

DANIEL OLIVEIRA ROCHA AZEVEDO

O MONOPOLIUM DE NAMBU:  
UMA PROPOSTA PARA ÁTOMOS DE MONOPOLOS MAGNÉTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima

VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2020

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

A994m  
2020 Azevedo, Daniel Oliveira Rocha, 1996-  
O monopolium de Nambu : uma proposta para átomos de  
monopolos magnéticos / Daniel Oliveira Rocha Azevedo. –  
Viçosa, MG, 2020.  
48 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 44-48.

1. Monopolo magnético. 2. Eletromagnetismo.  
3. Teoria quântica . I. Universidade Federal de Viçosa.  
Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Física.  
II. Título.

CDD 22. ed. 537


DANIEL OLIVEIRA ROCHA AZEVEDO

O MONOPOLIUM DE NAMBU:  
UMA PROPOSTA PARA ÁTOMOS DE MONOPOLOS MAGNÉTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

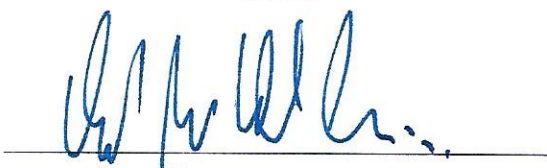
APROVADA: 4 de novembro de 2020.

Assentimento:



Daniel Oliveira Rocha Azevedo

Autor



Oswaldo Monteiro Del Cima

Orientador

# Agradecimentos

A todos que me ajudaram a chegar até aqui,  
Familiars, amigos, professores,  
Que tenham reconhecido o seu papel,  
Não só neste trabalho,  
Mas em cada passo dado por este que vos fala.  
Que cada abraço, cada reprimenda,  
Cada debate e cada festejo,  
Possa ser visto nesse texto,  
Pois o que estão prestes a ler  
É muito mais que a soma de suas partes.  
Em especial, ao Oswaldo,  
Ao mestre que não me deu um percurso a seguir,  
Mas me ajudou a prosseguir em minhas próprias trilhas.  
A todos esses,  
Obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A person who does not know the history of the last 3,000 years wanders in the darkness of ignorance, unable to make sense of the reality around him

---

Johann Wolfgang von Goethe

# Resumo

AZEVEDO, Daniel Oliveira Rocha, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2020. **O monopolium de Nambu: Uma proposta para átomos de monopolos magnéticos.** Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.

Neste trabalho, propomos um modelo de monopolos magnéticos fundamentais, baseado na proposta de quarks duais de Yoichiro Nambu, e analisar a possibilidade de se obterem estados ligados entre essas partículas. Analisaremos as restrições necessárias impostas ao potencial de interação, bem como o número máximo de estados ligados permitidos. Por fim, obteremos a energia do estado fundamental e raio médio desse sistema, através do método variacional, para diversas massas dos monopolos, de  $10^2 MeV$  a  $10^2 TeV$ , e comprimentos de Compton, de  $10^{-2} am$  a  $10^{-1} pm$ .

**Palavras-chave:** Monopolos magnéticos. Monopolium de Nambu. Estados ligados. Estados confinados.

# Abstract

AZEVEDO, Daniel Oliveira Rocha Azevedo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2020. **Nambu Monopolium: A proposal for magnetic monopoles atoms.** Advisor: Oswaldo Monteiro Del Cima.

In the present work, we intend to propose a model for fundamental magnetic monopoles, based on the dual quark proposal of Yoichiro Nambu, and analyse the possibility of obtaining bound states between such particles. We will analyse the restrictions imposed on the interaction potential, as well as the maximum number of bound allowed bound states. At last, we will obtain the ground state energy and mean radius of the system, using the variational method, for a range of monopole masses, from  $10^2 MeV$  to  $10^2 TeV$ , and Compton lengths, from  $10^{-2} am$  to  $10^{-1} pm$ .

**Keywords:** Magnetic monopoles. Nambu Monopolium. Bound states. Confined states.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Um breve parecer histórico</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>As teorias de Dirac e Nambu</b>	<b>13</b>
2.1	A gênese do monopolo de Dirac . . . . .	13
2.2	Dirac revisita o monopolo . . . . .	19
2.3	O modelo de Nambu para o méson . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Átomo de Nambu</b>	<b>26</b>
3.1	Definindo o potencial de interação . . . . .	27
3.2	Estados ligados . . . . .	30
3.3	Energia do estado fundamental . . . . .	33
3.4	Discussão dos resultados . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Conclusão e perspectivas</b>	<b>42</b>
	<b>Referências</b>	<b>44</b>

# Capítulo 1

## Um breve parecer histórico

O magnetismo é um dos mais antigos fenômenos físicos conhecidos pelo homem. Seu nome deriva da região da Magnésia, na Grécia Antiga, local onde se encontravam diversas minas de magnetita, mineral que apresenta propriedades magnéticas. Os registros acerca das propriedades desse mineral datam de 800 A.C., sendo parte do pensamento de grandes filósofos gregos, como Thales e Anaxágoras, por exemplo, para quem a magnetita possuía alma, por ser capaz de mover outros corpos e, além disso, "escolher" quais objetos moveria. Outros como Empédocles, Epicuro e Demócrito, no entanto, explicavam suas propriedades através de emanções invisíveis do mineral, chamadas eflúvios. Esta última apresenta semelhança com a noção de campo magnético.

As menções escritas ao magnetismo mais antigas da China são de 400 A.C. Também há registros, datando da dinastia Han (202 A.C.–220 D.C.), sobre o uso da bússola pelos chineses. Inicialmente utilizada para adivinhação do futuro e feng shui, a bússola só passa a ser utilizada em navegações durante a dinastia Song (960 D.C.–1279 D.C.). Ela só chegaria à Europa e ao Oriente Médio por volta do século XIII.

É também no século XIII que a terminologia de pólos magnéticos é cunhada. Foi utilizada pela primeira vez (até onde se sabe) por Pierre de Maricourt, também conhecido pelo nome latinizado de Petrus Peregrinus, numa carta escrita em 1269, durante o cerco de Lucena, na Itália. A "Epistola de magnete", como ficou conhecida, é o primeiro tratado escrito sobre as propriedades dos imãs.

Quase 600 anos se passam entre a "Epistola" e a descoberta de Hans Christian Ørsted da relação entre a eletricidade e o magnetismo, em 1820. Os experimentos desenvolvidos por ele serviram de base para a generalização e formalização matemática da força magnética entre dois elementos de corrente elétrica feito por André-Marie Ampère, três anos

depois. Também inspirado por Ørsted, em 1831 Michael Faraday realiza uma série de experimentos em que demonstra o fenômeno de indução magnética. Esses e muitos outros trabalhos culminam no trabalho de James Clerk Maxwell, apresentado à Cambridge Philosophical Society em 1855 e publicado em 1861, em que ele resume toda a teoria da eletricidade e magnetismo a um conjunto de equações diferenciais, e em trabalhos seguintes em que mostra a relação entre ondas eletromagnéticas e a luz.

Essa formulação, que reuniu o trabalho de dezenas de cientistas em um simples conjunto de equações e possibilitou novas perspectivas de investigação, tornou explícita uma característica da teoria: a assimetria existe nas equações. Enquanto os campos elétrico e magnético se apresentavam como interdependentes, carga e corrente elétricas não possuíam uma contraparte magnética. Essa assimetria gerou, ainda no final do século XIX, trabalhos e discussões no seio da comunidade acadêmica acerca da faltosa carga magnética, tais como a especulação da possibilidade de um magnetismo livre [1] feita por Pierre Curie em 1894 e o cálculo da trajetória de raios catódicos no campo de um pólo magnético [2], realizado por Henry Poincaré em 1896. No entanto, a falta de confirmação experimental e de motivações teóricas, afora a simetria das equações de Maxwell, fez do estudo do polo magnético uma curiosidade, sem muitas implicações físicas relevantes, até o início da década de 1930.

Na sequência de uma série de trabalhos em que desenvolve uma teoria relativística para o elétron, Paul Adrien Maurice Dirac publica, em 1931, o artigo "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field" [3], em que mostra a compatibilidade entre a existência de monopolos magnéticos e a teoria quântica. Além disso, propõe a existência de anti-matéria, cuja comprovação experimental veio no ano seguinte [4], e a explicação para a quantização da carga elétrica, dependendo da existência de cargas magnéticas, as quais também seriam quantizadas. Contudo, sua investigação não possibilita o cálculo do valor da carga elétrica fundamental, que permanece um fato empírico, o que ele considera decepcionante.

Partindo da concepção de um termo de fase não-integrável na função de onda [5], Dirac demonstra sua compatibilidade com a mecânica quântica e a implicação da existência de monopolos magnéticos. A não-integrabilidade da fase ocorre porque, para ser compatível com a teoria eletromagnética como a conhecemos, é necessário que o potencial apresente uma singularidade. Essa ficou conhecida como string de Dirac, por se dar ao longo de uma linha indo do monopolo ao infinito no caso de três dimensões espaciais

(no espaço-tempo quadri-dimensional a singularidade do potencial se dá ao longo de uma superfície). No entanto, a carga magnética dessas partículas não pode assumir qualquer valor, mas é quantizada em termos da carga do elétron. Essa relação de quantização explica, reciprocamente, a quantização da carga elétrica.

O monopolo de Dirac não atraiu muito a atenção em sua época e foi muito rejeitado, devido ao seu caráter altamente especulativo, à falta de evidências experimentais e de não haver necessidade de ser considerado na resolução de outras questões em aberto. O próprio Dirac só voltaria a tratar do tema em 1948 [6], quando propõe uma teoria geral do eletromagnetismo na presença de monopolos. Foram poucos os que trabalharam sobre essa ideia nos anos subsequentes, entre eles, Igor Tamm, cujo trabalho é referenciado pelo próprio Dirac, encontrando a solução geral da equação de onda de um elétron no campo de um monopolo [7], e Pascual Jordan, em 1938, sugerindo que o monopolo poderia ser mais que um simples construto matemático [8]. As descobertas do nêutron, do pósitron e do muon nos anos anteriores, bem como a introdução teórica de novas partículas para explicar fenômenos, tais como o neutrino e o méson, tornam compreensível porque o monopolo torna-se uma ideia mais palatável no final da década de 30. A partir do segundo trabalho de Dirac, o tema dos monopolos ganha mais atenção, principalmente da década de 1960 em diante.

Em 1962, Nicola Cabbibo e Ezio Ferrari formulam uma eletrodinâmica quântica na presença de dois potenciais [9], um associado a cargas elétricas e outro associado a cargas magnéticas. Sua proposta tem por objetivo evitar a singularidade no potencial presente no monopolo de Dirac. Julian Schwinger realiza um trabalho semelhante em 1966, encontrando uma condição para a quantização das cargas elétrica e magnética um pouco mais restritiva do que a condição de Dirac [10].

Também em 1965, Alfred Goldhaber analisa o problema do espalhamento de um elétron por um monopolo [11], considerando ambos como partículas sem spin, tendo em vista que o campo eletromagnético apresenta um momento angular proporcional ao produtos de suas cargas elétrica e magnética [12]. Ao quantizarmos esse momento em termos de  $\frac{1}{2}\hbar$ , recuperamos a condição de quantização de Dirac. Ele constrói o problema não-relativístico e encontra certas restrições que devem ser atendidas pelo problema no caso relativístico. Onze anos depois, em 1976, o mesmo Goldhaber trabalha na conexão entre monopolos e o teorema Spin-Estatística [13], mostrando que a presença de monopolo leva a realização de férmions compostos por bósons.

Em 1968, Schwinger introduz a ideia de dyons [14], partículas que carregariam tanto carga elétrica quanto carga magnética. Além disso, tendo em vista a grande força de atração entre monopolos com cargas opostas ("sul" e "norte"), sugere que a matéria ordinária poderia ser composta por dyons de carga elétrica fracionada, sendo magneticamente neutra. Essa constatação, junto com os avanços experimentais na física de hádrons, o levam a conceber a hipótese de que os dyons sejam os constituintes fundamentais dessas partículas [15], já em 1969. Também aponta a existência de um mecanismo de violação de CP devido a essa hipótese.

Embora partam de premissas diferentes, podemos relacionar os dyons de Schwinger com o trabalho de Yoichiro Nambu sobre monopolos magnéticos [16], de 1974. Explorando semelhanças entre diferentes modelos teóricos e modificando as equações de Dirac para o eletromagnetismo a partir disso, Nambu consegue elaborar um modelo em que os mésons são compostos por monopolos magnéticos. Estes estariam ligados entre si através de uma string física, diferentemente do monopolo de Dirac.

Também durante a década de 1970, temos a discussão do monopolo no contexto de teorias de grande unificação. Em 1974, Gerard 't Hooft e Alexander Polyakov mostraram que, em teorias tais que o grupo de gauge  $U(1)$  do eletromagnetismo é um subgrupo de um grupo de gauge maior, o qual sofre uma quebra espontânea via mecanismo de Higgs, surgem monopolos como soluções das equações de campo [17,18]. Dado que ambos chegaram a esse resultado de forma independente, foi cunhado o termo monopolo de 't Hooft-Polyakov. Diferente do monopolo de Dirac, essa solução não apresenta nenhuma singularidade. No final desse mesmo ano, Bernard Julia e Anthony Zee estendem a discussão do monopolo de 't Hooft-Polyakov para o caso de dyons [19] e, nos anos seguintes, temos a demonstração de soluções exatas para esses modelos [20], bem como a garantia da estabilidade destas [21,22].

O monopolo se tornou tão debatido no meio teórico [23-26], que, em 1981, foi realizado um encontro no Centro Internacional para Física Teórica (ICTP, em inglês), localizado em Trieste, na Itália, para discutir sobre o tema. Com o nome Monopolos em Teoria Quântica de Campos [27], o encontro suscitou um debate do status teórico e experimental do monopolo até o momento. Mas tal como a assimetria nas equações de Maxwell, o desbalanço entre o desenvolvimento teórico e o experimental dos monopolos era enorme. Até o momento do encontro de Trieste, apenas um experimento, envolvendo detecção de raios cósmicos [28], vislumbrava a possibilidade da realização experimental do monopolo.

Fora isso, nenhuma outra busca havia chegado perto de detectá-lo, com uma extensa bibliografia relatando essa empreitada [29]. O monopolo havia conquistado o status de partícula perdida.

No entanto, em 1982, um outro candidato aparece. Usando um detector de anéis supercondutores (SQUID), Blas Cabrera indentifica um sinal correspondente à passagem de um monopolo [30]. Esse único sinal, embora surpreendentemente preciso, não se repete ao longo dos 151 dias de observação. O evento, ocorrido no dia 14 de fevereiro, rendeu à Cabrera um cartão de dias dos namorados no ano seguinte (nos EUA, o dia dos namorados é comemorado no dia 14 de fevereiro), de um grupo de Harvard liderado por Sheldon Glashow, incitando a descoberta de novas evidências. Nele estava escrito:

Roses are red, violets are blue.

The time has come for monopole two

O sinal obtido por Cabrera nunca foi repetido, mas a busca experimental pelos monopolos continua até hoje. Desde então, experimentos dos mais variados, como o MoEDAL (Monopole and Exotics Detector at the LHC) e o ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS), do Centro Europeu de Pesquisas Físicas (CERN) na Suíça, e o MACRO, em Gran Sasso, além de muitos outros, têm buscado por tais partículas.

Seja através de produção de pares monopolo-antimonopolo em aceleradores de partículas, seja pela observação de monopolos primitivos em raios cósmicos ou aprisionados na matéria ordinária, o monopolo permanece como a partícula perdida. Do ponto de vista teórico, novas abordagens têm surgido, como nos mostram Joseph Polchinski [31] e Luis Epele *et al.* [32]. Além disso, o monopolo ressurge na física de matéria condensada, como uma excitação topológica em sistemas de gelo de spin [33].

O problema do monopolo não é um beco sem saída, e se encontra no cruzamento de vários problemas da física contemporânea. Muito ainda há a ser feito.

## Capítulo 2

# As teorias de Dirac e Nambu

No capítulo anterior, vimos que monopolos magnéticos são tema de pesquisa e especulação científica desde a proposta de Pierre Curie, em 1894, e a discussão acerca de sua existência e propriedades pode ser encontrada nos mais diversos contextos ao longo do último século, tanto em modelos teóricos quanto em buscas experimentais. Embora muitas vezes retratado como uma área infrutífera, o estudo de monopolos se mostra rico em abordagens e ainda muito atual.

Dentre os trabalhos sobre o assunto, dois se destacam como mais relevantes para a proposta que apresentaremos aqui. São esses os trabalhos de P.A.M. Dirac, de 1931 e 1948 [3,6], e de Y. Nambu, de 1974 [16]. O primeiro por ser um artigo central no desenvolvimento da ideia de monopolos magnéticos, basicamente inaugurando um novo campo de investigação, e, portanto, de extrema importância para os estudos nesse campo e na física em geral, sendo referência obrigatória para quase tudo que se falou até hoje. O segundo, pelo desenvolvimento de uma teoria eletromagnética com a presença de monopolos magnéticos. Já o terceiro, por nos servir como inspiração para este trabalho.

Neste capítulo, nos dedicaremos a uma breve exposição dos assuntos tratados nesses artigos.

### 2.1 A gênese do monopolo de Dirac

Em 1931, inspirado por reflexões acerca da simetria entre estados energia negativa e positiva, decorrentes de seus trabalhos [34,35] de 1928 e de 1930 e das respostas e comentários feitos a eles [36-38], P.A.M. Dirac publica o artigo "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field", em que propõe uma explicação para a existência de uma

carga elétrica mínima, conectando-a com o menor pólo magnético possível. Portanto, não somente surge com uma explicação para a quantização da carga elétrica em termos da carga do elétron, como também sugere a existência de um tipo diferente de carga, de caráter magnético. Para a partícula que portasse esse tipo de carga, ele atribuiu o nome polo magnético, pelo fato de o campo gerado por ela não ser um campo de dipolo magnético, mas semelhante ao campo gerado por uma carga elétrica pontual. Mais tarde, a nomenclatura corrente para tais partículas se torna monopolo magnético, a qual é utilizada até os dias de hoje.

Antes de prosseguirmos no detalhamento desse trabalho, vale notar algumas coisas. Embora forneça uma explicação para o fato de toda carga elétrica ser um múltiplo inteiro da carga fundamental do elétron, não apresentando valores contínuos, ele não explica o valor da carga fundamental, que permanece como um dado empírico, e depende da existência de um monopolo para ser confirmada. Além disso, é nesse mesmo trabalho que Dirac abandona a interpretação dos "buracos" do "Mar de Dirac" representarem os prótons, na tentativa de explicar as soluções de energia negativa da teoria, e sugere a existência de um outro tipo de partícula ainda desconhecido, de mesma massa e carga oposta ao elétron, que tomam o lugar dos "buracos". A essa partícula ele deu o nome de anti-elétron, sendo a primeira especulação sobre a existência das anti-partículas.

A discussão do artigo começa com a indeterminação da fase de uma dada função de onda  $\psi$ , definida como  $\psi = \phi e^{i\gamma}$ , em que  $\phi$  e  $\gamma$  são funções reais das coordenadas de espaço e tempo ( $x^\mu$ ), quanto a adição de uma constante arbitrária a ela, isto é, uma fase global, visto que essa mudança não interfere no valor de  $|\psi|^2$  e, portanto, não possui significado físico. No entanto, a mudança na fase entre dois pontos  $A$  e  $B$  se torna relevante. Mais que isso, essa mudança não precisa ser constante para diferentes caminhos ligando  $A$  e  $B$ , isto é, pode depender do caminho considerado. Portanto, a diferença da fase ao longo de um caminho fechado não é necessariamente igual a zero. Essas considerações podem ser extrapoladas para todas as aplicações da teoria quântica sem causar nenhuma ambiguidade.

Isso leva a descrever uma generalização do formalismo, em que a fase  $\gamma$  da função de onda  $\psi$  não precisa apresentar um valor definido para um determinado ponto no espaço e no tempo, mas que a mudança de fase da função de onda ao longo de um caminho fechado qualquer deve ser igual para qualquer função de onda. Podemos escrever a incerteza na fase explicitamente fazendo  $\psi = \phi e^{i\gamma} = \phi_1 e^{i\beta}$ , de modo que  $\phi_1$  representa uma função de

onda plenamente determinada, com  $|\psi|^2 = |\phi_1|^2$ , e o termo  $e^{i\beta}$  contém a indeterminação da fase, sendo  $\beta$  uma função real. Como a integral  $\psi$  ao longo de uma curva fechada resulta numa determinada mudança de fase, a função  $\beta$  deve ter suas derivadas bem definidas em relação as coordenadas  $x^\mu$ , ou seja,

$$\kappa_0 = \frac{\partial\beta}{\partial t}, \quad \kappa_1 = \frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad \kappa_3 = \frac{\partial\beta}{\partial z} \quad (2.1)$$

de modo que a mudança de fase ao longo de uma curva fechada  $C$  seja

$$\int_C \kappa_\mu ds^\mu \quad (2.2)$$

Pelo teorema de Stokes, temos que a integral acima ao longo da curva  $C$  é igual ao rotacional de  $\kappa_\mu$  sobre a superfície  $S$  delimitada por essa curva. Portanto,  $\kappa_\mu$  está definido a menos de um gradiente  $\partial_\mu\alpha$ , em que  $\alpha$  é uma função real qualquer bem definida

$$\int_C (\kappa_\mu + \partial_\mu\alpha) ds^\mu = \int_S (\partial_\mu\kappa_\nu - \partial_\nu\kappa_\mu) dS^{\mu\nu} = \int_C \kappa_\mu ds^\mu \quad (2.3)$$

ou seja, completamente independente da função  $\phi_1$ . Isto mostra que a não-integrabilidade da fase é consistente com o princípio da superposição, pois qualquer combinação linear  $\Sigma_n c_n \psi_n$  apresentaria a mesma mudança de fase, visto que todas podem ser escritas como  $\psi_n = \phi_n e^{i\beta}$ . Além disso, indica que essa fase deva ser determinada unicamente pelo sistema dinâmico considerado, independente do estado em que ele se encontra.

Se considerarmos nosso sistema como uma única partícula, a mudança de fase (2.2) deve estar relacionada ao campo ao qual essa partícula está sujeita. Se aplicarmos o operador de momento e energia  $\hat{P}_\mu$  à função de onda  $\psi = \phi_1 e^{i\beta}$ , temos

$$\hat{P}_\mu \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi_1 e^{i\beta} = e^{i\beta} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \hbar\kappa_\mu \right) \phi_1 \quad (2.4)$$

em que  $\kappa_\mu = (\frac{\kappa_0}{c}, -\vec{\kappa})$ . Podemos ver que  $\phi_1$  obedece às mesmas relações que  $\psi$ , desde que o operador  $\hat{P}_\mu$  seja trocado por  $\hat{P}_\mu - \hbar\kappa_\mu$ . Essa mudança no operador nos permite associar a descrição acima, válida para uma partícula livre qualquer, com uma partícula carregada se movendo num campo eletromagnético. Portanto, podemos dizer que  $\phi_1$  é a função de onda de uma partícula com carga elétrica  $-e$  se movendo num campo de potencial

$$A_\mu = -\frac{\hbar c}{e} \kappa_\mu \quad (2.5)$$

Isto significa que a não-integrabilidade da fase da função de onda pode ser associada à presença de um campo eletromagnético no sistema considerado. Retornando à equação (2.3), podemos ver que essa fase adquire um significado muito claro, que é o fluxo do campo eletromagnético através da superfície  $S$  delimitada pela curva  $C$ . Essa relação fica mais clara se notarmos que as componentes desse campo serão

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{e} (\partial_\mu \kappa_\nu - \partial_\nu \kappa_\mu) \quad (2.6)$$

isto é, o rotacional de  $\kappa_\mu$ , a menos de fatores numéricos. A divergência  $\partial_\mu \alpha$  a menos da qual  $\kappa_\mu$  é definido, vista em (2.3) também ganha um significado preciso, caracterizando uma transformação de gauge do potencial, também a menos de fatores numéricos.

Até esse ponto, toda a análise feita por Dirac não apresenta novidades, já tendo sido tratado anteriormente com diferentes abordagens. Ela simplesmente mostra que a presença de uma fase não-integrável na função de onda de um sistema adquire uma explicação física sem problemas.

No entanto, sabe-se que uma fase qualquer é sempre determinada a menos de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , isto é,  $\int_C \kappa_\mu ds^\mu = \alpha + 2\pi n$ , em que  $\alpha$  é uma constante real e  $n$  um número inteiro arbitrário. Essa indeterminação entra em conflito com a interpretação da fase como o fluxo do campo eletromagnético através da superfície  $S$ , pois nada impede que diferentes funções de onda possuam diferentes  $n$ 's. Contudo, a argumentação prévia havia estabelecido que essa mudança de fase deveria ser igual para qualquer função de onda. Para resolver esse problema, vamos analisar a situação com maior cuidado.

Se considerarmos a curva  $C$  como muito pequena, a mudança de fase será também pequena, devido a necessidade de a função de onda  $\psi$  ser contínua. Nesse caso, diferentes funções de onda não poderão apresentar diferentes valores para  $n$ , pois isso faria com que essa mudança de fase não fosse necessariamente pequena. Assim, a situação não apresenta nenhum problema com a identificação com o fluxo eletromagnético.

No entanto, esse raciocínio não mantém sua validade nos pontos em que a função de onda se anula. Nesse caso, voltamos à condição de que  $\int_C \kappa_\mu ds^\mu = \alpha + 2\pi n$ . Contudo, podemos considerar somente que a constante  $\alpha$  será um valor pequeno, tal como feito anteriormente. Portanto, em ambos os casos, o que deve ser determinado como o fluxo através da superfície  $S$  é exatamente a constante  $\alpha$ .

Os pontos do espaço-tempo em que a função de onda  $\psi$  é igual a zero formam uma superfície, chamada superfície nodal, pois, sendo  $\psi$  complexa, é necessário que tanto

sua parte real quanto sua parte imaginária sejam zero. Se considerarmos a função de onda em três dimensões espaciais, fixando o tempo, essas superfícies se reduzem a linhas, chamadas linhas nodais. Podemos tratar o problema dessa maneira, o que simplifica a explicação, sem perda de generalidade. Somente as funções de onda contendo linhas nodais apresentarão  $n \neq 0$ , sendo  $n$  um valor inteiro característico de cada uma dessas linhas, definindo uma orientação para a linha nodal em relação à orientação da curva que esta atravessa.

Portanto, se tivermos uma linha nodal atravessando o caminho fechado  $C$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_C \kappa_\mu ds^\mu &= 2\pi n + \alpha \\ &= 2\pi n + \frac{e}{\hbar c} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \\ &= 2\pi n + \frac{e}{\hbar c} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (2.7)$$

lembrando que consideramos o tempo  $t = t_0$  fixo, portanto só temos fluxo magnético na superfície  $S$  delimitada por  $C$ . Daí podemos generalizar para uma curva qualquer, abandonando a restrição de ser pequena, de modo que a mudança de fase através dela seja a soma do fluxo magnético mais a contribuição de todas as linhas nodais com o valor  $n$  característico de cada uma, isto é

$$\int_C \vec{\kappa} \cdot d\vec{s} = \sum_n 2\pi n + \frac{e}{\hbar c} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.8)$$

Esse valor não é mais igual para qualquer função de onda, mas difere somente em múltiplos de  $2\pi$ , isto é, o fluxo magnético é o mesmo para todas, mas o número de linhas nodais que atravessam a superfície dependem da função de onda. Como esse resultado é válido para qualquer superfície  $S$ , se tomarmos uma superfície fechada, a mudança de fase da função de onda, dada pelo lado esquerdo de (2.8), deve ser igual a zero. Isso implica que, para toda função de onda  $\psi$ ,

$$\sum_n 2\pi n = -\frac{e}{\hbar c} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.9)$$

em que  $S$  é uma superfície fechada.

Pela definição do campo magnético como o rotacional do potencial vetor  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , o fluxo sobre uma superfície fechada é identicamente nulo. Portanto, a soma  $\sum_n 2\pi n$  deve

ser igual a zero, indicando que cada linha nodal atravessa a superfície duas vezes. Como o sinal de  $n$  está associado à orientação da linha nodal, as contribuições de cada ponto em que esta atravessa a superfície são opostas e se cancelam. Isso garante que ambos os lados de (2.9) sejam iguais a zero. No entanto, como  $\sum_n 2\pi n$  poderia ser diferente de zero?

A única maneira de isso acontecer é se ao menos uma linha nodal não atravessar a superfície  $S$  duas vezes. Logo, ela deve começar ou terminar em algum ponto interior a essa superfície. Então, a soma representa a contribuição de todas as linhas nodais que apresentam tais pontos. Isso resolve o lado esquerdo de (2.9), resta elucidar o direito.

Como esse resultado deve ser o mesmo para toda função de onda  $\psi$ , ele é independente do estado particular do sistema. Portanto, tais pontos das linhas nodais representam pontos de singularidade do campo eletromagnético. Logo, o fluxo magnético através da superfície  $S$  devido a esses pontos é

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\hbar c}{e} \sum_n 2\pi n \quad (2.10)$$

ou, para apenas um desses pontos

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\hbar c}{e} 2\pi n \quad (2.11)$$

São esses pontos das linhas nodais que Dirac identifica como pólos magnéticos, já que geram um fluxo magnético não-nulo sobre uma superfície fechada que o engloba. Visto que a equação (2.11) determina esse fluxo, pela Lei de Gauss, temos que

$$4\pi g = \frac{\hbar c}{e} 2\pi n \quad (2.12)$$

Portanto, a carga magnética desse pólo será

$$g = \frac{\hbar c}{2e} n \quad (2.13)$$

Esse resultado nos indica que a teoria permite a existência de pólos magnéticos isolados ou monopolos magnéticos. E mais: que a carga magnética desses monopolos é discreta e quantizada em termos da carga elétrica fundamental, com valor mínimo  $g_0 = \frac{\hbar c}{2e}$ , e que a carga elétrica também deve ser quantizada. Após essa exposição inicial, o artigo prossegue com a resolução da equação de Schrödinger para um elétron no campo de um monopolo e as considerações finais.

Partindo de representações generalizadas, sem muitas restrições, Dirac foi capaz de

demonstrar a compatibilidade entre a existência de monopolos magnéticos com a teoria quântica. Também foi capaz de fornecer, a partir disso, uma explicação para a quantização da carga elétrica. É exatamente essa generalidade e o profundo impacto dessas ideias nos fundamentos da física, que mostram a importância desse trabalho e explica as repercussões que ele gera até os dias de hoje.

## 2.2 Dirac revisita o monopolo

Em 1948, P.A.M. Dirac apresenta uma teoria geral para uma eletrodinâmica com cargas elétrica e magnética [6], retomando seu trabalho de 1931. Para isso, ele introduz variáveis dinâmicas para descrever o movimento da *string*. Partindo de uma descrição na ausência de monopolos magnéticos, as equações que descrevem a dinâmica do eletromagnetismo são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.14)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.15)$$

$$m_e \frac{du^\mu}{d\tau} = eu_\nu F^{\mu\nu} \quad (2.16)$$

sendo o campo  $F_{\mu\nu}$  definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.17)$$

em que o vetor  $A_\mu(x)$  é o potencial eletromagnético.

As equações (2.14) e (2.15) nos dão a dinâmica do campo eletromagnético  $F^{\mu\nu}(x)$  na presença de um termo de fonte, dado pela corrente  $j^\mu(x)$ , enquanto a equação (2.16) descreve a ação desse campo sobre uma partícula eletricamente carregada, de massa  $m_e$  e carga elétrica  $e$ . Para uma partícula cuja trajetória é dada por  $x^\mu(\tau_e)$ , em que  $\tau_e$  é o tempo próprio, e velocidade  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau_e}$ , a corrente  $j^\mu(x')$  que ela gera é descrita por

$$j^\mu(x') = e \int dx^\mu \delta(x' - x(\tau_e)) = e \int d\tau_e u^\mu \delta(x' - x(\tau_e)) \quad (2.18)$$

Ao se incluir monopolos na teoria, deve-se adicionar um termo de fonte na equação (2.15), semelhante à definição dada em (2.21), e uma equação dinâmica para os próprios

monopolos, tal como em (2.16). No entanto, o termo  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ , chamado dual do tensor eletromagnético ( $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ ), garante que a divergência do campo magnético seja nula. Portanto, ele deve ser modificado para que a teoria seja compatível com a presença de monopolos. Essa modificação deve ser feita de modo que

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu \quad (2.19)$$

$$m_g \frac{dv^\mu}{d\tau_g} = gv_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (2.20)$$

em que  $v^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau_g}$  é a velocidade do monopolo e  $k^\mu$  é a corrente gerada por um monopolo

$$k^\mu(x') = g \int dz^\mu \delta(x' - z(\tau_g)) = g \int d\tau_g v^\mu \delta(x' - z(\tau_g)) \quad (2.21)$$

Para isso, adicionamos ao campo eletromagnético um termo referente à linha nodal do monopolo. Daqui em diante, nos referiremos a essas linhas nodais simplesmente como *strings*. Como vimos na seção anterior, na descrição dada por Dirac, cada monopolo tem uma *string* associada a si, que se estende até o infinito a partir dele (ou do infinito até ele, dependendo de sua orientação, isto é, do sinal da carga magnética). Por isso, podemos escrever o termo responsável pela divergência do campo magnético em função das coordenadas da *string*. Se tivermos um monopolo na posição  $z^\mu(\tau_g)$ , a *string* descreve uma superfície  $y^\mu(\tau_g, \sigma)$ , tal que

$$y^\mu(\tau_g, \sigma) = z^\mu(\tau_g) + \eta^\mu(\tau_g, \sigma) \quad (2.22)$$

em que impomos a condição  $\eta^\mu(\tau_g, 0) = 0$ , com  $\sigma$  correspondendo à distância de um ponto ao longo da *string* ao monopolo. Com isso, podemos definir

$$G_{\mu\nu}(x) = g \int d\tau_g d\sigma \left( \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_g} \frac{\partial y_\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_g} \frac{\partial y_\mu}{\partial \sigma} \right) \delta(x - y) \quad (2.23)$$

de modo que a divergência desse campo seja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} &= g \int d\tau_g d\sigma \left( \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_g} \frac{\partial y_\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_g} \frac{\partial y_\mu}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta(x-y) \\
&= -g \int d\tau_g d\sigma \left( \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_g} \frac{\partial y_\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_g} \frac{\partial y_\mu}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial}{\partial y_\nu} \delta(x-y) \\
&= -g \int d\tau_g d\sigma \left( \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_g} \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial \sigma} - \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial \tau_g} \frac{\partial y_\mu}{\partial \sigma} \right) \\
&= -g \int \delta(x-y) \left( \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_g} d\tau_g \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} + \frac{\partial y_\mu}{\partial \sigma} d\sigma \Big|_{\tau_g=-\infty}^{\tau_g=\infty} \right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Na última igualdade acima, usamos o teorema de Stokes para realizar a integral na borda da superfície varrida pela *string*. Logo, o único termo a não ser computado no infinito é o termo correspondente às coordenadas do monopolo  $z^\mu(\tau_g)$ . Assim, temos que

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = g \int \delta(x-y) \frac{\partial y_\mu(\tau_g, 0)}{\partial \tau_g} d\tau_g = g \int \delta(x-y) \frac{\partial z_\mu(\tau_g)}{\partial \tau_g} d\tau_g = g \int \delta(x-y) u_\mu d\tau_g \tag{2.25}$$

De acordo com a equação (2.21), temos que a divergência descrita acima resulta na corrente magnética do monopolo. Portanto, estando o termo  $G_{\mu\nu}$  associado à *string* no potencial dos monopolos, vamos redefinir o campo eletromagnético como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \tilde{G}_{\mu\nu} \tag{2.26}$$

Dessa maneira, temos que

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu G^{\mu\nu} = k^\nu \tag{2.27}$$

Podemos escrever a ação desse modelo da mesma forma que escreveríamos na ausência de monopolos, isto é

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \right\} + \sum_{i=e,g} m_i \int d\tau_i \tag{2.28}$$

em que o último termo se refere às partículas elétricas e magnéticas.

A partir dessas redifinições, é possível verificar que, sob a mesma forma funcional do eletromagnetismo sem cargas magnéticas, a variação da ação em relação às variáveis de campo e às trajetórias das partículas nos retorna uma versão modificada das equações

de campo e da dinâmica das partículas eletricamente carregadas (2.35), (2.36) e (2.31), respectivamente, compatíveis com a presença de monopolos magnéticos, além da equação dinâmica para os monopolos (2.32), mostradas abaixo.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.29)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu \quad (2.30)$$

$$m_e \frac{du^\mu}{d\tau} = eu_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (2.31)$$

$$m_g \frac{dv^\mu}{d\tau} = gv_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (2.32)$$

No entanto, vemos que a equação (2.16) não é mantida, levando em conta a mudança na definição de  $F_{\mu\nu}$ , mas só vale para pontos em que  $G_{\mu\nu}(x) = 0$ . Essa condição é satisfeita se partículas eletricamente carregadas nunca atravessarem a *string* ou vice-versa. Esse requerimento, no entanto, não é arbitrário, mas parte do próprio formalismo adotado como condição interna a ele. A variação da ação em função da variável da *string*  $y_\mu$  resulta em

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial y_\mu} = 0 \quad (2.33)$$

o que indica que a corrente elétrica  $j_\mu$  se anula sobre ela. Além disso, representa uma ausência de dinâmica para a string, indicando que esta não possui natureza física, não é observável.

Partindo dessa formulação, podemos repetir todos os procedimentos usados no eletromagnetismo, como cálculo de potenciais retardados, elaboração de um formalismo hamiltoniano e quantização. Da mesma forma, recuperamos a condição de quantização das carga elétrica e magnética, já expressa na seção anterior

$$\frac{ge}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad (2.34)$$

Essa descrição da teoria eletromagnética serviu de inspiração e modelo para várias outras investigações subsequentes. Trataremos, a seguir, de uma delas, a qual foi de absoluta importância para a elaboração da proposta a ser apresentada no próximo capítulo.

## 2.3 O modelo de Nambu para o méson

Em 1973, H.B. Nielsen e P. Olesen apontam a existência de paralelismos entre os modelos de cordas duais e linhas de fluxo em supercondutores [39], investigando a possibilidade de se fazer teorias de campo com esses modelos. Segundo essa interpretação, uma corda dual representa matematicamente um tubo de fluxo magnético que desloca para fora de si um superfluido carregado, no caso, o campo de Higgs. No entanto, em sua exposição inicial, eles consideram apenas cordas que se estendam infinitamente. Inspirado por essa nova perspectiva, Y. Nambu apresenta, no ano seguinte (1974), um trabalho em que inquirir sobre as consequências dessas cordas serem abertas [16], isto é, que suas pontas não estejam no infinito. Daí ele conclui que essas pontas se comportariam como monopolos magnéticos de cargas opostas, devido à interrupção do fluxo magnético nelas.

Esse par de monopolos ligados por uma corda dual se torna um candidato para o méson, em que os quarks carregariam carga magnética. O modelo apresenta dois campos de interação massivos distintos, um escalar e outro vetorial, de massas  $m_s$  e  $m_v$ , respectivamente. Esses são o campo  $A_\mu$ , que media a interação entre os monopolos, e o campo de Higgs  $\phi$ .

Essa descrição pode ser alcançada de forma geral através de uma modificação na teoria de Dirac para o eletromagnetismo na presença de monopolos, sem a introdução de mecanismos outros. Para isso, vamos assumir as equações de London da supercondutividade como válidas nesse regime, de modo que  $j^\mu = m_v^2 A^\mu$ . Assim, as equações (2.14) e (2.27) são lidas como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = m_v^2 A^\nu, \quad (2.35)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu, \quad (2.36)$$

em que  $F^{\mu\nu}$  é definido como em (2.26). No entanto, diferentemente da *string* de Dirac, que se estende do monopolo para o infinito, nesse caso temos uma *string* que se estende de um monopolo a outro. Portanto, vamos definir as coordenadas dessa *string*  $y_\mu(\tau, \sigma)$  tal que  $y_\mu(\tau, x_1) = z_\mu^{(1)}(\tau)$  e  $y_\mu(\tau, x_2) = z_\mu^{(2)}(\tau)$  sejam as posições dos monopolos, com  $x_1 \leq \sigma \leq x_2$ . Nesse caso, a corrente  $k^\mu$  em (2.36) é a soma das contribuições de cada carga.

A equação de movimento de  $A^\mu$  pode ser obtida diretamente de (2.35), explicitando

$F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} - m_v^2 A^\nu &= 0 \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \tilde{G}^{\mu\nu}) - m_v^2 A^\nu &= 0 \\ (\square - m_v^2)A^\nu &= -\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{2.37}$$

Daí podemos ver que  $A_\mu$  é um campo vetorial de massa  $m_v$ . As equações de movimento para a *string* e para o monopolo podem ser obtidas através da variação da ação do modelo em relação às suas coordenadas. Vamos definir o lagrangeano da teoria de forma que

$$\begin{aligned}S &= \int dx^4 \mathcal{L} \\ S &= \int dx^4 \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_v^2 A_\mu A^\mu - \sum_i M_i \int d\tau \left( \frac{\partial z_\mu^{(i)}}{\partial \tau} \frac{\partial z^{\mu(i)}}{\partial \tau} \right)^{1/2} \delta(z^{(i)} - x) \right\}\end{aligned}\tag{2.38}$$

em que o primeiro termo se refere à ação do campo  $A_\mu$ , o segundo termo representa a interação entre campo e monopolos e o último a contribuição mecânica dos monopolos, sendo a soma em  $i$  definida sobre cada momopolo de massa  $M_i$ .

Essa ação pode ser reescrita de forma a defini-la sobre a superfície traçada pela *string*, tal que

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{4} g^2 m_v^2 \int d\tau d\sigma d\tau' d\sigma' [y_\mu, y_\nu] \Delta(y - y') [y^\mu, y^\nu]' \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_i g_j \int d\tau d\tau' \frac{\partial z_\mu^{(i)}}{\partial \tau} \Delta(z^{(i)} - z^{(j)'}) \frac{\partial z^{\mu(i)'}}{\partial \tau'} \\ &- \sum_i M_i \int d\tau \left( \frac{\partial z_\mu^{(i)}}{\partial \tau} \frac{\partial z^{\mu(i)}}{\partial \tau} \right)^{1/2}\end{aligned}\tag{2.39}$$

em que  $[y_\mu, y_\nu] = \left( \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial y_\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau} \frac{\partial y_\mu}{\partial \sigma} \right)$ .

Sob essa forma, temos que o primeiro termo representa uma interação entre elementos da superfície da *string*, o segundo termo a interação entre os monopolos e o terceiro a energia mecânica das partículas. Vemos que, nesse caso, a *string* carregada energia, ao contrário da *string* de Dirac. Portanto, ela possui realidade física. A energia da *string* obtida à partir de (2.39) é

$$E_{string} \gtrsim \frac{1}{8\pi} g^2 m_v^2 \ln \left( \frac{m_s^2}{m_v^2} + 1 \right) l \quad (2.40)$$

em que  $l$  é o comprimento da *string*, ou seja, a distância entre os monopolos. O parâmetro de massa do campo escalar  $m_s$  surge da analogia vinda do trabalho de Nielsen e Olesen, como um cutoff correspondente à espessura da string. Assim, a energia de interação dos monopolos ligados pela *string* dual será, aproximadamente, a energia da *string* mais a interação de Yukawa entre as partículas, isto é

$$E_{int} = \frac{1}{8\pi} g^2 m_v^2 \ln \left( \frac{m_s^2}{m_v^2} + 1 \right) l - \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v l}}{l} \quad (2.41)$$

Esse será o ponto de partida para a exposição a seguir. Ao propor um modelo para o méson usando monopolos magnéticos, Y. Nambu se depara com uma *string* física ligando duas dessas partículas. De maneira análoga a essa descrição, propomos aqui um outro tipo de partícula que carregue carga magnética, mas que, diferente do quark, possa assumir um estado livre de interações, isto é, que estejam sujeitas a um potencial de interação não confinante. Nosso objetivo é verificar se há possibilidade de dois monopolos, que interajam de maneira semelhante aos quarks no modelo de Nambu, possam formar um estados ligados e o que poderíamos esperar de tais sistemas.

## Capítulo 3

# Átomo de Nambu

Como vimos no capítulo anterior, o modelo de Y. Nambu para o méson descreve os quarks como portadores de cargas magnéticas opostas, isto é, um pólo norte e um pólo sul isolados, ligados por uma *string* energética. A interação entre eles é mediada por dois bósons massivos distintos, um escalar e o outro vetorial, sendo as massas desses bósons  $m_s$  e  $m_v$ , respectivamente. O potencial que representa essa interação tem a forma

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v r}}{r} + \frac{1}{8\pi} g^2 m_v^2 \ln \left( \frac{m_s^2}{m_v^2} + 1 \right) r \quad (3.1)$$

em que  $g$  é o módulo da carga magnética dos monopolos e  $r$  é a distância entre as duas partículas. O potencial acima está escrito de acordo com o sistema natural de unidades ( $\hbar = c = 1$ ).

Na equação (3.1), temos um termo de Yukawa, que representa uma interação de curto alcance mediada pelo bóson vetorial, e um termo linear, que representa a energia da *string*. Esse segundo termo descreve um regime de confinamento, em que quanto maior a distância entre os quarks, maior a energia de ligação do sistema, o que impede as partículas de aparecerem isoladas uma da outra. Esse tipo de comportamento é esperado na descrição de mésons. Além disso, vemos que a energia da *string* depende da massa de ambos os bósons e da carga magnética dos monopolos.

Nossa proposta é construir heurísticamente um modelo de monopolos magnéticos partindo do trabalho de Nambu, mantendo a mesma forma potencial descrita na equação (3.1), mas não a mesma natureza do modelo de Nambu e, portanto, não apresentando os mesmos mediadores da interação. A fim de simplificar nossa proposta, consideraremos apenas um bóson de interação, de massa  $\mu$ , como mediador da interação entre os monopolos. Não discorreremos sobre a natureza desse bóson, nos atendo somente à interação

decorrida da carga magnética dos monopolos. A dependência da *string* em relação à massa dos mediadores foi simplificada devido à presença de um único bóson de interação.

Temos, portanto, um sistema em que duas partículas magneticamente carregadas interagem entre si, mediadas por um bóson massivo. Essa interação é descrita por um termo de Yukawa, de curto alcance, mais um termo confinante, isto é, cuja energia aumenta com o distanciamento das partículas interagentes. Este configura um tipo de *string*, cuja energia depende da massa do bóson de interação, conforme a consideração feita acima. Assim, a equação (3.1) assume a forma

$$V(r) = \frac{g^2}{4\pi} \left( \mu^2 r - \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \quad (3.2)$$

A partir do potencial descrito na equação (3.2), podemos começar a analisar se a interação proposta permite a formação de estados ligados entre essas partículas.

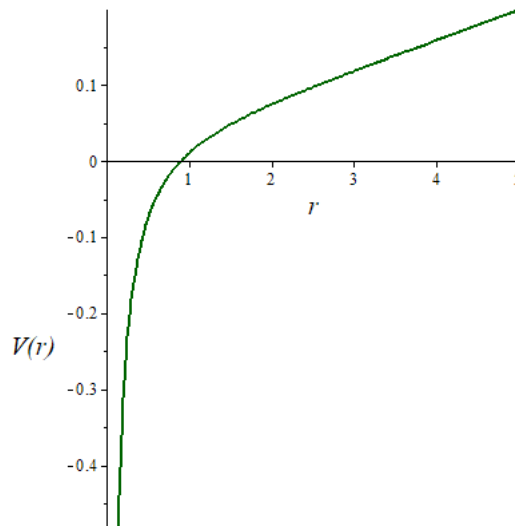


Figura 3.1: Gráfico do potencial de interação (3.2), com  $g = \mu = 1$

### 3.1 Definindo o potencial de interação

Para que um sistema de partículas interagentes possa formar estados ligados, algumas condições precisam ser verificadas. Primeiramente, o operador hamiltoniano que o descreve deve ser auto-adjunto, a fim de garantir que o modelo proposto possa descrever um sistema físico real. Além disso, o potencial deve pertencer a uma certa classe de funções, cujas restrições serão apresentadas mais a frente. E por último, a interação entre as partículas deve ser atrativa em pelo menos uma região do espaço.

Podemos notar que, no potencial definido em (3.2), a energia de interação cresce ilimitadamente quanto maior a distância entre os monopolos, devido à parte linear do potencial, tal como podemos ver na figura (3.1). Esse comportamento, característico de regimes confinantes, é indesejado, pois contraria a proposta de que as partículas possam assumir estados livres não interagentes, isto é, possam existir fora de um estado ligado.

Para evitar esse comportamento, impomos um comprimento máximo possível para a *string* que liga os dois monopolos, limitando a contribuição do termo linear do potencial a uma certa distância, após a qual ele deixa de atuar. Dessa forma, podemos garantir que monopolos a grandes distâncias não interajam uns com os outros, ou seja, se encontram em um estado livre. Portanto, essa restrição deve garantir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \quad (3.3)$$

Assumindo o potencial proposto em (3.2) e modificando o termo associado a energia da *string*, de forma a limitar sua atuação a uma região esférica de raio  $r_0$ , podemos reescrevê-lo definido por partes, como

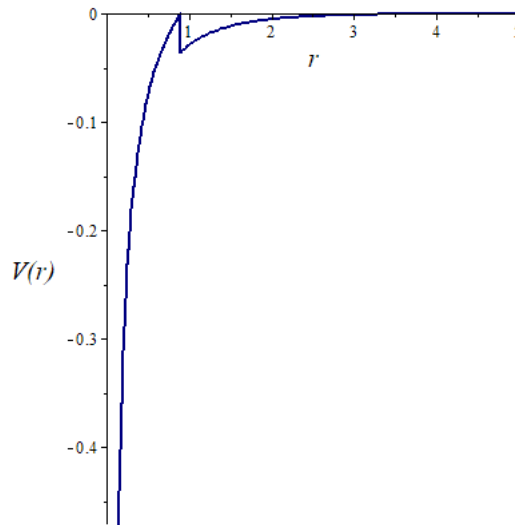
$$V(r) = \frac{g^2}{4\pi} \begin{cases} \mu^2 r - \frac{e^{-\mu r}}{r} & \text{se } r \leq r_0 \\ -\frac{e^{-\mu r}}{r} & \text{se } r > r_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Feita essa limitação, é fácil demonstrar que o potencial obedece a condição descrita em (3.3), visto que, para  $r > r_0$ , ficamos somente com o termo do tipo Yukawa, que tende rapidamente a zero

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} = 0 \quad (3.5)$$

Temos, então, que duas partículas que interajam de acordo com a proposta (3.4) não "enxergam" uma à outra se a distância que as separa for suficientemente grande. Contudo, como determinar o parâmetro  $r_0$ , relativo ao comprimento máximo da *string*?

Para garantir um potencial de interação de natureza atrativa, podemos delimitar a existência da *string* à distância em que a energia associada a ela se iguala à energia da interação tipo Yukawa, isto é, ao raio  $r_0$  tal que  $V(r_0) = 0$ . Dessa forma, temos não só uma interação tal como queríamos mas também conseguimos expressar o limite de alcance do termo linear puramente em função da massa  $m$  do bóson de interação, como exposto abaixo na expressão abaixo.


 Figura 3.2: Gráfico do potencial (3.4), com  $g = \mu = 1$ 

$$\begin{aligned}
 V(r_0) = 0 &\implies \frac{g^2}{4\pi} \left( \mu^2 r_0 - \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} \right) = 0 \\
 r_0 &= \frac{2W\left(\frac{1}{2}\right)}{\mu}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que  $W(x)$  é a função principal de Lambert. Essa função é determinada a partir da equação transcendental

$$ye^y = x \implies y = W(x) \tag{3.7}$$

O valor determinado para o comprimento  $r_0$ , definido a partir de uma escolha arbitrária, contém aspectos que indicam sua razoabilidade em relação à física do problema. O parâmetro delimita a energia da *string*, fazendo com que o potencial seja puramente atrativo e que as partículas que interagem através dele sejam partículas livres quando  $r \rightarrow \infty$ . Além disso, a menos de fatores numéricos, ele é unicamente determinado pela massa do bóson de interação. E mais, ele é inversamente proporcional a massa do bóson, ou seja, é proporcional ao comprimento de onda de Compton associado a este, que nos dá o comprimento característico dessa interação, relacionando o alcance da string ao alcance efetivo do termo exponencial.

No entanto, essa limitação, embora resolva o problema do confinamento, nos deixa com uma função contínua por partes, com uma descontinuidade exatamente no "ponto de quebra" do potencial,  $r = r_0$ , como podemos ver na Figura 3.2.

Vamos verificar explicitamente essa descontinuidade: ao tomamos o limite de  $V(r)$  tendendo a  $r_0$  pela esquerda, temos

$$\lim_{r \rightarrow r_0^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow r_0^-} \frac{g^2}{4\pi} \left( \mu^2 r - \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) = 0 \quad (3.8)$$

pela própria definição do parâmetro  $r_0$ . Mas se tomarmos o limite de  $V(r)$  tendendo a  $r_0$  pela direita, temos

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow r_0^+} -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} \neq 0 \quad (3.9)$$

Para garantir que o potencial de interação seja contínuo, redefinimos o termo associado à *string*, subtraindo dele a diferença entre os limites laterais à esquerda (3.8) e à direita (3.9). Com isso, o potencial se torna contínuo em  $r = r_0$  e, portanto, para qualquer distância  $r$ , já que esse era seu único ponto de descontinuidade. Dessa forma, o potencial de interação é expresso como

$$V(r) = \frac{g^2}{4\pi} \begin{cases} \mu^2(r - r_0) - \frac{e^{-\mu r}}{r} & \text{if } r \leq r_0 \\ -\frac{e^{-\mu r}}{r} & \text{if } r > r_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

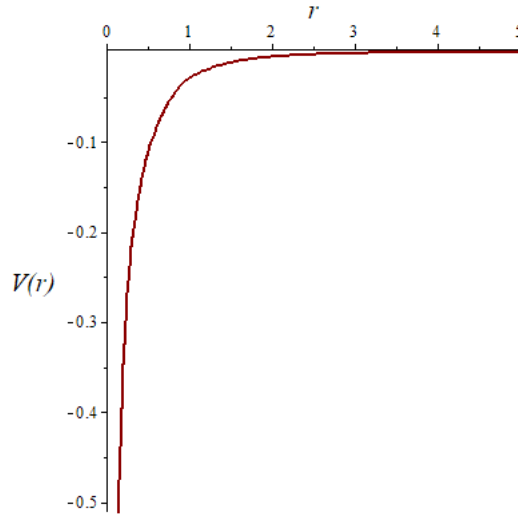
tal que

$$\lim_{r \rightarrow r_0^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow r_0^+} V(r) \quad (3.11)$$

Portanto, o potencial de interação proposto [40-42] é descrito pela equação (3.10). Assim, temos um potencial puramente atrativo, expresso por uma função contínua em todos os pontos, que tende a zero quando as partículas se encontram a grandes distâncias, tal como representado na Figura 3.3. Vamos agora partir para a verificação de possibilidade e cálculo dos estados ligados para esse sistema.

## 3.2 Estados ligados

Já vimos que uma das condições necessárias para a formação de estados ligados já foi atendida pelo nosso potencial de interação, visto que a forma final dada pela equação (3.10) não só em uma região delimitada, mas em todo o espaço. Porém, isso somente não garante a existência de estados ligados para a interação proposta. Para isso, ela deve


 Figura 3.3: Gráfico do potencial (3.10), com  $g = \mu = 1$ 

atender à condição de Kato (3.12), de forma a garantir a possibilidade desses estados [43-46].

$$\int_0^{\infty} r|V(r)|dr < \infty \quad (3.12)$$

Utilizando a forma explícita do potencial descrita pela equação (3.10), vamos verificar se o potencial atende a essa condição.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r|V(r)|dr &= \int_0^{r_0} r \left| \frac{g^2}{4\pi} \left( \mu^2(r-r_0) - \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \right| dr + \int_{r_0}^{\infty} r \left| -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right| dr \\ &= \int_0^{r_0} \frac{g^2}{4\pi} (\mu^2 r(r_0-r) + e^{-\mu r}) dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{g^2}{4\pi} e^{-\mu r} dr \\ &= \frac{g^2}{4\pi} \left( \mu^2 \left( \frac{r^2 r_0}{2} - \frac{r^3}{3} \right) - \frac{e^{-\mu r}}{\mu} \right) \Big|_0^{r_0} - \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{\mu} \Big|_{r_0}^{\infty} \\ &= \frac{g^2}{4\pi} \left( \frac{\mu^2 r_0^3}{6} + \frac{1}{\mu} \right) < \infty \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dado que o potencial obedece à condição de Kato (3.12), ele permite a formação de estados ligados de dois monopolos interagindo entre si. Com isso, podemos calcular o número máximo de estados ligados que o sistema descrito pode exibir, expresso pelo limite de Setô-Bargmann [33,35]

$$N^l \leq \frac{1}{2l+1} \int_0^\infty r |V(r)| dr \quad (3.14)$$

em que o índice  $l$  é o número inteiro que indica o momento angular orbital do sistema. Podemos notar que quanto maior o momento angular, menor será o número de estados ligados. Isso porque, para  $l \neq 0$ , o potencial efetivo a que as partículas estão submetidas é acrescido de um termo proporcional a  $l$ , o chamado "termo centrífugo", de forma que  $V_{eff} = V(r) + l(l+1)/2Mr^2$ , em que  $M$  é a massa da partícula.

O número de estados ligados possíveis dado o momento angular será o maior número inteiro menor que  $N^l$ . Portanto, para a interação aqui proposta, temos esse limite igual a

$$N^l \leq \frac{1}{2l+1} \frac{g^2}{4\pi} \left( \frac{\mu^2 r_0^3}{6} + \frac{1}{\mu} \right) \quad (3.15)$$

A partir do limite de Setô-Bargmann, podemos também calcular qual o momento angular máximo que um estado ligado entre duas partículas pode atingir. Para isso, tomamos  $N^l$  igual a 1, que é o menor número possível de estados ligados para qualquer sistema. O momento angular representado por esse valor de  $l$  é o máximo que se pode atingir mantendo um estado ligado. Temos que

$$l_{max} \leq \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty r |V(r)| dr - 1 \right) \quad (3.16)$$

em que  $l_{max}$  é o número quântico correspondente ao momento angular máximo permitido para o modelo estudado. Como já sabemos o número de estados ligados permitidos para um determinado  $l$ , dado pela equação (3.15), temos que  $l_{max}$  para o modelo aqui proposto é o menor inteiro que corresponda a

$$l_{max} \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{g^2}{4\pi} \left( \frac{\mu^2 r_0^3}{6} + \frac{1}{\mu} \right) - 1 \right] \quad (3.17)$$

Sabemos agora tanto o limite de Setô-Bargmann ( $N^l$ ), dado por (3.15), quanto o momento angular máximo ( $l_{max}$ ), dado por (3.17), ou seja, sabemos os valores máximos do número quântico principal e do número quântico orbital desse sistema, respectivamente. Esses estão expressos em termos da carga magnética do monopolo e da massa do bóson mediador da interação entre eles. Portanto, sabendo os valores das cargas e massa é possível obter explicitamente esses números.

Feito o estudo sobre a possibilidade de estados ligados, vamos agora estudar a dinâmica

dessas partículas interagindo segundo o modelo proposto e obter as energias associadas a esses estados, bem como as funções de onda que descrevem esse sistema. Iremos trabalhar em um regime não-relativístico, resolvendo a equação de Schrödinger para os monopolos com o potencial aqui construído e encontrando autofunções e autovalores que sejam soluções dessa equação.

### 3.3 Energia do estado fundamental

A equação que descreve a dinâmica de um par de monopolos interagentes é a equação de Schrödinger em três dimensões espaciais, dependendo da posição de ambas as partículas. Dado um referencial inercial fixo  $O$ , com uma partícula de massa  $m$  e carga magnética  $+g$  na posição  $\mathbf{r}_1$  e outra partícula de massa  $m$  e carga magnética  $-g$  na posição  $\mathbf{r}_2$ , a equação inicial para esse sistema é

$$-\left(\frac{1}{2m}\nabla_1^2 + \frac{1}{2m}\nabla_2^2\right)\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + V(r)\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \quad (3.18)$$

em que  $\nabla_1$  e  $\nabla_2$  são os operadores diferenciais referentes às posições  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , respectivamente.

Contudo, como estamos interessados somente na interação dos monopolos entre si e sabendo que essa depende somente da distância entre as partículas, podemos tratar o problema como um sistema isolado. Não havendo nenhum agente externo atuando sobre as partículas, temos que o momento linear total do sistema  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  é uma constante. O sistema de coordenadas mais vantajoso, nesse caso, é aquele determinado pelas próprias partículas, isto é, as coordenadas do centro de massa do sistema. Portanto, trataremos o problema usando as coordenadas do centro de massa  $\mathbf{R}$  e da posição relativa  $\mathbf{r}$  das partículas:

$$\mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{2m}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (3.19)$$

Ao reescrevermos a equação de Schrödinger (3.18) em termos desse par de coordenadas e dos operadores diferenciais  $\nabla$  referentes a elas, temos

$$-\left(\frac{1}{2M_t}\nabla_{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2M_m}\nabla_{\mathbf{r}}^2\right)\Psi'(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) + V(r)\Psi'(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) \quad (3.20)$$

em que  $M_t = 2m$  é a massa total dos sistema,  $M_m = \frac{m}{2}$  é a massa reduzida do sistema e  $\Psi'(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ .

No entanto, discutimos anteriormente que, no caso de um sistema isolado, o momento linear total  $\mathbf{P}$  do sistema é uma constante. Com isso, podemos escrever a função de onda que o descreve como  $\Psi'(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}$ , pois a equação (3.20) é separável. Se adotarmos o referencial inercial  $\mathbf{O}$  no centro de massa desse sistema, o momento total se torna nulo, de forma que  $\Psi'(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)$  e a equação (3.20) se reduz a

$$-\frac{1}{2M_m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t) + V(r)\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.21)$$

Como buscamos por estados ligados, queremos saber quais são os estados estacionários desse sistema e quais as energias associadas a eles. Portanto, podemos escrever a função de onda total como  $\psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ , sendo  $\Phi(\mathbf{r})$  a função de onda dos estados estacionários, enquanto o termo exponencial caracteriza a evolução temporal do sistema. Com essa definição de  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , a equação (3.21) se torna

$$-\frac{1}{2M_m}\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) + V(r)\Phi(\mathbf{r}) = E\Phi(\mathbf{r}) \quad (3.22)$$

em que  $E$  é a energia correspondente ao estado estacionário. Esta é a equação de Schrödinger independente do tempo

Partimos para a última consideração a ser feita, antes de prosseguirmos ao cálculo propriamente dito. Tendo em vista que o potencial que representa a interação entre os monopolos é um potencial central, isto é, depende apenas do módulo da distância entre eles, o sistema de coordenadas mais apropriado para tratar o problema é o sistema de coordenadas esféricas. Usando o método de separação de variáveis, vamos separar a função de onda em funções radial e angulares, da forma  $\Phi(\mathbf{r}) = f(r)g(\phi)h(\theta)$ . No entanto, devido a dependência puramente radial do potencial, as equações das variáveis angulares resultam em funções há muito conhecidas: os harmônicos esféricos, cuja expressão é dada por  $Y_l^m(\theta, \phi) = N_l^m P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$ , sendo  $N_l^m$  uma constante de normalização. Resta para nós resolver a parte radial do problema.

A busca pela resolução analítica da parte radial do problema não será tratada neste

trabalho e resta em aberto. Isso porque a solução da equação de Schrödinger para um potencial do tipo Yukawa  $V(r) = \alpha \frac{e^{-\beta r}}{r}$  até hoje não é conhecida [47], sendo feita somente através de métodos aproximativos e perturbativos. Portanto, sendo o potencial aqui proposto composto por uma soma de um potencial linear truncado com um potencial do tipo Yukawa, não se tem perspectiva de uma solução analítica para ele. Como primeira aproximação do problema, a busca da energia do estado fundamental do "Átomo de Nambu" foi feita através do método variacional. Isso nos permitiu estimar não só a energia, mas também o raio médio desse estado ligado de forma simples, cobrindo faixas de valores possíveis para a massa dos monopolos e a do bóson mediador da interação.

Devido à abordagem escolhida, a primeira coisa a ser feita é a escolha de uma função de onda teste ou *ansatz*, definida a menos de um parâmetro livre. Devido à simetria esférica do problema, tomamos esse *ansatz* como a função de onda de seu estado fundamental do hidrogênio [48], associada ao orbital  $1s$ . Portanto, a função normalizada  $f(r)$  que descreve a dependência radial do primeiro estado ligado  $\Phi_0(\mathbf{r})$  é

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi d^3}} e^{-\frac{r}{d}} \quad (3.23)$$

em que  $d$  é um parâmetro livre.

Resta saber qual harmônico esférico corresponderia a esse primeiro estado. Seguindo o modelo do átomo de hidrogênio, teríamos o primeiro harmônico  $Y_0^0$ , que é simplesmente uma constante. Isso porque qualquer outro resultaria num momento angular não nulo, de forma que o estado fundamental do sistema seria degenerado e, além disso, anisotrópico, isto é, apresentaria uma direção preferencial no espaço, o que não é desejado. Portanto, tomaremos a função descrita na equação (3.23) como *ansatz*, ou seja

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \Phi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi d^3}} e^{-\frac{r}{d}} \quad (3.24)$$

O hamiltoniano que descreve esse sistema pode ser identificado através da equação (3.22) como

$$\hat{H} = -\frac{1}{2M_m} \nabla^2 + V(r) \quad (3.25)$$

de modo que o valor esperado da energia dado o *ansatz* utilizado é

$$\langle \hat{H} \rangle = \int d^3x \Phi_0^*(r) \hat{H} \Phi_0(r)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{H} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty dr d\theta d\phi r^2 \sin\theta \frac{1}{\sqrt{\pi d^3}} e^{-\frac{r}{d}} \left[ -\frac{1}{2M_m} \nabla^2 + V(r) \right] \frac{1}{\sqrt{\pi d^3}} e^{-\frac{r}{d}} \\
 \langle \hat{H} \rangle &= -\frac{2}{M_m d^3} \int_0^\infty dr e^{-\frac{r}{d}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] e^{-\frac{r}{d}} + \\
 &\quad + \frac{4}{d^3} \left[ \int_0^{r_0} dr r^2 e^{-\frac{2r}{d}} g^2 \left( \mu^2 (r - r_0) - \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) + \int_{r_0}^\infty dr r^2 e^{-\frac{2r}{d}} g^2 \left( -\frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \right] \\
 \langle \hat{H} \rangle &= \frac{1}{2M_m d^2} + \frac{g^2}{\pi d^3} \left[ \mu^2 e^{-\frac{2r_0}{d}} \left( -\frac{d^2 r_0^2}{4} - \frac{d^3 r_0}{2} - \frac{3d^4}{8} \right) \right] + \\
 &\quad + \frac{g^2}{\pi d^3} \left[ \mu^2 \left( \frac{3d^4}{8} - \frac{d^3 r_0}{4} \right) - \frac{d^2}{(2 + \mu d)^2} \right] \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Tendo calculado o valor esperado do hamiltoniano, podemos encontrar qual valor do parâmetro  $d$  nos dá um extremo da função minimizando  $\langle \hat{H} \rangle$  em função do mesmo. Com isso, substituiremos esse valor de  $d$  em  $\langle \hat{H} \rangle$  e encontramos um limite superior para a energia do estado fundamental do sistema estudado. Assim

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \hat{H} \rangle}{\partial d} &= 0 \\
 -\frac{1}{M_m d^3} + \frac{g^2 \mu^2}{\pi d^3} \left[ e^{-\frac{2r_0}{d}} \left( -\frac{5dr_0^2}{4} - \frac{3d^2 r_0}{4} - \frac{3d^3}{8} - \frac{r_0^3}{2} \right) + \frac{3d^3}{8} \right] + \\
 &\quad + \frac{g^2}{\pi d^3} \left[ \frac{3d}{(2 + \mu d)^2} - \frac{\mu d}{(2 + \mu d)^3} \right] = 0 \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Como a minimização acima resulta numa equação transcendental, o problema foi resolvido numericamente utilizando-se do software Maple. Para isso, precisamos estimar alguns valores para a massa dos monopolos e para a massa do boson de interação (e o comprimento característico de interação associado a ela). A carga dos monopolos foi fixada como o menor valor possível através da condição de quantização de Dirac

$$eg = \frac{n}{2} \quad (3.28)$$

em que  $e$  é a carga do elétron e  $n$  é um número inteiro diferente de zero ( $n \in \mathbb{Z}^*$ ). Portanto,

a menor carga magnética possível segundo (3.28) é obtida fazendo-se  $n = \pm 1$ , tal que  $g = \pm \frac{1}{2e}$ . As massas dos monopolos foram estimadas variando-se a ordem de grandeza de  $10^1 GeV$  até  $10^5 GeV$ , enquanto as massas dos bosons de interação abarcaram uma certa faixa em cada ordem de grandeza, como é pode ser verificado na Tabela 3.1.

Também estimamos o raio médio ( $\langle r \rangle$ ) do estado fundamental usando o *ansatz* (3.24), cujos valores também estão expressos na tabela 3.1. Tal como fizemos com o hamiltoniano, o raio médio é calculado como

$$\langle r \rangle = \int d^3x \Phi_0^*(r) r \Phi_0(r) \quad (3.29)$$

ou, explicitamente

$$\langle r \rangle = \frac{3d}{2} \quad (3.30)$$

Dados os valores do parâmetro  $d$ , temos os valores da energia do estado fundamental e o raio médio do nosso "Átomo de Nambu". Os valores encontrados estão dispostos na tabela 3.1.

Além disso, de maneira a retornar à proposta de Nambu que nos serviu de inspiração, calculamos os valores de energia e do raio médio utilizando a massa reduzida dos quarks, tal como fizemos nos dados mostrados na Tabela 3.1, para os casos  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ , etc. Os resultados encontrados estão dispostos na Tabela 3.2. No entanto, não nos utilizamos das massas dos bósons mediadores da interação fraca  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , pois não tratamos aqui de uma interpretação para as forças nucleares, como era no caso de Nambu. Por isso, as massas do boson mediador foram estimadas de maneira a verificar se existiriam estados ligados, como feito anteriormente.

$M_m(GeV)$	$\mu(GeV)$	$\lambda(fm)$	$\langle H \rangle(eV)$	$\langle r \rangle(fm)$
$10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4.925 \cdot 10^1$	$-6.483 \cdot 10^0$	$6.126 \cdot 10^4$
	$2 \cdot 10^{-3}$	$9.850 \cdot 10^2$	$-5.953 \cdot 10^0$	$2.458 \cdot 10^5$
	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.970 \cdot 10^2$	$-1.569 \cdot 10^0$	$9.849 \cdot 10^5$
$10^0$	$4 \cdot 10^{-2}$	$4.925 \cdot 10^0$	$-6.483 \cdot 10^1$	$6.126 \cdot 10^3$
	$2 \cdot 10^{-2}$	$9.850 \cdot 10^0$	$-5.953 \cdot 10^1$	$2.458 \cdot 10^4$
	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.970 \cdot 10^1$	$-1.569 \cdot 10^1$	$9.849 \cdot 10^4$
$10^1$	$4 \cdot 10^{-1}$	$4.925 \cdot 10^{-1}$	$-6.483 \cdot 10^2$	$6.126 \cdot 10^2$
	$2 \cdot 10^{-1}$	$9.850 \cdot 10^{-1}$	$-5.953 \cdot 10^2$	$2.458 \cdot 10^3$
	$1 \cdot 10^{-1}$	$1.970 \cdot 10^0$	$-1.569 \cdot 10^2$	$9.849 \cdot 10^3$
$10^2$	$4 \cdot 10^0$	$4.925 \cdot 10^{-2}$	$-6.483 \cdot 10^3$	$6.126 \cdot 10^1$
	$2 \cdot 10^0$	$9.850 \cdot 10^{-2}$	$-5.953 \cdot 10^3$	$2.458 \cdot 10^2$
	$1 \cdot 10^0$	$1.970 \cdot 10^{-1}$	$-1.569 \cdot 10^3$	$9.849 \cdot 10^2$
$10^3$	$4 \cdot 10^1$	$4.925 \cdot 10^{-3}$	$-6.483 \cdot 10^4$	$6.126 \cdot 10^0$
	$2 \cdot 10^1$	$9.850 \cdot 10^{-3}$	$-5.953 \cdot 10^4$	$2.458 \cdot 10^1$
	$1 \cdot 10^1$	$1.970 \cdot 10^{-2}$	$-1.569 \cdot 10^4$	$9.849 \cdot 10^1$
$10^4$	$4 \cdot 10^2$	$4.925 \cdot 10^{-4}$	$-6.483 \cdot 10^5$	$6.126 \cdot 10^{-1}$
	$2 \cdot 10^2$	$9.850 \cdot 10^{-4}$	$-5.953 \cdot 10^5$	$2.458 \cdot 10^0$
	$1 \cdot 10^2$	$1.970 \cdot 10^{-3}$	$-1.569 \cdot 10^5$	$9.849 \cdot 10^0$
$10^5$	$4 \cdot 10^3$	$4.925 \cdot 10^{-5}$	$-6.483 \cdot 10^6$	$6.126 \cdot 10^{-2}$
	$2 \cdot 10^3$	$9.850 \cdot 10^{-5}$	$-5.953 \cdot 10^6$	$2.458 \cdot 10^{-1}$
	$1 \cdot 10^3$	$1.970 \cdot 10^{-4}$	$-1.569 \cdot 10^6$	$9.849 \cdot 10^{-1}$

Tabela 3.1: Energia ( $\langle H \rangle$ ) e raio médio ( $\langle r \rangle$ ) do estado fundamental para diferentes valores da massa reduzida dos monopolos ( $M_m$ ) e da massa do bóson de interação ( $\mu$ ) e do comprimento comprimento de onda de Compton reduzido ( $\lambda = \frac{1}{\mu}$ ).

quark	$\mu(GeV)$	$\lambda(fm)$	$\langle H \rangle(eV)$	$\langle r \rangle(fm)$
up	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.970 \cdot 10^3$	$-4.668 \cdot 10^{-3}$	$4.678 \cdot 10^6$
	$9 \cdot 10^{-5}$	$2.189 \cdot 10^3$	$-4.340 \cdot 10^{-3}$	$5.813 \cdot 10^6$
down	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.970 \cdot 10^3$	$-1.089 \cdot 10^{-2}$	$1.094 \cdot 10^7$
	$2 \cdot 10^{-4}$	$9.850 \cdot 10^2$	$-2.518 \cdot 10^{-2}$	$3.255 \cdot 10^6$
strange	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.970 \cdot 10^2$	$-1.651 \cdot 10^0$	$2.170 \cdot 10^6$
charm	$8 \cdot 10^{-2}$	$2.463 \cdot 10^0$	$-1.026 \cdot 10^1$	$5.065 \cdot 10^3$
bottom	$1 \cdot 10^{-1}$	$1.970 \cdot 10^0$	$-1.284 \cdot 10^1$	$1.054 \cdot 10^4$
top	$1 \cdot 10^0$	$1.970 \cdot 10^{-1}$	$-2.720 \cdot 10^2$	$4.298 \cdot 10^3$
	$5 \cdot 10^0$	$3.940 \cdot 10^{-2}$	$-7.946 \cdot 10^1$	$1.707 \cdot 10^2$
	$7 \cdot 10^0$	$2.814 \cdot 10^{-2}$	$-5.560 \cdot 10^1$	$8.676 \cdot 10^1$

Tabela 3.2: Energia ( $\langle H \rangle$ ) e raio médio ( $\langle r \rangle$ ) do estado fundamental para a massa reduzida dos quarks

### 3.4 Discussão dos resultados

Nas seções anteriores, vimos que o potencial de interação permite a formação de estados ligados entre dois monopolos, de acordo com (3.15), e calculamos a energia do primeiro estado ligado, ou estado fundamental, a partir de estimativas das massas dos monopolos

e do boson mediador. A partir desses resultados, é possível fazer certas conclusões acerca do modelo.

Primariamente, observamos a formação de estados ligados em uma ampla faixa de massa, tanto dos monopolos quanto do boson mediador, que cobre várias ordens de grandeza. Essas estimativas se baseiam em estudos experimentais (como o MoEDAL, localizado no CERN) e observacionais (como o MACRO, em Gran Sasso) em busca de monopolos magnéticos, que também apresentam amplas faixas de massa possíveis para essas partículas [49,50]. No entanto, apesar de nos inspirarmos nesses estudos para fazer nossas estimativas, como buscamos propor aqui um outro modelo de interação entre monopolos magnéticos, não nos atemos às massas por elas estabelecidas, baseadas no monopolo de Dirac.

Vemos também na Tabela 3.1 que temos uma faixa de valores para a massa do boson para cada estimativa de massa do monopolo que resulta em um estado ligado. Essa faixa de valores está provavelmente associada à forma do potencial proposto, já que a energia associada a *string* é diretamente proporcional à massa do bóson, enquanto a energia da interação do tipo Yukawa é inversamente proporcional a ela, e, no máximo, ao ansatz tomado.

Um olhar atento aos resultados obtidos correspondentes às massas reduzidas  $M_m = 10^{-1} GeV$  e  $M_m = 10^0 GeV$  faz ressaltar uma comparação muito interessante, principalmente para a massa do bóson  $\mu = 1 \cdot 10^{-2} GeV$ : os valores de energia ( $\langle \hat{H} \rangle \approx -15.7 eV$ ) e raio médio ( $\langle r \rangle \approx 10^{-10} m$  ou  $1 \text{ \AA}$ ) correspondentes são muito próximos àqueles encontrados para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. Essa similaridade sugere a possibilidade de emissões de energia na faixa de energia da luz visível para o nosso Átomo de Nambu, dando indícios de como realizar buscas experimentais baseadas nesse modelo.

Além disso, esse resultado corrobora o uso da equação de Schrödinger, isto é, o tratamento não-relativístico dado ao modelo. Muito embora não seja possível afirmar nada acerca dos resultados que serão obtidos antes dos cálculos, certas suposições sempre são feitas baseadas no que já é conhecido.

Nesse trabalho, a questão surge devido ao valor das cargas magnéticas. Por estarem fixadas pela condição de quantização de Dirac (3.28), a carga de um monopolo é sempre proporcional ao inverso da carga do elétron. Isso sugere que a interação entre dois monopolos de cargas opostas seja muito mais intensa do que a interação entre portadores de carga elétrica com cargas correspondentes, dado que sua constante de acoplamento é

$\alpha_g = g^2 = \left(\frac{n}{2e}\right)^2$ . Portanto, mesmo para o menor valor possível de  $g$  temos  $\alpha_g = \frac{137}{4}$ , o que é muito maior que  $\alpha = e^2 = \frac{1}{137}$ , sugerindo que as energias de interação serão muito maiores do que as dos átomos conhecidos. Assim, uma mera correção devido a efeitos relativísticos não seria suficiente, pois a própria natureza da interação requer uma consideração desses efeitos.

No entanto, essa suspeita não se confirmou, como atestam os resultados encontrados para os monopolos de menor massa. Já para os monopolos mais massivos, cujas energias do estado fundamental se encontram na escala de  $MeV$ , o tratamento abordado aqui não parece ser o mais adequado. Para estes, uma abordagem a partir de teorias de campo parece ser o mais adequado.

Um outra maneira de se conferir a validade da abordagem via Schrödinger é estimando a velocidade média das partículas em torno do centro de massa, o que nos dará uma ideia de quão boa é a estratégia utilizada. No caso, como o potencial é isotrópico, bem como o orbital  $1s$  do estado fundamental, a velocidade média  $\langle v \rangle = 0$ , então usaremos a raiz do valor quadrático médio ( $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ ). Partindo do princípio da incerteza de Heisenberg para essa estimativa, vamos assumir

$$\langle \Delta r \rangle \langle \Delta p \rangle \approx \hbar \quad (3.31)$$

Tomando a incerteza na posição igual ao próprio raio médio do estado ligado, cujos valores já calculamos e se encontram na Tabela 3.1, e sabendo que

$$\langle \Delta p \rangle = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} \quad (3.32)$$

pois o valor médio do momento linear é nulo, tal como a velocidade média. Assim, temos que

$$\langle \Delta r \rangle \langle \Delta p \rangle \approx \langle r \rangle \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \langle r \rangle m \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx \hbar \quad (3.33)$$

ou seja, a raiz da velocidade quadrática média é

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx \frac{\hbar}{m \langle r \rangle} \quad (3.34)$$

Basta agora substituir os valores de massa do monopolo e de raio médio presentes na Tabela 3.1 para encontrarmos o valor da velocidade. Ao utilizarmos os valores de  $10^0 GeV$

para a massa e  $\langle r \rangle = 9.849 \cdot 10^4 fm$  para o raio médio, encontramos  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 600 m/s$ , bem abaixo da velocidade da luz, indicando que as correções devido a efeitos relativísticos devem ser pequenas. É interessante notar que esses valores são aqueles que mais se aproximam do átomo de hidrogênio em termo de energia do estado fundamental e raio médio. Podemos então comparar o resultado com a velocidade média do hidrogênio, reforçando a ideia de que as correções necessárias serão pequenas.

Como existe uma correlação de escala entre a massa do monopolo e o raio médio calculado, é fácil ver que todas as combinações possíveis resultarão em valores próximos à velocidade calculada anteriormente. Portanto, o modelo é adequado para as partículas menos massivas. Para valores maiores de massa, a partir de  $10^3 GeV$ , embora apresente velocidades relativamente baixas em comparação a velocidade da luz, a escala de energia do sistema indica que um tratamento mais adequado se dá via equação de Dirac, como já discutido anteriormente.

## Capítulo 4

# Conclusão e perspectivas

O trabalho propunha a construção de um modelo de interação entre monopolos magnéticos, baseando-se na proposta de Yoichiro Nambu para descrever o méson, de 1974, e a verificação da possibilidade dessa interação permitir a existência de estados ligados entre os monopolos. Partindo da forma potencial apresentada por Nambu, propusemos um potencial de interação e averiguamos se ele atendia os requisitos para a formação de estados ligados, do sistema aqui denominado "Átomo de Nambu".

Atestada a possibilidade de estados ligados, pudemos encontrar algumas características do modelo, como: o *bound* de Setô-Bargmann, que nos diz o número máximo de estados ligados por momento angular; o momento angular máximo do sistema; a energia e o raio médio do estado fundamental do átomo. No cálculo desses últimos, utilizamos do método variacional para estimar esses valores. Devido ao método utilizado, os valores aqui apresentados são tão bons quanto a função de teste utilizada.

Todos os resultados foram expressos, a princípio, em relação aos parâmetros da interação, cujos valores não estão definidos: a massa e a carga magnética dos monopolos e a massa do bóson mediador. Estimativas dos valores desses parâmetros foram feitas para o cálculo dos limites superiores da energia do estado fundamental e de seu raio médio através do método variacional, apresentados na Tabela 3.1.

Por último, analisamos os resultados obtidos na Seção 3.3 e verificamos se a abordagem utilizada no trabalho, via equação de Schrödinger, era condizente com os resultados obtidos. Isso foi feito calculando-se a velocidade quadrática média das partículas no átomo, partindo do princípio da incerteza de Heisenberg, e se mostrou, em parte, positivo. Para os menores valores de massa apresentados na Tabela 3.1, o resultado se mostrou satisfatório. Já para os casos mais massivos, a escala da energia encontrada sugere uma abordagem

relativística.

Para dar prosseguimento ao trabalho, várias possibilidades foram deixadas. Seguindo o que foi apresentado aqui, podemos calcular as correções relativísticas nos valores de energia. Pode-se também repetir os cálculos utilizando outras funções teste, de maneira a testar se os resultados exposto aqui são os melhores possíveis. Para além disso, uma análise matemática rigorosa das condições necessárias para a auto-adjunção do operador Hamiltoniano, definido na equação (3.25), deve ser feita.

Outras possibilidades em aberto são: um tratamento relativístico para esse modelo através da equação de Dirac (supondo-se que esses monopolos sejam férmions de spin  $1/2$ ); o estudo do espalhamento de monopolos pelo potencial aqui proposto, semelhante ao estudo feito em [32]; novas abordagens quanto ao truncamento do termo linear do potencial, de modo a suavizar a sua quebra.

Mais do que simplesmente gerar um conjunto de resultados, o "Átomo de Nambu" trouxe também uma série de questionamentos e propostas em aberto para serem exploradas.

---

## Referências

---

- [1] CURIE, P. **Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre**, *Séances de la Société Française de Physique*, p.76-77, 1894
- [2] POINCARÉ, H. **Remarques sur une expérience de M. Birkeland**, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 123, p.530–533, 1896
- [3] DIRAC, P.A.M. **Quantised Singularities in the Electromagnetic Field**, *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 133, no. 821, p. 60-72, 1931
- [4] ANDERSON, C.D. **The Apparent Existence of Easily Deflectable Positives**, *Science*, vol. 76, no. 1967, p. 238-239, 1932
- [5] WU, T.T.; YANG, C.N. **Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields**, *Physical Review D*, vol. 12, no. 12, p. 3845-3857, 1975
- [6] DIRAC, P.A.M. **The Theory of Magnetic Poles**, *Physical Review*, vol. 74, no. 7, p. 817-830, 1948
- [7] TAMM, I. **Die verallgemeinerten Kugelfunktionen und die Wellenfunktionen eines Elektrons im Felde eines Magnetpoles**, *Zeitschrift für Physik*, vol. 71, p. 141-150, 1931
- [8] JORDAN, P. **Über die Diracschen Magnetpole**, *Analen der Physik*, vol. 424, no. 1-2, p. 66-70, 1938
- [9] CABIBBO, N.; FERARRI, E. **Quantum electrodynamics with dirac monopoles**, *Il Nuovo Cimento*, vol. 23, p. 1147-1154, 1962
- [10] SCHWINGER, J. **Magnetic Charge and Quantum Field Theory**, *Physical Review*, vol. 144, no. 4, p. 1087-1093, 1966

- 
- [11] GOLDHABER, A.S. **Role of Spin in the Monopole Problem**, *Physical Review*, vol. 140, no. 5B, p. 1407-1414, 1965
- [12] SAHA, M.N. **Note on Dirac's Theory of Magnetic Poles**, *Physical Review*, vol. 75, no. 12, p. 1968, 1949
- [13] GOLDHABER, A.S. **Connection of Spin and Statistics for Charge-Monopole Composites**, *Physical Review Letters*, vol. 36, no. 19, p. 1122-1125, 1976
- [14] SCHWINGER, J. **Sources and Magnetic Charge**, *Physical Review*, vol 173, no. 5, p. 1536-1544, 1968
- [15] SCHWINGER, J. **A Magnetic Model of Matter**, *Science*, vol. 165, no. 3895, p. 757-761, 1969
- [16] NAMBU, Y. **Strings, monopoles, and gauge fields**, *Physical Review D*, vol. 10, no. 12, p. 4262-4268, 1974
- [17] 'T HOOFT, G. **Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories**, *Nuclear Physics B*, vol. 79, p. 276-284, 1974
- [18] POLYAKOV, A. **Particle spectrum in quantum field theory**, *JETP Letters*, vol. 20, no. 6, p. 430-433, 1974
- [19] JULIA, B.; ZEE, A. **Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory**, *Physical Review D*, vol. 11, no. 8, p. 2227-2232, 1975
- [20] PRASAD, M.K.; SOMMERFIELD, C.M. **Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon**, *Physical Review Letters*, vol. 35, no. 12, p. 760-762, 1975
- [21] BOGOMOL'NYI, E.B. **The stability of classical solutions**, *Soviet Journal of Nuclear Physics (English Translation)*, vol. 24, no. 4, 1976
- [22] COLEMAN, S.; PARKE, S.; NEVEU, A.; SOMMERFIELD, C.M. **Can one dent a dyon?**, *Physical Review D*, vol. 15, no. 2, p. 544-545, 1977
- [23] SALAM, A. **Magnetic Monopole and two photon theories of C-violation**, *Physics Letters*, vol. 22, no. 5, p. 683-684, 1966

- [24] ZWANZIGER, D. **Local-Lagrangian Quantum Field Theory of Electric and Magnetic Charges**, *Physical Review D*, vol. 3, no. 4, p. 880-891, 1971
- [25] ZICHICHI, A. (ed.), **The Unity of the Fundamental Interactions**, New York, Plenum Press, 1983
- [26] PANAGIOTAKPOULOS, C.; SALAM, A.; STRATHDEE, J. **Supersymmetric Field Theory of Monopoles**, *Physics Letters*, vol. 115B, no. 1, p. 29-32, 1982
- [27] CRAIGIE, N.; GODDARD, P.; NAHM, W. (eds.) **Monopoles in Quantum Field Theory: Proceedings of the Monopole Meeting**, ICTP, Trieste, 1981
- [28] FLEISCHER, R.L.; WALKER, R.M. **Probabilities for an Alternative Explanation of the Moving Magnetic Monopole**, *Physical Review Letters*, vol. 35, no. 21, p. 1412-1415, 1975
- [29] CARRIGAN, R.A.; TROWER, W.P. **Magnetic Monopoles**, Nova Iorque, Plenum Press, 1983
- [30] CABRERA, B. **First Results from a Superconductive Detector for Moving Magnetic Monopoles**, *Physical Review Letters*, vol. 48, no. 20, p. 1378-1381, 1982
- [31] POLCHINSKI, J. **Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges**, *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 26, p. 4724-4727, 1995
- [32] EPELE, L.N.; FANCHIOTTI, H.; GARCÍA CANAL, C.A.; VENTO, V. **Monopolium: the key to monopoles**, *The European Physical Journal C*, vol. 56, p. 87-95, 2008
- [33] MÓL, L.A.; SILVA, R.L.; SILVA, R.C.; PEREIRA, A.R.; MOURA-MELO, W.A.; COSTA, B.V. **Magnetic monopoles and string excitations in two-dimensional spin ice**, *Journal of Applied Physics* vol. 106, no. 6, 2009
- [34] DIRAC, P.A.M. **The Quantum Theory of the Electron**, *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 117, no. 778, p. 610-624, 1928
- [35] DIRAC, P.A.M. **A Theory of Electrons and Protons**, *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 126, no. 801, p. 360-365, 1930

- [36] WEYL, H. **Gruppentheorie und Quantenmechanik**, Alemanha, S. S. Hirzel, 1931
- [37] OPPENHEIMER, J.R. **On the Theory of Electrons and Protons**, *Physical Review*, vol. 35, no. 5, p. 562-563, 1930
- [38] OPPENHEIMER, J.R. **Two Notes On the Probability of Radiative Transitions**, *Physical Review*, vol.35, no. 8, p. 939-947, 1930
- [39] NIELSEN, H.B.; OLESEN, P. **Vortex-line models for dual strings**, *Nuclear Physics B*, vol. 61, p. 45-61, 1973
- [40] AZEVEDO, D.O.R.; BISPO, M.L.; DEL CIMA, O.M.; FRANCO, D.H.T.; PEREIRA, A.R. **Is there any Nambu monopolum out there?**, trabalho em fase final de redação
- [41] AZEVEDO, D.O.R.; DEL CIMA, O.M.; FRANCO, D.H.T.; PEREIRA, A.R. The Nambu magnetic atom: magnetic monopoles bound states , *In: XXXIX Encontro Nacional de Partículas e Campos*, 2018, Campos do Jordão, disponível em: <https://sec.sbfisica.org.br/eventos/xxxix/sys/resumos/R0065-1.pdf>
- [42] AZEVEDO, D.O.R.; DEL CIMA, O.M.; FRANCO, D.H.T.; PEREIRA, A.R. **Is there any Nambu magnetic atoms out there?**, *In: XL Encontro Nacional de Partículas e Campos*, 2019, Campos do Jordão, disponível em: [https://sec.sbfisica.org.br/eventos/enfpc\\_rtfm/sys/resumos/R0208-1.pdf](https://sec.sbfisica.org.br/eventos/enfpc_rtfm/sys/resumos/R0208-1.pdf)
- [43] KODAIRA, K. **The Eigenvalue Problem for Ordinary Differential Equations of the Second Order and Heisenberg's Theory of S-matrices**, *American Journal of Mathematics*, vol.71, no.4, p. 921-945, 1949
- [44] BARGMANN, V. **On the Number of Bound States in a Central Field of Force**, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 38, no. 11, p. 961-966, 1952
- [45] SCHWINGER, J. **On the Bouns States of a Given Potential**, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 47, no. 1, p. 122-129, 1961

- 
- [46] SETÔ, N. **Bargmann's Inequalities in Spaces of Arbitrary Dimension**, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 2, p. 429-461, 1974
- [47] EDWARDS, J.P.; GERBER, U.; SCHUBERT, C.; TREJO, M.A.; WEBER, A. **The Yukawa potential: ground state energy and critical screening**, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, vol. 2017, no. 8, 2017
- [48] GALINDO, A.; PASCUAL, P. **Quantum Mechanics I**, Alemanha, Springer-Verlag, 2 ed., 1990
- [49] GIACOMELLI, G.; MARGIOTTA, A. **The MACRO Experiment at Gran Sasso**, arXiv:0707.1691v1 [hep-ex] (2007);
- [50] PATRIZII, L.; SPURIO, M. **Status of Searches for Magnetic Monopoles**, arXiv:1510.07125v1 [hep-ex] (2015)