Universidade Federal de Viçosa
Dissertação de Mestrado

Natália Gonçalves de Sousa

Estatística e Probabilidade no Ensino Médio

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Natália Gonçalves de Sousa

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae.*

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T
S725e
2018

Sousa, Natália Gonçalves de, 1983-
Estatística e probabilidade no ensino médio : . / Natália Gonçalves de Sousa. – Florestal, MG, 2018.
vii, 58f : il. ; 29 cm.

Inclui anexos.
Orientador: Danielle Franco Nicolau Lara.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.57-58.

1. Probabilidades. 2. Probabilidade - estatística.
3. Matematica - ensino médio. 4. Estatística matemática.
I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas.. Mestrado em Matemática - Profissional.
II. Título.

519.2

Natália Gonçalves de Sousa

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Aprovada: 23 de novembro de 2018.

Camila Ferreira de Souza

Jeanne Carmo Amaral Dias

Lúcia Helena dos Santos Lobato

Luiz Gustavo Perona Araújo

Danielle Franco Nicolau Lara
(Orientadora)

Dedicatória

Ao meu pai Antônio Luiz, que me incentivou tanto em vida que nunca deixei de ouvi-lo dizer; “vai lá minha filha”, “claro que você consegue”e a minha mãe Maria de Lourdes, meu exemplo de mulher, toda gratidão.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me guiar em minha jornada da vida dando-me força para prosseguir sempre.

Ao meu marido Ramon, pela compreensão e companheirismo.

As minhas filhas Luísa e Letícia, razões de tudo que faço.

À toda minha família, em especial aos meus irmãos Isaac e Cristiane, pelo incentivo, apoio incondicional.

A todos os meus companheiros de PROFMAT, cujo apoio e amizade estiveram presentes em todos os momentos.

A todos os professores do PROFMAT (UFV-Florestal), pelo aprendizado proporcionado, em especial as minhas orientadoras Elisângela(in memoria) e Danielle, pelo apoio.

Aos meus alunos da Escola Professora Geralda Magela Leão de Melo, por participarem das avaliações e das aplicações.

Aos meus amigos das Escolas Escola Professora Geralda Magela Leão de Melo pelo incentivo e apoio, em especial minhas amigas Elisabete, pelas orações nos dias de avaliação, Elzirene e Elida, pelas revisões nos textos.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma na realização desta conquista.

Resumo

SOUSA, Natália Gonçalves de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2018. **Estatística e Probabilidade no Ensino Médio**. Orientador: Danielle Franco Nicolau Lara.

Este trabalho, abordará o tema estatística no Ensino Médio, contribuindo para o entendimento das relações entre a Estatística estudada do ensino médio e sua grande aplicação no cotidiano. Sua elaboração foi fundamentada nos principais conceitos de estatística estudados no ensino médio, gráficos e tabelas, medidas de posição, medidas de dispersão, Probabilidade e outros (Capítulo 2); um estudo sobre o que dizem os documentos normativos(BNCC, PCN e CBC-MG) e como o conteúdo é abordado em alguns livros didáticos oferecidos pelo governo de Minas Gerais (capítulo 3); uma análise foi feita em cima dos resultados de uma avaliação diagnóstica (Capítulo 4); e ainda, de como e o quanto este conteúdo é cobrado nas provas do ENEM e possíveis abordagens que tornaram o ensino deste conteúdo mais efetivo (Capítulo 5).

Abstract

SOUSA, Natália Gonçalves de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2018. **Statistics in Regular Education**. Adviser: Danielle Franco Nicolau Lara.

This article is about statistics in High School. The goal is to understand how to use the statistics taught during High School in a daily life. It is based in the main statistics concepts studied in High School as charts and tables, position measurement, dispertion measurement, probability and others (chapter 2). It is a study about the standard-setting documents (BNCC, PCN and CBC-MG) on statistics and how it is approached on the books offered by the government in Minas Gerais (chapter 3). It also contains an analysis of the results of a diagnostic evaluation (chapter 4), how much of this subject is on ENEM tests and possible approaches to make its teaching process more effective (chapter 5)

Sumário

1 Introdução

É senso comum que a Matemática está presente em nosso dia a dia com muitas utilidades práticas na vida das pessoas. Este trabalho abordará uma dessas aplicações, a Estatística e Probabilidade. Esta, nos permite compreender conceitos importantes, como; pesquisas de opinião pública, loterias esportivas e numéricas, jogos de azar, renda per capita, taxa de natalidade, entre outros.

A Estatística, como a maioria dos conteúdos matemáticos, surgiu da necessidade dos homens, que na forma de Estado precisavam formular políticas públicas, fornecendo dados demográficos e econômicos à administração publica.

Atualmente, a Estatística é aplicada em diversos ramos da ciência como a Medicina, a Biologia e a Química. Podemos encontrar modelos estatísticos (gráficos, diagramas, tabelas e pictogramas) em várias situações do nosso cotidiano, (uma conta de luz ou água, revistas, jornais, panfletos de ofertas e até em correspondências bancárias), e mesmo assim parte da população não entende esta linguagem. Por isso a necessidade de uma maior atenção no ensino-aprendizagem da estatística.

"Como sabemos, a Estatística é vista timidamente no ciclo básico (com algumas exceções, é claro) e pretende-se que ela crie raízes na comunidade escolarizada brasileira, produzindo uma capacitação mais abrangente do que é feito hoje em dia o que, por um lado, terá reflexos positivos na vida científica do país e, por outro, ajudará a desenvolver o espírito critico dos cidadãos de modo geral, de todos os segmentos da sociedade." [3]

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) estudar Estatística e Probabilidade favorece o desenvolvimento de certas atitudes como posicionar-se criticamente, fazer previsões e tomar decisões ante as informações vinculadas pela mídia, livros, jornais e outras fontes. Neste trabalho fazemos uma análise do conteúdo estatístico descrito na BNCC (Base Nacional Curricular Comum), com o conteúdo apresentado nos livros didáticos e o conhecimento dos alunos (através de avaliação diagnóstica), para que em posse dessas informações, possamos traçar uma proposta a fim de que estes conteúdos sejam trabalhados de forma dinâmica, prática e aprofundada em todos os anos do ensino médio, utilizando de práticas interdisciplinares com auxílio lúdico e tecnológico em alguns momentos, o que fará com que os alunos passem a compreender e identificar os tipos de gráficos e tabelas, medidas de posição, tendo em vista que esse conjunto de conhecimentos aumentam o entendimento de “mundo ”, melhorando seu rendimento escolar, além de capacitá-lo para provas do ENEM.

O conhecimento estático é fundamental, uma vez que é recorrente questões que cobrem esses conhecimentos em provas de Matemática e suas Tecnologias e também em provas de Ciências Humanas e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Este trabalho apresenta a estrutura descrita abaixo.
No capítulo 2, serão estabelecidos os principais conceitos de Estatística e Probabilidade que devem ser vistos durante o Ensino Médio.

No capítulo 3, analisaremos o que os documentos normativos da educação (PCN, BNCC e CBC) dizem sobre o tema Estatística e Probabilidade e se os livros didáticos tratam o tema de acordo com os documentos normativos, para isso foi estudado quatro coleções de liros oferecidos pelo MEC nas escolas públicas. Ainda no mesmo capítulo foi feita uma comparação entre duas coleções de livros dos mesmos autores, com o proposito de verificar se houve uma evolução no ensino da Estatística e Probabilidade.

No capítulo 4, apresentaremos os resultados de uma avaliação diagnóstica aplicada nas turmas do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Geralda Magela Leão de Melo, que foi baseada nos conteúdos propostos nos documentos normativos, com o intuito de diagnosticar possíveis dificuldades e propor oficinas para estes conteúdos.

Por fim, no capítulo 5, serão apresentados alguns exemplos de questões do ENEM dos anos 2015/2016 de várias áreas de conhecimento (Ciências Humanas, Ciências da Natureza e Matemática), uma pesquisa feita pelo Sistema Ari de Sá sobre os assuntos de matemática mais abordados no Enem e sugestões de oficinas que tratam os temas como Probabilidade, Medidas de Posição, Gráficos e Medidas de Dispersão conforme capítulo 2.

2

Conceitos de Estatística no Ensino Médio

Neste capítulo revisaremos os principais conceitos da estatística, levando em consideração a atual estrutura curricular.
Antes de começarmos precisamos entender o que é Estatística. Uma boa definição de estatística foi dada em [9]; Estatística é o conjunto de técnicas que permite, de forma sistemática, organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de estudos ou experimentos, realizados em qualquer área do conhecimento.
A grosso modo podemos dividir a Estatística em três áreas:

- Estatística Descritiva
- Probabilidade
- Inferência Estatística

*"**Estatística Descritiva** é, em geral, utilizada na etapa inicial da análise,quando tomamos contato com os dados pela primeira vez. Objetivando tirar conclusões de modo informal e direto, a maneira mais simples seria a observação dos valores colhidos. Entretanto, ao depararmos com uma grande massa de dados, percebemos, imediatamente, que a tarefa pode não ser simples. Para tentar depreender dos dados e informações a respeito do fenômeno sob estudo, é preciso aplicar alguma técnica que nos permita resumir a informação daquele particular conjunto de valores. Em outras palavras, a estatística descritiva pode ser definida como um conjunto de técnicas destinadas a descrever e resumir os dados, a fim de que possamos tirar conclusões a respeito de características de interesse.*
***Probabilidade** pode ser pensada como a teoria matemática utilizada para se estudar a incerteza oriunda de fenômenos de caráter aleatório.*
***Inferência Estatística** é o estudo de técnicas que possibilitam a extrapolação, a um grande conjunto de dados, das informações e conclusões obtidas a partir de subconjuntos de valores, usualmente de dimensão muito menor. Deve ser notado que, se tivermos acesso a todos os elementos que desejamos estudar, não é necessário o uso das técnicas de inferência estatística. Entretanto, elas são indispensáveis quando*

existe a impossibilidade de acesso a todo o conjunto de dados, por razões de natureza econômica, ética ou física."

Já em [17] a Estatística foi dividida em em duas áreas, **Estatística Descritiva** e **Inferência Estatística**; e a **Probabilidade** é definida como uma teoria Matemática usada como ferramenta para a Inferência Estatística.

2.1 História

A palavra Estatística se origina do latim no qual *Status* significa *Estado*.

Segundo José Maria Pompeu em [13], *"Desde remota antiguidade, os governos têm se interessado por informações sobre suas populações e riquezas, tendo em vista, principalmente, fins militares e tributários. O registro de informações perde-se no tempo. Confúcio relatou levantamentos feitos na China, há mais de 2000 anos antes da era cristã. No antigo Egito, os faraós fizeram uso sistemático de informações de caráter estatístico, conforme evidenciaram pesquisas arqueológicas. Desses registros também se utilizaram as civilizações pré-colombianas dos maias, astecas e incas. É conhecido de todos os cristãos o recenseamento dos judeus, ordenado pelo Imperador Augusto.*
Os balancetes do império romano, o inventário das posses de Carlos Magno, o Doomsday Book, registro que Guilherme, o Conquistador, invasor normando da Inglaterra, no século 11, mandou levantar das propriedades rurais dos conquistados anglo-saxões para se inteirar de suas riquezas, são alguns exemplos anteriores à emergência da estatística descritiva no século 16, na Itália.
Essa prática tem sido continuada nos tempos modernos, por meio dos recenseamentos, dos quais temos um exemplo naquele que se efetua a cada decênio, em nosso País, pela Fundação IBGE, órgão responsável por nossas estatísticas (dados estatísticos) oficiais."

2.2 Conceitos Básicos

Nesta seção explicaremos conceitos básicos, para maiores detalhes o leitor pode pesquisar em [18] e [9]

Definição 2.1: População- Conjunto de todas as pessoas ou elementos que podem oferecer as informações a serem investigadas.

Definição 2.2: Amostra - É a seleção de uma parcela, ou seja, um subconjunto de elementos da população. A escolha da amostra depende de vários fatores, pois essa vai representar a população; os tipos de amostragem mais comuns são:

Amostragem aleatória simples em que cada elemento da população tem a mesma chance de participar da amostra.
Amostragem proporcional estratificada , usada quando a população pode ser dividida em subpopulações com características e proporção significativamente diferentes.

Definição 2.3: Variável - É o que se pretende investigar com a pesquisa, podendo ser;
Variável quantitativa, as variáveis que podem ser representadas com contagens ou medidas(ex. idade, valores).
Variável qualitativa que consiste em atributos, característica (ex. estado civil, sexo).

Definição 2.4: Frequência - É uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento em um determinado intervalo de tempo.

Definição 2.5: Distribuição de Frequência - É um método de se agrupar dados das variáveis e suas frequências. Com isso, podemos resumir e visualizar um conjunto de dados sem precisar levar em conta os valores individuais.

Frequência Absoluta - Para cada variável estudada contamos o número de vezes que cada dado ocorre, representamos por Fa.
Frequência Relativa -São encontradas dividindo-se cada frequência absoluta pelo total de todas as frequências (total de dados), representamos por Fr.

$$Fr = \frac{Fa}{n} \tag{2.1}$$

2.3 Representações

São modelos de representação de dados.
Para exemplificar as representações, utilizaremos os dados obtidos na Avaliação Diagnóstica do Capítulo 4.

2.3.1 Tabelas

Refere-se a uma figura geométrica plana dividida em linhas e colunas, utilizada para organizar dados e informações.

Exemplo 2.3.1:

Idade dos Alunos que participaram da Diagnótisca	
Idade	Número de Alunos
15 anos	36
16 anos	51
17 anos	42
18 anos	14
19 anos	6

Figura 2.1: Tabela de representação de idade

2.3.2 Gráficos

A palavra gráfico vem do grego *graphikós*, "referente à escrita" e de *graphé*, "escrita". Gráfico é a tentativa de expressar visualmente dados e informações para facilitar a compreensão dos mesmos. Os gráficos mais utilizados hoje são os gráficos de colunas, histograma, setor e pontos.

Gráficos de Colunas

É composto por dois eixos, um vertical e outro horizontal. Os dados são indicados na posição vertical, enquanto as divisões qualitativas apresentam-se na posição horizontal.

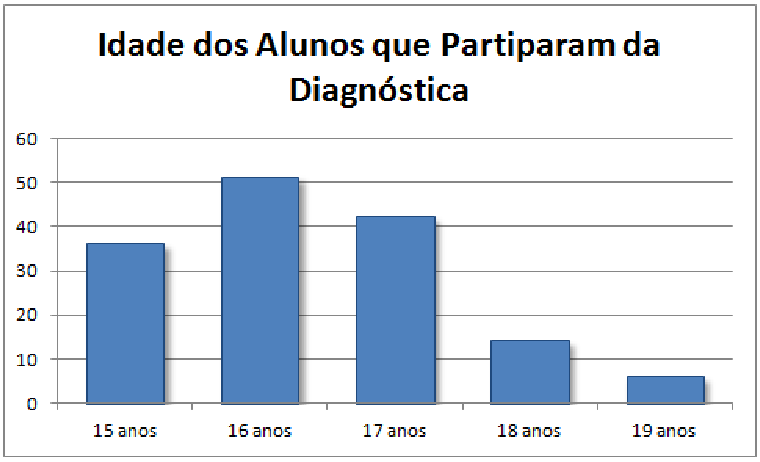


Figura 2.2

Histograma

Um Histograma é um gráfico de colunas no qual a escala horizontal representa classes de valores de dados e a escala vertical representa frequência. As alturas das barras correspondem à frequência, e as colunas são desenhadas adjacentes umas as outras (sem separação) e as áreas são proporcionais às frequências.

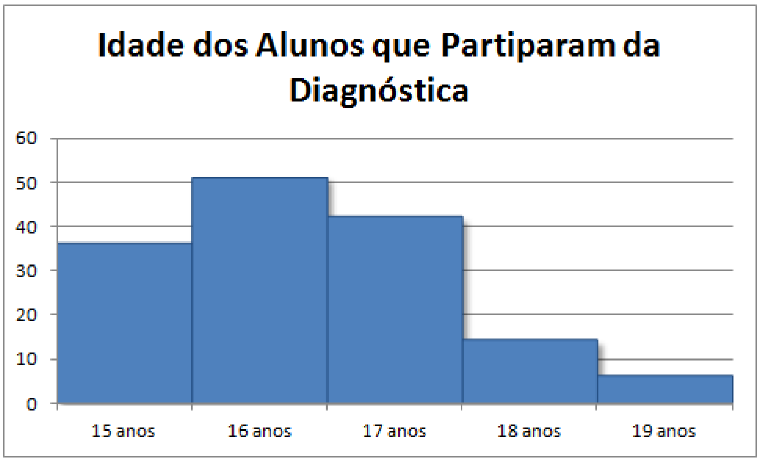


Figura 2.3

Gráfico de Setor

Os gráficos de setor são representados por círculos divididos proporcionalmente . Os valores são expressos em números ou em percentuais % (exemplo: alunos com 16 anos são 34%, então o ângulo central desse setor é calculado como $0{,}34 \times 360° = 122{,}4°$.

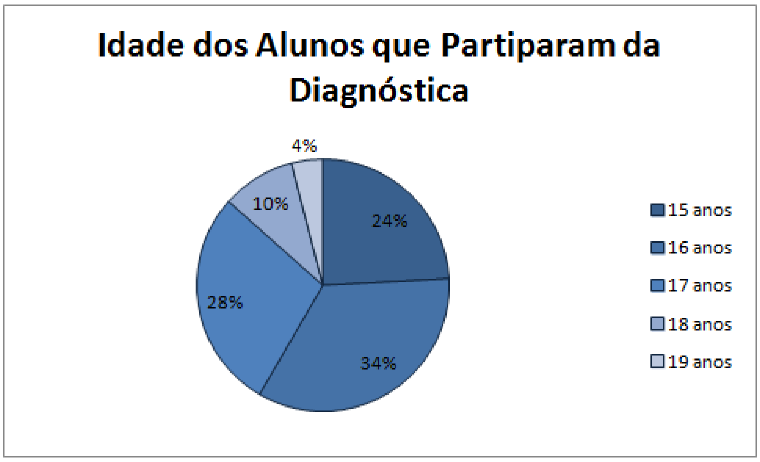


Figura 2.4

Gráfico de Pontos

O gráfico de Pontos é obtido por interpolação linear entre os pontos que representam os dados e usado para demonstrar uma sequência numérica de um certo dado. É indicado para demonstrar evoluções.

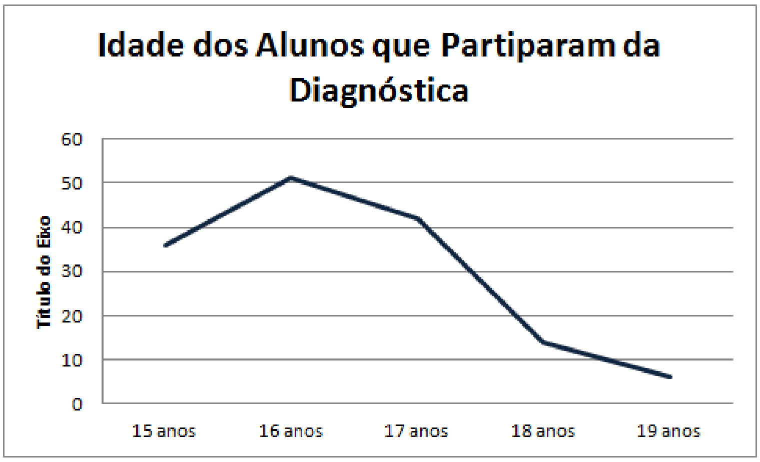


Figura 2.5

2.4 Medidas de Tendência Central

As Medidas de Tendências Centrais são as representações de um conjunto de dados através de um único valor, existem várias maneiras diferentes de determinar o centro, de modo que temos diferentes definições de medidas de centro, incluindo a média, a mediana, a moda e o ponto médio. A **média aritmética** de um conjunto de valores é a medida de centro encontrada pela soma dos valores e posterior divisão do total pelo número de valores.

Definição 2.6: Sejam x_1,x_2,...,x_n os n valores da variável x, a **média aritmética simples** de x, representada por $\bar{x}$,e é definida por:

$$\bar{x}= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2.2}$$

Em casos cujos valores variam em grau de importância ou há repetições de valores da variável, calculamos então a **média aritmética ponderada**, definida a seguir.

Definição 2.7: Considere x_1,x_2,...,x_n com frequências f_1,f_2,...,f_n, respectivamente. Definimos média aritmética ponderada por:

$$\bar{x}= \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \tag{2.3}$$

Definição 2.8: A **mediana** de um conjunto de dados é a medida do centro ou a media aritmética dos dois valores centrais.

Considere as n observações de uma variável, organizadas na sequência $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Definimos a mediana que representaremos por Md como sendo:

$$Md = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{se n for ímpar} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, \text{se n for par} \end{cases} \tag{2.4}$$

Definição 2.9: A **moda** de um conjunto de dados, é o valor que ocorre com mais frequência.

- Se um conjunto tem dois valores com a mesma frequência e essa é a maior do conjunto, cada um é uma moda, e o conjunto é chamado de Bimodal.
- Se mais de dois valores ocorre com a mesma maior frequência, o conjunto é chamado multimodal.
- Se nenhum valor se repete dizemos que não há moda.

Exemplo 2.4.1: Ache as modas dos seguintes conjuntos de dados.

a) 4,5 - 1,3 - 0,65 - 0,73 - 4,5 - 6,1

b) 85 - 85 - 85 - 55 - 55 - 27 - 27 - 27 - 91

c) 1 - 2 - 3 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10

Solução

a) O número 4,5 é a moda porque é o valor que ocorre com mais frequência.

b) Os números 85 e 27 são, ambos modas porque ocorrem com a mesma maior frequência. Esse conjunto de dados é bimodal.

c) Não há moda, porque nenhum valor se repete.

2.5 Medidas de Dispersão

Uma vez tendo estudado medidas de posição, vamos estudar qual a dispersão dos dados de um conjunto. As medidas de dispersão tem por objetivo avaliar o quão dispersos estão os valores da variável em torno de suas medidas de tendência central.

Definição 2.10: **Amplitude** é número real dado pela diferença entre o maior e o menor valor registrado, nesta ordem.

$$amplitude = (maiorvalor) - (menorvalor)$$

Uma primeira medida, candidata natural a ser uma medida da dispersão dos dados.

Definição 2.11: Dados os termos $x_1, x_2,...,x_n$ de uma variável x, a **variância** deste conjunto é definida por

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} \tag{2.5}$$

A variância é uma medida de dispersão que considera os desvios de cada elemento em relação a média aritmética, ou seja $x_i - \bar{x}$. Observe que a adição desses desvios é nula, assim a variância é a média aritmética dos quadrados desses desvios.

É importante ressaltar que estamos trabalhando com população, quando formos calcular variância de amostra, no lugar de n usamos $n-1$, veja em [19].
" O denominador $n-1$ da variância é determinado graus de liberdade. O principio dos graus de liberdade é constantemente utilizado na estatística. Considerando um conjunto de "n" observações (dados) e fixando uma média para esse grupo, existe a liberdade de escolher os valores numéricos de $n-1$ observações, o valor da última observação estará fixado para atender ao requisito de ser a soma dos desvios da média igual a zero. No caso especifico do cálculo da variância, diz-se que os "n" graus de liberdade originalmente disponíveis no conjunto sofreram a redução de uma unidade porque uma estatística, a média já foi calculada dos dados do grupo e aplicada na determinação da variância."

Definição 2.12: Considere os valores $x_1,x_2,...,x_n$ de uma variável, seu **desvio**

padrão é definido por

$$s = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}} \tag{2.6}$$

O desvio padrão é a medida de variação que em geral é mais importante e mais útil, já que a variância por ser um quadrado não permite comparações com a unidade que se está trabalhando. Para dar algum sentido intuitivo ao desvio padrão, devemos entender que ele mede a variação entre valores; valores muito próximos resultam em um desvio padrão pequeno e valores mais espalhados resultam num desvio padrão grande.

Definição 2.13: O **desvio absoluto médio** representa a média aritmética dos desvios $|x_i - \bar{x}\,|$.
Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores assumidos por uma variável quantitativa x e $\bar{x}$ d as medias aritméticas desses valores. Chamaremos de DM o desvio médio, definido por

$$DM = \frac{\sum |x_i - \bar{x}\,|}{n} \tag{2.7}$$

Exemplo 2.5.1: Considere as notas obtida por 8 alunos na Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Públicas (OBMEP);

Notas OBMEP	
Nome	**Nota**
Alison	12
Beatriz	6
Bruno	7
Douglas	3
Eduarda	15
Joana	10
Larissa	18
Rafaela	5

Figura 2.6

Determine o desvio absoluto médio.
Solução

Temos que a média aritmética é dada por.
$\bar{x} = \frac{12+6+7+3+15+10+18+5}{8} = \frac{76}{8} = 9{,}5$

Dessa forma o desvio médio é

$DM = \frac{|12-9{,}5|+|6-9{,}5|+|7-9{,}5|+|15-9{,}5|+|18-9{,}5|+5-9{,}5|}{8} = \frac{32}{8} = 4{,}25.$

2.6 Binômio de Newton

Avaliar a expressão $(x+y)^n$ para vários valores de ınȷ fornece uma família de expressões, denominadas de **expansão binomial**, que são importantes na Matemática, principalmente na teoria probabilística. Podemos notar que quando o valor de n aumenta de maneira grandiosa, o cálculo da potência fica muito trabalhoso. Neste caso, existe um método para desenvolver a enésima potência de um binômio, conhecido como **binômio de Newton**.

- $(x+y)^1 = x+y$
- $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
- $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
- $(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
- ...
- $(x+y)^n = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) x^n + \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right) x^{n-1}y^1 + \left(\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right) x^{n-2}y^2 + ... + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) x^1y^{n-1} + \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) y^n$

Definição 2.14: Dados dois números naturais n e p, com $n \geq p$, denominamos **número binomial** n sobre p, o número $\frac{n!}{(n-p)!\cdot p!}$, que podem ser denotados por C_n^p ou C_n,p. Assim, podemos escrever:

$\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) = \frac{n!}{(n\text{-}p)!\cdot p!}$

Definição 2.15: A disposição dos números binomiais de forma ordenada entre linhas e colunas, de forma que os números binomiais de mesmo numerador n fiquem dispostos numa mesma linha, e os de mesmo denominador p fiquem dispostos numa mesma coluna, conforme disposição abaixo:

Linha 0 $\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)$

Linha 1 $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)$

Linha 2 $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array}\right)$

Linha 3 $\left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array}\right)$

Linha 4 $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

... description

Linha n $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$

Pelo triângulo fica fácil verificar a validade:

- Da relação de **Stiefel**, $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ .r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$.

- $\sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = 2^n$.

2.7 Probabilidade

Probabilidade é a base sobre a qual são construídos importantes métodos de inferência estatística. A seguir veremos algumas definições importantes desse teoria. Para maiores informações veja [18], [9].

Definição 2.16: O **espaço amostral** trata-se do conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Representaremos por Ω.

Definição 2.17: Um **evento** corresponde a um subconjunto do espaço amostral, que é representaremos por E.

Evento complementar - é o subconjunto formado pelos elementos de Ω que não fazem parte de E, representaremos por $\bar{E}$

$$\bar{E} = \Omega \setminus E \tag{2.8}$$

Definição 2.18: Seja o espaço amostral finito $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ de um experimento aleatório. Para cada $i \in \{1,2,...,n\}$, consideremos o evento elementar ou unitário $\{A_i\}$. Associamos a cada um desses eventos um número real, indicado por $P(A_i)$, chamado **probabilidade de ocorrência do evento** $\{A_i\}$, tal que:

- $0 \leq P(A_i) \leq 1, \forall i \in \{1,2,...,n\}$.

- Se $A_1,A_2,...,A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$

- Se $A \cap B = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Supondo que a ocorrência de todos os elementos é equiprovável, podemos definir a probabilidade uniforme em Ω denotando por $n(E)$ a cardinalidade do evento E e

$n(\Omega)$ a cardinalidade do espaço amostral Ω, então a probabilidade da ocorrência do evento E é definida por;

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \tag{2.9}$$

Definição 2.19: Um **evento composto** é a união de dois ou mais eventos. qualquer evento combinando dois ou mais eventos.

Por exemplo, $A \cap B$ em que A e B são eventos.

Teorema 2.1: Sejam A e B eventos, são verdadeiros:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2) $P(\varnothing) = 0$.

3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5) Se $A \supset B$ então $P(A) \geq P(B)$.

Demonstração. 1) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Daí, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2) $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$, pois Ω e $\varnothing$ são mutuamente excludentes. Daí, $P(\varnothing) = 0$.

3) $P(A) = P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ pois $A \setminus B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes. Daí, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

4) $P(A \cup B) = P[(A \setminus B) \cup B] = P(A \setminus B) + P(B)$ pois $A \setminus B$ e B são mutuamente excludentes. Como $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$, resulta $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5) Como $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$, se $A \supset B$ resulta $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A \setminus B) \geq 0$, temos$P(A) \geq P(B)$.

□

Exemplo 2.7.1: Uma bola é retirada ao acaso de uma urna que contém 50 bolas numeradas de 1 a 50. Determine a probabilidade da bola retirada:

a) Não ser múltipla de 10.

b) Ser uma bola com numeração maior que 50.

c) Ser um número primo e não ser par.

d) Ser múltiplo de 10 ou 8.

Resolução

a) Seja A o conjunto de múltiplos de 10. $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ então $n(A) = 5$
$P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{50} = \frac{9}{10}$

b) Seja B o conjunto de bolas com numeração maior que 50. Temos que $B = \varnothing$, logo $P(B) = 0$.

c) Seja C o conjunto de números primos entre 1 e 50, ou seja, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 4$
e $n(C) = 15$.
Seja F o conjunto de números pares entre 1 a 50. Temos que $C \cap F = \{2\}$,
$n(C \cap F) = 1$ e
$P(C \setminus F) = P(C) - P(C \cap F) = \frac{15}{50} - \frac{1}{50} = \frac{7}{25}$

d) Seja D o conjunto de múltiplos de 8. $D = \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$, $n(D) = 6$ e $(D \cap A) = \{40\}$.
$P(D \cup A) = P(D) + P(A) - P(A \cap D) = \frac{6}{50} + \frac{5}{50} - \frac{1}{50} = \frac{1}{5}$

Definição 2.20: Dados dois eventos A e B, com $P(A) \neq 0$, a **probabilidade condicional** de B dado A é a probabilidade do evento$B$ ocorrer dado que o evento a ocorreu. Essa probabilidade é dada por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.10}$$

Exemplo 2.7.2: Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sabendo-se que a soma dos pontos obtidos é menor que 6, qual é a probabilidade de que em pelo menos um lançamento tenha ocorrido a face 2?

Resolução Seja A o conjunto de casos em que a soma é menor que 6.
$A = \{(1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3), (3{,}1), (3{,}2), (4{,}1)\}$
Seja B o conjunto de casos em que ao menos uma dado tenha face 2.
Entre os elementos de A, os que tem pelo menos uma face 2 são
$(A \cap B) = \{(1{,}2), (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3), (3{,}2)\}$. Logo $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$, $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
e $P(B|A) = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{2}$.

Teorema 2.2: (Regra da Multiplicação de Probabilidades) A probabilidade da **ocorrência simultânea de dois eventos** A e B, do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro.

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \tag{2.11}$$

Segue diretamente da definição de probabilidade condicional 2.10.

Definição 2.21: Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω. A e B são ditos **eventos independentes** se a probabilidade de um deles ocorrer não afetar a probabilidade do outro ocorrer, isto, é:

$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B|A) = P(B) \text{ ou ainda se } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (2.12)$$

Teorema 2.3: (Produto da Probabilidade Composta) Se A_i são subconjuntos do espaço amostral Ω, com $P(A_i) > 0$, então;

1) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1|A_2), \forall A_1, A_2 \in A_i$.

2) $P(A_1 \cap A_2 \cap ...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ...P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ...A_n - 1), \forall A_1, A_2, ..., A_n \in A_i \subset \Omega; \forall n = 2, 3, ...$

Demonstração. 2) Como em $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}$, segue de 2.10, logo: $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot ...P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$ □

2.8 Método Monte Carlo

"Em 1946 o matemático Stanislaw Ulam durante um jogo de paciência tentou calcular as probabilidades de sucesso de uma determinada jogada utilizando a tradicional análise combinatória. Após gastar bastante tempo fazendo cálculos percebeu que uma alternativa mais prática seria simplesmente realizar inúmeras jogadas, por exemplo, cem ou mil, e contar quantas vezes cada resultado ocorria.... Posteriormente, esse método ficou conhecido como Método de Monte Carlo, nome inspirado em um tio de Ulam, que jogava constantemente no famoso cassino de Monte Carlo, cujo aspecto aleatório de suas roletas também está intimamente ligado ao método. O Método de Monte Carlo foi formalizado em 1949, por meio do artigo intitulado "Monte Carlo Method", publicado por John Von Neumann e Stanislav Ulam."[8]

Chama-se de Método de Monte Carlo qualquer método de uma classe de métodos estatísticos que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, isto é, repetindo sucessivas simulações um elevado número de vezes, para calcular probabilidade, como podemos ver em [2].

Atualmente, o Método Monte Carlo é utilizado rotineiramente em muitos campos de conhecimentos . Alguns exemplos de aplicação deste método, em diferentes áreas,são:

- Finanças: séries macroeconômicas, opções futuras, etc.;
- Computação gráfica: redução de artefatos, espalhamento, etc.;
- Geologia: caracterização de reservatórios;
- Jogos: geração de redes (grafos).

3

O que os documentos normativos dizem sobre a Estatística e Probabilidade

Não seria exagero dizer que a educação estatística não acompanhou o crescimento da utilização da mesma, o que acarretou o despreparo da população, pois somente no Ensino Superior é dada oportunidades de estudar os elementos básicos da área. No entanto este quadro está mudando. Neste capítulo veremos o que propõe os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), o BNCC (Base Nacional Comum Curricular), o CBC-MG(Currículo Básico Comum do Estado de Minas Gerais) e o que aborda os livros didáticos oferecidos pelo MEC nas escolas estaduais.

3.1 Análise dos Parâmetros Curriculares, BNCC e CBC

3.1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Segue trechos dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Sobre os objetivos do ensino médio.

"Feitas as considerações sobre a importância da Matemática no Ensino Médio, devemos agora estabelecer os objetivos para que o ensino dessa disciplina possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos. As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- *compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;*

- *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;*

- *analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando* *ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;*

- *desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;*
- *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;*
- *expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;*
- *reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;*
- *promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. "*

Outro trecho dos PNC diz, sobre Estatística e Probabilidade;
"As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel e destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e o computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações. "

A interdisciplinaridade no uso do tema é indiscutível. Ainda no texto, os Parâmetros trazem as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, segue aquelas que julgo serem consequências do estudo também da Estatística e Probabilidade.

- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc);

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento

De acordo com os PCN é importante e necessário um cuidado no Ensino da Estatística e probabilidade uma vez que ela é fundamental para a formação de cidadãos conscientes e críticos. Além de ser de suma importância para aqueles que desejarem prosseguir na formação científica.

3.1.2 Currículo Básico Comum - Minas Gerais

Embora já exista o BNCC este ainda não foi homologado e é necessário o entendimento do CBC para entendermos o contexto da educação em Minas Gerais. O CBC é um documento criado pelo Governo de Minas Gerais que está fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) e nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e auxilia os professores uma vez que especifica detalhadamente as unidades temáticas sugere estratégias de ensino. De acordo com o CBC os conteúdos de Estatística e Probabilidade devem ser abordados durante os três anos do Ensino Médio, da seguinte forma;
No Primeiro ano do Ensino Médio o aluno deverá desenvolver as habilidades:

- Reconhecer caráter aleatório.
- Identificar o espaço amostral e uma situação problema.
- Resolver problemas simples que envolvam calculo de probabilidades.
- Utilizar princípio multiplicativo no cálculo de probabilidades.
- Organizar e tabular um conjunto de dados.
- Interpretar e utilizar dados apresentados em tabelas.
- Representar um conjunto de dados graficamente.
- Interpretar e utilizar dados apresentados graficamente.
- Selecionar a maneira mais adequada para representar um conjunto de dados.

- Resolver problemas que envolvam a média aritmética ou ponderada e média geométrica.

No segundo ano deverá;

- Identificar o espaço amostral e uma situação problema.
- Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos.

Por fim no terceiro ano;

- Identificar eventos independentes e não independentes em situações-problema.
- Resolver problemas que envolvam o conceito de probabilidade condicional.
- Utilizar probabilidades para fazer previsões aplicadas, em diferentes áreas do conhecimento.
- Mediana e moda ; interpretar os conceitos e resolver problemas usando mediana e moda em situações - problema.

O ensino seguindo as orientações do CBC oferece ao aluno um aprendizado em estatística e probabilidade básico, sendo o aluno capaz de interpretar dados estatísticos do seu cotidiano.

3.1.3 BNCC

Pronta em dezembro de 2017 a BNCC - Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio traz em conformidade com o que estabelece os PCNs o conjunto de aprendizagens essenciais para todos os alunos.
Já na leitura das competências gerais ficou claro a grande importância do ensino da Estatística e Probabilidade.

2 *Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.*

7 *Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.*

A BNCC garante ao estudante acesso a Estatística com finalidade científica.
"*Para o desenvolvimento de habilidades relativas à Estatística, os estudantes têm oportunidades não apenas de interpretar estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, de planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas.*"

Segundo a BNCC no Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de **competências** específicas. Relacionadas a cada uma delas, são indicadas, posteriormente, **habilidades** a serem alcançadas nesta etapa.
Das cinco competências garantidas pela BNCC, todas abrangem alguma habilidade estatística.

1 *Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.*

   – *Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.*
   – *Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.*
   – *Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.*

2 *Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.*

   – *Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão.*

3 *Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.*

- *Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.*
- *Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos*
- *Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).*

4 *Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representações matemáticas (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.*

- *Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.*
- *Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise*

5 *Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.*

- *Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.*

Pode-se concluir depois da leitura destes documentos, que a preocupação na formação dos alunos é que eles sejam capazes de aplicar os conteúdos estudados no seu cotidiano, sendo a estatística fundamental para tal formação.

3.2 Análise Livro Didático

Com base na análise dos conteúdos de Estatística e Probabilidade a serem estudados no Ensino Médio fiz uma análise de quatro coleções de livros fornecidos pelo PNDL(Programa Nacional do Livro e do Material Didático) e escolhi uma coleção para fazer uma comparação com uma edição lançada há 14 anos.

3.2.1 [16] Contato Matemática

Figura 3.1

Volume 1 Neste volume não foi abordado nenhum tema estatístico.

Volume 2
No Capítulo 5 - Probabilidade;

- Conceito de Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento.
- Cálculo de Probabilidade.
- Probabilidade de união de dois eventos.
- Probabilidade Condicional.
- Eventos Dependentes e Eventos Independentes.

Volume 3
Capítulo 4 - Estatística;

- Um pouco da História.
- Variáveis Estatísticas.
- População e Amostra Estatística.
- Gráficos e Tabelas.
- Medidas de Tendencia Central.
- Medidas de Dispersão.
- Distribuição de Frequências.

Esta coleção contempla todos os conteúdos sugeridos nos PCNs, porém não segue a indicação do CBC do que deve ser trabalhado a cada ano, exemplo, não trabalha Estatística no 1º ano. Esta coleção apresenta linguagem clara mas com pouca formalidade matemática, muitos conceitos sem exemplos e poucos exercícios.

3.2.2 [4] Matemática - Contexto e Aplicação

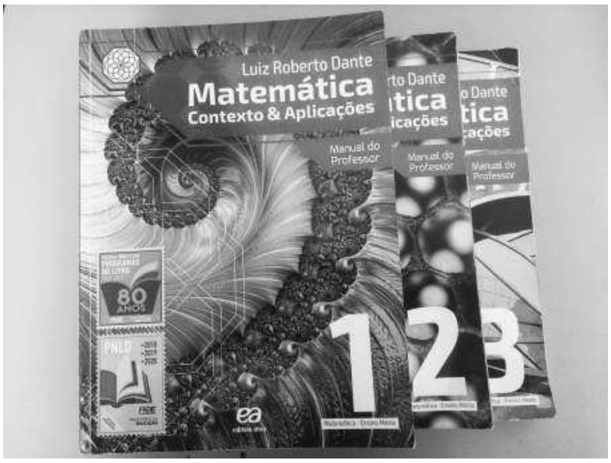


Figura 3.2

Volume 1 Nenhum tema de estatística é abordado.

Volume 2 Capítulo 10 - Probabilidade:

- Conceitos de Fenômenos Aleatórios.
- Espaço Amostral e Evento.
- Eventos, certos, Impossíveis e Mutuamente Exclusivos.
- Cálculo de Probabilidade.
- Consequências da definição(propriedades e demonstração).
- Probabilidade condicional.
- Eventos Independentes.
- Método Binomial.
- Aplicações de Probabilidade na Genética.

Volume 3 Capítulo 2 - Estatística;

- Pesquisa Estatística.
- Um pouco de história.
- Representações Gráficas.
- Medidas de Tendência Central.
- Medidas de Dispersão.
- Estatística e Probabilidade.

Esta coleção em particular, é muito agradável, pois, trata a Estatística e Probabilidade como um conteúdo importante em outras disciplinas, como no tópico que fala de genética considerando um trabalho interdisciplinar.
Segue trecho do manual do professor desta coleção *"O Tema* ***Estatística*** *pode ser considerado um dos mais importantes da matemática no ensino médio, uma vez que análise de dados estatísticos permeia diversas situações de nosso cotidiano, como o censo realizado pelo IBGE(Geografia), pesquisas de mercado(Marketing), pesquisas de intenção de votos, perfis psicológicos(Psicologia), estudos farmacêuticos(Biologia e Química), e uma série de aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. É um assunto de grande interesse para professores e alunos."* Esse trecho nos mostra a importância destinada ao tema pelos autores.

3.2.3 [7] Conexões com a Matemática

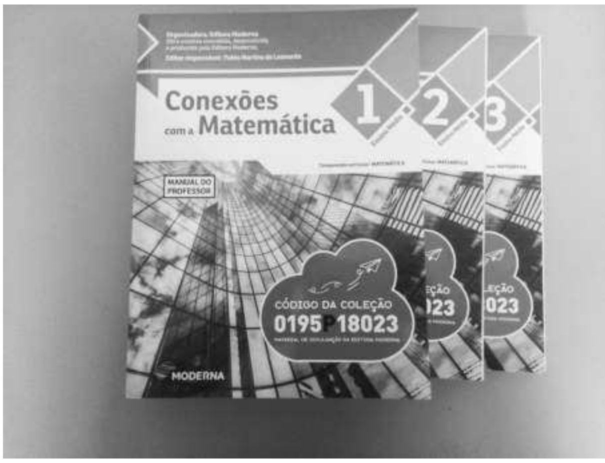


Figura 3.3

Volume 1 Capítulo 1 - Organização e Apresentação de Dados:

- Conceitos como Razão e Proporção.
- Conceitos estatísticos (População, Amostra, Variáveis).
- Tabelas e Gráficos.

Volume 2 Não há abordagem de temas de Estatística.

Volume 3 Capítulo 2 - Probabilidade;

- Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Eventos.
- Probabilidade (Eventos Complementares, Interseção de Dois Eventos, União de Dois Eventos).
- Probabilidade Condicional.
- Método Binomial.

Capítulo 3 - Análise de Dados;

- Noções de Estatística (População, Amostra e Variável).
- Distribuição de Frequências.
- Representações Gráficas.
- Frequência Relativa e Probabilidade.

Capítulo 4 - Medidas Estatísticas;

- Medidas de Tendência Central.
- Medidas de Dispersão.

Esta coleção abordada os temas sugeridos nos PCNs, mas não na cronologia sugerida pelo CBC. A coleção apresenta linguagem clara sem deixar de lado a formalidade matemática, exercícios contextualizados são interessantes e levam o aluno a pensar, contudo são difíceis, não contempla a realidade da maioria dos alunos das escolas estaduais.

3.2.4 [6] Matemática - Ciência e Aplicação

Figura 3.4

Volume 1 Capítulo 13 - Estatística Básica;

- Pesquisa Estatística e seus conceitos.
- Representações Gráficas e Tabelas.

Volume 2 Capítulo 11 - Probabilidade:

- Um pouco de História.
- Espaço Amostral e Evento.

- Frequências Relativas e Probabilidade.
- Definição de Probabilidade
- Propriedades da Probabilidade.
- Probabilidade da União de Dois Eventos.
- Probabilidade Condicional.
- Probabilidade da Interseção de Dois Eventos.

Volume 3 Capítulo 5 - Estatística Básica;

- Conceitos(População, Amostra, Variáveis)
- Tipos de Gráficos.
- Medidas de Centralidade.
- Medidas de Dispersão.

Esta coleção aborda os temas em conformidade com os PCNs e o CBC-MG, traz algumas sugestões de oficinas, trabalha questões do Enem, o que a torna bem recomendável.

Com o intuito de fazer uma analise na evolução do ensino da estatística no Ensino Médio, fiz uma comparação da coleção [6] com o livro[**?**], que é volume único para todo o Ensino Médio, feito pelos mesmos autores 14 anos antes.

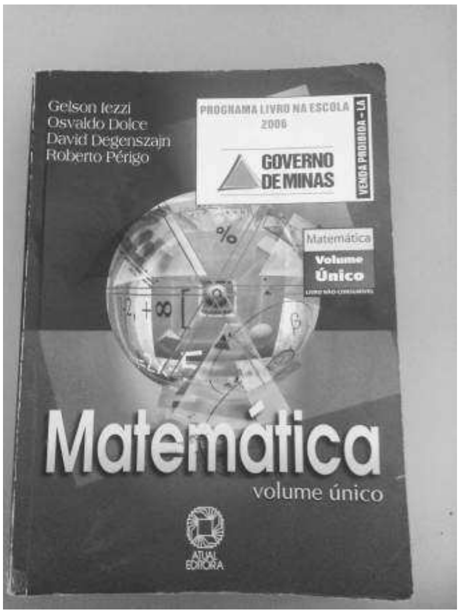


Figura 3.5

Os conteúdos são exatamente os mesmos, sendo que as diferenças ficam na abordagem, em 2016 é mais contextualizada, trazendo um pouco de história, questões interdisciplinares e o livro é mais ilustrado, tornando-o aparentemente mais agradável.

Dos livros analisados, foram considerados dois muito bons e que atendem bem às escolas estaduais são: Matemática - Ciências e Aplicações [6] e Matemática - Contexto e Aplicações [4], os dois abordam o assunto de forma clara e trazem vários exercidos de todos os níveis de dificuldade.

4 Avaliação Diagnóstica

4.1 Avaliação

Com o intuito de verificar o desenvolver do conhecimento e elaborar uma proposta de trabalho dinâmica, prática e aprofundada dos conteúdos com maior índice de defasagem dos alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Geralda Magela Leão de Melo, foi elaborada uma avaliação diagnóstica (no capítulo anexo desse trabalho), que continha 12 questões que testariam o conhecimento de Estatística e Probabilidade conforme descrito nos PCNs e CBC-MG; segue descrições das habilidades e conhecimentos de cada questão:

- **Questão 1** Interpretar e utilizar dados apresentados em tabelas e em um gráfico de colunas.

- **Questão 2** Interpretar e utilizar dados apresentados em tabelas.

- **Questão 3** Verificar se o aluno é capaz de interpretar e utilizar dados apresentados graficamente.

- **Questão 4** Organizar e tabular um conjunto de dados e transcrever informações de uma tabela para linguagem gráfica

- **Questão 5** Resolver problemas que envolvam média aritmética e ponderada.

- **Questão 6** Resolver problemas que envolvam conceito e cálculo de média aritmética e mediana.

- **Questão 7** Interpretar os conceitos de moda, média e mediana, resolver problemas que envolvam média.

- **Questão 8** Interpretar e utilizar dados apresentados em um gráfico de linhas, identificar eventos independentes e não independentes em situação-problema (conceito de probabilidade Condicional).

- **Questão 9** Resolver problemas que envolvam o conceito e cálculo de probabilidade condicional.

- **Questão 10** Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos, utilizando o principio multiplicativo

- **Questão 11** Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade da intersecção e união de conjuntos.

- **Questão 12** Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade, em que é necessário calculo de arranjos, combinações e/ou permutações sem repetição.

4.2 Resultados

Importante para se chegar a uma conclusão da análise deste resultado, pontuar algumas questões como:

- As avaliações foram aplicadas nos dias 26 de outubro de 2017 e 01 de novembro de 2017, logo os estudantes já estavam no final do ano letivo.
- decidiu-se, para uma melhor análise, fazer um estudo do resultado separado por série, uma vez que os conteúdos cobrados na avaliação diagnóstica ainda não foram estudados em alguns casos.

Primeiro ano

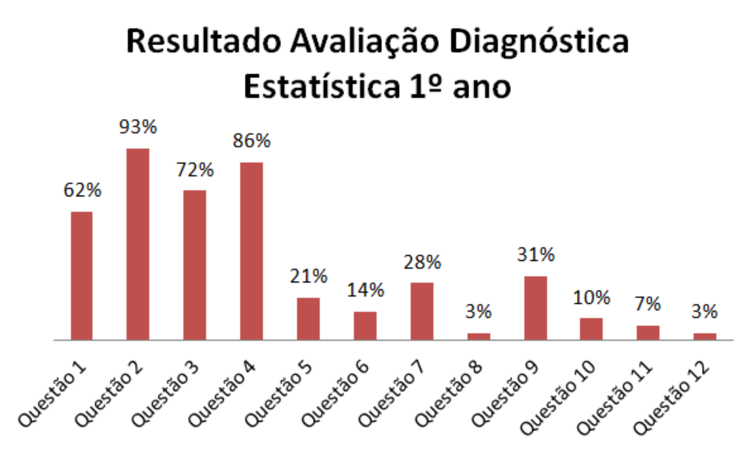


Figura 4.1

Pelo o bom desempenho dos alunos do 1º ano nas questões 1,2,3 e 4 conclui-se que estão correspondendo ao esperado e sabendo fazer uma leitura e interpretação de gráficos e tabelas, lembrando que os livros que abordam estatística no 1º ano tratam somente deste assunto.
Já o mau rendimento nas questões 8, 9,10, 11 e 12 que tratam do assunto probabilidade e nas questões 5, 6 e 7 as quais são de medidas de posição são justificáveis, uma vez que estes temas são abordados nos livros didáticos no 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Segundo ano

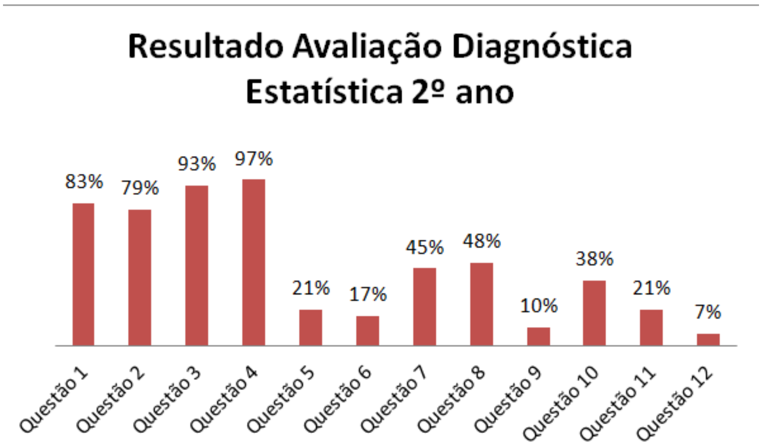


Figura 4.2

Assim como o resultado do 1º ano, os alunos demonstraram boa leitura e interpretação de gráficos e tabelas conforme as questões 1, 2, 3 e 4. No entanto agora já apresenta-se um problema com o baixo índice nas questões 8, 9, 10, 11 e 12, que são de probabilidade, o que não pode mais ser justificado por ser um conteúdo que os alunos ainda não estudaram. Nota-se que a questão 9, onde era necessário o cálculo de uma Probabilidade Concional, obteve-se um índice de acerto de 10%. E a questão 12, na qual era necessário o conhecimento de análise combinatória para que a probabilidade fosse calculada corretamente, obteve-se um índice de acerto de 7%, bem abaixo do índice de acerto das outras questões de probabilidade nas quais não era necessário análise combinatória. Já nas questões 5, 6 e 7, que são de medidas de posição, o mau desempenho é justificável uma vez que este tema só é abordado no livro do 3º ano do Ensino Médio.

Terceiro ano

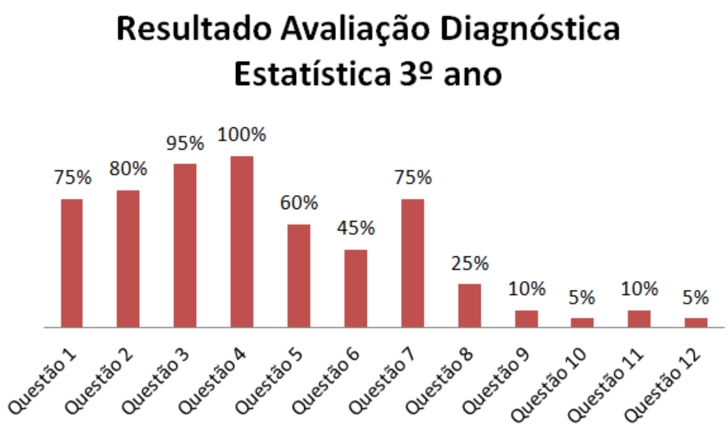


Figura 4.3

Novamente os alunos demonstraram boa leitura e interpretação de gráficos e tabelas conforme resultado das questões 1, 2, 3 e 4. E agora as questões 5, 6 e 7 que tratam do assunto medidas de posição, abordado no 3º ano já apresentam um bom índice de acerto. Mas o assunto probabilidade das questões 8, 9, 10, 11 e 12 ainda é o responsável pelo mau desempenho, até mais do que no 2º ano.

Resultado Geral

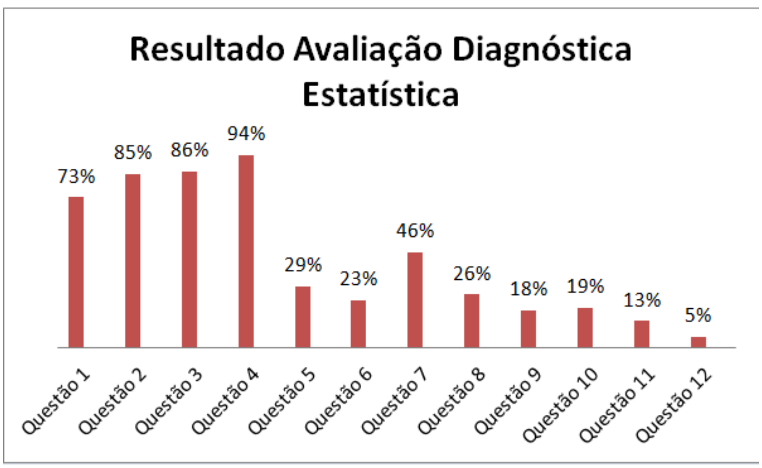


Figura 4.4

É possível concluir que o ideal para um bom desempenho no ensino da estatística durante todo o Ensino Médio seria uma construção contínua dos conhecimentos estatísticos, ou seja, que se estude Análise de Representações Gráficas, Probabilidade e Medidas de Posição e Dispersão do 1º ao 3º ano de forma gradativa a cada ano e se aprofunde mais em cada assunto. presume-se também que o assunto probabilidade deva ter uma maior atenção dos professores, aulas diferenciadas, material concreto (dados, cartas de baralho), oficinas e recursos tecnológicos podem auxiliar para sanar essa grande dificuldade dos alunos.

5

Aplicações

5.1 Estatística e Probabilidade no Enem

Neste capítulo será feita fazer uma análise de quanto e como a Estatística e probabilidade é cobrada no Enem, uma vez que ingressar em um Instituto de Ensino Superior é a meta de grande parte dos estudantes, para isso foram analisadas as provas de Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias dos exames de 2015 e 2016.

5.1.1 Ciências Humanas e Ciências da Natureza

Com o objetivo de fundamentar a importância da Estatística e Probabilidade no Ensino Médio, serão apresentadas algumas questões que envolvam conhecimentos de Estatística e Probabilidade mesmo que para outras áreas.

A questão abaixo é da prova de Ciências Humanas e sua Tecnologias de 2016 e para que se chegue na resposta correta é necessário conhecimentos estatísticos.

Questão 45 - Prova Azul O número de filhos por casal diminui rapidamente. Para a maioria dos economistas, isso representa um alerta para o futuro.

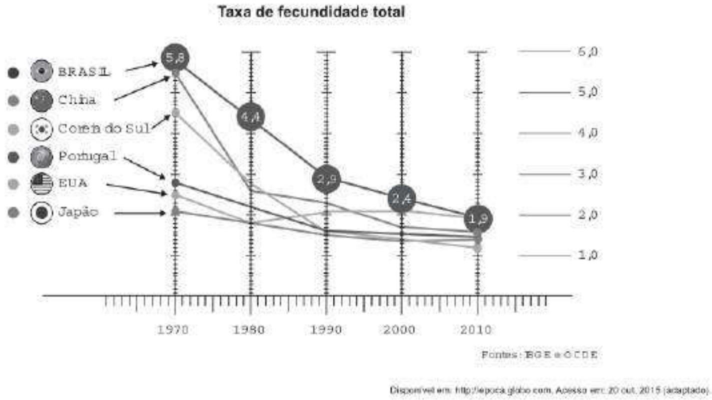


Figura 5.1: Questão Ciências Humanas e suas Tecnologias

Uma consequência socioeconômica para os países que vivenciam o fenômeno demográfico ilustrado é a diminuição da

a) oferta de mão de obra nacional.

b) média de expectativa de vida.

c) disponibilidade de serviços de saúde.

d) despesa de natureza previdenciária.

e) imigração de trabalhadores qualificados.

As questões a seguir são da prova de Ciências da Natureza e suas Tecnologias de 2015 e 2016, para que se resolva corretamente é necessário conhecimentos básicos estatisticos.

Questão 55 - Prova Azul - 2016
A Figura 1 apresenta o gráfico de intensidade em decibéis (dB) , da onda sonora emitida por um alto-falante, que está em repouso, e medida por um microfone em função da frequência da onda para diferentes distancias: 3 mm, 51 mm e 60 mm. A Figura 2 apresenta um diagrama com a indicação das diversas faixas do espectro de frequência sonora para modelo de alto falante utilizado neste experimento.

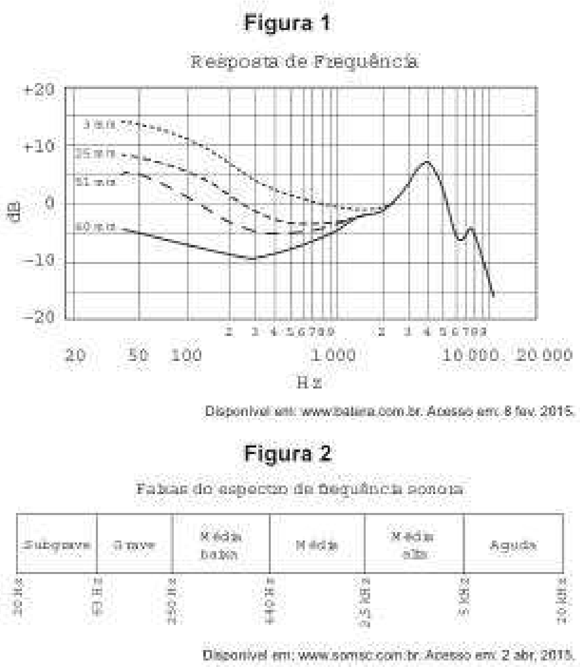


Figura 5.2: Enem 2016-Interpretação de Gráficos

Relacionando as informações presentes na figura 1 e 2, como a intensidade sonora percebida é afetada pelo aumento da distância do microfone?

a) Aumenta na faixa das frequências médias.

b) Diminui na faixa das frequências agudas.

c) Diminui na faixa das frequências graves.

d) Aumenta na faixa das frequências médias altas.

e) Aumenta na faixa das frequências médias baixas.

Questão 48 - Prova Azul - 2015

Muitos estudos de síntese e endereçamento de proteínas utilizam aminoácidos marcados radioativamente para acompanhar as proteínas, desde fases iniciais de sua produção ate seu destino final. Esses ensaios foram muito empregados para estudo e caracterização de células secretoras.
Após esses ensaios de radioatividade, qual gráfico representa a evolução temporal da produção de proteínas e sua localização em uma célula secretora?

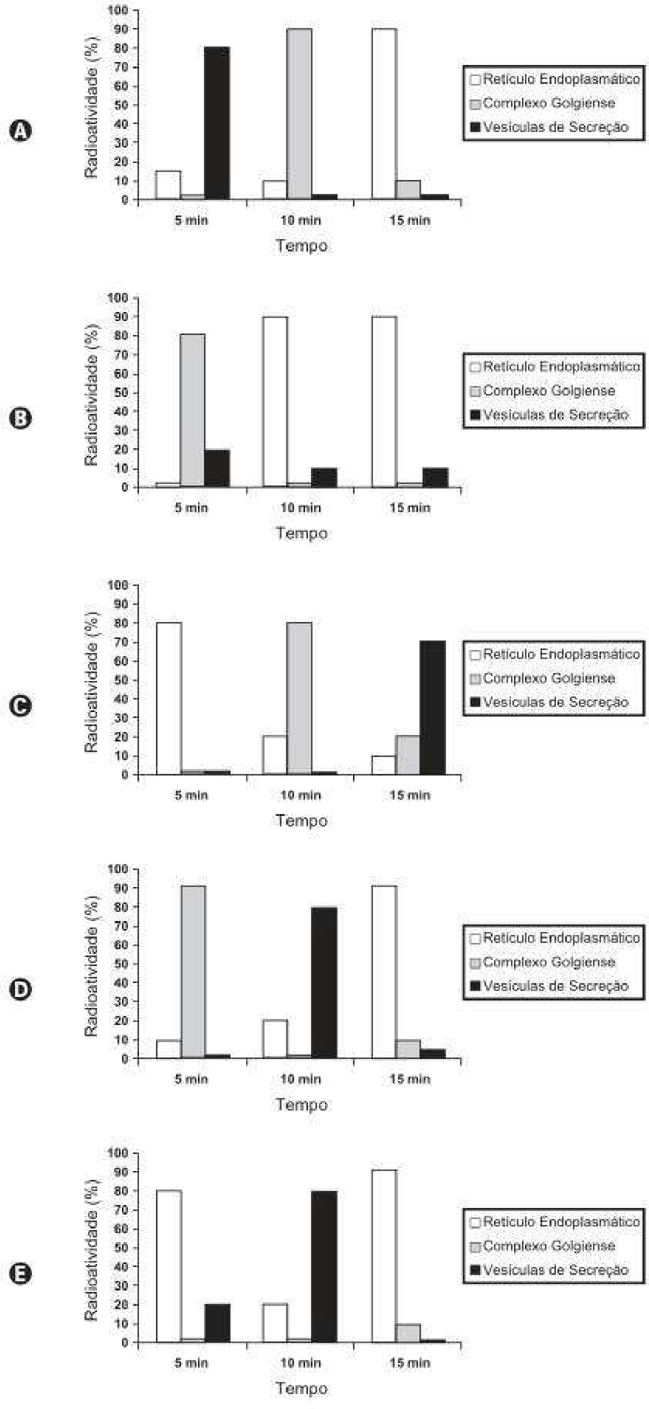


Figura 5.3: Enem 2015-Representar Informações Graficamente

Questão 61 - Prova Azul - 2016

Um pesquisador investigou o papel da predação por peixes na densidade e tamanho das pressas, como possível controle de população de especies exótica em costões rochosos. No experimento colocou uma tela sobre uma área da comunidade, impedindo o acesso dos peixes ao alimento, e comparou o resultado com uma área adjacente na qual os peixes tinham acesso livre. o quadro apresenta os resultados encontrados apos 15 dias de experimento.

Espécie exótica	Área com tela		Área sem tela	
	Densidade (indivíduos/ m²)	Tamanho médio dos indivíduos (cm)	Densidade (indivíduos/ m²)	Tamanho médio dos indivíduos (cm)
Alga	100	15	110	18
Craca	300	2	150	1,5
Mexilhão	380	3	200	6
Ascídia	55	4	58	3,8

Figura 5.4: Enem 2016-Interpretação de Tabelas

O pesquisador concluiu corretamente que os peixes controlam a densidade dos(as)

a) algas, estimulando seu crescimento.

b) cracas, predando especialmente animais pequenos.

c) mexilhões, predando especialmente animais pequenos.

d) quatro espécies testadas predando especialmente animais pequenos.

e) ascídias, apesar de não representarem os menores organismos.

Para a resolução das questões apresentadas nas figuras 5.1, 5.2 é necessário saber ler e interpretar gráficos, já na questão da figura 5.3 foi cobrado saber transformar uma informação escrita em gráfico e por último a questão da figura 5.4, saber ler e interpretar tabelas é fundamental. Ressaltando que estas questões foram alguns exemplos, é recorrente questões em que se use o gráfico ou mesmo a tabela como fonte de informação para resolução.

5.1.2 Matemática e suas Tecnologias

Estatística e Probabilidade é um dos assunto mais cobrados no Enem segundo uma pesquisa feita pelo Sistema Ari de Sá (SAS) em 2017, que fez o levantamento nas provas de Matemática do ENEM de 2009 a 2016 e buscava identificar todos os assuntos já abordados e seus índices percentuais do Enem de 2009 a 2016, conforme [15]

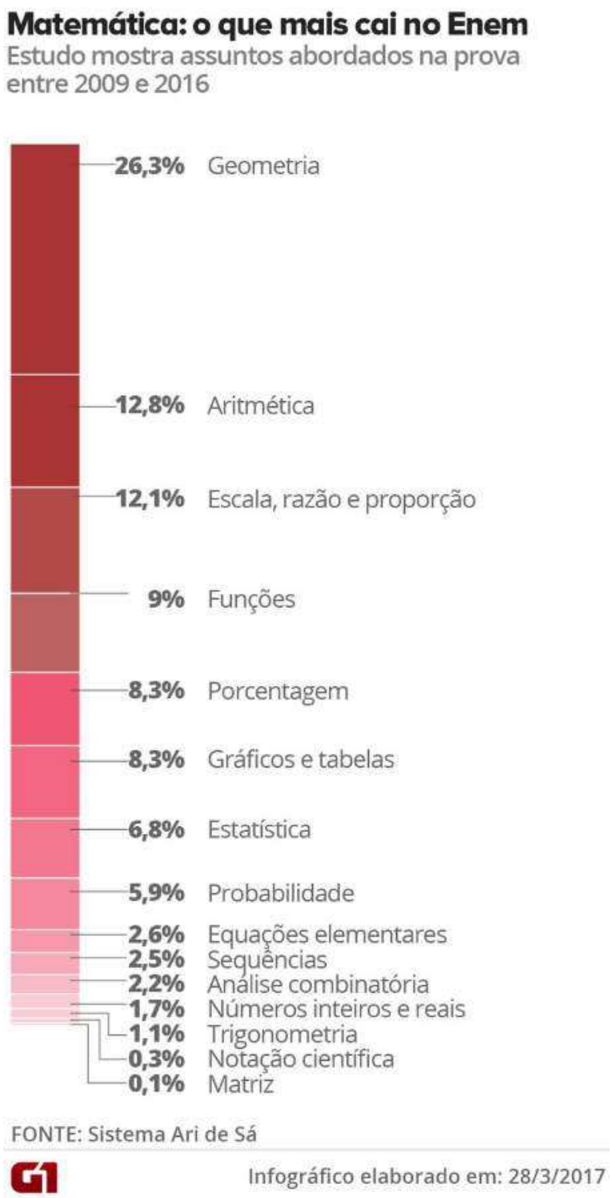


Figura 5.5: Infografico Elaborado G1

Com base nos dados apresentados nesta pesquisa, concluímos que Estatística e Probabilidade é um assunto muito cobrado no ENEM portanto são conteúdos que merecem maior atenção de professores e alunos.

Para ilustrar segue algumas questões;

Questão 140-Prova Azul - 2016
O procedimento de perda rápida de peso, é comum entre atletas de esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 Kg, Peso-pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três pesagens antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos pesos.

As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Figura 5.6: ENEM 2016 Prova Azul

Após as três pesagens, os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.
A primeira luta foi entre os atletas

a) I e II.

b) I e IV.

c) II e III.

d) II e IV.

e) III e IV.

Questão 144- Prova Azul - 2016
Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Figura 5.7: ENEM 2016 Prova Azul

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.
Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês.

a) I.

b) II.

c) IV.

d) V.

e) VII.

5.1.3 Oficinas

Com a proposta de trabalhar estatística de forma lúdica para a maior compreensão de conceitos de Probabilidade e Estatística, foi feita 4 atividades com os alunos do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio, na Escola Estadual Professora Geralda Leão de Melo.

Primeira aula: Foi discutido os tipos de representações gráficas. Na sala de informática usando programa de planilhas e tabelas, a partir de uma pesquisa feita na turma sobre a idade dos alunos, foi feita uma tabela e, usando o recurso do programa, gerou-se quatro tipos de gráfico(Coluna, Setor, Lina e Histograma). Plano da aula em anexo.

Figura 5.8

Segunda aula: Foi direcionada para a probabilidade. Usando material concreto confeccionado pela autora da tese, foi apresentado o **Método Monte Carlo**, que usa a relação entre um quadrado e uma circunferência inscrita nele, $\frac{rea_{circunferncia}}{rea_{quadrado}} = \frac{\pi r^2}{4r^2}$ logo $\pi = 4 \times \frac{rea_{circunferncia}}{rea_{quadrado}}$ para calcular o valor aproximado de π dando credibilidade a probabilidade. Plano da aula em anexo.

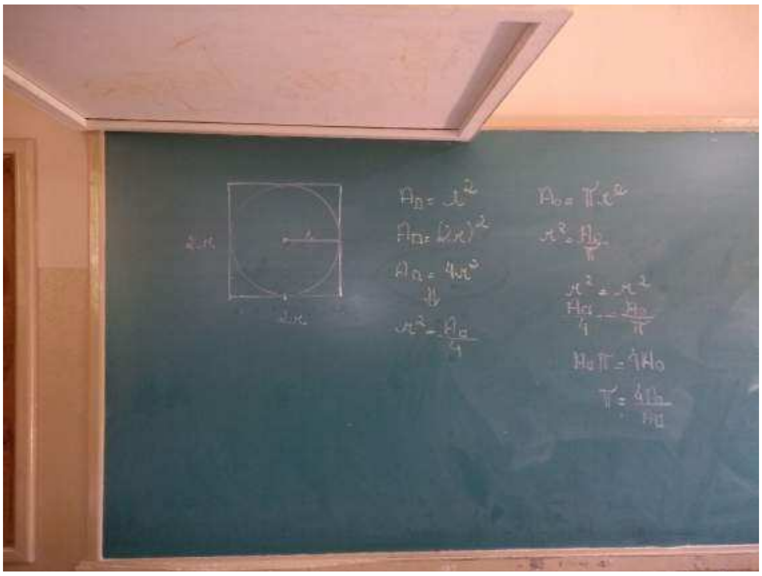


Figura 5.9

Figura 5.10

Terceira aula: Novamente trabalhamos probabilidade, porém, agora, utilizando recurso tecnológico, como no caso do programa de planilhas e tabelas nessa atividade calculou-se a probabilidade de, em n lançamentos de uma moeda o resultado for p coroas. Plano da aula em anexo.

Figura 5.11

Quarta aula: Desta vez foram trabalhados os conceitos de medidas de posição e dispersão (média aritmética, mediana, variância e desvio padrão) em uma aula interdisciplinar. Em posse de uma reportagem veiculada em jornal impresso *Estadão* e na internet no site www.contabeis.com.br/noticias, analisamos as informações.

As aulas se encontram em anexo e foram registradas com fotos e ao final, o material foi recolhido para avaliação e análise.

6

Anexos

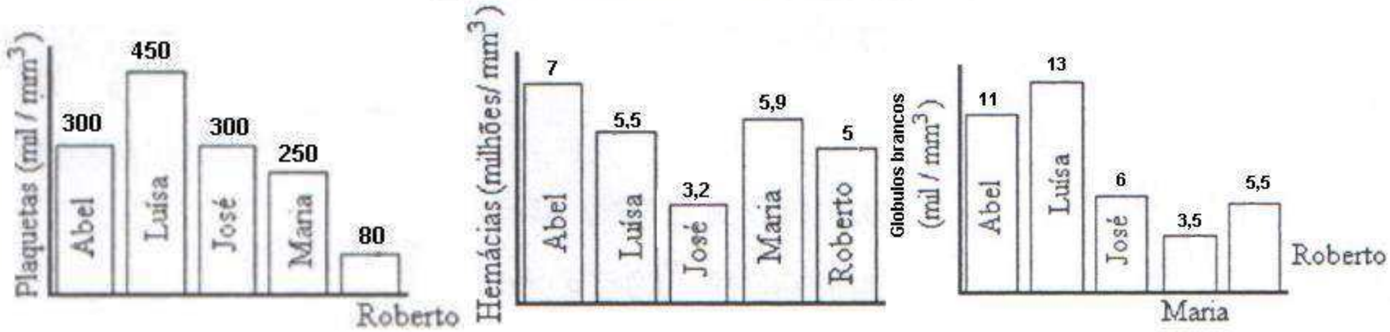
AVALIAÇÃO DIAGNOSTICA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

MESTRANDA: NATÁLIA GONÇALVES DATA: ___/09/2017

ALUNO(A) ______________________________ Série: _____ ____________

1) O hemograma é um exame laboratorial que informa o número de hemácias, glóbulos brancos e plaquetas presentes no sangue. A tabela apresenta os valores considerados normais para adultos. Os gráficos mostram os resultados do hemograma de 5 estudantes adultos. Todos os resultados são expressões em número de elementos por mm^3 de sangue.

	Valores normais para adultos
Hemácias	4,5 a 5,9 milhões/mm^3
G. brancos	5 a 10 milhões mil/mm^3
Plaquetas	200 a 400 mil/mm^3



Podem estar ocorrendo deficiência no sistema de defesa do organismo, prejuízos no transporte de gases respiratórios e alterações no processo de coagulação sanguínea, respectivamente, com os estudantes.

(A) Maria, José e Roberto
(B) Roberto, José e Abel
(C) Maria, Luísa e Roberto
(D) Roberto, Maria e Luísa
(E) Luísa, Roberto e Abel

2) A tabela mostra a distribuição dos domicílios, por Grandes Regiões, segundo a condição de ocupação, no Brasil, em 1995.

Condição de Ocupação	Domicílios par ticulares (%)					
	Total	Grandes Regiões				
		Norte urbano	Nordeste	Sudeste	Sul	Centro-Oeste
Próprio	71,9	78,3	77,1	68,3	74,9	65,1
Alugado	14,5	13,1	9,8	17,9	12,4	16,2
Cedido	13,1	8,0	12,7	13,2	12,4	18,2
Outra	0,5	0,6	0,4	0,6	0,3	0,5
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

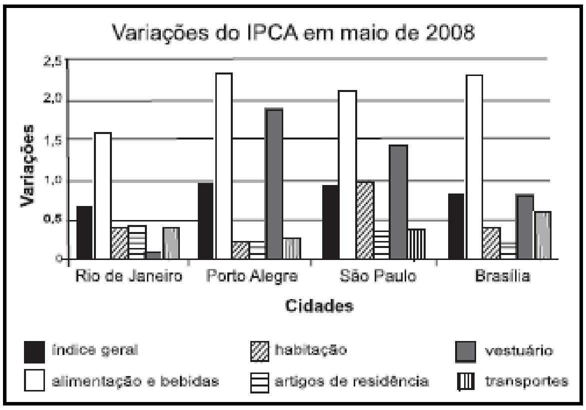
Fonte: IBGE – Diretoria de Pesquisas – Departamento de Emprego e Rendimento – PNAD.

Em 1995, nos domicílios particulares do Nordeste, qual a porcentagem de domicílios alugados e cedidos?

(A) 9,8%
(B) 12,7%
(C) 22,5%
(D) 22,9%
(E) 27,6%

.

3) (ENEM 2009). Para o cálculo da inflação, utiliza-se, entre outros, o índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que toma como base os gastos das famílias residentes nas áreas urbanas, com rendimentos mensais compreendidos entre um e quarenta salários mínimos. O gráfico a seguir mostra as variações do IPCA de quatro capitais brasileiras no mês de maio de 2008.



Disponível em: http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 05 jul. 2008. (adaptado).

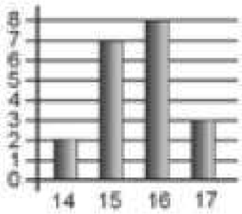
Com base no gráfico, qual item foi determinante para a inflação de maio de 2008?

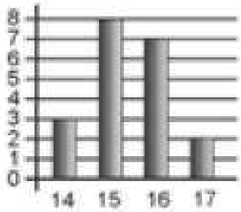
(A) Alimentação e bebidas
(B) Artigos de residência.
(C) Habitação
(D) Vestuário
(E) Transportes

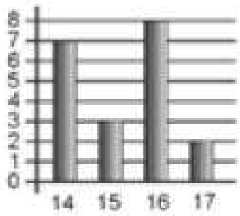
4) No quadro abaixo encontram-se as idades de 20 estudantes que praticam vôlei.

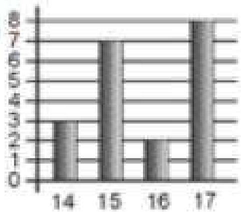
15	15	14	16	16	17	16	14	15	16
15	17	16	16	15	16	14	15	15	16

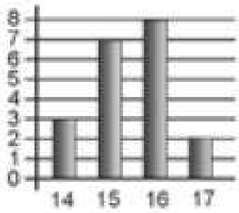
Reunindo estas informações num gráfico obtemos:

A)


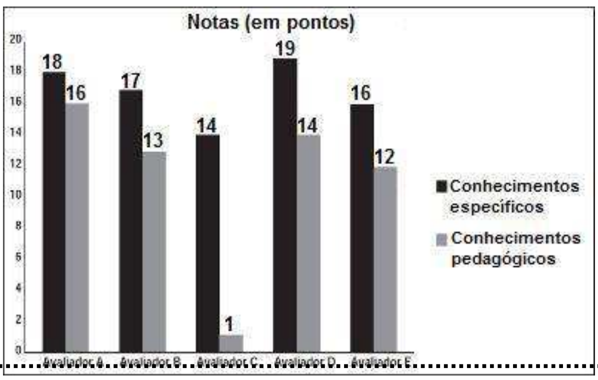
B)


C)


D)


E)


5) (ENEM 2013)As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é:

a) 0,25 ponto maior.
b) 1,00 ponto maior.
c) 1,00 ponto menor.
d) 1,25 ponto maior.
e) 2,00 pontos menor.

6) Em uma olimpíada colegial, na prova de saltos, os cinco primeiros finalistas foram classificados de acordo com a mediana da distância alcançada nos quatro últimos saltos a que tinham direito. Na prova final, o aluno da turma D queimou um de seus saltos, o que o prejudicou em sua classificação final. Os seus outros três saltos foram de 2,74 m, 2,44 m e 2,50 m. A classificação geral dos cinco finalistas foi a seguinte:
1.º lugar: Aluno da turma F, com 2,55 m.
2.º lugar: Aluno da turma A, com 2,51 m.
3.º lugar: Aluno da turma D, com 2,50 m.
4.º lugar: Aluno da turma H, com 2,48 m.
5.º lugar: Aluno da turma B, com 2,45 m.
Se o salto queimado pelo aluno da turma D fosse considerado como a média dos seus outros três, a ordem do pódio para os três primeiros colocados seria
A) 1.º lugar: D, 2.º lugar: F e 3.º lugar: A.
B)1.º lugar: F, 2.º lugar: A e 3.º lugar: D.
C) 1.º lugar: F, 2.º lugar: A e 3.º lugar: H.
D) 1.º lugar: F, 2.º lugar: D e 3.º lugar: A.
E) 1.º lugar: F, 2.º lugar: D e 3.º lugar: H.

7) (Enem 2011) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro.

Dia do mês	Temperatura (em ºC)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a
a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C

8) (ENEM 2011). Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31ºC. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico.

Fonte: EPA – Enem 2011

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{3}{4}$

09) O controle de qualidade de uma empresa vai examinar um lote de peças para trator. O teste é chamado teste cego, uma vez que o testador não deve saber quem é o fornecedor, para que o processo seja considerado isento.Os fornecedores dessas peças são dois A e B. Os lotes de peças do fornecedor A têm 5% de probabilidade de apresentar defeito e os do fornecedor B, 7% de probabilidade.Sabendo que 45% dos lotes são comprados do fornecedor B, então se um lote apresentar defeito, a probabilidade de o lote defeituoso ser do fornecedor A é de aproximadamente:

a)30%
b) 40%
c) 47%
d)53%

10) No lançamento de três moedas, qual é a probabilidade de saírem três caras?

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{2}$

11) (FASP) Um colégio tem 400 alunos. Destes, 100 estudam Matemática, 80 estudam Física, 100 estudam Química, 20 estudam Matemática, Física e Química, 30 estudam Matemática e Física, 30 estudam Física e Química e 50 estudam somente Química. A probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

(A) 1/10
(B) 1/8
(C) 2/5
(D) 5/3
(E) 3/10

12) (Objetivo) Uma urna contém apenas 10 bolas. Essas bolas são de diversas cores, e somente 4 são brancas. Sabe-se que as bolas diferem apenas na cor. Retira-se uma bola ao acaso, e em seguida retira-se outra bola, sem reposição da primeira. A probabilidade de obter duas bolas que não sejam ambas brancas é:

(A) 2/15
(B) 13/15
(C) 1/3
(D) 3/5
(E) 2/9

	ESCOLA ESTADUAL PROFESSORA GERALDA MAGELA LEÃO DE MELO		
	PROFESSORA (MESTRANDA): NATÁLIA GONÇALVES		
ALUNO(A)		2º ano E.M.	

AULA 1

OBJETIVO:

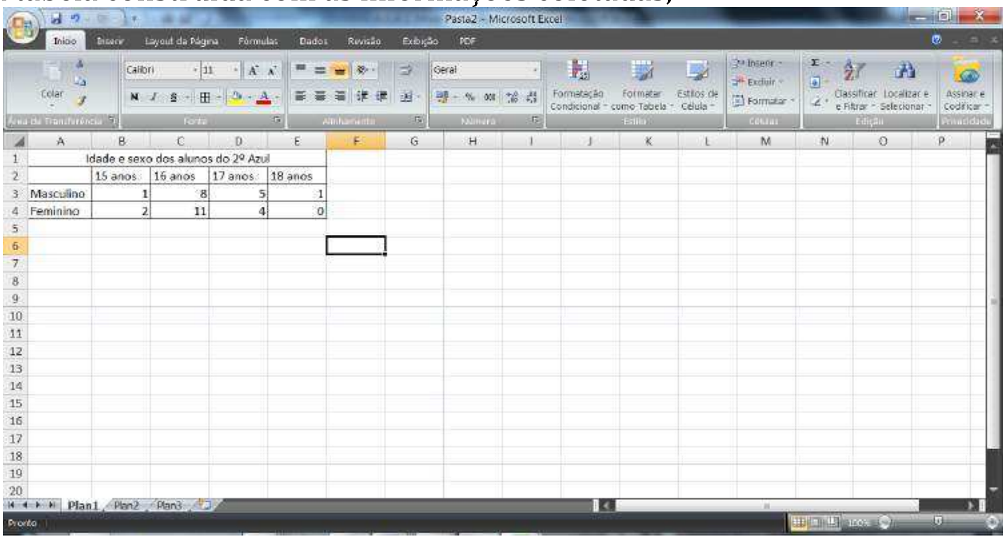
Como está aula pretende-se que os alunos conheçam e diferenciem os diferentes tipos de representações gráfica.

DESENVOLVIMENTO:

1) Na sala de aula, junto com a professora é feito uma pesquisa com a idade e sexo dos alunos.

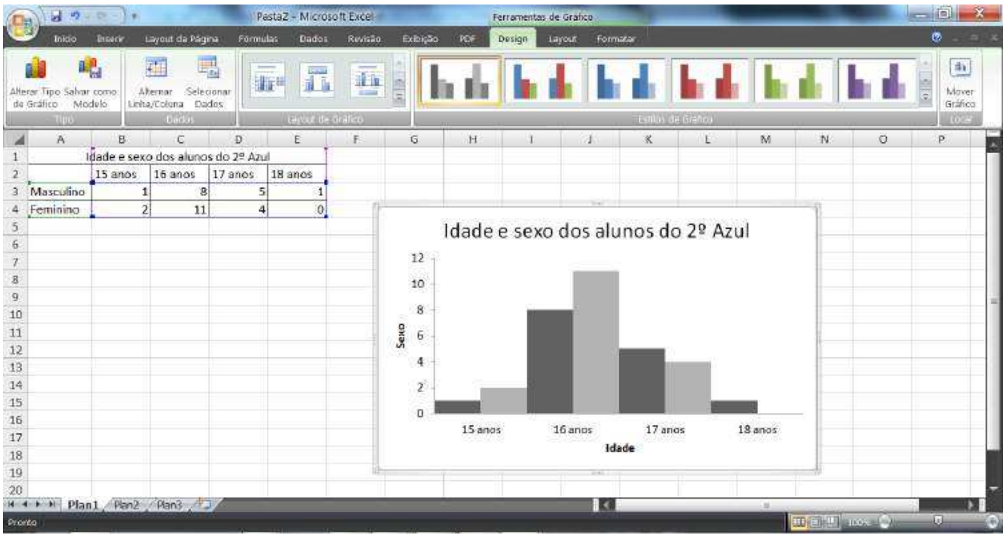
2) Na sala de informática usando programa Excel, alunos com o auxilio da professora construíram alguns tipos de gráficos.

    a) Uma tabela construída com as informações coletadas;



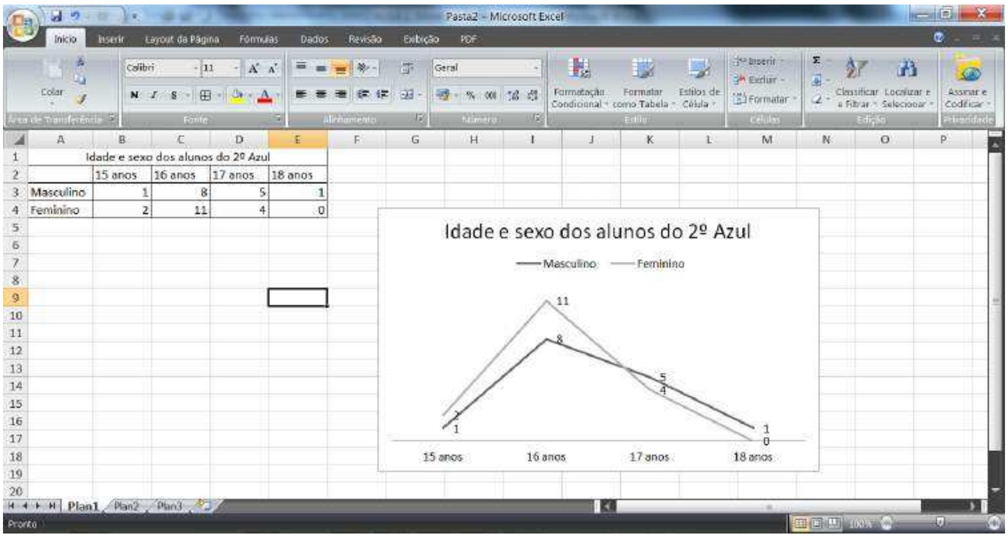
    b) Na ferramenta inserir gráficos, pediu-se que os alunos façam um determinado tipo de gráfico e o classificasse.

Ex-1: Histograma



.

Ex-2: Gráfico de Pontos



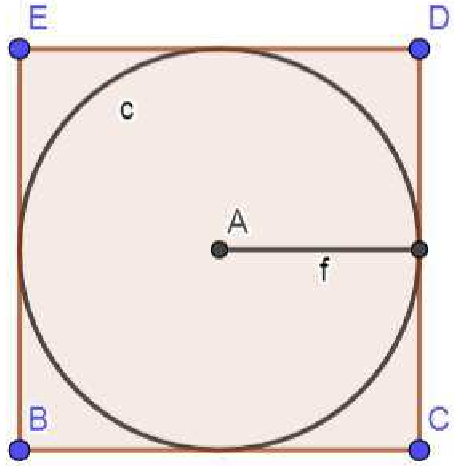
AULA 2

OBJETIVO:

Esta aula tem como objetivo dar confiabilidade a probabilidade e de maneira lúdica apresentar com a probabilidade.

DESENVOLVIMENTO:

1) A professora mostra uma circunferência de raio r inscrita em um quadrado de lado $2r$.



2) Desenvolve as seguintes relações;

- $\acute{A}rea_{circunfer\hat{e}ncia} = \pi r^2$, isolando o r^2 temos $r^2 = \frac{\acute{A}rea_{circunfer\hat{e}nia}}{\pi}$.
- $\acute{A}rea_{quadrado} = (2r)^2 = 4r^2$, isolando o r^2 temos $r^2 = \frac{\acute{A}rea_{quadrado}}{4}$.
- Igualando, $\frac{\acute{A}rea_{circunfer\hat{e}ncia}}{\pi} = \frac{\acute{A}rea_{quadrado}}{4}$, logo;

$$\boxed{\pi = \frac{4\,\acute{A}rea_{circunfer\hat{e}ncia}}{\acute{A}rea_{quadrado}}}$$

.

3) Com o material confeccionado em papel cartão (circunferência inscrita em um quadrado) e grãos de milho, é realizada a oficina;

1. O aluno joga os grãos de milho de forma que caiam aleatoriamente sobre o cartão.
2. Conta a quantidade de milhos que caíram no quadrado e na circunferência.
3. Substitui os valores encontrados a equação, $\pi = \frac{4\,\text{Área}_{circunferência}}{\text{Área}_{quadrado}}$, encontrando sempre um valor aproximado de 3,1415... .

PROFMAT	**ESCOLA ESTADUAL PROFESSORA GERALDA MAGELA LEÃO DE MELO**		
	PROFESSORA (MESTRANDA): NATÁLIA GONÇALVES		
ALUNO(A)		2º e 3º ano E.M.	

AULA 3

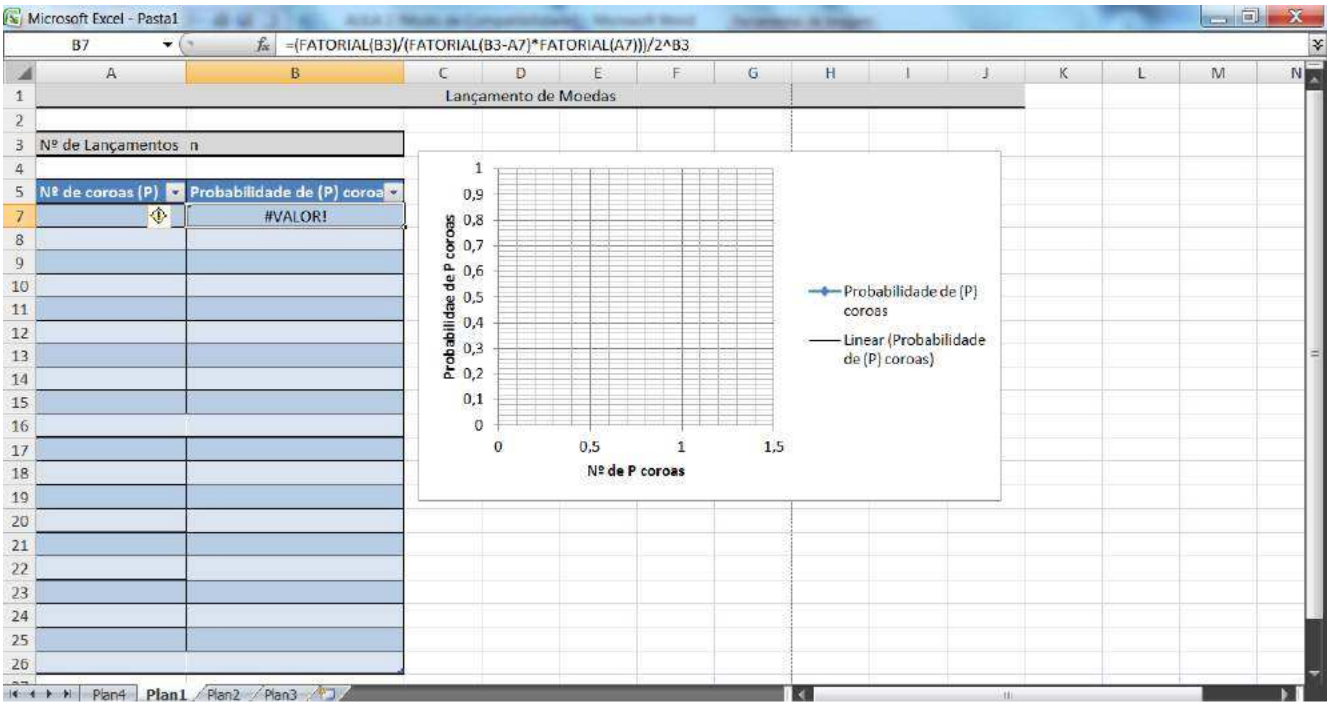
OBJETIVO:

Esta aula contou com o auxilio de uma planilha eletrônica elaborada especialmente para esta oficina calcular a probabilidade de se obter um número p de coroas em n lançamentos de uma moeda.

DESENVOLVIMENTO:

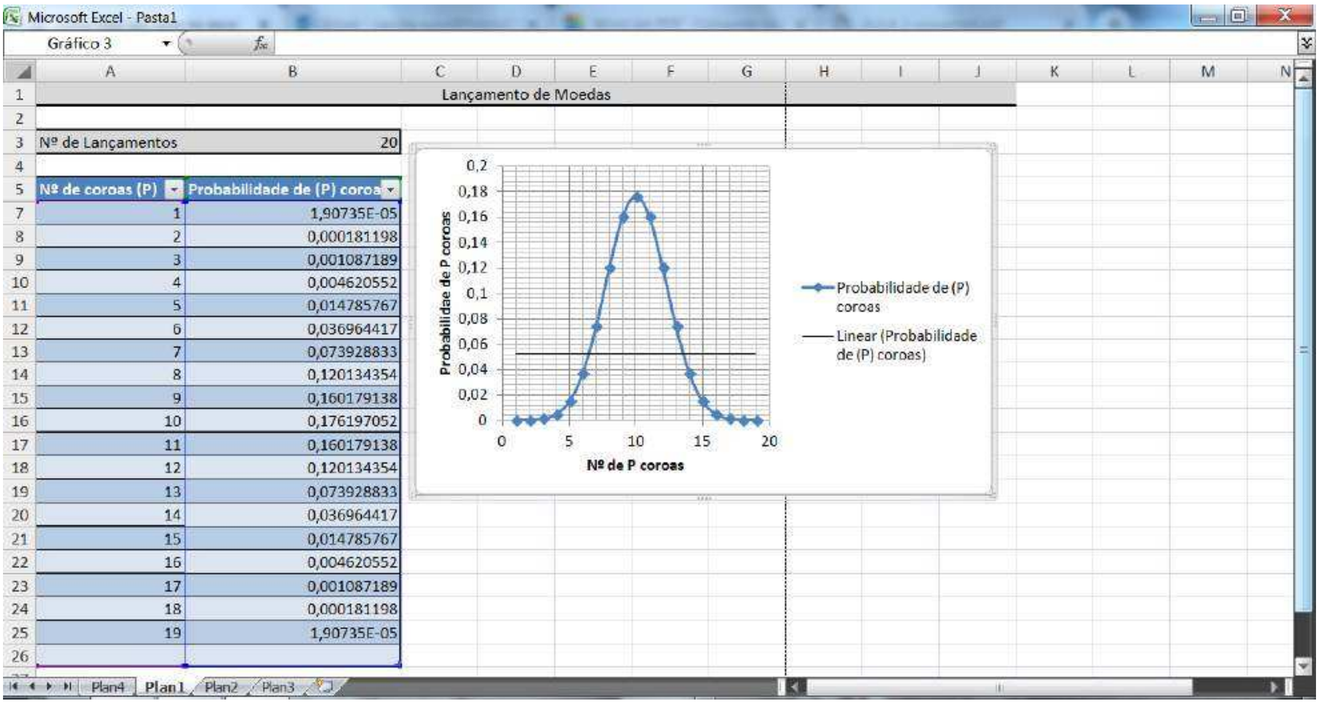
1) Na sala de aula com o auxilio da professora os alunos desenvolverão a fórmula geral para o cálculo da probabilidade de obter-se um número p de coroas em um número n de lançamentos de uma moeda.
   - Espaço Amostral, $n(\Omega) = 2^n$.
   - Evento de se obter p coroas, $n(p) = P_n^{n-p,p}$.
   - Então $P(p) = \dfrac{\frac{n!}{(n-p)!p!}}{2^n}$

2) Na sala de informática usando a planilha já elaborada para essa aula,
   1. o aluno escolhe um número n de lançamentos e preenche a planilha.



.

2. É importante que o aluno determine diferentes valores para n, tornando assim mais visível a distribuição da probabilidade.



Nº de Lançamentos	20
Nº de coroas (P)	Probabilidade de (P) coroa
1	1,90735E-05
2	0,000181198
3	0,001087189
4	0,004620552
5	0,014785767
6	0,036964417
7	0,073928833
8	0,120134354
9	0,160179138
10	0,176197052
11	0,160179138
12	0,120134354
13	0,073928833
14	0,036964417
15	0,014785767
16	0,004620552
17	0,001087189
18	0,000181198
19	1,90735E-05

Sugestão: Esta aula deve ser feita como introdução a distribuição binomial.

	ESCOLA ESTADUAL PROFESSORA GERALDA MAGELA LEÃO DE MELO		
PROFMAT	PROFESSORA (MESTRANDA): NATÁLIA GONÇALVES		
ALUNO(A)		3º ano E.M.	

AULA 4

OBJETIVO:

Nesta aula será lida uma reportagem veiculada em jornal impresso *Estadão* e na internet no site www.contabeis.com.br/noticias, e usando o cálculo de medidas de posição e medidas de dispersão para análise das informações.

DESENVOLVIMENTO:

1) Será distribuído o seguinte texto:

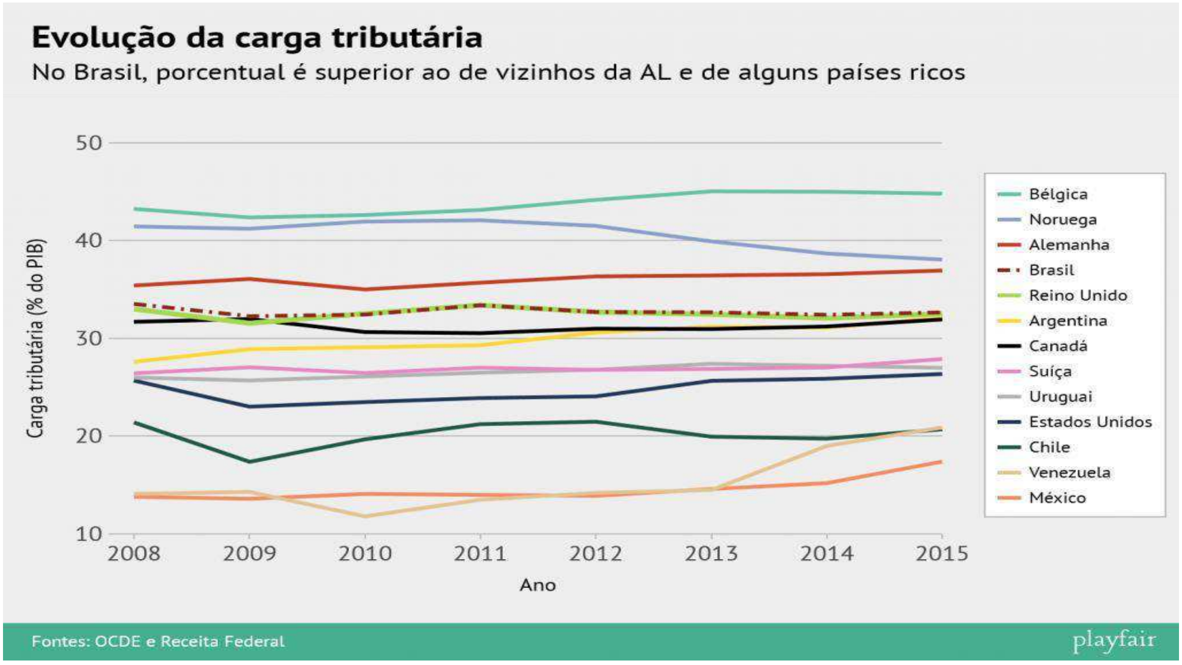
As injustiças tributárias do Brasil em 5 gráficos

Carga de impostos é superior a de vizinhos da AL e de alguns países ricos e onera, principalmente, os mais pobres; aumento de PIS e Cofins sobre combustíveis agrava cenário
26/07/2017 09:02

Após vencer a batalha da **reforma trabalhista** e em meio à luta pela sobrevivência política, o governo do presidente Michel Temer promete agora desengavetar a reforma tributária. No meio do caminho, porém, a equipe econômica anunciou uma **alta expressiva do PIS e do Cofins sobre os combustíveis** – algo necessário, segundo os interlocutores do Planalto, para garantir que o rombo de R$ 139 bilhões previsto para esse ano não fique ainda maior.

A medida – que dobra o imposto sobre a gasolina e tem o potencial de deixar bens e serviços mais caros – reforça uma face perversa do atual sistema arrecadatório: quem ganha menos, paga proporcionalmente mais aos cofres públicos. Os cinco gráficos abaixo mostram alguns recortes dessa realidade:

TRIBUTAMOS MUITO....



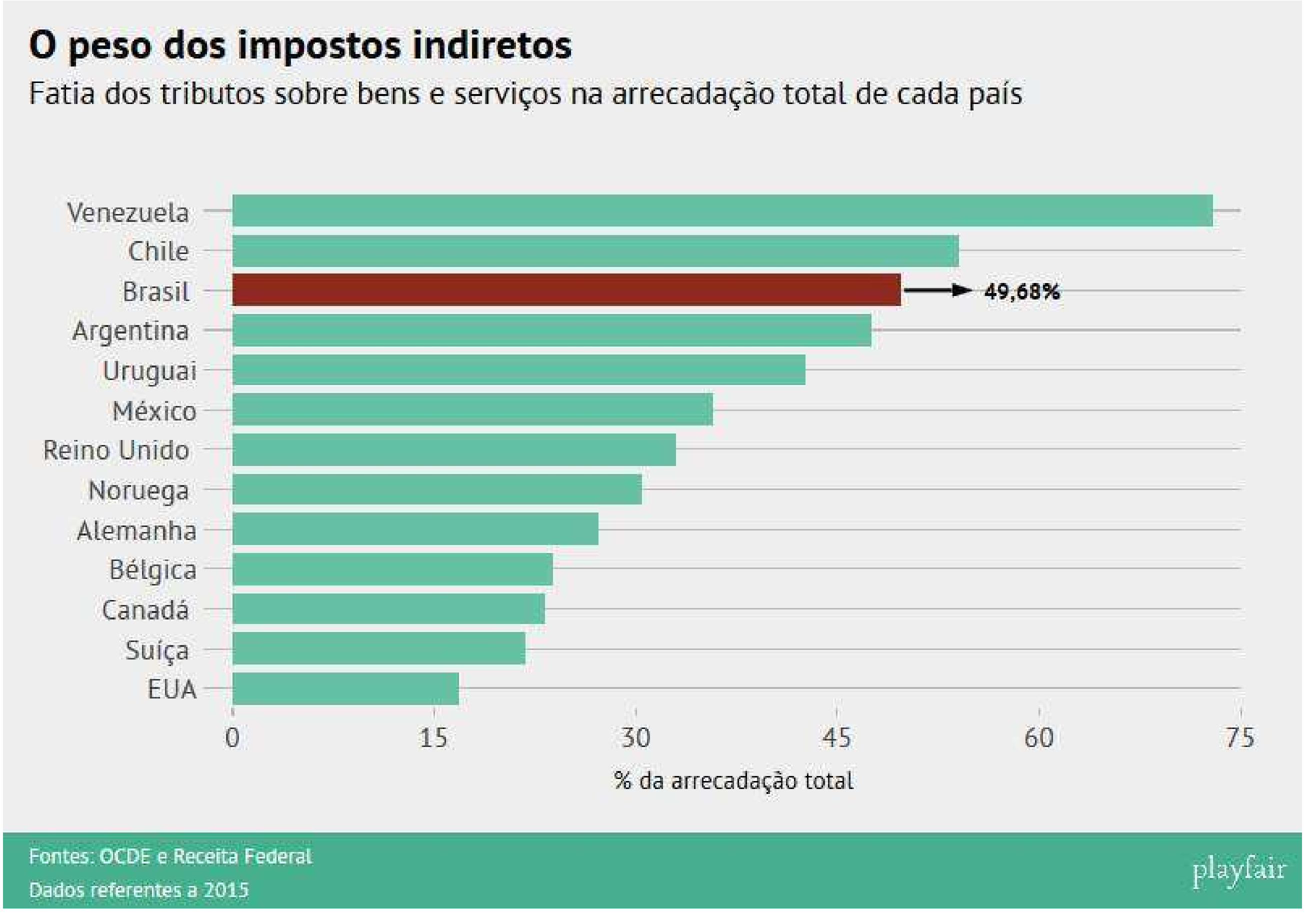
.

No período entre 2008 e 2015, a carga tributária brasileira – relação entre arrecadação total e PIB – permaneceu praticamente estável, ao redor dos 32%. Isso nos coloca acima de vizinhos da América Latina e de parte dos países ricos (que, via de regra, oferecem serviços públicos de melhor qualidade). Suíça, Canadá, Estados Unidos e Reino Unido são alguns exemplos.

Especialistas em finanças públicas alertam, porém, que **não existe um número ideal para a carga tributária** e que o indicador é um reflexo das escolhas da sociedade – em relação à abrangência dos serviços prestados pelo Estado e ao volume de benefícios sociais. Mais importante que reduzi-la, portanto, seria simplificá-la e alterar a sua composição.

"O Brasil é uma referência de carga tributária muito alta entre os emergentes, mas muito mal distribuída", afirma José Roberto Afonso, professor do IDP e pesquisador do Ibre-FGV.

E TRIBUTAMOS MAL



Os impostos que incidem sobre bens e serviços respondem por metade da carga e, para Afonso, são os principais responsáveis pelas injustiças tributárias do Brasil. "*(É necessário)* diminuir a excessiva concentração da arrecadação em impostos indiretos, que penalizam sobretudo o consumo e de forma errática e escamoteada", diz ele, destacando que o atual modelo ajuda a promover a concentração de renda no País.

Isso porque quanto mais pobre é a população, maior é a fatia da renda que ela compromete com o consumo. "Sem saber e sem poder evitar, paga proporcionalmente mais", explica o economista.

A última e única grande reforma tributária no Brasil ocorreu em 1965, durante a ditadura militar. Foi nessa ocasião que surgiu o antigo ICM (Imposto sobre Circulação de Mercadorias), hoje ICMS – depois da adição dos Serviços à sigla. Essas quatro letras são responsáveis por 20% da arrecadação total do Brasil e as grandes vilãs da chamada guerra fiscal entre os Estados.

PIS e Cofins– que incidem, entre outros itens, sobre os combustíveis – também fazem parte dessa lista de impostos indiretos e, juntos, respondem por 13,1% do valor que entra nos cofres públicos. Importante mencionar que a alta recente das alíquotas para gasolina, diesel e etanol ainda tem um efeito em cadeia: além de encarecer o deslocamento de pessoas, encarece o transporte de matérias-primas e bens industrializados, custo que acaba sendo repassado ao consumidor final.

Fonte: www.contabeis.com.br/noticias

Estadão

2) Em seguida serão feitos alguns questionamentos;
   - Usando valores aproximados, calcule a média e o desvio padrão dos impostos nos países de acordo com o gráfico “O peso dos impostos indiretos”. E responda:

a) O Brasil se encontra acima da média?
b) E a Alemanha?
c) Analisando o desvio padrão o que você conclui sobre a quantidade de impostos cobradadas nos países citados?

Sugestão: Realizar esta aula de forma interdisciplinar com Geografia, Língua Portuguesa e História.

Referências Bibliográficas

[1] Bearzoti, Eduardo and Filho, Julio Silva de Sousa Bueno, *Introdução à Inferencia Estatística*, UFLA/FAEPE, 2000.

[2] Carvalho, Admilson Rodrigues, Método de Monte Carlo e Suas Aplicações, PROFMAT,

[3] Cordani, Lisbeth K, *Oficina Estatística para todos*, SBM, 2004.

[4] Dante, Luiz Roberto, Matemática Contexto e Aplicação, Ática, 2016.

[5] Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David and Perigo, Roberto, Matemática, Atual,2002.

[6] Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; Perigo, Roberto and Almeida, Nilze, Matemática Ciência e Aplicações, Saraiva, 2016.

[7] Leonardo, Fábio Martins and Obra Coletiva, Conexão com a Matemática, Moderna, 2016.

[8] Lopes, Hélio, Método de Monte Carlo, PUC Rio, https://maxwell.vrac.puc-rio.br/19632/19632$_4.PDF$

[9] Magalhães, Marcos Nascimento and Lima, Antônio Calos Pedroso, Noções de probabilidade e Estatística, Universidade de São Paulo, 2004

[10] Ministério da Educação Brasil, Parâmetros Curriculares Nacionais, MEC, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/ pdf/matematica.pdf

[11] Ministério da Educação Brasil, Base Nacional Curricular Comum, MEC, http://basenacionalcomum.mec.gov.br

[12] Morgado, Augusto César and Pinto, Paulo Cezar, *Matemática Discreta*, SBM, 2ed., 2015.

[13] Pompeu, José Maria, Breve História da Estatística, Embrapa, 2004

[14] Secretará de Educação de Minas Gerais, Currículo Básico Comum, Governo de Minas Gerais, http://educacao.mg.gov.br

[15] Sistema Ari de Sá, Matemática: o que mais caí no enem, G1- Educação, https://g1.globo.com/educacao/enem/2017/noticia/enem-levantamento-mostra-o-que-mais-cai-na-prova-desde-2009.ghtml

[16] Souza, Joamir and Garcia, Jaqueline, Contato Matemática, FDT, 2016.

[17] Spiegel,Murray R, Estatística, McGRAW-HILL DO BRASIL,1974, 1 Edição

[18] Triola, Mario F., Introdução a Estatística, LTC, 2005

[19] Viali, Lorí, Amostragem e Estimação, PUCRS, 2015