

GLELSON PEREIRA MARQUES

**UM TEOREMA GLOBAL PARA SINGULARIDADES DE
APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

M357t
2015 Marques, Glelson Pereira, 1989-
Um teorema global para singularidades de aplicações
entre superfícies / Glelson Pereira Marques. - Viçosa, MG,
2015.
x, 80f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador : Catarina Mendes de Jesus.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 78-80.

1. Topologia. 2. Singularidades (Matemática).
3. Superfícies. 4. Teorema de Quine. I. Universidade Federal
de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514.224

GLELSON PEREIRA MARQUES

**UM TEOREMA GLOBAL PARA SINGULARIDADES DE
APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de Fevereiro de 2015.

Laércio José dos Santos

Walter Teófilo Huaraca Vargas

Catarina Mendes de Jesus
(Orientadora)

*Dedico este trabalho aos meus pais
Adoaldo e Osanir.*

A Matemática é como um moinho de café que mói admiravelmente o que se lhe dá para moer, mas não devolve outra coisa senão o que se lhe deu.

Faraday

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo espírito são e pela infinidade de caminhos que existem sobre os quais posso trilhar.

Aos meus pais Osanir e Adoaldo, por todo o esforço e sacrifícios que fizeram para educarem e trazerem-me até aqui.

Sou muitíssimo grato a minha orientadora Catarina Mendes de Jesus, pela orientação deste trabalho, paciência e compreensão. Uma pessoa espetacularmente humilde e sábia.

Aos professores Laércio José dos Santos e Walter Teófilo Huaraca Vargas, por aceitarem fazer parte da banca examinadora desta dissertação e pelas indicações de correções.

Agradeço a professora Simone Morais e aos professores Enoch Apaza, Rogério Picanço e Alexandre Alves, pelo profissionalismo e humildade com que lecionam.

Um agradecimento especial ao secretário do mestrado João Marcos, pela eficiência e humanidade em nos atender.

Agradeço aos meus amigos e colegas de mestrado pela amizade, momentos de descontração, estudos e divisão das contas: Flávio, Dayane, Marcelo, Cristiane, Lázaro, Lizeth e Sabrina. Estendo estes agradecimentos também aos meus veteranos, pelas orientações e auxílio durante as disciplinas.

Agradeço a todos os funcionários do DMA-UFV, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos meus irmãos de graduação (em ordem alfabética): Jonatas, Orlando e Rodrigo Sales, pelo incentivo e preces.

Sou grato a todos os amigos que fiz ao longo da vida e que sempre elevaram uma prece e um pensamento positivo em meu favor.

Finalmente, agradeço à FAPEMIG pelo apoio financeiro, indispensável para a realização deste sonho.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Complexos regulares	4
1.1.1 Grafos	6
1.1.2 Superfícies orientáveis	8
1.1.3 Característica de Euler de superfícies orientáveis	9
1.2 Aplicações estáveis	13
1.2.1 Conjunto singular e contorno aparente	16
1.3 Grau de aplicações entre superfícies	20
1.3.1 Grau local	20
1.3.2 Grau global	21
2 Invariantes de aplicações estáveis entre superfícies	24
2.1 Invariantes do conjunto regular	24
2.2 Transições de codimensão um	29
2.3 Efeitos das transições sobre ϕ , θ_c , θ_v , θ_g e θ_χ	35
2.3.1 Relações entre θ_c e θ_χ	44

2.4	Invariante global de aplicações estáveis	48
2.4.1	Grafos de aplicações entre superfícies	49
3	Cirurgias de aplicações estáveis	52
3.1	Cirurgia Horizontal	53
3.1.1	Aplicações na esfera e no n -toros	55
3.2	Cirurgia Vertical	58
3.2.1	Aplicações na esfera e no n -toros	60
3.3	Efeitos das cirurgias sobre ϕ , θ_c , θ_g e θ_v	62
3.4	Construção de aplicações dobra com grau d	66
4	Teorema global e aplicações	72
4.1	Resultados globais para superfícies orientadas	72
4.2	Teorema global de Quine	76
	Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

1.1	Construção de um 2-complexo.	5
1.2	Exemplos de grafos.	7
1.3	Triangulação da S^2	9
1.4	Espaço subjacente homeomorfo ao disco D^2	10
1.5	Espaço subjacente homeomorfo a S^1	10
1.6	Soma conexa do toro (T^2) com o 2-toro $(2T^2)$	11
1.7	Soma conexa de uma superfície com a S^2	11
1.8	Configuração simbólica da interseção de um plano com $C^\infty(M, N)$. . .	15
1.9	Tipos de pontos do conjunto singular.	16
1.10	Singularidades de aplicações estáveis.	17
1.11	Pontos de dobra e de cúspide.	17
1.12	Sinal das Regiões de M	19
1.13	Sinal de cúspide.	20
1.14	Grau de uma aplicação em um ponto y	21
1.15	Aplicações da esfera na esfera com grau 1.	22
2.1	Exemplo de aplicação com grau zero do toro na esfera.	25
2.2	Exemplo de uma homotopia em $C^\infty(S^2, \mathbb{R}^2)$	30
2.3	Transição do tipo Lábios.	31
2.4	Transição do tipo Bicos.	31
2.5	Transição do tipo Rabo de andorinha.	32
2.6	Transição T^0	33
2.7	Transição T^1	33

2.8	Transição T^2	33
2.9	Transição TC^1	34
2.10	Transição TC^2	34
2.11	Efeito da transição L no conjunto regular.	39
2.12	Efeito da transição B^+ no conjunto regular.	40
2.13	Efeito da transição B^- no conjunto regular.	41
2.14	Efeito da transição B no conjunto regular.	42
2.15	Diferentes aplicações com o mesmo contorno aparente.	49
2.16	Três aplicações do toro na esfera com grau zero.	50
2.17	Grafos associados as aplicações da Figura 2.15.	50
3.1	Exemplo do contorno aparente de aplicações do 4-torus no 3-toros. . . .	52
3.2	Cirurgia horizontal.	53
3.3	Exemplo de cirurgia horizontal.	56
3.4	Construção de uma aplicação da esfera na esfera com grau 2.	57
3.5	Construção de uma aplicação do dn -toros sobre o n -toros, com grau d . .	57
3.6	Construção de uma aplicação do toro na esfera, com grau 1.	58
3.7	Cirurgia Vertical.	58
3.8	Exemplo de cirurgia vertical.	61
3.9	Construção de uma aplicação do toro na esfera com contorno irreduzível. .	61
3.10	Aplicação de recobrimento.	67
3.11	Exemplo de cirurgia vertical de aplicações sobre o n -toros.	67
3.12	Exemplo de cirurgia horizontal no contorno aparente.	68

Resumo

MARQUES, Glelson Pereira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2015.
UM TEOREMA GLOBAL PARA SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES. Orientadora: Catarina Mendes de Jesus.

Em 1978, Quine ([28]) apresentou um teorema global para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, que relaciona a soma do grau das cúspides com a característica de Euler do contradomínio e de dois conjuntos da aplicação: um formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação preservada pela aplicação e, o outro, formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação invertida. Em [23], Mendes de Jesus obteve resultados que levaram a uma nova demonstração para o teorema de Quine, via transições de codimensão um e cirurgias de aplicações estáveis, no estudo do comportamento topológico dos conjuntos regulares e singulares de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas. O objetivo deste trabalho é apresentar essa nova demonstração e os principais resultados que levaram a ela.

Abstract

MARQUES, Glelson Pereira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2015.
UM TEOREMA GLOBAL PARA SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES. Adviser: Catarina Mendes de Jesus.

In 1978, Quine ([28]) presented a global theorem for stable applications between closed and oriented surfaces, which relates the sum of the degree of the cusps with the Euler characteristic of the codomain and two sets of the application: one formed by the closure of regular regions that have preserved by the application and orientation, the other, formed by the closure of regular regions which has inverted orientation. In [23], Mendes de Jesus obtained results that led to a new demonstration to Quine's theorem, via transitions of codimension one and surgeries of stable applications, in topological behavior of the study of regular and singular sets of stable maps between closed and oriented surfaces. The objective of this paper is to present this new demonstration and the main results that led to it.

Introdução

Em 1955, Whitney publicou o artigo *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane*, que se tornou fundamento para uma nova teoria sobre aplicações estáveis do plano no plano. Whitney determinou que um germe de aplicação em cada ponto é equivalente a um ponto regular, ou ponto de dobra ou uma cúspide. No final dos anos 50, Thom ([29]) notou que esses resultados poderiam ser incorporados a uma nova teoria: a Teoria das Singularidades.

Um problema clássico da Teoria das Singularidades é a classificação de aplicações estáveis, a menos de equivalências, em particular, a A –equivalência. Os rumos das pesquisas no sentido de resolver este problema se resumem, em muitos casos, na tentativa de encontrar invariantes que permitam classificar boa parte destas aplicações.

No início da década de 90, Vassiliev ([30]) desenvolveu um método para a obtenção de invariantes de isotopia locais nos espaços das funções. Essa técnica se baseia no estudo da estrutura do subconjunto discriminante, formado pelas aplicações não estáveis.

Esse método estimulou vários pesquisadores a dedicarem seus estudos a invariantes topológicos de aplicações estáveis, tanto do ponto de vista local como global, sendo aplicado em vários casos como: mergulhos de S^1 em $\mathbb{R}^3$, pelo próprio Vassiliev ([30]); imersões de S^1 em $\mathbb{R}^2$, por Arnold ([1]); superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ por Goryunov ([8]); superfícies no plano, por Ohmoto e Aicardi ([26]) e por Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster ([10]).

No caso de aplicações estáveis no plano, os invariantes estudados em [10] e [26] não são suficientes para classificar todas tais aplicações. Isso acontece quando o contorno aparente de duas aplicações estáveis não A –equivalentes possui o mesmo valor para esses invariantes. Este fato motivou a busca de um novo invariante, do ponto de vista global, que dependesse da topologia do conjunto singular sobre a superfície do domínio da aplicação.

Em [9] Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster apresentaram um invariante para o caso de superfícies orientadas no plano: o grafo, que é associado ao domínio da

aplicação, juntamente com o seu conjunto singular. Neste caso, dizemos que o grafo é dual ao conjunto singular na superfície. Este invariante caracteriza completamente a superfície do domínio: gênero, tipo topológico do complemento do conjunto singular, assim como o número de componentes singulares.

Essa técnica de associar invariantes a aplicações estáveis foi também estendida para outras aplicações estáveis como: aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera e no plano projetivo, por Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster em [13] e [14]; aplicações estáveis de 3-variedades orientadas e fechadas no $\mathbb{R}^3$, por Mendes de Jesus, Oset e Romero Fuster, em [24]; e também para aplicações estáveis de Gauss de superfícies fechadas e orientadas imersas no 3-espço, por Mendes de Jesus, Moraes e Romero Fuster em [22].

Em 1978, Quine ([28]) apresentou um teorema global para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, o qual demonstrou usando resultados da Teoria de Variedades Diferenciáveis. Este teorema relaciona a soma do grau das cúspides com a característica de Euler do contradomínio e de dois conjuntos da aplicação: M^- formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação preservada pela aplicação e, M^+ formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação invertida pela aplicação.

Em [23], Mendes de Jesus obteve resultados que levaram a uma nova demonstração para o teorema de Quine dentro da Teoria das Singularidades, no estudo do comportamento topológico dos conjuntos regular e singular de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, via transições de codimensão um e cirurgias de aplicações estáveis. O objetivo do presente trabalho é detalhar este estudo e apresentar a nova demonstração obtida para o teorema de Quine.

Neste contexto, este trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1, introduzimos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para o entendimento deste trabalho. A priori definimos os complexos regulares, grafos, superfícies fechadas e orientadas e a característica de Euler. Consequente, abordamos alguns conceitos da Teoria das Singularidades do ponto de vista da Topologia Diferencial, como, por exemplo: *a topologia de C^∞ de Whitney, aplicações estáveis, conjunto singular e grau de aplicações*. As referências utilizadas são [7], [11], [15], [16], [19], [25], [33] e [34].

No capítulo 2, inicialmente associamos a uma aplicação estável entre superfícies fechadas e orientadas o vetor ϕ , cujas coordenadas são invariantes globais da aplicação. Apresentamos também alguns invariantes globais associados aos conjuntos regulares M^+ e M^- de uma aplicação estável entre superfícies fechadas e orientadas. Estes

invariantes são: θ_v dado pela diferença entre o número de componentes regulares de M^+ e M^- , θ_g dado pela diferença entre a soma total dos gêneros de M^+ e de M^- e θ_χ dado pela diferença entre a característica de Euler de M^+ e M^- . Consequente, apresentamos uma sequência de transições de codimensão um e estudamos seus efeitos sobre os invariantes apresentados acima. E, por fim, apresentamos grafos com pesos nos vértices como um invariante global de aplicações estáveis, o qual serve para auxiliar outros invariantes já conhecidos na classificação dessas aplicações. Tomamos como referências para este capítulo os trabalhos de E. Chínaro [3], Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster [9], [12], [14], Mendes de Jesus [23] e Ohmoto e Aicardi [26].

No capítulo 3, abordamos as cirurgias de aplicações estáveis para tratar da construção de aplicações estáveis com grau arbitrário, entre superfícies fechadas e orientadas. Posteriormente, estudamos os efeitos destas cirurgias sobre os invariantes apresentados no capítulo 2. As principais referências para este capítulo são [12], [14] e [23].

Finalmente, no capítulo 4, com base nos resultados obtidos nos capítulos anteriores, apresentamos um teorema global para aplicações entre superfícies fechadas e orientadas, que leva a uma nova demonstração para o teorema de Quine ([28]), esta demonstração é devida a Mendes de Jesus em [23].

Capítulo 1

Preliminares

Um dos problemas clássicos em Topologia é a classificação dos espaços topológicos via homeomorfismos. Neste contexto, os chamados *invariantes topológicos* desempenham um papel importante nesta classificação. Em geral, um invariante topológico permite provar quando dois espaços não são homeomorfos.

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos e resultados que serão usados no desenvolvimento deste trabalho. Por serem resultados familiares, omitiremos muitas das demonstrações, mas mencionaremos as principais referências onde podem ser encontradas.

A priori, definiremos os *complexos regulares* e com base neles, trataremos de um invariante topológico completo muito utilizado para diferenciar superfícies compactas e conexas: a *característica de Euler*. Consequentemente, abordaremos alguns conceitos da Teoria de Singularidades do ponto de vista da Topologia Diferencial, como, por exemplo: a *topologia de C^∞ de Whitney*, *aplicações estáveis*, *conjuntos singulares* e *grau de aplicações*.

As principais referências deste capítulo são [7], [11], [15], [16], [19], [33] e [34].

1.1 Complexos regulares

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos no contexto da topologia de superfícies, baseados em [16], [19] e [34].

Definição 1.1. Uma *n -célula* é um conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco n -dimensional $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ com a propriedade adicional de que sua

fronteira deve ser dividida em um número finito de células com dimensões menores, chamadas **faces** da n -célula. Além disso, dados ρ uma k -célula e α uma j -célula, dizemos que $\alpha < \rho$ se α é uma face de ρ .

1. Uma célula 0-dimensional é um **ponto** A .
2. Uma célula 1-dimensional é um **segmento de linha** $a = AB$, onde A e B são 0-células.
3. Uma célula 2-dimensional é um **polígono** $\rho = ABC$ (geralmente um triângulo), onde AB , BC e AC são 1-células.

De modo geral, as faces de uma n -célula são as células de dimensão menor: pontos finais de uma 1-célula são as 0-células, a fronteira de uma 2-célula consiste de 1-células e 0-células e as faces de uma n -célula consiste de 0-células, 1-células, ..., $n - 1$ -células.

Definição 1.2. Um n -**complexo regular** é a união de k -células, com $0 \leq k \leq n$, ou seja, $K = \bigcup_{k=0}^n k$ -células.

Observemos que se $i < j$, então o i -complexo está contido em algum j -complexo.

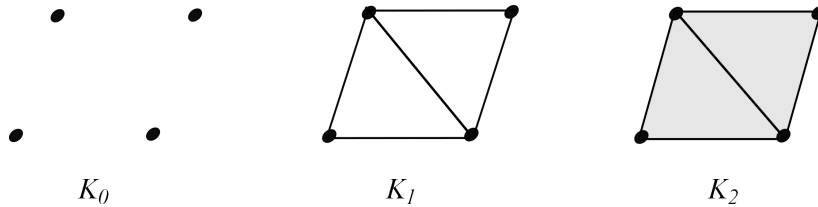


Figura 1.1: Construção de um 2-complexo.

Observemos que a dimensão do complexo K é a maior dimensão das células que o compõem. Por exemplo, a Figura 1.1 ilustra a construção de um 2-complexo porque a maior dimensão das células que o compõem é 2.

Definição 1.3. Seja K um n -complexo regular. O conjunto de todos os pontos nas células de K é

$$|K| = \{x : x \in \sigma \in K; \sigma \text{ é uma célula em } K\}.$$

$|K|$ é chamado **espaço subjacente** do n -complexo K .

Note que o n -complexo regular K e o espaço original $|K|$ são espaços distintos, pois $|K|$ é um conjunto de pontos, enquanto K é um conjunto de células.

Definição 1.4. A **característica de Euler** de um n -complexo regular K , denotada por $\chi(K)$, é o número definido pela soma alternada das células do complexo K , isto é,

$$\chi(K) = \#(0 - \text{célula}) - \#(1 - \text{célula}) + \#(2 - \text{célula}) - \dots (-1)^n \#(n - \text{célula}),$$

onde $\#(r - \text{célula})$ denota o número de r -células do complexo K .

Exemplo 1.5. Para um 2-complexo, denotando $F = \#\{\text{faces}\}$, $A = \#\{\text{arestas}\}$ e $V = \#\{\text{vértices}\}$, a característica de Euler é dada por:

$$\chi(K) = V - A + F.$$

1.1.1 Grafos

Nesta subseção introduziremos alguns conceitos da Teoria dos Grafos necessários para o entendimento deste trabalho. As principais referências são [16] e [34].

Definição 1.6. Um **grafo**, G , é um 1-complexo conexo.

Uma aresta em G conectando dois vértices u e w será denotada pelo par $[u, w]$ ou, simplesmente, por uw . Neste caso, dizemos que os vértices u e w são **adjacentes**. As arestas de um vértice u são aquelas que se conectam a este vértice, isto é, as arestas de G do tipo uw . Quando u possui apenas uma única aresta, u é chamado **vértice extremo**. Neste caso, a aresta de u é dita **aresta extrema**. **Arestas Adjacentes** são duas arestas com um extremo em comum. Um **laço** (*loop*) em G é uma aresta da forma uu . O **grau** de um vértice u , denotado por $\deg_u$, é o número de arestas incidentes sobre u .

Definição 1.7. Um **caminho** em G é uma sequência alternada de vértices (distintos) e arestas

$$v_0, [v_0, v_1], v_1, [v_1, v_2], v_2, \dots, v_{t-1}, [v_{t-1}, v_t], v_t.$$

O número natural t é chamado de **tamanho** do caminho. Supondo que ocorra $v_0 = v_t$, o caminho será chamado de **ciclo**. Se G não possui ciclos dizemos que G é uma **árvore**.

Exemplo 1.8. A Figura 1.2 ilustra quatro exemplos de grafos. Em (a) não ocorrem ciclos, em (b) e (c) ocorrem um ciclo e em (d) ocorre um laço (ciclo com uma única aresta).

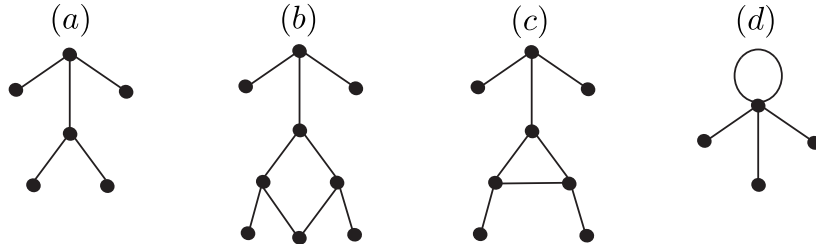


Figura 1.2: Exemplos de grafos.

Definição 1.9. O número de ciclos de um grafo G é chamado de **número de Betti** do grafo G e é denotado por $\beta_1(G)$.

Teorema 1.10. [16] Se G é um grafo, então o **número de ciclos** de G é dado por

$$\beta_1(G) = 1 - V + A,$$

onde V e A são, respectivamente, o número de vértices e arestas de G .

Definição 1.11. Uma **árvore** é um grafo G que não possui ciclos.

O grafo ilustrado em 1.2 (a) é uma árvore.

Note que no caso em que G é uma árvore, temos $V = A + 1$.

Observação 1.12. Dado que um grafo G é um 1-complexo, segue pela do Exemplo 1.5 que a característica de Euler de um grafo é dada por

$$\chi(G) = V - A.$$

Teorema 1.13. [16] Dado um grafo G , se G é uma árvore, então $\chi(G) = 1$.

Teorema 1.14. [16] A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.

Definição 1.15. Um grafo G é dito **bipartido** se é possível atribuir sinais $\pm$ a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário, dizemos que G é **não-bipartido**.

Teorema 1.16. [34] Um grafo G é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos têm tamanho par. Caso contrário, se G tem um ciclo de tamanho ímpar, ele é não-bipartido. Consequentemente, toda árvore é um grafo bipartido.

Exemplo 1.17. Na Figura 1.2, o grafo (b) é bipartido pois tem ciclo de tamanho quatro, enquanto o grafo (c) não é bipartido por ter um ciclo de tamanho três.

Definição 1.18. *Dois grafos G_1 e G_2 são ditos **isomorfos** se existe uma bijeção $\rho : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ preservando adjacências, isto é: $uw \in A(G_1)$ se, e somente se, $\rho(u)\rho(w) \in A(G_2)$, onde $V(G_i)$ e $A(G_i)$ são, respectivamente, os vértices e as arestas do grafo G_i , com $i = 1, 2$.*

Definição 1.19. *Um **grafo com peso** é um grafo em que a cada um dos seus vértices está associado um número natural.*

Neste trabalho, os grafos considerados são apenas os grafos com pesos, os quais a partir de agora, serão chamados apenas de grafos.

1.1.2 Superfícies orientáveis

Definição 1.20. *Uma **variedade topológica n -dimensional** é um espaço topológico de Hausdorff tal que todo ponto possui uma vizinhança topologicamente equivalente a um disco aberto n -dimensional, centrado em x e com raio r , $D^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| < r\}$.*

Definição 1.21. *Uma **variedade topológica n -dimensional com bordo** é um espaço topológico de Hausdorff tal que todo ponto tem uma vizinhança topologicamente equivalente a um disco n -dimensional ou a um meio disco $D_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r \text{ e } x_n \geq 0\}$.*

Definição 1.22. *Uma **superfície** é uma variedade 2-dimensional.*

Definição 1.23. *Uma superfície M é **orientável** se toda curva fechada e simples sobre M preserva a orientação. Caso contrário, se existe uma curva que inverte a orientação, dizemos que M é **não-orientável**.*

Exemplo 1.24. *A esfera e o k -toro são exemplos de superfícies sem bordo, enquanto que a faixa de möbius e o cilindro circular, reto e finito são superfícies com bordo, pois possuem pontos cuja vizinhança é topologicamente equivalente (homeomorfa) a meio disco. A faixa de möbius possui apenas um bordo e o cilindro possui dois bordos circulares. Dentre estas superfícies a esfera, o k -toro e o cilindro são orientáveis, já a faixa de möbius é não-orientável, pois possui um caminho fechado que inverte a orientação.*

Dizer que uma superfícies é não-orientável e o mesmo que dizer que ela contém uma faixa de möbius. Mas, para este trabalho importam apenas as superfícies orientáveis.

Definição 1.25. *Um espaço topológico 2-dimensional M é **triangulável** se é possível arranjar um 2-complexo k com espaço subjacente $|K|$ homeomorfo a M ($|K| \cong M$),*

que possua apenas células triangulares que satisfazem a condição de que dois triângulos são identificados ao longo de uma aresta, ou somente em um vértice ou são disjuntos.

Definição 1.26. Uma triangulação de um complexo K é dito **complexo simplicial** ou uma **triangulação em M** . Uma célula de um complexo simplicial é dito **simplex**.

Definição 1.27. Uma **triangulação de uma superfície** (sem bordo) é um 2-complexo simplicial tal que:

1. cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta;
2. um dado vértice pode pertencer a n triângulos, denotados por $T_1, \dots, T_n$, de modo que nesta sequência, dois a dois triângulos são adjacentes e possuem uma aresta em comum, e T_n se identifica com T_1 ao longo de uma aresta.

Teorema 1.28. [16] Uma superfície é **compacta** se, e somente se, qualquer triangulação possui um número finito de triângulos.

Definição 1.29. Uma superfície é dita **fechada** se é compacta e não possui bordo.

Teorema 1.30. [16] Uma superfície é **conexa** se, e somente se, uma triangulação pode ser arranjada na ordem $T_1, \dots, T_n$, de modo que cada triângulo possui no mínimo uma aresta identificada com a aresta do triângulo anterior.

Exemplo 1.31. A Figura 1.3 ilustra uma triangulação da 2-esfera (S^2). Como podemos ver, cada triângulo possui pelo menos uma aresta comum com a aresta de outro triângulo. Além disso, qualquer triangulação da S^2 é finita. Portanto, ela é uma superfície compacta e conexa.

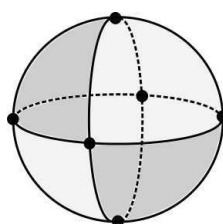


Figura 1.3: Triangulação da S^2 .

1.1.3 Característica de Euler de superfícies orientáveis

Seja M uma superfície compacta e conexa. Pode-se demonstrar (ver [16]) que se K é um 2-complexo regular, tal que seu espaço subjacente $|K|$ é homeomorfo a M ($|K| \cong M$), então a *característica de Euler* de M é dada por $\chi(M) = \chi(K) = V - A + F$ (ver Definição 1.4 e Exemplo 1.5). A característica de Euler de uma superfície independe do 2-complexo regular construído.

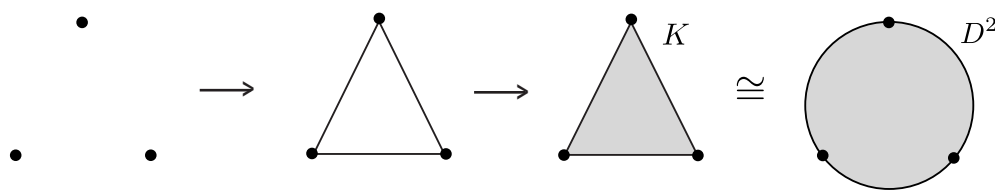


Figura 1.4: Espaço subjacente homeomorfo ao disco D^2 .

Exemplo 1.32. O disco fechado D^2 possui a mesma característica de Euler que uma região triangular. Com efeito, tome três pontos não colineares no plano. Una-os com arestas e considere uma face na região delimitada por esta figura. Temos então um 2-complexo K cujo o espaço subjacente $|K|$ é uma região triangular do plano, como ilustra a Figura 1.4. Como esta região é homeomorfa a um disco fechado, segue que $\chi(D^2) = \chi(K)$. Em K , $V = 3$, $A = 3$ e $F = 1$, logo, $\chi(D^2) = V - A + F = 1$.

Exemplo 1.33. A fim de calcular a característica de Euler da 1-esfera (S^1), construímos um 1-complexo regular K cujo o espaço subjacente $|K|$ é homeomorfo a S^1 , conforme Figura 1.5.

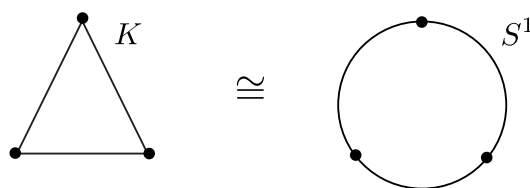


Figura 1.5: Espaço subjacente homeomorfo a S^1 .

Deste modo, $\chi(S^1) = \chi(K)$ e prova-se que o seu valor independe do 1-complexo construído. Como podemos ver na Figura 1.5, o número de vértices é igual ao número de arestas ($V = A = 3$). Assim, concluímos facilmente que $\chi(S^1) = 0$.

Exemplo 1.34. De modo análogo aos Exemplos 1.32 e 1.33, usando, por exemplo, a triangulação da S^2 ilustrada na Figura 1.3, obtemos $\chi(S^2) = 2$.

O próximo teorema diz que a característica de Euler constitui um invariante topológico completo para superfícies compactas e conexas. Isso significa que se M e N são superfícies compactas, conexas e homeomorfas, então elas possuem a mesma característica de Euler, ou seja, $\chi(M) = \chi(N)$.

Teorema 1.35. [34] Duas superfícies compactas e conexas são homeomorfas se, somente se, elas têm a mesma característica de Euler e são ambas orientáveis ou ambas não-orientáveis.

Proposição 1.36. [16] Se M e N são superfícies compactas e conexas, então

$$\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N). \quad (1.1)$$

Proposição 1.37. *Seja $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$ a união de superfícies compactas e conexas (com bordo), tais que para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$, ou $M_i \cap M_j = \emptyset$ ou $M_i \cap M_j$ é homeomorfo a S^1 . Então*

$$\chi(M) = \sum_{l=1}^k \chi(M_l). \quad (1.2)$$

Sejam M e N duas superfícies disjuntas. Em cada uma delas, removendo um pequeno disco, obtemos as superfícies M' e N' com uma nova componente de bordo cada, denotadas por c_1 e c_2 . Colando c_1 e c_2 , como exemplifica a Figura 1.6, obtemos uma nova superfície.

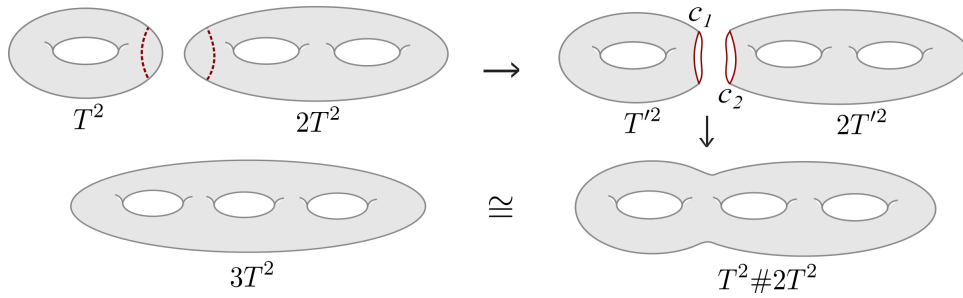


Figura 1.6: Soma conexa do toro (T^2) com o 2-toro ($2T^2$).

Definição 1.38. A **soma conexa** de M e N , denotada por $M \# N$ é a nova superfície obtida na descrição acima (a Figura 1.6 ilustra uma soma conexa).

Observação 1.39. Ao efetuarmos a soma conexa de uma superfície qualquer com a esfera, não alteramos (a menos de homeomorfismo) a superfície. Em outras palavras, $M \# S^2 = M$, seja qual for a superfície M , conforme mostra a Figura 1.7. Isso significa que a S^2 é o elemento neutro da soma conexa de superfícies.

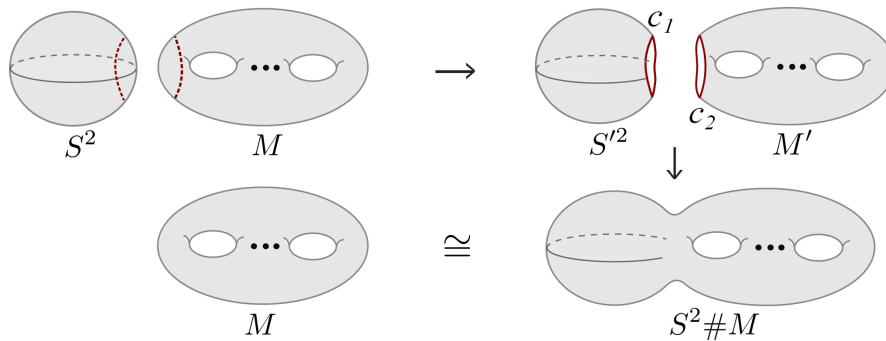


Figura 1.7: Soma conexa de uma superfície com a S^2 .

Proposição 1.40. [19] *Para a soma conexa de duas superfícies, M e N , temos que*

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2. \quad (1.3)$$

Demonstração: Se M e N são disjuntas e $M' = M \setminus D^2$, então

$$\begin{aligned}\chi(M') &= \chi(M) - \chi(D^2) \\ &= \chi(M) - 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\chi(N') &= \chi(N) - \chi(D^2) \\ &= \chi(N) - 1\end{aligned}$$

Além disso, $M' \cap N' \cong S^1$. Logo,

$$\chi(M \# N) = \chi(M' \cup N').$$

Pela Proposição 1.36 segue que

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2.$$

□

Teorema 1.41. *(Teorema de Classificação) [16] Toda superfície compacta, orientável e sem bordo é homeomorfa a esfera S^2 ou a soma conexa de n toros.*

Definição 1.42. *O gênero de uma superfície compacta e orientável M , denotado por $g(M)$, corresponde ao número de toros ou alças presentes nela.*

Teorema 1.43. *(Teorema de Classificação) [16] Uma superfície compacta, orientável e com bordo é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de n toros, com um número finito de discos removido.*

Teorema 1.44. *[19] Seja M uma superfície compacta e orientável com k componentes de bordo. A característica de Euler de M é dada por*

$$\chi(M) = 2 - 2g(M) - k.$$

Corolário 1.45. *Se M uma superfície compacta, orientável e sem bordo, então*

$$\chi(M) = 2 - 2g(M). \quad (1.4)$$

Desse modo, dado o gênero da superfície, podemos determinar sua característica de Euler.

Definição 1.46. *Seja M uma superfície compacta, orientável e sem bordo. O gênero*

de M é dado por

$$g(M) = \frac{1}{2}(2 - \chi(M)). \quad (1.5)$$

Assim, dado a característica de Euler da superfície, conseguimos saber qual é o gênero dessa superfície.

1.2 Aplicações estáveis

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos da Teoria das Singularidades do ponto de vista da Topologia Diferencial, tais como: *variedades diferenciáveis*, *aplicações estáveis*, *topologia C^∞ de Whitney* e *conjuntos singulares*. As principais referências são [7], [27] e [33].

Definição 1.47. *Sejam X uma variedade topológica n -dimensional e V_i um aberto de $\mathbb{R}^n$, onde $I \ni i$ é um conjunto de índices. Dizemos que X é **diferenciável de classe C^k** , $0 < k \leq \infty$, se é um conjunto junto com uma família de aplicações biunívocas $\phi_i : U_i \subset X \rightarrow V_i$, chamadas **carta local** (ou sistema de coordenadas local), tal que:*

- i) *Os domínios das cartas recobrem M , isto é, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.*
- ii) *Para todo par $i, j \in I$, o domínio das aplicações $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$, isto é, $\phi_i(U_i \cap U_j)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e as aplicações*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

são diferenciáveis de classe C^k .

Uma família de cartas locais $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ satisfazendo as condições da Definição 1.47, é dita uma *estrutura diferenciável de classe C^k* em X ou um **atlas de classe C^k** em X . As inversas das cartas locais são ditas **parametrizações locais** e as aplicações $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ são chamadas de **mudança de coordenadas local**.

Ou seja, uma *variedade* é um objeto que é construído localmente, como o espaço aritmético $\mathbb{R}^n$, onde n designa a sua dimensão. Portanto, uma superfície (que já sabemos ser uma variedade topológica 2-dimensional) é do ponto de vista da definição acima, diferenciável.

Dadas duas variedades diferenciáveis X e Y , denotamos por $C^r(X, Y)$, $r < \infty$ o espaço das aplicações diferenciáveis de classe C^r de X em Y e, por $C^\infty(X, Y)$ o espaço das aplicações diferenciáveis de classe C^∞ de X em Y . A topologia dos espaços destas aplicações (ver [15]) pode ser dada como segue.

Definição 1.48. Sejam $f \in C^r(M, N)$, $r < \infty$, $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ um atlas de M localmente finito, $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ uma cobertura por compactos de M com $K_i \subset U_i$ tal que $f(K_i) \subset V_i$. Considere $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$ um atlas de N e $\epsilon = \{\epsilon_i\}_{i \in \Lambda} > 0$ uma família de números reais. Uma vizinhança fundamental $\mathcal{N}^r(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$ de f é o conjunto das aplicações $g : M \rightarrow N$ tal que para todo $i \in \Lambda$, $g(K_i) \subset V_i$ e

$$\|D^k(\psi_i \circ f \circ \phi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i \circ g \circ \phi_i^{-1})(x)\| < \epsilon_i$$

para todo $x \in \phi_i(K_i)$, $k = 0, \dots, r$.

Observação 1.49. Em outras palavras, a representação local de g e suas derivadas estão ϵ -próximas da representação local de f e suas derivadas dentro de cada compacto que cobre X .

Definição 1.50. A **topologia C^r de Whitney** em $C^r(X, Y)$ é gerada pelas vizinhanças (abertos) descritos na Definição 1.48.

Definição 1.51. A **topologia C^∞ de Whitney** em $C^\infty(X, Y)$ é definida como a união das topologias induzidas pela inclusão $C^\infty(X, Y) \rightarrow C^r(X, Y)$, $r < \infty$.

Definição 1.52. Seja o grupo $\mathcal{A} = \{\phi : X \rightarrow X, \psi : Y \rightarrow Y\}$, onde ϕ e ψ são difeomorfismos. Em relação a composição, $\mathcal{A}$ atua sobre $f \in C^\infty(X, Y)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} \times C^\infty(X, Y) &\rightarrow C^\infty(X, Y) \\ ((\phi, \psi), f) &\mapsto \varphi((\phi, \psi), f) = g = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

Definição 1.53. A $\mathcal{A}$ -**órbita** de uma aplicação $f \in C^\infty(X, Y)$, é o subconjunto das aplicações $g \in C^\infty(X, Y)$, tais que existe um par de difeomorfismos $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}$ onde $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Definição 1.54. Sejam $f, g \in C^\infty(X, Y)$, com X e Y variedades diferenciáveis. Dizemos que f é $\mathcal{A}$ -**equivalente** a g (estão na mesma $\mathcal{A}$ -órbita), e denotamos por $f \sim_{\mathcal{A}} g$, se existem difeomorfismos $\phi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Definição 1.55. Dizemos que $f \in C^\infty(X, Y)$ é $\mathcal{A}$ -**estável** se existe uma vizinhança aberta W_f de f , na topologia C^∞ -Whitney, tal que para toda aplicação $g \in W_f$, vale a relação $f \sim_{\mathcal{A}} g$.

Denotamos por $\mathcal{E}(X, Y) \subset C^\infty(X, Y)$ o conjunto das aplicações $\mathcal{A}$ –estáveis de X em Y , e o complementar por $\mathcal{D} = C^\infty(X, Y) \setminus \mathcal{E}(X, Y)$ que é dito **conjunto discriminante** e é formado pelas aplicações não estáveis.

Definição 1.56. *Duas aplicações $f, g \in C^\infty(X, Y)$ são **isotopicamente estáveis** se existe uma aplicação $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de classe C^∞ tal que:*

- i) $F_t : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ é estável para cada $t \in [0, 1]$;
- ii) $F_0 = f$ e $F_1 = g$.

Definição 1.57. *Duas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ de classe C^∞ , são ditas **homotópicas** (e representamos por $f \simeq g$) se existe uma aplicação contínua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que:*

- i) $F(x, 0) = f(x)$;
- ii) $F(x, 1) = g(x)$;

para todo $x \in X$. Neste caso dizemos que F é uma homotopia entre f e g ($F : f \simeq g$).

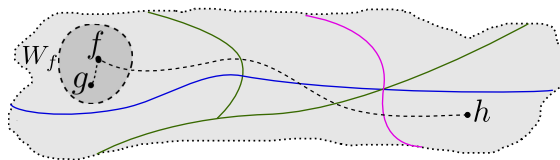


Figura 1.8: Configuração simbólica da interseção de um plano com $C^\infty(M, N)$.

Observação 1.58. *Dizer que f e g são isotopicamente estáveis é equivalente a dizer que f e g se encontram na mesma componente conexa de $\mathcal{E}(X, Y)$, pois uma isotopia estável define um caminho estável entre estas aplicações. Por exemplo, na Figura 1.8 as aplicações f e g são $\mathcal{A}$ –equivalentes e conseqüentemente isotopicamente estáveis, enquanto as mesmas em relação a h não são isotopicamente estáveis, pois estão em diferentes componentes conexas de $\mathcal{E}(X, Y)$. No entanto, f e g em relação a h são homotópicas.*

Para descarregar as notações, de agora em diante nos referiremos as aplicações $\mathcal{A}$ –equivalentes e $\mathcal{A}$ –estáveis apenas por **equivalentes** e **estáveis**, respectivamente.

1.2.1 Conjunto singular e contorno aparente

Nesta subseção apresentaremos algumas propriedades de aplicações estáveis $f : M \rightarrow N$, onde M e N são superfícies compactas, conexas, orientadas e sem bordo. Salvo menção contrária, estaremos sempre tratando deste tipo de aplicação. Os teoremas e definições apresentados são devidos a Whitney e foram retirados de [7], [15] e [33].

Definição 1.59. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , o **conjunto singular** de f , denotado por Σf , é o conjunto de pontos $p \in M$ nos quais o posto da diferencial df_p não é máximo. Um ponto $p \in M \setminus \Sigma f$ é dito **ponto regular** de f e um ponto $y \in N$ é dito **valor regular** de f se, $f^{-1}(y)$ contém somente pontos regulares. O **contorno aparente** de f , denotado por $Bf = f(\Sigma f)$, é a imagem do conjunto singular de f .*

Observação 1.60. [7] *Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável, então o conjunto singular de f , Σf , é uma subvariedade de codimensão 1 em M .*

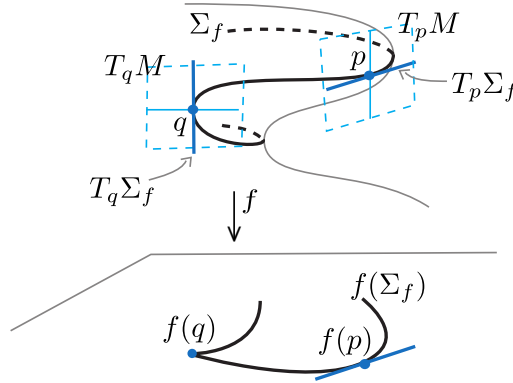


Figura 1.9: Tipos de pontos do conjunto singular.

Se $p \in \Sigma f$, então, como ilustra a Figura 1.9, uma das seguintes situações ocorrem:

$$\begin{cases} (a) & T_p \Sigma f \oplus \text{Ker}(df_p) = T_p M \\ (b) & T_p \Sigma f = \text{Ker}(df_p) \end{cases}.$$

onde $T_p \Sigma f$ é a reta tangente à Σf no ponto p e $\text{Ker}(df_p)$ é o núcleo da aplicação diferencial de f no ponto p .

Definição 1.61. *Um ponto $p \in M$ é dito **ponto de dobra** se satisfaz (a) e **ponto de cúspide** se satisfaz (b).*

Na Figura 1.9, p é um ponto de dobra e q é um ponto de cúspide. Note que o $T_p \Sigma f$ é levado pela df_p na reta tangente a $f(p)$, enquanto que $T_q \Sigma f$ é levado por df_q sobre $f(q)$.

Segundo Whitney [33], se f é uma aplicação estável, então para cada ponto $p \in M$, existem coordenadas locais (x_1, x_2) centradas em p e (y_1, y_2) centradas em $f(p)$, tais que f é equivalente a uma das formas locais:

- i) $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$, p é ponto regular;
- ii) $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1^2, x_2)$, p é ponto de dobra;
- iii) $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1x_2 - x_1^3, x_2)$, p é ponto de cúspide.

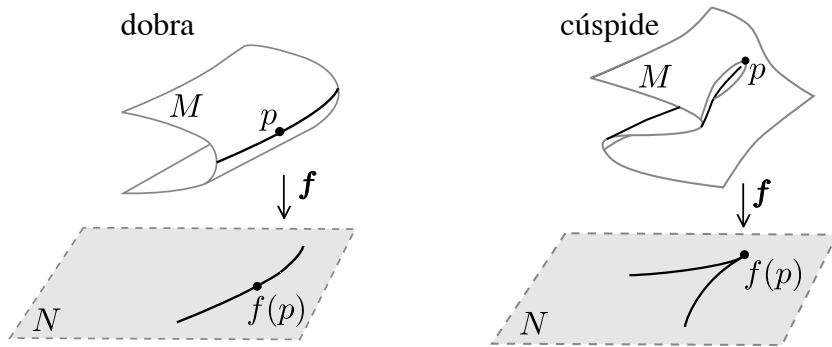


Figura 1.10: Singularidades de aplicações estáveis.

Definição 1.62. O conjunto singular de f é formado por curvas de dobra com a possibilidade de pontos de cúspides isoladas, ou seja, $\Sigma f = D_f \cup C_f$, onde $D_f = \{p \in \Sigma f; p \text{ é ponto de dobra}\}$ e $C_f = \{p \in \Sigma f; p \text{ é ponto de cúspide isolado}\}$.

Definição 1.63. Uma aplicação estável entre superfícies é chamada de **aplicação plana de Whitney** ou **aplicação excelente**

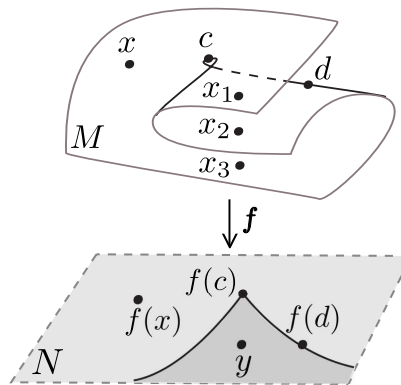


Figura 1.11: Pontos de dobra e de cúspide.

Na Figura 1.11, d é um ponto de dobra e a cúspide c é (sempre) o ponto de encontro de duas curvas de dobra. Note que uma curva singular (sempre) separa regiões de M

cuja orientação é preservada ou invertida por f , e também que o ponto y possui três pré-imagens, a saber, x_1 , x_2 e x_3 , enquanto o ponto $f(x)$ possui apenas uma pré-imagem x .

Definição 1.64. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação estável, a **orientação das curvas** do contorno aparente de f é dada da seguinte maneira: ao percorrer a curva de acordo com a sua orientação, o número de pré-imagens de f é sempre maior do lado esquerdo.*

Observação 1.65. *Se dois pontos na imagem de uma aplicação estável estão separados por uma curva do contorno aparente, então a diferença do número de suas respectivas pré-imagens é dois, sendo que a região para a qual a cúspide aponta possui menos pré-imagens. Por exemplo, na Figura 1.11 a região para a qual a cúspide aponta possui apenas uma pré-imagem, enquanto a outra região possui três pré-imagens.*

Lema 1.66. *Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável, onde M é uma superfície fechada e orientada, então as curvas que compõem o conjunto singular Σf são todas fechadas, simples e disjuntas.*

Demonstração: Considere a aplicação f dada no enunciado. Se existe uma curva α_i do conjunto singular de f aberta, ou seja, que termine em um dado ponto, então os dois lados de $f(\alpha_i)$ possuem o mesmo número de pré-imagens, o que contradiz a Definição 1.64. Se existe uma curva α_i do conjunto singular de f com auto-interseção, obtemos uma contradição quando analisamos localmente no ponto de auto-interseção as regiões cuja orientação é preservada e invertida por f . Análogo para o caso de duas curvas com ponto em comum.

Portanto, o conjunto singular de f deve possuir somente curvas fechadas, simples e disjuntas. $\square$

Observação 1.67. *As componentes do complemento do conjunto singular de uma aplicação estável f são levadas por f com orientações opostas, logo Σf separa $M \setminus \Sigma f$ em componentes disjuntas. As curvas singulares de Σf separam M em regiões conexas, que são as componentes do complemento $M \setminus \Sigma f$. Isto se deve ao fato do conjunto Σf ser composto apenas de curvas fechadas em M , conforme o Lema 1.66.*

Como o conjunto singular de uma aplicação estável é composto por dobras e cúspides isoladas, segue pelo Lema 1.66:

Proposição 1.68. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável, onde M é uma superfície fechada e orientada. O contorno aparente de f , Bf , é uma coleção de curvas fechadas imersas em N , cujas singularidades são pontos duplos transversais, ou seja, sem tangências e pontos de cúspides isolados.*

Observação 1.69. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável onde M e N são superfícies fechadas e orientadas, então as curvas do conjunto singular Σf separam as regiões de M cuja orientação é preservada ou invertida por f .

Respeitando o fato de que cada curva singular de Σf separa regiões de M cujas orientações são opostas, podemos atribuir a uma aplicação estável f entre duas superfícies fechadas e orientadas, sinais $\pm$ a cada uma das componentes do complemento $M \setminus \Sigma f$.

Definição 1.70. Uma região conexa $R \in M \setminus \Sigma f$ é dita **positiva** de f preserva a sua orientação, caso contrário, R é dita **negativa**.

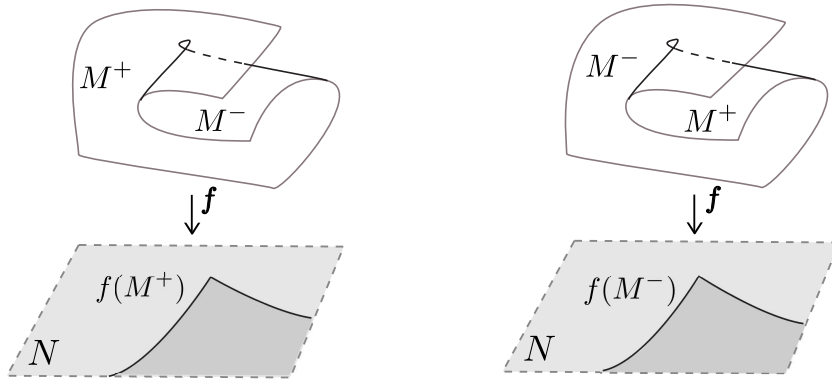


Figura 1.12: Sinal das Regiões de M .

Definição 1.71. Denotemos por M_i^+ o **fecho** de cada região conexa de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é preservada por f , e M_j^- o fecho de cada região conexa cuja orientação é invertida por f .

Para facilitar as notações consideremos os conjuntos regulares $M^+ = \bigcup_i M_i^+$ e $M^- = \bigcup_j M_j^-$, disso segue que M_i^+ e M_j^- são superfícies compactas com bordo e além disso

$$M = M^+ \bigcup M^- \quad \text{e} \quad \Sigma f = M^+ \bigcap M^-,$$

onde

$$M_i^+ \bigcap M_j^- \in \Sigma f \quad \text{ou} \quad M_i^+ \bigcap M_j^- = \emptyset.$$

Podemos definir o sinal de qualquer cúspide de f , levando em consideração a orientação da região para a qual ela aponta, como mostra a Figura 1.13.

Definição 1.72. Se a cúspide c aponta para a região positiva da aplicação estável f , dizemos que o sinal da cúspide é $s(c) = +1$, caso contrário, se a cúspide aponta para a região negativa de f , dizemos que o sinal da cúspide é $s(c) = -1$.

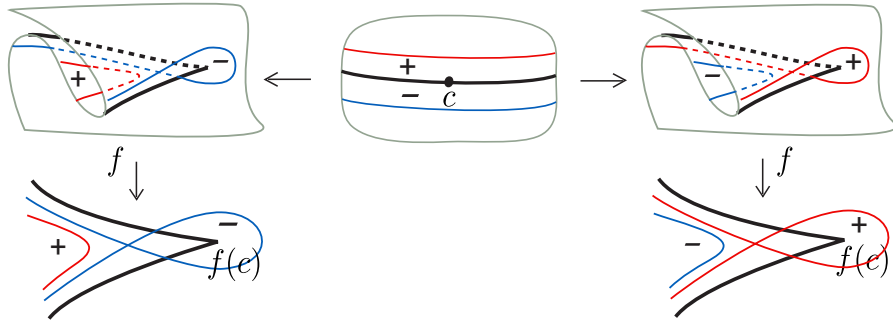


Figura 1.13: Sinal de cúspide.

Observação 1.73. *Veja que a aplicação estável $f : M \rightarrow N$ leva uma vizinhança $U_{\Sigma f}$ do conjunto singular em uma vizinhança V_{Bf} do seu contorno aparente.*

1.3 Grau de aplicações entre superfícies

Nesta seção, obteremos o grau de uma aplicação examinando a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação própria $f : M \rightarrow N$, de classe C^1 , onde M e N são superfícies compactas, orientadas e sem bordo. Os resultados apresentados aqui são baseados em [17] e [18].

1.3.1 Grau local

Definição 1.74. *Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **própria** se a imagem inversa $f^{-1}(K)$ de todo compacto $K \in N$ é um compacto em M .*

Sejam M e N superfícies fechadas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . De acordo com [18], para todo valor regular $y \in N$, de f , a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade compacta de dimensão 0 em M , donde consiste em um número finito de pontos:

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M.$$

O que é completado pelo Teorema 1.75.

Teorema 1.75. [18] *Se M e N são superfícies fechadas e orientadas, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Todo valor regular $y \in N$ possui uma vizinhança aberta V tal que $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_k$ é reunião finita de abertos U_i , dois a dois disjuntos, cada um dos quais f aplica difeomorficamente sobre V .*

Definição 1.76. Dizemos que um ponto $x_k \in f^{-1}(y)$ é **positivo** se $x_k \in M_i^+$ ou **negativo** se $x_k \in M_j^-$, onde M_i^+ e M_j^- estão expressos na Definição 1.71.

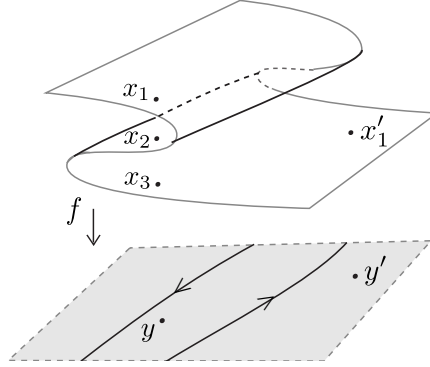


Figura 1.14: Grau de uma aplicação em um ponto y .

Definição 1.77. Sejam M e N superfícies fechadas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . O **grau de f no ponto y** (grau local), denotado por $\deg_y(f)$ é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$.

Exemplo 1.78. A Figura 1.14 ilustra localmente uma aplicação f , onde temos $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, x_3\}$, sendo x_1 e x_3 pontos positivos, pois pertencem a regiões cuja orientação é preservada por f , enquanto que x_2 é um ponto negativo, já que pertence a uma região cuja orientação é invertida por f . Assim, $\deg_y(f) = 2 - 1 = 1$. Analogamente $\deg_{y'}(f) = 1$. Note também que ao atravessar a imagem do conjunto singular da aplicação estável f , o número de pré-imagens aumenta ou diminui por dois pontos (ver Definição 1.64), os quais são aplicados por f com orientações opostas.

Observação 1.79. O grau local em um ponto de cúspide corresponde ao sinal local da cúspide da Definição 1.72.

1.3.2 Grau global

O próximo teorema diz que para uma aplicação entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , onde N é conexa, o grau da aplicação independe do valor regular escolhido.

Teorema 1.80. [18] Sejam M e N superfícies fechadas e orientadas. Se N é conexa, a cada aplicação própria $f : M \rightarrow N$, de classe C^2 , corresponde um número inteiro r , tal que para qualquer valor regular $y \in N$, de f , tem-se que $\deg_y(f) = d$.

Definição 1.81. O número $d = \deg_y(f)$ do Teorema 1.80 é o **grau da aplicação** f , ou simplesmente, $\deg(f)$.

Ou seja, o grau (global) de uma aplicação entre duas superfícies fechadas, conexas e orientadas M e N é igual ao grau local, qualquer que seja o valor regular.

Propriedade 1.82. [18]

1. Se $f : M \rightarrow M$ é a aplicação identidade, então $\deg(f) = 1$;
2. Se $f, g : M \rightarrow N$ são propriamente homotópicas em classe C^2 , então $\deg(f) = \deg(g)$;
3. Se $f : M \rightarrow N$ não é sobrejetiva, então $\deg(f) = 0$;
4. Se $f : M \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow P$ são próprias, de classe C^2 , onde M , N e P são superfícies fechadas e orientadas, com N e P conexas, então $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

Em geral, neste trabalho, as aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas M e N , onde M tem gênero g_M , são aplicações com grau positivo, a menos que mencionemos o contrário (aplicações com grau negativo podem ser obtidas de modo análogo). Estas aplicações são obtidas da seguinte forma:

Consideramos $l_i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão de M , centrado na origem, no 3-espaço euclidiano e, $j_i : l_i(M) \rightarrow N$ é a projeção radial (ou projeção normal quando $j_i = \pi_i$) da imagem de l_i sobre N . A aplicação f_i é a composição $j_i \circ l_i$.

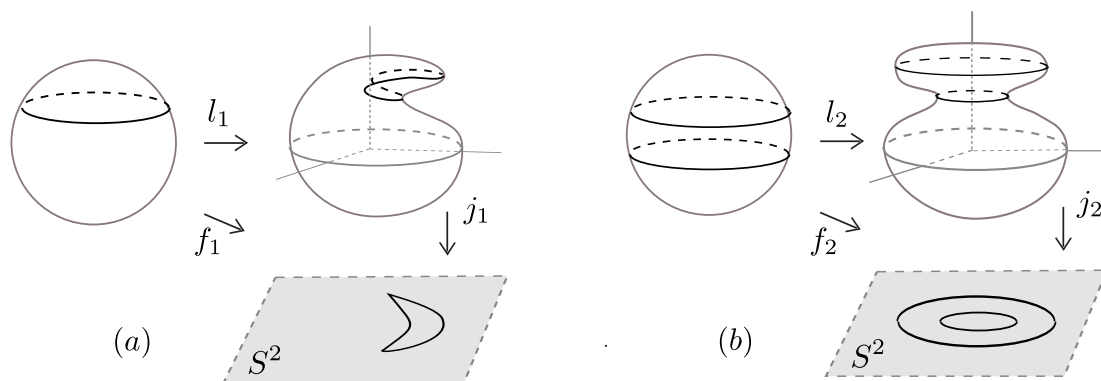


Figura 1.15: Aplicações da esfera na esfera com grau 1.

Exemplo 1.83. A Figura 1.15 ilustra duas diferentes aplicações estáveis da esfera na esfera. Em (a) a aplicação f_1 possui uma única curva singular, duas cúspides e grau 1. Em (b) a aplicação f_2 possui duas curvas singulares, nenhum ponto de cúspide e grau 1.

Exemplo 1.84. *Uma aplicação estável que usaremos bastante neste trabalho é a aplicação identidade $Id : N \rightarrow N$, que possui conjunto singular vazio, grau 1 (conforme Propriedade 1.82), zero cúspides, zero pontos duplos, gênero g_N e uma única componente regular.*

Capítulo 2

Invariantes de aplicações estáveis entre superfícies

Neste capítulo associamos a uma aplicação estável entre superfícies fechadas e orientadas o vetor ϕ , cujas coordenadas são invariantes globais da aplicação. Apresentamos alguns invariantes globais associados ao conjunto regular de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas. Falamos de alguns invariantes locais e das transições de codimensão um que interessam a este trabalho, e estudamos os seus efeitos sobre os invariantes apresentados. Posteriormente, definimos os grafos com pesos nos vértices como um invariante global de aplicações estáveis entre superfícies, que serve para auxiliar outros invariantes já conhecidos, na classificação dessas aplicações. Tomamos como principais referências os trabalhos de E. Chínaro [3], Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster [9], [12], [14], Mendes de Jesus [23] e Ohmoto e Aicardi [26].

A menos que mencionemos o contrário, todas as aplicações referidas neste capítulo, assim como nos demais, são aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas com grau positivo. O estudo das aplicações com grau negativo é análogo. É importante destacar também que este trabalho disserta sobre a topologia do domínio destas aplicações, o que leva a resultados que podem ser usados numa nova demonstração para o teorema de Quine ([28]).

2.1 Invariantes do conjunto regular

O objetivo desta seção é apresentar os invariantes associados ao conjunto regular de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, que serão objeto de estudo ao longo deste trabalho.

Sejam M e N duas superfícies fechadas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável, denotamos por $M \setminus \Sigma f$ o conjunto regular da aplicação f . Conforme visto no capítulo anterior, $M = M^+ \cup M^-$, onde o conjunto M^+ é a reunião do fecho das regiões regulares onde f preserva a orientação e, o conjunto M^- é a reunião do fecho das regiões regulares em que f inverte a orientação, quando conveniente denotaremos estes conjuntos por M_f^+ e M_f^- .

Definição 2.1. Dadas duas superfícies fechadas e orientadas M e N , onde M tem gênero g_M , e uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$, associamos à f o seguinte “vetor”:

$$\phi(f) = (\mu(f), \deg(f), c(f), n(f), g_M, v(f)), \quad (2.1)$$

onde $\mu(f)$ é o número de componentes do conjunto singular Σf , $\deg(f)$ é o grau da aplicação, $c(f)$ é o número de cúspides, $n(f)$ é o número de pontos duplos transversais e $v(f)$ é o número de componentes regulares da aplicação f .

O vetor ϕ é um invariante global para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, pois cada uma de suas coordenadas é um invariante global da aplicação.

Notações: Ao longo deste trabalho denotaremos por:

- $v^\pm(f)$ o número de componentes regulares de $M^\pm$;
- $g^\pm(f)$ a soma total dos gêneros da componente $M^\pm$;
- $c^\pm(f)$ o número de cúspides com sinal ± 1 ;
- $\chi(M_f^\pm)$ a característica de Euler de $M^\pm$.

Observação 2.2. Observe que $v(f) = v^+(f) + v^-(f)$ é o número total de componentes regulares e $c(f) = c^+(f) + c^-(f)$ é o número total de cúspides da aplicação f .

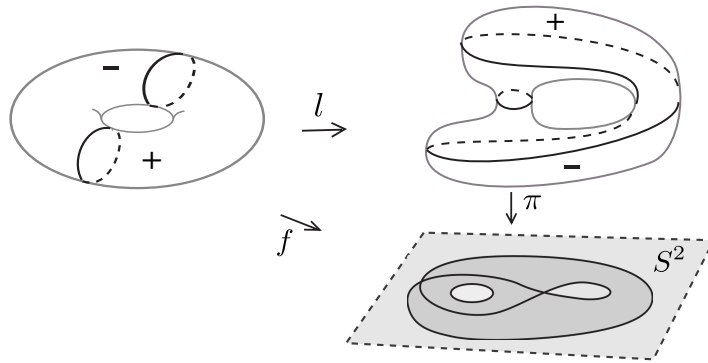


Figura 2.1: Exemplo de aplicação com grau zero do toro na esfera.

Observação 2.3. *Nem sempre o gênero de M é dado pela soma total dos gêneros das componentes regulares, isto é, nem sempre vale a igualdade $g_M = g^+(f) + g^-(f)$. Isso ocorre quando o gênero da superfície não pertence a nenhuma das regiões regulares. A Figura 2.1 ilustra um exemplo de aplicação do toro na esfera em que isso ocorre. Na Observação 2.11 veremos as condições necessárias para $g_M = g^+(f) + g^-(f)$.*

A partir deste momento, omitiremos sempre que conveniente e não ambíguo, a aplicação estável $f : M \rightarrow N$.

Observação 2.4. *A característica de Euler de cada componente $M_i^\pm$ da aplicação f , é dada por*

$$\chi(M_i^\pm) = 2 - 2g(M_i^\pm) - \mu_i^\pm, \quad (2.2)$$

onde $g(M_i^\pm)$ e $\mu_i^\pm$ denotam, respectivamente, o número de gêneros e o número de componentes de bordo de cada $M_i^\pm$.

Esse fato resulta diretamente do Teorema 1.44, que diz que característica de Euler de uma superfície fechada e orientada com k componentes de bordo é dada por $\chi(M) = 2 - 2g(M) - k$, pois vimos na Subseção 1.2.1 que cada componente conexa $M_i^\pm$ é uma superfície fechada, orientada e com bordo, assim, confrontando estes dois resultados, temos que a característica de Euler de cada componente $M_i^\pm$ é dada por

$$\chi(M_i^\pm) = 2 - 2g(M_i^\pm) - \mu_i^\pm.$$

Observação 2.5. *A característica de Euler do conjunto $M^\pm$ da aplicação f é dada por*

$$\chi(M^\pm) = 2v^\pm - 2g^\pm - \mu, \quad (2.3)$$

onde μ é o número total de componentes de bordo de $M^\pm$.

Isto ocorre porque o conjunto $M^\pm$ possui $v^\pm$ componentes regulares, isto é, $M^\pm = \bigcup_{i=1}^{v^\pm} M_i^\pm$, então a característica de Euler do conjunto $M^\pm$ é

$$\chi(M^\pm) = \sum_{i=1}^{v^\pm} \chi(M_i^\pm) \quad (2.4)$$

Substituindo a equação 2.2 na equação 2.4, temos

$$\begin{aligned} \chi(M^\pm) &= \sum_{i=1}^{v^\pm} (2 - 2g(M_i^\pm) - \mu_i^\pm) \\ &= 2v^\pm - 2g^\pm - \mu, \end{aligned}$$

onde $\mu = \sum_{i=1}^{v^\pm} \mu_i^\pm$ é o número total de componentes de bordo de $M^\pm$.

Observação 2.6. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , então a característica de Euler de M é dada por

$$\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-).$$

Pois, $M = M^+ \cup M^-$, então

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(M^+ \cup M^-) \\ &= \chi(M^+) + \chi(M^-) - \chi(M^+ \cap M^-). \end{aligned}$$

Mas, o conjunto $M^+ \cap M^-$ (Subseção 1.2.1) é composto apenas de curvas fechadas, simples e disjuntas sobre M (homeomorfas a S^1), logo $\chi(M^+ \cap M^-) = \chi(S^1) = 0$ e

$$\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-).$$

Proposição 2.7. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , então o gênero de M é dado por

$$g_M = 1 - v + (g^+ + g^-) + \mu. \quad (2.5)$$

Demonstração: Sabemos pela Observação 2.6, que

$$\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-). \quad (2.6)$$

Por outro lado, pela Observação 2.5 temos $\chi(M^\pm) = 2v^\pm - 2g^\pm - \mu$, onde μ denota o número de componentes de bordo de $M^\pm$. Substituindo este resultado na equação 2.6, segue

$$\begin{aligned} \chi(M) &= (2v^+ - 2g^+ - \mu) + (2v^- - 2g^- - \mu) \\ &= 2[(v^+ + v^-) - (g^+ + g^-) - \mu] \\ &= 2[v - (g^+ + g^-) - \mu]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como M é uma superfície fechada e orientada, então $\chi(M) = 2 - 2g_M$ (Corolário 1.45). Substituindo este resultado na equação 2.7 e isolando g_M , obtemos

$$g_M = 1 - v + (g^+ + g^-) + \mu.$$

□

Definição 2.8. Uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies fechadas e

orientadas M e N é dita uma **aplicação dobra** quando não possui cúspides, ou seja, o número de cúspides $c(f) = 0$.

Definição 2.9. O **contorno irreduzível** de uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$, onde M é uma superfície fechada e orientada, é o seu contorno aparente Bf , quando o conjunto singular Σf é conexo, ou seja, o número componentes do conjunto singular é $\mu(f) = 1$.

Segundo Eliasberg [5], para cada aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ , existe uma aplicação estável h homotópica a f e com contorno irreduzível (única componente singular). Neste contexto, se M é fechada e orientada e f tem contorno irreduzível, então $\mu(f) = 1$ e $v(f) = 2$, ou seja, $\phi(f) = (1, \deg(f), c(f), n(f), g_M, 2)$.

Exemplo 2.10. A Figura 1.15 ilustra duas aplicações estáveis f_1 e f_2 , onde a segunda possui não possui contorno irreduzível, pois $\mu f = 2$, enquanto a primeira possui contorno irreduzível, pois $\mu f = 1$. Note que $\phi(f_2) = (2, 1, 0, 0, 0, 3)$ e $\phi(f_1) = (1, 1, 2, 0, 0, 2)$.

Observação 2.11. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável com contorno irreduzível, então $g_M = g^+ + g^-$, pois o número de curvas singulares da aplicação é $\mu = 1$ e o número de componentes regulares é $v = 2$. Aplicando estes valores na Proposição 2.7, resulta $g_M = g^+ + g^-$.

Definição 2.12. Dada uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , associamos à f os seguintes números:

- a) $\theta_v(f) = v^+(f) - v^-(f)$ a diferença entre o número de componentes regulares de M^+ e M^- ;
- b) $\theta_g(f) = g^+(f) - g^-(f)$ a diferença entre o soma total dos gêneros de M^+ e M^- ;
- c) $\theta_c(f) = c^+(f) - c^-(f)$ a diferença entre o número de cúspides com sinais $+1$ e -1 ;
- d) $\theta_\chi(f) = \chi(M_f^+) - \chi(M_f^-)$ a diferença entre a característica de Euler dos conjuntos M^+ e M^- .

Os números da Definição 2.12 são invariantes globais da aplicação estável f .

Observação 2.13. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável com contorno irreduzível e M é orientada, então $v^+ = v^- = 1$ e $\theta_v = 0$. De fato, se f tem contorno irreduzível, então Σf possui uma única componente singular μ que decompõe M em duas componentes regulares, uma positiva e outra negativa.

A partir deste momento, para simplificar as notações, denotaremos o grau de uma aplicação estável f apenas por d , ao invés de $\deg(f)$.

Observação 2.14. *Se f é uma aplicação dobra com grau $d = 0$ e contorno irreduzível, então M^- é uma cópia de M^+ . Consequentemente, $\theta_\chi = \theta_g = \theta_v = 0$, pois a característica de Euler, o gênero e o número de componentes regulares de M^- e M^+ são idênticos, anulando assim as diferenças θ_χ , θ_g e θ_v . Um exemplo disto é a aplicação projeção π do toro sobre a esfera, ilustrada na Figura 2.16.*

Teorema 2.15. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , então*

$$\theta_\chi(f) = 2[\theta_v(f) - \theta_g(f)]. \quad (2.8)$$

Demonstração: Pelo item d) da Definição 2.12

$$\theta_\chi(f) = \chi(M^+) - \chi(M^-).$$

Como $\chi(M^\pm) = 2v^\pm - 2g^\pm - \mu$ (Observação 2.5), segue

$$\begin{aligned} \theta_\chi(f) &= (2v^+ - 2g^+ - \mu) - (2v^- - 2g^- - \mu). \\ &= 2[(v^+ - v^-) - (g^+ - g^-)] \\ &= 2[\theta_v - \theta_g]. \end{aligned}$$

□

2.2 Transições de codimensão um

Seja $\mathcal{E}(M, N) \subset C^\infty(M, N)$ o conjunto das aplicações estáveis de M em N . Considere uma homotopia F_t entre duas aplicações estáveis $f, h : M \rightarrow N$ (ver Figura 2.2). À medida em que t varia no intervalo $[0, 1]$ o contorno aparente de $F_0 = h$ é deformado no contorno aparente de $F_1 = f$. O caminho em algum “momento” pode passar pelo complemento $C^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$, isto é, pode existir algum $t_0 \in [0, 1]$ tal que a aplicação F_{t_0} não seja estável. Algumas das deformações locais no contorno aparente, que ocorrem quando um caminho atravessa este complemento, foram classificadas por E. Chínaro [3] em sua tese de doutorado. Estas deformações, também chamadas de *transições*, aparecem posteriormente no trabalho de Ohmoto e Aicardi [26].

Baseados nessas transições, Ohmoto e Aicardi apresentaram três invariantes do ponto de vista local para o contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies no

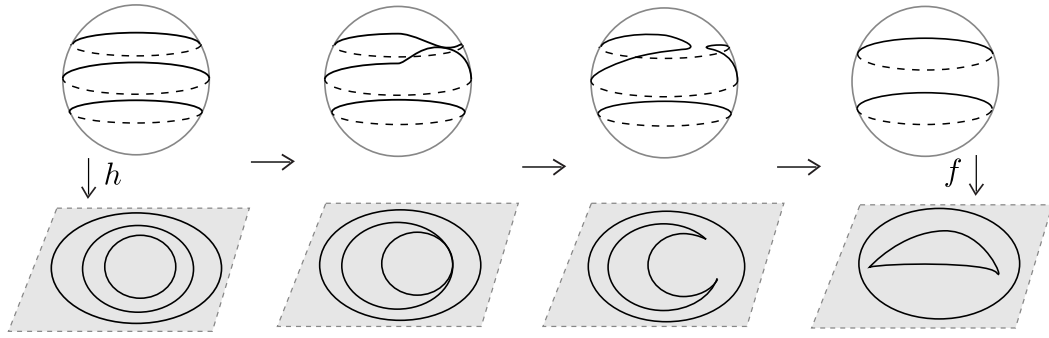


Figura 2.2: Exemplo de uma homotopia em $C^\infty(S^2, \mathbb{R}^2)$.

plano. Dentre estes invariantes estão os que denotaremos por I_c e I_n , que correspondem, respectivamente, ao número de cúspides e ao número de pontos duplos do contorno aparente.

Em [9], seguindo a mesma linha de trabalho, Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster apresentaram outro invariante, denotado por I_e , que corresponde ao número de componentes conexas do contorno aparente de superfície no plano. Mais tarde em [14], esses invariantes foram analisados para aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na 2-esfera, pelos mesmos autores.

Nesta seção trataremos das transições de codimensão um que interessam a este trabalho e seus efeitos sobre alguns dos invariantes locais aqui apresentados. Cada transição está representada localmente por uma sequência de três aplicações em $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ ordenadas com orientação positiva (da esquerda para direita). A aplicação do meio é uma aplicação não estável, ou seja, pertence ao conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^2)$. As setas nos arcos indicam o sentido em que o número de pré-imagens aumenta por dois.

As transições que alteram o número de cúspides são denominadas de: **lábios** (L), **bicos** (B) e **rabo de andorinha** (S); as transições que alteram o número de pontos duplos são denominadas de: **tangência de dobras** (T), **dobra com cúspide** (TC) e **rabo de andorinha** (S); enquanto que as transições **lábios** (L) e **bicos** (B) também podem alterar o número de componentes regulares (ou componentes singulares).

Transição Lábios (L)

A transição do tipo Lábios ocorre quando a partir de uma região regular, forma-se uma componente singular com duas cúspides que apontam para a mesma região regular, isso implica que as cúspides possuem o mesmo sinal. A orientação da transição pode ser positiva ou negativa. Isto significa que esta transição faz “nascer” ou “morrer” um par de cúspides.

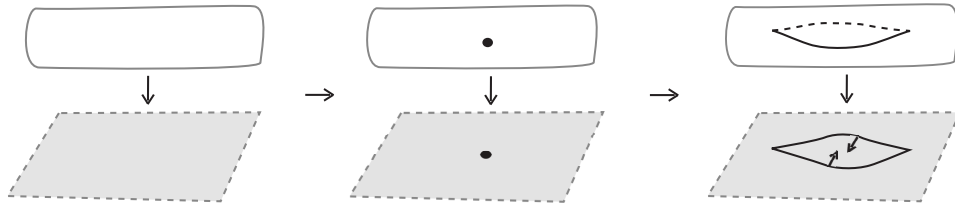


Figura 2.3: Transição do tipo Lábios.

A Figura 2.3 ilustra uma transição do tipo lábios. Ohmoto e Aicardi mostraram que quando uma aplicação sofre uma transição lábios, o número de pontos de cúspides é alterado por ± 2 , com o sinal dependendo da orientação da transição. Em outras palavras, o número de cúspides da aplicação aumenta ou diminui por dois.

Observação 2.16. Além dessa transição alterar o número I_c de cúspides do contorno aparente (consequentemente do conjunto singular), o número I_e de componentes conexas do contorno aparente também é modificado, sofrendo um aumento de uma unidade, quando no sentido positivo.

Transição Bicos (B)

A transição do tipo Bicos ocorre quando duas curvas de dobra, que são bordos de uma mesma região, se tangenciam e se separam em duas cúspides que apontam para a mesma região regular, isso implica que as cúspides possuem o mesmo sinal. Dependendo da orientação, esta transição também faz “nascer” ou “morrer” um par de cúspides.

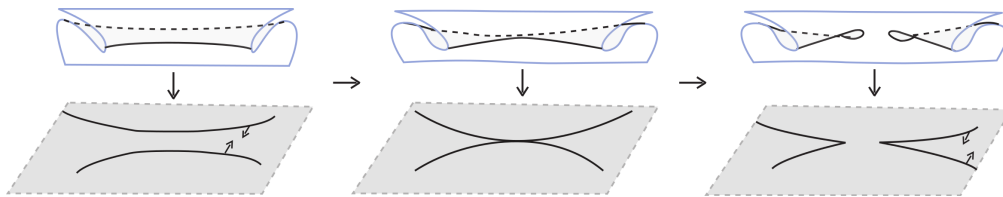


Figura 2.4: Transição do tipo Bicos.

A Figura 2.4 ilustra uma transição do tipo bicos, onde o número de cúspides é alterado por ± 2 , de acordo com a orientação da transição.

A definição a seguir distingue três casos de transição bicos relevantes a este trabalho, dos quais os dois primeiros foram apresentados por E. Chínaro [3] e Ohmoto e Aicardi [26], enquanto que o terceiro foi apresentado por Mendes de Jesus em [23].

Definição 2.17. Denotaremos por: B^+ a transição bicos, no sentido positivo, que acrescenta o número de cúspides por dois e, ao mesmo tempo, aumenta por um o

número de componentes regulares e singulares; B^- a transição bicos, no sentido positivo, que acrescenta o número de cúspides por dois e, ao mesmo tempo, diminui por um o número de componentes regulares e singulares; e B a transição bicos, no sentido negativo, que aumenta o número de cúspides por dois, diminui o número de componentes singulares por um, e altera o número de gêneros das regiões regulares sem, contudo, aumentar o número de componentes regulares.

Um exemplo para cada caso de transição bicos pode visto na demonstração do Lema 2.27.

Observação 2.18. Dependendo da orientação, a transição do tipo bicos altera por ± 2 o número de cúspides e por ± 1 o número de componentes singulares, enquanto que o número de regiões regulares pode ou não ser alterado por ± 1 . Em particular a transição do tipo B faz surgir um gênero em uma das regiões regulares.

Transição Rabo de Andorinha (S)

A transição do tipo Rabo de Andorinha ocorre quando uma curva de dobra passa por uma pequena deformação e aparecem um ponto duplo e duas cúspides que apontam para regiões regulares com sinais diferentes, isso implica que as cúspides possuem sinais opostos.

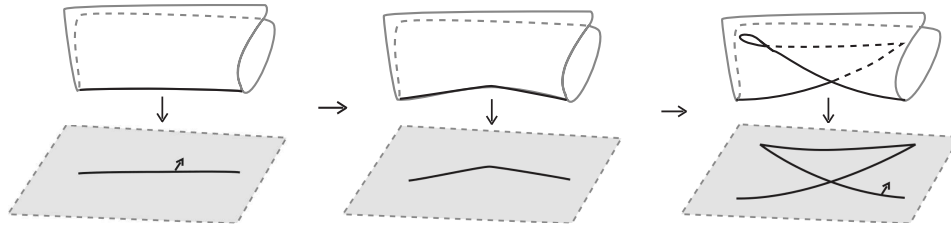


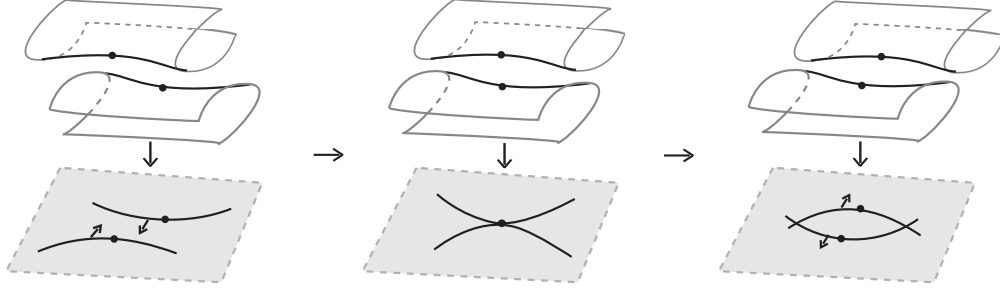
Figura 2.5: Transição do tipo Rabo de andorinha.

A Figura 2.5 ilustra uma transição do tipo rabo de andorinha. De acordo com a orientação da transição, o número de cúspides é alterado por ± 2 , e o número de pontos duplos é alterado por ± 1 . Já o número de componentes singulares e regulares permanece o mesmo.

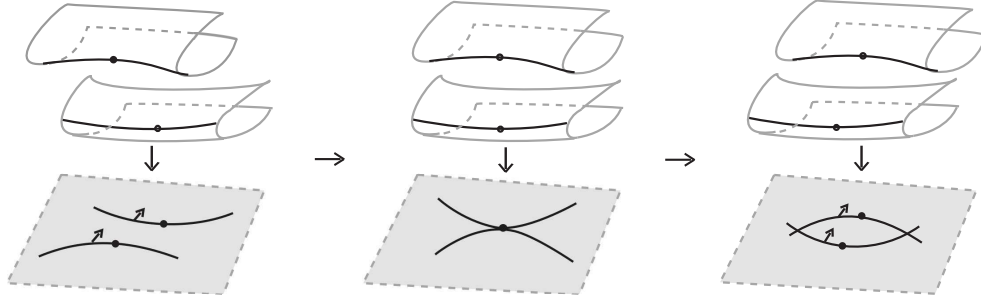
Transição Tangência de Dobras (T)

Em [26], Ohmoto e Aicardi apresentaram três casos (T^0 , T^1 e T^2) de transição do tipo T , que ocorrem quando duas curvas de dobra se tangenciam. O índice i em T^i , é determinado pela metade do número de pré-imagens (zero, dois ou quatro) dentro da nova região criada após a tangência no contorno aparente.

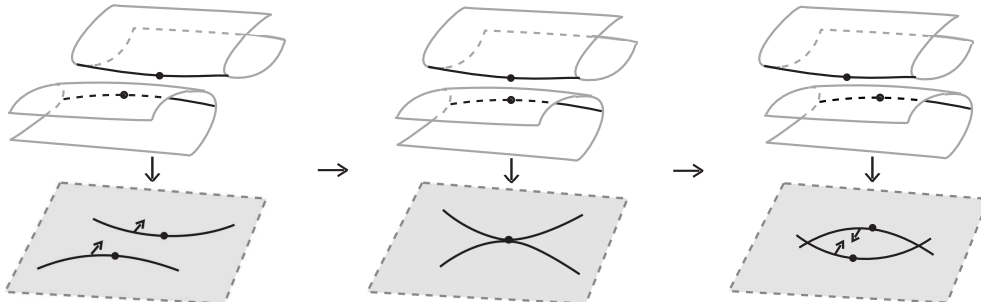
- T^0 é a transição tangência de dobras que ocorre quando duas curvas de dobra com orientações opostas se tangenciam, e o número de pré-imagens dentro da nova região criada após a tangência é necessariamente zero (Figura 2.6).

Figura 2.6: Transição T^0 .

- T^1 é a transição tangência de dobras que ocorre quando duas curvas de dobra com a mesma orientação se tangenciam, e o número de pré-imagens dentro da nova região criada após a tangência é dois (Figura 2.7).

Figura 2.7: Transição T^1 .

- T^2 é a transição tangência de dobras que ocorre quando duas curvas de dobra com orientações opostas se tangenciam, e o número de pré-imagens dentro da nova região criada após a tangência é necessariamente quatro (Figura 2.8).

Figura 2.8: Transição T^2 .

Note que as transições de tangência de dobras alteram apenas o número I_n de pontos duplos, por ± 2 .

Transição Dobra com Cúspide (TC)

Ohmoto e Aicardi apresentaram dois casos (TC^1 e TC^2) de transição do tipo TC , que ocorrem quando uma curva de dobra e uma cúspide se tangenciam. Análogo ao que foi definido na transição de dobras, o índice i em TC^i é determinado pela metade do número de pré-imagens (dois ou quatro) dentro da nova região triangular criada após a tangência.

- TC^1 é a transição de dobra com cúspide em que a nova região triangular criada após a tangência possui duas pré-imagens (Figura 2.9).

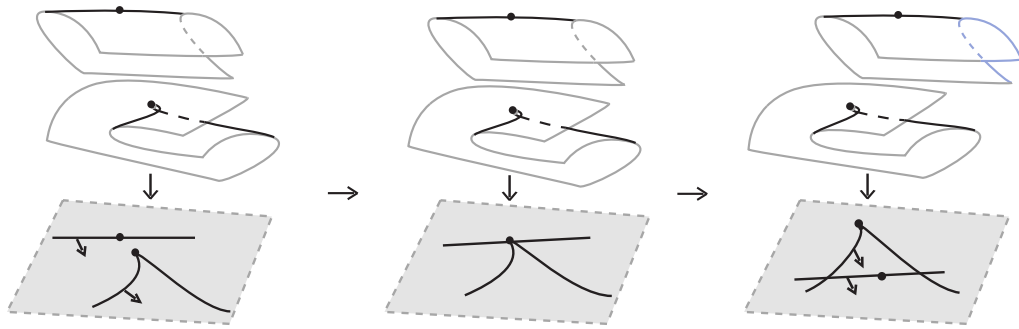


Figura 2.9: Transição TC^1 .

- TC^2 é a transição de dobra com cúspide em que a nova região triangular criada após a tangência possui quatro pré-imagens (Figura 2.10).

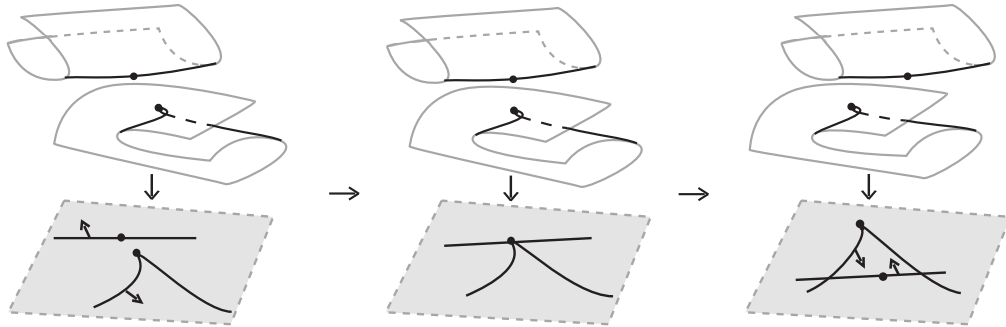


Figura 2.10: Transição TC^2 .

Note que as transições de dobra com cúspide alteram apenas o número I_n de pontos duplos, por ± 2 .

Outro tipo de transição de codimensão um é a transição do tipo Ponto Triplo PT , mas não entraremos em detalhes sobre esta transição por não ser relevante ao nosso trabalho, pois estamos interessados nas relações entre os pontos de cúspides, as

componentes regulares e singulares e os pontos duplos, os quais não são alteradas pela transição ponto triplo. Os detalhes sobre a transição ponto triplo podem ser vistos em [3] ou [26].

2.3 Efeitos das transições sobre ϕ , θ_c , θ_v , θ_g e θ_χ

Sejam M e N duas superfícies fechadas e orientadas, onde M tem gênero g_M . No que segue, estamos considerando $f, h : M \rightarrow N$ duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia em $C^\infty(M, N)$, onde f pode ser obtida da aplicação h (distinguida), passando apenas pelas transições de codimensão um: lábios (L), bicos ($B^\pm$ e B), rabo de andorinha (S), tangência de dobras (T) e tangência de dobra com cúspide (TC), no sentido positivo.

Nesta seção estudaremos os efeitos dessas transições de codimensão um sobre os invariantes globais apresentados na Definição 2.12, denotados por: θ_c (diferença entre o número de cúspides positivas e negativas de conjunto singular), θ_v (diferença entre o número de componentes regulares de M^+ e M^-), θ_g (diferença entre a soma total dos gêneros de M^+ e M^-) e θ_χ (diferença entre a característica de Euler de M^+ e M^-). Estes efeitos levam a resultados necessárias para o objetivo deste trabalho que é apresentar uma nova demonstração para o teorema de Quine, dada em [23].

Definição 2.19. *Se I é um invariante de aplicações estáveis e f pode ser obtida de h passando apenas por transições de codimensão um, então a diferença, $I(f) - I(h)$, entre os invariantes destas aplicações a cada transição, é chamada **variação de I** e denotada por $\Delta I(\eta) = I(f) - I(h)$, onde $\eta \in \{L, B^\pm, B, S, T, TC\}$. A soma de todas as variações de I ao longo de um caminho entre duas aplicações estáveis, que passa apenas por transições de codimensão um, é dada por $\Delta I = \sum_i \Delta I(\eta_i)$.*

Teorema 2.20. [26] *A variação do número c de cúspides e do número n de pontos duplos durante uma homotopia entre as aplicações estáveis f e h , são dadas por:*

$$i) \Delta c = c(f) - c(h) = 2(\nabla L + \nabla B^+ + \nabla B^- + \nabla B + \nabla S);$$

$$ii) \Delta n = n(f) - n(h) = 2(\nabla T + \nabla C) + \nabla S.$$

onde ∇L , $\nabla B^\pm$, ∇B , ∇S , ∇T e ∇TC , denotam, respectivamente, o número de transições do tipo lábios, bicos, rabo de andorinha, tangência de dobras e de dobra com cúspide, no sentido positivo, sofridas durante a homotopia.

Teorema 2.21. [9] *A variação do número v de componentes regulares e do número μ de componentes conexas do conjunto singular, durante uma homotopia entre as aplicações estáveis f e h , são dadas por:*

$$i) \Delta v = v(f) - v(h) = \nabla L + \nabla B^+ - \nabla B^-;$$

$$ii) \Delta \mu = \mu(f) - \mu(h) = \nabla L + \nabla B^+ - \nabla B^- - \nabla B.$$

onde ∇L , $\nabla B^\pm$, ∇B , denotam, respectivamente, o número de transições do tipo lábios e bicos, no sentido positivo, sofridas durante a homotopia.

Observação 2.22. *Analizando apenas o contorno aparente das aplicações, podemos calcular de modo bastante natural os invariantes c , n e μ .*

Afim de calcular o invariante $\theta_\alpha(f)$, onde $\alpha \in \{c, v, g, \chi\}$, podemos escolher uma aplicação inicial h na mesma classe de homotopia de f em $C^\infty(M, N)$, com $\theta_\alpha(h)$ conhecido. Como θ_α é um invariante de aplicações estáveis, então pela Definição 2.19 temos $\theta_\alpha(f) = \theta_\alpha(h) + \Delta\theta_\alpha(\eta)$. Assim, podemos calcular $\theta_\alpha(f)$ a partir de $\theta_\alpha(h)$ adicionando a variação $\Delta\theta_\alpha(\eta)$, sofrida ao longo de um caminho de h à f , passando apenas pelas transições de codimensão um $\eta \in \{L, B^\pm, B, S, T, TC\}$.

Mas, primeiramente calcularemos a variação, $\Delta\phi(\eta) = \phi(f) - \phi(h)$, do vetor ϕ para cada transição de codimensão um η (Proposição 2.23). Lembremos que este invariante global é dado por $\phi = (\mu, d, c, n, g_M, v)$, cujas entradas denotam, respectivamente, o número de componentes do conjunto singular Σf , o grau da aplicação, o número de cúspides, o número de pontos duplos, o gênero de M e o número de componentes regulares da aplicação estável (Definição 2.1).

Proposição 2.23. *A variação $\Delta\phi(\eta)$ do vetor $\phi = (\mu, d, c, n, g_M, v)$ para cada transição de codimensão um $\eta \in \{L, B^\pm, B, S, T, TC\}$, é como segue:*

$$\begin{aligned} \Delta\phi(L) &= (1, 0, 2, 0, 0, 1); & \Delta\phi(B^\pm) &= (\pm 1, 0, 2, 0, 0, \pm 1); & \Delta\phi(B) &= (1, 0, 2, 0, 0, 0); \\ \Delta\phi(S) &= (0, 0, 2, 1, 0, 0); & \Delta\phi(T) &= (0, 0, 0, 2, 0, 0); & \Delta\phi(TC) &= (0, 0, 0, 2, 0, 0). \end{aligned}$$

Demonstração: As transições de codimensão um não alteram o grau das aplicações e nem o gênero das superfícies envolvidas, pois cada transição de codimensão um, altera apenas localmente o conjunto regular (ou singular) (Seção 2.2). Logo,

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\eta) &= \phi(f) - \phi(h) \\ &= (\mu(f) - \mu(h), 0, c(f) - c(h), n(f) - n(h), 0, v(f) - v(h)). \end{aligned}$$

Pelos Teoremas 2.20 e 2.21 temos $\Delta\mu = \mu(f) - \mu(h)$, $\Delta c = c(f) - c(h)$, $\Delta n = n(f) - n(h)$ e $\Delta v = v(f) - v(h)$, então

$$\Delta\phi(\eta) = (\Delta\mu, 0, \Delta c, \Delta n, 0, \Delta v), \quad (2.9)$$

onde $\eta \in \{L, B^\pm, B, S, T, TC\}$.

Pela igualdade 2.9, seguem os seguintes resultados:

- Sabemos que a transição lábios (L) altera apenas o o número de cúspides, por 2, e número de componentes singulares e regulares, por 1. Então

$$\Delta\phi(L) = (1, 0, 2, 0, 0, 1).$$

- Como visto na Definição 2.17, a transição bicos do tipo $B^\pm$, altera por 2 o número de cúspides e por ± 1 o número de componentes singulares e regulares, então

$$\Delta\phi(B^\pm) = (\pm 1, 0, 2, 0, 0, \pm 1),$$

Enquanto a transição bicos do tipo B , altera por 2 o número de cúspides e por -1 o número de componentes singulares, sem, contudo, aumentar o número de componentes regulares, ou seja,

$$\Delta\phi(B) = (-1, 0, 2, 0, 0, 0).$$

- A transição rabo de andorinha (S), altera apenas o número de cúspides, por 2, e o número de pontos duplos, por 1. Então

$$\Delta\phi(S) = (0, 0, 2, 1, 0, 0).$$

- Por fim, as transições tangência de dobras (T) e tangência de dobra com cúspide (TC), alteram apenas o número de pontos duplos por 2. Portanto,

$$\Delta\phi(T) = \Delta\phi(TC) = (0, 0, 0, 2, 0, 0).$$

□

A partir de agora estudaremos a variação $\Delta\theta_\alpha(\eta)$ com $\alpha \in \{c, v, g, \chi\}$, para cada uma das transições de codimensão um $\eta \in \{L, B^\pm, B, S, T, TC\}$. Ao longo deste trabalho usaremos constantemente a Definição 2.12, a qual, em síntese matemática, nos fornece que $\theta_\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$, é importante tê-la sempre em mente, contudo, sempre que necessário a retomaremos.

Observação 2.24. *As transições de codimensão um T e TC não alteram θ_c , θ_g , θ_v e θ_χ , pois não modificam o número de cúspides e nem o conjunto regular. A transição S não altera θ_c , dado que o par de cúspides nascidas através dessa transição têm sempre sinais opostos, e também não altera o conjunto regular, portanto, não influi sobre θ_g , θ_v ou θ_χ . Consequentemente, $\Delta\theta_\alpha = 0$ para estas transições.*

Neste contexto, nosso estudo incide sobre a variação destes números pelas transições L , $B^\pm$ e B , conforme será feito a partir de agora.

Lema 2.25. *Se f e h são duas aplicações estáveis, tal que f pode ser obtida de h passando por uma única transição de codimensão um $\eta \in \{L, B^+, B^-, B\}$, então a variação de θ_α , onde $\alpha \in \{c, g, v, \chi\}$, satisfaz*

$$\Delta\theta_\alpha(\eta) = \Delta\alpha^+(\eta) - \Delta\alpha^-(\eta). \quad (2.10)$$

Demonstração: Se a aplicação f pode ser obtida de h passando por uma única transição de codimensão um η , segue pela Definição 2.19 que

$$\Delta\theta_\alpha(\eta) = \theta_\alpha(f) - \theta_\alpha(h).$$

Mas, $\theta_\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$, onde $\alpha \in \{c, g, v, \chi\}$ (Definição 2.12), então

$$\begin{aligned} \Delta\theta_\alpha(\eta) &= \theta_\alpha(f) - \theta_\alpha(h) \\ &= [\alpha^+(f) - \alpha^-(f)] - [\alpha^+(h) - \alpha^-(h)] \\ &= [\alpha^+(f) - \alpha^+(h)] - [\alpha^-(f) - \alpha^-(h)] \\ &= \Delta\alpha^+(\eta) - \Delta\alpha^-(\eta) \end{aligned}$$

para cada transição de codimensão um $\eta \in \{L, B^+, B^-, B\}$. □

Observação 2.26. *O par de cúspides nascidas através das transições L , $B^\pm$ e B , têm sempre o mesmo sinal, portanto,*

$$\Delta\theta_c(L) = \Delta\theta_c(B^\pm) = \Delta\theta_c(B) = \Delta c^+ - \Delta c^- = \pm 2,$$

dependendo da orientação da região regular para a qual o par de cúspides aponta.

Lema 2.27. *Se f é uma aplicação estável obtida de h por uma transição L , $B^\pm$ ou B , então*

$$\Delta\theta_\chi(L) = \Delta\theta_\chi(B^\pm) = \Delta\theta_\chi(B) = \mp 2. \quad (2.11)$$

Demonstração: Denotemos por U , Z e W as regiões regulares de h onde ocorrem as transições lábios e bicos ao longo de um caminho de h à f . Estas transições alteram as regiões regulares de h em cada caso, da seguinte forma:

1. Se a transição L ocorre na região regular U , cria-se uma nova curva singular que separa U em duas novas componentes regulares U_1 e U_2 , onde U_2 é homeomorfa a um disco (ver Figura 2.11).

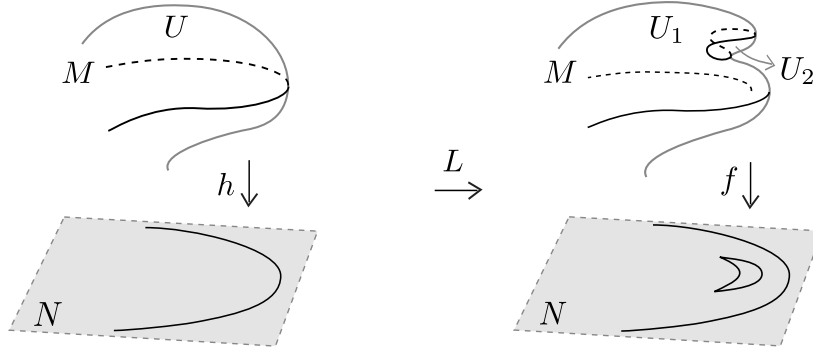


Figura 2.11: Efeito da transição L no conjunto regular.

- (a) Se $U \subset M_h^+$, temos

$$M_f^+ = (M_h^+ \setminus U) \cup U_1 \quad e \quad M_f^- = M_h^- \cup U_2.$$

Neste caso, U_2 é uma componente regular de M_f^- , de modo que $v^-(f) = v^-(h) + 1$. Como U_1 tem uma componente de bordo a mais que U , e U_2 é homeomorfa a um disco, então

$$\chi(M_f^+) = \chi[(M_h^+ \setminus U) \cup U_1] = \chi(M_h^+) - 1$$

e

$$\chi(M_f^-) = \chi(M_h^- \cup U_2) = \chi(M_h^-) + 1.$$

- (b) Analogamente procede-se para $U \subset M_h^-$.

Portanto, para $U \subset M_h^\pm$ temos

$$M_f^\pm = (M_h^\pm \setminus U) \cup U_1 \quad e \quad M_f^\mp = M_h^\mp \cup U_2$$

onde o número de componentes regulares de $M_f^\mp$ é $v^\mp(f) = v^\mp(h) + 1$. Assim,

$$\chi(M_f^\pm) = \chi[(M_h^\pm \setminus U) \cup U_1] = \chi(M_h^\pm) - 1, \quad (2.12)$$

pois U_1 tem uma componente de bordo a mais que U , e

$$\chi(M_f^\mp) = \chi(M_h^\mp) \cup U_2 = \chi(M_h^\mp) + 1, \quad (2.13)$$

já que U_2 é uma componente regular homeomorfa a um disco.

2. Se a transição B^+ ocorre entre dois arcos de uma mesma curva singular que separa as componentes regulares U e Z , então a transição B^+ transforma as componentes U e Z em três novas componentes U_1 , Z_1 e Z_2 , conforme Figura 2.12.

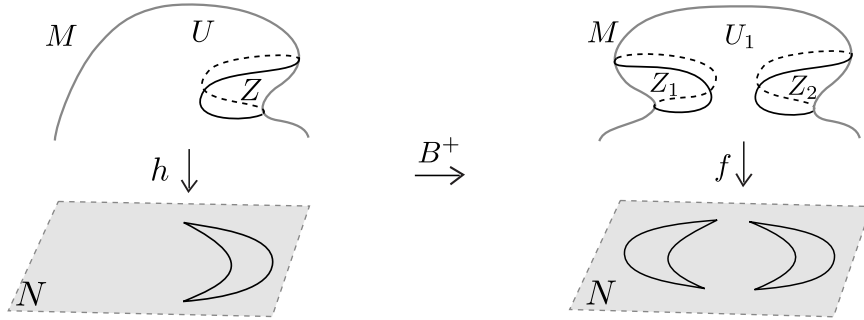


Figura 2.12: Efeito da transição B^+ no conjunto regular.

- (a) Se $U \subset M_h^+$, temos

$$M_f^+ = (M_h^+ \setminus U) \cup U_1 \quad e \quad M_f^- = (M_h^- \setminus Z) \cup (Z_1 \cup Z_2).$$

Neste caso, $Z_1 \cup Z_2$ é uma componente regular de M_f^- , de modo que $v^-(f) = v^-(h) + 1$. Como U_1 tem uma componente de bordo a mais que U , e $Z_1 \cup Z_2$ tem uma componente regular a mais que Z , homeomorfa a um disco, então

$$\chi(M_f^+) = \chi[(M_h^+ \setminus U) \cup U_1] = \chi(M_h^+) - 1$$

e

$$\chi(M_f^-) = \chi[(M_h^- \setminus Z) \cup (Z_1 \cup Z_2)] = \chi(M_h^-) + 1.$$

- (b) Analogamente procede-se para $U \subset M_h^-$.

Portanto, para $U \subset M_h^\pm$ temos

$$M_f^\pm = (M_h^\pm \setminus U) \cup U_1 \quad e \quad M_f^\mp = (M_h^\mp \setminus Z) \cup (Z_1 \cup Z_2),$$

onde o número de componentes regulares de $M_f^\mp$ é $v^\mp(f) = v^\mp(h) + 1$. Assim,

$$\chi(M_f^\pm) = \chi[(M_h^\pm \setminus U) \cup U_1] = \chi(M_h^\pm) - 1, \quad (2.14)$$

pois U_1 tem uma componente de bordo a mais que U , e

$$\chi(M_f^\mp) = \chi[(M_h^\mp \setminus Z) \cup (Z_1 \cup Z_2)] = \chi(M_h^\mp) + 1, \quad (2.15)$$

já que $Z_1 \cup Z_2$ tem uma componente regular a mais que Z , homeomorfa a um disco.

3. Se a transição B^- ocorre entre duas curvas singulares bordos de uma componente regular Z , que tem um bordo em comum com as regiões regulares U e W , então a transição B^- transforma Z , U e W em duas novas componentes regulares U_1 e Z_1 , conforme Figura 2.13.

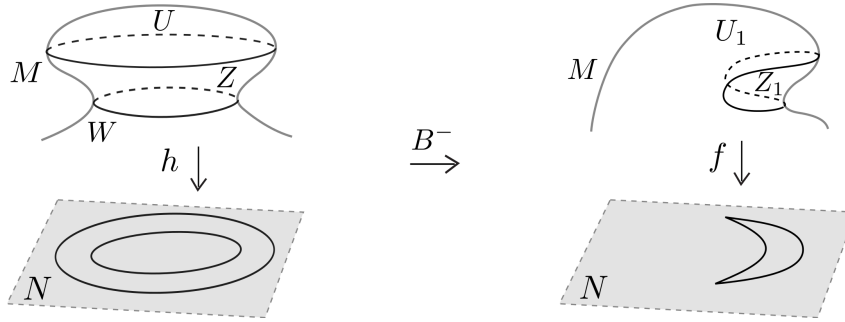


Figura 2.13: Efeito da transição B^- no conjunto regular.

- (a) Se $(U \cup W) \subset M_h^+$, temos

$$M_f^+ = [M_h^+ \setminus (U \cup W)] \cup U_1 \quad e \quad M_f^- = (M_h^- \setminus Z) \cup Z_1.$$

Neste caso, U_1 é uma componente regular de M_f^+ , de modo que $v^+(f) = v^+(h) - 1$. Como U_1 tem uma componente regular a menos que $(U \cup W)$, e Z_1 tem uma componente de bordo a menos que Z , então

$$\chi(M_f^+) = \chi[(M_h^+ \setminus (U \cup W)) \cup U_1] = \chi(M_h^+) - 1$$

e

$$\chi(M_f^-) = \chi[(M_h^- \setminus Z) \cup Z_1] = \chi(M_h^-) + 1.$$

- (b) Analogamente procede-se para $(U \cup W) \subset M_h^-$.

Portanto, para $(U \cup W) \subset M_h^\pm$ temos

$$M_f^\pm = [M_h^\pm \setminus (U \cup W)] \cup U_1 \quad e \quad M_f^\mp = (M_h^\mp \setminus Z) \cup Z_1,$$

onde o número de componentes regulares de $M_f^\pm$ é $v^\pm(f) = v^\pm(h) - 1$. Assim,

$$\chi(M_f^\pm) = \chi[(M_h^\pm \setminus (U \cup W)) \cup U_1] = \chi(M_h^\pm) - 1, \quad (2.16)$$

pois U_1 tem uma componente regular a menos que $(U \cup W)$, e

$$\chi(M_f^\mp) = \chi[(M_h^\mp \setminus Z) \cup Z_1] = \chi(M_h^\mp) + 1, \quad (2.17)$$

já que Z_1 tem uma componente de bordo a menos que Z .

4. Se a transição B ocorre entre duas curvas singulares que separam as componentes regulares U e Z , então a transição B transforma as componentes U e Z em duas novas componentes U_1 e Z_1 , alterando por um, o gênero de uma das regiões regulares conforme Figura 2.14.

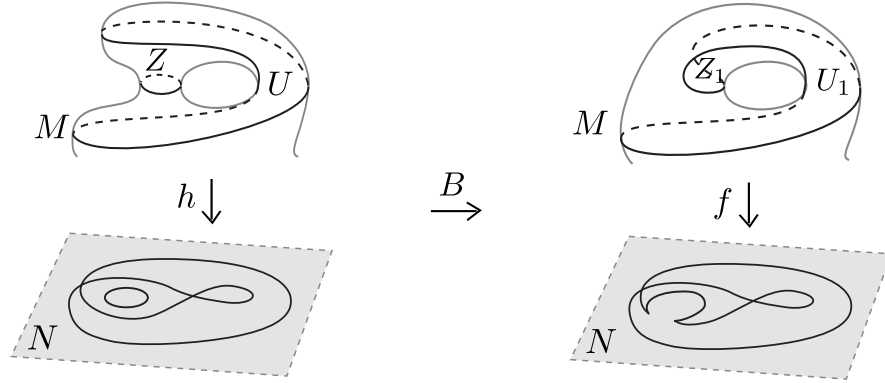


Figura 2.14: Efeito da transição B no conjunto regular.

(a) Se $U \subset M_h^+$, temos

$$M_f^+ = (M_h^+ \setminus U) \cup U_1 \quad e \quad M_f^- = (M_h^- \setminus Z) \cup Z_1.$$

Neste caso h e f possuem o mesmo número de componentes regulares, logo $v^-(f) = v^-(h)$. Como U_1 possui uma componente de bordo a menos que U , porém um gênero a mais que U ($g_f^+ = g_h^+ + 1$), segue que

$$\chi(M_f^+) = \chi[(M_h^+ \setminus U) \cup U_1] = \chi(M_h^+) - 1.$$

Já que Z_1 tem uma componente de bordo a menos que Z , então

$$\chi(M_f^-) = \chi[(M_h^- \setminus Z) \cup Z_1] = \chi(M_h^-) + 1.$$

(b) Analogamente procede-se para $U \subset M_h^-$.

Portanto, para $U \subset M_h^\pm$ temos

$$M_f^\pm = (M_h^\pm \setminus U) \cup U_1 \quad e \quad M_f^\mp = (M_h^\mp \setminus Z) \cup Z_1,$$

onde o número de componentes regulares de $M_f^\mp$ é $v^\mp(f) = v^\mp(h)$. Assim,

$$\chi(M_f^\pm) = \chi[(M_h^\pm \setminus U) \cup U_1] = \chi(M_h^\pm) - 1, \quad (2.18)$$

pois U_1 tem uma componente de bordo a menos que U e um gênero a mais ($g^\pm(f) = g^\pm(h) + 1$), e

$$\chi(M_f^\mp) = \chi[(M_h^\mp \setminus Z) \cup Z_1] = \chi(M_h^\mp) + 1, \quad (2.19)$$

já que Z_1 tem uma componente de bordo a menos que Z .

As equações 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 e 2.19 nos fornecem a relação

$$\begin{cases} \chi(M_f^\pm) = \chi(M_h^\pm) - 1 \\ \chi(M_f^\mp) = \chi(M_h^\mp) + 1 \end{cases}, \quad (2.20)$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \chi(M_f^\pm) - \chi(M_h^\pm) = -1 \\ \chi(M_f^\mp) - \chi(M_h^\mp) = 1 \end{cases}. \quad (2.21)$$

Desta relação resulta que a variação de θ_χ pelas transições L , $B^\pm$ e B é

$$\begin{aligned} \Delta\theta_\chi(L) &= \Delta\theta_\chi(B^\pm) \\ &= \Delta\theta_\chi(B) \\ &= \Delta\chi(M^+) - \Delta\chi(M^-) && \text{(Pelo Lema 2.25)} \\ &= [\chi(M_f^+) - \chi(M_h^+)] - [\chi(M_f^-) - \chi(M_h^-)] \\ &= \mp 2. \end{aligned}$$

□

Observação 2.28. *Pela prova do Lema 2.27 temos que a variação, $\Delta\theta_v$, da diferença entre o número de componentes regulares de M^+ e M^- , para cada uma das transições de codimensão um do tipo lábios e bicos, é como segue:*

$$\Delta\theta_v(L) = \Delta\theta_v(B^+) = \Delta\theta_v(B^-) = \mp 1; \quad \Delta\theta_v(B) = 0.$$

Isso ocorre porque:

- Para a transição L e B^+ , temos o número de componentes regulares de $M^\pm$ dado pela relação $v^\mp(f) = v^\mp(h) + 1$, disso resulta

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_v(L) &= \Delta\theta_v(B^+) \\
&= \Delta v^+ - \Delta v^- \\
&= [v^+(f) - v^+(h)] - [v^-(f) - v^-(h)] \\
&= \mp 1.
\end{aligned}$$

- Para a transição B^- , temos $v^\pm(f) = v^\pm(h) - 1$, e de modo análogo ao cálculo anterior se mostra $\Delta\theta_v(B^-) = \mp 1$. Para a transição B , como $v^\mp(f) = v^\mp(h)$, temos $\Delta\theta_v(B) = 0$.

Observação 2.29. Uma consequência do Teorema 2.15, onde $\theta_\chi = 2[\theta_v - \theta_g]$, é que a variação de θ_g pelas transições L , $B^\pm$ e B , pode ser calculada por

$$2\Delta\theta_g = 2\Delta\theta_v - \Delta\theta_\chi.$$

Pelo Lema 2.25 e pelas Observações 2.24, 2.28 e 2.29, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.30. A variação $\Delta\theta_\alpha$ com $\alpha \in \{c, v, g, \chi\}$ pelas transições L , $B^\pm$ e B é dada por:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_c(L) &= \Delta\theta_c(B^+) = \Delta\theta_c(B^-) = \Delta\theta_c(B) = \pm 2 \\
\Delta\theta_\chi(L) &= \Delta\theta_\chi(B^+) = \Delta\theta_\chi(B^-) = \Delta\theta_\chi(B) = \mp 2 \\
\Delta\theta_v(L) &= \Delta\theta_v(B^+) = \Delta\theta_v(B^-) = \mp 1; \quad \Delta\theta_v(B) = 0 \\
\Delta\theta_g(L) &= \Delta\theta_g(B^+) = \Delta\theta_g(B^-) = 0; \quad \Delta\theta_g(B) = \pm 1
\end{aligned}$$

2.3.1 Relações entre θ_c e θ_χ

Conforme visto na seção anterior, se $f, h : M \rightarrow N$ são aplicações estáveis homotópicas entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , então podemos escolher um caminho entre f e h em $C^\infty(M, N)$, de modo que f pode ser obtida de h passando apenas por transições de codimensão um.

Nosso objetivo nesta subseção é estudar os efeitos dessas transições na topologia do conjunto regular e sua relação com os sinais das cúspides.

Definição 2.31. Sejam x e y um par de cúspides nascidas através de uma transição de codimensão um, com graus locais $s(x)$ e $s(y)$, respectivamente. Dizemos que o grau do par (x, y) de cúspides é

$$\theta(x, y) = \frac{[s(x) + s(y)]}{2}. \quad (2.22)$$

Observação 2.32. *Visto que os pares (x, y) de cúspides nascidas pelas transições lábios (L) e bicos ($B^\pm$ e B) sempre têm o mesmo sinal, então pela Definição 2.31, o grau destes pares de cúspides é $\theta(x, y) = \pm 1$, dependendo da orientação da região regular para onde apontam. Por outro lado, para a transição rabo de andorinha (S) essas cúspides têm sinais opostos e, portanto, o grau do par de cúspide é $\theta(x, y) = 0$.*

Proposição 2.33. *Se f e h são aplicações estáveis numa mesma classe de homotopia em $C^\infty(M, N)$, então*

$$\Delta\theta_c(\eta) = 2 \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i), \quad (2.23)$$

onde $\eta \in \{L, B^\pm, B, S, T, TC\}$ e, (x_i, y_i) denotam os pares de cúspides nascidas durante as transições de codimensão um, ao longo de um caminho de h à f .

Demonstração: Sabemos pela Observação 2.24 que $\Delta\theta_c = 0$ para as transições tangência de dobras (T) e tangência de doba com cúspide (TC), pois elas não alteram θ_c . A Observação 2.32 nos fornece que $\theta(x_i, y_i) = \pm 1$ para as transições L , $B^\pm$ e B , e $\theta(x_i, y_i) = 0$ para a transição S . Pela Observação 2.26, temos que cada par (x_i, y_i) de cúspides nascidas pelas transições L , $B^\pm$ e B , alteram $\Delta\theta_c$ por ± 2 , dependendo da orientação da região regular para a qual o par de cúspides aponta. Por estes resultados conclui-se que $\Delta\theta_c = 2 \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i)$. $\square$

Definição 2.34. *Seja U uma componente regular de M^+ (resp. M^-), denotaremos o sinal da região U por $s(U) = +1$ (resp. $s(U) = -1$).*

Lema 2.35. *Se f é uma aplicação estável que pode ser obtida de h através de uma única transição de codimensão um, então*

$$\chi(M_f^\pm) = \chi(M_h^\pm) \mp \theta(x, y) \quad (2.24)$$

onde χ denota a característica de Euler e $\theta(x, y)$ o grau do par de cúspides (x, y) que nascem durante a transição.

Demonstração: Consideremos as transições nas regiões regulares U , Z e W , conforme expressas na demonstração do Lema 2.27, então, para as transições lábios e bicos vale a relação 2.20:

$$\begin{cases} \chi(M_f^\pm) = \chi(M_h^\pm) - 1 \\ \chi(M_f^\mp) = \chi(M_h^\mp) + 1 \end{cases}.$$

Por outro lado, sabemos que o grau do par de cúspides que nascem em cada transição lábios e bicos ao longo de um caminho de h à f é $\theta(x, y) = \pm 1$ (Observação 2.32). Por estes resultados seguem que:

1. Para a transição lábios (L) (retorne à Figura 2.11), como $U \subset M_h^\pm$, temos $s(U_1) = s(U) = -s(U_2) = \pm 1 = \theta(x, y)$. Então,

$$\begin{cases} \chi(U_1) = \chi(U) - 1 = \chi(U) \mp \theta(x, y) \\ \chi(U_2) = 1 = \pm \theta(x, y) \end{cases}.$$

2. Para a transição do tipo bicos B^+ (retorne à Figura 2.12), como $U \subset M_h^\pm$ e $Z \subset M_h^\mp$, temos $s(U_1) = s(U) = \theta(x, y)$ e $s(Z_2) = s(Z_1) = s(Z) = \mp 1 = -\theta(x, y)$. Então

$$\begin{cases} \chi(U_1) = \chi(U) - 1 = \chi(U) \mp \theta(x, y) \\ \chi(Z_1 \cup Z_2) = \chi(Z) + 1 = \chi(Z) \pm \theta(x, y) \end{cases}.$$

3. Para a transição B^- (retorne à Figura 2.13), como $(U \cup W) \subset M_h^\pm$ e $Z \subset M_h^\mp$, temos $s(U_1) = s(U) = s(W) = \pm 1 = \theta(x, y)$ e $s(Z_1) = s(Z) = \mp 1 = -\theta(x, y)$. Então

$$\begin{cases} \chi(U_1) = \chi(U \cup W) - 1 = \chi(U \cup W) \mp \theta(x, y) \\ \chi(Z_1) = \chi(Z) + 1 = \chi(Z) \pm \theta(x, y) \end{cases}.$$

4. Para a transição B (retorne à Figura 2.14), como $U \subset M_h^\pm$ e $Z \subset M_h^\mp$, temos $s(U_1) = s(U) = \pm 1 = \theta(x, y)$ e $s(Z_1) = s(Z) = \mp 1 = -\theta(x, y)$. Então

$$\begin{cases} \chi(U_1) = \chi(U) - 1 = \chi(U) \mp \theta(x, y) \\ \chi(Z_1) = \chi(Z) + 1 = \chi(Z) \pm \theta(x, y) \end{cases}.$$

Como as demais transições, a saber, rabo de andorinha (S), tangência de dobras (T) e tangência de cúspides (TC) não alteram a topologia das componentes regulares, resulta que

$$\chi(M_f^\pm) = \chi(M_h^\pm) \mp \theta(x, y).$$

□

Teorema 2.36. *Se $f, h : M \rightarrow N$ são duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia em $C^\infty(M, N)$, e h é uma aplicação dobra, então*

$$\theta_c(f) = 2\Delta\chi(M^-) = -2\Delta\chi(M^+). \quad (2.25)$$

Demonstração: Seja f_i uma aplicação estável obtida de outra aplicação estável f_{i-1} , através de uma transição de codimensão um, pelo Lema 2.35, temos

$$\chi(M_{f_i}^\pm) = \chi(M_{f_{i-1}}^\pm) \mp \theta(x_i, y_i),$$

onde (x_i, y_i) denotam os pares de cúspides que nascem com a transição. Se h é uma aplicação dobra e a aplicação f_1 pode ser obtida de h por uma transição de codimensão um, então

$$\chi(M_{f_1}^\pm) = \chi(M_h^\pm) \mp \theta(x_1, y_1),$$

onde (x_1, y_1) é o par de cúspides que nasceram pela transição. Dessa forma, pode-se verificar por recorrência a igualdade

$$\chi(M_f^\pm) = \chi(M_h^\pm) \mp \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i), \quad (2.26)$$

que é equivalente a

$$\chi(M_f^\pm) - \chi(M_h^\pm) = \mp \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i),$$

com $f = f_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \Delta\chi(M^\pm) &= \chi(M_f^\pm) - \chi(M_h^\pm) \\ &= \mp \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i), \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\mp \Delta\chi(M^\pm) = \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i). \quad (2.27)$$

Como h é uma aplicação dobra, então $\theta_c(h) = 0$ e a relação $\Delta\theta_c = 2 \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i)$ da Proposição 2.33 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Delta\theta_c &= \Delta c^+ - \Delta c^- \\ &= \theta_c(f) - \theta_c(h) \\ &= \theta_c(f) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Aplicando a equação 2.27 nesta última igualdade, onde $\theta_c(f) = 2 \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i)$, segue

$$\begin{aligned} \theta_c(f) &= -2\Delta\chi(M^+) \\ &= 2\Delta\chi(M^-). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.37. *Se $f, h : M \rightarrow N$ são duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia em $C^\infty(M, N)$, e h é uma aplicação dobra, então*

$$\theta_c(f) = \theta_\chi(h) - \theta_\chi(f). \quad (2.29)$$

Demonstração: Uma vez que estamos sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.36, podemos usar a equação 2.26 e substituir nela a igualdade $\frac{\theta_c(f)}{2} = \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i)$ (extraída da equação 2.28), isto é,

$$\begin{aligned} \chi(M_f^\pm) &= \chi(M_h^\pm) \mp \sum_{i=1}^k \theta(x_i, y_i) \\ &= \chi(M_h^\pm) \mp \frac{\theta_c(f)}{2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por outro lado, sabemos pela Definição 2.12 que

$$\theta_\chi(f) = \chi(M_f^+) - \chi(M_f^-). \quad (2.31)$$

Assim, substituindo a equação 2.30 na equação 2.31, temos

$$\begin{aligned} \theta_\chi(f) &= \left[\chi(M_h^+) - \frac{\theta_c(f)}{2} \right] - \left[\chi(M_h^-) + \frac{\theta_c(f)}{2} \right] \\ &= \theta_\chi(h) - \theta_c(f), \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\theta_c(f) = \theta_\chi(h) - \theta_\chi(f).$$

□

2.4 Invariante global de aplicações estáveis

Os invariantes locais I_c, I_n e I_e apresentados na seção 2.2 podem ser calculados olhando para o contorno aparente das aplicações estáveis entre superfícies. No entanto, quando o contorno aparente de duas aplicações são idênticos, esses três invariantes não são suficientes para dizer se elas são ou não $\mathcal{A}$ -equivalentes.

A Figura 2.15 ilustra um exemplo de duas aplicações estáveis distintas da esfera na esfera, com grau um, construídas pela composição $\pi \circ f_i$, onde f_i é um mergulho com deformação da esfera no $\mathbb{R}^3$ e π é a projeção da imagem de f_i na esfera. Ambas

as aplicações possuem o mesmo contorno aparente, o qual contém seis componentes conexas disjuntas e simples.

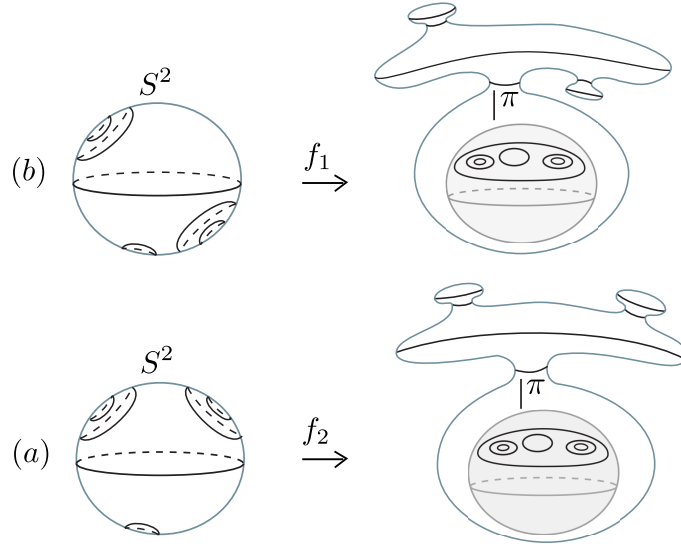


Figura 2.15: Diferentes aplicações com o mesmo contorno aparente.

Uma maneira de diferenciar essas aplicações, é pela disposição das curvas do conjunto singular Σf na superfície de domínio. Em [9], Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster apresentaram um invariante para o caso de superfícies orientadas no plano: o *grafo*, que é associado ao domínio da aplicação, juntamente com seu conjunto singular. Posteriormente, em [13], os mesmos autores estenderam a técnica de associar grafos para o caso de superfícies fechadas na esfera.

Na próxima seção apresentaremos o grafo como um invariante global de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas e os efeitos das transições de codimensão um sobre os mesmos.

2.4.1 Grafos de aplicações entre superfícies

Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável, onde M e N são superfícies fechadas e orientadas e Σf o conjunto singular de f . O grafo associado a aplicação f , denotado por G_f , é o grafo associado ao par $(M, \Sigma f)$ com pesos (inteiros positivos) nos vértices. Este grafo é obtido da seguinte forma:

1. cada componente regular U do complemento $M \setminus \Sigma f$ fazemos corresponder a um vértice v_i do grafo;
2. cada curva μ_i do conjunto singular Σf fazemos corresponder a uma aresta a_i do grafo;

3. um vértice v_i e uma aresta a_i são **incidentes** se, e somente se, a curva correspondente a a_i encontra-se no bordo da região correspondente a v_i ;
4. o peso w_i no vértice v_i corresponde ao gênero g_i da componente conexa M_i .

Definição 2.38. O grafo obtido pelo processo acima, associado a uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ é dito **grafo dual** de Σf em M e denotado por G_f .

Notações: Ao longo deste trabalho, sempre que nos referirmos a grafos, denotaremos por $V = V^+ + V^-$ a soma total dos vértices correspondentes a M^+ e M^- , A o número total de arestas e por $W = W^+ + W^-$ a soma total dos pesos dos vértices correspondentes a M^+ e M^- .

Definição 2.39. Dada uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , a característica do grafo G_f , associado a aplicação f , é o vetor $C(G_f) = (V, A, W)$.

Exemplo 2.40. A Figura 2.16 ilustra os grafos de três aplicações diferentes do toro na esfera, a aplicação π possui duas curvas singulares que decompõe o toro em dois cilindros, cujo grafo tem duas arestas, dois vértices e um ciclo. As aplicações g e f têm uma única componente no conjunto singular, que separa um disco do toro menos um disco, as quais correspondem ao grafo com única aresta e peso um.

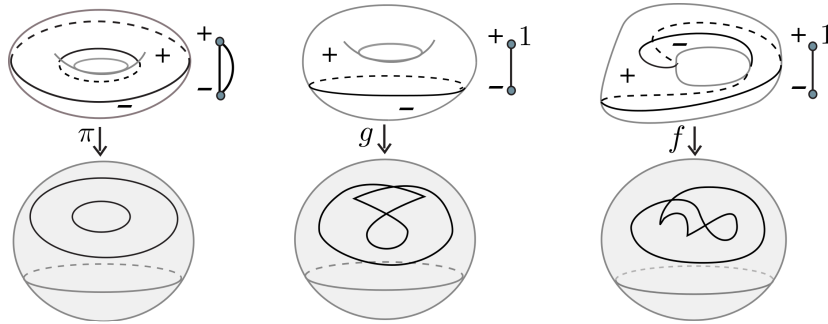


Figura 2.16: Três aplicações do toro na esfera com grau zero.

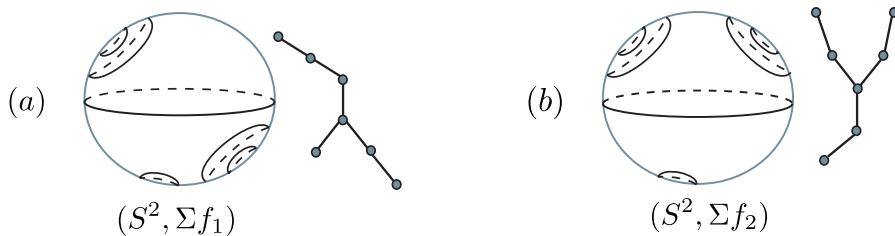


Figura 2.17: Grafos associados as aplicações da Figura 2.15.

Como vemos na Figura 2.17 os grafos podem diferenciar aplicações não $\mathcal{A}$ -equivalentes que possuem o mesmo contorno aparente.

Observação 2.41. *O grafo é um invariante por $\mathcal{A}$ -equivalência. Em outras palavras, se duas aplicações são associadas a grafos distintos, então elas não são $\mathcal{A}$ -equivalentes.*

Observação 2.42. *O grafo associado a aplicação estável $f : M \rightarrow N$, onde M é uma superfície fechada e orientada, é sempre bipartido. Pois, pela Definição 1.70, temos que as componentes singulares de Σf separam regiões de M com sinais opostos, assim, as arestas dos grafos sempre separam vértices de sinais opostos.*

A demonstração da Proposição 2.43 abaixo pode ser encontrada em [21].

Proposição 2.43. [21] *Seja G um grafo com característica $C(G) = (V, A, W)$ associado ao par $(M, \Sigma f)$. Então a característica de Euler de M (em função de $C(G)$) é dada por $\chi(M) = 2(V - A - W)$.*

Sobre os efeitos das transições de codimensão um sobre os grafos associados às aplicações estáveis, segue a Observação 2.44.

Observação 2.44. *Sabemos que apenas as transições de codimensão um do tipo lábios (L) e bicos ($B^\pm$ e B) alteram a topologia do conjunto regular das aplicações estáveis entre superfícies, portanto, alteram também os grafos associados a estas aplicações. Essas alterações se dão da seguinte maneira:*

- *a transição Lábios (L), acrescenta um vértice no grafo da aplicação estável, pois esta transição faz nascer uma nova componente regular.*
- *a transição bicos do tipo B^+ , também acrescenta um vértice no grafo da aplicação, pois divide uma região regular em duas novas regiões regulares.*
- *transição B^- , diminui um vértice no grafo. Isso ocorre, porque esta transição une duas componentes regulares distintas.*
- *a transição bicos do tipo B , diminui o número de arestas por um e altera o peso sobre um dos vértices, pois esta transição ocorre entre duas componentes singulares distintas, alterando a topologia, mas não o número das componentes regulares.*

O grafo dual associado ao conjunto singular de uma aplicação entre superfícies, pode ser estendido a qualquer conjunto finito $\mathcal{C}$, de curvas fechadas, simples e disjuntas em M . Associamos as arestas do grafo às componentes de $\mathcal{C}$ e os vértices às componentes conexas do complemento $M \setminus \mathcal{C}$. Com isso, vale a mesma relação de adjacência da construção do grafo associado ao par $(M, \Sigma f)$ para o par $(M, \mathcal{C})$. Para saber mais, consulte [2] e [21].

Capítulo 3

Cirurgias de aplicações estáveis

No espaço $C^\infty(M, N)$, podemos obter uma aplicação f a partir de uma aplicação h distinguida, passando apenas por transições de codimensão um, desde que f e h estejam na mesma classe de homotopia, uma condição necessária neste caso é que f e h tenham o mesmo grau. No caso em que $g_N > 0$, o número de vezes e a forma que as alças de M se enrolam às alças de N também diferenciam as classes de homotopia ([31]), além do grau. O ideal é conhecer uma aplicação na classe de homotopia desejada. A Figura 3.1 ilustra um exemplo de três aplicações do 4-toros sobre o 3-toros, com grau zero e contorno irreduzível (única componente singular), mas, devido a forma com que as alças do 4-toros se enrolam a alças do 3-toros, apenas h_1 e h_2 são homotópicas.

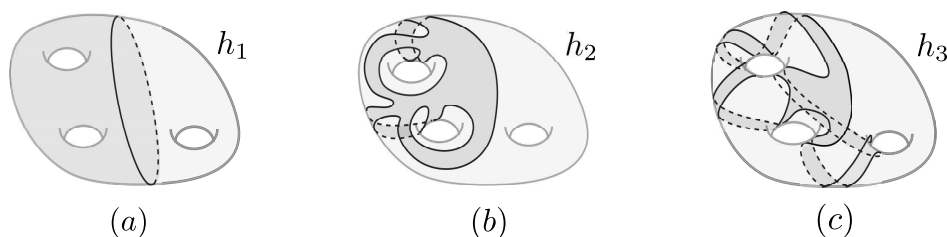


Figura 3.1: Exemplo do contorno aparente de aplicações do 4-torus no 3-toros.

Outra maneira de construir aplicações estáveis em diferentes classes de homotopia no espaço $C^\infty(M, N)$ ou em espaços que sejam a soma dos espaços originais, é fazendo a “soma de aplicações estáveis” já conhecidas. Os dois tipos de soma de aplicações que apresentaremos neste capítulo, denominadas *cirurgia horizontal* e *cirurgia vertical*, foram introduzidas em [12], por Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster, para o caso de aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano. Mais tarde, em [14], estas cirurgias foram estendidas por estes autores para aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na 2-esfera e, recentemente Mendes de Jesus e Romero Fuster apresentaram condições necessárias e suficientes para o caso de aplicações de superfícies

fechadas no plano projetivo ([13]).

Em síntese, essas cirurgias consistem na remoção de um par de discos disjuntos (vizinhanças de certos tipos de pontos) na superfície de domínio, os quais são substituídos por um tubo limitado conectando os “bordos” da superfície, ao longo do qual as aplicações envolvidas são estendidas estavelmente.

Após definir as cirurgias horizontal e vertical e apresentar alguns exemplos, estudaremos os seus efeitos sobre o vetor $\phi = (\mu, \deg, c, n, g_M, v)$ e os invariantes θ_c , θ_v , θ_g e θ_χ das aplicação estáveis obtidas por estas cirurgias.

3.1 Cirurgia Horizontal

Sejam $W = M_1 \cup M_2$ e N duas superfícies fechadas e orientadas e $h : W \rightarrow N$ uma aplicação estável. Denotemos por Bh o contorno aparente de h , por $h_1 : M_1 \rightarrow N$ a restrição de h à M_1 e por $h_2 : M_2 \rightarrow N$ a restrição de h à M_2 . Uma **soma horizontal** sobre a aplicação h pode ser feita da seguinte forma:

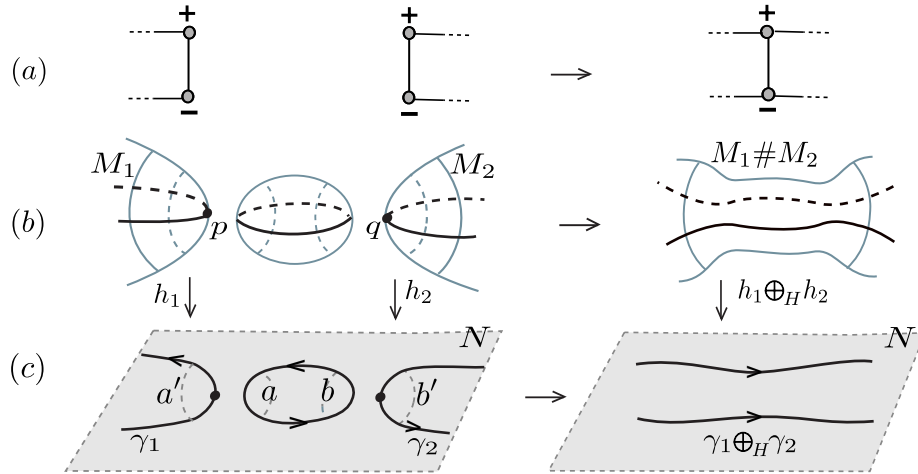


Figura 3.2: Cirurgia horizontal.

1. Escolhemos dois arcos $a' = h_1(l)$ e $b' = h_2(k)$ em Bh , onde $l \in \Sigma h_1$ e $k \in \Sigma h_2$ são arcos de dobras, tal que exista um caminho z entre a' e b' com $z \cap Bh = \emptyset$.
2. Mergulhamos um retângulo β em $N \setminus Bh$, na vizinhança de z , que une os seus lados opostos a e b , respectivamente, com os arcos a' e b' respeitando a orientação de Bh (Figura 3.2 (c)). O retângulo β é chamado de **ponte** entre curvas.
3. Escolhemos dois discos D_l e D_k contendo os arcos de dobras l e k , e substituímos seus interiores (respeitando as orientação das regiões) por um tubo limitado T

(homeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$), colando ∂D_l à uma componente de bordo do tubo e ∂D_k à outra componente de bordo do tubo. Com este processo obtemos uma superfície homeomorfa à soma conexa $M_1 \# M_2$.

4. Podemos estender pelo interior do tubo (ver [15]) as aplicações estáveis h_1 e h_2 . Assim, obtemos uma nova aplicação estável $h_1 \oplus h_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow N$, cujas restrições a M_1 e M_2 correspondem a h_1 e h_2 , respectivamente (ver Figura 3.2).

Definição 3.1. *A aplicação estável $h_1 \oplus h_2$ obtida pela soma horizontal descrita acima, é dita **cirurgia horizontal** entre h_1 e h_2 e denotada por $h_1 \oplus_H h_2$.*

Note que a cirurgia horizontal restrita ao conjunto singular da aplicação tem, por construção, o efeito de uma ponte no contorno aparente.

Observação 3.2. *A superfície resultante da cirurgia horizontal conforme definida acima, é sempre orientada, pois M_1 e M_2 são superfícies orientadas e o tubo T , de um lado da curva singular conecta regiões positivas com regiões positivas e, do outro, conecta regiões negativas com regiões negativas. Isso equivale a dizer, que a ponte β respeita as orientações do contorno aparente.*

Definição 3.3. *A cirurgia horizontal se distingue nos três seguintes casos:*

1. H_1^+ : *a cirurgia horizontal que conecta dois arcos de uma mesma componente singular da aplicação. Esta cirurgia acrescenta um gênero (alça) na superfície do domínio e aumenta por um o número de componentes do conjunto singular.*
2. H_1^- : *a cirurgia horizontal que conecta dois arcos de diferentes componentes singulares de uma mesma componente conexa da aplicação. Esta cirurgia acrescenta um gênero (alça) na superfície do domínio e diminui por um o número de componentes do conjunto singular.*
3. H_2 : *a cirurgia horizontal que conecta dois arcos de componentes singulares de diferentes componentes conexas da aplicação. Esta cirurgia corresponde a “soma conexa” das superfícies do domínio.*

Observação 3.4. *As cirurgias horizontais do tipo H_1^+ e H_1^- acrescentam por um o gênero da superfície do domínio.*

Conforme ilustra a Figura 3.2, a cirurgia horizontal de aplicações estáveis, induz naturalmente a cirurgia horizontal dos grafos associados a essas aplicações. Os efeitos da cirurgia horizontal do tipo H_2 sobre os grafos de aplicações estáveis, são dados pela observação seguinte.

Observação 3.5. *Se G_i é um grafo associado a aplicação estável $h_i : M_i \rightarrow N$, com $i = 1, 2$, então realizando a cirurgia horizontal do tipo H_2 entre as duas aplicações h_1 e h_2 , obtemos:*

1. $V(G_1 \oplus_{H_2} G_2) = V(G_1) + V(G_2) - 2$, pois duas regiões positivas e duas regiões negativas se unem, ou seja, dois vértices positivos e dois negativos são identificados (respeitando os sinais).
2. $A(G_1 \oplus_{H_2} G_2) = A(G_1) + A(G_2) - 1$, pois duas curvas singulares se unem, ou seja, duas arestas são identificadas.
3. $W(G_1 \oplus_{H_2} G_2) = W(G_1) + W(G_2)$, pois as regiões conectadas carregam os seus gêneros, com isso, o peso no vértice correspondente a nova região é a soma dos pesos dos vértices que o geraram.

De modo análogo, pode-se descrever os efeitos das cirurgias horizontais do tipo H_1^+ e H_1^- sobre os grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas.

Em [2], Bretas observou que dados dois grafos bipartidos G_1 e G_2 , a soma destes por cirurgia horizontal será ainda um grafo bipartido, pois esta cirurgia conecta regiões com o mesmo sinal.

Proposição 3.6. [21] *Se G_1 e G_2 são grafos associados, respectivamente, as aplicações estáveis $h_1 : M_1 \rightarrow N$ e $h_2 : M_2 \rightarrow N$, então o grafo resultante da cirurgia horizontal é um grafo associado a aplicação estável $h_1 \oplus_H h_2$.*

3.1.1 Aplicações na esfera e no n -toros

Nesta subseção, mostraremos algumas formas de se obter aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, via cirurgias horizontais. A forma de se obter estas aplicações não é única, e aqui apresentaremos apenas alguns exemplos convenientes para o entendimento deste trabalho. Para saber sobre os grafos que podem ser associados a aplicações deste tipo, veja [2], [6] e [21].

Sejam M_1 e N duas superfícies fechadas e orientadas com gêneros g_M e g_N , respectivamente. Dada a aplicação estável $f_1 : M_1 \rightarrow N$ com grau $\deg(f_1) = m$, e a aplicação estável $f_2 : N \rightarrow N$, com uma componente singular e duas cúspides, obtida da aplicação identidade $Id : N \rightarrow N$ por uma homotopia passando por uma transição do tipo lábios (L). Sabemos que o grau é um invariante por homotopia e $\deg(Id) = 1$, então $\deg(f_2) = \deg(Id) = 1$.

Para obter uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ com grau d , onde M é uma superfície fechada e orientada, basta tomar a aplicação estável f_1 com grau $m < d$ (pois queremos grau positivo), e fazer $d - m$ cirurgias horizontais do tipo H_2 entre a aplicação f_1 e $d - m$ aplicações estáveis do tipo $f_2 : N \rightarrow N$ com grau 1. De fato, o grau da nova aplicação obtida por este processo será

$$\begin{aligned} \deg(f_1 \oplus_{H_2} f_2 \oplus_{H_2} \cdots \oplus_{H_2} f_2) &= \deg(f_1) + (d - m) \cdot \deg(f_2) \\ &= m + (d - m) \cdot 1 \\ &= d, \end{aligned}$$

pois $\deg(f_1) = m$ e $\deg(f_2) = 1$.

Exemplo 3.7. A Figura 3.3 ilustra uma cirurgia horizontal do tipo H_2 entre a aplicação estável $f_1 : M \rightarrow S^2$ com grau m , e a aplicação estável $f_2 : S^2 \rightarrow S^2$ com grau 1, obtida da aplicação identidade $\text{Id} : S^2 \rightarrow S^2$ por uma transição do tipo lábios. Neste caso, a nova aplicação estável $f_1 \oplus_{H_2} f_2 : M \rightarrow S^2$ possui grau $\deg(f_1 \oplus_{H_2} f_2) = \deg(f_1) + \deg(f_2) = m + 1$, pois $\deg(f_1) = m$ e $\deg(f_2) = 1$.

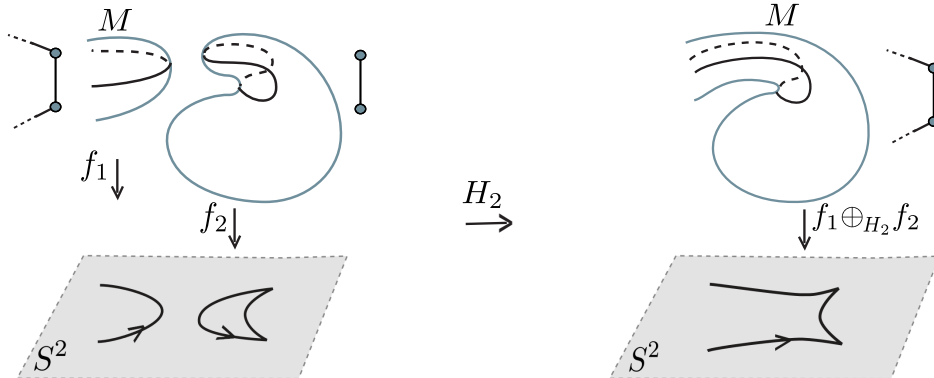


Figura 3.3: Exemplo de cirurgia horizontal.

Exemplo 3.8. A Figura 3.4 ilustra a construção de uma aplicação f da esfera na esfera, com grau 2, contorno irreduzível (única componente singular) e 4 cúspides. Esta aplicação foi obtida fazendo uma cirurgia horizontal do tipo H_2 entre duas aplicações f_1 e f_2 da esfera na esfera, ambas com grau 1 e uma componente singular com 2 cúspides.

Denotemos o toro por T^2 . O Exemplo 3.9 nos mostra como obter uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada M , com gênero $g_M > 0$, sobre o n -toros, com gênero $n \geq 1$. Na verdade, construiremos uma aplicação do dn -toros sobre o n -toros.

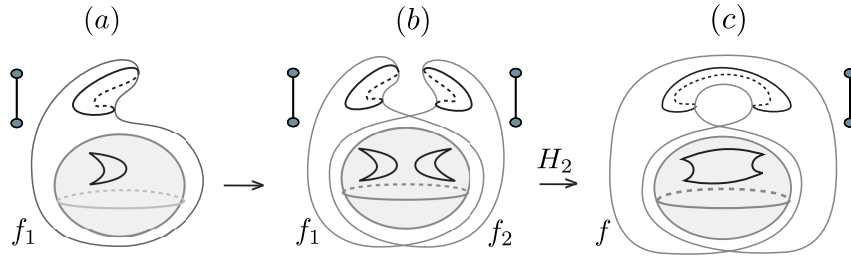


Figura 3.4: Construção de uma aplicação da esfera na esfera com grau 2.

Exemplo 3.9. Consideremos a aplicação estável $f_1 : nT^2 \rightarrow nT^2$, onde $n \geq 1$, com uma componente singular, duas cúspides e grau 1, obtida da aplicação identidade $Id : nT^2 \rightarrow nT^2$ por uma transição do tipo lábios (conforme Figura 3.5 item (a)). Fazendo $d - 1$ cirurgias horizontais do tipo H_2 entre d aplicação do tipo f_1 , obtemos uma aplicação estável f , do dn -toros sobre o n -toros, com grau d , a qual, por construção, possui também contorno irreduzível e $2d$ cúspides com o mesmo sinal (ver Figura 3.5 item (b)).

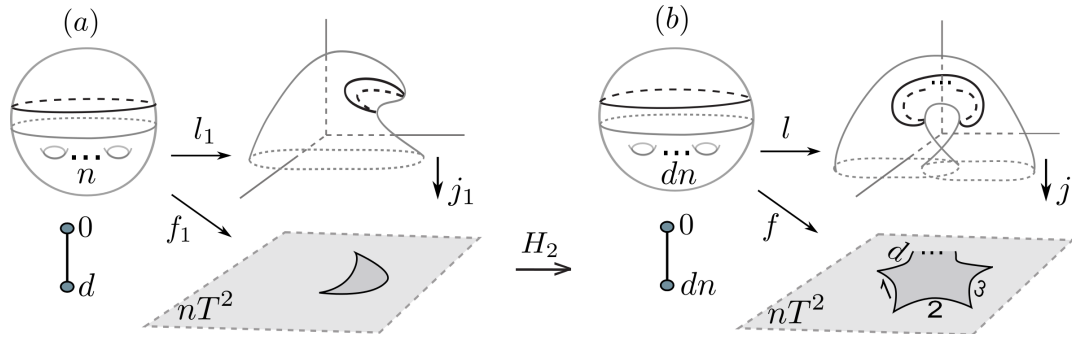


Figura 3.5: Construção de uma aplicação do dn -toros sobre o n -toros, com grau d .

Exemplo 3.10. A Figura 3.6 ilustra uma aplicação estável f do toro na esfera, com grau 1, contorno irreduzível e 4 cúspides. Esta aplicação foi obtida por uma cirurgia horizontal do tipo H_1^- sobre uma mesma aplicação estável f_2 da esfera na esfera, com duas componentes singulares e 4 cúspides, obtida da aplicação identidade ($Id : S^2 \rightarrow S^2$) por duas transições do tipo lábios.

Note que as cirurgias horizontais do tipo H_1^+ e H_1^- nos fornecem aplicações com o mesmo grau da aplicação sobre a qual fizemos a cirurgia, enquanto que a cirurgia horizontal do tipo H_2 , soma o grau das aplicações sobre as quais fizemos a cirurgia.

Observação 3.11. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , obtida por cirurgias horizontais, podemos também obter várias outras aplicações estáveis com grau d , na mesma classe de homotopia da f , basta passar por alguma transição de codimensão um, por exemplo, do

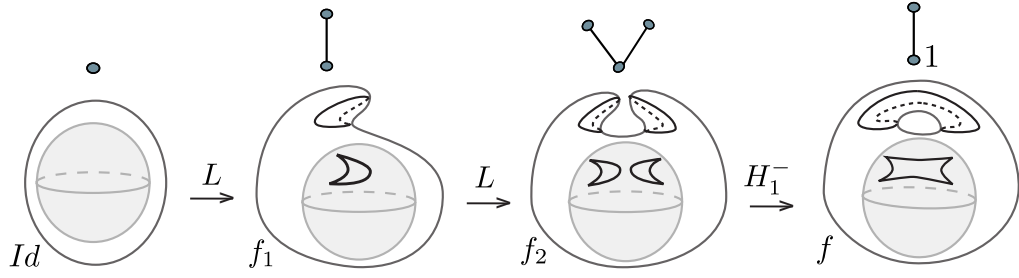


Figura 3.6: Construção de uma aplicação do toro na esfera, com grau 1.

tipo lábios (L) ou bicos ($B^\pm$ e B), pois estas transições nos fornecem aplicações homotópicas à f , alterando apenas o número de componentes regulares ou singulares, bem como o número de cúspides.

3.2 Cirurgia Vertical

Sejam $W = M_1 \cup M_2$ e N duas superfícies fechadas e orientadas e $h : W \rightarrow N$ uma aplicação estável. Denotemos por $h_1 : M_1 \rightarrow N$ a restrição de h à M_1 e por $h_2 : M_2 \rightarrow N$ a restrição de h à M_2 . Uma **soma vertical** sobre a aplicação h pode ser feita da seguinte forma:

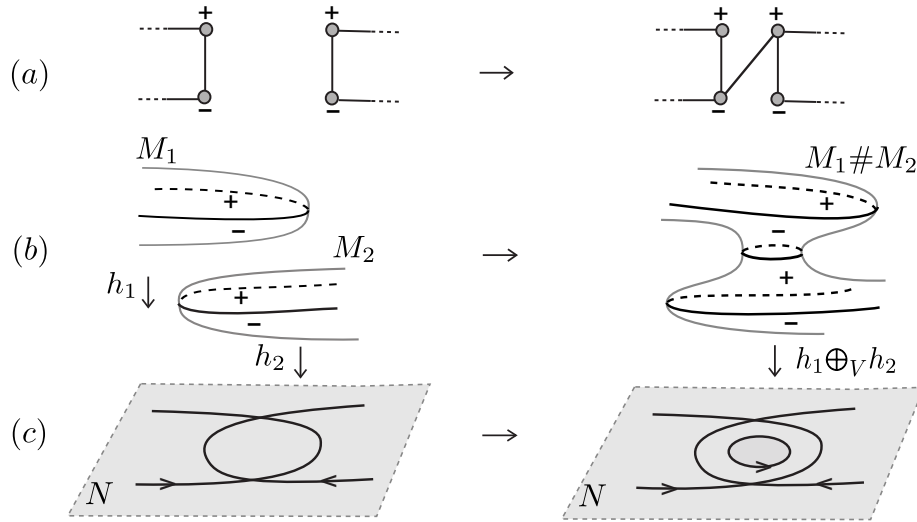


Figura 3.7: Cirurgia Vertical.

1. Escolhemos duas regiões com sinais opostos, uma em M_1 e outra em M_2 e tomamos dois discos D_p e D_q vizinhanças regulares dos pontos $p \in M_1 \setminus \Sigma h_1$ e $q \in M_2 \setminus \Sigma h_2$, tal que $h_1(D_p) = h_2(D_q)$.
2. Substituímos os interiores destes discos (respeitando as orientações envolvidas) por um tubo limitado T , com uma curva singular α ao longo do seu centro,

fechada e não contrátil. Com este processo obtemos uma superfície homeomorfa à soma conexa $M_1 \# M_2$.

3. Estendemos pelo interior do tubo as aplicações estáveis h_1 e h_2 . Assim, obtemos uma nova aplicação estável $h_1 \oplus h_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow N$, cujas restrições a M_1 e M_2 correspondem a h_1 e h_2 , respectivamente (ver Figura 3.7).

Definição 3.12. A aplicação estável $h_1 \oplus h_2$ obtida pela soma vertical descrita acima, é dita **cirurgia vertical** entre h_1 e h_2 e denotada por $h_1 \oplus_V h_2$.

Note que a cirurgia vertical, por construção, acrescenta uma nova componente ao conjunto singular e, conseqüentemente, uma nova curva disjunta imersa no contorno aparente da aplicação, a qual é a imagem da curva singular α .

Observação 3.13. A superfície resultante da cirurgia vertical conforme definida acima, é sempre orientada, pois M_1 e M_2 são superfícies orientadas e o tubo T conecta uma região positiva com uma região negativa mantendo as adjacências conforme ilustra a Figura 3.7 item (b).

Definição 3.14. A cirurgia vertical se distingue nos dois seguintes casos:

1. V_1 : a cirurgia vertical feita sobre uma mesma componente conexa da aplicação. Esta cirurgia acrescenta um gênero (alça) na superfície do domínio e aumenta por um o número de componentes do conjunto singular.
2. V_2 : a cirurgia vertical entre duas componentes conexas da aplicação. Esta cirurgia corresponde a “soma conexa” das superfícies do domínio e aumenta por um o número de componentes do conjunto singular.

Conforme ilustra a Figura 3.7, a cirurgia vertical de aplicações estáveis, induz naturalmente a cirurgia vertical dos grafos associados a essas aplicações. Os efeitos da cirurgia vertical do tipo V_2 sobre os grafos de aplicações estáveis, são dados pela observação seguinte.

Observação 3.15. Se G_i é um grafo associado a aplicação $h_i : M_i \rightarrow N$, com $i = 1, 2$, então realizando a cirurgia vertical do tipo V_2 entre as duas aplicações h_1 e h_2 , obtemos:

1. $V(G_1 \oplus_{V_2} G_2) = V(G_1) + V(G_2)$, pois nenhuma região é retirada ou colocada, ou seja, nenhum vértice é identificado ou acrescentado.
2. $A(G_1 \oplus_{V_2} G_2) = A(G_1) + A(G_2) + 1$, pois uma nova componente singular é criada, ou seja, uma nova aresta é acrescentada.

3. $W(G_1 \oplus_{V_2} G_2) = W(G_1) + W(G_2)$, pois nenhum gênero é acrescentado ou retirado das regiões.

De modo análogo, pode-se descrever os efeitos da cirurgia vertical do tipo V_1 , sobre os grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas.

Em [2], Bretas observou que dados dois grafos bipartidos G_1 e G_2 , a soma destes por cirurgia vertical será ainda um grafo bipartido, pois esta cirurgia cria uma nova componente singular que separa regiões de sinais opostos, mantendo as adjacências das outras regiões com as curvas singulares.

Proposição 3.16. [21] *Se G_1 e G_2 são grafos associados, respectivamente, as aplicações estáveis $h_1 : M_1 \rightarrow N$ e $h_2 : M_2 \rightarrow N$, então o grafo resultante da cirurgia vertical é um grafo associado a aplicação estável $h_1 \oplus_V h_2$.*

3.2.1 Aplicações na esfera e no n -toros

De modo análogo ao que foi feito para cirurgias horizontais, mostraremos nesta subseção algumas formas de se obter aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, via cirurgias verticais. A forma de se obter estas aplicações também não é única, e aqui apresentaremos apenas alguns exemplos convenientes para o entendimento deste trabalho. Para saber sobre os grafos que podem ser associados a aplicações deste tipo, veja [2], [6] e [21].

Sejam M_1 e N duas superfícies fechadas e orientadas com gêneros g_M e g_N , respectivamente. Dada a aplicação estável $f_1 : M_1 \rightarrow N$ com grau $\deg(f_1) = m$, e a aplicação identidade $Id : N \rightarrow N$, com grau $\deg(Id) = 1$ e conjunto singular vazio.

Para obter uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ com grau d , onde M é uma superfície fechada e orientada, basta tomar a aplicação estável f_1 com grau $m < d$ (pois queremos grau positivo), e fazer $d - m$ cirurgias verticais do tipo V_2 entre a aplicação identidade f_1 e $d - m$ aplicações identidade Id , com grau 1. De fato, o grau da nova aplicação obtida por este processo será

$$\begin{aligned} \deg(f_1 \oplus_{V_2} Id \oplus_{V_2} \cdots \oplus_{V_2} Id) &= \deg(f_1) + (d - m) \cdot \deg(Id) \\ &= m + (d - m) \cdot 1 \\ &= d, \end{aligned}$$

pois, $\deg(f_1) = m$ e $\deg(Id) = 1$.

Exemplo 3.17. A Figura 3.8 ilustra uma cirurgia vertical do tipo V_2 entre a aplicação estável $f_1 : M \rightarrow S^2$ com grau m , e a aplicação identidade $Id : S^2 \rightarrow S^2$, com grau 1. Neste caso, a nova aplicação estável $f_1 \oplus_{V_2} Id : M \rightarrow S^2$ possui grau $\deg(f_1 \oplus_{V_2} Id) = \deg(f_1) + \deg(Id) = m + 1$, pois $\deg(f_1) = m$ e $\deg(Id) = 1$.

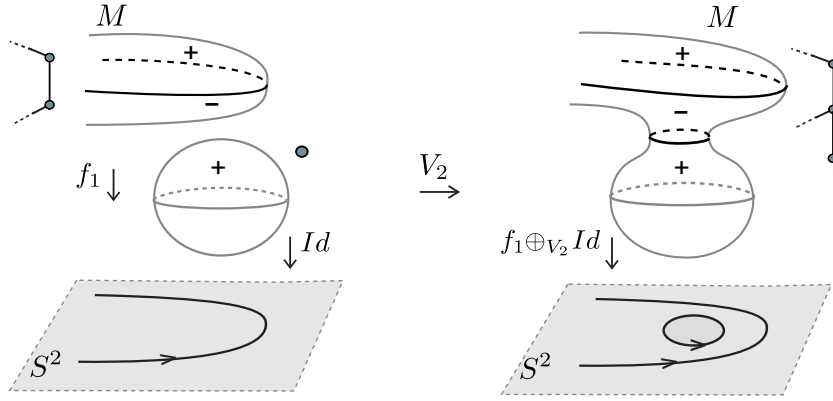


Figura 3.8: Exemplo de cirurgia vertical.

Exemplo 3.18. Conforme ilustra a Figura 3.9, fazendo uma cirurgia vertical do tipo V_1 sobre a mesma aplicação estável f_1 da esfera na esfera, com grau zero, obtemos a aplicação $f_1 \oplus_{V_1} f_1$ do toro na esfera, com grau zero e duas componentes singulares. Por uma transição do tipo bicos (B^-) sobre $f_1 \oplus_{V_1} f_1$, obtemos uma aplicação f do toro na esfera, com grau zero, contorno irreduzível (única componente singular) e duas cúspides.

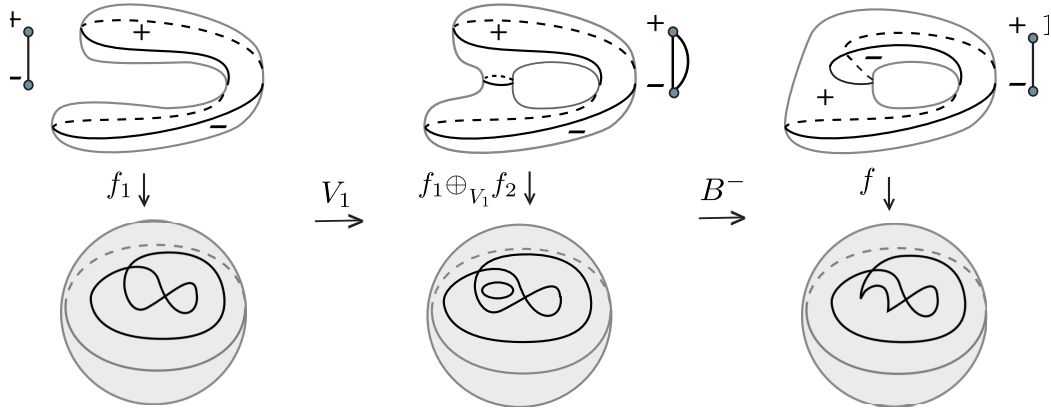


Figura 3.9: Construção de uma aplicação do toro na esfera com contorno irreduzível.

Note que a cirurgia vertical do tipo V_1 nos fornece aplicações com o mesmo grau da aplicação sobre a qual fizemos a cirurgia, enquanto que a cirurgia vertical do tipo V_2 , soma o grau das aplicações sobre as quais fizemos a cirurgia.

Observação 3.19. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , obtida por cirurgias verticais, podemos também

obter várias outras aplicações estáveis com grau d , na mesma classe de homotopia da f , basta passar por alguma transição de codimensão um, por exemplo, do tipo lábios (L) ou bicos ($B^\pm$ e B), pois estas transições nos fornecem aplicações homotópicas à f , alterando apenas o número de componentes regulares ou singulares, bem como o número de cúspides.

Algumas aplicações sobre o n -toros, obtidas por cirurgias verticais, serão apresentadas mais adiante neste capítulo.

3.3 Efeitos das cirurgias sobre ϕ , θ_c , θ_g e θ_v

No capítulo 2, vimos os efeitos das transições de codimensão um sobre os invariantes θ_c , θ_g e θ_v , que denotam, respectivamente, a diferença entre o número de cúspides positivas e negativas, a diferença entre a soma total dos gêneros de M^+ e de M^- e a diferença entre o número de componentes regulares de M^+ e de M^- (Definição 2.12). Nesta seção, estudaremos como obter estes invariantes para uma aplicação estável f obtida de uma aplicação estável h , através de cirurgias horizontais e verticais. Em outras palavras, estudaremos os efeitos destas cirurgias sobre estes invariantes.

Se $p : P \rightarrow N$ e $q : Q \rightarrow N$ duas aplicações estáveis, onde P , Q e N são superfícies fechadas e orientadas. Se $h : W \rightarrow N$ é uma aplicação estável, onde $h = p \cup q$ e W é a união de P e Q , denotada por $W = P \cup Q$, então a interseção do contorno aparente das aplicações p e q , ou seja, $Bp \cap Bq$, possui apenas pontos duplos transversais. Denotemos por n_{pq} o número de pontos duplos transversais de $Bp \cap Bq$. Note que p é a restrição de h à P e q é a restrição de h à Q .

Ao longo desta seção, trabalharemos com a seguinte observação sempre em mente:

Observação 3.20. *Se $h : W \rightarrow N$ é uma aplicação estável, onde $h = p \cup q$ e $W = P \cup Q$, então o vetor ϕ associado à h é dado por*

$$\phi(h) = (\mu(p) + \mu(q), d(p) + d(q), c(p) + c(q), n(p) + n(q) + n_{pq}, g_P + g_Q, v(p) + v(q)).$$

Denotaremos a partir de agora, por $f = S(h)$ a aplicação estável obtida a partir da aplicação estável $h = p \cup q$, através de uma das cirurgias horizontais ou verticais $S \in \{H_1^+, H_1^-, H_2, V_1, V_2\}$. Assim como fizemos no capítulo 2 mediante as transições, estudaremos nesta seção a variação $\Delta\phi(S) = \phi(f) - \phi(h)$ e como obter $\theta_c(f)$, $\theta_g(f)$ e $\theta_v(f)$ mediante cada cirurgia.

A proposição abaixo nos permite conhecer as coordenadas do vetor $\phi(f)$ que diferem das coordenadas do vetor $\phi(h)$ e também a variação $\Delta\phi(S)$, para o caso em que $f = S(h)$ é obtida da aplicação h por cirurgias horizontais ou verticais.

Proposição 3.21. *Sejam $p : P \rightarrow N$ e $q : Q \rightarrow N$ duas aplicações estáveis e $h = p \cup q : W \rightarrow N$ uma aplicação estável, onde $W = P \cup Q$. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável obtida de h por uma cirurgia $S \in \{H_1^+, H_1^-, H_2, V_1, V_2\}$, então $\phi(f) = \phi(h) + \Delta\phi(S)$, onde*

$$\begin{aligned} \Delta\phi(H_1^+) &= (1, 0, 0, 0, 1, 0); \quad \Delta\phi(H_1^-) = (-1, 0, 0, 0, 1, -1); \quad \Delta\phi(H_2) = (-1, 0, 0, 0, 0, -2); \\ \Delta\phi(V_1) &= (1, 0, 0, 0, 1, 0); \quad \Delta\phi(V_2) = (1, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $f = S(h) : M \rightarrow N$ uma aplicação estável obtida da aplicação $h = p \cup q : W \rightarrow N$, por uma cirurgia $S \in \{H_1^+, H_1^-, H_2, V_1, V_2\}$. Devido a forma com que h está definida (ver Observação 3.20), as únicas alterações do vetor $\phi(f)$ em relação ao vetor $\phi(h)$ por estas cirurgias serão quanto ao número μ de componentes singulares, o número v de componentes regulares ou o número de gêneros. Então,

$$\Delta\phi(S) = \phi(f) - \phi(h) = (\mu(f) - \mu(h), 0, 0, 0, g_M - g_W, v(f) - v(h))$$

e disto seguem os seguintes resultados:

1. Se f é uma aplicação estável obtida de h por uma cirurgia do tipo H_1^+ , uma vez que esta cirurgia conecta dois arcos de uma mesma componente singular de h , alterando apenas por +1 o número de componentes singulares e o gênero da superfície do domínio, temos, $\mu(f) = \mu(H_1^+(h)) = \mu(h) + 1 = \mu(p) + \mu(q) + 1$, $g_M = g_W + 1 = g_P + g_Q + 1$ e $v(f) = v(H_1^+(h)) = v(h) = v(p) + v(q)$. Portanto,

$$\Delta\phi(H_1^+) = (1, 0, 0, 0, 1, 0).$$

2. Se f é uma aplicação estável obtida de h por uma cirurgia do tipo H_1^- , uma vez que esta cirurgia conecta dois arcos de diferentes componentes singulares de uma mesma componente conexa de h , alterando apenas por -1 o número de componentes singulares e regulares, e por +1 o gênero da superfície do domínio, temos, $\mu(f) = \mu(H_1^-(h)) = \mu(h) - 1 = \mu(p) + \mu(q) - 1$, $g_M = g_W + 1 = g_P + g_Q + 1$ e $v(f) = v(H_1^-(h)) = v(h) - 1 = v(p) + v(q) - 1$. Portanto,

$$\Delta\phi(H_1^-) = (-1, 0, 0, 0, 1, -1).$$

3. Se f é uma aplicação estável obtida de h por uma cirurgia do tipo H_2 , uma

vez que esta cirurgia conecta dois arcos de componentes singulares de diferentes componentes conexas de h , sendo um arco da aplicação p e o outro da aplicação q , altera apenas por -1 o número de componentes singulares e por -2 o número de componentes regulares. Logo, $\mu(f) = \mu(H_2) = \mu(h) - 1 = \mu(p) + \mu(q) - 1$, $g_M = g_W = g_P + g_Q$ e $v(f) = v(H_2) = v(h) - 2 = v(p) + v(q) - 2$. Portanto,

$$\Delta\phi(H_2) = (-1, 0, 0, 0, 0, -2).$$

4. Se f é uma aplicação estável obtida de h por uma cirurgia do tipo V_1 , uma vez que esta cirurgia conecta duas regiões (com sinais opostos) de uma mesma componente conexa de h , altera apenas por $+1$ o número de componentes singulares e o número de gêneros da superfície do domínio. Logo, $\mu(f) = \mu(V_1) = \mu(h) + 1 = \mu(p) + \mu(q) + 1$ e $g_M = g_W + 1 = g_P + g_Q + 1$. Então,

$$\Delta\phi(V_1) = (1, 0, 0, 0, 1, 0).$$

5. Se f é uma aplicação estável obtida de h por uma cirurgia do tipo V_2 , uma vez que esta cirurgia conecta duas regiões regulares (com sinais opostos) de diferentes componentes conexas de h , a saber, uma região regular da superfície P e outra da superfície Q , então altera apenas o número de componentes singulares por $+1$. Logo, $\mu(f) = \mu(V_2) = \mu(h) + 1 = \mu(p) + \mu(q) + 1$ e $g_M = g_W = g_P + g_Q$. Então,

$$\Delta\phi(V_2) = (1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

□

O corolário a seguir nos fornece que $\theta_c(f)$ é dado em função de $\theta_c(h)$, após cada cirurgia horizontal ou vertical sobre h .

Corolário 3.22. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável obtida da aplicação estável $h = p \cup q : W \rightarrow N$, por uma cirurgia $S \in \{H_1^+, H_1^-, H_2, V_1, V_2\}$. Então $c(f) = c(h)$ e $\theta_c(f) = \theta_c(h)$.*

Demonstração: O resultado deste corolário decorre imediatamente do fato de que as cirurgias horizontais e verticais, bem como as interseções dos contornos aparentes, não alteram o número c de cúspides, portanto $\theta_c(f) = \theta_c(h)$. □

Observação 3.23. *A aplicação estável f obtida da aplicação estável h através de uma cirurgia, tem contorno irreduzível se, e somente se, $f = H_2(h)$ e $h = p \cup q$, onde p e q são aplicações estáveis com contorno irreduzível (única componente singular). Isso*

ocorre porque a cirurgia horizontal do tipo H_2 sobre a aplicação h , conecta dois arcos de componentes singulares de diferentes componentes conexas de h , a saber, um arco da restrição de h à p e outro da restrição de h à q , de modo que

$$\mu(f) = \mu(H_2(h)) = \mu(h) - 1 = \mu(p) + \mu(q) - 1.$$

Assim, f possui contorno irredutível, ou seja, $\mu(f) = 1$ se, e somente se, $\mu(p) = \mu(q) = 1$, o que quer dizer que as aplicações p e q possuem contorno irredutível. As demais cirurgias sobre a aplicação h alteram o número de componentes do conjunto singular para mais ou para menos, de forma que o contorno aparente de f não é irredutível.

A proposição a seguir nos fornece que $\theta_g(f)$ e $\theta_v(f)$ são dados em função de $\theta_g(h)$ e $\theta_v(h)$, onde $\theta_g(h) = \theta_g(p) + \theta_g(q)$ e $\theta_v(h) = \theta_v(p) + \theta_v(q)$.

Proposição 3.24. *Seja $h : W \rightarrow N$ uma aplicação estável, onde $h = p \cup q$ e $W = P \cup Q$. Se $f = S(h) : M \rightarrow N$ é obtida de h por uma cirurgia $S \in \{H_1^+, H_1^-, H_2, V_1, V_2\}$, então $\theta_g(S(h)) = \theta_g(p) + \theta_g(q)$ e $\theta_v(S(h)) = \theta_v(p) + \theta_v(q)$.*

Demonstração: Pela Definição 2.12, temos

$$\theta_g(f) = g^+(f) - g^-(f), \quad (3.1)$$

e

$$\theta_v(f) = v^+(f) - v^-(f). \quad (3.2)$$

Provaremos esta proposição para o caso $S = H_2$, ou seja, $f = H_2(h)$. Os demais casos seguem de modo análogo.

Sabemos que a cirurgia horizontal do tipo H_2 faz soma conexa das superfícies do domínio da aplicação h (Definição 3.3) e diminui por dois o número de componentes regulares (Proposição 3.21 item 3.), então $g^\pm(f) = g^\pm(H_2(h)) = g^\pm(p) + g^\pm(q)$ e $v^\pm(f) = v^\pm(H_2(h)) = v^\pm(p) + v^\pm(q) - 2$. Aplicando estes resultados nas equações 3.1 e 3.2, respectivamente, segue

$$\begin{aligned} \theta_g(H_2(h)) &= g^+(H_2(h)) - g^-(H_2(h)) \\ &= [g^+(p) + g^+(q)] - [g^-(p) + g^-(q)] \\ &= [g^+(p) - g^-(p)] + [g^+(q) - g^-(q)] \\ &= \theta_g(p) + \theta_g(q) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_v(H_2(h)) &= v^+(H_2(h)) - v^-(H_2(h)) \\
&= [v^+(p) + v^+(q) - 2] - [v^-(p) + v^-(q) - 2] \\
&= [v^+(p) - v^-(p)] + [v^+(q) - v^-(q)] \\
&= \theta_v(p) + \theta_v(q).
\end{aligned}$$

□

3.4 Construção de aplicações dobra com grau d

Dada uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , com gêneros g_M e g_N , respectivamente. Nesta seção, determinaremos usando as cirurgias horizontais e verticais uma aplicação dobra $h : M \rightarrow N$ na mesma classe de homotopia de f no espaço $C^\infty(M, N)$, com $\phi(h)$ conhecido. Veremos que esta aplicação dobra h pode ser obtida por cirurgias entre aplicações dobras com grau zero e aplicações de recobrimento (no caso particular, homotópicas a aplicação identidade com grau um). É importante reiterar que as aplicações tratadas neste trabalho são aplicações estáveis com grau positivo, a menos que mencionemos o contrário.

Observação 3.25. *Para o caso em que $g_M > 0$, podemos construir aplicações sem singularidades de uma superfície M sobre N da seguinte maneira (ver [4], Teorema 2.4.9, p. 46):*

- Se $g_N = 1$, podemos construir aplicações com grau d arbitrário do toro no toro sem pontos de singularidades.
- Se $g_N = k > 1$, então podemos recobrir o k -toro d vezes por uma superfície M com gênero $g_M = d(g_N - 1) + 1$ (ver Figura 3.10).

Para o caso em que $g_N \geq 1$, podemos construir aplicações estáveis com singularidades, de uma superfície M sobre N como segue:

- Se $g_N = 1$, podemos construir aplicações estáveis sobre o toro, com grau $d = \sum d_i$ arbitrário, pois cada alça de N pode cobrir o toro d_i vezes.
- Se $g_N \neq 1$, então podemos construir uma aplicação com grau no máximo igual a $\frac{g_M - 1}{g_N - 1}$, pois cada componente conexa regular tem gênero no mínimo $g_M = d(g_N - 1) + 1$.

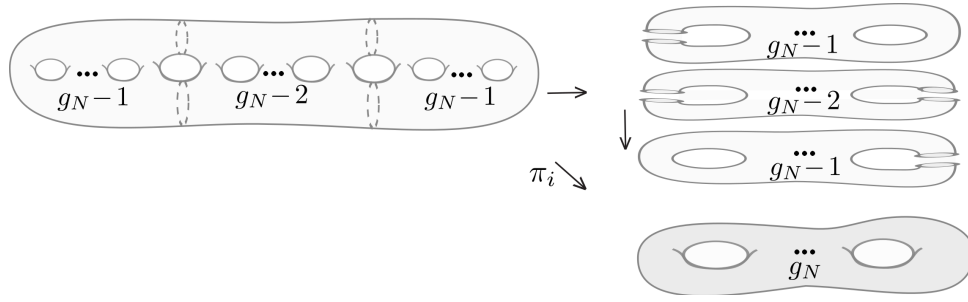
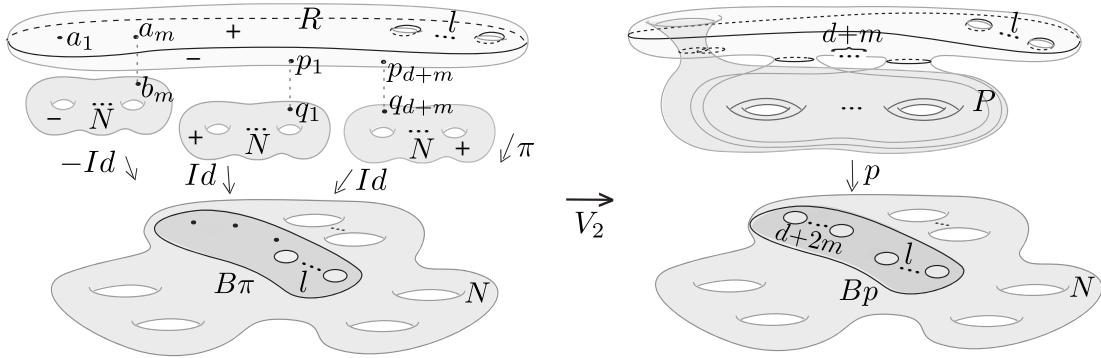


Figura 3.10: Aplicação de recobrimento.

A Figura 3.1 apresentada no início deste capítulo, ilustra uma sequência de aplicações dobras sobre o 3-toros, com grau zero e contorno irreduzível (única componente singular), obtidas sob as hipóteses da Observação 3.25.

Exemplo 3.26. *Sejam P e R superfícies fechadas e orientadas, onde o gênero de R é $g_R = l$ e $\pi : R \rightarrow N$ é uma aplicação estável com grau $d = 0$, onde π é a projeção normal da superfície R sobre a superfície N . A Figura 3.11 ilustra uma aplicação dobra $p : P \rightarrow N$ com grau d , obtida por $d + 2m$ cirurgias verticais do tipo V_2 , sendo $d + m$ cirurgias entre a aplicação projeção π e a aplicação identidade $Id : N \rightarrow N$, com grau 1 e conjunto singular vazio, e m cirurgias entre π e a aplicação $-Id : N \rightarrow N$ (com orientação oposta à Id), com grau -1 e conjunto singular vazio.*

Figura 3.11: Exemplo de cirurgia vertical de aplicações sobre o n -toros.

Observação 3.27. *Conforme ilustra à Figura 3.11, se R é uma superfície fechada e orientada com $g_R = l$ e $\pi : R \rightarrow N$ é a projeção normal, então o contorno aparente de π consiste de $l + 1$ curvas simples e disjuntas sobre N . A aplicação dobra $p : P \rightarrow N$ com grau d , obtida pelas $d + 2m$ cirurgias do tipo V_2 , tem, por construção, gênero $g_P = (d + 2m)g_N + l$ e contorno aparente com $d + 2m + l + 1$ curvas simples e disjuntas sobre N .*

Exemplo 3.28. *Consideremos agora M e Q superfícies fechadas e orientadas. A Figura 3.12 ilustra uma aplicação dobra $h : M \rightarrow N$ com grau d , obtida por uma*

cirurgia horizontal do tipo H_2 entre a aplicação dobra $p : P \rightarrow N$ com grau d (ver Figura 3.11) e um aplicação dobra $q : Q \rightarrow N$ com grau zero (semelhante a aplicação h_3 da Figura 3.1). Observe que podemos obter aplicações em diferentes classes de homotopia fazendo mais cirurgias entre as aplicações p e q .

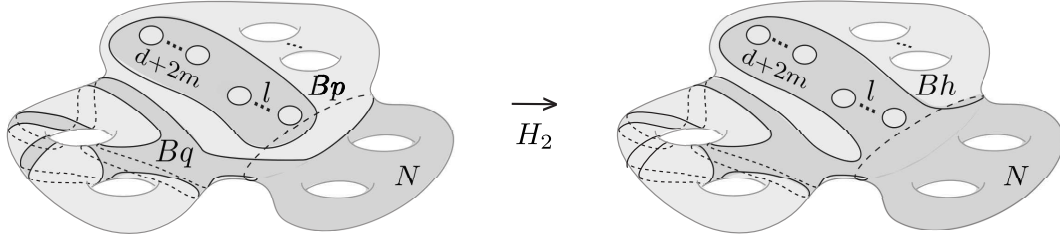


Figura 3.12: Exemplo de cirurgia horizontal no contorno aparente.

O resultado a seguir generaliza as construções acima e nos garante a existência de uma aplicação dobra h com grau d , $m^+ + m^- + l + 1$ componentes singulares e $m^+ + m^- + 2$ componentes regulares, obtida por cirurgias verticais do tipo V_2 ou horizontais do tipo H_2 , entre aplicações dobra com grau zero e aplicações de recobrimento (no caso particular dos exemplos acima, recobrimentos homotópicos a identidade).

Lema 3.29. *Sejam M e N duas superfícies fechadas e orientadas com gênero g_M e g_N , respectivamente. Se existem inteiros positivos $d^\pm$ e $m^\pm$ que satisfazem $s = g_M - [(d^+ + d^-)(g_N - 1) + (m^+ + m^-)] \geq 0$, então existe uma aplicação dobra $h : M \rightarrow N$ com grau $d = d^+ - d^-$ e*

$$\phi(h) = (m^+ + m^- + l + 1, d, 0, n, g_M, m^+ + m^- + 2),$$

para algum $k, l \geq 0$ tal que $l = s - 2k$.

Demonstração: Observe que para $k = 0$, a Figura 3.11 ilustra o caso em que $m^+ = m^- = m$ e $d^+ = d + m$, enquanto a Figura 3.12 ilustra um exemplo para $k > 0$.

Dadas M e N duas superfícies fechadas e orientadas com gênero g_M e g_N , respectivamente, que satisfazem $s = g_M - [(d^+ + d^-)(g_N - 1) + (m^+ + m^-)] \geq 0$ para inteiros positivos $d^\pm$ e $m^\pm$, mostraremos como obter uma aplicação dobra $h : M \rightarrow N$ com as propriedades referidas neste lema.

Primeiro, mostraremos para $k = 0$. Neste caso, consideremos a projeção normal $\pi : R \rightarrow N$ com grau zero, como no Exemplo 3.26, onde $\phi(\pi) = (l+1, 0, 0, 0, l, 2)$. Tomemos m^+ aplicações de recobrimento $\pi_i^+ : W_i^+ \rightarrow N$ com grau d_i^+ , que preservam a orientação em W_i^+ (ver Figura 3.10), e outras m^- aplicações de recobrimento $\pi_i^- : W_i^- \rightarrow N$ com grau $-d_i^-$, que invertem a orientação em W_i^- . As aplicações $\pi_i^\pm$ satisfazem $\phi(\pi_i^\pm) =$

$(0, \pm d_i^\pm, 0, 0, d_i^\pm(g_N - 1) + 1, 1)$. A Figura 3.11 ilustra o caso em que $d_i^\pm = 1$ (isto é, as aplicações de recobrimento são homotópicas a Id ou $-Id$).

Uma aplicação dobra $p : P \rightarrow N$ pode ser obtida por $m^+ + m^-$ cirurgias verticais do tipo V_2 entre as aplicações π e $\pi_i^\pm$ (ver Figura 3.11). Cada uma das $m^+ + m^-$ cirurgias V_2 aumenta por um o número de componentes do conjunto singular, ou seja, contribui com $\Delta\phi(V_2) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ (Proposição 3.21 item 5.) para o vetor $\phi(p)$. Desta forma para a aplicação

$$p = \pi \oplus_{H_2} \pi_1^+ \oplus_{H_2} \cdots \oplus_{H_2} \pi_{m^+}^+ \oplus_{H_2} \pi_1^- \oplus_{H_2} \cdots \oplus_{H_2} \pi_{m^-}^-,$$

temos

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \phi(\pi) + \sum_{i=1}^{m^+} \phi(\pi_i^+) + \sum_{i=1}^{m^-} \phi(\pi_i^-) + (m^+ + m^-) \Delta\phi(V_2) \\ &= (m^+ + m^- + l + 1, d, 0, 0, g^+ + g^- + l, m^+ + m^- + 2), \end{aligned}$$

onde $g^\pm = \sum_{i=1}^{m^\pm} [d_i^\pm(g_N - 1) + 1] = d^\pm(g_N - 1) + m^\pm$, e $d = \sum_{i=1}^{m^+} d_i^+ - \sum_{i=1}^{m^-} d_i^-$. Neste caso, para $k = 0$ obtivemos uma aplicação dobra $p = h$ com as propriedades desejadas.

Para $k > 0$, podemos partir da aplicação $p : P \rightarrow N$ obtida acima, e considerar outras novas r aplicações dobras $q_i : Q_i \rightarrow N$ com grau zero, que satisfazem $\phi(q_i) = (1, 0, 0, n_i, 2k_i, 2)$, $i = 1, \dots, r$, e $k = \sum_{i=1}^r k_i$, onde n_i (número de pontos duplos de q_i) depende da classe de homotopia desejada, ou seja, de como as alças de Q_i se enrolam as alças de N .

Uma aplicação $h : M \rightarrow N$ pode ser obtida fazendo r cirurgias horizontais tipo H_2 entre p e as aplicações q_i , $i = 1, \dots, r$ (ver Figura 3.12). Cada uma das r cirurgias H_2 diminui por um o número de componentes singulares e por dois o número de componentes regulares, ou seja, contribui com $\Delta\phi(H_2) = (-1, 0, 0, 0, 0, -2)$ (Proposição 3.21 item 3.) para o vetor $\phi(h)$. Finalmente, para a aplicação $h = p \oplus_{H_2} q_1 \oplus_{H_2} \cdots \oplus_{H_2} q_r$, temos

$$\begin{aligned} \phi(h) &= \phi(p) + \sum_{i=1}^r \phi(q_i) + r \Delta\phi(H_2) \\ &= (m^+ + m^- + l + 1, d, 0, 0, g^+ + g^- + l, m^+ + m^- + 2) + (r, 0, 0, n, 2k, 2r) \\ &\quad + (-r, 0, 0, 0, 0, -2r) \\ &= (m^+ + m^- + l + 1, d, 0, n, g_M, m^+ + m^- + 2), \end{aligned}$$

onde $n = \sum_{i=1}^r n_i$ e o gênero de M , $g_M = g^+ + g^- + l + 2k$, satisfazem $s = g_M - [(d^+ + d^-)(g_N - 1) + (m^+ + m^-)] \geq 0$.

Portanto, mediante as hipóteses deste lema, existe uma aplicação dobra com grau

d , obtida por cirurgias verticais do tipo V_2 ou horizontais do tipo H_2 , que satisfaz $\phi(h) = (m^+ + m^- + l + 1, d, 0, n, g_M, m^+ + m^- + 2)$. $\square$

Teorema 3.30. *Se $h : M \rightarrow N$ uma aplicação dobra com as propriedades do Lema 3.29, então*

$$\chi(M_h^\pm) = 1 - 2d^\pm(g_N - 1) - (m^+ + m^- + l), \quad (3.3)$$

onde $d^\pm = \sum_{i=1}^{m^\pm} d_i^\pm$ e χ denota a característica de Euler.

Demonstração: Pelo Lema 3.29, temos

$$\begin{aligned} g^\pm(h) &= \sum_{i=1}^{m^\pm} d_{i=1}^\pm(g_N - 1) + 1 \\ &= d^\pm(g_N - 1) + m^\pm, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$v^\pm(h) = m^\pm + 1$ e $\mu^\pm(h) = m^+ + m^- + l + 1$. Aplicando estes resultados na equação $\chi(M_h^\pm) = 2v^\pm - 2g^\pm - \mu$ (Observação 2.5), obtém-se o resultado desta proposição. $\square$

Corolário 3.31. *Se $h : M \rightarrow N$ é um aplicação dobra com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , obtida como no Lema 3.29, então*

$$\theta_\chi(h) = d \chi(N), \quad (3.5)$$

onde χ denota a característica de Euler.

Demonstração: Pela Definição 2.12 temos

$$\theta_\chi(h) = \chi(M_h^+) - \chi(M_h^-). \quad (3.6)$$

Aplicando o Teorema 3.30 na equação 3.6, segue

$$\begin{aligned} \theta_\chi(h) &= [1 - 2d^+(g_N - 1) - (m^+ + m^- + l)] - [1 - 2d^-(g_N - 1) - (m^+ + m^- + l)] \\ &= -2d^+(g_N - 1) + 2d^-(g_N - 1) \\ &= d^+(2 - 2g_N) - d^-(2 - 2g_N) \\ &= (d^+ - d^-)(2 - 2g_N). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sabemos do Lema 3.29, que $d = d^+ - d^-$. Como N é uma superfície fechada e orientada, então sua característica de Euler é dada por $\chi(N) = 2 - 2g_N$ (Corolário 1.45). Aplicando estes resultados na equação 3.7, obtemos $\theta_\chi(h) = d \chi(N)$. $\square$

O Corolário 3.31 também pode ser demonstrado fazendo uso do Teorema 2.15.

Proposição 3.32. *Seja $h : M \rightarrow N$ uma aplicação dobra com as propriedades do Lema 3.29. Então, $\theta_g(h) = d(g_N - 1) + (m^+ - m^-)$ e $\theta_v(h) = m^+ - m^-$.*

Demonstração: Se $h : M \rightarrow N$ tem as propriedades do Lema 3.29, então satisfaz

$$\begin{aligned}\theta_g(h) &= g^+ - g^- \\ &= [(d^+(g_N - 1) + m^+) - [(d^-(g_N - 1) + m^-] \\ &= d(g_N - 1) + (m^+ - m^-)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\theta_v(h) &= v^+ - v^- \\ &= (m^+ + 1) - (m^- + 1) \\ &= m^+ - m^-.\end{aligned}$$

□

Note que uma aplicação dobra com grau zero e contorno irreduzível (única curva singular) tem $v^+ = v^- = 1$ e $g^+ = g^-$. Consequentemente, $\theta_g = \theta_v = 0$ (Observação 2.14) e como visto na última parte da demonstração do Lema 3.29, ao fazermos várias cirurgias horizontais entre a aplicação $p : P \rightarrow N$ e aplicações dobras $q : Q \rightarrow N$ com grau zero e contorno irreduzível, independente da classe de homotopia desejada, isto é, do número de vezes e da forma com que as alças de Q se enrolam as alças de N , a aplicação h resultante satisfaz $\theta_g(h) = \theta_g(p)$ e $\theta_v(h) = \theta_v(p)$. Então pela Proposição 3.32 e Proposição 3.21, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.33. *Sejam $p : P \rightarrow N$ uma aplicação dobra com as propriedades do Lema 3.29, e $q : Q \rightarrow N$ uma aplicação dobra com grau zero e contorno irreduzível. Se $h = p \cup q : W \rightarrow N$, onde $W = P \cup Q$ e $f = H_2(h)$, então $\theta_v(f) = m^+ - m^-$ e $\theta_g(f) = d(g_N - 1) - (m^+ - m^-)$.*

Capítulo 4

Teorema global e aplicações

Neste capítulo, trataremos da relação entre o grau da aplicação, a diferença entre a característica de Euler de M^+ e M^- e a diferença entre os sinais das cúspides, denotados ao longo deste trabalho, respectivamente, por d , θ_χ e θ_c . Esta relação foi provada por Quine ([28]) em 1978, usando resultados de Variedades Diferenciáveis. Nesta seção, apresentaremos uma nova demonstração para esta relação dentro da Teoria das Singularidades, com base nos efeitos das transições de codimensão um e das cirurgias de aplicações estáveis sobre os invariantes d , θ_χ e θ_c , efeitos estes tratados previamente neste trabalho. Esta demonstração é devida a Mendes de Jesus ([23]).

4.1 Resultados globais para superfícies orientadas

O teorema a seguir é um teorema global para aplicações entre superfícies fechadas e orientadas, que relaciona os invariantes de aplicações estáveis d , θ_χ , θ_c e a característica de Euler do contradomínio da aplicação. Este resultado será provado com base no que dissertamos até o momento e, como veremos na seção seguinte, leva a uma nova demonstração para o teorema de Quine.

Teorema 4.1. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N . Então*

$$\theta_\chi(f) + \theta_c(f) = d\chi(N), \quad (4.1)$$

onde χ denota a característica de Euler.

Demonstração: Dada uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ com grau d , então existe uma aplicação dobra $h : M \rightarrow N$ com grau d , e um caminho entre h e f no espaço

$C^\infty(M, N)$, passando apenas por transições de codimensão um. Como estamos sob as hipóteses do Corolário 2.37, temos

$$\theta_c(f) = \theta_\chi(h) - \theta_\chi(f),$$

ou seja,

$$\theta_\chi(f) + \theta_c(f) = \theta_\chi(h). \quad (4.2)$$

Escolhamos a aplicação dobra h com as propriedades do Lema 3.29, obtida por cirurgias verticais do tipo V_2 ou por cirurgias horizontais do tipo H_2 , entre aplicações dobra com grau zero e aplicações de recobrimento. Então, pelo Corolário 3.31, temos

$$\theta_\chi(h) = d \chi(N). \quad (4.3)$$

Substituindo a equação 4.3 na equação 4.2, obtemos

$$\theta_\chi(f) + \theta_c(f) = d \chi(N).$$

Note que este resultado independe da escolha da aplicação dobra h na classe de homotopia da aplicação estável f . $\square$

Teorema 4.2. *Se M e N são superfícies fechadas e orientadas, e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável com grau d , então*

$$\theta_v(f) - \theta_g(f) = d(1 - g_N) - \frac{\theta_c(f)}{2}. \quad (4.4)$$

Demonstração: Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável com grau d , pelo Teorema 4.1, isolando $\theta_\chi(f)$, obtemos

$$\theta_\chi(f) = d \chi(N) - \theta_c(f). \quad (4.5)$$

Por hipótese, N é uma superfície fechada e orientada, então $\chi(N) = 2 - 2g_N$ (Corolário 1.45). Substituindo este resultado na equação 4.5, obtemos

$$\begin{aligned} \theta_\chi(f) &= d(2 - 2g_N) - \theta_c(f) \\ &= 2d(1 - g_N) - \theta_c(f). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Mas, o Teorema 2.15 nos fornece

$$\theta_\chi(f) = 2[\theta_v(f) - \theta_g(f)]. \quad (4.7)$$

Substituindo a equação 4.7 na equação 4.6, segue

$$2[\theta_v(f) - \theta_g(f)] = 2d(1 - g_N) - \theta_c(f).$$

Isolando $\theta_v(f) - \theta_g(f)$, resulta que

$$\theta_v(f) - \theta_g(f) = d(1 - g_N) - \frac{\theta_c(f)}{2}.$$

□

Os dois corolários a seguir, são consequências imediatas do Teorema 4.2 para os grafos associados a aplicações estáveis entre superfícies:

Corolário 4.3. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N . Se f tem grau d e c pontos de cúspides, então o grafo associado a f satisfaz*

$$(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-) = d(1 - g_N) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s(c_i). \quad (4.8)$$

Corolário 4.4. *O grafo associado a uma aplicação dobra $f : M \rightarrow N$ com grau d , satisfaz*

$$(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-) = d(1 - g_N). \quad (4.9)$$

A demonstração dos corolários acima podem ser encontradas em [21].

Para simplificar as notações, a partir de agora omitiremos a aplicação f , caso não haja confusão.

Os resultados a seguir são referentes a aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, com grau d e contorno irreduzível.

Proposição 4.5. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas, com grau d e contorno irreduzível (única componente singular). Se $r = g_M - dg_N$, então*

$$\theta_c(f) = 2(d + r - 2g^-). \quad (4.10)$$

Demonstração: Se M é uma superfície fechada e orientada e f possui contorno irreduzível, então da Observação 2.11 obtém-se que $g^+ = g_M - g^-$. Aplicando este resultado na igualdade $\theta_g(f) = g^+ - g^-$ da Definição 2.12, segue

$$\begin{aligned} \theta_g(f) &= (g_M - g^-) - g^- \\ &= g_M - 2g^-. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como f tem contorno irredutível, M^+ e M^- possuem o mesmo número de componentes regulares, portanto, $\theta_v(f) = 0$ (Observação 2.13). Aplicando este resultado e a equação 4.11 no Teorema 4.2, e isolando $\theta_c(f)$, obtemos

$$\begin{aligned}\theta_c(f) &= 2[d(1 - g_N) + (g_M - 2g^-)] \\ &= 2d - 2dg_N + 2g_M - 4g^- \\ &= 2d + 2(g_M - dg_N) - 4g^-.\end{aligned}$$

Por hipótese, $r = g_M - dg_N$, então

$$\begin{aligned}\theta_c(f) &= 2d + 2r - 4g^- \\ &= 2(d + r - 2g^-).\end{aligned}$$

□

Corolário 4.6. *Toda aplicação estável da esfera na esfera satisfaz $\theta_c = 2d$.*

O próximo resultado fornece limites para que $\theta_c(f)$, conforme escrito no Proposição 4.5, seja dado em função do gênero de M e do grau da aplicação estável f .

Teorema 4.7. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas, com grau d e contorno irredutível (única componente singular). Se $r = g_M - dg_N$, então $\theta_c(f)$ é limitado por*

$$2(d - r) \leq \theta_c(f) \leq 2(d + r). \quad (4.12)$$

Demonstração: Se M é uma superfície fechada e orientada e f é uma aplicação estável com grau d e contorno irredutível, então da Observação 2.11 obtém-se que $g^+ = g_M - g^-$. Note que $g^+ = g_M - g^- \geq dg_N$, o que implica em $0 \leq g^- \leq g_M - dg_N = r$, pois $r = g_M - dg_N$. Consequentemente $0 \leq 4g^- \leq 4r$. Aplicando esta última desigualdade na Proposição 4.5, obtemos $\theta_c(f) \geq 2(d - r)$ e $\theta_c(f) \leq 2(d + r)$. Portanto, $2(d - r) \leq \theta_c(f) \leq 2(d + r)$. □

Observação 4.8. *O número de cúspides $c(f) \geq \theta_c(f)$. Se $c(f) = \theta_c(f)$, então, todas as cúspides são positivas ou negativas. Consequentemente, pelo Teorema 4.7, temos o seguinte resultado:*

Corolário 4.9. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , com grau d e contorno irredutível. Se $r = g_M - dg_N$, então o contorno aparente de f , denotado por Bf , tem no mínimo $2(d + r)$ cúspides.*

O resultado a seguir foi provado em [32]. Neste trabalho ele é um caso particular do Teorema 4.7, para $g_N = 0$.

Corolário 4.10. *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável entre com grau d e contorno irreduzível, onde M é uma superfície fechada e orientada. Então $\theta_c(f)$ é limitado por*

$$2(d - g_M) \leq \theta_c(f) \leq 2(d + g_M).$$

4.2 Teorema global de Quine

Sejam M e N duas superfícies suaves, compactas, orientadas e conexas, e $f, h : M \rightarrow N$ duas aplicação estáveis com grau d , numa mesma classe de homotopia no espaço $C^\infty(M, N)$, onde h é uma aplicação dobra com as propriedades do Lema 3.29. O Teorema 4.1, nos fornece o seguinte resultado

$$\theta_\chi(f) + \theta_c(f) = d\chi(N). \quad (4.13)$$

Pela Definição 2.12, temos

$$\theta_\chi(f) = \chi(M^+) - \chi(M^-) \quad (4.14)$$

e

$$\theta_c(f) = c^+(f) - c^-(f) = \sum_{i=1}^n s(c_i). \quad (4.15)$$

Aplicando as igualdades 4.14 e 4.15 na igualdade 4.13, resulta que

$$\chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_{i=1}^n s(c_i) = d\chi(N). \quad (4.16)$$

Como M é uma superfície fechada e orientada, sabemos pela Observação 2.6 que $M = M^+ \cup M^-$ e que o conjunto $M^+ \cap M^-$ é composto apenas por curvas fechadas, simples e disjuntas sobre M , homeomorfas a S^1 , então $\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-)$, isto é,

$$\chi(M^+) = \chi(M) - \chi(M^-). \quad (4.17)$$

Substituindo a equação 4.17 na equação 4.16, segue

$$\begin{aligned} [\chi(M) - \chi(M^-)] - \chi(M^-) + \sum_{i=1}^n s(c_i) &= d\chi(N) \\ \Rightarrow \chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum_{i=1}^n s(c_i) &= d\chi(N). \end{aligned}$$

Desta forma podemos afirmar o seguinte resultado:

Teorema 4.11. (*Teorema de Quine*) *Sejam M e N duas 2-variedades suaves, compactas, orientadas e conexas, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável, M^+ o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais f preserva a orientação, M^- o fecho dos pontos regulares nos quais f inverte a orientação e $c_1, \dots, c_n$ pontos de cúspides, então*

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum_{i=1}^n s(c_i) = d\chi(N) \quad (4.18)$$

onde χ denota a característica de Euler, $s(c_i)$ o sinal da cúspide c_i e d o grau da aplicação f .

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. *Topological Invariants of Plane Curves and Caustic. University Lecture Series* 5 (1994), AMS Providenci.
- [2] BRETAS, J. L. *Singularidades de Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas e orientadas em S^2* . Dissertação de Mestrado, DMA-UFV (2011).
- [3] CHÍNCARO, E. *Bifurcations of Whitney Maps*. Tese de Doutorado, IMPA (1978).
- [4] DESIDERI, P. E. *Um teorema tipo Borsuk-Ulam para espaços topológicos gerais em termos do grupo fundamental*. Dissertação de Mestrado, UFSCar (2008).
- [5] ÈLIASBERG, Ja. M. *On Singularities of Folding Type. Math. USSR-Izvestija*. 4 (1970), 1119-1134.
- [6] FELIPE, A. C. *Invariantes Globais de de Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas em S^2* . Dissertação de Mestrado, DMA-UFV (2013).
- [7] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities. Springer Verlag, Berlin* (1976).
- [8] GORYUNOV, V. *Local Invariants of Mappings os Surface into three-space*. (2006).
- [9] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 232 Marcel and Dekker (2003), 227-235.
- [10] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Global aspects of the classification of the stable maps of compact surfaces in the plane. Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas* 3 (2005), 3-23.
- [11] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Fold maps from the sphere to the plane*. To apper in *Experimental Maths* 15 (2006), 491-497.
- [12] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data. Topology and Its Appl.* 154 (2007), 166-175.

- [13] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Stable maps the surfaces in to projective plane*. In: VII Encontro Regional de Topologia, São Paulo: São Sebastião, 2009.
- [14] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere*. *Journal of Singularities* (2010).
- [15] HIRSCH, H. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer Verlag, New York (1976).
- [16] KINSEY, L. C. *Topology of Surfaces*. Springer Verlag, New York (1993).
- [17] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, v. 2 (2008), 505-517.
- [18] LIMA, E. L. *Introdução à Topologia Diferencial*. 2 ed. Publicações Matemáticas, IMPA, Brasil (2012).
- [19] MASSEY, W. S. *A basic course in algebraic topology*. Springer (1991).
- [20] MENDES DE JESUS, C. *Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano*. Tese de Doutorado, PUC-RIO (2001).
- [21] MENDES DE JESUS, C. *Introdução ao estudo de grafos associados as aplicações entre superfícies orientadas*. In: XIX Encontro Brasileiro de Topologia, São Paulo: São José do Rio Preto (2014).
- [22] MENDES DE JESUS, C.; MORAES, S. M.; ROMERO FUSTER, M. C. *Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint*. *Bulletin Brazilian Mathematical Society* 42 (2011), no. 1, 87-103.
- [23] MENDES DE JESUS, C. *Invariants of maps between closed surfaces*. Preprint (2013).
- [24] MENDES DE JESUS, C.; OSET SINHA, R.; ROMERO FUSTER, M. C. *Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to R^3* . *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 267 (2009), 205-216..
- [25] MUNKRES, J. R. *Topología*. 2 ed. Prentice Hall, Madrid (2002).
- [26] OHMOTO, T.; AICARDI, F. *First Order Local Invariants of Apparent Contours*. *Topology* 45 (2006), 27-45.
- [27] POSTON, T.; STEWART, I. *Catastrophe Theory and its Applications*. Dover Publications, New York (1978).
- [28] QUINE, J. R. *A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds*. *Trans. AMS* 236 (1978), 307-314.
- [29] THOM, R. *Les singularites des applications differentiables*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1955-1956), 43-87.

- [30] VASSILIEV, V. A. *Complements of Discriminants of smooth maps: topology and applications*. AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).
- [31] YAMAMOTO, M. *The number of singular set components of fold maps between oriented surfaces*. *Houston J. Math.* 35 (2009), 1051-1069.
- [32] YAMAMOTO, T.; KAMENOSONO, A. *The Minimal numbers of singularities of stable maps between surfaces*. *Topology and its Applications* 156 (2009), 2390-2405.
- [33] WHITNEY, H. *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces*. I. Mappings of the Plane into the Plane. *Ann. of Math.* 62 (1955), 374-410.
- [34] WHITE, A. T. *Graphs, Groups and Surfaces*. *Mathematics Studies*, Nort Holland (1973).