A + B) = (a + t(a + a'), b + t(b + b')), \quad t \geq 0,$$

$$\beta(t) = A + t^2(A + B) = (a + t^2(a + a'), b + t^2(b + b')), \quad t \geq 0.$$

Observe que as aplicações  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  são curvas parametrizadas cujos traços são iguais a uma reta que passa pelos pontos  $A, B$ .

**Exemplo 3.1.3:** As aplicações

$$\alpha(t) = (t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\beta(r) = (2r + 1, 4r + 2), \quad r \in \mathbb{R}$$

têm o seguinte traço:

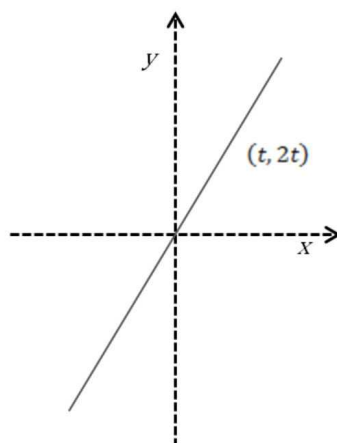


Figura 3.2: Traço das aplicações  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Definição 3.3:** Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada no plano dada por  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $I$  é um intervalo aberto. A aplicação  $\alpha$  é diferenciável se suas funções coordenadas forem diferenciáveis para todo ponto  $t \in I$ .

O vetor velocidade ou tangente à curva no ponto  $\alpha(t_0)$  é dado por:

$$\alpha'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0))$$

se o limite existe.

Para curvas planas cuja aplicação é  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é dado por:

$$x'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

$$y'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}.$$

Ou seja,  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  é chamada vetor tangente de  $\alpha$  em  $t$ . Isso implica que existe uma reta tangente a uma curva plana parametrizada  $\alpha$  para cada valor do parâmetro  $t$ , cuja velocidade escalar é dada por:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

**Definição 3.4:** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita regular se  $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| \neq 0$ .

**Definição 3.5:** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. A reta tangente a  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(t_0)$  na direção de  $\alpha'(t_0)$ , isto é, a reta dada pela função.

Podemos então definir a reta tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$  por:

$$r_t(a) = \alpha(t_0) + a\alpha'(t_0)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.1.4:** Dadas as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos(2t) \\ y_1(t) = \sin(2t), 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad (3.2)$$

temos que as duas parametrizações possui o mesmo traço e seus vetores tangentes são:

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$\beta'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)).$$

Então  $\|\alpha'(t)\| = 2\|\beta'(t)\|$ , logo, o módulo da velocidade de  $\beta$  é o dobro da de  $\alpha$ .

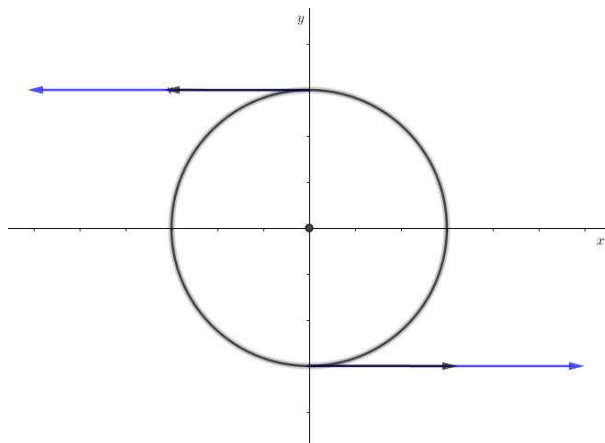


Figura 3.3: Vetor Velocidade.

**Exemplo 3.1.5:** Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva parametrizada diferenciável que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , associa

$$\alpha(t) = (\cos(t)(2 \cos(t) - 1), \sin(t)(2 \cos(t) - 1)).$$

O vetor tangente a  $\alpha$  em  $t$  é igual a:

$$\alpha'(t) = (-4 \cos(t) \sin(t) + \sin(t), 2 \cos(2t) - \cos(t)),$$

usando a Identidade  $\sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t)$ , temos,

$$\alpha'(t) = (\sin(t) - 2 \sin(2t), 2 \cos(2t) - \cos(t)).$$

**Proposição 3.1:** Seja a aplicação  $\alpha$  regular em  $t_0 \in I$ . Então existe um  $\epsilon > 0$ , tal que  $\alpha$  é injetiva no intervalo  $I_0 = \{t \in I \text{ tal que } |t - t_0| < \epsilon\}$

*Demonstração.* Dado  $\alpha'(t_0) \neq (0,0)$ , temos que  $x'(t_0) \neq 0$  ou  $y'(t_0) \neq 0$ . Suponhamos que  $x'(t_0) \neq 0$ . Portanto  $x'$  é uma função contínua e existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I_0$ . Nesse caso,  $x$  é estritamente monótona e, portanto injetiva, o que implica  $\alpha|_{I_0}$  é injetiva. Para  $y'(t_0) \neq 0$  a prova é análoga.  $\square$

### 3.2 Mudança de Parâmetro

A mudança de parâmetro também chamada de **reparametrização** é a forma de obter várias curvas regulares com o mesmo traço através de uma função composta, ou seja, dada a aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e seja  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável de classe  $C^\infty$ . Pode-se considerar a aplicação  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida pela seguinte função composta:

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t))$$

portanto,  $\beta$  é uma curva regular reparametrizada de  $\alpha$  por  $h$ . O vetor velocidade da parametrização é dado por:

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$$

e sua velocidade escalar é:

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\||h'(t)|.$$

**Exemplo 3.2.1:** A circunferência centrada na origem, de raio  $a$ , pode ser parametrizada por:  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$  onde  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Considerando  $h(t) = 2t$  temos que uma reparametrização  $\beta(t) = \alpha(h(t))$  é  $\beta(t) = (a \cos(2t), a \sin(2t))$  onde  $0 \leq t \leq \pi$ .

**Exemplo 3.2.2:** A curva

$$\beta(r) = (-2r + 1, -4r + 2), r \in \mathbb{R}$$

é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = (t, 2t), t \in \mathbb{R}.$$

Basta considerar a mudança de parâmetro  $h(r) = -2r + 1, r \in \mathbb{R}$ .

Visto que uma mudança de parâmetro  $h$  é uma função estritamente crescente ou decrescente, logo é uma bijeção. Além do mais, se  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ , então  $\alpha$  é uma reparametrização de  $\beta$  por  $h^{-1}$ .

### 3.3 Comprimento de Arco

Intuitivamente o comprimento de arco de uma curva parametrizada  $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a distância total percorrida pela partícula no intervalo de tempo  $t \in [a, b]$ , ou seja, é o cálculo sobre a curva no intervalo dado. Dado como  $s(t) = \|\alpha'(t)\|$  o vetor velocidade ou a velocidade da partícula em função de  $t$ , tem-se que o comprimento do arco é:

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Justifica-se essa definição por aproximação poligonal, sendo  $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular fixemos a partição  $P = a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n \leq b$  e ligando retilinearmente os pontos  $P_0 = \alpha(t_0), P_1 = \alpha(t_1), \dots, P_n = \alpha(t_n)$  obtém-se a poligonal inscrita à curva de subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  no intervalo  $[a, b]$ .

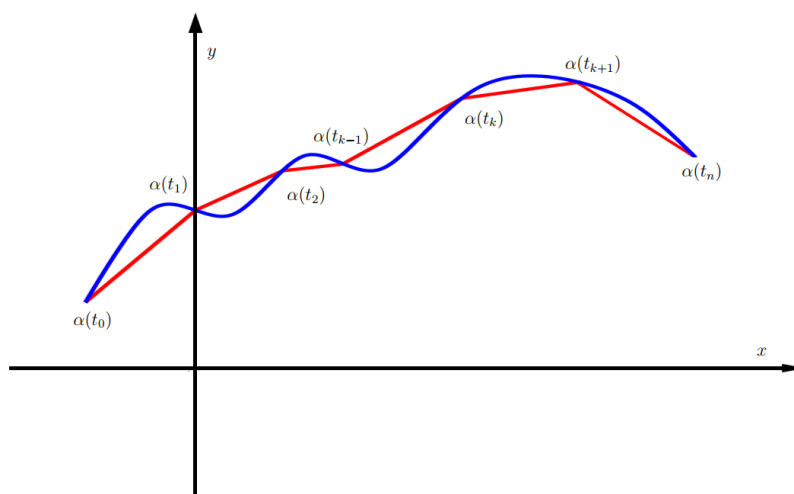


Figura 3.4: Comprimento de Arco - Linhas Poligonais.

O comprimento do segmento  $\overline{P_{i-1}P_i}$  é:

$$\|\overline{P_{i-1}P_i}\| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Portanto, o comprimento total da poligonal é:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \|\overline{P_{i-1}P_i}\|$$

Dado que  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções contínuas, aplicando o teorema do valor médio no intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , existem  $\bar{t}_1, \bar{t}_2$  tais que:

$$\begin{cases} x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\bar{t}_1) \Delta t_i \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\bar{t}_2) \Delta t_i. \end{cases} \quad (3.3)$$

Logo:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\bar{t}_1)]^2 + [y'(\bar{t}_2)]^2} \Delta t_i.$$

Observa-se que a expressão não é rigorosamente uma soma de Riemann, pois  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  não são necessariamente iguais. Entretanto enuncia-se o seguinte teorema:

**Teorema 3.1:** Sejam  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua,  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$  uma partição de  $[a,b]$  e  $\bar{t} \in [t_{i-1}, t_i]$ ; então:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{t}) \Delta t_i.$$

Aplicando o teorema a  $f(t) = \sqrt{[x'(\bar{t}_1)]^2 + [y'(\bar{t}_2)]^2}$ , obtemos o seguinte comprimento do arco:

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

isto para qualquer partição de  $[a, b]$ . Intuitivamente se  $n \rightarrow +\infty$ , a poligonal aproxima-se da curva.

A aplicação  $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt$  é denominada função comprimento de arco da curva  $\alpha$  a partir do ponto  $t_0$ . Esta função é diferenciável de classe  $C^\infty$ , pois  $\alpha$  é uma curva regular.

**Definição 3.6:** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é parametrizada pelo comprimento do arco se:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0$$

para cada  $t_0$  e  $t_1 \in I$ .

**Proposição 3.2:** uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se:

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

*Demonstração.* Suponhamos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos  $t_0 \in I$ . Consideremos a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , que, para cada  $t \in I$ , associa  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$ . Se  $t_0 \leq t$ , então, por hipótese,  $\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$ ; se  $t \leq t_0$ , então  $-s(t) = \int_t^{t_0} \|\alpha'(t)\| dt = t_0 - t$ . Portanto, para todo  $t \in I$ ,  $s(t) = t - t_0$ , e  $s'(t) = 1$ . como  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ , concluímos que  $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ .

Reciprocamente, temos que

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0. \quad \square$$

**Exemplo 3.3.1:** Considere a elipse parametrizada por :

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Temos que seu comprimento é:

$$\int_t^{t_0} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

e não pode ser expressa em termos de funções elementares.

Observa-se que o comprimento de uma curva pode ser finito, mesmo que o seu intervalo de definição tenha comprimento infinito.

### 3.4 Curvatura - Fórmulas de Frenet

A curvatura de uma curva em um ponto mede a taxa de variação da direção da tangente à curva no ponto, quer dizer, o quanto a curva se curva ou o quanto a curva deixa de ser reta. Para definir a curvatura precisa-se que a curva esteja parametrizada pelo comprimento de arco, de modo que o vetor tangente tenha sempre comprimento unitário.

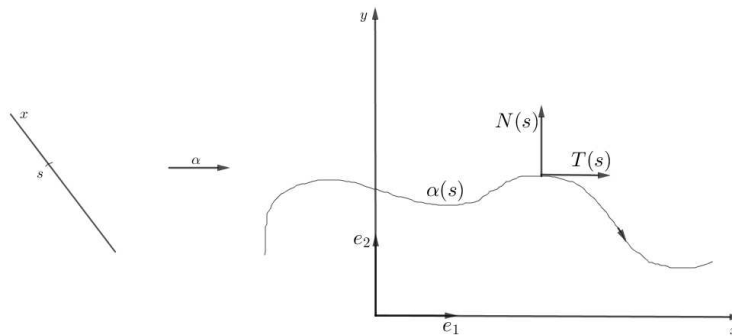
Considera-se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco. Por hipótese, temos que a derivada da curva é não nula. Diante disso, pode-se definir um campo  $T$  de vetores tangentes e unitários ao longo da curva dado por:

$$T(s) = \alpha'(s).$$

Se  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , então  $T(s) = (x'(s), y'(s))$ . Podemos definir o campo  $N$  ao longo da curva, tal que,  $\forall s \in I$ ,  $\{T, N\}$  seja uma base positiva de  $\mathbb{R}^2$ , isto é, existe uma rotação que leva  $e_1 = (1,0)$  em  $T$  e  $e_2 = (0,1)$  em  $N$ . Dessa forma,

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

e temos que  $N$  é o campo normal e unitário ao longo da curva e de classe infinita, ou seja,  $N(s)$  é dito vetor normal à curva  $\alpha$  em  $\alpha(s)$  e o conjunto de vetores  $T(s)$  e  $N(s)$  é dito *Referencial de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ .



**Figura 3.5:** Referencial de Frenet da Curva de  $\alpha$  em  $s$ .

Portanto, o vetor tangente  $\alpha'(s)$  é unitário, o módulo  $|\alpha''(s)|$  mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em  $s$ . Logo, o módulo da segunda derivada da aplicação mede o quão rápido a curva se afasta, em uma vizinhança de  $s$

Sabendo que  $T'(s) = \alpha''(s)$ , existe uma proporcionalidade em relação a  $N(s)$ , haja vista que  $\alpha'(s)$  é unitário e  $\alpha''(s)$  ortogonal a  $\alpha'(s) = T(s)$ . Esse fator de proporcionalidade denota-se por  $k(s)$ , também chamado de *curvatura* de  $\alpha$  em  $s$ .

**Definição 3.7:** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, existe um  $k \neq 0$  tal que:

$$T'(s) = k(s)N(s) \text{ e } N'(s) = -k(s)T(s)$$

sendo  $s \in I$ .

Considerando a curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , segue-se da definição que

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle \alpha''(s), N(s) \rangle$$

assim,

$$k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

De forma análoga,

$$\langle N'(s), T(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s)$$

portanto,

$$N'(s) = -k(s)T(s).$$

Resumindo o exposto acima, se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , então o referencial de Frenet  $T(s)$ ,  $N(s)$  satisfaz as equações:

$$\begin{aligned} T'(s) &= -k(s)N(s) \\ N'(s) &= k(s)T(s) \end{aligned}$$

que são as fórmulas de Frenet de uma curva plana.

Entende-se também como Curvatura a medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta, ou seja, toda reta é uma curva cuja curvatura é nula.

**Proposição 3.3:** A curvatura de uma curva regular  $\alpha$  é nula se, e só se, o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta.

*Demonstração.* Suponha que  $k(s) \equiv 0$ . Como  $\|T'(s)\| = |k(s)| = 0$ , temos que  $T'(s) = (0,0)$ . Como  $T$  está definida em um intervalo  $I$ , concluímos que  $T(s)$  é um vetor constante  $V_0$ , então

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s T(\xi)d\xi = \alpha(s_0) + V_0(s - s_0).$$

Portanto o traço de  $\alpha$  está contido na reta que passa por  $\alpha(s_0)$  e é paralela ao vetor  $V_0$ . Reciprocamente, se o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta e  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$\alpha(s) = P_0 + sV_0, \|V_0\| = 1.$$

Logo  $T(s) = V_0$  e, portanto,  $T'(s) = (0,0)$ . Assim concluímos que  $k(s) = 0$ .  $\square$

**Exemplo 3.4.1:** A aplicação

$$\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0) \in I,$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes e  $a^2 + b^2 = 1$ . Como  $T(s) = \alpha'(s)$  é constante, temos que  $T'(s) = 0$  e, portanto,  $k(s) = 0, \forall s \in I$ .

**Exemplo 3.4.2:** Considere a curva

$$\alpha(s) = (a + b \cos(\frac{s}{b}), c + b \operatorname{sen}(\frac{s}{b})), \text{ com } s \in \mathbb{R}, b > 0,$$

cujo traço é uma circunferência de centro  $(a, c)$  e raio  $b$ . Neste caso,

$$\begin{aligned}t(s) &= \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{b}\right), \cos\left(\frac{s}{b}\right)\right), \\n(s) &= \left(-\cos\left(\frac{s}{b}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{b}\right)\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \frac{1}{b}.$$

Consideremos agora uma reparametrização de  $\alpha$ , dada por

$$\beta(s) = \left(a + b \cos\left(\frac{s}{b}\right), c - b \operatorname{sen}\left(\frac{s}{b}\right)\right) \quad s \in \mathbb{R}, \quad b > 0.$$

Então, a curvatura de  $\beta(s)$  é igual a  $-\frac{1}{b}$

Observa-se que o sinal da curvatura depende da orientação da curva.

# Noções de Topologia

---

A Topologia é o estudo Matemático das propriedades que são preservadas quando se deforma, torce ou estica um objeto sem se romper. O entendimento de parte da teoria é fundamental para a compreensão do teorema de Jordan que será apresentado no capítulo seguinte. Algumas demonstrações serão omitidas por não serem o foco do trabalho.

**Definição 4.1:** Um Espaço Métrico é um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $d$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada função distância, satisfazendo:

- (D1)  $d(x, y) \geq 0$  para todos  $x, y \in X$ ;
- (D2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- (D3)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todos  $x, y \in X$ ;
- (D4)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  para todos  $x, y, z \in X$  (Desigualdade Triangular).

**Exemplo 4.0.1:**  $\mathbb{R}^2$  é espaço métrico. Com métrica  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(P, Q) \mapsto \|P - Q\| = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$  em que  $P(x_p, y_p)$  e  $Q(x_q, y_q)$ .

## 4.1 Bolas Abertas

**Definição 4.2:** Sejam  $r > 0$  e  $p \in \mathbb{R}^2$ . A bola aberta de centro em  $P$  e raio  $r$  é denotada por  $B(P, r)$  e definida por:

$$B(P, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - p\| < r\}.$$

Observa-se que se  $P(x_0, y_0)$  e  $X(x, y)$ ; temos,

$$\|X - P\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

então:

$$B(P, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

O conjunto  $B(P, r)$  é o interior de um círculo centrado em  $P(x_0, y_0)$  e raio igual  $r$ , o que equivale ao conjunto de vetores no plano de origem em  $P$  e norma menor que  $r$ , sendo chamado de disco<sup>1</sup> aberto.

<sup>1</sup>Usualmente, em subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  emprega-se o termo *disco* em vez de *bola*.

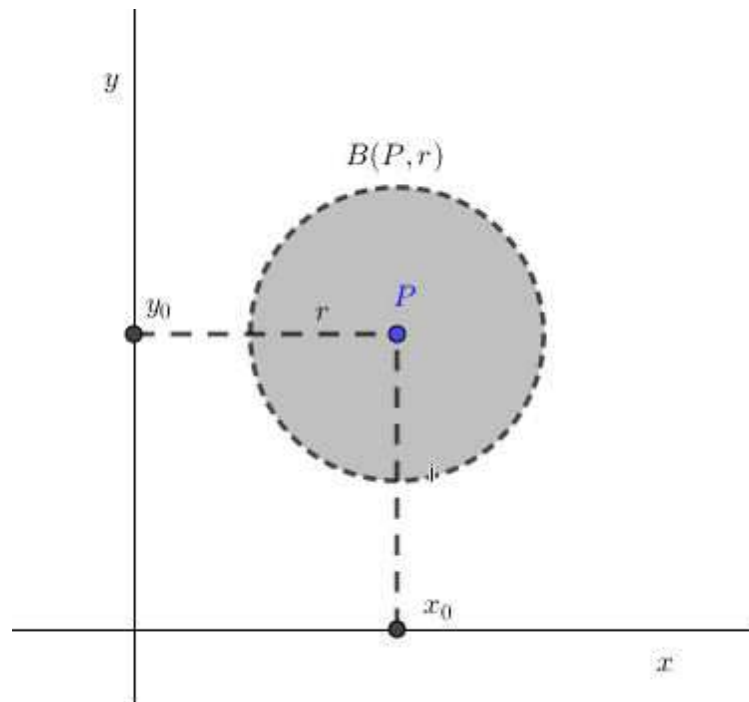


Figura 4.1: Disco aberto.

## 4.2 Conjuntos Abertos

**Definição 4.3:** O conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  é dito aberto em  $\mathbb{R}^2$  se para todo  $P \in A$ , existe uma bola  $B(P, r)$  tal que  $B(P, r) \subset A$ .

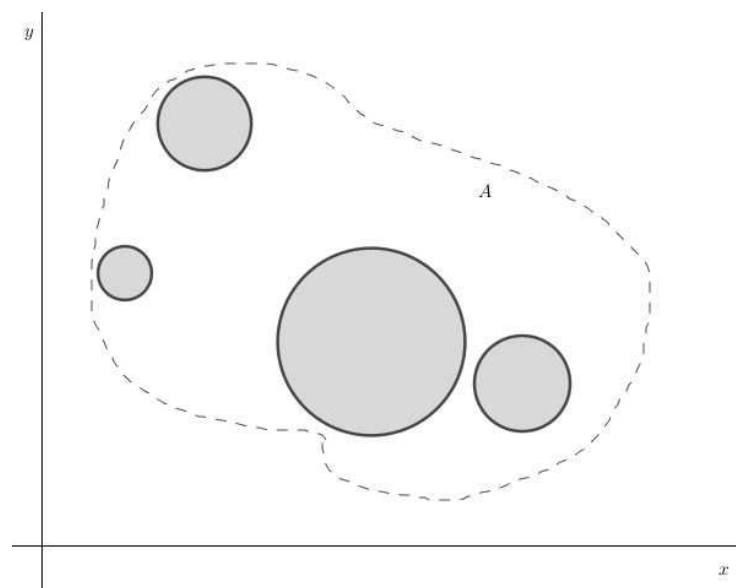
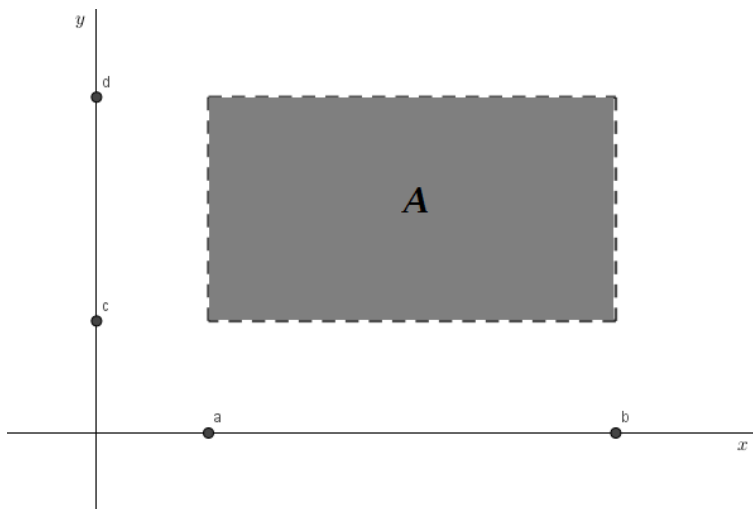


Figura 4.2: Conjunto aberto.

Estes conjuntos são a generalização natural de intervalos abertos em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.2.1:** o conjunto  $A = (a,b) \times (c,d)$  é aberto em  $\mathbb{R}^2$ .

De fato, dado  $(x,y) \in A, a < x < b$  e  $c < y < d$ , denote por  $\epsilon$  o menor número do conjunto  $\{|x - a|, |x - b|, |y - c|, |y - d|\}$ . Então, considerando  $r = \frac{\epsilon}{2}$ , temos  $B((x,y), r) \subset A$ . Portanto  $A$  é um conjunto Aberto.

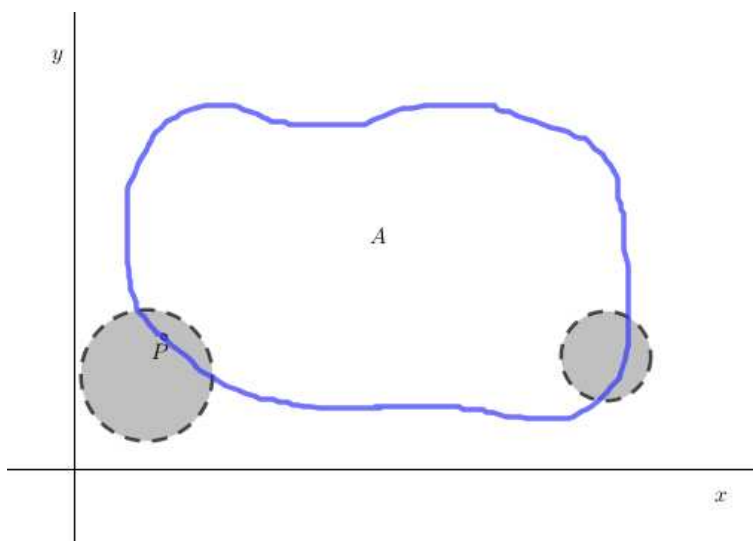


**Figura 4.3:** O conjunto aberto  $A = (a,b) \times (c,d)$ .

Chamaremos de vizinhança do ponto  $P$  o conjunto aberto que contenha um ponto dado  $P$ .

### 4.3 Conjunto Fronteira

**Definição 4.4:** Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  é dito ponto da fronteira ou do bordo de  $A$  se toda vizinhança de  $P$  intersecta  $A$  e  $\mathbb{R}^2 - A$ .



**Figura 4.4:** Fronteira de A.

Denotamos o conjunto dos pontos da fronteira do conjunto  $A$  por  $\partial A$ .

**Proposição 4.1:** Um conjunto é aberto se  $A \cap \partial A = \emptyset$ .

## 4.4 Ponto Aderente

**Definição 4.5:** (i) Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $P \in A$ . Dizemos que  $P$  é um ponto aderente de  $A$  se, para todo  $r > 0$ , tem-se que  $B(P, r) \cap A \neq \emptyset$ .

O conjunto de todos os pontos aderentes de  $A$  é denominado fecho de  $A$ , e é representado por  $\bar{A}$ . Assim,

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^2, \forall r > 0 \text{ e } B(P, r) \cap A \neq \emptyset\} = \text{int}A \cup \partial A.$$

(ii) Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico de  $X$  e  $P \in X$ . Dizemos que  $P$  é um ponto de acumulação ou ponto limite de  $A$  quando todo disco de centro em  $P$  contém algum ponto de  $A$ , diferente do ponto  $P$ , ou seja,  $(B(P, r) - \{P\}) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0$ .

Chama-se o derivado de  $A$  o conjunto de todos os pontos de acumulação de  $A$  em  $X$ , representado por  $A'$ .

## 4.5 Conjuntos Fechados

**Definição 4.6:** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  é dito fechado em  $\mathbb{R}^2$  se  $\partial A \subset A$ .

Observa-se que em um espaço métrico  $X$ , dizemos que um conjunto  $A \subset X$  é fechado em  $X$  quando ele contém todos os seus pontos aderentes.

**Exemplo 4.5.1:**  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < r^2, r > 0\}$  não é fechado, pois sua fronteira é:

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2, r > 0\},$$

portanto,  $\partial A \not\subset A$ .

**Exemplo 4.5.2:**  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}^2$  e aberto.

## 4.6 Densidade

**Definição 4.7:** Dado um espaço métrico  $X$ ,  $A \subset X$  é denso em  $X$  se  $\bar{A} = X$ , ou seja, se toda bola aberta em  $X$  contém algum ponto de  $A$ .

**Definição 4.8:** Um espaço métrico  $X$  é dito separável se existe um subconjunto enumerável denso em  $X$ .

## 4.7 Função

Uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma relação que associa os elementos do conjunto  $A$  com os elementos do conjunto  $B$ , de modo que, para qualquer elemento  $a \in A$  exista um único elemento  $b \in B$  associado a  $a$ , representa-se por:

$$f(a) = b.$$

Se  $f(a_1) = f(a_2)$  implicar em  $a_1 = a_2$ , para todo  $a_1, a_2 \in A$ , dizemos que a função é injetora. Além do mais, dizemos que a função é sobrejetora quando todos os elementos de  $B$  estão relacionados com algum elemento de  $A$ . Se a função é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, então dizemos que é bijetora.

Dada a função bijetora  $f$ , a inversa de  $f$  é uma função  $f^{-1} : f(B) \rightarrow A$  tal que  $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ , para  $a \in A$  e  $b \in B$ .

**Definição 4.9:** Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dois espaços métricos. Dizemos que a função  $f : X \rightarrow Y$  é contínua no ponto  $a \in X$  quando, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

$$d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon, \forall x \in X$$

isto é,

$$x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon).$$

**Definição 4.10:** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços métricos. Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função bijetora, contínua e com inversa  $f^{-1}$  também contínua, então dizemos que  $f$  é um homeomorfismo<sup>2</sup>.

Quando existe um homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ , dizemos que  $X$  e  $Y$  são homeomorfos.

**Exemplo 4.7.1:** Sejam  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $M = (t_0, t_0 + 2\pi)$ ,  $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  e  $p = (\cos(t_0), \sin(t_0)) \in S^1$ . Então a função  $exp : M \rightarrow (S^1 - p)$  definida por  $exp(t) = (\cos(t), \sin(t))$  é um homeomorfismo entre  $M$  e  $S^1 - p$ .

## 4.8 Conexidade

A definição de conexidade no plano pode ser considerada intuitivamente quando se tem dois pontos quaisquer do plano e esses podem ser unidos sem sair do plano.

Sejam  $A \subset X$  com  $X$  um espaço métrico e  $a, b \in A$ . Um caminho em  $A$  unindo  $a$  com  $b$  é uma função contínua;

$$f : [0, 1] \rightarrow A, \text{ tal que } f(0) = a \text{ e } f(1) = b.$$

**Definição 4.11:** Seja  $X$  um espaço métrico. Dois conjuntos  $H, K \subset X$  são separáveis se  $\overline{H} \cap K = H \cap \overline{K} = \emptyset$ . (Nenhum dos conjuntos  $H$  e  $K$  contém um ponto ou um ponto limite do outro).

Evidentemente, se  $H$  e  $K$  são separáveis e  $H' \subset H$ ,  $K' \subset K$ , então  $H'$  e  $K'$  são separáveis.

<sup>2</sup>Um homeomorfismo é a noção principal de igualdade na topologia.

**Teorema 4.1:** Dados  $M \subset X, M = H \cup K$ . Então,  $H$  e  $K$  são separáveis se, e somente se,  $H, K$  são abertos e  $H \cap K = \emptyset$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha  $H$  não aberto. Então, existe  $x \in H$  tal que  $B(x, \delta) \not\subset H$ , para qualquer  $\delta > 0$ . Daí,  $x \in (M - H) = K \Rightarrow B(x, \delta) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{K}$ , o que leva-nos à contradição desejada, pois, por hipótese,  $H$  e  $K$  são separáveis. Portanto,  $H$  é aberto.

Analogamente, mostra-se que  $K$  é aberto. Além disso,  $H \cap K = \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que existe  $x \in H \cap K$ . Então,  $x \in H$  e  $x \in K$ ; daí, existe  $\delta > 0$  tal que  $B(x, \delta) \subset H$  e, para qualquer  $\epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap K \neq \emptyset$ . Em particular, para  $\epsilon = \delta, B(x, \delta) \subset H$  e  $B(x, \delta) \subset K$ , gerando uma contradição, pois, por hipótese,  $H \cap K = \emptyset$ . Logo,  $H \cap K = \emptyset$ . Analogamente, mostra-se que  $H \cap K = \emptyset$  e, assim,  $H$  e  $K$  são separáveis.

□

**Definição 4.12:** Uma cisão de um espaço métrico  $X$  é uma decomposição,  $X = H \cup K$ , de  $X$  como reunião de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não vazios  $H$  e  $K$ .

**Definição 4.13:** Um espaço métrico  $X$  é conexo se não admite cisão. Caso contrário,  $X$  é dito desconexo.

Pelo Teorema 4.1 temos que um conjunto  $M \subset X$  é conexo se, e somente se,  $M$  não é a união de dois conjuntos separáveis não vazios.

Essa definição expressa a ideia Matemática de um conjunto formado por um só pedaço. Contudo, outra forma de pensarmos no conceito de conexidade por caminhos é através de um movimento contínuo de um ponto ao outro sem sair do plano.

**Definição 4.14:** Um caminho num espaço métrico  $(X, d)$  é uma aplicação contínua  $p : [a, b] \rightarrow X$ , onde  $[a, b]$  é um intervalo fechado em  $\mathbb{R}$ . Se  $p(a) = P$  e  $p(b) = Q$ , então  $p$  é um caminho de  $P$  para  $Q$ .

**Definição 4.15:** Um conjunto  $M \subset X$  é conexo por caminhos se, para cada dois pontos  $P, Q$  de  $M$ , existe um caminho  $p : [a, b] \rightarrow M$  de  $P$  para  $Q$ , ou de  $Q$  para  $P$ .

**Teorema 4.2:** Se  $H$  e  $K$  são separáveis, então todo subconjunto conexo  $M$  de  $H \cup K$  encontra-se em  $H$  ou em  $K$ .

*Demonstração.* Suponha que não. Então,  $M = (M \cap H) \cup (M \cap K)$ , onde  $(M \cap H)$  e  $(M \cap K)$  são separáveis e não vazios, pois  $H$  e  $K$  são separáveis. Assim,  $M$  é desconexo, contrariando a hipótese do teorema. □

**Teorema 4.3:** A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é conexo.

*Demonstração.* Dado o caso particular em que, dados  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dois espaços métricos,  $f : X \rightarrow Y$  é contínua, sobrejetora e  $X$  conexo. Mostremos então que  $Y$  é conexo.

Suponha  $Y$  não conexo. Então,  $Y = U \cup V$ , onde  $U$  e  $V$  abertos, disjuntos e não vazios. Assim,  $f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ . Todavia,  $Y = f(X)$  e, daí,  $f^{-1}(Y) = f^{-1}(f(X)) = X$ . Logo,  $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ , com  $f^{-1}(U)$  e  $f^{-1}(V)$  abertos, disjuntos e não vazios, o que é impossível, pois  $X$  é conexo.

O caso geral é consequência: dada  $f : X \rightarrow Y$  contínua e dado  $M \subset X$  conexo, então  $f : M \rightarrow f(M)$  é uma sobrejeção contínua, logo,  $f(M)$  é conexo.  $\square$

**Teorema 4.4:** Todo intervalo fechado em  $\mathbb{R}$  é conexo.

*Demonstração.* Suponha que  $[a,b] = H \cup K$ ,  $H$  e  $K$  separáveis, com  $a \in H$ . Seja  $M = \{x \mid x = a \text{ ou } [a, x] \subset H\}$ . Então,  $M$  é limitado superiormente. Seja  $c$  o menor limitante superior de  $M$ . Então,  $c \in [a, b]$ ,  $c$  é um ponto limite de  $H$ ,  $c \notin K$  e, assim,  $c \in H$ . Se  $c < b$ , então  $c$  é um ponto limite de  $K$ , o que contradiz a hipótese de  $H$  e  $K$  separáveis. Logo,  $c = b$  e, assim,  $H = [a, b]$  e  $K = \emptyset$ . Portanto,  $[a, b]$  não é a união de dois conjuntos separáveis não vazios quaisquer.  $\square$

**Teorema 4.5:** Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.

*Demonstração.* Suponha que  $M$  seja conexo por caminhos, mas não conexo. Então,  $M = H \cup K$ ,  $H$  e  $K$  separáveis. Tome  $P \in H$ ,  $Q \in K$  e seja  $p$  um caminho de  $P$  para  $Q$  em  $M$ . Pelos Teoremas 4.3 e 4.4, a imagem  $|p| = p([a, b]) \subset M$  é conexa. Pelo Teorema 4.2,  $|p|$  encontra-se em  $H$  ou em  $K$ , o que é falso.  $\square$

A recíproca do teorema acima, no entanto, não é verdadeira, contrariando a ideia de que espaço conexo é aquele formado por um único pedaço. Por exemplo, seja  $M$  o gráfico de  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ , com  $0 < x \leq \frac{1}{\pi}$ , em  $\mathbb{R}^2$ , junto com os pontos  $(0,1)$  e  $(0, -1)$ . Pelos Teoremas 4.2, 4.3, 4.4, podemos mostrar que  $M$  é conexo; porém, também é possível mostrar que não existe um caminho em  $M$ , de  $(0,1)$  ou  $(0,-1)$  para um outro ponto qualquer de  $M$ , dessa forma,  $M$  não é conexo por caminhos.

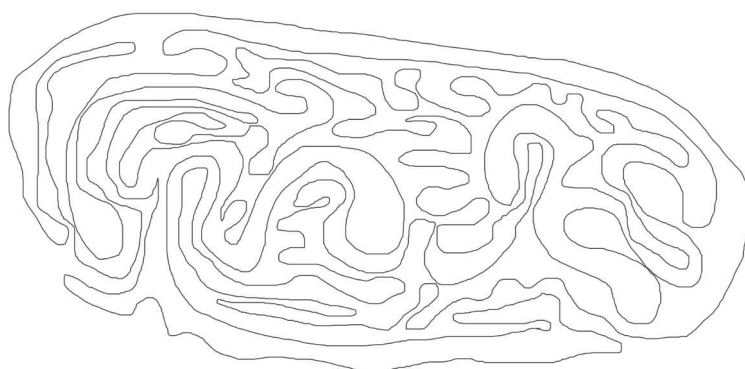
**Teorema 4.6:** Um espaço métrico  $X$  é desconexo se, e só se, existe uma função contínua e sobrejetora  $f : X \rightarrow \{0,1\}$ .

**Teorema 4.7:** Cada duas componentes conexas diferentes de um mesmo conjunto são disjuntas.

## Teorema de Jordan

---

Uma curva fechada de  $\mathbb{R}^2$ , sem auto-intersecções, divide esse plano em exatamente duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada, das quais a curva é fronteira. Esse enunciado é tão simplório que seu entendimento intuitivo pode ser acessível até a alunos do Ensino Fundamental. Por algum tempo os matemáticos da época também pensaram assim até que começaram a discutir a “separação do plano”, por uma curva simples e fechada. Em 1887 Camille Jordan fez a primeira demonstração, donde vem o nome do teorema. Apesar de o teorema carregar o nome de Jordan, muitos matemáticos da época consideraram a demonstração de Camille Jordan errada, uma vez que ele atribuiu o seu teorema como válido para polígonos. Anos seguintes, em 1910, o matemático Luitzen Egbertus Jan Brouwer demonstrou de maneira sofisticada o teorema de Jordan e provou o caso geral sendo conhecido como o Teorema de Jordan-Brouwer. Houve várias demonstrações e aprimoramento desse conhecimento ao longo dos anos, hoje esse teorema é muito usado no ramo da topologia apesar de ser tão pouco familiar entre os profissionais de matemática.



**Figura 5.1:** Curva de Jordan.

Aproveitando a linhagem do Teorema, vamos demonstrá-lo aqui aproximando a curva dada por polígonos, prova-se então para polígonos e posteriormente passa-se ao limite. Essa aproximação já é um padrão clássico matemático.

## 5.1 Polígono de Jordan

**Definição 5.1:** Uma curva  $J$  de Jordan é um *Polígono de Jordan* se  $J$  pode ser coberto por uma quantidade finita de arcos em cada um dos quais  $\gamma$  tem a forma:

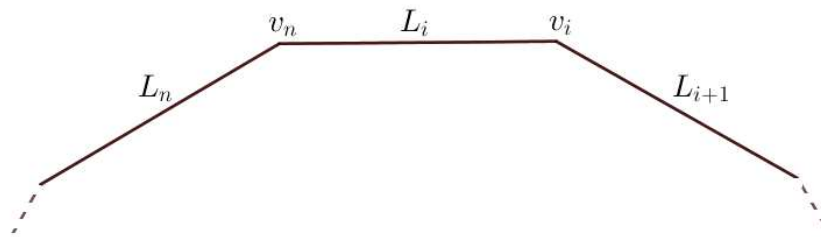
$$\gamma(\cos t, \sin t) = (at + b, ct + d)$$

com constantes  $a, b, c$  e  $d$ .

**Teorema 5.1:** Seja  $J$  um polígono de Jordan, então  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  é desconexo e consiste em duas componentes, cuja fronteira comum é  $J$ .

Sejam  $L_1, L_2, \dots, L_n$  os lados e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  os vértices do polígono  $J$ . Temos que:

$$L_i \cap L_{i+1} = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{sendo } L_{n+1} = L_1 \text{ e } v_{n+1} = v_1$$



**Figura 5.2:** Estrutura dos lados e vértices do polígono de Jordan.

Para completar a demonstração do Teorema 5.1, vamos dividir a demonstração em três lemas:

- (a)  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  tem no máximo duas componentes conexas.
- (b)  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  tem, pelo menos duas componentes conexas.
- (c)  $J$  é fronteira comum às duas componentes, Interna ( $I$ ) e Externa ( $E$ ).

**Lema 5.1:**  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  tem no máximo duas componentes conexas.

*Demonstração.* Considere a seguinte vizinhança do lado  $L_i$ :

$$N_i = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid d(q, L_i) < \epsilon\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde,

$$\epsilon = \inf\{d(L_i, L_j) : 1 < |j - i| < n - 1\}$$

e

$$N_i \cap J \subset (L_{i-1} \cup L_i \cup L_{i+1}).$$

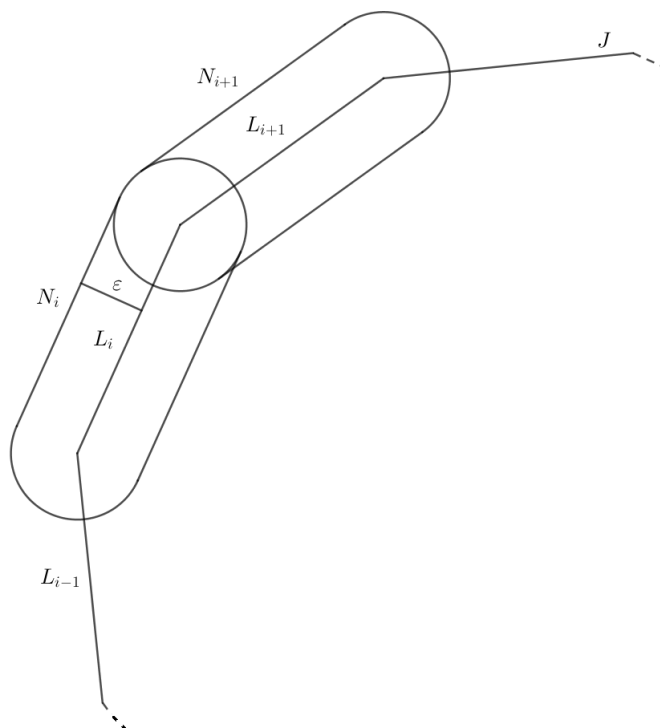


Figura 5.3: Vizinhança de  $L_i$ .

Sabe-se que  $N_i \setminus J$  consiste em duas componentes,  $N_i^1$  e  $N_i^2$  de modo que  $N_i^1 \cap N_{i+1}^1 \neq \emptyset$ . O mesmo se vê para  $N_i^2 \cap N_{i+1}^2 \neq \emptyset$ , sendo  $i = 1, 2, \dots, n$

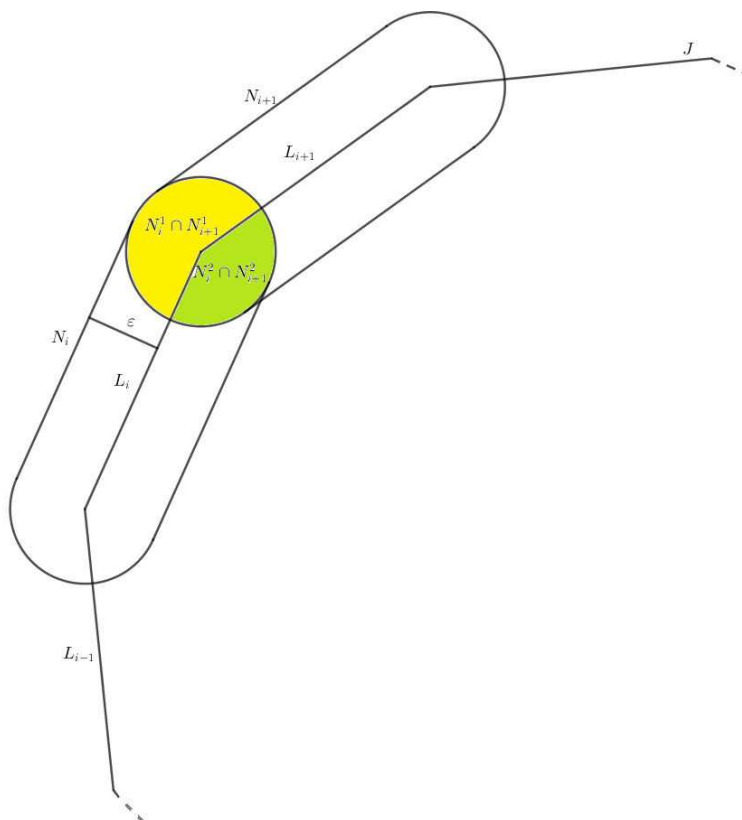


Figura 5.4: Interseção das componentes.

Chamemos então a união dos conjuntos  $N_i^1$  de  $P$  e a união de  $N_i^2$  de  $Q$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , ou seja:

$$P = N_i^1 \cup N_{i+1}^1 \cup \dots \cup N_n^1$$

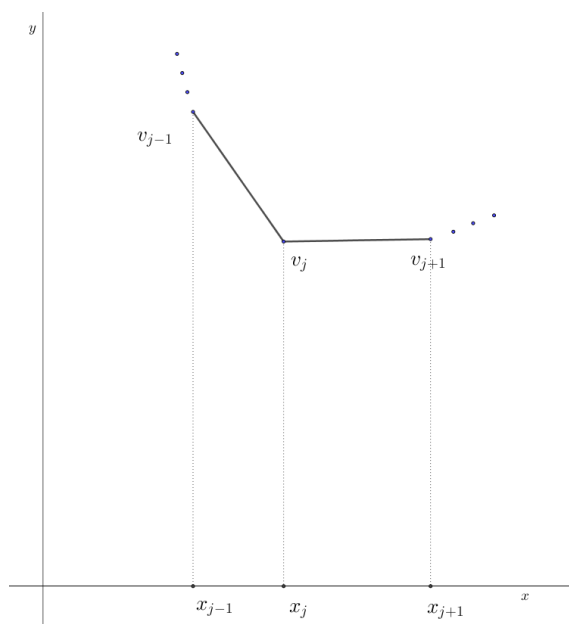
$$Q = N_i^2 \cup N_{i+1}^2 \cup \dots \cup N_n^2$$

Temos que os conjuntos  $P$  e  $Q$  são conexos. Seja  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus J$ . Tome  $d_0 > 0$  a distância de  $p$  a  $J$ . Existe  $q \in J$  tal que  $d(p, q) = d_0$ . O segmento que liga  $p$  a  $q$  intersepta  $P$  ou  $Q$  antes de chegar a  $q$ . Portanto,  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  tem no máximo duas componentes conexas.  $\square$

Iremos provar que  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  possui duas regiões, chamadas de pontos pares e pontos ímpares. Demonstraremos que essas regiões são desconexas, portanto há pelo menos duas componentes e não existe um caminho contínuo que conecte pontos pares a pontos ímpares.

**Lema 5.2:**  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  tem, pelo menos, duas componentes conexas.

*Demonstração.* Para tal prova, tome eixos em posição geral, no sentido que nenhuma linha vertical contenha mais de um vértice de  $J$ , ou seja, o polígono estará no plano cartesiano de tal modo que as abscissas de seus vértices serão todas distintas, perceba que isso não impede das ordenadas serem iguais, portanto para os vértices  $v_{j-1}(x_{j-1}, y_{j-1})$  e  $v_j(x_j, y_j)$  temos necessariamente  $x_{j-1} \neq x_j$ , o que equivale a dizer que nenhum dos lados do polígono será paralelo ou pertencer ao eixo das ordenadas. Essa ideia pode ser aplicada pois existe apenas um número finito de direções a evitar.



**Figura 5.5:** Polígono de vértices distintos onde  $x_{j-1} \neq x_j \neq x_{j+1}$ .

Para todo  $P = (x, y)$  pertencente a  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  existe a semirreta vertical  $r_p$  com origem em  $P$ . Chamemos de  $D_p$  os pontos de intersecção do polígono com a

semirreta. Note que, como condição todas as abscissas do polígono são diferentes, então existe no máximo um elemento de  $D_p$  que é vértice do polígono  $J$ , neste caso o chamamos de  $v_j$ . Dizemos que  $v_j$  não é contável em relação a  $P$  se  $v_{j-1}$  e  $v_{j+1}$  pertencer ao mesmo semiplano determinado por  $r_p$ . Do contrário, será contável, quando  $v_{j-1}$  e  $v_{j+1}$  pertencer a semiplanos distintos determinados por  $r_p$ .

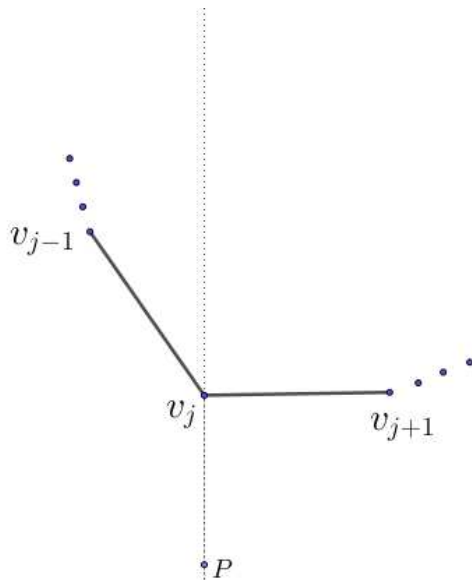


Figura 5.6:  $v_j$  contável.

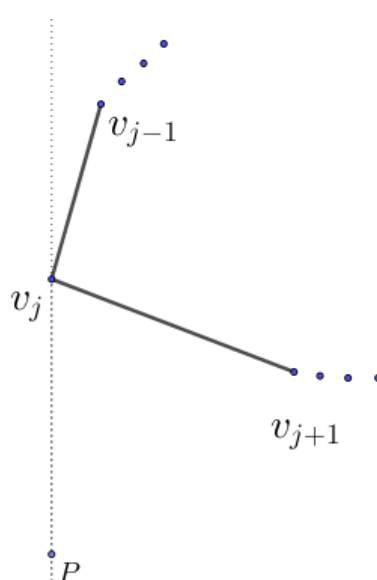


Figura 5.7:  $v_j$  não contável.

Determina-se o número de pontos que a semirreta  $r_p$  intesecta o polígono  $J$  por  $m(p)$  e define-se a seguinte função:

$$\begin{aligned}
 m : \mathbb{R}^2 \setminus J &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 p &\longmapsto m(p) = \text{Card}(D_p) - 1, \text{ se } D_p \text{ possui pontos não contáveis.} \\
 p &\longmapsto m(p) = \text{Card}(D_p), \text{ caso contrário.}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a função acima determina o número de pontos que  $r_p$  intersecta  $J$ , com exceção dos vértices não contáveis. Portanto, se  $m(p)$  for par, então  $p$  também é, e se  $m(p)$  for ímpar o mesmo se faz  $p$ . Diremos que dois pontos distintos  $p$  e  $q$  têm a mesma paridade se forem ambos pares ou ímpares.

Dada a afirmação abaixo, considere-a verdadeira, pois omitiremos a sua prova neste trabalho, mas poderá ser vista na Referência [6].

**Afirmação:** Para todo  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus J$  existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $q$  tem a mesma paridade de  $p$  sempre que:

$$q \in B = B(p, \epsilon) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, q) < \epsilon\}. \tag{5.1}$$

Vamos verificar que, se  $\Pi = \pi([0,1])$  é um caminho contínuo, dado por

$$\pi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus J,$$

então  $\pi(0)$  e  $\pi(1)$  têm a mesma paridade. Sem perda de generalidade, suponha que  $\pi(0)$  é par.

Como  $\pi(t) \notin J$ , pela Afirmação 5.1, existe um  $\epsilon_t > 0$  tal que  $\pi(t)$  e  $q$  tem mesma paridade para todo  $q \in B(\pi(t), \epsilon_t)$ . Considere a cobertura aberta  $C = \bigcup_{(t \in [0,1])} B(\pi(t), \epsilon_t)$  de  $\Pi$ . Como o caminho é compacto, existe uma sub-cobertura finita  $\bar{C} = \bigcup_{k=t_1}^{t_m} B(\pi(t_k), \epsilon_k)$  tal que  $\pi(0) \in B(\pi(t_1), \epsilon_1)$ ,  $\pi(1) \in B(\pi(t_m), \epsilon_m)$  e  $B(\pi(t_i), \epsilon_i) \cap B(\pi(t_{i+1}), \epsilon_{i+1}) \neq \emptyset$ ,  $1 \leq i < m$  o que garante que todos têm a mesma paridade em particular  $\pi(1)$  também é par.

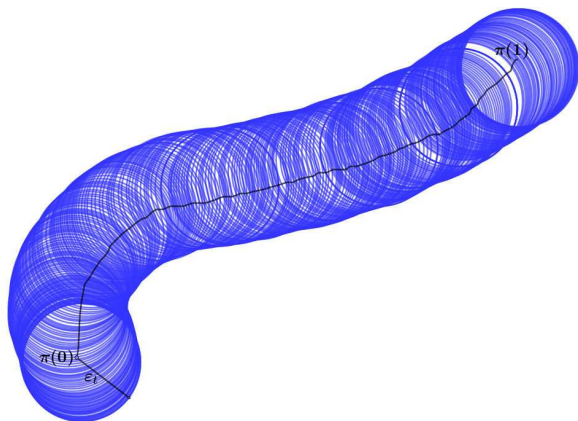


Figura 5.8:  $C = \bigcup_{(t \in [0,1])} B(\pi(t), \epsilon_t)$ .

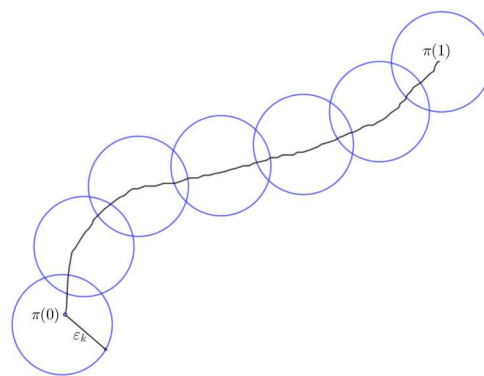


Figura 5.9:  $\bar{C} = \bigcup_{k=t_1}^{t_m} B(\pi(t_k), \epsilon_k)$ .

Logo o conjunto dos pontos pares e dos pontos ímpares são conexos. Portanto, existe pelo menos duas componentes conexas.  $\square$

Pelos lemas 5.1 e 5.2 conclui-se que  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  possui, exatamente, duas componentes conexas, das quais chamaremos de  $I$  a componente limitada (interna) e de  $E$  a componente ilimitada (externa).

### 5.1.1 O Polígono de Jordan é fronteira das componentes limitada e ilimitada.

Dado que  $I \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ , pela Definição 4.4 temos que a fronteira de  $I$  é denominada por  $\partial I$  e  $I \cap \partial I = \emptyset$ .

Pela Definição 4.5 temos que o fecho de  $I$  é:

$$\bar{I} = \{x \in \mathbb{R}^2, \forall r > 0 \text{ e } B(P, r) \cap I \neq \emptyset\} = \text{int}I \cup \partial I$$

**Teorema 5.2:** Sejam  $I \subset X$  um espaço métrico e  $I$  um conjunto aberto. Então,  $\partial I = \bar{I} - I$ .

*Demonstração.* Por definição tem-se que  $\bar{I} = \text{int}I \cup \partial I$  e  $I \cap \partial I = \emptyset$ , logo, conclui-se que  $\partial I = \bar{I} - I$ .  $\square$

**Definição 5.2:** Uma linha quebrada é um arco poliedral.

**Teorema 5.3:** Uma linha quebrada não separa  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, se  $J'$  é uma linha quebrada no plano, então  $\mathbb{R}^2 \setminus J'$  é conexo.

*Demonstração.* Considere  $N$  uma vizinhança de  $J'$ , pela demonstração do Lema 5.1, dado um  $p$  qualquer, pode-se ligar a  $P$  ou  $Q$  por um caminho  $N - J'$ , porém  $J'$  é uma linha quebrada, o quão próximos estiverem  $P$  e  $Q$  do final dessa linha, ver Figura 5.10, existirá um caminho em  $N \setminus J'$  que ligará  $P$  e  $Q$ . Assim,  $N \setminus J'$  é conexo, logo  $\mathbb{R}^2 \setminus J'$  é conexo.

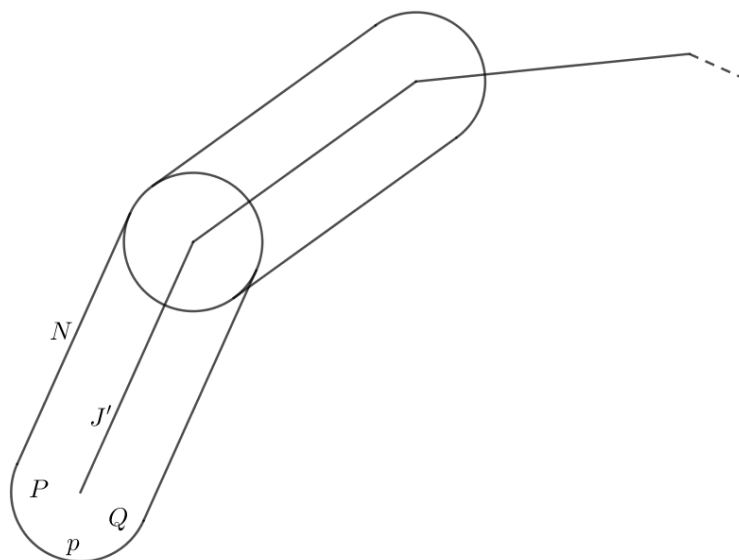


Figura 5.10: Linha quebrada não separa  $\mathbb{R}^2$ .

□

**Teorema 5.4:** Seja  $J$  um polígono de Jordan, com o interior  $I$  e exterior  $E$ . Então, cada ponto de  $J$  é um ponto limite de  $I$  e de  $E$ .

*Demonstração.* Seja a fronteira  $\partial I = \bar{I} - I$ . Então  $\mathbb{R}^2 \setminus \partial I = I \cup (\mathbb{R}^2 - \bar{I})$ , onde  $I$  e  $(\mathbb{R}^2 - \bar{I}) \supset E$  são conjuntos abertos, disjuntos e não vazios. Além disso, a fronteira está contida no polígono de Jordan e é um conjunto fechado.

Se a fronteira for diferente do polígono de Jordan encontra-se em uma linha quebrada  $J' \subset J$ . Desta forma,  $\mathbb{R}^2 - J' = I \cup [\mathbb{R}^2 - (I \cup J')]$ , sendo  $I$  e  $[\mathbb{R}^2 - (I \cup J')]$  conjuntos abertos, disjuntos e não vazios e  $E \subset [\mathbb{R}^2 - (I \cup J')]$ . Logo,  $\mathbb{R}^2 - J'$  é não conexo, absurdo pelo Teorema 5.3. □

**Lema 5.3:**  $J$  é fronteira comum às duas componentes  $I$  e  $E$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 5.4, sabe-se que  $J \subset \bar{I}$  e  $J \cap I = \emptyset$ . Dessa forma,  $J \subset \bar{I} - I = \partial I$  e  $\bar{I} - I \subset J$ , pois  $E$  é aberto. Logo,  $J = \partial I$ . De maneira análoga provamos que  $J = \partial E$ , ou seja,  $\mathbb{R}^2 = I \cup J \cup E$ . □

Diante dos três Lemas demonstrados, está provado que um polígono de Jordan divide o plano em duas componentes conexas, uma limitada e a outra ilimitada. Sendo o polígono a fronteira dessas regiões.

### Importantes Lemas para demonstração do Teorema de Jordan

A seguir vamos enunciar três Lemas, porém omitiremos as demonstrações nesse trabalho, mas poderão ser consultados na Referência [6].

**Lema 5.4:** Seja  $\alpha$  uma curva de Jordan. Dado um número real  $\epsilon > 0$  qualquer, existe um polígono de Jordan  $J$  tal que:

$$|\gamma - \gamma'| < \epsilon$$

onde  $\gamma$  e  $\gamma'$  são parametrizações de  $\alpha$  e  $J$  respectivamente.

Esse primeiro lema traz a ideia de aproximação, ou seja, de maneira arbitrária, toda Curva de Jordan  $\alpha$  pode ser aproximada a um Polígono de Jordan  $J$ .

**Lema 5.5:** Se  $J$  um polígono de Jordan, então existe um disco aberto contido na componente limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  cuja fronteira intersecta  $\alpha$  em dois pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , com  $|a - b| \geq \sqrt{3}$ .

Embasado no Teorema 5.1, existe uma componente limitada, que por consequência existem discos dentro dela, cuja fronteira intersecta o Polígono em dois pontos. Prova-se a tese por absurdo usando o Lema de Zorn.

**Lema 5.6:** Seja  $X$  uma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  e  $p, q \in X$  com  $d(J, \{p, q\}) \geq \zeta$ . Suponha que para toda corda  $S$  de comprimento menor do que  $2\zeta$ ,  $p$  e  $q$  estão na mesma componente de  $X \setminus S$ . Então existe um caminho contínuo  $\Pi$  definido de  $p$  para  $q$  tal que  $d(\Pi, J) \geq \zeta$ .

## 5.2 O Teorema de Jordan

**Teorema 5.5:** Seja  $\alpha$  uma curva de Jordan. Então  $\alpha$  separa o plano em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada, sendo o traço da curva a fronteira comum às duas regiões.

*Demonstração.* ’

- $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$  tem pelo menos duas componentes conexas.

Existe uma componente ilimitada. Provemos então a existência da componente limitada, sabendo que a curva é compacta, então é limitada, portanto existe um círculo  $C_0$  ao redor de  $\alpha$ .

Usaremos os Lemas 5.4 e 5.5 expondo os seguintes argumentos.

Existe uma sequência de polígonos de Jordan que converge para  $\alpha$ , sendo  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tal sequência.

Para cada  $J_n$  existe um círculo  $C_n$ , de centro  $Z_n$ , que contenha os pontos  $\gamma_n(a_n)$  e  $\gamma_n(b_n)$  tal que  $|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$ . Caso necessário, para passar a uma subsequência da original, podemos supor que todos os  $J_n$  são limitados por  $C_0$  e que  $Z_n \rightarrow Z$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Seja,

$$\epsilon = \inf\{|\gamma(a) - \gamma(b)|, \forall a, b \in S^1\} \text{ tais que } |a - b| \geq \sqrt{3}.$$

Como  $|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$ . então  $|\gamma(a_n) - \gamma(b_n)| \geq \epsilon$  e assim,

$$|\gamma(a_n) - \gamma(b_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo o diâmetro de  $C_n$  é maior do que  $\frac{\epsilon}{2}$  e  $\gamma(a_n), \gamma(b_n)$  são os únicos pontos de interseção de  $C_n$  e  $J_n$  e o interior de  $C_n$  está contido na região limitada de  $J_n$ , tem-se que a distância entre  $Z_n$  e  $J_n$  é no mínimo igual ao raio de  $C_n$ . Daí

$$d(Z_n, J_n) > \frac{\epsilon}{4}. \tag{5.2}$$

Como  $Z_n \rightarrow Z$ , existe um  $n_1$  tal que  $\forall n > n_1$  tem-se

$$d(Z, Z_n) < \frac{\epsilon}{16}. \tag{5.3}$$

Dessa forma, por 5.2 e 5.3, para  $n > n_1$ ,  $B(Z, \frac{\epsilon}{16}) \subset B(Z_n, \frac{\epsilon}{4})$ , observe:

$$Z_n \rightarrow Z$$

$\forall \epsilon > 0, \exists n$  tal que:

$$n > n_1 \implies |Z_n - Z| < \frac{\epsilon}{16}$$

$$B(Z, \frac{\epsilon}{16}) \subset B(Z_n, \frac{\epsilon}{4})$$

$$\forall x \in B(Z, \frac{\epsilon}{16}) \implies x \in B(Z_n, \frac{\epsilon}{4})$$

$$|x - Z| < \frac{\epsilon}{16} \text{ e } |x - Z_n| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$|x - Z_n| = |x - Z + Z - Z_n| \leq |x - Z| + |Z - Z_n|$$

$$|x - Z_n| \leq \frac{\epsilon}{16} + \frac{\epsilon}{16} = \frac{\epsilon}{8} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Obtemos que a distância de  $Z$  a  $J_n$  será maior do que  $\frac{\epsilon}{8}$ .

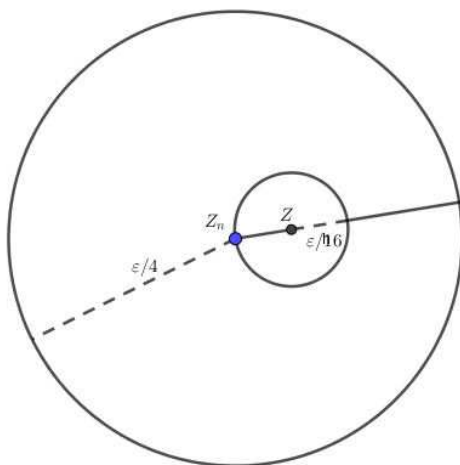


Figura 5.11:  $B(Z, \frac{\epsilon}{16}) \subset B(Z_n, \frac{\epsilon}{4})$ .

Como  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge a  $\alpha$ , existe um  $n_2$  tal que  $\forall n > n_2$  tem-se:

$$d(J_n, \alpha) < \frac{\epsilon}{16}. \quad (5.4)$$

Pode-se afirmar que  $Z$  e  $Z_n$  estão na mesma componente de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha_n$  e  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$   $\forall n > N_1$ , onde  $N_1 = \max\{n_1, n_2\}$ .

Suponha que  $Z$  esteja na componente ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$ . Portanto existe um  $\Pi$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$  que conecta  $Z$  a um ponto fora de  $C_0$ . Seja  $\zeta = d(\Pi, \alpha)$  existe um  $n_3$  tal que  $\forall n > n_3$  então  $|\gamma_n - \gamma| < \frac{\zeta}{2}$  de forma que:

$$d(\Pi, J_n) > \frac{\zeta}{2}.$$

Seja  $N = \max\{n_3, N_1\}$ . Para todo  $n > N$ ,  $Z$  e  $Z_n$  estão na componente ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$ . Isto contradiz, logo  $Z$  está na componente limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$ , portanto existe pelo menos duas componentes em  $\mathbb{R}^2$ .

- $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$  tem no máximo duas componentes conexas.

Suponha-se que  $a, b, c$  sejam pontos de três componentes diferentes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$  e:

$$\epsilon = d(\alpha, \{r, s, t\}). \quad (5.5)$$

Seja  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  uma sequência de polígonos de Jordan que converge a  $\alpha$ , então existe  $m_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > m_1$ ,

$$d(J_n, \{r, s, t\}) \geq \frac{\epsilon}{2}, \quad (5.6)$$

e, pelo Teorema 5.1 dois dos três pontos têm que estar na mesma componente  $X_n$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus J$ . Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $r$  e  $s$  estão em  $X_n$  para todo  $n$ .

Suponha que exista  $\zeta \in (0, \epsilon)$  para o qual há uma subsequência  $(J_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ , tal que, para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ , exista um caminho contínuo  $\Pi_{n_k}$ , que conecta  $r$  e  $s$  com

$$d(J_{n_k}, \Pi_{n_k}) \geq \zeta.$$

A subsequência  $(J_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  também converge para  $\alpha$  por isso existe um  $k_0$  tal que, para todo  $k > k_0$ ,

$$d(\alpha, J_{n_k}) < \frac{\zeta}{2}, \quad (5.7)$$

daí

$$d(\alpha, \Pi_{n_k}) > \frac{\zeta}{2}. \quad (5.8)$$

Por consequência  $r$  e  $s$  estariam na mesma componente de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$ . Absurdo, portanto não existe tal  $\zeta$ .

O fato de não existir  $\zeta$  produz, pela contra-positiva do Lema 5.6, uma sequência de cordas  $S_1, S_2, \dots$ , e uma sequência crescente de índices  $n(1), n(2), \dots$ , tais que:

(I)  $r$  e  $s$  estão em componentes diferentes de  $X_{n(i)} \setminus S_i$ .

(II) quando  $i \rightarrow \infty$ ,  $|\gamma_{n(i)}(a_i) - \gamma_{n(i)}(b_i)| \rightarrow 0$ , onde  $\gamma_{n(i)}(a_i)$  e  $\gamma_{n(i)}(b_i)$  são extremos de  $S_i$ .

Por (II) e pelo fato de  $\gamma$  ser um homeomorfismo quando  $i \rightarrow \infty$ ,

$$|a_i - b_i| \rightarrow 0,$$

Sem perda de generalidade, para todo  $i$ , o ponto  $p$  pertence a componente  $X_{n(i)} \setminus S_i$  limitada por  $S_i$  e  $\gamma_{n(i)}(A_i)$ , onde  $A_i$  é o menor arco  $C$  com extremos  $a_i$  e  $b_i$ . Então, em particular temos:

$$|p - \gamma(a_i)| < \epsilon,$$

absurdo, por 5.5. Com isso, terminamos a prova de que  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$  tem no máximo duas componentes conexas.

- $\alpha$  é fronteira comum das duas componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$ .

Sejam  $I$  e  $E$  respectivamente as componentes limitada (interna) e ilimitada (externa) de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha$ . Considere uma sequência  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de polígonos de Jordan que converge a  $\alpha$  e  $I_n$  e  $E_n$ , respectivamente, as componentes limitada e ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus J_n$ .

Para cada parametrização pertencente à curva, existe uma sequência de pontos  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  na qual  $\gamma_n \in \alpha_n$  e  $\gamma_n \rightarrow \gamma$ .

Se existir  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_{k+1} = \gamma$ , então para todo  $n > k$  tem-se  $\gamma_n = \gamma$ . Portanto, para todo  $n > k$ ,  $\gamma$  é o ponto de fronteira de  $I_n$  e  $E_n$ , portanto há sequências

$$(i_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset I \cap I_n \text{ e } (e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E \cap E_n,$$

que convergem a  $\gamma_n = \gamma$ , sendo  $\gamma$  o ponto fronteira de  $I$  e  $E$ .

Se  $\gamma_n \neq \gamma$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  podemos escolher pontos  $i_n \in I \cap I_n$  e  $e_n \in E \cap E_n$  tais que,

$$|i_n - \gamma| < 2|\gamma - \gamma_n| \tag{5.9}$$

$$|e_n - \gamma| < 2|\gamma - \gamma_n|. \tag{5.10}$$

Como  $|\gamma - \gamma_n| \rightarrow 0$ , temos por 5.9 e 5.10 que as sequências  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  e  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergem a  $\gamma$ , donde  $\gamma$  é o ponto de fronteira de  $I$  e  $E$ .  $\square$

Diante disso, o Teorema de Jordan foi demonstrado, apesar de ser trabalhoso, a identificação se um ponto pertence à parte ilimitada ou limitada passa a ser acessível. Assim, se traçarmos uma semirreta a partir do ponto dado e ela intersectar a curva em quantidades ímpares até o seu final, o ponto está na região limitada, dentro, caso contrário o ponto pertence à região ilimitada, fora da curva.

# Proposta de Atividades

---

Neste capítulo apresentaremos uma proposta de atividade que complementa e auxilia na introdução a Curvas Planas no Ensino Médio. Essas atividades foram preparadas para o software geométrico *GeoGebra Classic 5* que é um programa de Matemática dinâmica, criado por *Markus Hohenwarter* para ser utilizado em ambiente de sala de aula que permite usar a geometria, álgebra, aritmética e funções do nível básico até a determinação de derivadas e integrais. Este aplicativo é de distribuição livre, ou seja, pode ser baixado sem custo, desde que siga os termos da *General Public License (GNU)*.

## 6.1 Apresentação do Software Geométrico

Assim que abrir o software, será exposta uma janela, cuja interface é composta por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, janela de álgebra, janela de visualização, campo de entrada de texto, um menu de comandos e o menu de símbolos.

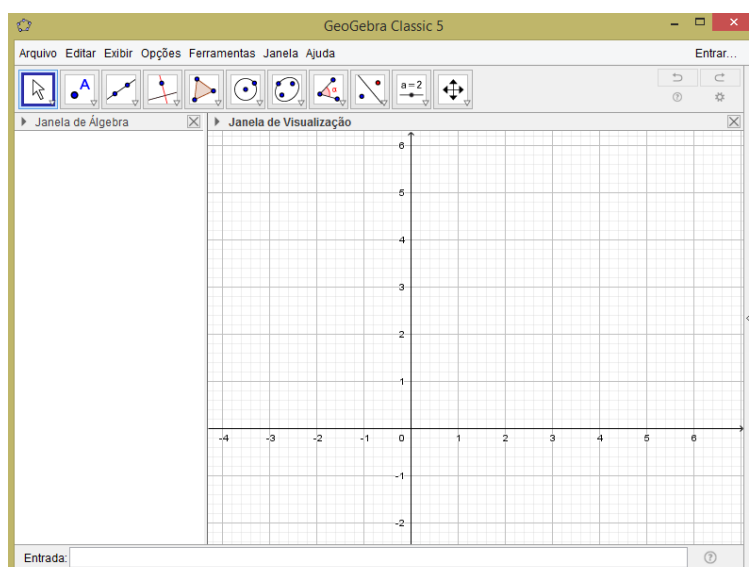


Figura 6.1: Interface do Geogebra.

### 6.1.1 Barra de Menus

Localizada na parte superior da zona gráfica, contém as seguintes opções: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Em destaque, tem-se o menu *Exibir* onde poderá personalizar a interface.

### 6.1.2 Janela de Álgebra

A Janela de visualização ou gráfica, exibe a representação gráfica dos segmentos, pontos, funções, retas, ângulos, polígonos, cônicas e etc. Esses entes geométricos podem ser inseridos na janela geométrica ou através da entrada de texto. Ao passar o mouse sobre eles aparece sua respectiva descrição.

### 6.1.3 Campo de entrada de Texto

Esse campo é usado para inserir fórmulas, funções, coordenadas, e equações diretamente do teclado. Existe a ferramenta “ajuda”, localizada no canto inferior direito que facilita a inserção desses comandos, pois dispõe comandos pré-estabelecidos.

### 6.1.4 Barra de Ferramenta

É o campo principal onde contém todas as ferramentas para construção dos objetos matemáticos.



Figura 6.2: Barra de Ferramenta.

Essa Barra de Ferramentas, Figura 6.2, contém 11 janelas, das quais possuem várias ferramentas. Para ter acesso a essas ferramentas, basta clicar sobre a seta no canto do ícone, e então selecionar a desejada.

Para saber a função de cada ferramenta basta posicionar o mouse em cima de qualquer uma delas conforme Figura 6.3.

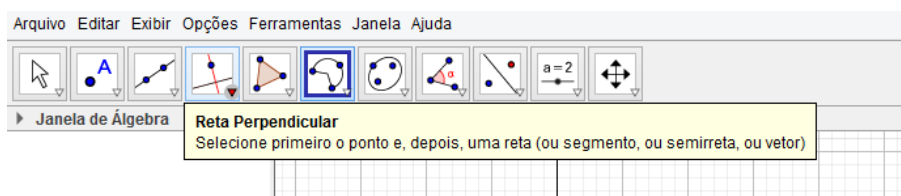


Figura 6.3: Função da Ferramenta.

## 6.2 Atividade 1

### *Construção da Elipse*

- Conteúdo: Elipse.

- Objetivo: Construir uma Elipse para melhor compreensão da definição.
  - Público alvo: Alunos do 3º ano do ensino médio.
  - Pré-requisitos: conhecimentos básicos de informática, conceitos e propriedades da Elipse.
1. Vá até a barra de ferramenta e clique no ícone *Elipse*, Figura 6.4.



Figura 6.4: Barra de Ferramenta - Elipse.

2. Clique em dois pontos distintos do plano e depois no terceiro ponto que pertencerá a Elipse.
3. Clique com o botão direito do mouse sobre o primeiro ponto e escolha a opção renomear, Figura 6.5, chamando-o de foco  $F_1$

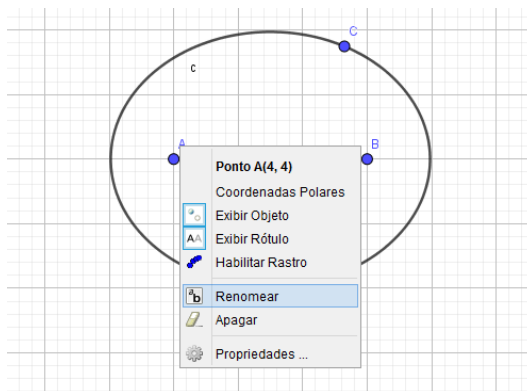
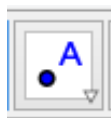


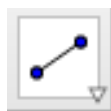
Figura 6.5: Focos da Elipse.

4. Faça o mesmo feito no item 3 com o segundo ponto chamando-o de foco  $F_2$ .
5. Faça o mesmo feito no item 3 com a Elipse chamando-a de  $\epsilon$ .
6. Clique com o botão direito do mouse sobre o terceiro ponto e escolha a opção *exibir objeto* para ocultar esse ponto.
7. Crie um ponto sobre a Elipse usando a ferramenta da Figura 6.6 de maneira que esse ponto possa ser deslocado, chame-o de ponto  $P$ .



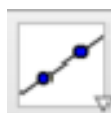
**Figura 6.6:** Barra de Ferramenta - Ponto.

8. Crie os segmentos  $F_1P$  e  $F_2P$  usando a ferramenta da Figura 6.7 e chame-os de  $m$  e  $n$  respectivamente.



**Figura 6.7:** Barra de Ferramenta - Segmento.

9. Crie uma reta usando a ferramenta da Figura 6.8 que passe pelos focos  $F_1$  e  $F_2$ .



**Figura 6.8:** Barra de Ferramenta - Reta.

10. Os pontos em que a reta intersecta na elipse chame-os de vértices  $A_1$  e  $A_2$ .
11. Crie uma *mediatriz* usando a ferramenta da Figura 6.9 em relação aos focos  $F_1$  e  $F_2$ .



**Figura 6.9:** Barra de Ferramenta - Mediatriz.

12. Os pontos em que a reta intersecta na elipse chame-os de vértices  $B_1$  e  $B_2$ .
13. A intersecção da reta e a mediatriz criada é o centro  $O$  da Elipse.
14. Crie os seguintes segmentos:  $A_1O = A_2O = a$ ,  $B_1O = B_2O = b$  e  $F_1O = F_2O = c$ .
15. Insira o seguinte comando no campo de entrada do Geogebra ( $S = m + n$ ) e observe na janela algébrica o resultado mesmo deslocando o ponto  $P$ .

### Conclusões:

Verifique se a seguinte relação é verdadeira  $a^2 = b^2 + c^2$ . Use a janela algébrica do GeoGebra para auxiliar nos cálculos.

Observe que deslocando o ponto  $P$  os segmentos  $F_1P$  e  $F_2P$  sofrerão variação no seu comprimento, porém o que acontece com a soma de  $F_1P$  e  $F_2P$ ?

Qual é a relação da soma de  $F_1P$  e  $F_2P$  com a medida  $a$ ?

Qual é a relação da distância entre os focos  $F_1$  e  $F_2$  com a medida  $c$ ?

Qual é a definição da Elipse?

### 6.3 Atividade 2

*Construa uma Hipérbole.*

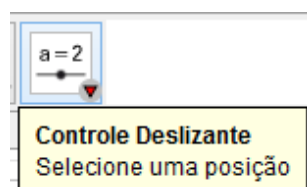
### 6.4 Atividade 3

*Construa uma Parábola.*

### 6.5 Atividade 4

*Construção da Ciclóide<sup>1</sup>*

- Conteúdo: Introdução a Curvas Planas.
  - Objetivo: Construir uma Ciclóide e mostrar que essa curva é gerada a partir do movimento de uma circunferência sobre uma reta.
  - Público alvo: Alunos do 3º ano do ensino médio.
  - Pré-requisitos: conhecimentos básicos de informática, conceitos e propriedades da circunferência.
1. Vá até a barra de ferramenta e crie dois *controles deslizantes*<sup>2</sup> clicando no ícone da Figura 6.10.

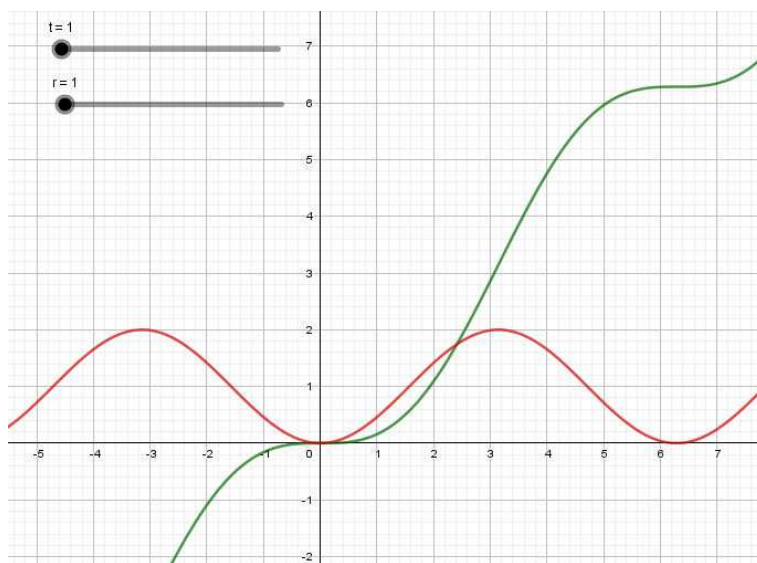


**Figura 6.10:** Barra de Ferramenta - Controle Deslizante.

- O primeiro controle deslizante chame-o de  $(t)$  e coloque min: 0, max: 50 e incremento: 0,01.
  - O segundo controle deslizante chame-o de  $(r)$  e coloque min: 0, max: 50 e incremento: 0,1.
2. Digite no campo entrada as seguintes funções:
    - $f(x) = r(x - \text{sen}(x))$ .
    - $g(x) = r(1 - \text{cos}(x))$ .

<sup>1</sup>Oportunidade de introduzir e explicar para o aluno o conceito da curva Ciclóide e suas características.

<sup>2</sup>Ferramenta que serve para tornar a sua construção dinâmica.



**Figura 6.11:** Funções Paramétricas.

3. Clique com o botão direito do mouse sobre as funções e escolha a opção *exibir objeto* para ocultá-las.
4. Crie a curva Ciclóide digitando no campo *entrada* a seguinte expressão:

Curva[Expressão, Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final]

$$\text{Curva}[f(s), g(s), s, 0, t]$$

Pronto! A curva Ciclóide já foi gerada, nos passos seguintes vamos criar a circunferência geratriz com o ponto  $P$  e o raio  $r$ .

5. Digite no campo *entrada* o ponto  $a(t)$  clique como o botão direito em cima do ponto e escolha a função *renomear* e digite  $P_t$ .
6. Digite no campo *entrada* o seguinte ponto sobre o eixo das abscissas  $R = (rt, 0)$ .
7. Crie o centro da circunferência digitando  $O = (rt, r)$
8. Usando a ferramenta da Figura 6.12 crie uma circunferência dados centro e um de seus pontos.



**Figura 6.12:** Barra de ferramenta - Circunferência.

9. Crie o segmento  $OP_t$  usando a ferramenta da Figura 6.7, e chame-o de  $r$ .  
Pronto! A circunferência que gera a Curva Ciclóide já foi criada, veja Figura 6.13.

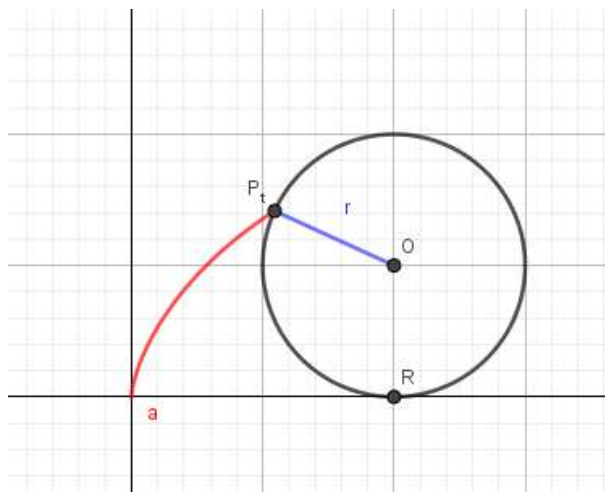


Figura 6.13: Construção da Ciclóide.

10. Clique com o botão direito sobre o controle deslizante  $t$  e use a função *animar*.

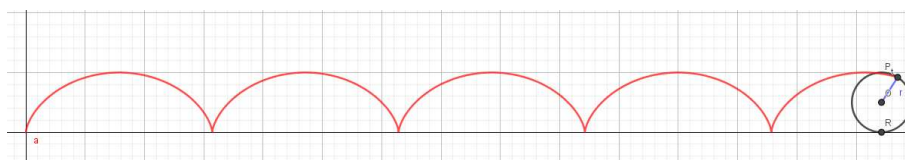


Figura 6.14: Animação da Ciclóide.

Pronto, a circunferência que gera a curva Ciclóide já foi criada, nos controles deslizantes podemos aumentar e diminuir o raio da circunferência e variar o valor de  $t$ .

## 6.6 Atividade 5

### *Construção da Epitrocóide*<sup>3</sup>

- Conteúdo: Introdução a Curvas Planas.
- Objetivo: Construir uma Epitrocóide e mostrar que essa curva é gerada pelo movimento de uma circunferência sobre uma outra circunferência fixa.
- Público alvo: Alunos do 3º ano do ensino médio.
- Pré-requisitos: Conhecimentos básicos de informática, conceitos e propriedades da circunferência.

1. Vá até a barra de ferramenta e crie três controles deslizantes.

- O primeiro controle deslizante chame-o de  $r$  e coloque min: 0, max: 50 e incremento: 0,001.

<sup>3</sup>Oportunidade de introduzir e explicar para o aluno o conceito da curva Epitrocóide e suas características.

- O segundo controle deslizante chame-o de  $s$  e coloque min: 0, max: 50 e incremento: 0,001.
- O terceiro controle deslizante chame-o de  $t$  e coloque min: 0, max:  $24\pi$  e incremento: 0,001.

2. Digite no campo *entrada* as seguintes funções:

- $f(x) = (r + s) \cos(x) - s \cdot \cos \frac{x(r + s)}{s}$ .
- $f(x) = (r + s) \sin(x) - s \cdot \sin \frac{x(r + s)}{s}$ .

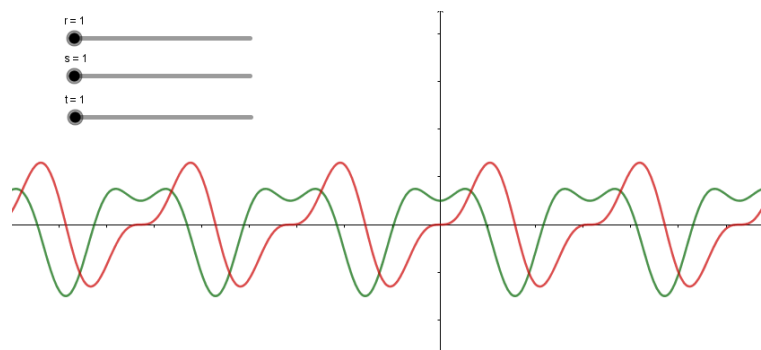


Figura 6.15: Funções Paramétricas.

3. Clique com o botão direito do mouse sobre as funções e escolha a opção *exibir objeto* para ocultá-las.
4. Crie a curva Epitrocóide digitando no campo *entrada* a seguinte expressão:

$$C = \text{Curva}[\text{Expressão}, \text{Expressão}, \text{Variável}, \text{Valor Inicial}, \text{Valor Final}]$$

$$C = \text{Curva}[f(u), g(u), u, 0, t].$$

5. Crie os seguintes pontos:

- $O = (0,0)$
- $A = (R,0)$
- Ponto móvel  $P_t$

6. Crie a circunferência de centro  $O$  e ponto  $A$ , chame-a de  $c$ .

7. Use a função *rotação* em torno de um ponto, Figura 6.17 e clique nos pontos  $A$  e  $O$  respectivamente.

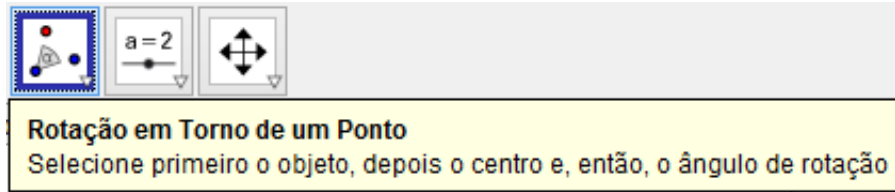


Figura 6.16: Barra de Ferramentas - Função Rotação.

8. Crie uma reta que passe por  $O$  e o ponto  $A'$  gerado no item 7.
9. Crie uma circunferência dado o centro  $A'$  e o raio  $s$ , chame-a de  $c'$ .
10. Crie o ponto  $D$  que é a intersecção da reta e da circunferência  $c'$  e externo a circunferência  $c$ .
11. Clique com o botão direito do mouse sobre as construções do item 8 e 9 e escolha a opção *exibir objeto* para ocultá-las.
12. Crie uma circunferência de centro  $D$  e ponto  $A'$ .
13. Clique com o botão direito sobre o controle deslizante  $t$  e use a função *animar*.

Pronto! As circunferências que geram a curva Epitrocóide já foram criadas, nos controles deslizantes podemos aumentar e diminuir os raios das circunferências e variar o valor de  $t$ .

## 6.7 Atividade 6

Uma curva fechada é quando seu ponto inicial coincide com seu ponto final. Uma curva simples é uma curva que não possui auto-intersecção. A curva de Jordan possui as duas características citadas. Crie uma curva de Jordan e identifique pontos fora e dentro dela.

## 6.8 Atividade 7

Dentro ou Fora? Pinte a parte de dentro da Curva de Jordan e Identifique se o ponto  $A$  está dentro ou fora da curva.



Figura 6.17: Curva de Jordan - Dentro ou Fora?

## 6.9 Atividade 8

Dados os pontos abaixo,  $A, B, C, D, E, F$  na Figura 6.18. Trace um segmento de reta com início em cada ponto até um ponto qualquer fora da curva. Em seguida:

- identifique os pontos que estão fora e dentro.
- veja quantas intersecções cada segmento de reta criou com a curva.
- O que se pode concluir entre as intersecções e os pontos que estão fora ou dentro?



Figura 6.18: “Rosto de Jordan”.

## Conclusão

---

Acerca do tema, *Curvas Planas no Ensino Médio*, conclui-se que é um assunto relevante e acessível às competências e habilidades do aluno. Essa proposta é importante no Ensino Médio em virtude de trabalhar de maneira conjunta figuras geométricas e aplicações. A parametrização das Cônicas deixou claro o quão é acessível a concepção desse conteúdo ou parte dele. Sendo reforçado ainda mais com o auxílio do GeoGebra, proporcionando atividades que auxiliam e complementam a matéria abordada, facilitando assim o ensino/aprendizagem.

Ao pesquisar o acervo literário, percebemos um volume grande sobre curvas planas voltado para Geometria Diferencial no nível superior. Dessa forma, a proposta para o ensino médio torna-se desafiadora e inovadora.

As imagens desse trabalho, a maioria produzidas por nós, ratificam o quanto um *Software Geométrico* é importante na formação continuada, uma vez que auxiliam na interpretação algébrica e desenvolvem uma aptidão visual que é essencial para explicação de um raciocínio.

Na formação docente, a pesquisa sobre Geometria Diferencial, Topologia e o teorema de Jordan, contribui para uma absorção de conhecimentos que nos profissionaliza e conseqüentemente nos habilita a expor as curvas planas no ensino médio ao nível que desejarmos ou que for possível.

Dessa maneira, na certeza do crescimento acadêmico, considera-se um aprendizado profissional significativo e um olhar diferenciado para as curvas planas no Ensino Médio.

# Bibliografia

---

- [1] Hilario Alencar, Walcy Santos. *Introdução às curvas planas*. IMPA/UFC, 2008.
- [2] Rodney Josué Biezuner. *Notas de aula geometria diferencial*. UFMG, 2015.
- [3] Jorge Delgado, Katia Frensel, and Lhaylla Crissaff. Geometria analítica. *Coleção Profmat*, 2013.
- [4] João Paulo Felipe Domingues. *Geometria diferencial das curvas planas*. UNESP, 2013.
- [5] Laís Alegria dos Santos. “Teorema da Curva de Jordan”. UFSC, 2010.
- [6] Fernando Celso Villar Marinho. *Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.
- [7] Keti Tenenblat. *Introdução à geometria diferencial*. Ed. UnB, 1988.
- [8] Allisson Wesley do Nascimento Venceslau et al. *Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações*. 2015.
- [9] Mauricio A Vilches. Topologia geral. *Departamento de Análise-IME-UERJ*.
- [10] Mauricio A. Vilches, Maria Luiza Corrêa. *Cálculo: volume III. Departamento de Análise-IME-UERJ*.
- [11] Angela Mallmann Wendt, Eduardo Buriol de Oliveira, Laura Dalmolin, and Luana Kuister Xavier. *Noções básicas de cálculo e geometria plana com o geogebra*, 2014.