

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Resíduos de folheações tangentes a hipersuperfícies com singularidades isoladas

João Paulo Gobbi Araujo
Magister Scientiae

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2026

JOÃO PAULO GOBBI ARAUJO

Resíduos de folheações tangentes a hipersuperfícies com singularidades isoladas

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Diogo da Silva Machado

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

A663r
2026

Araujo, João Paulo Gobbi, 1999-

Resíduos de folheações tangentes à hipersuperfícies com singularidades isoladas / João Paulo Gobbi Araujo. – Viçosa, MG, 2026.

1 dissertação eletrônica (81 f.): il.

Orientador: Diogo da Silva Machado.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática, 2026.

Referências bibliográficas: f. 79-81.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2026.521>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Folheações (Matemática). 2. Poincaré, Conjectura de.
3. Baum-Bott, Fórmula de. 4. Funções holomórficas. 5. Espaços fibrados (Matemática). I. Machado, Diogo da Silva, 1983-.
II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

CDD 22. ed. 514.72

JOÃO PAULO GOBBI ARAUJO

Resíduos de folheações tangentes a hipersuperfícies com singularidades isoladas

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 3 de agosto de 2026.

Assentimento:

João Paulo Gobbi Araujo
Autor

Diogo da Silva Machado
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pelo autor em 08/09/2026 às 12:55:49 e pelo orientador em 08/09/2026 às 13:17:18. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **FRY7.YEVO.6LPF** e clique no botão 'Validar documento'.

*Dedico esse trabalho aos meus avós, Maria Hackbart Gobbi e Mário Gobbi. Vó e vô,
gostaria que vocês estivessem vivos para ver onde o neto de vocês chegou.
Obrigado por tudo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe, Maria Lúcia Gobbi, pelo apoio incondicional em toda a minha trajetória acadêmica e pela confiança em mim que, em certos momentos, eu mesmo deixei de acreditar. Sem você, mãe, eu não estaria aqui. Você é meu pilar e minha inspiração de vida. Eu te amo mais que tudo nesse mundo. Agradeço também ao meu pai Carlos, minha madrastra Roseli, minhas irmãs Susana, Sarah e Sayonara, meu padrinho José Mário e minha tia Geliane.

Além disso, agradeço aos meus amados amigos anteriores ao meu ingresso no mestrado, André, CJ, Paulo, Richard, Alexia, Breno, Eduardo, Raylso e Gabriela. Mesmo com a distância, nunca deixaram de me apoiar. Amo vocês! Deixo aqui um agradecimento especial ao meu querido amigo Victor do Nascimento Martins. Se não fosse seu apoio, aconselhamento e expectativas, terminar esse mestrado não seria possível. Obrigado por me apresentar Viçosa e a UFV, me guiar no meu começo em Minas Gerais e acreditar que eu poderia chegar onde cheguei. Tamo junto cara!

Também não poderia deixar de agradecer aos amigos que fiz em Viçosa. Obrigado Luiz, Erik, Suzana e Rebeca, companheiro de mestrado, que tornaram esse processo diário tão estressante e cansativo que é a pós graduação em algo mais leve. Nossos cafés, almoços juntos, fofocas, estudos sempre vão ficar na minha memória. Obrigado também Lara, Tallarico, Hallyson, Sara e Robson, vocês foram presentes que viçosa me deu e que eu jamais vou esquecer! Nossos rolês, conversas, risadas vão estar sempre no meu coração, assim como vocês.

Agradeço muito ao meu orientador Diogo da Silva Machado, pela orientação e paciência durante esse período de mestrado. Também agradeço aos professores Lia Feital Fusaro Abrantes e Arnulfo Miguel Rodriguez Pena por aceitarem fazer parte da banca.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

“When life leaves us blind, love keeps us kind.”
Chester Bennington

RESUMO

ARAUJO, João Paulo Gobbi, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2026. **Resíduos de folheações tangentes a hipersuperfícies com singularidades isoladas**. Orientador: Diogo da Silva Machado.

Nesta dissertação, estudamos fórmulas do tipo Baum-Bott para folheações holomorfas unidimensionais em variedades complexas não compactas da forma $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade complexa compacta de dimensão n e D é uma hipersuperfície com singularidades isoladas. Serão apresentados, seguindo o trabalho de Machado, resultados que estendem fatos conhecidos na literatura, que tratavam do caso em que D possui singularidades do tipo cruzamento normal, permitindo agora que D tenha singularidades isoladas arbitrárias. Nesse cenário, o feixe tangente logarítmico $T_{\tilde{X}}(-\log D)$ não é localmente livre, o que impede a aplicação direta das propriedades usuais de classes de Chern. Machado, mostra em seu trabalho que o fibrado virtual $T\tilde{X} - [D]$, onde $[D]$ é o fibrado associado à hipersuperfície D , desempenha o papel esperado no cálculo da soma dos resíduos na fórmula de Baum-Bott. O resultado central, denominado Teorema A, estabelece uma expressão precisa para a integral da Classe Top de Chern do fibrado virtual $T\tilde{X} - [D] - T_F$ em termos de invariantes locais da folheação e da hipersuperfície, envolvendo os números de Milnor, o índice logarítmico e o índice GSV. Como aplicação dos resultados obtidos, foi investigado o problema de Poincaré para folheações unidimensionais no espaço projetivo complexo P^n). Além disso, são estabelecidas relações entre os conjuntos singulares da folheação e da hipersuperfície invariante em termos dos respectivos graus.

Palavras-chave: problema de Poincaré; fórmula de Baum-Bott; folheações holomorfas

ABSTRACT

ARAÚJO, João Paulo Gobbi, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2026.
Residues of tangent foliations to hypersurfaces with isolated singularities.
Adviser: Diogo da Silva Machado.

In this dissertation, we study Baum-Bott type formulas for one-dimensional holomorphic foliations on non-compact complex manifolds of the form $X^\sim = X - D$, where X is an n -dimensional compact complex manifold and D is a hypersurface with isolated singularities. Following the work of Machado, we present results that extend known facts in the literature, which dealt with the case where D has normal crossing singularities, now allowing D to have arbitrary isolated singularities. Under these assumptions, the logarithmic tangent sheaf $T_X(-\log D)$ fails to be locally free, which prevents the direct application of the usual Chern class properties. Machado shows in his work that the virtual bundle $TX - [D]$, where $[D]$ is the line bundle associated to the hypersurface D , serves the intended purpose in the computation of the sum of residues in the Baum-Bott formula. The central result, termed Theorem A, establishes a precise expression for the integral of the top Chern class of the virtual bundle $TX - [D] - T_F$ in terms of local invariants of the foliation and the hypersurface, involving Milnor numbers, the logarithmic index and the GSV index. As an application of the obtained results, the Poincaré problem for one-dimensional foliations on the complex projective space P^n was investigated. Furthermore, relations between the singular sets of the foliation and the invariant hypersurface are established in terms of their respective degrees.

Keywords: Poincaré problem; Baum-Bott formula; holomorphic foliations

Sumário

	INTRODUÇÃO	9
1	PRELIMINARES	12
1.1	Germes de funções	12
1.2	Fibrados Vetoriais	15
1.2.1	Construções Envolvendo Fibrados	20
1.3	Classes de Chern	26
1.3.1	Conexão	27
1.3.2	Polinômios invariantes	34
1.3.3	Complexo de De Rham	41
1.3.4	Classes de Chern	42
1.4	Folheações e os índices de Poincaré-Hopf, GSV e Schwartz	48
1.4.1	O índice de Poincaré-Hopf	49
1.4.2	Os números de Milnor e Tjurina	49
1.4.3	O Índice GSV	50
1.4.4	O Índice de Schwartz	51
2	RESULTADOS PRINCIPAIS	53
2.1	Teorema A	53
2.2	Teorema B	58
2.3	Teorema C	66
2.4	Aplicações	71
	REFERÊNCIAS	79

Introdução

O teorema de Chern-Gauss-Bonnet [2], provado por S.-S. Chern em 1944, estabelece que, para uma variedade complexa compacta X de dimensão n , a integral da n -ésima classe de Chern do fibrado tangente TX sobre X é igual à característica de Euler $\chi(X)$ da variedade:

$$\int_X c_n(TX) = \chi(X).$$

Por sua vez, o teorema de Poincaré-Hopf [3],[4] afirma que, dado um campo de vetores holomorfo v sobre X com singularidades isoladas, a soma dos índices de Poincaré-Hopf em cada singularidade coincide com $\chi(X)$, isto é

$$\chi(X) = \sum_{p \in \text{Sing}(v)} PH_p(v).$$

Esses resultados inauguraram uma vasta literatura, sendo a origem de diversas linhas de pesquisa. Dentro deste contexto, P. Baum e R. Bott [5], em 1972, generalizaram o teorema de Poincaré-Hopf para folheações holomorfas unidimensionais em variedades compactas, estabelecendo a conhecida fórmula de Baum-Bott,

$$\int_X c_n(TX - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}),$$

onde $T_{\mathcal{F}}$ é o fibrado tangente da folheação $\mathcal{F}$ e $\mu_p(\mathcal{F})$ denota o número de Milnor de $\mathcal{F}$ em p (que coincide com o índice de Poincaré-Hopf que define localmente $\mathcal{F}$). Esta fórmula localiza a classe característica do fibrado virtual $TX - T_{\mathcal{F}}$ na soma dos resíduos das singularidades da folheação, fornecendo uma ferramenta poderosa para o estudo de folheações em variedades compactas.

Posteriormente, Shingeru [6] propôs o estudo de extensões do teorema de Chern-Gauss-Bonnet para uma classe de variedades não compactas, denominadas ∂ -variedades, que são da forma $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade compacta e D é um divisor analítico, chamado divisor de fronteira. Nesse contexto, Norimatsu [7], Silvotti [8] e Aluffi [9], de maneira independente, obtiveram versões da fórmula de Chern-Gauss-Bonnet para o caso em que D é uma hipersuperfície com singularidades do tipo cruzamento normal, utilizando o feixe $T_{\tilde{X}}(-\log D)$ de campos de vetores logarítmicos ao longo de D , introduzido por P. Deligne [10]. Nesse caso, K. Saito [11] mostrou que esse feixe é localmente livre.

Mais recentemente, Corrêa e Machado [12],[13] conseguiram obter fórmulas do tipo Baum-Bott para estas ∂ -Variedades, provando que dada uma variedade dessa forma, ou seja, $\tilde{X} = X - D$, onde D é uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal e $\mathcal{F}$ é uma folheação unidimensional em X com singularidades não-degeneradas (isto é, se v é o campo que define

localmente $\mathcal{F}$, então $dv(p)$ tem posto máximo) que deixa D invariante, então

$$\int_X c_n(T_X(-\log D) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (X-D)} \mu_p(\mathcal{F})$$

Mais ainda, a hipótese de que as singularidades devem ser não-degeneradas pode ser enfraquecida, de forma que estas sejam apenas isoladas. Nesse caso, um índice de correção surge, conhecido como índice Logarítmico de $\mathcal{F}$, introduzido por Alexandrov em [14] e denotado por $\mathbb{L}_p(\mathcal{F}, D)$ em cada singularidade. Sob essa nova hipótese, Correa e Machado em [13] mostraram que a fórmula do tipo Baum-Bott é dada por:

$$\int_X c_n(T_X(-\log D) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (X-D)} \mu_p(\mathcal{F}) + \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D} \mathbb{L}_p(\mathcal{F}, D).$$

Nos trabalhos de Corrêa e Machado, a hipótese de que D fosse uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal estava presente. Mais recentemente, Machado [1] mostrou que é possível retirar essa hipótese, permitindo singularidades isoladas em D . Este artigo escrito por Machado é o trabalho em que essa dissertação se baseia. Nesse caso, outro índice de correção surge, chamado índice GSV, definido por Gómez-Mont, Seade e Verjovsky [15] e adaptado para folheações por Brunella [16].

Além disso, um problema surge: o feixe tangente logarítmico $T_X(-\log D)$ não é localmente livre e portanto nem todas as propriedades das classes de Chern são aplicáveis no cálculo de $c_n(T_X(-\log D) - T_{\mathcal{F}})$. Entretanto veremos, seguindo o trabalho de Machado [1], que o fibrado virtual $TX - [D]$, onde $[D]$ é o fibrado associado à hipersuperfície D cumpre o papel para o cálculo da soma dos resíduos das singularidade da folheação na fórmula de Baum-Bott.

Essa dissertação foi dividido em dois capítulos: Preliminares e Resultados Principais. No primeiro, serão apresentados os conceitos fundamentais para o estudo e compreensão dos resultados apresentados no segundo capítulo. Dentre eles estão os conceitos de Germes de Funções Holomorfas e o seu anel $\mathcal{O}_n$, os Fibrados Vetoriais e as Classes de Chern. Ao fim do primeiro capítulo, são apresentados as definições de uma Folheação Holomorfa unidimensional e dos índices que surgem nas fórmulas do Tipo Baum-Bott, sendo eles: o índice de Poincaré-Hopf, o índice GSV e o índice de Schwartz. Além disso, também são definidos o número de Milnor e Tjurina, uma vez que as definições algébricas dos índices citados anteriormente que é apresentada nesse trabalho dependem também destes números.

No segundo capítulo, são apresentados os três teoremas principais demonstrados por Machado [1]: Teorema A, Teorema B e Teorema C. O Teorema A apresenta a fórmula do tipo Baum-Bott para o caso em que a hipersuperfície D possui singularidades isoladas, onde calculamos n -ésima classe de Chern do fibrado $TX - [D] - T_{\mathcal{F}}$. Já o Teorema B (que é uma aplicação do Teorema A) nos dá uma solução para o conhecido problema de Poincaré, que questiona quando é possível limitar o grau da hipersuperfície D a partir do grau da folheação

$\mathcal{F}$. O Teorema C é, por sua vez, uma generalização do resultado de Soares [17] para dimensão arbitrária, em termos do índice GSV e do índice de Schwartz. Por fim, são apresentadas algumas aplicações do Teorema A para folheações no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, também chamadas de folheações projetivas

1 Preliminares

Neste capítulo, reunimos os conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo de toda a dissertação. Iniciamos com a noção de germes de funções e de variedades analíticas, estabelecendo as ferramentas algébricas básicas da teoria de singularidades. Em seguida, desenvolvemos a teoria de fibrados vetoriais, apresentando as principais construções e operações, como fibrado tensorial, soma direta, pull-back, fibrado dual e o fibrado associado a uma hipersuperfície. Na sequência, introduzimos a teoria de Chern-Weil de classes características, com ênfase nas noções de conexão, curvatura, polinômios invariantes e classes de Chern, bem como suas propriedades fundamentais. Finalizamos o capítulo com a definição de folheações holomorfas unidimensionais, dos números de Milnor e Tjurina dos índices de Poincaré-Hopf, GSV e Schwartz, os quais desempenham papéis centrais nos resultados principais da dissertação.

1.1 Germes de funções

Nesta seção, introduzimos a noção de germe de função holomorfa e de germe de subvariedade analítica em $\mathbb{C}^n$. Apresentamos a estrutura de anel do conjunto $\mathcal{O}_n$ dos germes de funções holomorfas na origem, destacando suas propriedades algébricas, como ser um domínio de fatoração única e um anel noetheriano. Definimos também os conceitos de ponto regular, ponto singular e hipersuperfície. A referência para essa seção é o livro escrito por Tatsuo Suwa [18].

Seja H o conjunto de funções holomorfas em alguma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$. Definimos uma relação de equivalência $\sim$ em H da seguinte forma:

Definição 1.1.1. Sejam f e g duas funções em H . Dizemos que $f \sim g$ se houver uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que as restrições de f e g para U são idênticas, ou seja

$$f \sim g \iff \exists U \subset \mathbb{C}^n, \text{ com } U \text{ aberto, tal que } 0 \in U \text{ e } f(z) = g(z), \forall z \in U.$$

A classe de equivalência da função f é chamada de **germe** de f em $0 \in \mathbb{C}^n$. Denotaremos a classe desta relação de equivalência por f quando não houver risco de confusão entre a classe e o elemento.

O conjunto quociente de H (conjunto das funções holomorfas em alguma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$) pela relação de equivalência definida anteriormente $H/\sim$ será denotado por $\mathcal{O}_n$. Esse conjunto possui propriedades interessantes e importantes de serem destacadas: O mesmo possui estrutura de anel comutativo com respeito à adição e multiplicação de funções, constitui um domínio de fatoração única (ver [18], Capítulo I, Teorema 2.9) e é um **anel Noetheriano**, isto é, todo ideal em $\mathcal{O}_n$ é **finitamente gerado**. (ver [18], Capítulo I, Teorema 2.11).

Lembremos que um elemento u é dito uma **unidade** de um anel se

$$uv = 1, \text{ para algum } v \text{ do anel.}$$

Proposição 1.1.1. *Um germe $g \in \mathcal{O}_n$ é uma unidade se, e somente se, $g(0) \neq 0$.*

Demonstração. Ver [18], Capítulo I, Proposição 2.2. □

Em $\mathcal{O}_n$, o conjunto dos elementos que não são unidades formam o único ideal maximal. Mais precisamente

Proposição 1.1.2. *O conjunto*

$$\mathcal{M} = \{g \in \mathcal{O}_n : g \text{ não é unidade}\}$$

é o único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$.

Demonstração. Ver [18], Capítulo I, Proposição 2.3. □

Definição 1.1.2. Seja D um subconjunto aberto de uma variedade complexa M e V um subconjunto de D . Dizemos que V é uma **subvariedade analítica (variety)** em D se, para qualquer ponto $p \in D$ existe uma vizinhança U de p e um número finito de funções holomorfas $f_1, \dots, f_r$ tais que

$$V \cap U = \{q \in U : f_1(q) = \dots = f_r(q) = 0\}$$

Dizemos que $(f_1, \dots, f_r)$ constituem um **sistema de funções locais** de V e chamamos $f_1 = \dots = f_r = 0$ de **equações locais** para V em p .

Uma vez estabelecida a definição de uma subvariedade analítica V , podemos definir o conceito de pontos singulares e regulares, como segue:

Definição 1.1.3. Um ponto $p \in V$ é chamado de **ponto regular** de V se existe um sistema de funções locais $(f_1, \dots, f_r)$ definindo V em uma vizinhança de p tal que p é ponto regular da função $f = (f_1, \dots, f_r)$.

Definição 1.1.4. Dizemos que p é um **ponto singular** se p não é ponto regular. O conjunto dos pontos regular de V será denotado por $Reg(V)$ e o conjunto dos pontos singulares de V será denotado por $Sing(V)$.

Um caso particular muito importante de subvariedades analíticas são as hipersuperfícies, que são subvariedades analíticas nas quais o sistema de funções é composto apenas por uma função, isto é:

Definição 1.1.5. Uma subvariedade analítica não-vazia que é definida localmente por uma única função holomorfa (não identicamente nula) é chamada **hipersuperfície**.

Consideremos agora o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{C}^n$. Vamos definir a seguinte relação de equivalência neste conjunto:

Definição 1.1.6. Dois subconjuntos A e B são equivalentes se existe uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $A \cap U = B \cap U$. Ou seja, Dados $A, B \subset \mathbb{C}^n$

$$A \sim B \iff \exists U \subset \mathbb{C}^n \text{ aberto tal que } 0 \in U \text{ e } A \cap U = B \cap U.$$

Assim como para germes de funções, a classe de equivalência dessa relação é chamada de **germe** de A em $0 \in \mathbb{C}^n$ e a denotamos simplesmente por A .

Observe que, para dois germes A e B em $0 \in \mathbb{C}^n$, as seguintes operações estão bem definidas:

$$A \cap B, A \cup B, A - B \text{ e } A \subset B$$

A definição a seguir trata do conceito de germe de uma subvariedade analítica:

Definição 1.1.7. Sejam $f_1, \dots, f_r$ germes em $\mathcal{O}_n$. Escolhemos uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que esses germes são representados por funções holomorfas em U , que também denotaremos por $f_1, \dots, f_r$. O germe em $0 \in \mathbb{C}^n$ do conjunto

$$S = \{z \in U : f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

é chamado de **germe da subvariedade analítica** definida por $f_1, \dots, f_r$ e o denotaremos por $V(f_1, \dots, f_r)$.

Seja agora I um ideal em $\mathcal{O}_n$. Como dito anteriormente, $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano, logo todo ideal em $\mathcal{O}_n$ é finitamente gerado. Assim

$$I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

Definimos como

$$V(I) = V\langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

o germe da subvariedade analítica definido por I . Reciprocamente, seja V um germe de uma subvariedade de uma subvariedade analítica na origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Seja U uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$ de modo que o germe é representado por uma subvariedade analítica em U , que também denotaremos por V . Definimos

$$I(V) = \{f \in \mathcal{O}_n : f(z) = 0, \forall z \in V\}$$

que é um ideal em $\mathcal{O}_n$. A proposição a seguir mostra algumas relações entre os germes de subvariedades analíticas e ideais do anel de funções holomorfas:

Proposição 1.1.3. Sejam V, V_1, V_2 germes de subvariedades analíticas em $0 \in \mathbb{C}^n$ e I, I_1, I_2 , ideais em $\mathcal{O}_n$.

- (i) Se $I_1 \subset I_2$, então $V(I_2) \subset V(I_1)$;
- (ii) Se $V_1 \subset V_2$, então $I(V_2) \subset I(V_1)$;
- (iii) $V(I(V)) = V$;
- (iv) $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$

Definição 1.1.8. Seja V um germe de subvariedade analítica em $0 \in \mathbb{C}^n$. Dizemos que V é irredutível se $V \neq \emptyset$ e se

$$V = V_1 \cup V_2 \implies V_1 = V \text{ ou } V_2 = V.$$

Teorema 1.1.1. Um germe de uma subvariedade analítica V é irredutível se, e somente se, o ideal $I(V)$ é primo

Demonstração. Ver [18], Capítulo I, Teorema 4.8. □

Foi mostrado por Briançon e Skoda [19] que, se $g \in \mathcal{M}$, ou seja, g não é unidade, então g^n pertence ao ideal jacobiano de g , isto é

$$g \in \mathcal{M} \implies g^n \in J_g = \left\langle \frac{\partial g}{\partial z_1}, \frac{\partial g}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial z_n} \right\rangle \subset \mathcal{O}_n$$

Em particular, se $f \in \mathcal{O}_n$ é um germe com singularidade isolada na origem, então $f^n \in J_f$.

1.2 Fibrados Vetoriais

Nesta seção, apresentamos a teoria básica de fibrados vetoriais sobre espaços topológicos e variedades diferenciáveis. Será apresentada a definição de um fibrado vetorial e suas seções, além de alguns exemplos de fibrados, como o fibrado trivial e o fibrado tangente de uma variedade. Veremos também o conceito de funções de transição, estabelecendo as condições de cociclo que caracterizam um fibrado. Em seguida, descrevemos algumas construções envolvendo fibrados, baseados nas condições de cociclo. Estas construções serão essenciais para a definição das classes de Chern e para o desenvolvimento dos resultados principais. As referências para essa seção são [20], [21] e [22].

Daqui em diante, sempre que nos referirmos à "espaço topológico", estamos tratando de um espaço topológico Hausdorff com base enumerável (condições necessárias para que esse espaço seja uma variedade) e conexo.

Definição 1.2.1. Seja X um espaço topológico. Um **fibrado vetorial** real de posto n sobre X é um par (E, π) , onde E é um espaço topológico e $\pi : E \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e sobrejetora que satisfaz:

- (i) O conjunto $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ tem estrutura de espaço vetorial real de dimensão n .

(ii) Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de X e homeomorfismos

$$\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset X \times \mathbb{R}^n,$$

tais que $\forall x \in X$, se $x \in U_\alpha$, então

$$\theta_{\alpha x} = \theta_\alpha|_{E_x} : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais reais.

Nas condições da definição anterior, temos as seguintes nomenclaturas:

- E é chamado **espaço total** do fibrado;
- X é chamado **base** do fibrado;
- E_x é dito uma **fibra** de E sobre $x \in X$;
- π é a **projeção**;
- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é chamada **cobertura trivializadora** do fibrado;
- θ_α são chamadas **trivializações locais** de E .

Definição 1.2.1. Uma **seção** de (E, π) é uma aplicação contínua $s : X \rightarrow E$ tal que

$$(\pi \circ s)(x) = x \quad \text{para todo } x \in X,$$

ou seja, quando $s(x) \in \pi^{-1}(x) = E_x$ para todo $x \in X$.

Exemplo 1.2.1 (Fibrado Trivial). O **fibrado trivial** de posto n sobre X , denotado por $\underline{\mathbb{R}}^n$, é definido como o produto cartesiano

$$\underline{\mathbb{R}}^n = X \times \mathbb{R}^n,$$

munido da projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : X \times \mathbb{R}^n &\rightarrow X \\ (x, v) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Nessa construção, o espaço total é $X \times \mathbb{R}^n$, a base é X e a projeção é π . As fibras são da forma

$$E_x = \pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n,$$

portanto possuem estrutura de espaço vetorial real de dimensão n . Dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de X , como $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, podemos definir trivializações locais por

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto (x, v). \end{aligned}$$

Claramente, θ_α é um homeomorfismo. Além disso, sua restrição a cada fibra E_x ,

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha x} : E_x &\cong \mathbb{R}^n \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto (x, v),\end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais. Portanto, $\underline{\mathbb{R}}^n$ é de fato um fibrado vetorial de posto n sobre X .

Exemplo 1.2.2 (Fibrado Tangente). Seja M uma variedade de classe C^k de dimensão n , com atlas maximal $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in L}$. Dado $p \in M$, considere o conjunto

$$\mathcal{F}_p = \{h : U \rightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ é diferenciável e } U \text{ é aberto em } M\}.$$

Uma função $v : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **derivação** em $\mathcal{F}_p$ se satisfaz

- (i) $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$, para $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}_p$;
- (ii) $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + v(g) \cdot f(p)$

O **espaço tangente** à M em p , denotado por $T_p M$, é o conjunto de todas as derivações em $\mathcal{F}_p$.

Dada uma carta $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in U_\alpha$, então

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right|_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

definida por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i^\alpha} (\varphi_\alpha(p))$$

é uma derivação em $\mathcal{F}_p$. Além disso, o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right|_p \right\}$$

é uma base para $T_p M$. Agora, para cada carta $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$, considere

$$TU_\alpha := \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M = \{(p, v) : p \in U_\alpha \text{ e } v \in T_p M\}$$

Existe uma bijeção natural

$$\begin{aligned}b_\alpha : TU_\alpha &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (p, [v]_{can})\end{aligned}$$

onde $[v]_{can}$ denota as coordenadas de v com relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$. Considere agora a união disjunta

$$TM = \bigsqcup_{\alpha \in L} TU_\alpha$$

Como a união é disjunta, podemos escrever

$$TM = \bigsqcup_{\alpha \in L} TU_\alpha = \{(\alpha, v, p) : \alpha \in L, p \in U_\alpha \text{ e } v \in T_p M\}$$

Considere agora a seguinte relação de equivalência

$$(\alpha, p, v) \sim (\beta, q, w) \iff U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset, p = q, \text{ e } [w]_{can} = d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p)) \cdot [v]_{can}$$

O conjunto

$$E = TM / \sim$$

com a projeção

$$\begin{aligned} \pi : TM / \sim &\rightarrow M \\ [(\alpha, p, v)] &\mapsto p \end{aligned}$$

é o que chamamos de **fibrado tangente** de M . Vejamos que baseado nessa construção, temos de fato um fibrado. Dado $p_0 \in M$, as fibras do fibrado tangente são dadas por

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(p_0) &= \{[(\alpha, p, v)] \in E : \pi[(\alpha, p, v)] = p_0\} \\ &= \{[(\alpha, p, v)] \in E : v \in T_p M\} \cong T_p M \end{aligned}$$

Ou seja, cada fibra do fibrado tangente é um espaço tangente em $p \in M$. A cobertura trivializadora é a família $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in L}$, onde as trivializações locais são dadas por

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ [(\alpha, p, v)] &\mapsto \theta_\alpha([(\alpha, p, v)]) = (p, v) \end{aligned}$$

e a restrição

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha p} : E_p &\rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n \\ [(\alpha, p, v)] &\mapsto \theta_{\alpha p}([(\alpha, p, v)]) = (p, v) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Dessa forma, o fibrado tangente é de fato um fibrado vetorial.

Tratemos agora do conceito de funções de transição de um fibrado. Seja (E, π) um fibrado vetorial de posto n sobre X com $\{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$ e $\{\theta_\alpha\}_{\alpha \in L}$ sendo sua cobertura trivializadora e suas trivializações locais, respectivamente. Defina

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong GL(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \theta_{\alpha\beta}(x) = \theta_{\alpha x} \circ \theta_{\beta x}^{-1} \end{aligned}$$

As funções $\theta_{\alpha\beta}$ são chamadas de **funções de transição** de E e uma vez que essas funções dependem das trivializações locais, essas são contínuas.

A seguir, veremos que essas funções satisfazem certas condições, que chamamos de **condições de cociclo**.

Proposição 1.2.1. *As funções $\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisfazem as condições de cociclo, a saber:*

(i) *Se $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, então*

$$(\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha})(x) \cdot v = v, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

ou seja

$$\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha} = Id : U_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow U_{\alpha\beta\gamma}$$

(ii) Em $U_{\alpha\beta}$, vale

$$\theta_{\alpha\beta} = (\theta_{\beta\alpha})^{-1}.$$

Demonstração. (i) Suponha que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Pela definição de funções de transição, temos

$$(\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha})(x) \cdot v = ((\theta_{\alpha x} \circ \theta_{\beta x}^{-1} \circ \theta_{\beta x} \circ \theta_{\gamma x}^{-1} \circ \theta_{\gamma x} \circ \theta_{\alpha x}^{-1}))(x) \cdot v$$

Usando a associatividade

$$(\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha})(x) \cdot v = Id(x) \cdot v = v$$

Portanto, pela arbitrariedade de v , $(\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha})(x) \cdot v = v, \forall v \in \mathbb{R}^n$

(ii) Seja $x \in U_{\alpha\beta}$. Daí

$$\begin{aligned} (\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\alpha})(x) \cdot v &= (\theta_{\alpha x} \circ \theta_{\beta x}^{-1} \circ \theta_{\beta x} \circ \theta_{\alpha x}^{-1})(x) \cdot v \\ &= Id(v) \\ &= v \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\theta_{\beta\alpha} \circ \theta_{\alpha\beta})(x) \cdot v &= (\theta_{\beta x} \circ \theta_{\alpha x}^{-1} \circ \theta_{\alpha x} \circ \theta_{\beta x}^{-1})(x) \cdot v \\ &= Id(v) \\ &= v \end{aligned}$$

Portanto $\theta_{\alpha\beta} = (\theta_{\beta\alpha})^{-1}$. □

O próximo resultado nos dá uma caracterização para fibrados vetoriais, tornando mais fácil a construção de novos fibrados, contornando a necessidade de verificar as condições da Definição 1.2.1.

Teorema 1.2.1. *Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta para X . Suponha dadas aplicações $\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ contínuas satisfazendo as condições de cociclo. Para cada $\alpha \in L$, o produto cartesiano $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ possui estrutura de espaço topológico. Dessa forma, ao considerar a união disjunta*

$$E = \bigsqcup_{\alpha \in L} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

podemos considerar a topologia que a união disjunta induz em E , denotada por τ_E . No espaço (E, τ_E) , defina a seguinte relação de equivalência

$$(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v) \iff U_{\alpha\beta} \neq \emptyset, x = y \text{ e } \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u$$

e considere o espaço topológico quociente $E/\sim$. Nessas condições, $E/\sim$ possui estrutura de fibrado vetorial de posto n sobre X (a qual é única a menos de isomorfismo).

Demonstração. Ver [22], Capítulo I, Teorema 2.1. $\square$

Todo o processo anteriormente feito até aqui nessa seção foi feita considerando $\mathbb{R}$, mas tudo ainda é válido para $\mathbb{C}$. Nesse caso, obtemos a noção de fibrado vetorial complexo. Mais ainda, se X é uma variedade complexa e as trivializações locais são biholomorfismos, teremos fibrados vetoriais C^∞ ou homolorfos. A partir do teorema acima, veremos a seguir que é possível construir novos fibrados tendo em mãos as funções de cociclo que definem um fibrado.

1.2.1 Construções Envolvendo Fibrados

Exemplo 1.2.3 (Fibrado Tensorial). Sejam E e F fibrados vetoriais sobre X , de postos n e m , respectivamente. Tomamos uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ comum a ambos os fibrados, de modo que suas respectivas funções de transição sejam

$$\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

para E , e

$$\theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$$

para F . Sabemos que tais funções são contínuas e satisfazem as condições de cociclo. A partir delas, construímos um novo fibrado, denominado **fibrado tensorial** de E e F , denotado por $E \otimes F$, cujas funções de transição são dadas por

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} \otimes \theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \otimes GL(m, \mathbb{R}) \cong GL(nm, \mathbb{R}).$$

Mais explicitamente, para cada $x \in U_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \\ u \otimes v &\mapsto (\theta_{\alpha\beta}(x) \cdot u) \otimes (\theta'_{\alpha\beta}(x) \cdot v). \end{aligned}$$

Verifiquemos que a família $\{\bar{\theta}_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo.

(i) Seja $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, tome $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ e $u \otimes v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ arbitrários. Queremos mostrar que

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) \circ \bar{\theta}_{\beta\gamma}(x) \circ \bar{\theta}_{\gamma\alpha}(x) \cdot (u \otimes v) = u \otimes v.$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) \circ \bar{\theta}_{\beta\gamma}(x) \circ \bar{\theta}_{\gamma\alpha}(x) \cdot (u \otimes v) \\ &= \bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) \circ \bar{\theta}_{\beta\gamma}(x) \cdot (\theta_{\gamma\alpha}(x) \cdot u \otimes \theta'_{\gamma\alpha}(x) \cdot v) \\ &= \bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) \cdot ((\theta_{\beta\gamma}(x) \circ \theta_{\gamma\alpha}(x) \cdot u) \otimes (\theta'_{\beta\gamma}(x) \circ \theta'_{\gamma\alpha}(x) \cdot v)) \\ &= (\theta_{\alpha\beta}(x) \circ \theta_{\beta\gamma}(x) \circ \theta_{\gamma\alpha}(x) \cdot u) \otimes (\theta'_{\alpha\beta}(x) \circ \theta'_{\beta\gamma}(x) \circ \theta'_{\gamma\alpha}(x) \cdot v) \\ &= u \otimes v, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de que $\theta_{\alpha\beta}$ e $\theta'_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo.

(ii) Considere agora $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, tome $x \in U_{\alpha\beta}$ e $u \otimes v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. Mostremos que

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) \circ \bar{\theta}_{\beta\alpha}(x) \cdot (u \otimes v) = u \otimes v.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) \circ \bar{\theta}_{\beta\alpha}(x) \cdot (u \otimes v) &= \bar{\theta}_{\alpha\beta}(x) \cdot (\theta_{\beta\alpha}(x) \cdot u \otimes \theta'_{\beta\alpha}(x) \cdot v) \\ &= (\theta_{\alpha\beta}(x) \circ \theta_{\beta\alpha}(x) \cdot u) \otimes (\theta'_{\alpha\beta}(x) \circ \theta'_{\beta\alpha}(x) \cdot v) \\ &= u \otimes v. \end{aligned}$$

Portanto, a família $\{\bar{\theta}_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo, o que garante a existência de um fibrado vetorial de posto nm sobre X , a saber, $E \otimes F$.

Exemplo 1.2.4 (Subfibrado). Seja E um fibrado vetorial de posto n sobre X , com projeção π e trivializações locais $\{\theta_\alpha\}$. Dizemos que um subconjunto $F \subset E$ é um **subfibrado** de E se a restrição da projeção π e das trivializações θ_α a F conferem a este uma estrutura de fibrado vetorial real. Mais precisamente:

- (i) A aplicação $\pi_F := \pi|_F : F \rightarrow X$ é a projeção do subfibrado, e sua fibra sobre $x \in X$ é dada por $F_x := E_x \cap F$.
- (ii) Para cada α , a restrição

$$\eta_\alpha := \theta_\alpha|_F : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

é um homeomorfismo, uma vez que é a restrição de um homeomorfismo. Assim, as trivializações locais de F são dadas pela família $\{\eta_\alpha\}$.

Além disso, como

$$\theta_{\alpha x} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo, sua restrição a F_x ,

$$\eta_{\alpha x} := \theta_{\alpha x}|_{F_x} : F_x \rightarrow \theta_{\alpha x}(F_x) \subset \mathbb{R}^n,$$

também é um isomorfismo. Uma vez que F_x é um subespaço vetorial de E_x , temos

$$\dim_{\mathbb{R}}(F_x) = m \leq n = \dim_{\mathbb{R}}(E_x).$$

Consequentemente, $\eta_{\alpha x}(F_x) \cong \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$, e portanto podemos escrever

$$\eta_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m.$$

Dessa forma, F é um fibrado vetorial de posto m sobre X .

Exemplo 1.2.5 (Fibrado Pull-Back). Sejam $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua e $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de posto n , com funções de transição $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ relativas a uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X . Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

A aplicação f induz um fibrado sobre Y , chamado **fibrado pull-back** ou **imagem recíproca** de E por f , denotado por $f^{-1}E$. Para construí-lo, definimos uma cobertura de Y a partir da cobertura de X . Como f é contínua, a família

$$\{V_\alpha\} := \{f^{-1}(U_\alpha)\}$$

é uma cobertura aberta de Y . Para cada interseção não vazia $V_{\alpha\beta} = f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta)$, definimos funções de transição

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \eta_{\alpha\beta}(x) := \theta_{\alpha\beta}(f(x)). \end{aligned}$$

Observe que $\eta_{\alpha\beta}$ está bem definida, pois se $x \in V_{\alpha\beta}$, então $f(x) \in U_{\alpha\beta}$. A família $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ herda as propriedades de cociclo da família $\{\theta_{\alpha\beta}\}$, garantindo que $f^{-1}E$ é de fato um fibrado vetorial sobre Y .

Exemplo 1.2.6 (Fibrado Soma Direta). Sejam E e F fibrados vetoriais sobre X , de postos n e m , respectivamente. Tomamos uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ comum a ambos, com funções de transição

$$\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

para E , e

$$\eta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$$

para F . A partir delas, definimos o **fibrado soma direta** $E \oplus F$, de posto $n + m$, cujas funções de transição são dadas por

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n + m, \mathbb{R}),$$

com

$$[\varphi_{\alpha\beta}(x)] = \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \end{bmatrix},$$

onde $0_{n \times m}$ denota a matriz nula de ordem $n \times m$. Verifiquemos que $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo.

- Se $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, para $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$, temos

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha}(x) &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\theta_{\beta\gamma}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\beta\gamma}(x)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\theta_{\gamma\alpha}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\gamma\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\theta_{\beta\gamma}(x)] \cdot [\theta_{\gamma\alpha}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\eta_{\beta\gamma}(x)] \cdot [\eta_{\gamma\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= I_{n+m},\end{aligned}$$

onde I_{n+m} denota a matriz identidade de ordem $n + m$.

- Se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, para $x \in U_{\alpha\beta}$, temos

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\beta}(x) \circ \varphi_{\beta\alpha}(x) &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\theta_{\beta\alpha}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\beta\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\theta_{\beta\alpha}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\eta_{\beta\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= I_{n+m}.\end{aligned}$$

Portanto, a família $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo, garantindo que $E \oplus F$ é um fibrado vetorial de posto $n + m$ sobre X .

Exemplo 1.2.7 (Fibrado associado à uma hipersuperfície). Sejam M uma variedade complexa e $D \subset M$ uma hipersuperfície analítica. Considere uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M tal que, em cada aberto U_i , a hipersuperfície D é definida pela equação $f_i = 0$, onde $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa. Em uma interseção não vazia $U_{ij} = U_i \cap U_j$, as funções definidoras se relacionam por

$$f_i = \varphi_{ij} f_j,$$

onde $\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$ é uma função holomorfa que não se anula em nenhum ponto de U_{ij} . O **fibrado associado a D** , denotado por $[D]$, é definido pelas funções de transição

$$\varphi_{ij} = \frac{f_i}{f_j}.$$

Como φ_{ij} assume valores em $\mathbb{C}^*$, concluímos que $[D]$ é um fibrado holomorfo de posto 1 sobre M .

Exemplo 1.2.8 (Fibrado Dual). Dada uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$, obtemos uma aplicação linear induzida $f^T : W^* \rightarrow V^*$, definida por

$$\begin{aligned}f^T : W^* &\rightarrow V^* \\ \alpha &\mapsto f^T(\alpha) : V \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto (\alpha \circ f)(v),\end{aligned}$$

cujas matrizes, em bases fixadas, é a transposta da matriz de f . Seja E um fibrado vetorial sobre X , com trivializações locais

$$\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

O **fibrado dual** E^* é definido pelas trivializações

$$(\Theta_\alpha^T)^{-1} : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{n*}.$$

Os cociclos de transição de E^* , relativamente aos de E , são dados por

$$(\Theta_\alpha^T)^{-1} \Theta_\beta^T = ((\Theta_\beta^T)^{-1} \Theta_\alpha^T)^{-1} = ((\Theta_\alpha \Theta_\beta^{-1})^T)^{-1} = (\Theta_\alpha \Theta_\beta)^{-1}.$$

Em particular, se E é um fibrado de posto 1, os cociclos de transição de E^* são simplesmente Θ_α^{-1} .

Em $\mathbb{P}^n$, existe, essencialmente, apenas um fibrado de linha holomorfo, chamado **fibrado de linha tautológico** e denotado por $\mathcal{O}(1)$. Seu dual $\mathcal{O}(1)^*$, denotado por $\mathcal{O}(-1)$ pode ser descrito da seguinte maneira:

Exemplo 1.2.9 (O Fibrado $\mathcal{O}(-1)$). O espaço projetivo complexo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ é construído a partir do quociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ pela relação de equivalência que identifica pontos que diferem por um escalar não nulo. Ou seja,

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z = \lambda w.$$

A classe de equivalência de um ponto z no espaço projetivo é denotada por $[z]$ ou $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ e a topologia de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ é a topologia quociente induzida por $Q : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, o que torna esse espaço compacto. Além disso, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ possui uma estrutura de variedade complexa, dada pelo atlas $\{U_i, \varphi_i\}$, $i = 0, \dots, n$, onde

$$U_i = \{[z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n : z_i \neq 0\},$$

e as cartas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ são definidas por

$$\varphi_i(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right),$$

com o acento circunflexo indicando a omissão do termo correspondente. Para fixar ideias, consideremos as cartas φ_0 e φ_j . Temos

$$\varphi_0(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = \left(\widehat{1}, \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right) = (x_1, \dots, x_n),$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_j(z_0 : z_1 : \dots : z_n) &= \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \widehat{1}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \\ &= (y_1, \dots, y_j, \widehat{1}, y_{j+1}, \dots, y_n). \end{aligned}$$

A composição $\varphi_j \circ \varphi_0^{-1} : U_{0j} \rightarrow U_{0j}$ é dada por

$$\varphi_j \circ \varphi_0^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right).$$

Sua derivada $\Theta_{j0} = d(\varphi_j \circ \varphi_0^{-1})$ nos dá os cociclos do fibrado tangente holomorfo $T'\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. A matriz correspondente a $\Theta_{j0} : U_{0j} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ é

$$\Theta_{j0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{x_j^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{x_j} & 0 & \dots & 0 & -\frac{x_1}{x_j^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_j} & \dots & 0 & -\frac{x_2}{x_j^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x_{n-1}}{x_j^2} & 0 & \dots & \frac{1}{x_j} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{x_n}{x_j^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{x_j} \end{pmatrix}.$$

Em particular, $\det \Theta_{j0} = (-1)^j (1/x_j)^{n+1} = (-1)^j (z_0/z_j)^{n+1}$. De modo geral, as funções de transição $\Theta_{ij} = D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ satisfazem

$$\det \Theta_{ij} = (-1)^{i+j} (z_j/z_i)^{n+1}.$$

Consideremos agora o fibrado trivial $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. O **fibrado tautológico** (ou **fibrado universal**) é o subfibrado de posto 1 de $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}$ formado pelos pares $([w], z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ tais que z pertence à reta determinada por $[w]$:

$$\mathcal{O}(-1) = \{([w], z) : \exists t \in \mathbb{C} \text{ tal que } z = tw\}.$$

Sobre o aberto U_i , temos a seguinte descrição local:

$$\mathcal{O}(-1)|_{U_i} = \{((z_0 : \dots : z_n), t(z_0, \dots, z_n)) : t \in \mathbb{C}\}.$$

Os cociclos são definidos por

$$U_{ij} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\Theta_j} \mathcal{O}(-1)|_{U_{ij}} \xrightarrow{\Theta_i} U_{ij} \times \mathbb{C},$$

com

$$([z], t) \mapsto (x, \Theta_{ij}([z])t).$$

Nos abertos U_{ij} , temos a identidade

$$\left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_i}{z_j}, \dots, 1, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) = \left(\frac{z_i}{z_j} \right) \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, 1, \dots, \frac{z_j}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right),$$

dessa forma,

$$\Theta_{ij}([z]) = \frac{z_i}{z_j} \quad \text{em } U_{ij}.$$

Exemplo 1.2.10 (Fibrado de Linha Tautológico $\mathcal{O}(1)$). Tomemos um hiperplano $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, o qual é definido como o conjunto de zeros de um polinômio linear $P : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ com $P(0) = 0$, isto é, $H = \{P(z) = 0\}$. Por meio de uma transformação linear adequada, podemos supor que $H = \{z_0 = 0\}$. Sobre cada aberto U_i , com $i \neq 0$, a equação local de H é dada por $f_i = z_0/z_i = 0$. O fibrado $\mathcal{O}(1)$ é então definido pelos cociclos

$$\varphi_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{z_j}{z_i} \quad \text{em } U_{ij},$$

e representa a classe de isomorfismo dos fibrados do tipo $[H]$.

Notemos que $\mathcal{O}(1)$ coincide com o dual de $\mathcal{O}(-1)$, uma vez que $\varphi_{ij} = \Theta_{ij}^{-1}$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, definimos o fibrado $\mathcal{O}(m)$ como

$$\mathcal{O}(m) = \begin{cases} \mathcal{O}(1)^{\otimes m}, & \text{se } m \geq 0, \\ \mathcal{O}(-1)^{\otimes (-m)}, & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

Consideremos agora uma hipersuperfície $D = P^{-1}(0) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, onde P é um polinômio homogêneo de grau $d > 0$. Em cada aberto U_i , a equação que define D é

$$P\left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, 1, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right) = \frac{1}{z_i^d} P(z_0, \dots, z_n) = 0,$$

enquanto em U_j temos

$$P\left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_i}{z_j}, \dots, 1, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right) = \frac{1}{z_j^d} P(z_0, \dots, z_n) = 0.$$

O fibrado $[D]$ associado a essa hipersuperfície (conforme o Exemplo 1.2.7) tem cociclos de transição dados por

$$\psi_{ij} = \frac{P/z_i^m}{P/z_j^m} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^m.$$

Portanto, $\psi_{ij} = (\varphi_{ij})^m$, o que nos dá o isomorfismo $[D] \cong \mathcal{O}(m)$. Finalmente, vale mencionar que todo fibrado holomorfo de linha sobre $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a $\mathcal{O}(m)$ para algum $m \in \mathbb{Z}$ (ver [20]).

1.3 Classes de Chern

Nesta seção, desenvolvemos a teoria de Chern-Weil de classes características. Iniciamos com a definição de conexão em um fibrado vetorial, sua matriz e sua curvatura. Em seguida, introduzimos os polinômios invariantes e afirmamos que a classe de cohomologia associada à curvatura independe da conexão escolhida. Definimos então as classes de Chern de um fibrado vetorial e de uma variedade complexa, e apresentamos suas propriedades fundamentais: naturalidade, fórmula de Whitney do produto, classes de Chern do dual, do produto tensorial e do fibrado virtual. Essas propriedades serão amplamente utilizadas nos cálculos dos capítulos seguintes. As referências para essa seção são [20], [21] e [22]

1.3.1 Conexão

Sejam E um espaço topológico e M uma variedade complexa. Considere (E, π) um fibrado vetorial complexo C^∞ de posto n , com projeção $\pi : E \rightarrow M$. Para cada aberto $U \subset M$, estabelecemos as seguintes convenções de notação:

- A $\mathbb{C}$ -álgebra das funções complexas de classe C^∞ em U é denotada por $\mathcal{A}^0(U)$;
- O espaço das p -formas complexas de classe C^∞ em U , visto como um $\mathcal{A}^0(U)$ -módulo, é denotado por $\mathcal{A}^p(U)$;
- A álgebra graduada das formas diferenciais C^∞ em U é definida como

$$\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \mathcal{A}^p(U);$$

- O $\mathcal{A}^0(U)$ -módulo das seções C^∞ de E sobre U é denotado por $\mathcal{A}^0(U, E)$;
- O $\mathcal{A}^0(U)$ -módulo das seções C^∞ de $T_M^{\mathbb{C}*} \otimes E$ sobre U onde $T_M^{\mathbb{C}*}$ denota o fibrado cotangente complexificado de M é denotado por $\mathcal{A}^1(U, E)$;
- De modo geral, para cada $p \in \mathbb{N}$, o $\mathcal{A}^0(U)$ -módulo das seções C^∞ de $\bigwedge^p T_M^{\mathbb{C}*} \otimes E$ sobre U é denotado por $\mathcal{A}^p(U, E)$.

Definição 1.3.1. Uma **conexão** em E é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear

$$\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \rightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$$

satisfazendo a regra de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

para todo $f \in \mathcal{A}^0(M)$ e todo $s \in \mathcal{A}^0(M, E)$.

Na definição apresentada, é importante observar que o produto tensorial $df \otimes s$ não é tomado sobre o corpo $\mathbb{C}$, mas sim sobre o $\mathcal{A}^0(M)$ -módulo, uma vez que tanto $\mathcal{A}^0(M, E)$ quanto $\mathcal{A}^1(M, E)$ são $\mathcal{A}^0(M)$ -módulos. O resultado a seguir estabelece o caráter local de uma conexão.

Proposição 1.3.1. *Toda conexão ∇ é um operador local: se uma seção s se anula identicamente em um aberto U , então $\nabla(s) \in \mathcal{A}^1(M, E)$ também se anula em U .*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que exista $x_0 \in U$ tal que $\nabla(s)(x_0) \neq 0$. Tome-mos uma função $\rho \in \mathcal{A}^0(U)$ de suporte compacto, com $\rho \equiv 1$ em uma vizinhança $V \subset U$ de x_0 , e definamos $\bar{\rho} \in \mathcal{A}^0(M)$ por

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{se } x \in U, \\ 0, & \text{se } x \in M \setminus U. \end{cases}$$

A seção $\bar{\rho}s \in \mathcal{A}^0(M, E)$ é identicamente nula em M . Pela $\mathbb{C}$ -linearidade de ∇ , temos

$$\nabla(\bar{\rho}s) = \nabla(0) = 0. \quad (1.1)$$

Por outro lado, pela regra de Leibniz,

$$\nabla(\bar{\rho}s) = d\bar{\rho} \otimes s + \bar{\rho}\nabla(s) = \bar{\rho}\nabla(s), \quad (1.2)$$

uma vez que $d\bar{\rho} = 0$ em U . Combinando 1.1 e 1.2, obtemos $\bar{\rho}\nabla(s) = 0$. Como $\rho \equiv 1$ em V , segue que $\nabla(s)$ se anula em V , contradizendo a hipótese de que $\nabla(s)(x_0) \neq 0$. Portanto, $\nabla(s)$ é identicamente nula em U . $\square$

Como consequência da proposição anterior, se duas seções $s_1, s_2 \in \mathcal{A}^0(M, E)$ coincidem em um aberto $U \subset M$, ainda que sejam distintas globalmente, então $\nabla(s_1)$ e $\nabla(s_2)$ também assumem os mesmos valores em todo ponto de U . Isso assegura que a restrição da conexão a um subconjunto aberto está bem definida, e tal restrição é, ela mesma, uma conexão sobre o fibrado restrito $E|_U$. Em vista da natureza local das conexões, podemos analisá-las em abertos de M . Assim, se $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de M , uma conexão ∇ em E é completamente descrita por suas restrições $\nabla|_{U_\alpha}$ a cada aberto da cobertura.

Lema 1.3.1. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial complexo de posto n sobre uma variedade diferenciável M . Então, existe uma conexão*

$$\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \rightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$$

satisfazendo a regra de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s),$$

para todo $f \in \mathcal{A}^0(M)$ e $s \in \mathcal{A}^0(M, E)$.

Demonstração. Tomamos uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M que trivializa simultaneamente os fibrados $T_M^{\mathbb{C}}$ e E . Para cada índice α , fixamos um referencial local $s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha)$ para as fibras de E sobre U_α , ou seja, $s_i^\alpha \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ e, para cada $x \in U_\alpha$, os vetores $s_1^\alpha(x), \dots, s_n^\alpha(x)$ formam uma base de E_x .

Seja $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$, de modo que $\text{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ e $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in M$. Em cada aberto U_α , definimos ∇^α impondo que

$$\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = 0, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Consequentemente, para qualquer $f \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$, temos

$$\nabla^\alpha(fs_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha + f\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha.$$

Qualquer seção $s \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ admite a representação

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha,$$

com $f_i \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$. Estendemos ∇^α a uma seção arbitrária fazendo

$$\nabla^\alpha(s|_{U_\alpha}) = \nabla^\alpha\left(\sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha\right) = \sum_{i=1}^n \nabla^\alpha(f_i s_i^\alpha) = \sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha.$$

Definimos então

$$\nabla = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \nabla^\alpha.$$

Verifiquemos que ∇ é de fato uma conexão. Primeiramente, notamos que

$$\nabla(s) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \nabla^\alpha(s|_{U_\alpha}) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha \right),$$

de modo que a $\mathbb{C}$ -linearidade de ∇ decorre imediatamente da $\mathbb{C}$ -linearidade do produto tensorial.

Resta apenas verificar a regra de Leibniz para ∇ . Para todo $g \in \mathcal{A}^0(M)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla(gs) &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \nabla^\alpha(gs) \\ &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \nabla^\alpha\left(g \sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha\right) \\ &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n \nabla^\alpha(g f_i s_i^\alpha) \right) \\ &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n d(g f_i) \otimes s_i^\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n ((dg)f_i + g df_i) \otimes s_i^\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n (dg)f_i \otimes s_i^\alpha \right) + \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n g df_i \otimes s_i^\alpha \right). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla(gs) &= dg \otimes \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes s_i^\alpha \right) + g \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha \right) \\ &= dg \otimes \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n 1 \otimes f_i s_i^\alpha \right) + g \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha \right) \\ &= dg \otimes \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha \right) + g \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha \right) \\ &= dg \otimes \sum_{\alpha} \rho_\alpha(s|_{U_\alpha}) + g \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha \right) \\ &= dg \otimes s + g \nabla(s). \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que ∇ é uma conexão em E .

□

Com a notação estabelecida no lema anterior, em cada aberto U_α , a conexão ∇ assume a forma

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha, \quad (1.3)$$

onde θ_{ij}^α são 1-formas C^∞ definidas em U_α . Explicitamos a obtenção dessas 1-formas a seguir.

Como $\nabla(s_i^\alpha) \in \mathcal{A}^1(U_\alpha, E) = C^\infty(U_\alpha, T_M^{\mathbb{C}*}) \otimes E$, podemos representá-lo na forma

$$\nabla(s_i^\alpha) = u \otimes v,$$

com $u \in C^\infty(U_\alpha, T_M^{\mathbb{C}*})$ e $v \in C^\infty(U_\alpha, E)$. Conforme vimos anteriormente, v admite a decomposição $v = \sum_{j=1}^n f_j s_j^\alpha$, com $f_j \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla(s_i^\alpha) &= u \otimes \sum_{j=1}^n f_j s_j^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n u \otimes f_j s_j^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n f_j u \otimes s_j^\alpha. \end{aligned}$$

Definindo $\theta_{ij}^\alpha = f_j u$, obtemos a expressão 1.3. Com essa notação, introduzimos a seguinte definição:

Definição 1.3.2. A matriz da conexão ∇ em U_α é definida como $\theta^\alpha = [\theta_{ij}^\alpha]$.

Consideremos agora uma conexão ∇ e dois abertos U_α e U_β nos quais as matrizes locais de ∇ são, respectivamente, θ^α e θ^β . Quando a interseção $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ é não vazia, as matrizes θ^α e θ^β se relacionam por

$$\theta^\alpha = (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1},$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é uma matriz inversível de ordem n . De fato, sejam s^α e s^β referenciais locais definidos sobre U_α e U_β , respectivamente. Em $U_{\alpha\beta}$, eles estão relacionados por uma matriz inversível $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$ que satisfaz

$$s_i^\alpha = \sum_{j=1}^n g_{ij} s_j^\beta.$$

Denotando $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\bar{g}_{ij}]$, temos $s_k^\beta = \sum_{l=1}^n \bar{g}_{kl} s_l^\alpha$. Então,

$$\sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \otimes s_l^\alpha = \nabla(s_i^\alpha).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\nabla(s_i^\alpha) &= \nabla\left(\sum_{j=1}^n g_{ij}s_j^\beta\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \nabla(g_{ij}s_j^\beta) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(dg_{ij} \otimes s_j^\beta + g_{ij} \nabla(s_j^\beta)\right) \\
&= \sum_{j=1}^n dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum_{j=1}^n g_{ij} \sum_{k=1}^n \theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta \\
&= \sum_{j=1}^n dg_{ij} \otimes \left(\sum_{l=1}^n \bar{g}_{jl}s_l^\alpha\right) + \sum_{j=1}^n g_{ij} \sum_{k=1}^n \theta_{jk}^\beta \otimes \left(\sum_{l=1}^n \bar{g}_{kl}s_l^\alpha\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n dg_{ij} \otimes \bar{g}_{jl}s_l^\alpha + \sum_{j=1}^n g_{ij} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \theta_{jk}^\beta \otimes \bar{g}_{kl}s_l^\alpha \\
&= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n dg_{ij}\bar{g}_{jl}\right) \otimes s_l^\alpha + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ij}\theta_{jk}^\beta \bar{g}_{kl}\right) \otimes s_l^\alpha \\
&= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n dg_{ij}\bar{g}_{jl} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ij}\theta_{jk}^\beta \bar{g}_{kl}\right) \otimes s_l^\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta_{il}^\alpha = \sum_{j=1}^n dg_{ij}\bar{g}_{jl} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ij}\theta_{jk}^\beta \bar{g}_{kl},$$

que, em notação matricial, se escreve como

$$\theta^\alpha = (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (1.4)$$

A seguir, estendemos a noção de conexão a formas com valores em E . Mais precisamente, a partir de uma conexão ∇ em E , definimos um operador $\bar{\nabla} : \mathcal{A}^1(M, E) \rightarrow \mathcal{A}^2(M, E)$ cuja ação sobre um elemento $\omega \otimes s$, com $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ e $s \in \mathcal{A}^0(M, E)$, é dada por

$$\bar{\nabla}(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s).$$

Proposição 1.3.2. *O operador $\bar{\nabla}$ satisfaz a seguinte regra para $f \in \mathcal{A}^0(M)$:*

$$\bar{\nabla}(f(\omega \otimes s)) = df \wedge \omega \otimes s + f\bar{\nabla}(\omega \otimes s).$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}(f(\omega \otimes s)) &= \bar{\nabla}(f\omega \otimes s) \\
&= d(f\omega) \otimes s - f\omega \wedge \nabla(s) \\
&= (df \wedge \omega + f(d\omega)) \otimes s - f\omega \wedge \nabla(s) \\
&= (df \wedge \omega) \otimes s + f(d\omega) \otimes s - f\omega \wedge \nabla(s) \\
&= df \wedge (\omega \otimes s) + f(d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s))
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\bar{\nabla}(f(\omega \otimes s)) = df \wedge (\omega \otimes s) + f\bar{\nabla}(\omega \otimes s).$$

□

Definição 1.3.3. A **curvatura** da conexão ∇ é o operador

$$K_{\nabla} = \bar{\nabla} \circ \nabla.$$

Proposição 1.3.3. A curvatura K_{∇} é uma aplicação $\mathcal{A}^0(M)$ -linear.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{A}^0(M)$ e escrevamos $\nabla(s) = \omega \otimes v \in \mathcal{A}^1(M, E)$. Então,

$$\begin{aligned} K_{\nabla}(fs) &= \bar{\nabla}(\nabla(fs)) \\ &= \bar{\nabla}(df \otimes s + f\nabla s) \\ &= \bar{\nabla}(df \otimes s) + \bar{\nabla}(f(\omega \otimes v)) \\ &= d^2f \otimes s - df \wedge \nabla(s) + df \wedge (\omega \otimes v) + f\bar{\nabla}(\omega \otimes v) \\ &= -df \wedge \nabla(s) + df \wedge \nabla(s) + f\bar{\nabla}(\omega \otimes v) \\ &= f\bar{\nabla}(\omega \otimes v) \\ &= fK_{\nabla}(s). \end{aligned}$$

Portanto, K_{∇} é $\mathcal{A}^0(M)$ -linear. □

Proposição 1.3.4. O valor de $K_{\nabla}(s)$ em um ponto $x \in M$ depende unicamente do valor da seção s nesse ponto, e não da escolha da seção em uma vizinhança de x .

Demonstração. Seja $s^{\alpha} = (s_1^{\alpha}, \dots, s_n^{\alpha})$ um referencial local de E sobre um aberto U_{α} contendo x . Tomemos duas seções $s, s' \in \mathcal{A}^0(U_{\alpha}, E)$ tais que $s(x) = s'(x)$. Então $s - s' \in \mathcal{A}^0(U_{\alpha}, E)$ pode ser escrito como

$$s - s' = \sum_{i=1}^n f_i s_i^{\alpha},$$

com $f_i \in \mathcal{A}^0(U_{\alpha})$. Avaliando em x , obtemos

$$s(x) - s'(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) s_i^{\alpha}(x) = 0.$$

Como $\{s_i^{\alpha}(x)\}_{i=1}^n$ é uma base de E_x , segue que $f_i(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Pela linearidade de K_{∇} ,

$$K_{\nabla}(s - s') = K_{\nabla}(s) - K_{\nabla}(s').$$

Por outro lado,

$$K_{\nabla}(s - s') = K_{\nabla} \left(\sum_{i=1}^n f_i s_i^{\alpha} \right) = \sum_{i=1}^n f_i K_{\nabla}(s_i^{\alpha}).$$

Avaliando em x , concluímos que

$$K_{\nabla}(s)(x) - K_{\nabla}(s')(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) K_{\nabla}(s_i^{\alpha}(x)) = 0.$$

Portanto, $K_{\nabla}(s)(x) = K_{\nabla}(s')(x)$. □

De modo análogo ao que fizemos com a conexão, a curvatura pode ser expressa localmente por uma matriz. Com efeito, tomando um referencial local s^{α} para E sobre U_{α} , temos

$$\begin{aligned} K_{\nabla}(s_i^{\alpha}) &= \nabla(\nabla(s_i^{\alpha})) \\ &= \nabla\left(\sum_{j=1}^n \theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \nabla(\theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}) \\ &= \sum_{j=1}^n (d\theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha} - \theta_{ij}^{\alpha} \wedge \nabla(s_j^{\alpha})) \\ &= \sum_{j=1}^n (d\theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}) - \sum_{j=1}^n \left(\theta_{ij}^{\alpha} \wedge \sum_{k=1}^n \theta_{jk}^{\alpha} \otimes s_k^{\alpha}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (d\theta_{ik}^{\alpha} \otimes s_k^{\alpha}) - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \theta_{ij}^{\alpha} \wedge \theta_{jk}^{\alpha}\right) \otimes s_k^{\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[d\theta_{ik}^{\alpha} - \left(\sum_{j=1}^n \theta_{ij}^{\alpha} \wedge \theta_{jk}^{\alpha}\right)\right] \otimes s_k^{\alpha}. \end{aligned}$$

Essa igualdade admite uma interpretação matricial em termos de θ^{α} . Definindo

$$\Theta_{ik}^{\alpha} = d\theta_{ik}^{\alpha} - \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^{\alpha} \wedge \theta_{jk}^{\alpha},$$

obtemos a seguinte definição:

Definição 1.3.4. A matriz de K_{∇} em U_{α} é a matriz de 2-formas C^{∞} em U_{α} dada por

$$\Theta^{\alpha} = [\Theta_{ij}^{\alpha}],$$

onde

$$\Theta_{ij}^{\alpha} = d\theta_{ij}^{\alpha} - \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^{\alpha} \wedge \theta_{kj}^{\alpha},$$

ou, equivalentemente,

$$\Theta^{\alpha} = d\theta^{\alpha} - \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha}.$$

Assim como as matrizes de conexão, as matrizes de curvatura Θ^α e Θ^β se relacionam quando $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Sejam s^α e s^β referenciais locais sobre U_α e U_β , respectivamente, relacionados pela matriz inversível $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$, cuja inversa é $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\bar{g}_{ij}]$. Então,

$$\begin{aligned} K_\nabla(s_i^\alpha) &= K_\nabla\left(\sum_{j=1}^n g_{ij} s_j^\beta\right) \\ &= \sum_{j=1}^n g_{ij} K_\nabla(s_j^\beta) \\ &= \sum_{j=1}^n g_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \Theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ij} \Theta_{jk}^\beta \otimes \left(\sum_{l=1}^n \bar{g}_{kl} s_l^\alpha\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g_{ij} \Theta_{jk}^\beta \bar{g}_{kl} \otimes s_l^\alpha. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\Theta_{il}^\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g_{ij} \Theta_{jk}^\beta \bar{g}_{kl},$$

o que, em notação matricial, se reduz a

$$\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

1.3.2 Polinômios invariantes

Seja $M(n, \mathbb{C})$ a $\mathbb{C}$ -álgebra constituída pelas matrizes $n \times n$ com coeficientes complexos.

Definição 1.3.5. Uma função $P : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ é denominada **polinômio invariante** se é polinomial nas entradas da matriz e satisfaz

$$P(g^{-1}Ag) = P(A)$$

para quaisquer $A \in M(n, \mathbb{C})$ e $g \in GL(n, \mathbb{C})$.

Proposição 1.3.5. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $P(g^{-1}Ag) = P(A)$ para todo $A \in M(n, \mathbb{C})$ e $g \in GL(n, \mathbb{C})$;
2. $P(AB) = P(BA)$ para todo $A, B \in M(n, \mathbb{C})$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): A demonstração será dividida em duas situações: quando pelo menos uma das matrizes é inversível e quando ambas não o são.

- Suponhamos que $A \in GL(n, \mathbb{C})$ e $B \in M(n, \mathbb{C})$. Observamos que

$$AB = AB(AA^{-1}) = A(BA)A^{-1}.$$

Da hipótese (1), segue imediatamente que

$$P(AB) = P(A(BA)A^{-1}) = P(BA).$$

- Suponhamos agora que $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ são ambas não inversíveis. A igualdade desejada é equivalente a mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$|P(AB) - P(BA)| < \varepsilon.$$

Como $GL(n, \mathbb{C})$ é denso em $M(n, \mathbb{C})$, para cada $r > 0$ existe $A_r \in B(A, r)$ com $\det A_r \neq 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de P garante a existência de $\delta > 0$ tal que, para toda $Z \in B(A, \delta)$,

$$|P(AB) - P(ZB)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |P(BA) - P(BZ)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $r = \delta$, obtemos $Z_0 \in B(A, \delta)$ com $\det Z_0 \neq 0$. Pelo caso anterior,

$$P(Z_0B) = P(BZ_0).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |P(AB) - P(BA)| &= |P(AB) - P(Z_0B) + P(Z_0B) - P(BA)| \\ &\leq |P(AB) - P(Z_0B)| + |P(Z_0B) - P(BA)| \\ &= |P(AB) - P(Z_0B)| + |P(BZ_0) - P(BA)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Dados $A \in M(n, \mathbb{C})$ e $g \in GL(n, \mathbb{C})$, temos

$$P(gAg^{-1}) = P(g^{-1}(gA)) = P(A),$$

o que completa a demonstração. □

A seguir, apresentamos alguns exemplos de polinômios invariantes.

Exemplo 1.3.1. A aplicação determinante

$$\det : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$A \mapsto \det(A)$$

é um exemplo clássico de polinômio invariante, pois é uma expressão polinomial nos coeficientes de A e verifica

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA).$$

Exemplo 1.3.2. Tomemos $A, I \in M(n, \mathbb{C})$, onde I denota a matriz identidade, e consideremos o polinômio característico $\det(tI + A)$. Os coeficientes $C_{n-i}(A)$ definidos por

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^n C_{n-i}(A)t^i$$

são polinômios invariantes. De fato, para qualquer $g \in GL(n, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \det(tI + A) &= \det(g(tI + A)g^{-1}) \\ &= \det(g(tI)g^{-1} + gAg^{-1}) \\ &= \det(t(gIg^{-1}) + gAg^{-1}) \\ &= \det(tI + gAg^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^n C_{n-i}(A)t^i = \sum_{i=0}^n C_{n-i}(gAg^{-1})t^i,$$

e pela unicidade dos coeficientes de um polinômio, concluímos que $C_{n-i}(A) = C_{n-i}(gAg^{-1})$ para todo i . Isso demonstra a invariância de cada C_{n-i} .

Ilustremos com os casos $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

- Para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} \det(tI + A) &= \begin{vmatrix} t + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & t + a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (t + a_{11})(t + a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= t^2 + (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} i = 0 &\implies C_2(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A), \\ i = 1 &\implies C_1(A) = a_{11} + a_{22} = \text{tr}(A), \\ i = 2 &\implies C_0(A) = 1. \end{aligned}$$

- Para $n = 3$, temos:

$$\begin{aligned} \det(tI + A) &= t^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 \\ &\quad + [(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})]t \\ &\quad + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{13}a_{12}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} i = 0 &\implies C_3(A) = \det(A), \\ i = 2 &\implies C_1(A) = \text{tr}(A), \\ i = 3 &\implies C_0(A) = 1. \end{aligned}$$

Para $i = 1$, observamos que o coeficiente de t é a soma dos determinantes das seguintes submatrizes 2×2 de A :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

onde A_i é a matriz obtida de A pela eliminação da i -ésima linha e da i -ésima coluna. Portanto,

$$i = 1 \implies C_2(A) = \det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3).$$

- Para $n = 4$, procedendo como no caso anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \det(tI + A) &= t^4 + (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})t^3 \\ &\quad + [(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}) \\ &\quad + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})]t^2 \\ &\quad + [\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(A_4)]t \\ &\quad + \det(A). \end{aligned}$$

O coeficiente de t^2 é a soma dos determinantes das seguintes submatrizes 2×2 :

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, & A_{1,3} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, & A_{1,4} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{bmatrix}, \\ A_{2,3} &= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, & A_{2,4} &= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}, & A_{3,4} &= \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde A_{ij} é a submatriz de A formada pelas i -ésima e j -ésimas linhas e colunas. Assim:

$$i = 0 \implies C_4(A) = \det(A),$$

$$i = 1 \implies C_3(A) = \sum_{j=1}^4 \det(A_j),$$

$$i = 2 \implies C_2(A) = \sum_{i < j} \det(A_{i,j}),$$

$$i = 3 \implies C_1(A) = \operatorname{tr}(A),$$

$$i = 4 \implies C_0(A) = 1.$$

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial complexo C^∞ de posto n , munido de uma conexão ∇ , cuja curvatura denotamos por K_∇ . Em cada aberto trivializador U_α , a curvatura é representada por uma matriz Θ^α de 2-formas de ordem $n \times n$. Conforme estabelecido anteriormente, as matrizes locais de K_∇ se transformam segundo

$$\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$$

em $U_{\alpha\beta}$, com $g_{\alpha\beta} \in GL(n, \mathbb{C})$. Portanto, para qualquer polinômio invariante P , temos

$$P(\Theta^\alpha) = P(g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Theta^\beta).$$

Essa igualdade nos permite definir globalmente a forma $P(K_\nabla)$: dado um polinômio invariante P de grau k , a $2k$ -forma associada é dada localmente por

$$P(K_\nabla)|_{U_\alpha} = P(\Theta^\alpha).$$

Exemplo 1.3.3. A fim de verificar que $P(\Theta^\alpha)$ é efetivamente uma $2k$ -forma, consideremos o caso particular em que P é o determinante. Tomando $P(A) = \det(A)$, que tem grau n (a ordem da matriz A), e escrevendo $\Theta^\alpha = [\alpha_{ij} \wedge \beta_{ij}]$, onde α_{ij} e β_{ij} são 1-formas em U_α , obtemos:

- Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} \det(\Theta^\alpha) &= (\alpha_{11} \wedge \beta_{11}) \wedge (\alpha_{22} \wedge \beta_{22}) - (\alpha_{12} \wedge \beta_{12}) \wedge (\alpha_{21} \wedge \beta_{21}) \\ &= (\alpha_{11} \wedge \beta_{11} \wedge \alpha_{22} \wedge \beta_{22}) - (\alpha_{12} \wedge \beta_{12} \wedge \alpha_{21} \wedge \beta_{21}), \end{aligned}$$

que é uma 4-forma em U_α .

- Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det(\Theta^\alpha) &= (\alpha_{11} \wedge \beta_{11} \wedge \alpha_{22} \wedge \beta_{22} \wedge \alpha_{33} \wedge \beta_{33}) \\ &\quad + (\alpha_{12} \wedge \beta_{12} \wedge \alpha_{23} \wedge \beta_{23} \wedge \alpha_{31} \wedge \beta_{31}) \\ &\quad + (\alpha_{13} \wedge \beta_{13} \wedge \alpha_{21} \wedge \beta_{21} \wedge \alpha_{32} \wedge \beta_{32}) \\ &\quad - (\alpha_{13} \wedge \beta_{13} \wedge \alpha_{22} \wedge \beta_{22} \wedge \alpha_{31} \wedge \beta_{31}) \\ &\quad - (\alpha_{12} \wedge \beta_{12} \wedge \alpha_{21} \wedge \beta_{21} \wedge \alpha_{33} \wedge \beta_{33}) \\ &\quad - (\alpha_{11} \wedge \beta_{11} \wedge \alpha_{23} \wedge \beta_{23} \wedge \alpha_{32} \wedge \beta_{32}), \end{aligned}$$

que é uma 6-forma em U_α .

Retornando ao caso geral de um polinômio invariante P arbitrário, a relação de transformação acima garante que $P(K_\nabla)$ está bem definida como uma $2k$ -forma global: sua definição independe da escolha da matriz local de K_∇ e é consistente em toda a variedade M , uma vez que está definida em cada aberto trivializador U_α .

Lema 1.3.2. Se P é um polinômio invariante, então a forma $P(K_\nabla)$ é fechada, isto é, $dP(K_\nabla) = 0$.

Demonstração. Escrevamos $P(A) = P([a_{ij}])$ e definamos a matriz de derivadas parciais

$$\Delta = \left[\frac{\partial P}{\partial a_{ij}} \right].$$

A diferencial de P é dada por

$$dP([a_{ij}]) = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial a_{ij}} da_{ij}.$$

Estabelecemos a seguir duas relações fundamentais.

- Primeiramente, temos

$$dP(A) = \text{tr}(\Delta^T dA).$$

De fato, os elementos diagonais de $\Delta^T dA$ são

$$(\Delta^T dA)_{ii} = \sum_{k=1}^n \Delta_{ik}^T da_{ki} = \sum_{k=1}^n \Delta_{ki} da_{ki} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{ki}} da_{ki},$$

de modo que

$$\text{tr}(\Delta^T dA) = \sum_{i=1}^n (\Delta^T dA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{ki}} da_{ki} = dP(A). \quad (1.5)$$

- Além disso, vale a identidade

$$A\Delta^T = \Delta^T A.$$

Para demonstrá-la, lembremos que a invariância de P implica $P(XY) = P(YX)$ para quaisquer $X, Y \in GL(n, \mathbb{C})$. Consideremos a matriz elementar $E_{ji} = [e_{rs}]$, definida por

$$e_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{se } r = j \text{ e } s = i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os produtos AE_{ji} e $E_{ji}A$ têm entradas dadas por

$$(E_{ji}A)_{rs} = \begin{cases} a_{is}, & \text{se } r = j, \\ 0, & \text{se } r \neq j, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$(AE_{ji})_{rs} = \begin{cases} a_{rj}, & \text{se } s = i, \\ 0, & \text{se } s \neq i. \end{cases} \quad (1.7)$$

Pela invariância de P ,

$$P((I + tE_{ji})A) = P(A(I + tE_{ji})),$$

onde I é a matriz identidade. Derivando em relação a t e avaliando em $t = 0$, obtemos

$$\sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (E_{ji}A)_{rs} = \sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (AE_{ji})_{rs}.$$

Usando 1.6 e 1.7, a igualdade acima se reduz a

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{js}} a_{is} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}.$$

Observando que

$$(A\Delta^T)_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \frac{\partial P}{\partial a_{js}} \quad \text{e} \quad (\Delta^T A)_{ij} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj},$$

concluimos que

$$A\Delta^T = \Delta^T A. \quad (1.8)$$

Tomemos agora um aberto trivializador U_α de E , com matrizes locais θ^α e $\Theta^\alpha = [\Theta_{ij}^\alpha]$ para a conexão e sua curvatura, respectivamente. Definamos

$$\Delta = \left[\frac{\partial P}{\partial \Theta_{ij}^\alpha} \right].$$

Observe que cada entrada de Δ é uma forma de grau par, pois Θ_{ij}^α são 2-formas e P é um polinômio.

Por 1.5, temos

$$dP(\Theta^\alpha) = \text{tr}(\Delta^T \wedge d\Theta^\alpha).$$

Calculemos agora $d\Theta^\alpha$. Da relação $\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$, segue

$$\begin{aligned} d\Theta_{ij}^\alpha &= - \sum_{k=1}^n d\theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha + \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha - \sum_{k=1}^n \theta_{kj}^\alpha \wedge \left(\sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha - \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \left(\sum_{l=1}^n \theta_{kl}^\alpha \wedge \theta_{lj}^\alpha \right) + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \left(d\theta_{kj}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{kl}^\alpha \wedge \theta_{lj}^\alpha \right) \\ &= - \sum_{k=1}^n \Theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \Theta_{kj}^\alpha. \end{aligned}$$

Esta é a conhecida *identidade de Bianchi*:

$$d\Theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha.$$

Substituindo em 1.5, obtemos

$$\begin{aligned} dP(\Theta^\alpha) &= \text{tr}(\Delta^T \wedge d\Theta^\alpha) \\ &= \text{tr}(\Delta^T \wedge \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Delta^T \wedge \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha). \end{aligned}$$

A identidade 1.8 permite reescrever

$$dP(\Theta^\alpha) = \text{tr}((\Delta^T \wedge \theta^\alpha) \wedge \Theta^\alpha - (\Theta^\alpha \wedge \Delta^T) \wedge \theta^\alpha).$$

Explicitando o traço,

$$\begin{aligned}
 dP(\Theta^\alpha) &= \sum_{i,k=1}^n ((\Delta^T \wedge \theta^\alpha)_{ik} \wedge \Theta_{ki}^\alpha - \Theta_{ki}^\alpha \wedge (\Delta^T \wedge \theta^\alpha)_{ik}) \\
 &= \sum_{i,k=1}^n (\Theta_{ki}^\alpha \wedge (\Delta^T \wedge \theta^\alpha)_{ik} - \Theta_{ki}^\alpha \wedge (\Delta^T \wedge \theta^\alpha)_{ik}) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

uma vez que Θ_{ki}^α é uma 2-forma e, portanto, comuta com qualquer outra forma. Logo, $dP(\Theta^\alpha) = 0$, o que prova o lema. $\square$

1.3.3 Complexo de De Rham

Uma vez que a diferenciação exterior

$$d : \mathcal{A}^r(M) \rightarrow \mathcal{A}^{r+1}(M)$$

é uma transformação linear definida no espaço vetorial $\mathcal{A}^r(M)$ (ver [23], Capítulo VII, Teorema 6), cujos elementos são as r -formas na superfície m -dimensional M . Como

$$d(d\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{A}^r(M)$$

a sequência

$$\mathcal{A}^*(M) : \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^m(M) \xrightarrow{d} 0$$

é um complexo de cocadeias, chamado *complexo de De Rham* da superfície M .

Lembremos que $\mathcal{A}^0(M)$ é o conjunto das funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{A}^r(M) = 0 \text{ se } r > \dim(M).$$

O núcleo de $d : \mathcal{A}^r(M) \rightarrow \mathcal{A}^{r+1}$, denotado por

$$Ker(d) = Z^r(M) = \{\omega \in \mathcal{A}^r(M) \mid d\omega = 0\}$$

é o conjunto das r -formas fechadas e a imagem de $d : \mathcal{A}^{r-1}(M) \rightarrow \mathcal{A}^r(M)$, denotada por

$$B^r(M) = \{\omega \in \mathcal{A}^r(M) \mid \exists \eta \in \mathcal{A}^{r-1}(M) \text{ tal que } d(\eta) = \omega\}$$

Note que $B^r(M) \subset Z^r(M)$, uma vez que se $\mu \in B^r(M)$, então

$$\begin{aligned}
 &d(\omega) = \mu, \text{ para algum } \omega \in \mathcal{A}^{r-1}(M) \\
 \implies &d(d(\omega)) = d(\mu) \\
 \implies &0 = d(\mu) \\
 \implies &\mu \in Ker(d) = Z^r(M)
 \end{aligned}$$

O espaço quociente

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$$

é chamado de *grupo de cohomologia de De Rham* da superfície M em dimensão r . Seus elementos são as classes de cohomologia

$$[\omega] = \{\omega + d\alpha : \alpha \in \mathcal{A}^{r-1}(M)\}$$

das formas fechadas $\omega \in Z^r(M)$.

Como vimos, se P é um polinômio invariante, então

$$dP(K_\nabla) = 0.$$

Sabemos que $P(K_\nabla)$ é uma $2k$ -forma, onde k é a dimensão de $[\Theta^\alpha]$ que é a matriz de K_∇ . Dessa forma, uma vez que $dP(K_\nabla) = 0$, concluímos que $P(K_\nabla)$ é uma forma fechada, logo faz sentido escrever $[P(K_\nabla)] \in H^{2r}(M, \mathbb{C})$. Feita essas considerações, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 1.3.1. *A classe $[P(K_\nabla)] \in H$ independe da conexão ∇ sobre E .*

A classe $[P(K_\nabla)] = [P(E)]$ depende apenas da classe de isomorfismo de E e é chamada de **classe característica** de E . A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [21], Capítulo 3, Proposição 3.3.2.

1.3.4 Classes de Chern

Finalmente, podemos definir o conceito mais importante deste trabalho:

Definição 1.3.6. Sejam $C_j, j \in \{1, \dots, n\}$, os polinômios simétricos elementares dos autovalores de uma matriz $n \times n$. As formas de Chern de uma curvatura K_∇ associada à uma conexão ∇ sobre E são:

$$c_j(K_\nabla) = C_j \left(\frac{i}{2\pi} K_\nabla \right)$$

e as classes de Chern de E são $c_0(E) = 1$,

$$c_j(E) = \left[C_j \left(\frac{i}{2\pi} K \right) \right] \in H_{DR}^{2j}(M, \mathbb{C})$$

Além disso, chamamos $c_n(E)$ de **Classe Top de Chern de E** e

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E)$$

de **Classe de Chern total de E** .

Observação 1.3.1. A definição de classes de Chern apresentada acima deve ser entendida com uma certa cautela, pois, rigorosamente, as classes $c_j(E)$ pertencem à cohomologia integral $H_{DR}^{2j}(M, \mathbb{Z})$, e não à cohomologia complexa $H_{DR}^{2j}(M, \mathbb{C})$. No entanto, como consequência da *Teoria de Chern-Weil*, tais objetos podem ser identificados de maneira natural, de modo que essa distinção não afeta os resultados principais.

Como observado anteriormente, toda variedade diferenciável M é munida de seu fibrado tangente TM . No caso em que M é uma variedade complexa, podemos considerar também seu fibrado tangente holomorfo $T'M$. Isso motiva a definição a seguir.

Definição 1.3.7. Seja M uma variedade complexa de dimensão n . A j -ésima classe de Chern de M , denotada por $c_j(M)$, é definida como sendo a j -ésima classe de Chern de seu fibrado tangente holomorfo:

$$c_j(M) := c_j(T'M).$$

Vejamos agora algumas propriedades que as classes de Chern satisfazem. Essas propriedades serão de extrema importância para a dedução dos resultados principais apresentados na seção seguinte.

Naturalidade: Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

onde X e Y são variedades diferenciáveis, $f : Y \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, $\pi : E \rightarrow X$ é um fibrado vetorial de posto n , e $f^{-1}E \rightarrow Y$ denota o fibrado pull-back de E por f , conforme construído na Seção 1.2, Subseção 1.2.1.

Seja ∇ uma conexão em E , com matriz local $[\theta^\alpha]$ sobre o aberto trivializador U_α . O pull-back de ∇ por f induz uma conexão em $f^{-1}E$, cuja matriz no aberto $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ é $f^*\theta^\alpha$. Verifiquemos que $f^*\theta^\alpha$ é de fato uma conexão. Aplicando f^* à relação de transformação 1.4, obtemos, para $x \in V_\alpha$,

$$\begin{aligned} f^*\theta^\alpha(x) &= \theta^\alpha(f(x)) \\ &= d(g_{\alpha\beta}(f(x)))(g_{\alpha\beta}(f(x)))^{-1} + g_{\alpha\beta}(f(x))\theta^\beta(f(x))(g_{\alpha\beta}(f(x)))^{-1} \\ &= d(f^*g_{\alpha\beta}(x))(f^*g_{\alpha\beta}(x))^{-1} + f^*g_{\alpha\beta}(x)f^*\theta^\beta(x)(f^*g_{\alpha\beta}(x))^{-1}, \end{aligned}$$

o que confirma que $f^*\theta^\alpha$ satisfaz a relação característica de uma conexão.

A curvatura da conexão induzida, denotada por $K_{f^*\nabla}$, tem matriz local $\Theta_{f^*}^\alpha$. Usando as propriedades do pull-back e a relação matricial da Definição 1.3.4, obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{f^*}^\alpha &= df^*\theta^\alpha - f^*\theta^\alpha \wedge f^*\theta^\alpha \\ &= f^*(d\theta^\alpha) - f^*(\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha) \\ &= f^*(d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha) \\ &= f^*K_\nabla, \end{aligned}$$

isto é, $K_{f^*\nabla} = f^*K_\nabla$. Consequentemente, as formas de Chern de $f^{-1}E$ são obtidas por pull-back das formas de Chern de E :

$$c_j(K_{f^*\nabla}) = C_j\left(\frac{i}{2\pi}K_{f^*\nabla}\right) = C_j\left(\frac{i}{2\pi}f^*K_\nabla\right) = f^*C_j\left(\frac{i}{2\pi}K_\nabla\right) = f^*c_j(K_\nabla).$$

Portanto, as classes de Chern satisfazem a relação de naturalidade:

$$c_j(f^{-1}E) = f^*c_j(E).$$

Fórmula de Whitney do produto: Sejam $\pi : E \rightarrow M$ e $\rho : F \rightarrow M$ fibrados vetoriais sobre M , munidos de conexões ∇_E e ∇_F , respectivamente. Sobre um aberto trivializador comum U_α , representamos essas conexões por matrizes $[\theta_E^\alpha]$ e $[\theta_F^\alpha]$. A soma direta $E \oplus F$ herda uma conexão $\nabla_{E \oplus F} = \nabla_E \oplus \nabla_F$, cuja matriz local é dada por

$$\theta_{E \oplus F}^\alpha = \theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha,$$

ou, de acordo com a construção da Subseção 1.2.1,

$$[\theta_{E \oplus F}^\alpha] = \begin{bmatrix} [\theta_E^\alpha] & 0 \\ 0 & [\theta_F^\alpha] \end{bmatrix}.$$

A curvatura correspondente, $K_{\nabla_{E \oplus F}}$, tem matriz local

$$\begin{aligned} \Theta_{E \oplus F}^\alpha &= d(\theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha) - (\theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha) \wedge (\theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha) \\ &= d\theta_E^\alpha \oplus d\theta_F^\alpha - [(\theta_E^\alpha \oplus 0) + (0 \oplus \theta_F^\alpha)] \wedge [(\theta_E^\alpha \oplus 0) + (0 \oplus \theta_F^\alpha)] \\ &= d\theta_E^\alpha \oplus d\theta_F^\alpha - (\theta_E^\alpha \oplus 0) \wedge (\theta_E^\alpha \oplus 0) - (\theta_E^\alpha \oplus 0) \wedge (0 \oplus \theta_F^\alpha) \\ &\quad - (0 \oplus \theta_F^\alpha) \wedge (0 \oplus \theta_F^\alpha) \\ &= d\theta_E^\alpha \oplus d\theta_F^\alpha - (\theta_E^\alpha \wedge \theta_E^\alpha) \oplus 0 - 0 \oplus (\theta_F^\alpha \wedge \theta_F^\alpha) \\ &= (d\theta_E^\alpha - \theta_E^\alpha \wedge \theta_E^\alpha) \oplus (d\theta_F^\alpha - \theta_F^\alpha \wedge \theta_F^\alpha) \\ &= \Theta_E^\alpha \oplus \Theta_F^\alpha, \end{aligned}$$

onde Θ_E^α e Θ_F^α denotam as matrizes locais das curvaturas K_{∇_E} e K_{∇_F} , respectivamente. Em notação matricial,

$$[\Theta_{E \oplus F}^\alpha] = \begin{bmatrix} [\Theta_E^\alpha] & 0 \\ 0 & [\Theta_F^\alpha] \end{bmatrix}.$$

A partir dessa representação matricial, calculamos o polinômio característico de $\Theta_{E \oplus F}^\alpha$:

$$\begin{aligned} \det(tI + \Theta_{E \oplus F}^\alpha) &= \det(tI + \Theta_E^\alpha) \det(tI + \Theta_F^\alpha) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n C_{n-i}(\Theta_E^\alpha) t^i \right) \left(\sum_{i=0}^m C_{m-i}(\Theta_F^\alpha) t^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} C_{n-i}(\Theta_{E \oplus F}^\alpha) t^i, \end{aligned}$$

com

$$C_{n-k}(\Theta_{E \oplus F}^\alpha) = \sum_{j=0}^k C_{n-j}(\Theta_E^\alpha) C_j(\Theta_F^\alpha).$$

Comparando os coeficientes, obtemos as relações

$$\begin{aligned} C_1(\Theta_{E \oplus F}^\alpha) &= C_1(\Theta_E^\alpha) + C_1(\Theta_F^\alpha), \\ C_2(\Theta_{E \oplus F}^\alpha) &= C_2(\Theta_E^\alpha) + C_1(\Theta_E^\alpha)C_1(\Theta_F^\alpha) + C_2(\Theta_F^\alpha), \\ &\vdots \\ C_k(\Theta_{E \oplus F}^\alpha) &= \sum_{j=0}^k C_j(\Theta_E^\alpha)C_{k-j}(\Theta_F^\alpha). \end{aligned}$$

Passando às classes de Chern, concluímos que

$$\begin{aligned} c_1(E \oplus F) &= c_1(E) + c_1(F), \\ c_2(E \oplus F) &= c_2(E) + c_1(E)c_1(F) + c_2(F), \\ &\vdots \\ c_k(E \oplus F) &= \sum_{j=0}^k c_j(E)c_{k-j}(F), \end{aligned}$$

para $1 \leq k \leq n + m$, com a convenção de que $c_i(E) = 0$ para $i > n$ e $c_i(F) = 0$ para $i > m$.

Assim, a classe de Chern total de $E \oplus F$ satisfaz

$$\begin{aligned} c(E \oplus F) &= 1 + \sum_{k=1}^{n+m} c_k(E \oplus F) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{j=0}^k c_j(E)c_{k-j}(F) \\ &= c_0(E)c_0(F) + \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{j=0}^k c_j(E)c_{k-j}(F) \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{j=0}^k c_j(E)c_{k-j}(F) \\ &= c(E)c(F). \end{aligned}$$

Portanto, a classe de Chern total do fibrado soma direta é o produto das classes de Chern totais dos fibrados somados.

Classes de Chern do fibrado dual: Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial e $\pi^* : E^* \rightarrow M$ seu fibrado dual. Se os cociclos de transição de E são denotados por $g_{\alpha\beta}$, então os cociclos de transição de E^* são dados por $(g_{\alpha\beta}^T)^{-1}$.

A partir de uma conexão ∇ em E , construímos uma conexão em E^* . Tomando a transposta da relação 1.4, obtemos

$$\begin{aligned} (\theta^\alpha)^T &= [(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}]^T \\ &= [(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}]^T + [g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}]^T \\ &= (g_{\alpha\beta}^{-1})^T (dg_{\alpha\beta})^T + (g_{\alpha\beta}^{-1})^T (\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T \\ &= (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} (dg_{\alpha\beta}^T) + (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} (\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Por outro lado, da identidade para a diferencial da inversa,

$$d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1}) = -(g_{\alpha\beta}^T)^{-1} dg_{\alpha\beta}^T (g_{\alpha\beta}^T)^{-1},$$

segue que

$$-d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})(g_{\alpha\beta}^T) = (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} dg_{\alpha\beta}^T. \quad (1.10)$$

Substituindo 1.10 em 1.9 e multiplicando a expressão resultante por -1 , obtemos

$$\begin{aligned} (-\theta^\alpha)^T &= -(g_{\alpha\beta}^T)^{-1} dg_{\alpha\beta}^T - (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} (\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T \\ &= d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})(g_{\alpha\beta}^T) + (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} (-\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T \\ &= d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})^{-1} + (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} (-\theta^\beta)^T ((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Isso define uma conexão ∇^* em E^* , cuja matriz local sobre U_α é $(-\theta^\alpha)^T$. A matriz da curvatura de ∇^* , denotada por $\Theta^{*\alpha}$, é dada por

$$\begin{aligned} \Theta^{*\alpha} &= d((-\theta^\alpha)^T) - (-\theta^\alpha)^T \wedge (-\theta^\alpha)^T \\ &= -(d\theta^\alpha)^T - (\theta^\alpha)^T \wedge (\theta^\alpha)^T \\ &= -(d\theta^\alpha)^T - (\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T \\ &= -(d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T \\ &= -(\Theta^\alpha)^T. \end{aligned}$$

Uma vez que a transposição em $GL(n, \mathbb{C})$ é uma conjugação, para todo polinômio homogêneo P^i de grau i , temos

$$P^i(-\Theta^{\alpha T}) = (-1)^i P^i(\Theta^\alpha).$$

Consequentemente, as classes de Chern de E e E^* estão relacionadas por

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E). \quad (1.11)$$

Classe de Chern do Produto Tensorial: Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto n e $p : L \rightarrow M$ um fibrado de linha (posto 1). Consideremos o produto tensorial $E \otimes L$. Suas classes de Chern são expressas em termos das classes de Chern de E e de L pela fórmula (ver [20])

$$c_i(E \otimes L) = \sum_{k=0}^i \binom{n-k}{i-k} c_k(E) c_1(L)^{i-k}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Para $n = 1$, temos (ver em [20]):

$$c_1(E \otimes L) = c_1(E) + \text{rank}(E) \cdot c_1(L). \quad (1.12)$$

onde $\text{rank}(E)$ denota o posto do fibrado E . Assim

$$c_1(E \otimes L) = c_1(E) + n \cdot c_1(L).$$

Note que, a partir deste fato, podemos mostrar que, dados $E_1, \dots, E_k$ fibrados de posto 1, então temos a relação

$$c_1 \left(\bigotimes_{l=1}^k E_l \right) = \sum_{l=1}^k c_1(E_l).$$

Usemos indução para demonstrar a afirmação. Para $l = 2$, usando 1.12 obtemos

$$c_1(E_1 \otimes E_2) = c_1(E_1) + \text{rank}(E_1) \cdot c_1(E_2)$$

Como $\text{rank}(E_1) = 1$, então

$$c_1(E_1 \otimes E_2) = c_1(E_1) + c_1(E_2).$$

Supondo que o resultado seja válido para $k - 1$ fibrados de posto 1, ou seja

$$c_1 \left(\bigotimes_{l=1}^{k-1} E_l \right) = \sum_{l=1}^{k-1} c_1(E_l). \quad (1.13)$$

e denotando por

$$F = \bigotimes_{l=1}^{k-1} E_l$$

Temos que, pela construção feita na Seção 1.2, Subseção 1.2.1,

$$\text{rank}(F) = \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{k-1 \text{ vezes}} = 1$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} c_1(F \otimes E_k) &= c_1(F) + \text{rank}(F) \cdot c_1(E_k) \\ &= c_1(F) + 1 \cdot c_1(E_k) \\ &= c_1(F) + c_1(E_k) \\ &= c_1 \left(\bigotimes_{l=1}^{k-1} E_l \right) + c_1(E_k) \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução 1.13,

$$\begin{aligned} c_1(F \otimes E_k) &= \left(\sum_{l=1}^{k-1} c_1(E_l) \right) + c_1(E_k) \\ &= \sum_{l=1}^k c_1(E_l) \end{aligned}$$

como $F = \bigotimes_{l=1}^{k-1} E_l$, então

$$c_1(F \otimes E_k) = c_1 \left(\left(\bigotimes_{l=1}^{k-1} E_l \right) \otimes E_k \right) = c_1 \left(\bigotimes_{l=1}^k E_l \right)$$

Isto é

$$c_1 \left(\bigotimes_{l=1}^k E_l \right) = \sum_{l=1}^k c_1(E_l).$$

Classe de Chern do Fibrado Virtual: A teoria de fibrados vetoriais admite uma generalização que envolve os chamados *fibrados virtuais*, cuja construção pode ser encontrada em [21]. Neste trabalho, restringimo-nos ao caso em que dispomos de um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ de posto n e um fibrado de linha $p : L \rightarrow M$ de posto 1. Tais objetos dão origem a um fibrado virtual, denotado por $E - L$. Se $c_i(E)$ e $c_i(L)$ denotam as respectivas classes de Chern de E e L , então as classes de Chern de $E - L$ são dadas por

$$c_i(E - L) = \sum_{k=0}^i \binom{n-k}{i-k} c_k(E) c_1(L^*)^{i-k}, \quad 2 \leq i \leq n. \quad (1.14)$$

1.4 Folheações e os índices de Poincaré-Hopf, GSV e Schwartz

Nesta seção, introduzimos o conceito de folheação holomorfa unidimensional e suas principais estruturas associadas. Em seguida, definimos os índices que serão centrais nos resultados principais da dissertação: o índice de Poincaré-Hopf, o número de Milnor, o número de Tjurina, o índice GSV e o índice de Schwartz. Apresentamos as relações entre esses índices, destacando as fórmulas que os conectam, como a relação entre o índice GSV e o índice logarítmico de Aleksandrov, e a relação entre o índice de Schwartz e o índice GSV via número de Milnor. As referências para essa seção são [24] e [18].

Relembremos o que é uma singularidade de um campo vetorial [25]: Seja

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

um campo vetorial em um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, com coordenadas $(v_1, \dots, v_n)$. Um campo vetorial v é dito contínuo, suave, analítico, etc., se suas componentes $\{v_1, \dots, v_n\}$ são contínuas, suaves, analíticas, etc.. Uma **singularidade** a de v é um ponto onde todas as suas componentes se anulam, ou seja, $v_i(a) = 0, \forall i = 1, \dots, n$. A singularidade é dita *isolada* se em todo ponto x próximo à a existe ao menos uma componente de v que não se anula.

Definição 1.4.1. Seja X uma variedade complexa e conexa. Uma **folheação holomorfa de dimensão 1** é dada pelos seguintes conjuntos de dados:

- (i) Uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X ;
- (ii) Para cada U_α , um campo de vetores holomorfo v_α ;
- (iii) Para cada interseção não vazia $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, uma aplicação holomorfa

$$f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_{\alpha\beta}) = \{f : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa e } f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in U_{\alpha\beta}\}.$$

tal que $v_\alpha = f_{\alpha\beta}v_\beta$ em $U_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ em $U_{\alpha\beta\gamma}$.

Pelo Teorema 1.2.1, essa família de funções $\{f_{\alpha\beta}\}$ define um fibrado $K_{\mathcal{F}}$ de posto 1 que é chamado de **fibrado cotangente de $\mathcal{F}$** . O dual de $K_{\mathcal{F}}$ é chamado de **fibrado tangente da folheação $\mathcal{F}$** e será denotado por $T_{\mathcal{F}}$.

Como uma folheação unidimensional $\mathcal{F}$ é definida localmente em cada U_α da cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de uma variedade M por um campo de vetores v_α , é natural estender as definições dos índices a seguir para folheações, como feito por Brunella em [16].

1.4.1 O índice de Poincaré-Hopf

O índice de Poincaré-Hopf, um dos conceitos mais fundamentais na teoria de campos de vetores, foi introduzido por Henri Poincaré [3] no final do século XIX para dimensão 2 e posteriormente generalizado para dimensão arbitrária por Hopf [4]. Poincaré percebeu que a soma dos índices de um campo de vetores sobre uma variedade compacta é um invariante topológico que independe do campo considerado, coincidindo com a característica de Euler da variedade. Este resultado, conhecido como Teorema de Poincaré-Hopf, estabelece uma ponte profunda entre a análise local de campos de vetores e a topologia global da variedade. Formalmente, temos:

Definição 1.4.2. O **índice de Poincaré-Hopf** de um campo de vetores holomorfo $v = (v_1, \dots, v_n)$ com singularidade isolada em 0 é dado por

$$PH(v, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,0}}{\langle v_1, \dots, v_n \rangle},$$

onde $\mathcal{O}_{n,0}$ é o anel de germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ é o ideal gerado pelas componentes de v . Quando este valor é igual a 1, dizemos que v tem uma *singularidade não degenerada* em 0.

1.4.2 Os números de Milnor e Tjurina

O número de Milnor, por sua vez, foi formalmente introduzido por John Willard Milnor em [26]. No estudo de singularidades isoladas de funções analíticas complexas $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, Milnor demonstrou que o número de Milnor $\mu(f)$ pode ser interpretado topologicamente, como o número de ciclos na fibra de Milnor que colapsam quando a singularidade é removida. Além disso, Milnor também caracteriza sua definição topológica de um ponto de vista algébrico, como a dimensão do espaço vetorial quociente do anel de germes pelo ideal Jacobiano da função f que define a hipersuperfície. Mais precisamente:

Definição 1.4.3. Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de hipersuperfície definido por $f = 0$, com uma singularidade isolada em 0. O **número de Milnor** de $(V, 0)$, denotado por $\mu_0(V)$, é definido

por

$$\mu_0(V) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1,0}}{J(f)},$$

onde $\mathcal{O}_{n+1,0}$ é o anel de germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ e

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right\rangle$$

é o *ideal Jacobiano* de f . Este número mede a complexidade topológica da singularidade e é sempre $\mu_0(V) \geq 1$, com igualdade apenas quando a singularidade é não degenerada.

Um resultado muito conhecido na literatura é que o número de Milnor e o índice de Poincaré-Hopf de um germe coincidem (Ver por exemplo [21]).

Em contrapartida, o número de Tjurina remonta aos trabalhos de Galina Nikolaevna Tjurina [27] que estudou deformações de singularidades e introduziu o conceito que hoje leva seu nome para medir a dimensão do espaço base da deformação miniversal de uma singularidade isolada. O nome *número de Tjurina* foi cunhado posteriormente por G.-M. Greuel [28], em sua homenagem.

Definição 1.4.4. Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de hipersuperfície definido por $f = 0$, com uma singularidade isolada em 0. O **número de Tjurina** (também chamado de **Greuel–Tjurina**) de $(V, 0)$, denotado por $\tau_0(V)$, é definido por

$$\tau_0(V) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1,0}}{\langle f, J(f) \rangle}.$$

onde $\mathcal{O}_{n+1,0}$ é o anel de germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ e

$$\langle f, J(f) \rangle = \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right\rangle.$$

1.4.3 O Índice GSV

Tratando agora do índice GSV (Gómez-Mont–Seade–Verjovsky), este foi introduzido por X. Gómez-Mont, J. Seade e A. Verjovsky [15] em 1991 com o objetivo de generalizar o índice de Poincaré-Hopf para campos de vetores definidos sobre hipersuperfícies com singularidades isoladas. Este índice generaliza o conceito clássico, sendo definido como o índice de Poincaré-Hopf de uma extensão contínua do campo a uma fibra de Milnor local da hipersuperfície.

Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de hipersuperfície com singularidade isolada, e seja v um campo de vetores holomorfo sobre V com uma singularidade isolada em 0. O **índice GSV** (Gómez-Mont–Seade–Verjovsky) de v em $(V, 0)$, denotado por $GSV_0(v, V)$, é definido como o índice de Poincaré-Hopf de uma extensão contínua de v a uma fibra de Milnor local de V . Equivalentemente, se $\tilde{v}$ é uma extensão holomorfa de v a uma vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^{n+1}$, então o

índice GSV pode ser calculado algebricamente por fórmulas que dependem da paridade de n . Para n ímpar, tem-se

$$GSV_0(v, V) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1,0}}{\langle f, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n+1} \rangle} - \tau_0(V),$$

enquanto que para n par,

$$GSV_0(v, V) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1,0}}{\langle \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n+1} \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1,0}}{\left\langle \frac{df}{f}(\tilde{v}), \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n+1} \right\rangle} + \tau_0(V).$$

Dada uma folheação unidimensional $\mathcal{F}$ em X , com singularidades isoladas tal que $\mathcal{F}$ deixa D invariante, seja v um campo de vetores holomorfo definindo $\mathcal{F}$ em uma vizinhança U de p_0 em X . O valor $GSV_{p_0}(v, D)$ não depende da escolha de tal campo de vetores v , representante local da folheação $\mathcal{F}$ em p (ver [18], Capítulo IV, Corolário 7.15). O índice GSV de $\mathcal{F}$ em p_0 ao longo de D , denotado por $GSV_{p_0}(\mathcal{F}, D)$, é definido como $GSV_{p_0}(v, D)$. Além disso, neste caso, por [18], Capítulo IV, Teorema 7.16, temos

$$\int_D c_{n-1}(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D),$$

onde $S(\mathcal{F}, D) = (\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D) \cup \text{Sing}(D)$.

1.4.4 O Índice de Schwartz

Por fim, o índice de Schwartz, também conhecido como índice radial, foi introduzido por Marie-Hélène Schwartz [29], [30] para uma classe especial de campos de vetores, dando origem a uma extensa teoria de índices em variedades singulares. Este índice foi posteriormente generalizado por diversos autores e desempenha um papel importante na teoria de campos de vetores em singularidades. O índice de Schwartz é definido por [18] da seguinte forma:

Seja V uma variedade analítica complexa de dimensão n imersa em uma variedade complexa W de dimensão $n + k$, e seja $p \in V$ um ponto singular isolado de V . Denote por V' a parte regular de V e suponha que v é um campo de vetores C^∞ sobre V' , não singular em $V' \setminus \{p\}$. O **índice de Schwartz** de v em p , denotado por $Sch(v, p)$, é definido da seguinte maneira:

Existe um campo de vetores C^∞ $\tilde{v}_0$ em uma vizinhança $\tilde{U}$ de p em W , não singular em $\tilde{U} \setminus \{p\}$ e tangente a V' . Seja v_0 o campo de vetores induzido sobre $\tilde{U} \cap V'$. Este campo v_0 é transversal ao link $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ de V em p , apontando para fora. Com isso, define-se

$$Sch(v, p) := 1 + d(v_0, v),$$

onde $d(v_0, v)$ é a *diferença* entre os campos v_0 e v no ponto p . A definição não depende da escolha do campo $\tilde{v}_0$ e tem-se $Sch(v_0, p) = 1$.

Se $p \in V'$, então o índice de Schwartz coincide com o índice de Poincaré–Hopf:

$$Sch(v, p) = PH(v, p).$$

Além disso, para dois campos v_1 e v_2 nas mesmas condições, vale

$$Sch(v_2, p) = Sch(v_1, p) + d(v_1, v_2).$$

O índice de Schwartz generaliza o teorema de Poincaré–Hopf para variedades compactas com singularidades isoladas: se V é compacta com singularidades isoladas $p_1, \dots, p_s$ e v é um campo C^∞ sobre V' com singularidades isoladas $p_{s+1}, \dots, p_r$, então

$$\sum_{i=1}^r Sch(v, p_i) = \chi(V),$$

onde $\chi(V)$ denota a característica de Euler–Poincaré de V .

Para um ponto $p \in V$ com singularidade isolada e um campo v não singular em $V' \setminus \{p\}$, o índice de Schwartz se relaciona com o índice GSV e com o número de Milnor $\mu(V, p)$ pela fórmula

$$Sch(v, p) = GSV(v, p) + (-1)^{n+1} \mu(V, p).$$

2 Resultados Principais

Neste capítulo, apresentamos os resultados centrais da dissertação, que seguem do trabalho de Machado [1]. Inicialmente, demonstramos o Teorema A, que estabelece uma fórmula do tipo Baum-Bott para variedades da forma $\tilde{X} = X - D$, onde D é uma hipersuperfície com singularidades isoladas, removendo assim a hipótese de cruzamento normal presente em trabalhos anteriores. Em seguida, provamos o Teorema B, que fornece uma condição suficiente para a solução do problema de Poincaré em dimensões pares, em termos da não negatividade da soma total dos índices GSV. Na sequência, estabelecemos o Teorema C, que caracteriza a desigualdade de Soares [17] em termos dos índices GSV e de Schwartz. Finalmente, apresentamos algumas aplicações adicionais dos resultados obtidos, incluindo relações entre os conjuntos singulares da folheação e da hipersuperfície invariante, bem como uma fórmula para a soma total dos índices GSV em termos do grau da hipersuperfície.

2.1 Teorema A

Nesta seção, demonstramos o Teorema A, que é o resultado central da dissertação. Iniciamos com o cálculo da classe de Chern $c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}})$ utilizando as propriedades do fibrado virtual, mostrando que

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \int_X c_n(TX - T_{\mathcal{F}}) - \int_D c_{n-1}(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}).$$

Em seguida, aplicamos o teorema de Baum-Bott clássico e a fórmula que relaciona a integral sobre D com a soma dos índices GSV, obtendo a expressão final do Teorema A. Discutimos também os casos particulares em que as singularidades da folheação são não degeneradas, onde o índice logarítmico se anula, simplificando a fórmula.

Teorema 2.1.1 (Teorema A). *Sejam $\tilde{X}$ uma variedade complexa tal que $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade complexa e compacta de dimensão n e $D \subset X$ é uma hipersuperfície com singularidades isoladas. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação unidimensional em X , com singularidades isoladas tal que D é invariante por $\mathcal{F}$. Então*

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (X - D_{\text{reg}})} \mu_p(\mathcal{F}) + \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D_{\text{reg}}} \mathbb{L}_p(\mathcal{F}, D) - \sum_{p \in \text{Sing}(D)} \text{GSV}_p(\mathcal{F}, D) \quad (2.1)$$

onde $\text{GSV}_p(\mathcal{F}, D)$ denota o índice GSV de $\mathcal{F}$ em p ao longo de D . Em particular, se as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas, então

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (X - D_{\text{reg}})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in \text{Sing}(D)} \text{GSV}_p(\mathcal{F}, D) \quad (2.2)$$

Demonstração. Vamos calcular a Classe Top de Chern do fibrado $TX - [D] - T_{\mathcal{F}}$, utilizando as propriedades da classe de Chern do fibrado virtual (expressão 1.14). Primeiramente, consideremos

$$E = TX - [D] \text{ e } L = T_{\mathcal{F}}$$

Daí

$$\begin{aligned} c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) &= c_n(E - L) \\ &= \sum_{j=0}^n c_{n-j}(E) c_1(L^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^n c_{n-j}(TX - [D]) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \end{aligned} \quad (2.3)$$

Agora, considerando

$$E = TX \text{ e } L = [D]$$

e usando novamente a propriedade das classes de Chern do fibrado virtual, obtemos

$$c_n(E - L) = c_n(TX - [D]) = \sum_{i=0}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i \quad (2.4)$$

Combinando 2.3 e 2.4, obtemos

$$c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i \right) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \quad (2.5)$$

Desenvolvendo o somatório em 2.4 para $i = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) &= \sum_{j=0}^n \left(c_{n-j}(TX) c_1([D]^*)^0 + \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i \right) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^n \left(c_{n-j}(TX) \cdot 1 + \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i \right) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^n \left(c_{n-j}(TX) + \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i \right) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^n c_{n-j}(TX) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j + \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} \int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) &= \int_X \sum_{j=0}^n c_{n-j}(TX) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j + \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \\ &= \int_X \sum_{j=0}^n c_{n-j}(TX) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j + \int_X \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vamos analisar separadamente a segunda integral. Note que podemos reescrever o integrando da seguinte maneira:

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1([D]^*)^1 c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j$$

Como $c_1([D]^*)$ não depende de i nem j , podemos escrever:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1([D]^*)^1 c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \\ &= c_1([D]^*) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \end{aligned}$$

Pela propriedade do fibrado dual vista em 1.11, $c_1([D]^*) = -c_1([D])$. Daí

$$\begin{aligned} & c_1([D]^*) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \\ &= -c_1([D]) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \end{aligned}$$

Logo

$$\int_X \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j = \int_X -c_1([D]) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j$$

Pela Dualidade de Poincaré (ver [21], Capítulo 3, Teorema 3.3.6)

$$\begin{aligned} & \int_X -c_1([D]) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \\ &= - \int_D \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como calculado anteriormente, a $n-j$ classe de Chern do fibrado virtual $TX - [D]$ é dada por

$$c_{n-j}(TX - [D]) = \sum_{i=0}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i$$

Para $n-1$, temos

$$c_{(n-1)-j}(TX - [D]) = \sum_{i=0}^{(n-1)-j} c_{(n-1)-j-i}(TX) c_1([D]^*)^i$$

Ajustando o somatório, temos

$$\begin{aligned} c_{n-1-j}(TX - [D]) &= \sum_{i=1}^{n-1-j+1} c_{n-1-j-(i-1)}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} \end{aligned}$$

Usando a igualdade acima em 2.7, obtemos

$$-\int_D \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} c_{n-j-i}(TX) c_1([D]^*)^{i-1} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j = -\int_D \sum_{j=0}^{n-1} c_{n-1-j}(TX - [D]) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \quad (2.8)$$

Como também vimos, a n -ésima classe de Chern do fibrado $TX - [D] - T_{\mathcal{F}}$ é dada pela expressão

$$c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^n c_{n-j}(TX - [D]) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j$$

Para $n - 1$, temos

$$c_{n-1}(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{(n-1)-j}(TX - [D]) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \quad (2.9)$$

Assim, usando 2.9 em 2.8, obtemos

$$-\int_D \sum_{j=0}^{n-1} c_{n-1-j}(TX - [D]) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j = -\int_D c_{n-1}(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) \quad (2.10)$$

Além disso, pela propriedade da classe de Chern do fibrado virtual, obtemos

$$c_n(TX - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^n c_{n-j}(TX) c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \quad (2.11)$$

Logo, a expressão 2.6 pode ser escrita como

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \int_X c_n(TX - T_{\mathcal{F}}) - \int_D c_{n-1}(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) \quad (2.12)$$

Como visto anteriormente, o índice GSV em de $\mathcal{F}$ em $p \in S(\mathcal{F}, D)$ ao longo de D é dado por

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \int_D c_{n-1}(TX - [D] - T_{\mathcal{F}})$$

onde $S(\mathcal{F}, D) = (Sing(\mathcal{F}) \cap D) \cup Sing(D)$. Por outro lado, pelo Teorema de Baum-Bott

$$\int_X c_n(TX - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F})$$

Portanto

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \quad (2.13)$$

Note que podemos escrever o conjunto de todas as singularidades da folheação $\mathcal{F}$ sobre D da seguinte maneira:

$$S(\mathcal{F}, D) = Sing(\mathcal{F}) \cap D$$

Mas, podemos escrever D como $D = D_{reg} \dot{\cup} Sing(D)$. Assim

$$\begin{aligned} S(\mathcal{F}, D) &= [Sing(\mathcal{F}) \cap [D_{reg}] \dot{\cup} Sing(D)] \\ &= [Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}] \dot{\cup} [Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(D)] \\ &= [Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}] \dot{\cup} Sing(D) \end{aligned}$$

Também podemos escrever o conjunto das singularidades da folheação $\mathcal{F}$ da seguinte maneira:

$$Sing(\mathcal{F}) = [Sing(\mathcal{F}) - D_{reg}] \dot{\cup} [Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}]$$

Daí, usando ambas as relações de $S(\mathcal{F}, D)$ e $Sing(\mathcal{F})$ determinadas acima, podemos reescrever 2.13 como

$$\begin{aligned} \int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) &= \sum_{p \in [Sing(\mathcal{F}) - D_{reg}]} \mu_p(\mathcal{F}) + \sum_{p \in [Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}]} \mu_p(\mathcal{F}) \\ &\quad - \left[\sum_{p \in [Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}]} GSV_p(\mathcal{F}, D) + \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \right] \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) &= \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X - D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) + \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} \mu_p(\mathcal{F}) \\ &\quad - \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} GSV_p(\mathcal{F}, D) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \end{aligned}$$

Como mostrado por Aleksandrov, o índice logarítmico é dado por

$$\mathbb{L}_p(\mathcal{F}, D) = \mu_p(\mathcal{F}) - GSV_p(\mathcal{F}, D)$$

Portanto

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X - D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) + \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} \mathbb{L}_p(\mathcal{F}, D) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D). \quad (2.14)$$

Em particular, se as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas, então

$$\sum_{p \in [Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}]} \mathbb{L}_p(\mathcal{F}, D) = 0$$

Já que o índice GSV e número de Milnor coincidem em $p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}$ Ou seja

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X - D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D). \quad (2.15)$$

□

2.2 Teorema B

Nesta seção, aplicamos o Teorema A ao estudo do problema de Poincaré para folheações unidimensionais no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$. Apresentamos inicialmente alguns lemas auxiliares, que estabelecem expressões para a integral

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}})$$

em termos dos graus de D e de $\mathcal{F}$, bem como propriedades de sinal de uma certa função $f(k, d, n)$. Em seguida, demonstramos o Teorema B, que afirma que, em dimensão par, a não negatividade da soma total dos índices GSV sobre a hipersuperfície invariante D é condição suficiente para garantir a desigualdade $\deg(D) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2$. Apresentamos também um corolário que fornece uma condição simples, em termos da multiplicidade dos pontos singulares de D e da positividade do índice de Schwartz, que implica a mesma desigualdade.

Lema 2.2.1. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação unidimensional em $\mathbb{P}^n$ com $\deg(\mathcal{F}) = d$ e $D \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau $\deg(D) = k$ com singularidades isoladas tal que D é invariante por $\mathcal{F}$. Então*

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i \quad (2.16)$$

Demonstração. Usando a relação 2.5 encontrada da prova do Teorema A para o caso em que $X = \mathbb{P}^n$, temos,

$$c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} c_{n-j-i}(T\mathbb{P}^n) c_1([D]^*)^i c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j$$

Note que se analisarmos o que ocorre quando $j = n$, temos que $i = 0$ e

$$c_{n-n-0}(T\mathbb{P}^n) c_1([D]^*)^0 c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^n = c_0(T\mathbb{P}^n) \cdot 1 \cdot c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^n = 1 \cdot 1 \cdot c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^n = c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^n$$

Dessa forma, podemos escrever,

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \int_{\mathbb{P}^n} c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} c_{n-j-i}(T\mathbb{P}^n) c_1([D]^*)^i c_1(T_{\mathcal{F}}^*)^j \quad (2.17)$$

Vamos escrever $c_1(T_{\mathcal{F}}^*)$ e $c_1([D]^*)$ em termos do fibrado tautológico $\mathcal{O}(1)$. Por hipótese temos que $\deg(\mathcal{F}) = d$ e $\deg(D) = k$. Daí,

$$T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(1 - d) \text{ e } [D] = \mathcal{O}(k)$$

pois $1 - d = r$. Logo,

$$\begin{aligned} c_1(T_{\mathcal{F}}^*) &= c_1(\mathcal{O}^*(1 - d)) \\ &= c_1(\mathcal{O}(-(1 - d))) \\ &= c_1(\mathcal{O}(d - 1)) \end{aligned}$$

Uma vez que, dados $E_1, \dots, E_n$ fibrados de posto 1, temos que,

$$c_1(E_1 \otimes \dots \otimes E_n) = c_1(E_1) + \dots + c_1(E_n)$$

e, por definição,

$$\mathcal{O}(d-1) = \underbrace{\mathcal{O}(1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(1)}_{d-1 \text{ vezes}}$$

então,

$$c_1(\mathcal{O}(d-1)) = \underbrace{c_1(\mathcal{O}(1)) + \dots + c_1(\mathcal{O}(1))}_{d-1 \text{ vezes}} = (d-1)c_1(\mathcal{O}(1))$$

Logo $c_1(T_{\mathcal{F}}^*) = (d-1)c_1(\mathcal{O}(1))$ Temos também que,

$$\begin{aligned} [D] = \mathcal{O}(k) &\implies [D]^* = \mathcal{O}(k)^* \\ &= \mathcal{O}(-k) \\ &= \underbrace{\mathcal{O}(-1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(-1)}_{k \text{ vezes}} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} c_1([D]^*) &= c_1(\mathcal{O}(-1)^{\otimes k}) \\ &= k \cdot c_1(\mathcal{O}(-1)) \\ &= kc_1(\mathcal{O}(1)^*) \\ &= k \cdot (-1)c_1(\mathcal{O}(1)) \\ &= -kc_1(\mathcal{O}(1)) \end{aligned}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) \\ &= \int_{\mathbb{P}^n} [(d-1)c_1(\mathcal{O}(1))]^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} c_{n-j-i}(T\mathbb{P}^n) [-kc_1(\mathcal{O}(1))]^i [(d-1)c_1(\mathcal{O}(1))]^j \\ &= \int_{\mathbb{P}^n} (d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} c_{n-j-i}(T\mathbb{P}^n) (-k)^i c_1(\mathcal{O}(1))^i (d-1)^j c_1(\mathcal{O}(1))^j \end{aligned}$$

Além disso,

$$c_i(T\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{i} h^i, \text{ onde } h = c_1(\mathcal{O}(1)) \text{ (ver [21])}.$$

Assim,

$$c_{n-j-i}(T\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{n-j-i} c_1(\mathcal{O}(1))^{n-j-i}$$

Podemos então escrever,

$$\int_{\mathbb{P}^n} (d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} c_1(\mathcal{O}(1))^{n-j-i} (-k)^i c_1(\mathcal{O}(1))^i (d-1)^j c_1(\mathcal{O}(1))^j$$

Agrupando os termos $c_1(\mathcal{O}(1))$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{P}^n} (d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} c_1(\mathcal{O}(1))^{n-j-i+i+j} (-k)^i (d-1)^j \\ &= \int_{\mathbb{P}^n} (d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} c_1(\mathcal{O}(1))^n (-k)^i (d-1)^j \end{aligned}$$

Observe que o termo $(d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n$ fora dos somatórios é justamente o resultado de fazer $j = n$ no somatório, pois se $j = n$ então $i = 0$ e assim,

$$\binom{n+1}{n-n-0} (-k)^0 (d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n = \binom{n+1}{0} (d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n = (d-1)^n c_1(\mathcal{O}(1))^n$$

Dessa forma, podemos reescrever o somatório agora considerando a variação de j sendo de 0 à n da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) &= \int_{\mathbb{P}^n} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} c_1(\mathcal{O}(1))^n (-k)^i (d-1)^j \\ &= \int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}(1))^n \left(\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j \int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}(1))^n \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j \end{aligned}$$

pois

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_1(\mathcal{O}(1))^n = 1. \text{ (ver [20])}$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j. \quad (2.18)$$

□

Soares [31] provou que existe uma relação entre o somatório dos números de Milnor de uma folheação projetiva e seu grau:

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação unidimensional holomorfa em $\mathbb{P}^n$ com singularidades isoladas e $\deg(\mathcal{F}) \geq 0$. Então

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) = d^n + d^{n-1} + \cdots + d + 1. \quad (2.19)$$

Outro resultado importante, demonstrado por Corrêa e Machado em [12], nos dá informações sobre o sinal da expressão 2.16:

Lema 2.2.2. *Sejam $k, d, n \in \mathbb{N}$, com $k \geq 1, d \geq 0$ e $n \geq 2$. Considere a expressão*

$$f(k, d, n) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j.$$

Então $f(k, d, n)$ satisfaz as seguintes condições:

(1) Se n é ímpar, então

(a) $f(k, d, n) > 0 \iff k < d + 1$

(b) $f(k, d, n) = 0 \iff k = d + 1$

(c) $f(k, d, n) < 0 \iff k > d + 1$

(2) Se n é par, então $f(k, d, n) \geq 0$ e além disso:

(a)

$$f(k, d, n) > 0 \iff \begin{cases} k \neq d + 1 \\ \text{ou} \\ k = d + 1, \text{ com } d \neq 0 \end{cases};$$

(b) $f(k, d, n) = 0 \iff k = 1 \text{ e } d = 0.$

(3) $f(k, d, n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (k-1)^i d^{n-i}.$

Lema 2.2.3. *Seja $f(k, d, n) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j$, com $k, d, n \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1, d \geq 0$ e $n \geq 2$. Se n é par e $k > d + 2$, então*

$$f(k, d, n) > d^n + d^{n-1} + \dots + d + 1. \quad (2.20)$$

Demonstração. Suponha $n = 2l, l \in \mathbb{N}$. Vamos provar o lema usando indução finita sobre l . No caso em que $l = 1$, temos $n = 2$. Logo, n é par e assim podemos usar o item (c) do Lema 2.2.2. Assim

$$\begin{aligned} f(k, d, 2) &= \sum_{i=0}^2 (-1)^i (k-1)^i d^{2-i} \\ &= (-1)^0 (k-1)^0 d^2 + (-1)^1 (k-1)^1 d + (-1)^2 (k-1)^2 d^0 \\ &= d^2 - kd + d + k^2 - 2k + 1 \\ &= d^2 + d + 1 + k^2 - kd - 2k \\ &= d^2 + d + 1 + k^2 + (-d - 2) \end{aligned}$$

Vamos verificar se $f(k, d, 2) > d^2 + d + 1$. Note que

$$f(k, d, 2) = d^2 + d + 1 + k^2 + (-d - 2) > d^2 + d + 1 \iff k^2 + (-d - 2)k > 0$$

Mas $k > d + 2$ por hipótese, ou seja

$$k - d - 2 > 0 \iff k(k - d - 2) > 0 \iff k^2 + (-d - 2)k > 0.$$

Portanto $f(k, d, 2) > d^2 + d + 1$, verificando portanto o primeiro passo da indução. No caso em que $l = N > 1$, vamos mostrar que

$$f(k, d, 2N) - (d^{2N} + d^{2N-1} + \dots + d + 1) > 0. \quad (2.21)$$

Usando novamente o item (c) do Lema anterior, temos que

$$f(k, d, 2N) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i (k-1)^i d^{2N-i}$$

Além disso, reescrevendo usando notação de somatório

$$d^{2N} + d^{2N-1} + \dots + d + 1 = \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i}$$

Ou equivalentemente

$$d^{2N} + d^{2N-1} + \dots + d + 1 = \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i}$$

Dessa forma, podemos reescrever a expressão 2.21 como

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i (k-1)^i d^{2N-i} - \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i} &= \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i (k-1)^i d^{2N-i} - d^{2N-i} \\ &= \sum_{i=0}^{2N} [-1 + (-1)^i (k-1)^i] d^{2N-i} \end{aligned}$$

Decompondo o somatório

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2N} [-1 + (-1)^i (k-1)^i] d^{2N-i} \\ &= \sum_{i=0}^{2N-2} [-1 + (-1)^i (k-1)^i] d^{2N-i} + \sum_{i=2N-1}^{2N} [-1 + (-1)^i (k-1)^i] d^{2N-i} \end{aligned}$$

Observe que podemos escrever o primeiro somatório do lado direito da igualdade da seguinte maneira

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2N-2} -d^{2N-i} + \sum_{i=0}^{2N-2} (-1)^i (k-1)^i d^{2N-i} \\ &= - \sum_{i=0}^{2N-2} d^2 \cdot d^{2N-2-i} + \sum_{i=0}^{2N-2} (-1)^i (k-1)^i d^2 \cdot d^{2N-2-i} \\ &= -d^2 \sum_{i=0}^{2(N-1)} d^{2(N-1)-i} + d^2 \sum_{i=0}^{2(N-1)} (-1)^i (k-1)^i d^{2(N-1)-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d^2 \left(\sum_{i=0}^{2(N-1)} (-1)^i (k-1)^i d^{2(N-1)-i} - \sum_{i=0}^{2(N-1)} d^{2(N-1)-i} \right) \\
&= d^2 [f(k, d, 2(N-1)) - (d^{2(N-1)} + d^{2(N-1)-1} + \dots + d + 1)]
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever o lado esquerdo de 2.21 como

$$\begin{aligned}
&f(k, d, 2N) - \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i} \\
&= d^2 \left[f(k, d, 2(N-1)) - \sum_{i=0}^{2(N-1)} d^{2(N-1)-i} \right] + \sum_{i=2N-1}^{2N} [-1 + (-1)^i (k-1)^i] d^{2N-i} \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Suponha que o Lema seja válido para $l = N - 1$, com $n = 2l$, ou seja

$$f(k, d, 2(N-1)) - \sum_{i=0}^{2(N-1)} d^{2(N-1)-i} > 0.$$

Fazendo

$$R = f(k, d, 2(N-1)) - \sum_{i=0}^{2(N-1)} d^{2(N-1)-i}$$

Temos que $R > 0$ e assim $R \geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
&f(k, d, 2N) - \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i} = d^2 R + \sum_{i=2N-1}^{2N} [-1 + (-1)^i (k-1)^i] d^{2N-i} \\
&\geq d^2 + \sum_{i=2N-1}^{2N} [-1 + (-1)^i (k-1)^i] d^{2N-i} \\
&= d^2 + [-1 + (-1)^{2N-1} (k-1)^{2N-1}] d^{2N-(2N-1)} + [-1 + (-1)^{2N} (k-1)^{2N}] d^{2N-2N} \\
&= d^2 - d + (-1)d(k-1)^{2N-1} - 1 + (k-1)^{2N} \\
&= d^2 - (d+1) - d(k-1)^{2N-1} + (k-1)^{2N} \\
&\implies f(k, d, 2N) - \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i} \geq d^2 - (d+1) - d(k-1)^{2N-1} + (k-1)^{2N}
\end{aligned}$$

Mostremos que $\delta = -(d+1) - d(k-1)^{2N-1} + (k-1)^{2N} > 0$. Por hipótese

$$k > d+2 \implies k-1 > d+1 \implies (k-1)^{2N-1} > (d+1)^{2N-1} \quad (2.23)$$

Note também que

$$\begin{aligned}
-d(k-1)^{2N-1} + (k-1)^{2N} &= -d(k-1)^{2N-1} + (k-1)(k-1)^{2N-1} \\
&= (k-1)^{2N-1}(-d+k-1)
\end{aligned}$$

Mas por hipótese, $k > d+2$, ou seja $-d+k-1 > 1$. Logo

$$(k-1)^{2N-1}(-d+k-1) > (k-1)^{2N-1}$$

Assim

$$-d(k-1)^{2N-1} + (k-1)^{2N} > (k-1)^{2N-1} > (d+1)^{2N-1}$$

Em particular

$$-d(k-1)^{2N-1} + (k-1)^{2N} > d+1 \implies -d(k-1)^{2N-1} + (k-1)^{2N} - (d+1) > 0$$

Logo

$$f(k, d, 2N) - \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i} \geq d^2 - \delta$$

Mas $d^2 \geq 0$ e $\delta > 0$, portanto

$$f(k, d, 2N) - \sum_{i=0}^{2N} d^{2N-i} > 0$$

O que completa a indução e o Lema. □

Teorema 2.2.1 (Teorema B). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação unidimensional em $\mathbb{P}^n$ com singularidades isoladas e seja $D \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície com singularidades isoladas tal que D é invariante por $\mathcal{F}$. Assuma que n é par e que*

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 0, \quad (2.24)$$

onde $S(\mathcal{F}, D) = \text{Sing}(\mathcal{F} \cap D) \cup \text{Sing}(D)$. Então

$$\deg(D) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2. \quad (2.25)$$

Demonstração. Seja $\deg(D) = k$ e $\deg(\mathcal{F}) = d$. Queremos provar que

$$k \leq d + 2.$$

Suponha por contradição que $k > d + 2$. Daí, pelos Lemas, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j \\ &= f(k, d, n) \\ &> d^n + d^{n-1} + \dots + d + 1. \end{aligned}$$

Como vimos na prova do Teorema A, sendo X uma variedade complexa e compacta, então

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D).$$

Logo

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) > d^n + d^{n-1} + \dots + d + 1.$$

Uma vez que $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão 1 em $\mathbb{P}^n$, com singularidades isoladas e $\deg(\mathcal{F}) \geq 0$, então,

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) = d^n + d^{n-1} + \dots + d + 1$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \\ &= d^n + d^{n-1} + \dots + d + 1 - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) > d^n + d^{n-1} + \dots + d + 1 \\ &\implies - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) > 0 \implies \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) < 0. \end{aligned}$$

O que contradiz a hipótese da não negatividade do índice GSV. Portanto

$$\deg(D) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2.$$

□

Corolário 2.2.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação unidimensional em $\mathbb{P}^n$ com singularidades isoladas e seja $D \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície com singularidades isoladas tal que D é invariante por $\mathcal{F}$. Suponha que n seja par. Se cada singularidade da hipersuperfície D tem multiplicidade 1 e o índice de Schwartz é positivo em todo ponto da folheação, então:*

$$\deg(D) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2.$$

Demonstração. Por [18], Capítulo IV, Proposição 1.9, para todo $p \in \text{Sing}(D)$, temos que

$$\text{Sch}(\mathcal{F}, p) = GSV_p(\mathcal{F}, D) + (-1)^{n+1}$$

onde n é a dimensão de D sobre uma variedade M de dimensão $n + k$. No nosso caso, $\dim(M) = \dim(\mathbb{P}^n) = n$ e assim $\dim(D) = n - 1$, já que D é hipersuperfície. Logo, temos

$$\begin{aligned} \text{Sch}(\mathcal{F}, p) &= GSV_p(\mathcal{F}, D) + (-1)^{(n-1)+1} \mu_p(D) \\ \implies \text{Sch}(\mathcal{F}, p) &= GSV_p(\mathcal{F}, D) + (-1)^n \mu_p(D) \end{aligned}$$

Como n é par, então

$$\text{Sch}(\mathcal{F}, p) = GSV_p(\mathcal{F}, D) + \mu_p(D)$$

Logo

$$GSV_p(\mathcal{F}, D) = \text{Sch}(\mathcal{F}, p) - \mu_p(D).$$

Por hipótese, $\text{Sch}(\mathcal{F}, p) > 0$. Mas $\text{Sch}(\mathcal{F}, p)$ é um número inteiro, logo $\text{Sch}(\mathcal{F}, p) \geq 1$. Dessa forma

$$GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 1 - \mu_p(D).$$

Também por hipótese, cada $p \in \text{Sing}(D)$ tem multiplicidade 1, ou seja

$$\mu_p(D) = 1, \text{ com } p \in \text{Sing}(D).$$

Daí, em $p \in \text{Sing}(D)$ $GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 1 - 1 \implies GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 0$. Ou seja

$$\sum_{p \in \text{Sing}(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 0.$$

Considere o conjunto

$$S(\mathcal{F}, D) = (\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D_{\text{reg}}) \cup \text{Sing}(D).$$

Daí

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D_{\text{reg}}} GSV_p(\mathcal{F}, D) + \sum_{p \in \text{Sing}(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D). \quad (2.26)$$

Assim, como o índice GSV da folheação coincide com o número de Milnor da folheação nos pontos regulares de D , temos que

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D_{\text{reg}}} GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 1$$

e portanto

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 0.$$

Logo, pelo Teorema B

$$\deg(D) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2.$$

□

Observe que na demonstração acima não podemos afirmar

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \geq 1$$

pois caso $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D_{\text{reg}} = \emptyset$, então o primeiro somatório do lado direito de 2.26 desaparece, restando apenas o somatório que é não negativo.

2.3 Teorema C

Nesta seção, estabelecemos uma caracterização completa, em termos dos índices GSV e de Schwartz, da desigualdade de Soares [17] para o problema de Poincaré.

Teorema 2.3.1 (Teorema C). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um em $\mathbb{P}^n$, com singularidades isoladas e grau $\deg(\mathcal{F}) = d$. Seja $D \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau $\deg(D) = k$ com*

singularidades isoladas e tal que $\mathcal{F}$ deixa D invariante. Seja $Sch_p(\mathcal{F}, D)$ o índice de Schwartz de $\mathcal{F}$ no ponto p e considere

$$S(\mathcal{F}, D) = (\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap D) \cup \text{Sing}(D).$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} + (-1)^{n+1} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (\mu_p(D) + (-1)^{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} d^{n-i}.$
- (ii) $\sum_{p \in \text{Sing}(D)} (1 - (-1)^n \mu_p(D)) \leq \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D).$
- (iii) $|\text{Sing}(D)| \leq \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} Sch_p(\mathcal{F}, D).$

Em particular, se $Sch(\mathcal{F}, p) > 0$ para cada $p \in \text{Sing}(D)$, então a desigualdade (i) é satisfeita.

Demonstração. Pelo Teorema A

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D)$$

Nas hipóteses do Teorema C, temos

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \quad (2.27)$$

Sabemos que, em $\mathbb{P}^n$

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) = \sum_{j=0}^n d^j$$

e pelo Lema 2.2.1

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j$$

Usando esses fatos em 2.27, temos

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \sum_{j=0}^n d^j - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j$$

Pelo Lema 2.2.2, temos

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i (k-1)^i d^{n-d} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-j} \binom{n+1}{n-j-i} (-k)^i (d-1)^j$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^n d^j - \sum_{i=0}^n (-1)^i (k-1)^i d^{n-d} &= \sum_{j=0}^n d^j - \sum_{i=0}^n (1-k)^i d^{n-d} \\
 &= \sum_{i=0}^n d^{n-i} \\
 &= \sum_{j=0}^n [1 - (1-k)^i] d^{n-i}
 \end{aligned}$$

Usando a expansão do binômio de Newton em $(1-k)^i$, temos

$$\begin{aligned}
 1 - (1-k)^i &= 1 - \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-k)^{i-j} \\
 &= 1 - \binom{i}{i} (-k)^{i-i} - \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-k)^{i-j} \\
 &= 1 - 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-k)^{i-j} \\
 &= - \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-k)^{i-j}
 \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
 1 - (1-k)^i &= - \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \cdot k^{i-j} \\
 &= \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j}
 \end{aligned}$$

Dáí

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n [1 - (1-k)^i] d^{n-i} &= \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} \right] d^{n-i} \\
 &= d^{n-n} \sum_{i=0}^{i-1} \binom{n}{j} (-1)^{n-j+1} k^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{i=j}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} \right] d^{n-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{i-1} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (-1) k^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{i=j}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} \right] d^{n-i} \\
 &= - \sum_{i=0}^{i-1} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} k^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{i=j}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} \right] d^{n-i}
 \end{aligned}$$

Então

$$\sum_{i=0}^n [1 - (1-k)^i] d^{n-i} = - \sum_{i=0}^{i-1} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} \right] d^{n-i}$$

Logo, podemos escrever

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} d^{n-i} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} \quad (2.28)$$

Mostremos agora as equivalências:

(i) $\iff$ (ii) : Por 2.28, temos

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (1 - (-1)^n \mu_p(D)) &\leq \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \\ \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (1 - (-1)^n \mu_p(D)) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} d^{n-i} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} \end{aligned}$$

Porém, note que

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (\mu_p(D) + (-1)^{n+1}) &= \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (-1)^{n+1} (\mu_p(D) + (-1)^{n+1}) \\ &= \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (-1)^{n+1} \mu_p(D) + (-1)^{n+1+n+1} \\ &\quad \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (-1)(-1)^n \mu_p(D) + (-1)^{2n+2} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (\mu_p(D) + (-1)^{n+1}) &= \sum_{p \in \text{Sing}(D)} -(-1)^n \mu_p(D) + (-1)^{2n} \cdot (-1)^2 \\ &= \sum_{p \in \text{Sing}(D)} -(-1)^n \mu_p(D) + 1 \\ &= \sum_{p \in \text{Sing}(D)} 1 - (-1)^n \mu_p(D). \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$(-1)^{n+1} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (\mu_p(D) + (-1)^{n+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} d^{n-i} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-k)^{n-j}$$

Ou seja

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} + (-1)^{n+1} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} (\mu_p(D) + (-1)^{n+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j+1} k^{i-j} d^{n-i}$$

(i) $\iff$ (ii) : Pela definição do Índice de Schwartz, temos

$$Sch(\mathcal{F}, p) = GSV_p(\mathcal{F}, D) + (-1)^n \mu_p(D) \implies (-1)^n \mu_p(D) = Sch(\mathcal{F}, p) - GSV_p(\mathcal{F}, D)$$

Logo

$$-(-1)^n \mu_p(D) = GSV_p(\mathcal{F}, D) - Sch(\mathcal{F}, p)$$

Daí

$$\begin{aligned} \sum_{p \in Sing(D)} 1 - (-1)^n \mu_p(D) &= \sum_{p \in Sing(D)} 1 + \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) - \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \\ &= |Sing(D)| + \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) - \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \end{aligned}$$

Por hipótese

$$\sum_{p \in Sing(D)} 1 - (-1)^n \mu_p(D) \leq \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D)$$

Podemos então escrever

$$|Sing(D)| + \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) - \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \leq \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D).$$

Uma vez que o somatório à direita pode ser decomposto como

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} GSV_p(\mathcal{F}, D) + \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D)$$

escrevemos

$$\begin{aligned} &|Sing(D)| + \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) - \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \leq \\ &\leq \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} GSV_p(\mathcal{F}, D) + \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) \\ \implies &|Sing(D)| - \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \leq \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} GSV_p(\mathcal{F}, D) \\ \implies &|Sing(D)| \leq \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} GSV_p(\mathcal{F}, D) + \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \end{aligned}$$

Uma vez que nos pontos regulares da hipersuperfície D tanto o índice GSV quanto o índice de Schwartz coincidem com o índice de Poicaré-Hopf, isto é

$$PH(\mathcal{F}, p) = Sch(\mathcal{F}, p) \text{ e } GSV_p(\mathcal{F}, D) = PH(\mathcal{F}, p)$$

temos que $Sch(\mathcal{F}, p) = GSV_p(\mathcal{F}, D)$ em $p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}$ e assim

$$\begin{aligned} |Sing(D)| &\leq \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} Sch(\mathcal{F}, p) + \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \\ \implies &|Sing(D)| \leq \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} Sch(\mathcal{F}, p). \end{aligned}$$

Concluimos portanto que (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii). Em particular, se $Sch(\mathcal{F}, p) > 0$ para cada $p \in Sing(D)$, então $Sch(\mathcal{F}, p) \geq 1$ para cada $p \in Sing(D)$. Dessa forma, considerando $Sing(D) = \{p_1, \dots, p_l\}$, temos

$$Sch(\mathcal{F}, p_i) \geq 1, \quad i = 1, \dots, l.$$

Assim

$$\sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \geq \sum_{p \in Sing(D)} 1 \implies \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \geq |Sing(D)|$$

Por outro lado

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} Sch(\mathcal{F}, p) \geq 0$$

Logo

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D_{reg}} Sch(\mathcal{F}, p) + \sum_{p \in Sing(D)} Sch(\mathcal{F}, p) \geq |Sing(D)|$$

ou seja

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} Sch(\mathcal{F}, p) \geq |Sing(D)|.$$

Portanto a desigualdade (iii) ocorre e pela equivalência mostrada, ocorre também o item (i). $\square$

2.4 Aplicações

Teorema 2.4.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um em $\mathbb{P}^n$, com singularidades isoladas não degeneradas e grau $\deg(\mathcal{F}) = d$. Seja $D \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau $\deg(D) = k$ com singularidades isoladas e tal que $\mathcal{F}$ deixa D invariante. Se n é ímpar e o índice de Schwartz é positivo para cada ponto singular $p \in Sing(D)$, então as seguintes propriedades são válidas.*

Se $k < d + 1$, então:

- (i) $Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D) \neq \emptyset$;
- (ii) $|Sing(\mathcal{F})| > 2|Sing(D)|$;
- (iii) $|Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| > |Sing(D)|$.

Se $k = d + 1$, então:

- (i) $|Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| + |Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(D)| \geq 2|Sing(D)|$
- (ii) $|Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| \geq |Sing(D)|$;
- (iii) $Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D) \neq \emptyset$.

Se $k > d + 1$, então:

$$|Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| < \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D).$$

Demonstração. Pelo Teorema A

$$\int_X c_n(TX - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (X - D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D)$$

Pelo Lema 2.2.1

$$\int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n - [D] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i$$

Assim

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D)$$

Vamos adotar as seguintes notações:

$$Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D) = \{p_1, \dots, p_{l_1}\};$$

$$Sing(D) = \{q_1, \dots, q_{l_2}, q_{l_2+1}, \dots, q_{l_2+l_3}\};$$

$$Sing(D) \cap Sing(\mathcal{F}) = \{q_1, \dots, q_{l_2}\}.$$

Observe que temos l_1 singularidades de $\mathcal{F}$ fora de D e l_2 singularidades de $\mathcal{F}$ na parte singular de D . Uma vez que no Teorema A estamos analisando os pontos p que são pontos singulares de $\mathcal{F}$ e não são pontos regulares de D , então

$$\sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D_{reg})} \mu_p(\mathcal{F}) = l_1 + l_2$$

já que, por hipótese, as singularidades são não degeneradas, isto é, $\mu_p(\mathcal{F}) = 1$ em cada p . Note que podemos escrever

$$\sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D).$$

Logo

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i = l_1 + l_2 - \sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D). \quad (2.29)$$

Pela definição de índice de Schwartz, temos que para todo $j = 1, \dots, l_2 + l_3$

$$Sch(\mathcal{F}, q_j) = GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) + (-1)^n \mu_{q_j}(\mathcal{F}).$$

Como n é ímpar

$$Sch(\mathcal{F}, q_j) = GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) - \mu_{q_j}(\mathcal{F}) \implies GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) = Sch(\mathcal{F}, q_j) + \mu_{q_j}(\mathcal{F}).$$

Uma vez que

$$Sch(\mathcal{F}, q_j) \geq 1 \text{ e } \mu_{q_j}(\mathcal{F}) \geq 1, \forall j = 1, \dots, l_2 + l_3$$

temos

$$GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) \geq 2, \forall j = 1, \dots, l_2 + l_3.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) &\geq \sum_{j=1}^{l_2+l_3} 2 \implies \sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) \geq 2(l_2 + l_3) \\ &\implies -\sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) \leq -2(l_2 + l_3) \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever a expressão 2.29 da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i \leq l_1 + l_2 - 2(l_2 + l_3).$$

Usando a notação do lema 2.2.2, temos

$$f(k, d, n) \leq l_1 + l_2 - 2(l_2 + l_3).$$

Note que, pelas notações adotadas

$$|Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| = l_1 \text{ e } |Sing(D)| = l_2 + l_3$$

e também

$$|Sing(\mathcal{F})| \geq l_1 + l_2$$

já que pode haver singularidades da folheação $\mathcal{F}$ em pontos regulares de D . A partir de agora, vamos separar a demonstração em três casos:

Caso 1: $k < d + 1$. Como n é ímpar, pelo Lema 2.2.2

$$f(k, d, n) > 0 \iff k < d + 1.$$

Assim

$$0 < f(k, d, n) \leq l_1 + l_2 - 2(l_2 + l_3) \implies l_1 + l_2 - 2(l_2 + l_3) > 0 \quad (2.30)$$

$$\implies l_1 + l_2 - 2l_2 - 2l_3 > 0$$

$$\implies l_1 - l_2 - 2l_3 > 0$$

$$\implies l_1 > l_2 + 2l_3$$

$$\implies l_1 > l_2 + l_3 \quad (2.31)$$

Daí, pela desigualdade em 2.30

$$|Sing(\mathcal{F})| \geq l_1 + l_2 > 2(l_2 + l_3) = |Sing(D)| \implies |Sing(\mathcal{F})| > 2|Sing(D)|$$

O que prova o item (ii). Além disso, pela desigualdade 2.31

$$|Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| > |Sing(D)|$$

Provando portanto o item (iii).

Caso 2: $k = d + 1$. Como n é ímpar, pelo Lema 2.2.2

$$f(k, d, n) = 0 \iff k = d + 1.$$

Assim

$$0 = f(k, d, n) \leq l_1 + l_2 - 2(l_2 + l_3) \implies l_1 + l_2 - 2(l_2 + l_3) \geq 0 \quad (2.32)$$

$$\implies l_1 + l_2 - 2l_2 - 2l_3 \geq 0$$

$$\implies l_1 - l_2 - 2l_3 \geq 0$$

$$\implies l_1 \geq l_2 + 2l_3$$

$$\implies l_1 \geq l_2 + l_3 \quad (2.33)$$

Pela desigualdade 2.32

$$l_1 + l_2 \geq 2(l_2 + l_3) \implies |Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| + |Sing(D) \cap Sing(\mathcal{F})| \geq 2|Sing(D)|$$

e assim está provado o item (i). Pela desigualdade 2.33

$$l_1 \geq l_2 + l_3 \implies |Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| \geq |Sing(D)|$$

provando portanto o item (ii).

Caso 3: $k > d + 1$. Como n é ímpar, pelo Lema 2.2.2

$$f(k, d, n) < 0 \iff k > d + 1.$$

Assim, utilizando esse fato em 2.29, obtemos

$$l_1 + l_2 - \sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) < 0 \implies l_1 + l_2 < \sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D).$$

Como $l_2 \geq 0$, em particular,

$$l_1 < \sum_{j=1}^{l_2+l_3} GSV_{q_j}(\mathcal{F}, D) \implies |Sing(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n - D)| < \sum_{p \in Sing(D)} GSV_p(\mathcal{F}, D).$$

□

Uma observação importante a se fazer é que sempre quando n é ímpar, então o somatório dos índices GSV é sempre positivo. De fato, se $k \geq d + 1$, então pelo Lema 2.2.2,

$$\alpha(k, d, n) \leq 0 \implies \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i \leq 0$$

Isto é,

$$-\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i \geq 0. \quad (2.34)$$

Assim, como

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i \quad (2.35)$$

e $\mu_p(\mathcal{F}) \geq 1$, para todo $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, pela desigualdade 2.34, obtemos

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) > 0.$$

Por outro lado, se $k < d + 1$, temos

$$k - 1 < d \implies (k - 1)^{j+1} d^{n-(j+1)} < (k - 1)^j d^{n-j}, \text{ com } j = 1, 3, \dots, n - 2. \quad (2.36)$$

Ou seja

$$(k - 1)^j d^{n-j} - (k - 1)^{j+1} d^{n-(j+1)} > 0 \quad (2.37)$$

Daí, usando o item (3) do Lema 2.2.2, podemos escrever

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i = \\ & = -\left(d^n + \sum_{j=1,3,\dots,n-2} [(k-1)^j d^{n-j} - (k-1)^{j+1} d^{n-(j+1)}] + (-1)^n (k-1)^n \right) \\ & = -d^n - \left(\sum_{j=1,3,\dots,n-2} [(k-1)^j d^{n-j} - (k-1)^{j+1} d^{n-(j+1)}] \right) - (-1)(k-1)^n \\ & > -d^n + (k-1)^n \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos a relação 2.37. Daí, podemos escrever

$$-\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i > -d^n + (k-1)^n.$$

Somando $\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F})$ em ambos os lados da desigualdade acima, temos

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i > \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - d^n + (k-1)^n \quad (2.38)$$

Logo, uma vez que

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) = d^n + d^{n-1} + \cdots + d + 1.$$

Temos que o termo a direita da desigualdade 2.38 é escrito como

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) \right) - d^n + (k-1)^n \\ &= (d^n + d^{n-1} + \cdots + d + 1) - d^n + (k-1)^n \\ &= d^{n-1} + \cdots + d + 1 + (k-1)^n > 0 \end{aligned}$$

já que $k \geq 1$ e $d \geq 0$. Dessa forma

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i > 0 \implies \sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) > 0$$

pois

$$\sum_{p \in S(\mathcal{F}, D)} GSV_p(\mathcal{F}, D) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i.$$

Proposição 2.4.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa unidimensional em $\mathbb{P}^2$, com singularidades isoladas não degeneradas, deixando invariante uma curva não dicrítica S . Então, pelo menos uma singularidade de $\mathcal{F}$ ocorre no complemento $\mathbb{P}^2 - S_{\text{reg}}$.*

Demonstração. Sendo S uma curva invariante por $\mathcal{F}$ e não-dicrítica, temos que $\deg(S) = d \neq 0$ e por [16], temos

$$\sum_{p \in \text{Sing}(S)} GSV_p(\mathcal{F}, S) \geq 0.$$

Pelo Teorema A, escrevemos

$$\int_{\mathbb{P}^2} c_n(T\mathbb{P}^2 - [S] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^2 - S_{\text{reg}})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in \text{Sing}(S)} GSV_p(\mathcal{F}, S)$$

Pelo Lema 2.2.1

$$\int_{\mathbb{P}^2} c_n(T\mathbb{P}^2 - [S] - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k)^j (d-1)^i = \alpha(k, d, d).$$

Pelo Lema 2.2.2, uma vez que $n = 2$ (par) e $d \neq 0$, temos que $f(k, d, n) > 0$. Daí

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^2 - S_{\text{reg}})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in \text{Sing}(S)} GSV_p(\mathcal{F}, S) > 0.$$

Logo, como

$$\sum_{p \in \text{Sing}(S)} GSV_p(\mathcal{F}, S) \geq 0.$$

Podemos dizer que

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^2 - S_{\text{reg}})} \mu_p(\mathcal{F}) \geq \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^2 - S_{\text{reg}})} \mu_p(\mathcal{F}) - \sum_{p \in \text{Sing}(S)} GSV_p(\mathcal{F}, S) > 0 \quad (2.39)$$

De 2.39, concluímos que

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^2 - S_{\text{reg}})} \mu_p(\mathcal{F}) > 0.$$

Portanto pelo menos uma singularidade da folheação acontece em $\mathbb{P}^2 - S_{\text{reg}}$. □

Considerações Finais

Ao longo desta dissertação, estabelecemos uma extensão da fórmula de Baum-Bott para variedades complexas não compactas da forma $\tilde{X} = X - D$, onde $D \subset X$ é uma hipersuperfície com singularidades isoladas, removendo assim a restrição de cruzamento normal que figurava em trabalhos anteriores. O Teorema A, resultado central do trabalho, fornece uma expressão precisa para a integral da classe de Chern do fibrado virtual $TX - [D] - T_{\mathcal{F}}$ em termos de invariantes locais da folheação e da hipersuperfície.

Este resultado possui implicações relevantes em diversas frentes. Primeiramente, ele generaliza as fórmulas de Corrêa e Machado para o caso em que D possui singularidades isoladas arbitrárias, ampliando significativamente o escopo de aplicação da teoria. Além disso, a substituição do feixe tangente logarítmico $T_X(-\log D)$ pelo fibrado virtual $TX - [D]$ contorna a dificuldade técnica imposta pela não localmente liberdade daquele feixe, permitindo o uso pleno das ferramentas da teoria de Chern-Weil de classes características.

No que diz respeito às aplicações, o Teorema B demonstra que, em dimensão par, a não negatividade da soma total dos índices GSV sobre a hipersuperfície invariante D é condição suficiente para a desigualdade $\deg(D) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2$, estendendo para dimensões pares arbitrárias resultados clássicos do problema de Poincaré, obtidos por Brunella, Cerveau e Lins Neto, e Carnicer no contexto de superfícies complexas. O Teorema C, por sua vez, fornece uma caracterização completa da desigualdade de Soares em termos dos índices GSV e de Schwartz, estabelecendo condições necessárias e suficientes para sua validade e revelando que a positividade do índice de Schwartz em cada ponto singular de D é uma condição simples que garante o resultado.

Os resultados adicionais obtidos, como as relações entre os conjuntos singulares da folheação e da hipersuperfície invariante para dimensão ímpar, e a fórmula para a soma total dos índices GSV, que se mostrou sempre divisível pelo grau de D , enriquecem a compreensão da estrutura das folheações unidimensionais e de suas hipersuperfícies invariantes, fornecendo ferramentas adicionais para o estudo do problema de Poincaré e de questões relacionadas.

Referências

- [1] MACHADO, D. d. S. Residue formula for logarithmic foliations along a divisor with isolated singularities and applications. *arXiv preprint*, 2025. ArXiv:2605.09210v1. Citado 4 vezes nas páginas 7, 8, 10 e 53.
- [2] CHERN, S. S. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, Princeton University Press, v. 45, n. 4, p. 747–752, 1944. Citado na página 9.
- [3] POINCARÉ, H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 8, p. 251–296, 1882. Disponível em: <http://www.numdam.org/item/JMPA_1882_38251_0>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 49.
- [4] HOPF, H. Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, v. 96, n. 1, p. 225–249, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 49.
- [5] BAUM, P.; BOTT, R. Singularities of holomorphic foliations. *Journal of Differential Geometry*, International Press of Boston, v. 7, n. 3-4, p. 279–342, 1972. Citado na página 9.
- [6] IITAKA, S. Logarithmic forms of algebraic varieties. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Section IA, Mathematics*, v. 23, n. 3, p. 525–544, 1976. Citado na página 9.
- [7] NORIMATSU, Y. Kodaira vanishing theorem and Chern classes for ∂ -manifolds. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, v. 54, n. 4, p. 107–108, 1978. Citado na página 9.
- [8] SILVOTTI, R. On a conjecture of Varchenko. *Inventiones Mathematicae*, v. 126, n. 2, p. 235–248, 1996. Citado na página 9.
- [9] ALUFFI, P. Chern classes for singular hypersurfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 351, n. 10, p. 3989–4026, 1999. Citado na página 9.
- [10] DELIGNE, P. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. v. 163. (Lecture Notes in Mathematics, v. 163). Citado na página 9.
- [11] SAITO, K. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Section IA, Mathematics*, v. 27, n. 2, p. 265–291, 1980. Citado na página 9.

- [12] CORRÊA, M.; MACHADO, D. Residue formulas for logarithmic foliations and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 371, n. 9, p. 6403–6420, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 60.
- [13] CORRÊA, M.; MACHADO, D. A global residue formula for logarithmic indices of foliations. *Communications in Analysis and Geometry*, v. 32, n. 4, 2024. To appear. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- [14] ALEKSANDROV, A. G. The index of vector fields and logarithmic differential forms. *Functional Analysis and Its Applications*, v. 39, n. 4, p. 245–255, 2005. Citado na página 10.
- [15] GÓMEZ-MONT, X.; SEADE, J.; VERJOVSKY, A. The index of a holomorphic flow with an isolated singularity. *Mathematische Annalen*, v. 291, n. 1, p. 737–751, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 50.
- [16] BRUNELLA, M. Some remarks on indices of holomorphic vector fields. *Publicacions Matemàtiques*, v. 41, n. 2, p. 527–544, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 10, 49 e 76.
- [17] SOARES, M. G. On the geometry of Poincaré’s problem for one-dimensional projective foliations. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 73, n. 4, p. 475–482, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 11, 53 e 66.
- [18] SUWA, T. *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*. Paris: Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, 1998. (Actualités Mathématiques). Citado 6 vezes nas páginas 12, 13, 15, 48, 51 e 65.
- [19] BRIANÇON, J.; SKODA, H. Sur la clôture intégrale d’un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Série A*, v. 278, p. 949–951, 1974. Citado na página 15.
- [20] HUYBRECHTS, D. *Complex Geometry: An Introduction*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. (Universitext). ISBN 978-3-540-21290-4. Citado 4 vezes nas páginas 15, 26, 46 e 60.
- [21] MOL, R. S.; SOARES, M. G. *Índices de campos holomorfos e aplicações*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2001. v. 23. (Publicações Matemáticas do IMPA, v. 23). Citado 7 vezes nas páginas 15, 26, 42, 48, 50, 55 e 59.
- [22] SILVA, J. B. A. *Fórmulas Residuais para Folheações Logarítmicas e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, February 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática). Disponível em: <<https://posmatematica.ufv.br/wp-content/uploads/2021/03/JeffersonSilva.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 20 e 26.
- [23] LIMA, E. L. *Curso de Análise: Funções de n variáveis reais*. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020. v. 2. 464 p. (Projeto Euclides, v. 2). ISBN 978-85-244-0494-8. Citado na página 41.

- [24] MACHADO, D. d. S.; SEADE, J. Generic vector fields on isolated complex hypersurface germs. *arXiv preprint*, 2026. ArXiv:2605.09210. Citado na página 48.
- [25] BRASSELET, J.-P.; SEADE, J.; SUWA, T. *Vector Fields on Singular Varieties*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. v. 1987. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1987). ISBN 978-3-642-05204-0. Citado na página 48.
- [26] MILNOR, J. W. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1968. 130 p. (Annals of Mathematics Studies, 61). ISBN 978-0-691-08065-9. Citado na página 49.
- [27] TJURINA, G. N. Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, v. 3, n. 5, p. 967–999, 1969. Citado na página 50.
- [28] GREUEL, G.-M. Der gauß-manin-zusammenhang isolierter singularitäten von vollständigen durchschnitten. *Mathematische Annalen*, v. 214, p. 235–266, 1975. Citado na página 50.
- [29] SCHWARTZ, M.-H. Classes caractéristiques définies par une stratification d’une variété analytique complexe. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, v. 260, p. 3262–3264, 3535–3537, 1965. Citado na página 51.
- [30] SCHWARTZ, M.-H. *Champs radiaux sur une stratification analytique complexe*. Paris: Hermann, 1991. (Travaux en cours, 39). Citado na página 51.
- [31] SOARES, M. G. Bounding Poincaré-Hopf indices and Milnor numbers. *Mathematische Nachrichten*, v. 278, n. 6, p. 703–711, 2005. Citado na página 60.