

VANESSA DE AMARAL SANTOS

ESTIMATIVA DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF DOS CONJUNTOS DE  
JULIA HIPERBÓLICOS DA FAMÍLIA DE FUNÇÕES RACIONAIS

$$F_{\lambda,n}(z) = z^n + \frac{\lambda}{z^n}$$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Miranda Alves

VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2020

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

S237e  
2020 Santos, Vanessa de Amaral, 1992-  
Estimativa da dimensão de Hausdorff dos conjuntos de Julia  
hiperbólicos da família de funções racionais  
 $F_{(\lambda,n)}(z)=z^n+\lambda/z^n$  / Vanessa de Amaral Santos.  
– Viçosa, MG, 2020.  
66 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Miranda Alves.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 65-66.

1. Funções (Matemática). 2. Dinâmica. 3. Dimensões.  
4. Teoria dos conjuntos. I. Universidade Federal de Viçosa.  
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.25

VANESSA DE AMARAL SANTOS

ESTIMATIVA DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF DOS CONJUNTOS DE  
JULIA HIPERBÓLICOS DA FAMÍLIA DE FUNÇÕES RACIONAIS

$$F_{\lambda,n}(z) = z^n + \frac{\lambda}{z^n}$$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de dezembro de 2020.

Assentimento:

Vanessa de Amaral Santos

Vanessa de Amaral Santos  
Autora

Alexandre Miranda Alves  
Alexandre Miranda Alves  
Orientador

*Dedico este trabalho à minha família, em especial à minha mãe Nalva,  
pelo exemplo de força e determinação.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Nalva, mulher heroína e batalhadora que sempre me apoiou, incentivou e me compreendeu nas horas difíceis de desânimo e cansaço. Todas as conquistas na minha vida são inteiramente dedicadas a ela. Sabemos por todas as lutas que enfrentamos, mas, com seu exemplo de força e superação me encorajou a vencer todos os obstáculos.

Sou grata aos meus colegas de curso, pela parceria, aprendizados e pelas risadas no corredor do DMA, que tornaram essa minha caminhada mais feliz e agradável. Em especial, ao meu namorado Leandro, por ter sido meu ponto de apoio em todos os momentos nessa jornada.

Aos professores do DMA-UFV, que foram fundamentais em meu processo de formação. Principalmente meu orientador, Alexandre, que com seus conhecimentos e experiência, me auxiliou em todo o processo de realização desse trabalho, me dando suporte para que eu o desenvolvesse da melhor forma possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ah! Se o mundo inteiro me pudesse  
ouvir, tenho muito pra contar, dizer  
que aprendi [...]

---

Tim Maia

# Resumo

SANTOS, Vanessa de Amaral, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2020. **Estimativa da dimensão de Hausdorff dos conjuntos de Julia hiperbólicos da família de funções racionais  $F_{\lambda,n}(z) = z^n + \lambda/z^n$ .** Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Neste trabalho, classificamos três tipos diferentes de conjunto de Julia obtidos através do Teorema da Tricotomia de Escape e estimamos suas respectivas dimensões de Hausdorff. Tais conjuntos são ditos conjuntos de Julia hiperbólicos e são extraídos da família de funções racionais  $F_{\lambda,n}(z) = z^n + \lambda/z^n$ , com,  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , definidas na esfera de Riemann.

Palavras-chave: Funções racionais. Tricotomia de escape. Dimensão de Hausdorff. Conjunto de Julia.

# Abstract

SANTOS, Vanessa de Amaral Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2020. **Estimation of the Hausdorff dimension of the hyperbolic Julia sets of the family of rational functions**  $F_{\lambda,n}(z) = z^n + \lambda/z^n$ . Adviser: Alexandre Miranda Alves.

In this work, we classify three different types of Julia sets obtained through the Escape Trichotomy Theorem and estimate their respective Hausdorff dimensions. Such sets are called Julia hyperbolic sets and are extracted from the family of rational functions  $F_{\lambda,n}(z) = z^n + \lambda/z^n$ , with  $n \geq 2$  and  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , defined in the Riemann sphere.

Keywords: Rational functions. Escape trichotomy. Hausdorff dimension. Julia set.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Noções de Dinâmica Complexa</b>	<b>10</b>
1.1 Conceitos Iniciais . . . . .	10
1.2 Funções Racionais . . . . .	15
1.3 Conjuntos de Fatou e Julia . . . . .	18
<b>2 A Tricotomia de Escape para a família <math>F_{\lambda,n}</math></b>	<b>27</b>
2.1 Aspectos da família de funções racionais $F_{\lambda,n}$ . . . . .	27
2.2 A Tricotomia de Escape . . . . .	28
<b>3 Estimativa da dimensão de Hausdorff de conjuntos de Julia hiperbólicos da família <math>F_{\lambda,n}</math></b>	<b>39</b>
3.1 A Dimensão de Hausdorff . . . . .	39
3.2 Fórmula de Bowen . . . . .	42
3.3 Conjuntos de Julia Hiperbólicos da família $G_{\lambda,n}$ . . . . .	43
<b>Considerações Finais</b>	<b>64</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>65</b>

# Introdução

O campo da dinâmica complexa, o qual é definido como o estudo de sistemas dinâmicos definidos por iteração de funções em espaços de números complexos, iniciou-se com o método Newton no plano complexo feito por Cayley em 1879. Logo após, houve um longo período de dormência nesta área, ressurgindo apenas no final do século XIX e início do século XX. A possibilidade de visualizar no computador as bacias de atração deu um grande impulso na área. Além disso, houve as contribuições de trabalhos desenvolvidos por Douady, Hubbard, Sullivan, entre outros.

O presente trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica pautada essencialmente na referência [3] que investiga a dimensão de Hausdorff dos conjuntos de Julia hiperbólicos na família de funções racionais, da forma  $F_{\lambda,n}(z) = z^n + \lambda/z^n$ , com,  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Esta família foi extensamente estudada por Devaney e outros colaboradores [5, 8, 9, 11, 12] e continua sendo estudada atualmente por vários pesquisadores.

Este trabalho encontra-se dividido em três capítulos. No Capítulo 1, introduzimos noções sobre dinâmica complexa, como o conceito de normalidade, definições do conjunto de Julia e do conjunto Fatou, assim como algumas estruturas e propriedades dinâmicas e topológicas destes conjuntos. Além disso, apresentamos algumas definições e propriedades de funções racionais e também algumas noções do conceito de valência, ponto fixo, ponto crítico e exibimos a Fórmula de Hurwitz-Riemann. No Capítulo 2, apresentamos através do Teorema da Tricotomia de Escape uma classificação para o conjunto de Julia da família de funções racionais  $F_{\lambda,n}$ , os quais, são conjuntos de Julia hiperbólicos. A partir disso, ainda neste capítulo mostramos algumas estimativas desses conjuntos. E por fim, no Capítulo 3, estimamos a dimensão de Hausdorff de cada um dos conjuntos de Julia hiperbólicos descritos no Teorema da Tricotomia de Escape.

# Capítulo 1

## Noções de Dinâmica Complexa

Neste capítulo utilizamos as referências [4], [6], [7] e [17] para pontuar algumas definições e propriedades envolvendo funções racionais e também para apresentar a teoria de conjunto de Julia e Fatou e algumas de suas propriedades. Antes disso, vejamos alguns conceitos importantes de dinâmica complexa.

### 1.1 Conceitos Iniciais

Nesta seção apresentamos alguns resultados gerais de dinâmica complexa. Quando não for mencionado consideremos  $f : U \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uma função analítica, em que  $U$  é um conjunto aberto. Além disso,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-vezes}}$$

é a  $n$ -ésima iterada de  $f$  definida como a composição de  $f$   $n$ -vezes consigo mesma.

**Definição 1.1.** Dada a função  $f$  e  $z \in U$  denominamos a órbita positiva de  $z$  por  $\mathcal{O}_f^+(z) = \{f^k(z) ; k \geq 0\}$ . Se  $f$  é inversível, denominamos a órbita negativa de  $z$  por  $\mathcal{O}_f^-(z) = \{f^k(z) ; k \leq 0\}$ . E a órbita total por  $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_f^+(z) \cup \mathcal{O}_f^-(z)$ .

**Definição 1.2.** Dizemos que  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  é um ponto fixo de  $f$  se  $f(w) = w$ .

**Definição 1.3.** Dizemos que  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  é um ponto periódico de período  $p$  se é um ponto fixo de alguma iterada  $f^p$ , ou seja,  $f^p(w) = w$  e  $p \geq 1$ .

**Definição 1.4.** Um ponto  $z_0$  é pré-periódico, de período  $n$ , se  $z_0$  não é periódico, mas existe um  $n > 0$  tal que  $f^{n+i}(z_0) = f^i(z_0)$ , com  $i > 0$ , ou seja,  $f^i(z_0)$  é periódico para  $i > 0$ , com  $i$  inteiro positivo.

**Definição 1.5.** Se  $z_0 \in \mathbb{C}$  é um ponto periódico de período  $p \geq 1$  então a órbita positiva de  $z_0$ ,  $\mathcal{O}^+(z_0) = \{z_1, \dots, z_{p-1}, z_0\}$  é uma órbita periódica.

**Definição 1.6.** Dizemos que o multiplicador de uma órbita periódica de período  $p$  é o número

$$\lambda = (f^p)'(z_0)$$

em que,  $z_0$  é um ponto qualquer da órbita. Dizemos que a órbita periódica é classificada da seguinte forma:

- i) *superatratora* se  $|\lambda| = 0$ ;
- ii) *atratora* se  $0 < |\lambda| < 1$ ;
- iii) *repulsora* se  $|\lambda| > 1$ ;
- iv) *indiferente* se  $|\lambda| = 1$ .

**Exemplo 1.7.** Se  $f(z) = z^2$  então  $0, 1$  e  $\infty$  são pontos periódicos de  $f$  de ordem 1. Assim o multiplicador é classificado como:

- i)  $\lambda = |f'(0)| = 0$ , portanto 0 *superatrator*;
- ii)  $\lambda = |f'(1)| = 2$ , portanto 1 é *repulsor*;
- iii)  $\lambda = |f'(\infty)| = \infty$ . (Quando o ponto no infinito é periódico sob um mapa racional, a Definição 1.6 pode ser um pouco confusa. Neste caso, o multiplicador  $\lambda$  é igual ao limite, com  $z \rightarrow \infty$ , da derivada de  $f(z)$ .)

A seguir enunciamos o Teorema de Linearização, o qual nos permite estudar o comportamento de uma função  $f$  qualquer a partir de uma aplicação conforme (veja referência [17], página 31).

**Teorema 1.8.** Se  $f$  possui um ponto fixo atrator em  $z_0$ , com multiplicador  $\lambda$  satisfazendo  $0 < |\lambda| < 1$ , então existe uma aplicação conforme  $\xi = \varphi(z)$ , de uma vizinhança do  $z_0$  sobre uma vizinhança de 0, a qual conjuga  $f(z)$  com a função linear  $g(\xi) = \lambda\xi$ . A conjugação é única, a menos de multiplicação por um fator constante não nulo.

*Demonstração.* Suponha  $z_0 = 0$ . Defina  $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z) = z + b_{n+1} z^{n+1} \dots$ , então  $\varphi_n$  satisfaz

$$\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}.$$

Assim, se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  então  $\varphi \circ f = \lambda\varphi$  e temos que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda\xi$  e  $\varphi$  é uma conjugação. Mostramos a convergência citada acima, ou seja, que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ . Note que, para  $\delta > 0$  pequeno, temos

$$|f(z) - \lambda z| \leq C |z|^2, \quad |z| \leq \delta \text{ e } C > 0 \text{ constante.}$$

Dessa forma,

$$|f(z)| \leq |\lambda| |z| + C |z|^2 \leq (|\lambda| + C\delta) |z|,$$

e por indução com  $|\lambda| + C\delta < 1$ ,

$$|f^n(z)| \leq (\lambda + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta.$$

Tome  $\delta$  pequeno de forma que se  $\rho = \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{\lambda} < 1$ , obtemos

$$|\varphi^{n+1}(z) - \varphi^n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z))\lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C |f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C |z|^2}{\lambda}$$

para  $|z| \leq \delta$ . Desta forma  $\varphi^n(z)$  converge uniformemente para  $|z| \leq \delta$ , e existe a conjugação. Para garantirmos a unicidade, suponha que existam duas aplicações  $\phi$  e  $\psi$  que conjugam a aplicação  $f$  com a função linear  $g(\xi) = \lambda\xi$ . Dessa forma, se fizermos a expansão como uma série de potências da composição  $\phi \circ \psi^{-1}$ , então

$$\phi \circ \psi^{-1}(\xi) = b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por  $\lambda$  e comparando os coeficientes, obtemos

$$\lambda b_n = b_n \lambda^n,$$

para algum  $n$ . Consequentemente, temos que  $b_2 = b_3 = \dots = 0$ . Assim,  $\phi \circ \psi^{-1}(\xi) = b_1\xi$ , em outras palavras,  $\psi(z) = b_1\phi(z)$ .

□

O Teorema de Böttcher enunciado a seguir prova a existência da conjugação no caso superatrator. Assim, seja  $f$  uma função com um ponto fixo superatrator  $z_0$ , podemos sob uma mudança de coordenadas considerar  $z_0 = 0$ . Assim,  $f$  pode ser escrita pela série de potências

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots, \quad (1.1)$$

com  $n \geq 2$  e  $a_n \neq 0$  onde o inteiro  $n$  é o grau local de  $f$ .

**Teorema 1.9.** *Se  $f$  satisfaz as condições acima então existe uma mudança de coordenadas holomorfa  $w = \phi(z)$ , com  $\phi(0) = 0$ , que conjugua  $f$  com a função  $w \rightarrow w^n$  em uma vizinhança zero. Além disso,  $\phi$  é única, a menos de multiplicação por uma  $(n-1)$ -raiz da unidade.*

*Demonstração.* Seja  $(n-1)$  alguma raiz  $c$  de  $a_n$  tal que  $c^{n-1} = a_n$ . Então, conjugando  $f\left(\frac{z}{c}\right)$  por um multiplicador  $c$ , temos

$$\begin{aligned} cf\left(\frac{z}{c}\right) &= z^n + b_1 z^{n+1} + b_2 z^{n+2} + b_3 z^{n+3} + \dots \\ &= z^n(1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \dots), \end{aligned}$$

cujo coeficiente líder é igual a 1 e sua dinâmica é análoga a  $f$ . Assim, sem perda de generalidade, nossa aplicação tem a forma

$$f(z) = z^n(1 + g(z)),$$

onde  $g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$ . Façamos a escolha de um raio  $0 < r < \frac{1}{2}$  tal que

$|g(z)| < \frac{1}{2}$  no disco  $\mathbb{D}_r$  de raio  $r$ . Então, para  $|z| < \frac{1}{2}$  temos

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z^n(1+g(z))| \\ &\leq |z^n| \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}|z|^n \\ &< \frac{3}{2^{n+1}} \\ &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

de modo que  $f$  mapeia o disco  $\mathbb{D}_r$  em si mesmo. Além disso,  $f(z) \neq 0$  para  $z \in \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$  uma vez que  $|1+g(z)| > \frac{1}{2}$ . Vemos indutivamente que a  $k$ -ésima iterada de  $f$  tem a forma

$$f^k(z) = z^{n^k} (1 + n^{k-1}b_1z + (\text{termos mais elevados})).$$

onde  $f^k$  também mapeia  $\mathbb{D}_r$  em si mesmo com o zero ocorrendo apenas em  $z = 0$ . Agora defina,

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &= \sqrt[n^k]{f^k(z)} \\ &= (z^{n^k} (1 + n^{k-1}b_1z + (\text{termos mais elevados}))^{1/n^k} \\ &= z \left(1 + \frac{b_1}{n}z + \dots\right), \end{aligned}$$

onde o termo mais a direita é obtido tomando a expansão de Taylor de  $\phi_k$  próximo do zero. Escolhendo implicitamente uma das  $n^k$  raízes possíveis de  $\phi_k$ . Em consequência a essa escolha, temos que

$$\phi_k(f(z)) = (\phi_{k+1}(z))^n.$$

Queremos mostrar que

$$\phi(f(z)) = (\phi(z))^n.$$

Para isso provaremos que  $\phi_k$  converge uniformemente em  $\mathbb{D}_r$  para a função limite  $\phi : \mathbb{D}_r \rightarrow D$ . Para mostrarmos a convergência fazemos a substituição  $z = e^\xi$ , onde  $\xi \in \mathbb{H}_r = \{x + iy \mid x < \log(r)\}$ . Então, a aplicação  $f$  do disco  $\mathbb{D}_r$  sobre si mesmo corresponde a uma aplicação  $F(\xi) = \log(f(e^\xi))$  de  $\mathbb{H}_r$  sobre si mesmo. Tomando  $g(e^\xi) = b_1e^\xi + b_2e^{2\xi} + \dots$ , com  $|g(e^\xi)| < \frac{1}{2}$ , temos

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \log(f(e^\xi)) \\ &= \log(e^{n\xi}(1+g(e^\xi))) \\ &= n\xi + \log(1+g(e^\xi)) \\ &= n\xi + \left(g(e^\xi) - \frac{g(e^\xi)^2}{2} + \frac{g(e^\xi)^3}{3} - + \dots\right) \end{aligned}$$

onde a expressão anterior provém de uma escolha explícita do ramo do logaritmo que estamos usando. Observe que  $F$  mapeia  $\mathbb{H}_r$  holomorficamente em si mesmo. Além disso,

para  $|g(e^\xi)| < \frac{1}{2}$  temos

$$\begin{aligned} |F(\xi) - n\xi| &= |\log(1 + g(e^\xi))| \\ &< \left| \log\left(\frac{3}{2}\right) \right| \\ &< \log(2) \\ &< 1, \end{aligned}$$

para todo  $\xi \in \mathbb{H}_r$ . Da mesma forma, a aplicação  $\phi_k(z) = (f^k(z))^{\frac{1}{n^k}}$  para  $|z| < r$  corresponde a uma aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_k(\xi) &= \log(\phi_k(e^\xi)) \\ &= \log\left({}^n\sqrt{f^k(e^\xi)}\right) \\ &= \frac{1}{n^k} \log(f^k(e^\xi)) \\ &= \frac{F^k(\xi)}{n^k}, \end{aligned}$$

a qual é holomorfa em  $\mathbb{H}_r$ . Então,

$$\begin{aligned} |\Phi_{k+1}(\xi) - \Phi_k(\xi)| &= \left| \frac{F^{k+1}(\xi)}{n^{k+1}} - \frac{F^k(\xi)}{n^k} \right| \\ &= \frac{|F^{k+1}(\xi) - nF^k(\xi)|}{n^{k+1}} \\ &< \frac{1}{n^{k+1}}. \end{aligned}$$

Uma vez que, a aplicação exponencial reduz distâncias, segue que

$$|\phi_{k+1}(z) - \phi_k(z)| < \frac{1}{n^{k+1}} \text{ para } z \in \mathbb{D}_r.$$

Então, quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\phi_k$  converge uniformemente para a aplicação holomorfa limite  $\phi$ . Portanto,

$$\phi(f(z)) = (\phi(z))^n.$$

Para a unicidade é suficiente estudar o caso especial  $f(z) = z^n$ . Se a aplicação da forma

$$\phi(z) = c_1 z + c_k z^k + \text{(termos de menor grau)}$$

conjugua  $z \mapsto z^n$  sobre si mesmo, então a série

$$\phi(z) = c_1 z^n + c_k z^{nk} + \dots$$

deve ser igual a

$$(\phi(z))^n = c_1^n z^n + n c_1^{n-1} c_k z^{n+k-1} + \dots,$$

com  $nk < n + k - 1$ . Comparando os coeficientes, encontramos  $c_1^{n-1} = 1$  e que os coeficientes restantes se anulam, o que prova o resultado.  $\square$

**Definição 1.10.** Se  $w \in \mathbb{C}$  é um ponto fixo atrator de  $f$ , dizemos que a bacia de atração de  $w$  é o conjunto

$$\mathcal{A}(w) = \{z \in \mathbb{C} ; f^k(z) \rightarrow w, k \rightarrow \infty\}$$

e a bacia imediata de atração de  $w$ ,  $\mathcal{A}_0(w)$ , é definida como a componente conexa de  $\mathcal{A}$  contendo  $w$ .

**Exemplo 1.11.** Se  $f(z) = z^2$ , então  $\mathcal{A}(0) = B(0, 1)$  e  $\mathcal{A}(\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 1)$ .

**Definição 1.12.** Se  $\mathcal{O}$  é uma órbita periódica atratora de período  $m$ , definimos a bacia de atração dessa órbita como sendo o conjunto aberto  $\mathcal{A} \subset S$  consistindo de todos os pontos  $z \in S$  para os quais as sucessivas iteradas  $f^m(z), f^{2m}(z), \dots$ , convergem para algum ponto de  $\mathcal{O}$ .

## 1.2 Funções Racionais

Nesta seção, introduzimos algumas definições e propriedades das funções racionais, as quais, exibem características dinâmicas muito interessantes. Introduzimos também algumas noções de valência, ponto fixo, ponto crítico e exibimos a Fórmula de Hurwitz-Riemann para uma função racional.

**Definição 1.13.** Seja  $P$  e  $Q$  funções polinomiais, definimos a função racional  $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , por

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

em que,  $P$  e  $Q$  são ambos polinômios não nulos. Além disso, se  $P = 0$  então  $R = 0$  e se  $Q = 0$  então  $R = \infty$ . Assumiremos também que  $P$  e  $Q$  são coprimos e que o grau de  $R$  é dado por

$$\deg(R) = \max \{ \deg(P), \deg(Q) \}.$$

Vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.14.** Seja  $R(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + 2z + 3}{z - 1}$ . Então,  $\deg(R) = 3, R(1) = \infty$  e  $R(\infty) = \infty$ .

**Proposição 1.15.** Se  $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é uma função racional, em que  $\deg(R) = d > 0$  então para todo  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  a equação  $R(z) = w$  tem  $d$  soluções em  $z$ , contando multiplicidades.

*Demonstração.* Suponhamos que a função racional  $R$  é não constante e que  $R = P(z)/Q(z)$ ,  $\deg(P) = n$  e  $\deg(Q) = m$ , tal que

$$R(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0}.$$

onde  $P$  e  $Q$  são coprimos. Se  $n = m$  então todos os zeros e polos de  $R$  estão em  $\mathbb{C}$  e conseqüentemente existem exatamente  $n = m = d$  de cada, sendo estas raízes de  $P$  e  $Q$  respectivamente e  $R$  tem o mesmo número,  $\deg(R)$ , de zeros como polo. Se  $n > m$  então  $R$  tem  $n = d$  raízes e  $m$  polos nas respectivas raízes em  $\mathbb{C}$ . Observe que também existe um polo no  $\infty$ , cuja multiplicidade é por definição a multiplicidade de 0 em  $1/R(1/z)$ .

Isto é,  $\frac{Q(1/z)}{P(1/z)}$ , ou

$$\frac{b_m z^{n-m} + \dots + b_0 z^n}{a_n + \dots + a_0 z^n},$$

de modo que, 0 tem multiplicidade  $n - m$ . Portanto, existem  $m + n - m = n = d$  polos no total. Similarmente mostramos que o mesmo é válido para o caso  $m > n$ , neste caso, existe um zero no  $\infty$  com multiplicidade  $m - n$ . Finalmente, se  $w \neq \infty$  o número de soluções da equação  $R(z) = w$  é por definição o número de raízes da equação  $R(z) - w = 0$ , ou seja,

$$R(z) - w = \frac{P(z) - wQ(z)}{Q(z)}.$$

Dado que,  $P$  e  $Q$  não possuem zeros em comum, logo,  $P(z) - wQ(z)$  e  $Q(z)$  também não possuem zeros em comum. Dessa forma,  $R(z) - w$  e  $R(z)$  tem o mesmo grau, de maneira que, como vimos acima eles tem o mesmo número de raízes, ou seja,  $d$ . Se  $w = \infty$ , então o número de soluções  $R(z) = w$  é o número de polos de  $R$  que como vimos, também é  $d$ , para qualquer  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

Decorre da proposição apresentada a seguir que se  $R$  é uma função racional então o conjunto  $R^{-1}(z)$  consiste de  $d$  pontos, para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Logo, segue imediatamente do resultado acima o seguinte corolário.

**Corolário 1.16.** *Se  $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é uma função racional e para todo  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  a equação  $R(z) = w$  tem exatamente  $d$  soluções em  $z$ , contando com multiplicidades, então  $\deg(R) = d$ .*

**Definição 1.17.** *Dadas duas funções racionais  $R$  e  $S$ , definidas em  $\mathbb{C}$  ou em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , dizemos que são conjugadas se existe um homeomorfismo  $\psi$ , tal que,  $S = \psi \circ R \circ \psi^{-1}$ . Se  $\psi$  não é injetiva, mas vale a relação  $\psi \circ R = S \circ \psi$ , então dizemos que  $R$  e  $S$  são semi-conjugadas.*

**Proposição 1.18.** *Sejam  $R, S : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  funções racionais, então*

$$\deg(R \circ S) = \deg(R) \cdot \deg(S).$$

*Demonstração.* Com efeito, temos que a composição de funções racionais é uma função racional. Tomando  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  temos pela proposição 1.15 que a equação  $R(z) = w$  tem exatamente  $\deg(R)$  soluções, contando com multiplicidade. Seja  $\xi_1, \dots, \xi_d$ , não necessariamente distintos, estas soluções. Então, para cada  $i = 1, \dots, d$  a equação  $S(z) = \xi_i$  tem exatamente  $\deg(S)$  soluções, contando com multiplicidade. Assim, a equação  $R(S(z)) = w$  tem, no total, exatamente  $\deg(R) \cdot \deg(S)$  soluções, contando com multiplicidade de modo que  $R \circ S$  tem grau  $\deg(R) \cdot \deg(S)$  pelo Corolário 1.16.  $\square$

**Proposição 1.19.** *Se  $R, S : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  são funções racionais conjugadas, isto é, existe um homeomorfismo  $\psi$  tal que  $S = \psi \circ R \circ \psi^{-1}$ , então*

- i)  $\deg(R) = \deg(S)$*
- ii)  $S^n$  e  $R^n$  são funções conjugadas, isto é,  $S^n = \psi \circ R^n \circ \psi^{-1}$ .*
- iii) Se  $R$  possui  $n$  pontos fixos em  $z_0$ , então,  $S$  também possui  $n$  pontos fixos em  $g(z_0)$ . Logo,  $R$  e  $S$  possuem o mesmo número de pontos fixos contando com multiplicidade.*
- iv)  $R$  e  $S$  tem o mesmo número de pontos críticos.*

*Demonstração.* i) Segue da proposição 1.18.

ii) Observe que,

$$\begin{aligned} S^2 &= g \circ R \circ g^{-1} \circ g \circ R \circ g^{-1} \\ &= g \circ R \circ g^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, por indução sobre  $n$  podemos mostrar que  $S^n = \psi \circ R^n \circ \psi^{-1}$ .

iii) Segue por [4] página 39 Lema 2.6.1.

iv) Suponhamos que a função  $g$  seja diferenciável  $z_0$  um ponto crítico de  $R$ . Assim,

$$S'(g(z_0)) = g'(R(z_0))R'(z_0)(g^{-1})'(g(z_0)) = 0.$$

Dessa forma,  $S$  tem um ponto crítico em  $g(z_0)$ . □

**Proposição 1.20.** *Se  $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é uma função racional cujo  $\deg(R) = d$ , então  $R$  tem no máximo  $2d - 2$  pontos críticos.*

*Demonstração.* Veja [4], páginas 43 e 44. □

**Exemplo 1.21.** *Seja*

$$R(z) = \frac{z^2 + 1}{z}.$$

Então,  $\deg(R) = 2$  e pela Proposição 1.20,  $R$  tem no máximo  $2 \cdot 2 - 2 = 2$  pontos críticos. De fato,

$$R'(z) = 0 \iff \frac{z^2 + 1}{z} = 0 \iff z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -1.$$

**Proposição 1.22.** *Se  $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é uma função racional então  $R$  tem exatamente  $d + 1$  pontos fixos, contando com multiplicidade.*

*Demonstração.* Com efeito, suponha  $R$  uma função racional em que  $\deg(R) = d$ . Assim, dado que a conjugação preserva o número de pontos fixos, podemos assumir que o infinito não é um ponto fixo de  $R$ . Então, os pontos fixos de  $R$  são dados por

$$R(z) = z \xrightarrow{z \neq \infty} R(z) - z = 0.$$

Consideremos  $R(z) = P(z)/Q(z)$  com  $P$  e  $Q$  coprimos e seja  $\xi$  um ponto fixo de  $R$ , então  $\xi$  é finito. Dado que,  $Q(\xi) \neq 0$ , o número de zeros de  $R(z) - z$  em  $\xi$  é exatamente o mesmo que o número de zeros de  $P(z) - zQ(z)$  em  $\xi$ . Consequentemente o número de pontos fixos de  $R$  é exatamente o número de soluções de  $P(z) = zQ(z)$  em  $\mathbb{C}$ . Como  $R$  não fixa  $\infty$ , temos

$$\deg(P) \leq \deg(Q) = d,$$

então o grau de  $P(z) - zQ(z)$  é exatamente  $d + 1$ . □

Nosso próximo objetivo é apresentar a Fórmula de Hurwitz-Riemann, para isso, primeiramente vejamos algumas definições.

**Definição 1.23.** *Seja  $F$  uma função não constante e holomorfa próximo ao ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Então, se  $F$  tem uma expansão de Taylor em  $z_0$  dada por*

$$F(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

onde  $k \neq 0$ . Dizemos que o inteiro  $k$  é a valência de  $F$  em  $z_0$  e denotamos por  $v_F(z_0)$ .

Definimos a deficiência de  $F$  em  $z$  como  $\delta_F(z) = v_F(z) - 1$ . Onde  $v_F(z)$  é a valência.

**Definição 1.24.** *Para qualquer conjunto  $A$  definimos a deficiência total de  $R$  sobre  $A$  como*

$$\delta_R(A) = \sum_{z \in A} \delta_R(z).$$

Denotamos  $\chi(U)$  como a característica de Euler do conjunto  $U$ . Em particular sabemos que se  $U$  é um disco fechado então  $\chi(U) = 1$ .

**Teorema 1.25.** *(Fórmula de Hurwitz-Riemann) Seja a função racional  $R : U \rightarrow V$  tais que  $U, V$  são domínios em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se  $R$  satisfaz as afirmações abaixo,*

- i)  $V$  é um domínio limitado por um número finito de curvas de jordan mutuamente disjuntas;*
- ii)  $U$  é uma componente de  $R^{-1}(V)$ ;*
- iii) não existe valores críticos de  $R$  na  $\partial V$ .*

*Então, existe um inteiro  $n$  tal que  $R$  é um mapa  $n$ -fold de  $U$  sobre  $V$  (isto é, para cada  $w$  em  $V$ , existe exatamente  $n$  soluções  $z$  de  $R(z) = w$  em  $U$ ) e*

$$\chi(U) + \delta_R(U) = n\chi(V).$$

*Demonstração.* Veja [4], página 87. □

**Definição 1.26.** *Dizemos que uma função racional de grau  $d \geq 2$  é dinamicamente hiperbólica se, e somente se, a órbita de cada ponto crítico converge para uma órbita periódica atratora.*

### 1.3 Conjuntos de Fatou e Julia

Para estudarmos os conjuntos de Julia e de fatou precisamos primeiramente da definição de família normal.

Denotamos por  $\mathcal{C}(U, V)$  como o conjunto de todas as aplicações contínuas de  $U$  em  $V$ , onde  $U$  e  $V$  são subconjuntos de  $\mathbb{C}$ .

**Definição 1.27.** *Um conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, V)$  é normal se cada sequência em  $\mathcal{F}$  possui uma subsequência que ou converge uniformemente em cada compacto  $K \subset U$  para  $f$  em  $\mathcal{C}(U, V)$ .*

**Teorema 1.28. (Teorema de Àrzelà-Ascoli)** Um conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, V)$  é normal se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas :

- (i) Para cada  $z \in U$ ,  $\{f(z); f \in \mathcal{F}\}$  tem fecho compacto em  $V$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}$  é equicontínua em cada ponto de  $U$ .

*Demonstração.* Veja [7], página 148. □

**Teorema 1.29.** Uma família  $\mathcal{F}$  de funções holomorfas em um domínio  $D$  limitada por alguma constante fixa é normal.

*Demonstração.* Pelo Teorema de Àrzelà-Ascoli é suficiente provarmos que a família  $\mathcal{F}$  é equicontínua. Suponha  $C$  a fronteira de um disco fechado de raio  $r$  contido em  $D$ . Desta forma, dado  $\epsilon > 0$  tome  $\delta < \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{\epsilon r}{4M} \right\}$ , onde  $M$  é uma constante fixa positiva. Se  $z$  e  $z_0$  estão no interior de  $C$ , então pela fórmula Integral de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{1}{(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z_0)} \right) f(\xi) d\xi \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi. \end{aligned}$$

Suponha ainda que  $M$  seja a constante fixa que limita cada função  $f \in \mathcal{F}$ , isto é,  $|f| \leq M$  em  $C$ . Se restringimos  $z$  e  $z_0$  ao disco concêntrico de menor raio,  $\frac{r}{2}$ , segue-se que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_C \frac{|f(\xi)|}{|(\xi - z)||(\xi - z_0)|} |d\xi| \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \frac{4M}{r^2} \int_C |d\xi| \\ &= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \frac{4M}{r^2} (2\pi r) \\ &= \frac{4M |z - z_0|}{r}. \end{aligned}$$

Logo

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{4M |z - z_0|}{r} < \epsilon.$$

Portanto a família é equicontínua. E por decorrência do Teorema de Àrzelà-Ascoli é normal. □

**Definição 1.30.** Sejam  $R$  e  $S$  superfícies de Riemann. A aplicação holomorfa  $P : R \rightarrow S$  é uma aplicação de recobrimento, se todo  $w \in S$  está em algum disco coordenado  $U$  tal que cada componente conexa de  $P^{-1}(U)$  é levada de maneira conforme por  $P$  em  $U$ .

Definimos ainda  $S^\infty$  como recobrimento universal de  $S$  obtida por  $S$  em relação a todos os loops ao redor dos pontos não triviais de fronteira  $U$ .

**Lema 1.31.** *Se  $M = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  é a esfera perfurada três vezes, então  $M^\infty$  é conformalmente equivalente ao disco unitário  $D$ .*

*Demonstração.* Como  $D$  é conformalmente equivalente à parte superior do plano  $H = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(z) > 0 \right\}$ , é suficiente encontrar uma aplicação de recobrimento de  $H$  sobre  $M$ . Suponha

$$E = \left\{ z : 0 < \text{Re}(z) < 1, \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Então pelo Teorema da aplicação de Riemann (veja [1], página 229) existe uma aplicação  $\psi$  de  $E$  para  $H$  fixando  $0, 1, \infty$ . Denote  $E^*$  a reflexão de  $E$  sobre o círculo  $\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ . Pelo princípio de reflexão de Schwarz, extendemos  $\psi$  para uma aplicação conforme de  $E \cup E^*$  para  $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0] \cup [1, \infty)$ . Estendendo  $\psi$  a todos  $\{0 < \text{Re}(z) < 1, \text{Im}(z) > 0\}$  tomando os valores em  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$ . Por reflexão das linhas verticais  $\{\text{Re}(z) = n\}$  para  $n$  inteiro, estendemos  $\psi$  para todo  $H$ . Por construção temos que  $\psi$  é uma aplicação cobertura de  $H$  sobre  $M$ .  $\square$

De maneira geral, a verificação da normalidade de uma família é feita com o Teorema de Montel.

**Teorema 1.32. (Teorema de Montel)** *Seja  $U$  um domínio em  $\widehat{\mathbb{C}}$  e  $\mathcal{F}$  uma família de aplicações de  $U$  para  $\widehat{\mathbb{C}}$  que omite três diferentes valores. Isto é, existem valores distintos  $a, b, c$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $f(U) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$  para toda  $f$  em  $\mathcal{F}$ . Então, a família  $\mathcal{F}$  é normal.*

*Demonstração.* Vamos assumir que  $U$  é um disco. Por composição com uma transformação de Möbius, assumimos que as funções  $f \in \mathcal{F}$  não assumem os valores  $0, 1, \infty$ . Seja  $S = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$ , então pelo lema anterior, existe uma aplicação de recobrimento  $\psi : D \rightarrow S$ . Suponha  $\tilde{f} : U \rightarrow D$  um levantamento para  $f$  em  $\mathcal{F}$ , tal que  $\psi \circ \tilde{f} = f$ . Então pelo teorema 1.29 o conjunto  $\{\tilde{f}; f \in \mathcal{F}\}$  é uma família normal. Portanto,  $\mathcal{F}$  é normal.  $\square$

Com a noção de normalidade aplicada às iterações de uma função analítica, podemos finalmente definir de maneira geral os conjuntos de Fatou e de Julia.

**Definição 1.33.** *Seja  $\widehat{\mathbb{C}}$  a esfera de Riemann, que é uma superfície de Riemann compacta, e  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uma aplicação holomorfa e  $f^n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  a  $n$ -ésima iterada. O domínio de normalidade da coleção de iteradas  $f^n$  é chamado Conjunto de Fatou para  $f$ . O seu complementar é chamado de Conjunto de Julia.*

Usaremos  $J(f)$  para conjunto de Julia e  $F(f)$  para o conjunto de Fatou de uma função  $f$ . Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1.34.** *Seja a função  $f(z) = z^2$ . Vejamos que  $J(f)$  é o  $S^1$ . De fato, primeiramente observe que a  $k$ -ésima iterada da função  $f$  é dada por  $f^k(z) = z^{2^k}$ . Assim, temos três casos para analisar:*

- i) Se  $|z| < 1$  temos que  $|f^k(z)| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo, todo o disco aberto está contido no conjunto de Fatou de  $f$ , pois, neste caso as iterações sucessivas em qualquer subconjunto compacto convergem uniformemente para zero.
- ii) Se  $|z| > 1$  temos que  $|f^k(z)| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo, todo o exterior do disco fechado está contido no conjunto de Fatou  $f$ , pois, neste caso as iterações de  $f$  convergem para a função contante  $z \mapsto \infty$ .
- i) Se  $|z| = 1$  temos que  $|f^k(z)| = 1$  para todo  $k$ . Logo, se  $z$  pertence ao círculo unitário então para qualquer vizinhança desse ponto teríamos pontos em que as iteradas de  $f$  por um lado convergiriam para  $0$  e por outro lado convergiriam para  $\infty$ . Portanto a função  $f$  é descontínua e conseqüentemente conjunto de Julia de  $f$  é  $S^1$ .



Figura 1.1: Conjunto de Julia da função  $f(z) = z^2$  é  $S^1$ .

**Exemplo 1.35.** Seja a função polinomial  $f(z) = z^2 + i$ . A Figura 1.2 é um dentrito (isto é, por definição é um conjunto compacto, conexo e não contém um curva fechada simples) e representa o conjunto de Julia da função  $f$ .

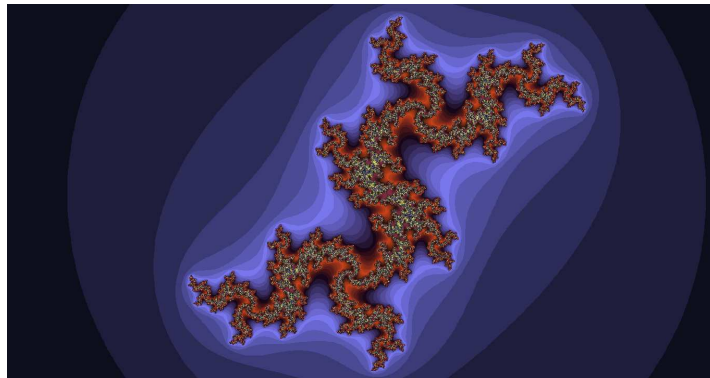


Figura 1.2: Conjunto de Julia de  $f(z) = z^2 + i$  é um dentrito.

**Exemplo 1.36.** Considere  $f(z) = z^2 - 0.75 + 0.17i$ , então a Figura 1.3 representa o conjunto de Julia de  $f$ .

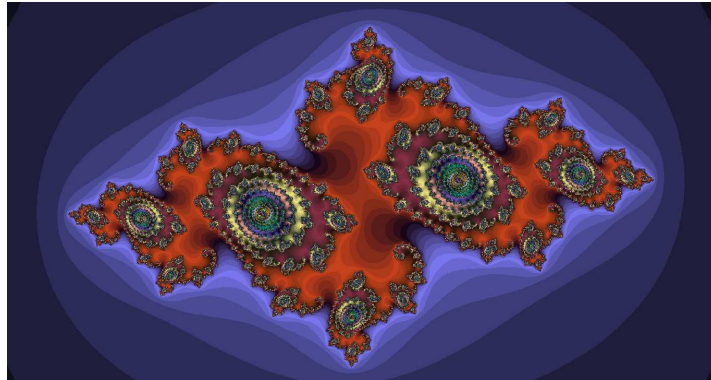


Figura 1.3: Conjunto de Julia de  $f(z) = z^2 - 0.75 + 0.17i$

**Definição 1.37.** *Seja  $P : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  um polinômio complexo mônico de grau  $d \geq 2$ . O Conjunto de Julia Cheio de  $P$  é definido por*

$$K(P) = \{z : P^n(z) \not\rightarrow \infty\}$$

**Observação 1.38.** *Com a definição de conjunto de Julia Cheio e com a definição do conjunto de Julia, observamos que o conjunto de Julia é o bordo topológico do conjunto de Julia Cheio.*

**Exemplo 1.39.** *Para o polinômio  $P_0(z) = z^d$  o conjunto de Julia Cheio  $K(P_0)$  é o disco unitário fechado, e o conjunto de Julia  $J(P_0)$  é o círculo unitário.*

*De fato, como  $P_0(z) = z^d$ , então  $P_0^n(z) = z^{dn}$ . Assim  $P_0^n(z)$  converge para 0 em  $\{|z| < 1\}$  e converge para  $\infty$  em  $\{|z| > 1\}$ , portanto o Conjunto de Julia Cheio é o conjunto  $\{z : |z| \leq 1\}$ , e o conjunto de Julia é o círculo unitário  $\{|z| = 1\}$ .*

A seguir exibimos uma sequência de propriedades relacionadas aos conjuntos de Julia e Fatou. Para tanto, nos fundamentamos em [17].

**Teorema 1.40. (Lema da Invariância)** *O conjunto de Julia  $J(f)$  de uma aplicação holomorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é completamente invariante sobre  $f$ . Isto é,  $z$  pertence a  $J(f)$  se, e somente se,  $f(z)$  pertence a  $J(f)$ . Da mesma forma, ocorre para o conjunto de Fatou.*

*Demonstração.* Uma afirmação equivalente é que o conjunto de Fatou é totalmente invariante. De fato, primeiramente note que  $f^{-1}(F(f)) \subseteq F(f)$ , pois  $f$  é holomorfa e  $F(f)$  é aberto. Agora suponha que  $z_0 \in F(f)$ , e que uma subsequência  $f^{n_j+1} = f^{n_j} \circ f$  converge uniformemente em uma vizinhança de  $z_0$ . Como  $f$  é analítica, ela aplica uma vizinhança de  $z_0$  em uma vizinhança de  $f(z_0)$ . E além disso,  $f^{n_j}$  converge uniformemente em uma vizinhança de  $f(z_0)$ , pois  $z_0 \in F(f)$ . Segue que  $f(z_0) \in F(f)$ , e daí  $f(F) \subseteq F$ , portanto  $F$  é completamente invariante. Como  $\widehat{\mathbb{C}} = F(f) \dot{\cup} J(f)$  tem-se que  $J(f)$  também é completamente invariante.  $\square$

**Lema 1.41. (Lema da Iteração)** *Seja  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uma aplicação holomorfa. Para qualquer  $k > 0$ , o conjunto de Julia  $J(f^k)$  da  $k$ -ésima iterada coincide com o conjunto de Julia  $J(f)$ .*

*Demonstração.* O conjunto de Julia de  $f$  coincide com o conjunto de Julia de  $f^k$ , pois se  $f^k$  é normal sobre um conjunto aberto  $U$  então  $f^{nk}$  também é normal sobre  $U$ . Por outro lado se  $f^{nk}$  é normal sobre  $U$  então  $f^k$  também é normal sobre  $U$ , e daí segue o resultado.  $\square$

**Lema 1.42.** *Cada órbita periódica atratora está contida no Conjunto de Fatou  $F(f)$ . De fato, toda bacia de atração  $\mathcal{A}$  para uma órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou. Além disso, cada órbita periódica repulsora está contida no conjunto de Julia.*

*Demonstração.* Primeiro considere um ponto fixo  $z_0$  com multiplicador  $\lambda$ . Se  $|\lambda| > 1$ , então nenhuma sequência de iteradas de  $f$  pode convergir uniformemente próximo de  $z_0$ . Como a primeira derivada de  $f^n$  em  $z_0$  é  $\lambda^n$ , temos que  $f$  tende ao infinito quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $|\lambda| < 1$  e escolhendo  $c$  tal que  $|\lambda| < c < 1$  temos pela expansão de Taylor que

$$|f(z) - f(z_0)| < c|z - z_0|,$$

para  $z$  suficientemente próximo de  $z_0$ . Desta forma as sucessivas iteradas de  $f$  restritas a uma vizinhança de  $z_0$  convergem uniformemente para a função constante  $z \rightarrow z_0$ . Portanto como um ponto periódico de  $f$  é um ponto fixo de alguma iteração  $f^n$  segue o resultado.  $\square$

**Corolário 1.43.** *As órbitas periódicas repulsoras são densas no Conjunto de Julia.*

*Demonstração.* Vale lembrar que o conjunto de Julia  $J(f)$  não possui pontos isolados. Assim podemos excluir um quantos pontos de  $J(f)$  quisermos, sem afetar o argumento. Seja  $z_0$  um ponto qualquer de  $J(f)$  que não seja ponto fixo nem valor crítico. Por outras palavras assumimos que existem  $d$  pré-imagens  $z_1, z_2, \dots, z_d$  que são distintas umas das outras e de  $z_0$ , onde  $d \geq 2$  é o grau de  $f$ . Pelo Teorema da Função Inversa, podemos encontrar  $d$  funções holomorfas  $z \rightarrow \phi_j(z)$  que são definidas em alguma vizinhança  $N$  de  $z_0$ , e que satisfazem  $f(\phi_j(z)) = z$ , em que  $\phi_j(z_0) = z_j$ . Para algum  $n > 0$  e para algum  $z \in N$  a função  $f^n(z)$  deve assumir um dos três valores  $z, \phi_1(z)$  ou  $\phi_2(z)$ . Caso contrário a família das funções holomorfas

$$g_n(z) = \frac{(f^n(z) - \phi_1(z))(z - \phi_2(z))}{(f^n(z) - \phi_2(z))(z - \phi_1(z))}$$

em  $N$  evitaria os valores 0, 1 e  $\infty$ , e assim seria uma família normal. Logo  $\{f^n|N\}$  também seria uma família normal, contradizendo a hipótese de que  $N$  intersepta o conjunto de Julia.  $\square$

Antes de apresentarmos o próximo teorema precisamos da definição de grande órbita

**Definição 1.44.** *Chamamos grande órbita de um ponto  $z$  sob  $f : S \rightarrow S$ , ao conjunto  $GO(z, f)$  consistindo de todos os pontos  $z' \in S$  cuja órbita em algum momento intercepta a órbita de  $z$ . Assim  $z$  e  $z'$  tem a mesma grande órbita se, e somente se,  $f^m(z) = f^n(z')$  para alguma escolha de  $m \geq 0$  e  $n \geq 0$ . Um ponto  $z \in S$  será chamado grande órbita finita ou excepcional sobre  $f$  se sua grande órbita  $GO(z, f) \subset S$  é um conjunto finito.*

**Definição 1.45.** *O conjunto dos pontos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  que tem grande órbita finita será denotado por  $\varepsilon(f)$*

**Teorema 1.46. (Transitividade)** *Seja  $z_1$  um ponto arbitrário do conjunto de Julia  $J \subset \widehat{\mathbb{C}}$  e seja  $N$  uma vizinhança arbitrária de  $z_1$ . Então a união  $U$  de imagens futuras  $f^n(N)$  contém todo o conjunto de Julia, e contém todos os pontos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ ; à exceção de, no máximo dois pontos*

*Demonstração.* Primeiramente note que o conjunto complementar  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$  pode conter no máximo dois pontos, pois se  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$  contém mais de dois pontos, usando que  $f(U) \subset U$ , obtemos pelo Teorema de Montel 1.32 que  $U$  deve estar contido no conjunto de Fatou, que é impossível, pois  $z_1 \in U \cap J$ . Novamente usando que  $f(U) \subset U$ , temos que alguma pré-imagem de um ponto  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$  deve pertencer ao conjunto finito  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ . Seguindo com este argumento, que alguma pré-imagem de iterada  $z$  é periódica, concluímos que  $z$  é ele mesmo periódico e com grande órbita finita. Assim o conjunto  $\varepsilon(f)$  de grande órbita finita é disjunta de  $J$ , segue que  $J \subset U$ . Finalmente, se  $N$  é pequeno o suficiente então  $N \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$ , segue que  $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$ .  $\square$

**Lema 1.47.** *Se  $f$  é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então o Conjunto de Julia  $J(f)$  é não vazio.*

*Demonstração.* Suponha que  $J(f) = \emptyset$ , então  $f^n$  é uma família normal sobre todo  $\widehat{\mathbb{C}}$ , e então existe uma subsequência  $\{n_j\}$  tal que  $f^{n_j}(z) \rightarrow g(z)$  para alguma função analítica  $g$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  para  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se  $g$  é constante então a imagem de  $f^{n_j}$  está contida em uma pequena vizinhança de um valor constante, o que é impossível, pois  $f^n$  converge em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se  $g$  é não constante então  $f^{n_j}$  tem o mesmo número de zeros de  $g$ , o que é impossível já que  $f^n$  tem grau  $d^n$ .  $\square$

**Corolário 1.48.** *Se o Conjunto de Julia contém um ponto interior, então ele deve ser igual a toda a esfera de Riemann.*

*Demonstração.* Se  $J(f)$  tem um ponto interior  $z_1$ , então escolhendo uma vizinhança  $N \subset J(f)$  de  $z_1$  a união  $U \subset J(f)$  de imagens futuras de  $N$  é densa em  $J(f)$ , portanto  $\overline{U} = \widehat{\mathbb{C}}$ , e como  $J(f)$  é fechado segue que  $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**Corolário 1.49.** *Se  $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{C}}$  é a bacia de atração de alguma órbita periódica atratora, então o bordo topológico  $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$  é igual a todo o Conjunto de Julia. Cada componente do Conjunto de Fatou  $F$  ou coincide com alguma componente conexa da bacia  $\mathcal{A}$  ou é disjunta de  $\mathcal{A}$ .*

*Demonstração.* Se  $N$  é uma vizinhança de um ponto do conjunto de Julia, então pelo Teorema da Transitividade 1.46  $f^n(N)$  intercepta  $\mathcal{A}$ , e daí o próprio  $N$  intercepta  $\mathcal{A}$ , e assim temos que  $J(f) \subset \overline{\mathcal{A}}$ . Mas  $J(f)$  é disjunta de  $\mathcal{A}$  então  $J(f) \subset \partial\mathcal{A}$ . Por outro lado, se  $N$  é uma vizinhança de um ponto de  $\partial\mathcal{A}$  então alguma iterada  $f^n|_N$  deve ter uma descontinuidade entre  $\mathcal{A}$  e  $\partial\mathcal{A}$ , e assim  $\partial\mathcal{A} \subset J(f)$ . Finalmente, note que alguma componente conexa do conjunto de Fatou intercepta  $\mathcal{A}$ , uma vez que não pode interceptar o bordo de  $\mathcal{A}$ , deve coincidir com alguma componente de  $\mathcal{A}$ . Portanto segue o resultado.  $\square$

**Corolário 1.50.** *Se  $z_0$  é um algum ponto do conjunto de Julia  $J = J(f)$ , então o conjunto*

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}}; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(z_0)$$

*é denso em  $J(f)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente note que  $z_0 \notin \varepsilon(f)$ , pois  $z_0 \in J(f)$ . Pelo teorema 1.3 temos que, se  $z_1 \in J(f)$  então ele pode ser aproximado por fechados arbitrários que contém  $z$  que pertence ao conjunto formado pelas órbitas passadas de  $z_0$ .  $\square$

**Corolário 1.51.** *Se  $f$  é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então  $J(f)$  não tem pontos isolados.*

*Demonstração.* Seja  $z_0 \in J(f)$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $z_0$ . Assumiremos que  $z_0$  não é periódico e escolhemos  $z_1$  com  $f(z_1) = z_0$ , então  $f^n(z_0) \neq z_1$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Desde que  $z_1 \in J(f)$ , as iteradas passadas de  $z_1$  são densas em  $J$ , então existe um  $\xi \in U$  com  $f^m(\xi) = z_1$ , assim  $\xi \in J(f) \cap U$  e  $\xi \neq z_0$ , logo  $z_0$  não é isolado. Agora suponha  $f^n(z_0) = z_0$  para algum  $n$  minimal. Se  $z_0$  é a única solução de  $f^n(z_0) = z_0$  então  $z_0$  deveria ser um ponto fixo superatrator de  $f^n$  contradizendo que  $z_0 \in J(f)$ . Portanto existe  $z_1 \neq z_0$  com  $f^n(z_1) = z_0$ , além disso  $f^j(z_0) \neq z_1$  para  $0 \leq j \leq n$ , pois caso contrário isto asseguraria que  $0 \leq j \leq n$  e daí  $f^j(z_0) = f^{n+j}(z_0) = f^n(z_1) = z_0$  contradizendo a minimalidade de  $n$ . Assim como anteriormente,  $z_1$  dever ter uma pré-imagem em  $U \cap J(f)$  que não pode ser  $z_0$ .  $\square$

**Corolário 1.52.** *Para toda aplicação racional de grau 2 ou mais, o Conjunto de Julia  $J(f)$  ou é conexo ou tem uma quantidade não enumerável de componentes conexas.*

**Teorema 1.53.** *Para uma escolha qualquer de um ponto  $z \in J(f)$ , a órbita futura*

$$\{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

*é densa em  $J(f)$ .*

*Demonstração.* Para cada  $j > 0$  podemos cobrir  $J(f)$  por um número finito de conjuntos abertos  $N_{j_k}$  de diâmetro menor do que  $\frac{1}{j}$  usando a métrica esférica. Para cada  $N_{j_k}$  seja  $U_{j_k}$  a união das pré-imagens de iteradas de  $f^{-n}(N_{j_k})$ . Segue do corolário 1.3 que o fechado  $\overline{U_{j_k} \cap J(f)}$  é igual a todo o conjunto de Julia, em outras palavras,  $U_{j_k} \cap J(f)$  é um subconjunto denso do conjunto de Julia. Agora se  $z$  pertence a interseção desses conjuntos, então a órbita de  $z$  intercepta cada  $N_{j_k}$  e por isso é denso em  $J(f)$ .  $\square$

**Teorema 1.54.** *Seja  $f$  uma aplicação racional de grau maior ou igual 2, e seja  $E$  um subconjunto compacto da esfera de Riemann com a propriedade que para todo  $z \in F(f)$ , a sequência  $\{f^n(z) : n \geq 1\}$  não acumula em nenhum ponto de  $E$ . Então dado algum conjunto aberto  $U$  que contém  $J(f)$  temos que  $f^{-n}(E) \subset U$  para  $n$  suficientemente grande.*

*Demonstração.* Suponhamos que a conclusão seja falsa, ou seja, existe alguma vizinhança aberta  $U$  de  $J(f)$ , tal que para  $n$  em alguma sequência  $\{n_1, n_2, \dots\}$  os pontos  $z_n \in f^{-n}(E)$  mas não pertence a  $U$ . Sem perda de generalidade, supomos que  $z_n \rightarrow w$ , como  $U$  é

aberto e  $w \notin U$ , temos que  $w \in F$  pois  $J(f) \subset U$ . Agora seja  $\epsilon > 0$  positivo, existe  $\delta > 0$  tal que se  $|z_n - w| < \delta$  implica que  $|f^n(z_n) - f^n(w)| < \delta$  e como  $f^n(z_n) \in E$ , assim mostramos que  $f^n(w)$  se acumula em  $E$  contradizendo a hipótese.  $\square$

## Capítulo 2

# A Tricotomia de Escape para a família $F_{\lambda,n}$

Neste capítulo o objetivo é descrever o comportamento dinâmico da família de funções racionais definidas na esfera de Riemann, dada por

$$F_{\lambda,n}(z) = z^n + \frac{\lambda}{z^n}$$

com  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , restrito ao seu conjunto de Julia. Em especial, apresentamos uma classificação através do Teorema da Tricotomia de Escape [12] para os conjuntos de Julia que surgem quando as órbitas dos pontos críticos da função  $F_{\lambda,n}$  escapam para o infinito. Além disso, exibimos estimativas para estes conjuntos. Para tanto, utilizamos as referências [3] e [9].

### 2.1 Aspectos da família de funções racionais $F_{\lambda,n}$

Consideremos  $F_{\lambda,n}$  uma família de funções racionais, definida na esfera de Riemann,  $\widehat{\mathbb{C}}$ , dada por

$$F_{\lambda,n}(z) = z^n + \frac{\lambda}{z^n}, \quad (2.1)$$

com  $\lambda$  um parâmetro complexo não nulo e  $n$  um inteiro positivo, tal que  $n \geq 2$ . Nesta seção, nosso objetivo é apresentar algumas características dessa família e definir algumas notações empregadas no decorrer deste trabalho.

Inicialmente é possível perceber que o infinito,  $\infty$ , é um ponto fixo superatrator para a função  $F_{\lambda,n}$ , uma vez que  $F_{\lambda,n}(\infty) = \infty$  e  $F'_{\lambda,n}(\infty) = 0$ . Denotamos por  $B_{\lambda,n}$  a bacia imediata de atração do infinito. Além disso, sendo a origem uma singularidade de  $F_{\lambda,n}$  e  $\lim_{z \rightarrow 0} |F_{\lambda,n}(z)| = \infty$  quando  $z \rightarrow 0$ , então 0 é um pólo de ordem  $n$  para a função  $F_{\lambda,n}$ , e assim, existe uma vizinhança do 0 que é levada para  $B_{\lambda,n}$  por  $F_{\lambda,n}$ . Entretanto, ou esta vizinhança está contida em  $B_{\lambda,n}$  ou então é uma pré imagem disjunta de  $B_{\lambda,n}$ . No último caso, a denotamos por  $T_{\lambda,n}$  e a chamamos de "alçapão", dado que, qualquer órbita que possivelmente entre em  $B_{\lambda,n}$  necessariamente passa por  $T_{\lambda,n}$ .

Em dinâmica complexa os pontos críticos desempenham um papel fundamental no comportamento dinâmico. Para a função (2.1), cujo grau é  $2n$ , temos

$$F'_{\lambda,n}(z) = \frac{n(z^{2n} - \lambda)}{z^{n+1}}.$$

Dessa maneira, apesar do grau existem essencialmente apenas três órbitas críticas para essa função, isto é, o conjunto de pontos críticos da função  $F_{\lambda,n}$  consiste do  $\infty$  cuja órbita é fixa, sua pré imagem 0 cuja órbita é pré-fixa e de  $2n$  pontos críticos dados por

$$c_{\lambda,n} = \sqrt[2n]{\lambda},$$

os quais denominamos por pontos críticos livres de  $F_{\lambda,n}$  e são  $2n$ -ésimas raízes de  $\lambda$ . Dado que,

$$\pm F_{\lambda,n}(c_{\lambda,n}) = \pm \left( \left( \sqrt[2n]{\lambda} \right)^n + \frac{\lambda}{\left( \sqrt[2n]{\lambda} \right)^n} \right) = \pm 2\sqrt{\lambda}.$$

temos que a função  $F_{\lambda,n}$  possui apenas dois valores críticos, os quais denotamos por

$$\pm v_{\lambda,n} = \pm 2\sqrt{\lambda}.$$

Por outro lado, note que

$$F_{\lambda,n}(-z) = (-1)^n F_{\lambda,n}(z).$$

Desse modo, se  $n$  for par temos  $F_{\lambda,n}(-v_{\lambda,n}) = F_{\lambda,n}(v_{\lambda,n})$  e então cada uma das órbitas dos valores críticos aterrissa no mesmo ponto após duas iterações. Da mesma forma, se  $n$  for ímpar  $F_{\lambda,n}(-v_{\lambda,n}) = -F_{\lambda,n}(v_{\lambda,n})$ , então, as órbitas de  $\pm v_{\lambda,n}$  são simétricas pela conjugação  $z \mapsto -z$ . Dessa maneira o comportamento dinâmico dos dois valores críticos é o mesmo, ou seja, existe apenas uma órbita crítica livre para  $F_{\lambda,n}$ .

Por fim, denotamos por  $J(F_{\lambda,n})$  o conjunto de Julia da função  $F_{\lambda,n}$ , o qual é o objeto de principal interesse deste trabalho.

## 2.2 A Tricotomia de Escape

A intenção nesta seção é compreender o que acontece com o conjunto de Julia da função  $F_{\lambda,n}$  quando sua órbita crítica livre tende para o infinito. Para isso, apresentamos o Teorema da Tricotomia de Escape, o qual determina três tipos diferentes de conjuntos de Julia que ocorre nesta situação. Uma primeira possibilidade de escape acontece quando todos os valores críticos estão em  $B_{\lambda,n}$  a segunda quando os valores críticos estão em  $T_{\lambda,n}$  em vez de  $B_{\lambda,n}$  e o terceiro cenário surge quando alguma iteração mais alta dos valores críticos encontra-se em  $T_{\lambda,n}$ . Utilizamos [12] como referência.

**Teorema 2.1. (A Tricotomia de Escape)** *Seja a família de funções  $F_{\lambda,n} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  dada por:*

$$F_{\lambda,n}(z) = z^n + \frac{\lambda}{z^n},$$

em que  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se  $F_{\lambda,n}^k(v_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  então verifica-se uma das três possibilidades:

- i) Se o valor crítico  $v_{\lambda,n} \in B_{\lambda,n}$  então  $J(F_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor;
- ii) Se o valor crítico  $v_{\lambda,n} \notin B_{\lambda,n}$  e  $F_{\lambda,n}(v_{\lambda,n}) \in B_{\lambda,n}$  então  $J(F_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor de quasi-círculos;
- iii) Se  $F_{\lambda,n}^{k_0}(v_{\lambda,n}) \in B_{\lambda,n}$  e  $F_{\lambda,n}^{k_0+1}(v_{\lambda,n}) \in B_{\lambda,n}$  para algum  $k_0 \geq 1$  então  $J(F_{\lambda,n})$  é um conjunto de curvas Sierpinski.

*Demonstração.* Veja [12]. □

Temos que  $F_{\lambda,n}$  é uma função hiperbólica, pois, seus valores críticos estão convergindo para  $B_{\lambda,n}$ . Assim, denominamos os três conjuntos de Julia descritos pelo Teorema da Tricotomia de Escape por conjuntos de Julia hiperbólicos de  $F_{\lambda,n}$ .

A seguir vejamos na Figura 2.1 o conjunto de Julia de Cantor da função  $F_{\lambda,n}$ , o qual denominamos por Cantor Locus.

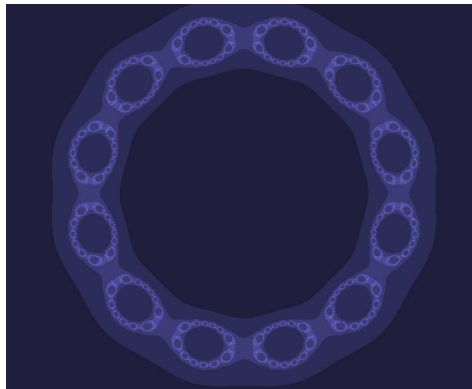


Figura 2.1: Conjunto de Julia de  $F_{\lambda,n}$  do tipo Cantor com  $\lambda = -0.26$  e  $n = 6$ .

O conjunto de Julia de Cantor de quasi-círculos é um conjunto de Cantor de curvas fechadas simples. Essa região foi primeiramente observada por MacMullen [15], o qual mostrou que esta situação não ocorre quando  $n = 2$ , por este motivo tal região é denominada por domínio de MacMullen. Em acréscimo a isso, Devaney mostra em [9] que para  $n \geq 3$  a função  $F_{\lambda,n}$  admite um único domínio de MacMullen e que esta região é simplesmente conexa e limitada por uma curva fechada simples.

Vejamos a Figura 2.2, a qual exibe o conjunto de Julia de Cantor de quasi-círculos da função  $F_{\lambda,n}$  correspondendo ao parâmetro  $\lambda = 0.03$  e  $n = 6$ .

O fractal carpet Sierpinski é um dos exemplos mais bem conhecidos de uma curva Sierpinski, o qual é caracterizado por um conjunto planar universal no sentido de que ele mantém uma cópia homeomorfa de qualquer subconjunto compacto, conexo e unidimensional do plano.

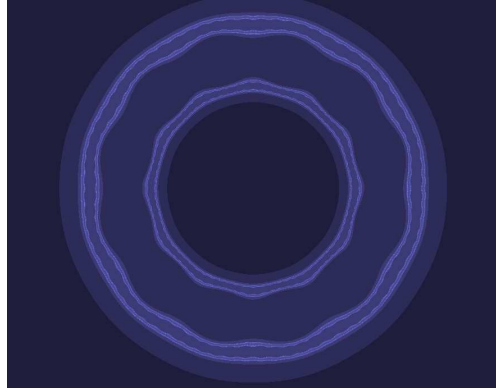


Figura 2.2: Conjunto de Julia de Cantor de quasi-círculos da função  $F_{\lambda,n}$  com  $\lambda = 0.03$  e  $n = 6$ .

A construção do carpet Sierpinski se inicia a partir de um quadrado qualquer e em seguida particionamos este quadrado em nove partes iguais onde a parte central é removida. Logo após, o sub-quadrado do meio de cada um dos oito quadrados menores restantes é removido, deixando 64 subquadrados menores fechados. Este processo é repetido infinitamente para produzir o tapete Sierpinski, veja Figura 2.4.

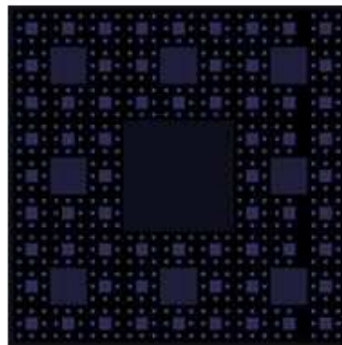


Figura 2.3: O fractal Tapete Sierpinski.



Figura 2.4: Processo da construção do Tapete Sierpinski.

O conjunto de Julia de curvas Sierpinski estabelecido no Teorema da Tricotomia de Escape 2.1 é um conjunto muito interessante do ponto de vista dinâmico e topológico. O primeiro exemplo de uma função racional cujo conjunto de Julia é uma curva Sierpinski é devido a J. Milnor e L. Tan, veja [16]. Vejamos na Figura 2.5 um exemplo deste conjunto de Julia, em que  $\lambda = -0.18$  e  $n = 6$ .

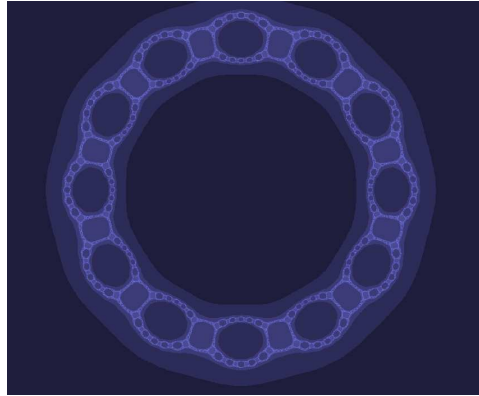


Figura 2.5: Conjunto de Julia de curvas Sierpinski da função  $F_{\lambda,n}$  com  $\lambda = -0.18$  e  $n = 6$ .

O teorema a seguir exibe estimativas para determinar quando o conjunto de Julia da função  $F_{\lambda,n}$ ,  $J(F_{\lambda,n})$ , é dito Cantor e Cantor de quasi-círculos.

**Teorema 2.2.** *Seja a função racional  $F_{\lambda,n} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , dada por*

$$F_{\lambda,n}(z) = \left( z^n + \frac{\lambda}{z^n} \right)$$

onde  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

i) *Se  $|\lambda| \geq 1$ , então  $F_{\lambda,n}^k(v_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $v_{\lambda,n} \in B_{\lambda,n}$  (Cantor Locus).*

ii) *Se  $n \geq 3$  e  $|\lambda| < 4^{-\frac{2n}{n-2}}$ , então  $F_{\lambda,n}^k(v_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $v_{\lambda,n} \notin B_{\lambda,n}$ ,  $F_{\lambda,n}(v_{\lambda,n}) \in B_{\lambda,n}$  (Domínio de McMullen).*

*Demonstração.* Veja [9], páginas 8 e 16. □

A partir de agora temos como objetivo exibir um melhoramento das estimativas apresentadas no Teorema 2.2. Para isso, primeiramente vamos apresentar a família de funções racionais  $G_{\lambda,n}$  definida na esfera de Riemann, dada por

$$G_{\lambda,n}(z) = \left( \sqrt[2n]{\lambda} \right)^{n-1} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad (2.2)$$

com,  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se considerarmos o homeomorfismo  $\varphi_{\lambda,n} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , definido por

$$\varphi_{\lambda,n}(z) = \frac{z}{\sqrt[2n]{\lambda}},$$

em que,  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , podemos facilmente verificar que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{F_{\lambda,n}} & \widehat{\mathbb{C}} \\ \varphi_{\lambda,n} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\lambda,n} \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{G_{\lambda,n}} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

isto é,  $G_{\lambda,n} \circ \varphi_{\lambda,n}(z) = \varphi_{\lambda,n} \circ F_{\lambda,n}(z)$ . Portanto, as dinâmicas das funções racionais  $F_{\lambda,n}$  e  $G_{\lambda,n}$  são topologicamente conjugadas pelo homeomorfismo  $\varphi_{\lambda,n}$ .

Vale ressaltar que a que a função  $\varphi_{\lambda,n}$  é uma função bi-Lipschitz, isto é, é um homeomorfismo Lipschitz sob sua imagem, cuja inversa  $\varphi_{\lambda,n}^{-1}$  também é função Lipschitz (ver [13] página 8). Pelo Corolário 2.4 em [13] página 32, temos que a dimensão e Hausdorff é invariante sob transformações bi-Lipschitz. Dessa maneira, os resultados envolvendo a função  $G_{\lambda,n}$  são equivalentemente válidos para a função  $F_{\lambda,n}$ . Por isso, de agora em diante todos os resultados em relação a função  $F_{\lambda,n}$  serão provados para a função  $G_{\lambda,n}$ .

Da mesma forma como para a família  $F_{\lambda,n}$ , o  $\infty$  é um ponto fixo superatrator para a família  $G_{\lambda,n}$  e denominamos  $\widetilde{B}_{\lambda,n}$  a bacia imediata de atração do  $\infty$ . Consideremos  $\widetilde{T}_{\lambda,n}$  a componente de sua pré imagem contendo o 0 e  $J(G_{\lambda,n})$  o conjunto de Julia de  $G_{\lambda,n}$ . Além disso, a função (2.2) possui  $2n$  pontos críticos livres os quais são  $2n$ -ésimas raízes da unidade e as denotamos por

$$u_{\lambda,n} = \sqrt[2n]{1}.$$

Como resultado disso, a função (2.2) dispõe de dois valores críticos

$$\pm w_{\lambda,n} = G_{\lambda,n}(u_{\lambda,n}) = \pm 2 \left( \sqrt[2n]{\lambda} \right)^{n-1}. \quad (2.3)$$

Contudo, como para  $k \geq 0$  a função (2.2) satisfaz a simetria abaixo

$$G_{\lambda,n}^k(w_{\lambda,n}) = (-1)^{kn} G_{\lambda,n}^k(-w_{\lambda,n}), \quad (2.4)$$

então, ambos os valores críticos  $\pm w_{\lambda,n}$  possuem o mesmo comportamento dinâmico. Além disso, para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  temos as seguintes simetrias para a função  $G_{\lambda,n}$

$$G_{\lambda,n} \left( \frac{1}{z} \right) = G_{\lambda,n}(z) \quad \text{e} \quad G_{\lambda,n}(-z) = (-1)^n G_{\lambda,n}(-z). \quad (2.5)$$

Vamos determinar a seguir a constante  $r_{\lambda,n}$  a qual é de extrema importância para a construção dos resultados apresentados neste trabalho. Em vista disso, a definição abaixo nos permite exibir os Lemas 2.4 e 2.5 que determinam uma “localização” para os conjuntos  $\widetilde{B}_{\lambda,n}$ ,  $\widetilde{T}_{\lambda,n}$  e  $J(G_{\lambda,n})$ .

**Definição 2.3.** *Seja  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , coloque*

$$r_{\lambda,n} = \max \left( \sqrt[2n]{2}, \frac{\sqrt[n-1]{2}}{\sqrt[2n]{|\lambda|}} \right) = \begin{cases} \sqrt[2n]{2}, & \text{se } |\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}} \\ \frac{\sqrt[n-1]{2}}{\sqrt[2n]{|\lambda|}}, & \text{se } |\lambda| < 2^{\frac{n+1}{n-1}}. \end{cases}$$

Nossa intenção a seguir é demonstrar o Teorema 2.6, antes disso, exibimos dois lemas que nos auxiliarão nesse objetivo.

**Lema 2.4.** *Seja a função racional  $G_{\lambda,n}$  onde  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Então,*

$$\tilde{B}_{\lambda,n} \supset \{z \in \mathbb{C}; |z| > r_{\lambda,n}\} \quad e \quad \tilde{T}_{\lambda,n} \supset \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < \frac{1}{r_{\lambda,n}} \right\}.$$

*Em particular,*

$$J(G_{\lambda,n}) \subset \left\{ z \in \mathbb{C}; \frac{1}{r_{\lambda,n}} \leq |z| \leq r_{\lambda,n} \right\},$$

*com  $r_{\lambda,n}$  satisfazendo a Definição 2.3.*

*Demonstração.* Afiramos que  $\tilde{B}_{\lambda,n} \supset \{z \in \mathbb{C}; |z| < r_{\lambda,n}\}$ , então, verificamos a seguir para quais valores de  $z \in \mathbb{C}$  temos  $|G_{\lambda,n}(z)| > |z|$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} |G_{\lambda,n}(z)| &= \left| \lambda^{\frac{n-1}{2n}} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right) \right| \\ &= |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \left| z^n - \left( -\frac{1}{z^n} \right) \right| \\ &\geq |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \left| |z|^n - \left( -\frac{1}{|z|^n} \right) \right| \\ &\geq |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \left( \frac{|z|^{2n} - 1}{|z|^n} \right). \end{aligned}$$

Dessa maneira, ter  $|G_{\lambda,n}(z)| > |z|$  é o mesmo que verificar quais valores de  $z \in \mathbb{C}$  satisfazem

$$|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \left( \frac{|z|^{2n} - 1}{|z|^n} \right) > |z|$$

ou equivalentemente,

$$|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} |z|^{2n} - |z|^{n+1} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} > 0. \quad (2.6)$$

Seja  $t = |z| > 0$  e considere

$$g(t) = |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} |t|^{2n} - |t|^{n+1} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Afirmamos que  $g(t) > 0$  para cada  $t > r_{\lambda,n}$ . De fato, se  $|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$  então,  $r_{\lambda,n} = \sqrt[2n]{2}$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
g(r_{\lambda,n}) &= 2|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} - 2^{\frac{n+1}{2n}} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \\
&= |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} - 2^{\frac{n+1}{2n}} \\
&\geq 2^{\frac{n+1}{2n}} - 2^{\frac{n+1}{2n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se  $|\lambda| < 2^{\frac{n+1}{n-1}}$  então  $r_{\lambda,n} = \frac{n-1\sqrt{2}}{2n\sqrt{2}}$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
g(r_{\lambda,n}) &= |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \left( \frac{2^{\frac{2n}{n-1}}}{|\lambda|} \right) - \frac{2^{\frac{n+1}{n-1}}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2n}}} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \\
&= \frac{2^{\frac{2n}{n-1}}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2n}}} - \frac{2^{\frac{n+1}{n-1}}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2n}}} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \\
&= \frac{2^{\frac{2n}{n-1}} - 2^{\frac{n+1}{n-1}}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2n}}} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \\
&= \frac{2^{\frac{n+1}{n-1}} (2^{\frac{n-1}{n-1}} - 1)}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2n}}} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \\
&> \frac{|\lambda|}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2n}}} - |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo,  $g_{\lambda,n}(r_{\lambda,n}) \geq 0$ . Vejamos que  $g'_{\lambda,n}(t) > 0$  para todo  $t > r_{\lambda,n}$ . Antes, observe que se  $t > r_{\lambda,n}$ , temos

$$t > \frac{n-1\sqrt{2}}{2n\sqrt{2}} \implies t^{n-1} > \frac{2}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
g'_{\lambda,n}(t) &= 2n|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} t^{2n-1} - (n+1)t^n \\
&= t^n \left( 2n|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} t^{n-1} - n - 1 \right) \\
&> t^n (4n - 2 - 1) \\
&= t^n (3n - 1) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Em decorrência disso, para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| > r_{\lambda,n}$  temos a equação (2.6) sendo satisfeita. Logo,

$$|G_{\lambda,n}(z)| > |z| \quad \text{se} \quad |z| > r_{\lambda,n}. \quad (2.7)$$

E portanto,  $\tilde{B}_{\lambda,n} \supset \{z \in \mathbb{C}; |z| > r_{\lambda,n}\}$ . Afirmamos que

$$\tilde{T}_{\lambda,n} \supset \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1/r_{\lambda,n}\}.$$

De fato, se  $z \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1/r_{\lambda,n}\}$ , então  $1/|z| \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < r_{\lambda,n}\}$ , conseqüentemente  $z \in \tilde{T}_{\lambda,n}$ , pois,  $1/|z| \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Por fim, a inclusão

$$J(G_{\lambda,n}) \subset \{z \in \mathbb{C}; 1/r_{\lambda,n} \leq |z| \leq r_{\lambda,n}\}$$

é imediata.  $\square$

**Lema 2.5.** *Se  $|G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n})| < 1/r_{\lambda,n}$  para algum  $k_0 \geq 0$ , então  $G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{T}_{\lambda,n}$  e  $G_{\lambda,n}^{k_0+1}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Além disso,  $\tilde{T}_{\lambda,n} \neq \tilde{B}_{\lambda,n}$ .*

*Demonstração.* Suponhamos  $|G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n})| < 1/r_{\lambda,n}$  para algum  $k_0 \geq 0$ . Com efeito, segue pelo Lema 2.4 que  $G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{T}_{\lambda,n}$ , conseqüentemente,  $G_{\lambda,n}^{k_0+1}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ , visto que, toda órbita entrando em  $\tilde{T}_{\lambda,n}$ , logo após segue imediatamente para  $\tilde{B}_{\lambda,n}$ . Assim,

$$G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{T}_{\lambda,n} \text{ e } G_{\lambda,n}^{k_0+1}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}. \quad (2.8)$$

Isto posto, segue que para  $0 \leq j < k_0$

$$\frac{1}{r_{\lambda,n}} < |G_{\lambda,n}^j(w_{\lambda,n})| < r_{\lambda,n}. \quad (2.9)$$

Vejamos agora que  $\tilde{T}_{\lambda,n} \neq \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Para isso, primeiramente observe por (2.8) e (2.9) que o valor crítico  $w_{\lambda,n} \in \tilde{T}_{\lambda,n}$  ou  $w_{\lambda,n} \in \tilde{B}_{\lambda,n}$  ou  $w_{\lambda,n} \in G_{\lambda,n}^{-1}(\tilde{T}_{\lambda,n})$ . Mostraremos que  $w_{\lambda,n} \notin \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Com efeito, considere o disco aberto

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r_{\lambda,n}\} \cup \{\infty\}.$$

Desse modo,  $\tilde{B}_{\lambda,n} \supset U_0$  e à vista disso  $U_0$  é invariante por  $G_{\lambda,n}$ , ou seja,  $G_{\lambda,n}(U_0) \subset U_0$ . Posto isso, definiremos indutivamente uma seqüência de conjuntos

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$$

tais que, para  $j \geq 0$  temos  $U_{j+1}$  sendo uma componente de  $G_{\lambda,n}^{-1}(U_j)$  contendo  $U_j$  e além disso,

$$\tilde{B}_{\lambda,n} = \bigcup_{j=0}^{\infty} U_j.$$

Para mais, por (2.8) e (2.9) a fronteira de  $U_j$ ,  $\partial U_j$ , não contém os valores críticos  $\pm w_{\lambda,n}$  de  $G_{\lambda,n}$  e  $\pm w_{\lambda,n} \notin U_{k_0}$ , pois, caso contrário,  $G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n}) > r_{\lambda,n}$ , o que seria contradição. Assim, suponha para  $j_0 > k_0$  que  $w_{\lambda,n} \in U_{j_0}$ . Visto que a valência de  $G_{\lambda,n}$  no  $\infty$  é  $n$ ,  $v_{G_{\lambda,n}}(\infty) = n$ , então, a deficiência de  $G_{\lambda,n}$  sobre os conjuntos  $U_1, \dots, U_{j_0}$  é dada por

$$\delta_{G_{\lambda,n}}(U_j) = \sum_{z \in U_j} \delta_{G_{\lambda,n}}(\infty) = n - 1.$$

Deste modo, por consequência do Teorema 1.25, temos em particular que o conjunto  $U_{j_0}$  é um disco topológico não contendo o 0 de grau  $n$ . Mediante as características da seqüência dos conjuntos  $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$  descritas acima, temos  $G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n}) \in U_{j_0-k_0}$ . Por

outro lado, note que os pontos

$$z_l = \frac{e^{2\pi li/n}}{G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n})}, \quad l = 1, \dots, n$$

estão contidos em  $U_0$ , pelo fato de  $|G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n})| < 1/r_{\lambda,n}$ . Consequentemente,  $z_l \in U_{j_0-k_0}$ , pois,  $U_0 \subset U_{j_0-k_0}$  e observe ainda que  $z_l \neq G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n})$  para  $l = 1, \dots, n$ . Veja que,

$$G_{\lambda,n}(z_l) = \frac{1}{(G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n}))^n} + (G_{\lambda,n}^{k_0}(w_{\lambda,n}))^n = G_{\lambda,n}^{k_0+1}(w_{\lambda,n}).$$

Então os pontos  $G_{\lambda,n}^{k_0+1}(w_{\lambda,n}) \in U_{j_0-K_0-1}$  tem mais de  $n$  pré imagens em  $U_{j_0-K_0}$  (contando com multiplicidades). Dessa maneira, o grau de  $G_{\lambda,n}$  em  $U_{j_0-K_0}$  e consequentemente o grau de  $U_{j_0}$  é maior que  $n$ . Logo,  $\pm w_{\lambda,n} \notin \cup_{j=0}^{\infty} U_j = \tilde{B}_{\lambda,n}$ . E portanto,  $\tilde{T}_{\lambda,n} \neq \tilde{B}_{\lambda,n}$ .  $\square$

O teorema a seguir apresenta um melhoramento das estimativas exibidas no Teorema 2.2 em torno do parâmetro  $\lambda$  e o inteiro  $n$ . Em acréscimo, apresenta uma estimativa para determinar quando o conjunto de Julia da função  $G_{\lambda,n}$  é dito uma curva Sierpinski.

**Teorema 2.6.** *Seja a família de funções racionais  $G_{\lambda,n} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , dada por*

$$G_{\lambda,n}(z) = \left( \sqrt[n]{\lambda} \right)^{n-1} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

em que,  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- (i) Se  $|\lambda| > 4^{-\frac{n-2}{n-1}}$ , então  $G_{\lambda,n}^k(w_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $w_{\lambda,n} \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ , e neste caso,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor.
- (ii) Se  $n \geq 3$  e  $|\lambda| < 4^{-\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}}$  então  $G_{\lambda,n}^k(w_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $w_{\lambda,n} \notin \tilde{B}_{\lambda,n}$ ,  $G_{\lambda,n}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ , e neste caso,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor de quasi-círculos.
- (iii) Se  $|\lambda^{n-1} + 2^{-2n}| < 2^{-\frac{n^2-n+1}{n-1}} |\lambda|^{\frac{n^2-2n+2}{2n}}$  então  $G_{\lambda,n}^k(w_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $G_{\lambda,n}(w_{\lambda,n}) \notin \tilde{B}_{\lambda,n}$ ,  $G_{\lambda,n}^2(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ , e neste caso,  $J(G_{\lambda,n})$  é uma curva Sierpinski.

*Demonstração.* (i) Suponha  $|\lambda| > 4^{-\frac{n-2}{n-1}}$ . De acordo com o Lema 2.4 para que  $w_{\lambda,n} \in \tilde{B}_{\lambda,n}$  é necessário apenas mostrar que  $|w_{\lambda,n}| > r_{\lambda,n}$ . Com efeito, por (2.3)

$$|w_{\lambda,n}| = 2|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Dessa forma, se  $|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ , então

$$|w_{\lambda,n}| = 2|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \geq 2.2^{\frac{n+1}{2n}} = 2^{\frac{3n+1}{2n}} > 2^{\frac{1}{2n}} = r_{\lambda,n}.$$

Por outro lado, se  $|\lambda| < 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ , então

$$\begin{aligned}
|\lambda| &> 4^{-\frac{n-2}{n-1}} \\
|\lambda| &> \left(2^{-\frac{n-2}{n-1}}\right)^2 \\
|\lambda|^{\frac{1}{2}} &> 2^{-\frac{n-2}{n-1}} \\
|\lambda|^{\frac{1}{2}} &> 2^{\left(\frac{1}{n-1}-1\right)} \\
2|\lambda|^{\frac{1}{2}} &> 2^{\frac{1}{n-1}} \\
2|\lambda|^{\frac{n}{2n}} &> 2^{\frac{1}{n-1}} \\
2|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}-\frac{1}{2n}} &> 2^{\frac{1}{n-1}} \\
2|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} &> {}^{n-1}\sqrt{2} \cdot {}^{2n}\sqrt{|\lambda|} \\
|w_{\lambda,n}| &> r_{\lambda,n}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Tricotomia de Escape 2.1,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto do tipo Cantor.

(ii) Suponha  $n \geq 3$  e  $|\lambda| < 4^{-\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}}$ . Pelo Lema 2.5 é suficiente mostrar que  $|w_{\lambda,n}| < 1/r_{\lambda,n}$ . De fato, primeiramente observe que

$$|\lambda| < 4^{-\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}} < 1 < 2^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Logo,  $r_{\lambda,n} = \frac{{}^{n-1}\sqrt{2}}{{}^{2n}\sqrt{2}}$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
|\lambda| &< 4^{-\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}} \\
|\lambda| &< 2^{-\frac{2n^2}{(n-1)(n-2)}} \\
|\lambda| &< \left(2^{-\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-2}} \\
|\lambda|^{\frac{n-2}{2n}} &< 2^{-\frac{n}{n-1}} \\
|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}-\frac{1}{2n}} &< 2^{-\frac{1}{n-1}-1} \\
2|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} &< \frac{|\lambda|^{\frac{1}{2n}}}{2^{\frac{1}{n-1}}} \\
2|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} &< \frac{1}{\frac{{}^{n-1}\sqrt{2}}{{}^{2n}\sqrt{|\lambda|}}} \\
|w_{\lambda,n}| &< \frac{1}{r_{\lambda,n}}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Tricotomia de Escape 2.1,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto do tipo Cantor de quasi-círculos.

(iii) Suponha  $|\lambda^{n-1} + 2^{-2n}| < 2^{-\frac{n^2-n+1}{n-1}} |\lambda|^{\frac{n^2-2n+2}{2n}}$  e considere  $|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ . Assim,

$$|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}} \Rightarrow |\lambda|^{n-1} \geq 2^{n+1} \Rightarrow |\lambda|^{-n+1} \leq 2^{-n-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\lambda^{n-1} + 2^{-2n}| &= |\lambda|^{n-1} |1 + 2^{-2n} \lambda^{-n+1}| \\
&\geq |\lambda|^{n-1} |1 - | - 2^{-2n} \lambda^{-n+1} || \\
&\geq |\lambda|^{n-1} (1 - | - 2^{-2n} \lambda^{-n+1} |) \\
&= |\lambda|^{n-1} (1 - 2^{-2n} |\lambda|^{-n+1}) \\
&= |\lambda|^{n-1} (1 - 2^{-3n+1}) \\
&\geq |\lambda|^{n-1} \\
&> \frac{|\lambda|^{n-1}}{2} \\
&> 2^{-1} |\lambda|^{\frac{n}{2}} \\
&> 2^{-1} |\lambda|^{\frac{n}{2}} |\lambda|^{\frac{1-n}{n}} \\
&> 2^{-\frac{n^2-n+1}{n-1}} |\lambda|^{\frac{n^2-2n+2}{2n}}.
\end{aligned}$$

Contração, dessa maneira  $|\lambda| < 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ . Conseqüentemente,

$$r_{\lambda,n} = \frac{n^{-1}\sqrt{2}}{2^n \sqrt{|\lambda|}}.$$

e assim,

$$\begin{aligned}
|\lambda^{n-1} + 2^{-2n}| &< 2^{-\frac{n^2-n+1}{n-1}} |\lambda|^{\frac{n^2-2n+2}{2n}} \\
|\lambda^{n-1} + 2^{-2n}| &< 2^{\frac{-1}{n+1} + \frac{n-n^2}{n-1}} |\lambda|^{\frac{1}{2n} + \frac{n^2-2n+1}{2n}} \\
|\lambda^{n-1} + 2^{-2n}| &< 2^{-n} 2^{\frac{-1}{n+1}} |\lambda|^{\frac{1}{2n}} |\lambda|^{\frac{n^2-2n+1}{2n}} \\
2^n |\lambda|^{\frac{-n^2+2n-1}{2n}} |\lambda^{n-1} + 2^{-2n}| &< 2^{\frac{-1}{n+1}} |\lambda|^{\frac{1}{2n}} \\
\left| 2^n \lambda^{\frac{n^2-1}{2n}} + 2^{-n} \lambda^{\frac{-n^2+n-1}{2n}} \right| &< 2^{\frac{-1}{n+1}} |\lambda|^{\frac{1}{2n}} \\
\left| 2^n \lambda^{\frac{n-1}{2n} + \frac{n^2-n}{2n}} + 2^{-n} \lambda^{\frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-n}{2n}} \right| &< 2^{\frac{-1}{n+1}} |\lambda|^{\frac{1}{2n}} \\
\left| \lambda^{\frac{n-1}{2n}} \left( 2^n \lambda^{\frac{n^2-n}{2n}} + 2^{-n} \lambda^{\frac{n^2-n}{2n}} \right) \right| &< 2^{\frac{-1}{n+1}} |\lambda|^{\frac{1}{2n}} \\
\left| \lambda^{\frac{n-1}{2n}} \left( 2^n \lambda^{\left(\frac{n-1}{2n}\right)n} + 2^{-n} \lambda^{\left(\frac{n-1}{2n}\right)-n} \right) \right| &< 2^{\frac{-1}{n+1}} |\lambda|^{\frac{1}{2n}} \\
\left| \lambda^{\frac{n-1}{2n}} \left( \left( 2\lambda^{\frac{n-1}{2n}} \right)^n + \frac{1}{\left( 2\lambda^{\frac{n-1}{2n}} \right)^n} \right) \right| &< \frac{2^n \sqrt{|\lambda|}}{n^{-1}\sqrt{2}} \\
\left| \left( \sqrt[2n]{\lambda} \right)^{n-1} \left( w_{\lambda,n}^n + \frac{1}{w_{\lambda,n}^n} \right) \right| &< \frac{1}{\frac{n^{-1}\sqrt{2}}{2^n \sqrt{|\lambda|}}} \\
|G_{\lambda,n}(w_{\lambda,n})| &< \frac{1}{r_{\lambda,n}}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Tricotomia de Escape 2.1,  $J(G_{\lambda,n})$  é do tipo curva Sierpinski.  $\square$

## Capítulo 3

# Estimativa da dimensão de Hausdorff de conjuntos de Julia hiperbólicos da família $F_{\lambda,n}$

Nesse capítulo temos como objetivo estimar a dimensão de Hausdorff dos conjuntos de Julia hiperbólicos da família de funções racionais  $F_{\lambda,n}$  (2.1). Em particular, uma atenção maior será dada para os conjuntos de Julia hiperbólicos classificados no Teorema da Tricotomia de Escape 2.1. Para isso, usaremos principalmente a referência [3].

Antes de iniciarmos este capítulo é importante ressaltar que por conveniência todos os resultados aqui apresentados serão atribuídos a função  $G_{\lambda,n}$  (2.2), a qual é topologicamente conjugada à função  $F_{\lambda,n}$ , como visto no capítulo anterior. Dessa forma, todos os resultados deste capítulo envolvendo a função  $G_{\lambda,n}$  são equivalentemente válidos para a função  $F_{\lambda,n}$ .

### 3.1 A Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff é um conceito matemático introduzido pela primeira vez em 1918 pelo matemático Félix Hausdorff e entre as abordagens sobre dimensões de fractais existentes é considerada a mais utilizada. Nosso objetivo nesta seção é apresentar a definição de dimensão de Hausdorff, entretanto, primeiramente veremos o conceito de medida de Hausdorff e algumas definições que nos serão necessárias e podem ser consultadas em [13].

Começemos por introduzir o conceito de  $\delta$ -cobertura. Antes disso, relembremos que o diâmetro do conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é definido como a maior distância entre quaisquer pares de pontos de  $U$ , isto é,

$$|U| = \sup \{|x - y| ; x, y \in U\}.$$

**Definição 3.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que uma coleção enumerável de subconjuntos  $U_i \subset \mathbb{R}^n$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $X$  se  $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  e para cada  $i \in \mathbb{N}$  temos que  $|U_i| \leq \delta$ .*

Agora, considere  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $s$  um número positivo. Então, para cada

$\delta > 0$ , definimos o conjunto

$$\mathcal{H}_\delta^s(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s ; \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } X \right\}. \quad (3.1)$$

Ou seja, tomamos todas as  $\delta$ -coberturas de  $X$  e procuramos minimizar a soma das  $s$ -ésimas potências dos diâmetros. Quando  $\delta$  diminui, então as  $\delta$ -coberturas de  $X$  também é reduzida. Conseqüentemente, o ínfimo,  $\mathcal{H}_\delta^s(X)$ , aumenta e aproxima-se de um limite quando  $\delta \rightarrow 0$ . Dessa forma, definimos

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(X) \quad (3.2)$$

Este limite existe para qualquer subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , embora seu valor possa ser  $\infty$  ou 0.

**Definição 3.2.** *A  $s$ -medida de Hausdorff do conjunto  $X$  é o número  $\mathcal{H}^s(X)$ .*

A proposição a seguir nos afirma que a  $s$ -medida de Hausdorff é uma medida.

**Proposição 3.3.** *Seja  $E, F \subset \mathbb{R}^n$  e  $s > 0$  então*

- i)  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ ;*
- ii) Se  $E \subset F$  então  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ ;*
- iii) Se  $\{E_i\}$  é uma coleção disjunta de conjuntos de Borel, então*

$$\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i).$$

*Demonstração.* Ver [13] página 54. □

A próxima proposição apresenta uma propriedade importante para a  $s$ -medida de Hausdorff.

**Proposição 3.4. (Propriedade de Escala)** *Se  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$  então*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

*onde  $\lambda F = \{\lambda x ; x \in F\}$ , isto é, o conjunto  $F$  multiplicado pelo fator  $\lambda$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{U_i\}$  uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , então  $\{\lambda U_i\}$  é uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $\lambda F$ . Reciprocamente, se  $\{V_i\}$  é uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $\lambda F$ , então  $\left\{ \frac{1}{\lambda} V_i \right\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s ; \{\lambda U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s ; \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\
&= \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F).
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo  $\delta \rightarrow 0$  obtemos

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

□

Estudando o conjunto (3.1) verificamos que para  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_{\delta}^s(X)$  não é crescente. Assim, por (3.2)  $\mathcal{H}^s(X)$  também não cresce. Entretanto, se  $t > s$  e  $\{U_i\}$  uma  $\delta$ -cobertura de  $X$ , então

$$\sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^t \leq \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s$$

Consequentemente, se tomarmos os ínfimos sobre as  $\delta$ -cobertura de  $X$ , obtemos

$$\mathcal{H}_{\delta}^t \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_{\delta}^s.$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , verificamos que, se  $\mathcal{H}^s(X) < \infty$  então  $\mathcal{H}^t(X) = 0$  para  $t > s$ . Por outro lado, se  $\mathcal{H}^t(X) > 0$  não podemos ter  $\mathcal{H}^s(X) < \infty$ , logo  $\mathcal{H}^s(X) = \infty$ . Assim, o gráfico  $\mathcal{H}^s(X) \times s$  apresentado na Figura 3.1 mostra que existe um valor crítico de  $s$  no qual  $\mathcal{H}^s(X)$  salta de  $\infty$  para 0. Esse valor crítico chama-se dimensão de Hausdorff de  $X$ .

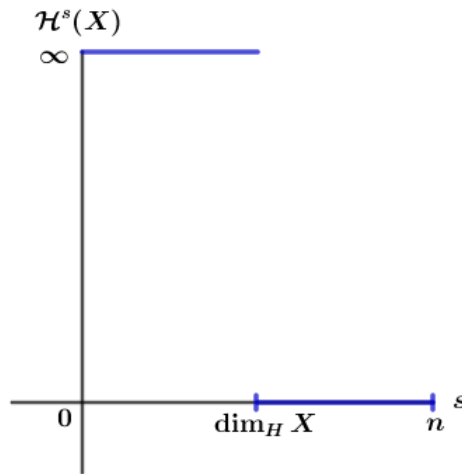


Figura 3.1: Representação gráfica de  $\mathcal{H}^s(X)$  como função de  $s$  para um conjunto  $X$ .

**Definição 3.5.** A dimensão de Hausdorff do conjunto  $X$  é definida por

$$\dim_H X = \inf \{s \geq 0 ; \mathcal{H}^s(X) = 0\} = \sup \{s \geq 0 ; \mathcal{H}^s(X) = \infty\}$$

tal que,

$$\mathcal{H}^s(X) = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 \leq s < \dim_H X \\ 0, & \text{se } s > \dim_H X \end{cases}.$$

Se  $s = \dim_H X$ , então  $\mathcal{H}^s(X)$  pode ser zero ou infinito, ou ainda pode satisfazer a desigualdade  $0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty$ .

**Exemplo 3.6.** Seja  $X$  o conjunto de Cantor do Terço Médio, então

$$\dim_H(X) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

*Demonstração.* Com efeito, dividimos o conjunto de Cantor em duas partes: a parte esquerda,

$$X_E = X \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

e a parte direita

$$X_D = X \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Ambas as partes são semelhantes a  $X$ , mas reduzidas por um fator  $1/3$ . Além disso,

$$X = X_E \cup X_D.$$

Logo, por propriedade de medida e pela Proposição 3.4, para qualquer  $s$  temos

$$\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s(X_E) + \mathcal{H}^s(X_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(X) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(X).$$

Assumindo que no valor crítico  $\dim_H(X) = s$  temos  $0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty$ . Conseqüentemente,

$$\mathcal{H}^s(X) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(X) \Rightarrow 1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s \Rightarrow s = \log_3 2.$$

Portanto,

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

□

## 3.2 Fórmula de Bowen

Para estimar a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia da função  $F_{\lambda, n}$ , utilizamos métodos do formalismo termodinâmico [19, 20], o qual foi desenvolvido por D. Ruelle, R. Bowen e P. Walters em 1970 e nos propicia uma série de ferramentas úteis para o

estudo da geometria e propriedades de subconjuntos hiperbólicos invariantes do conjunto de Julia de uma função racional na esfera de Riemann. Uma ferramenta importante é a clássica Fórmula de Bowen, a qual afirma que a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia para uma função racional hiperbólica é igual ao único zero da função pressão. Para mais detalhes consulte [18] seções 9.1 e 12.5.

**Teorema 3.7 (Fórmula de Bowen).** *Seja  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uma função racional de grau maior que 1. Se  $f$  é uma função hiperbólica então a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia de  $f$  é igual ao único zero da função pressão*

$$t \mapsto P(f, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \sum_{w \in f^{-k}(z)} |(f^k)'(w)|^{-t}$$

para  $t > 0$ , onde  $z$  é um ponto arbitrário no  $J(f)$ .

*Demonstração.* Ver [2]. □

Seja a família de funções racionais  $G_{\lambda, n}$  (2.2). Para  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  e  $t > 0$  definimos a função  $S_t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  por

$$S_t(z) = \sum_{w \in G_{\lambda, n}^{-1}(z)} |G'_{\lambda, n}(w)|^{-t} = \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{w \in G_{\lambda, n}^{-1}(z)} \frac{|w|^{(n+1)t}}{|w^{2n} - 1|^t} \quad (3.3)$$

e consideremos,

$$S_t^+ = \sup_{z \in J(G_{\lambda, n})} S_t(z) \quad \text{e} \quad S_t^- = \inf_{z \in J(G_{\lambda, n})} S_t(z). \quad (3.4)$$

Assumindo  $S_t^- > 0$  e  $S_t^+ < \infty$ , temos

$$\ln S_t^- \leq P(G_{\lambda, n}, t) \leq \ln S_t^+.$$

Em vista disso, e pelo Teorema da Fórmula de Bowen 3.7, obtemos a desigualdade

$$\sup \{t > 0; \ln S_t^- \geq 0\} \leq \dim_H J(G_{\lambda, n}) \leq \inf \{t > 0; \ln S_t^+ \geq 0\}. \quad (3.5)$$

### 3.3 Conjuntos de Julia Hiperbólicos da família $G_{\lambda, n}$

Nesta seção, exibimos estimativas da dimensão de Hausdorff para os três conjuntos de Julia hiperbólicos da função  $G_{\lambda, n}$  descritos no Teorema da Tricotomia de Escape 2.1. Contudo, primeiramente provamos o Teorema 3.8, o qual apresenta uma estimativa geral da dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia da função racional hiperbólica  $G_{\lambda, n}$ . Nos basearemos na referência [3].

**Teorema 3.8.** *Se  $G_{\lambda, n} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , definida por*

$$G_{\lambda, n}(z) = \left( \sqrt[2n]{\lambda} \right)^{n-1} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right),$$

é uma família de funções racionais hiperbólicas para cada  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , então

$$\dim_H J(G_{\lambda,n}) \geq \frac{\ln n}{\ln n + \ln 2 + \frac{n-1}{2n} \ln^+ \left( \frac{|\lambda|}{2^{\frac{n+1}{n-1}}} \right)},$$

em que  $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$ .

*Demonstração.* Suponha  $G_{\lambda,n}$  hiperbólica para cada  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Visto que,  $G_{\lambda,n}$  é uma função racional de grau  $2n$ , segue para qualquer  $z \in J(G_{\lambda,n})$  que o conjunto  $G_{\lambda,n}^{-1}(z)$  consiste de  $2n$  pontos. Pela simetria dada em (2.5) estes pontos podem ser dados por

$$z_1, \dots, z_n, 1/z_1, \dots, 1/z_n \in \mathbb{C} \quad (3.6)$$

e pelo Lema 2.4

$$1 \leq \frac{1}{r_{\lambda,n}} \leq |z_1| = \dots = |z_n| \leq r_{\lambda,n}. \quad (3.7)$$

Considerando o que foi posto em (3.6) e (3.7) tem-se que para todo  $z \in J(G_{\lambda,n})$  e  $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} S_t(z) &= \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \left( \frac{|z_j|^{(n+1)t}}{|z_j^{2n} - 1|^t} + \frac{|1/z_j|^{(n+1)t}}{|(1/z_j)^{2n} - 1|^t} \right) \\ &= \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \left( \frac{|z_j|^{(n+1)t}}{|z_j^{2n} - 1|^t} + \frac{|z_j|^{(n+1)t}}{|z_j|^{2nt}} \right) \\ &= \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \left( \frac{|z_j|^{(n+1)t} + |z_j|^{(n-1)t}}{|z_j^{2n} - 1|^t} \right) \\ &\geq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \frac{|z_j|^{(n+1)t} + |z_j|^{(n-1)t}}{|z_j|^{2nt} + 1} \\ &= \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \frac{|z_j|^{(n-1)t}}{|z_j|^{(n-1)t}} \frac{|z_j|^{(n+1)t} + |z_j|^{(n-1)t}}{|z_j|^{2nt} + 1} \\ &= \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \frac{1}{|z_j|^{(n-1)t}} \frac{|z_j|^{2nt} + |z_j|^{(2n-2)t}}{|z_j|^{2nt} + 1} \\ &\geq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \frac{1}{|z_j|^{(n-1)t}} \\ &\geq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_{\lambda,n}^{(n-1)t}} \\ &= \frac{n^{1-t}}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} r_{\lambda,n}^{(n-1)t}}. \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$S_t^- = \inf_{z \in J(G_{\lambda,n})} S_t(z) \geq \frac{n^{1-t}}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} r_{\lambda,n}^{(n-1)t}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\ln S_t^- &\geq (1-t)\ln n - \frac{n-1}{2n}t\ln|\lambda| - (n-1)t\ln r_{\lambda,n} \\ &= \ln n - t\left(\ln n + \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda| + (n-1)\ln r_{\lambda,n}\right).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Assim, pela Definição 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}(n-1)\ln r_{\lambda,n} &= \max\left((n-1)\ln \sqrt[n]{2}, (n-1)\ln \frac{\sqrt[n-1]{2}}{\sqrt[n]{|\lambda|}}\right) \\ &= \max\left(\frac{n-1}{2n}\ln 2, \ln 2 - \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda|\right).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.9) em (3.8), temos

$$\begin{aligned}\ln S_t^- &\geq \ln n - t\left(\ln n + \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda| + \max\left(\frac{n-1}{2n}\ln 2, \ln 2 - \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda|\right)\right) \\ &= \ln n - t\left(\ln n + \max\left(\frac{n-1}{2n}\ln 2 + \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda|, \ln 2\right)\right).\end{aligned}$$

Observe que,

$$\ln n + \max\left(\frac{n-1}{2n}\ln 2 + \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda|, \ln 2\right) > 0.$$

Dessa forma, supondo

$$\ln n - t\left(\ln n + \max\left(\frac{n-1}{2n}\ln 2 + \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda|, \ln 2\right)\right) \geq 0$$

obtemos

$$t \leq \frac{\ln n}{\ln n + \max\left(\frac{n-1}{2n}\ln 2 + \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda|, \ln 2\right)}.$$

Portanto, segue pela desigualdade dada em (3.5) que

$$\begin{aligned}\dim_H J(G_{\lambda,n}) &\geq \sup\{t > 0; \ln S_t^- \geq 0\} \\ &\geq \frac{\ln n}{\ln n + \max\left(\frac{n-1}{2n}\ln 2 + \frac{n-1}{2n}\ln|\lambda|, \ln 2\right)} \\ &= \frac{\ln n}{\ln n + \ln 2 + \frac{n-1}{2n}\ln^+\left(\frac{|\lambda|}{2^{\frac{n-1}{n-1}}}\right)}.\end{aligned}$$

□

A seguir apresentamos dois teoremas que estabelecem quando o conjunto de Julia da função  $G_{\lambda,n}$  é de Cantor e estima sua dimensão de Hausdorff.

**Teorema 3.9.** *Se  $4^{-\frac{n-2}{n-1}} < |\lambda| \leq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$  então  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor e*

$$\dim_H J(G_{\lambda,n}) \geq 1 - \frac{\ln 2}{\ln n + \ln 2} > \frac{1}{2}.$$

*Demonstração.* Suponha  $4^{-\frac{n-2}{n-1}} < |\lambda| \leq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ . Assim, pelo Teorema 2.6,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor e para  $n \geq 2$ , segue do Teorema 3.8 que

$$\begin{aligned}
\dim_H J(G_{\lambda,n}) &\geq \frac{\ln n}{\ln n + \ln 2 + \frac{n-1}{2n} \ln^+ \left( \frac{|\lambda|}{2^{\frac{n+1}{n-1}}} \right)} \\
&> \frac{\ln n}{\ln n + \ln 2 + \frac{n-1}{2n} \ln^+ \left( \frac{4^{-\frac{n-2}{n-1}}}{2^{\frac{n+1}{n-1}}} \right)} \\
&= \frac{\ln n}{\ln n + \ln 2 + \frac{n-1}{2n} \ln^+ \left( \frac{1}{8} \right)} \\
&= 1 - \frac{\ln 2}{\ln n + \ln 2} \\
&> \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.10.** *Seja  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se  $|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ , então  $G_{\lambda,n}^k(w_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $w_{\lambda,n} \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ , e neste caso,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor. Além disso,*

$$\frac{\ln n}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| + \frac{n-1}{2n} \ln 2} \leq \dim_H J(G_{\lambda,n}) \leq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2}.$$

*Demonstração.* Suponha  $n \geq 2$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ . Visto que, para  $n \geq 2$  temos

$$2^{\frac{n+1}{n-1}} > 4^{-\frac{n-2}{n-1}}$$

segue imediatamente do Teorema 2.6 que  $w_{\lambda,n} \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Dessa maneira, pelo Teorema da Tricotomia de Escape 2.1, o conjunto de Julia da função  $G_{\lambda,n}$  é um conjunto de Cantor. Vejamos que,

$$\dim_H J(G_{\lambda,n}) \leq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2}.$$

Com efeito, decorre da definição 2.3 que  $r_{\lambda,n} = \sqrt[2n]{2}$ , assim

$$r_{\lambda,n} = 2^{\frac{1}{2n}} \leq |\lambda|^{\frac{n+1}{2n(n-1)}}.$$

Seja  $w \in J(G_{\lambda,n})$ , pelo lema 2.4 temos

$$\frac{1}{r_{\lambda,n}} \leq |w| \leq r_{\lambda,n},$$

em consequência

$$\frac{1}{r_{\lambda,n}} \leq |G_{\lambda,n}(w)| \leq r_{\lambda,n},$$

pois,  $G_{\lambda,n}(w) \in J(G_{\lambda,n})$ , sendo assim,

$$\begin{aligned}
|w^{2n} - 1| &= |(w^{2n} + 1) - 2| = \left| \frac{\lambda^{\frac{n-1}{2n}} (w^{2n} + 1)}{\lambda^{\frac{n-1}{2n}}} - 2 \right| \\
&= \left| \frac{w^n \lambda^{\frac{n-1}{2n}} \left( w^n + \frac{1}{w^n} \right)}{\lambda^{\frac{n-1}{2n}}} - 2 \right| \\
&= \left| 2 - \frac{w^n G_{\lambda,n}(w)}{\lambda^{\frac{n-1}{2n}}} \right| \\
&\geq 2 - \frac{|w|^n |G_{\lambda,n}(w)|}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}} \\
&\geq 2 - \frac{r_{\lambda,n}^{n+1}}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}} \\
&\geq 2 - \frac{2^{\frac{n+1}{2n}}}{\left(2^{\frac{n+1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{2n}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Isto posto e pelo fato da cardinalidade do conjunto  $G_{\lambda,n}^{-1}(w)$  consistir de  $2n$  pontos para qualquer  $w \in J(G_{\lambda,n})$ , então, para  $z \in J(G_{\lambda,n})$  e  $t > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
S_t(z) &= \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} t n^t} \sum_{w \in G_{\lambda,n}^{-1}(z)} \frac{|w|^{(n+1)t}}{|w^{2n} - 1|^t} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} t n^t} \sum_{w \in G_{\lambda,n}^{-1}(z)} |w|^{(n+1)t} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} t n^t} \sum_{w \in G_{\lambda,n}^{-1}(z)} r_{\lambda,n}^{(n+1)t} \\
&= \frac{2n 2^{\frac{(n+1)t}{2n}}}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} t n^t}.
\end{aligned}$$

Em vista disso, temos que

$$S_t^+ = \sup_{z \in J(G_{\lambda,n})} S_t(z) \leq \frac{2n 2^{\frac{(n+1)t}{2n}}}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} t n^t}.$$

Resultando em,

$$\begin{aligned}
\ln S_t^+ &\leq \ln 2 + \ln n + \frac{n+1}{2n} t \ln 2 - \frac{n-1}{2n} t \ln |\lambda| - t \ln n \\
&= \ln n + \ln 2 - t \left( \ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2 \right).
\end{aligned}$$

Uma vez que,  $|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ , logo, para  $n \geq 2$

$$\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2 > 0.$$

Assim, supondo que

$$\ln n + \ln 2 - t \left( \ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2 \right) \leq 0$$

obtemos

$$t \geq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2}.$$

Portanto, utilizando a desigualdade (3.5), temos

$$\begin{aligned} \dim_H J(G_{\lambda,n}) &\leq \inf \{t > 0 ; \ln S_t^+ \leq 0\} \\ &\leq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por outro lado, se  $|\lambda| \geq 2^{\frac{n+1}{n-1}}$ , então

$$\max \left( \frac{n-1}{2n} \ln 2 + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda|, \ln 2 \right) = \frac{n-1}{2n} \ln 2 + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda|.$$

Logo, pelo Teorema 3.8

$$\dim_H J(G_{\lambda,n}) \geq \frac{\ln n}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln 2 + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda|}. \quad (3.11)$$

Portanto, por (3.10) e (3.11)

$$\frac{\ln n}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| + \frac{n-1}{2n} \ln 2} \leq \dim_H J(G_{\lambda,n}) \leq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n + \frac{n-1}{2n} \ln |\lambda| - \frac{n+1}{2n} \ln 2}.$$

□

A proposição a seguir exibe uma estimativa superior para a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia de Cantor de quasi-círculos da função  $G_{\lambda,n}$ . A utilizamos na prova do Teorema 3.12.

**Proposição 3.11.** *Se  $J(F_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor de quasi-círculos, então*

$$\dim_H J(F_{\lambda,n}) \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln n}$$

*Demonstração.* Suponhamos que o conjunto de Julia da função racional  $F_{\lambda,n}$ ,  $J(F_{\lambda,n})$ , é um conjunto de Cantor de Quasicírculos, isto é, é um conjunto de Cantor de curvas fechadas simples em torno da origem. Em vista disso, segue do Teorema da Tricotomia de Escape 2.1 que o valor crítico da função  $F_{\lambda,n}$  pertence ao conjunto  $T_{\lambda,n}$ , pois, neste caso os conjuntos  $T_{\lambda,n}$  e  $B_{\lambda,n}$  são disjuntos. Devido ao comportamento dos dois valores

críticos de  $F_{\lambda,n}$  ser o mesmo em razão da simetria vista em 2.4, então,  $\pm v_{\lambda,n} \in T_{\lambda,n}$ . De fato, uma vez que o  $\infty$  é um ponto fixo superatrator para  $F_{\lambda,n}$  temos pelo Teorema de Bottcher 1.9 que a função  $F_{\lambda,n}$  é conjugada a função  $z \mapsto z^d$  em uma vizinhança do  $\infty$ . Seja o disco topológico  $D$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$  esta vizinhança, de maneira que sua fronteira seja uma curva de Jordan e a sua pré imagem por  $F_{\lambda,n}$  seja dois discos topológicos  $D_1$  e  $D_2$  cujas fronteiras também são curvas de Jordan. De forma que,

$$\overline{D} \subset D_1 \subset \overline{D}_1 \subset B_{\lambda,n} \quad \text{e} \quad \pm v_{\lambda,n} \in D_2 \subset \overline{D}_2 \subset T_{\lambda,n}$$

e  $F_{\lambda,n} |_{\partial D_j}$  para  $j = 1, 2, \dots$  é uma cobertura de grau  $d$ . Seja o disco topológico  $D_3 \subset D_2$  cuja fronteira é uma curva de Jordan, tal que

$$\pm v_{\lambda,n} \in D_3 \subset \overline{D}_2 \subset D_2$$

Utilizando a Formula de Hurwitz Riemann concluimos que o conjunto  $F^{-1}(D_3)$  consiste de uma única componente  $E \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$  tal que  $E$  é uma anel topológico com a fronteira consistindo de duas curvas de Jordan. O anel  $E$  contém todos  $2n$  pontos críticos críticos livres de  $F_{\lambda,n}$ . Denotaremos, respectivamente por  $D_+$  e  $D_-$  a componente interna e externa de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{E}$  e considere os conjuntos

$$A = \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{D} \cup \overline{D}_3) \quad A_+ = A \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{E} \cup \overline{D}_-) \quad \text{e} \quad A_- = A \setminus (\overline{D}_2 \cup \overline{E} \cup \overline{D}_+).$$

Então,  $A$ ,  $A_+$  e  $A_-$  são anéis com fronteiras consistindo de curvas de Jordan e as seguintes propriedades são mantidas.

- $J(F_{\lambda,n}) \subset A_+ \cup A_- \subset \overline{A_+} \cup \overline{A_-} \subset A$ .
- $\overline{A_-}$  está contido na componente "interna" de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{A_+}$  e a componente interna de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$  está contida na componente interna de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{A_-}$ .
- $A_+$  e  $A_-$  são mapeados por  $F_{\lambda,n}$  sobre  $A$  como coberturas de grau  $n$ .

Portanto, uma vez que  $F_{\lambda,n} |_{A_+ \cup A_-}$  satisfaz as hipóteses do Corolário 2.1 (Ver [14] página 1030) então

$$\dim_H J(F_{\lambda,n}) \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln n}.$$

□

O Teorema 3.12 determina em quais condições o conjunto de Julia da função  $G_{\lambda,n}$  é um conjunto de Cantor de quasi-círculos e além disso, estima a dimensão de Hausdorff deste conjunto.

**Teorema 3.12.** *Seja  $n \geq 39$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se  $2^{\frac{2n}{n-1}}/n < |\lambda| \leq 2^{-\frac{n(3n-1)}{(n-1)(n-2)}}$ , então  $G_{\lambda,n}^k(w_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $w_{\lambda,n} \notin \tilde{B}_{\lambda,n}$ ,  $G_{\lambda,n}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ , e neste caso,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor de quasi-círculos. Além disso,*

$$1 + \frac{\ln 2}{\ln n} \leq \dim_H J(G_{\lambda,n}) \leq 1 + \frac{\frac{3n-1}{n-1} \ln 2 - \ln |\lambda|}{\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2}.$$

*Demonstração.* Suponhamos  $n \geq 39$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Consideremos,

$$\frac{2^{\frac{2n}{n-1}}}{n} < |\lambda| \leq 2^{-\frac{n(3n-1)}{(n-1)(n-2)}},$$

dessa forma, dado que para  $n \geq 3$  temos

$$2^{-\frac{n(3n-1)}{(n-1)(n-2)}} < 4^{-\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}}$$

segue pelo Teorema 2.6 que  $w_{\lambda,n} \notin \tilde{B}_{\lambda,n}$  e  $G_{\lambda,n}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Dessa maneira, pelo Teorema da Tricotomia de Escape 2.1,  $J(G_{\lambda,n})$  é um conjunto de Cantor de quasi-círculos. Além disso, pela Proposição 3.11

$$\dim_H J(G_{\lambda,n}) \geq 1 + \frac{\ln 2}{\ln n}.$$

Vejamos agora que,

$$\dim_H J(G_{\lambda,n}) \leq 1 + \frac{\frac{3n-1}{n-1} \ln 2 - \ln |\lambda|}{\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2}.$$

Com efeito,

$$|\lambda| < 2^{-\frac{n(3n-1)}{(n-1)(n-2)}} < 1 < 2^{\frac{n+1}{n-1}},$$

logo,

$$r_{\lambda,n} = \frac{n^{-1}\sqrt{2}}{2^n\sqrt{|\lambda|}}.$$

Mostramos que para todo  $w \in J(G_{\lambda,n})$  temos  $|w^{2n} - 1| > 1/2$ . Para tal, suponhamos que para  $w \in J(G_{\lambda,n})$  temos  $|w^{2n} - 1| \leq 1/2$ . Dessa forma, visto que,  $|w^{2n} - 1| > |w|^{2n} - 1$ , então

$$\frac{-1}{2} \leq |w|^{2n} - 1 \leq \frac{1}{2}, \quad (3.12)$$

resultando em,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |w|^n \leq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Sendo assim,

$$|G_{\lambda,n}(w)| = |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \left| w^n + \frac{1}{w^n} \right| \leq |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \left( \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2} \right) < 2^{\frac{3}{2}} |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, uma vez que  $G_{\lambda,n}(w) \in J(G_{\lambda,n})$  então pelo Lema 2.4,

$$|G_{\lambda,n}(w)| \geq \frac{1}{r_{\lambda,n}} = \frac{2^n \sqrt[n]{|\lambda|}}{n-1\sqrt{2}}. \quad (3.14)$$

Das duas últimas inequações, (3.13) e (3.14), temos

$$\begin{aligned} \frac{2^n \sqrt[n]{|\lambda|}}{n-1\sqrt{2}} &< 2^{\frac{3}{2}} |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \\ |\lambda|^{\frac{-n+2}{2n}} &< 2^{\frac{3n-1}{2(n-1)}} \\ |\lambda| &> 2^{-\frac{n(3n-1)}{(n-1)(n-2)}}. \end{aligned}$$

Contradição. Consequentemente para todo  $w \in J(G_{\lambda,n})$  temos  $|w^{2n} - 1| > 1/2$ . Isto posto e pelo fato de que qualquer  $w \in J(G_{\lambda,n})$  a cardinalidade do conjunto  $G_{\lambda,n}^{-1}(w)$  consistir de  $2n$  pontos, então, para  $z \in J(G_{\lambda,n})$  e  $t > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} S_t(z) &\leq \frac{2^t}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sum_{w \in G_{\lambda,n}^{-1}(z)} |w|^{(n+1)t} \\ &\leq \frac{2^t}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} 2nr_{\lambda,n}^{(n+1)t} \\ &= 2n2^t \frac{2^{\frac{n+1}{n-1}t}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2n}t} |\lambda|^{\frac{n+1}{2n}t}} \\ &= \frac{2n2^{\frac{2n}{n-1}t}}{|\lambda|^t n^t}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$S_t^+ = \sup_{z \in J(G_{\lambda,n})} S_t(z) \leq \frac{2n2^{\frac{2n}{n-1}t}}{|\lambda|^t n^t}.$$

Resultando em,

$$\begin{aligned} \ln S_t^+ &\leq \ln 2 + \ln n + \frac{2n}{n-1}t \ln 2 - t \ln |\lambda| - t \ln n \\ &\leq \ln n + \ln 2 - t \left( \ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2 \right). \end{aligned}$$

Um vez que, por hipótese  $2^{\frac{2n}{n-1}}/n < |\lambda| \leq 2^{-\frac{n(3n-1)}{(n-1)(n-2)}}$  para  $n \geq 39$ , então

$$\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2 > 0.$$

Suponhamos,

$$\ln n + \ln 2 - t \left( \ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2 \right) \leq 0$$

logo

$$t \geq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2}.$$

Portanto, pela desigualdade (3.5)

$$\begin{aligned}
\dim_H J(G_{\lambda,n}) &\leq \inf \{t > 0 ; \ln S_t^+ \leq 0\} \\
&\leq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2} \\
&= \frac{\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2 + \frac{3n-1}{n-1} \ln 2 - \ln |\lambda|}{\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2} \\
&= 1 + \frac{\frac{3n-1}{n-1} \ln 2 - \ln |\lambda|}{\ln n + \ln |\lambda| - \frac{2n}{n-1} \ln 2}.
\end{aligned}$$

□

O intuito a partir de agora é estimar a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia de curvas Sierpinski da função  $G_{\lambda,n}$ , o que é feito pelo Teorema 3.20. Para isso, vejamos a seguir duas observações necessárias para cumprir este objetivo.

**Observação 3.13.** *Seja  $u_z$  um ponto crítico livre da função  $G_{\lambda,n}$ . Uma vez que, os pontos críticos livres de  $G_{\lambda,n}$  são  $2n$ -ésimas raízes da unidade, então, para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existe um ponto crítico  $u_z$ , não necessariamente único, para o qual*

$$|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(u_z)| \leq \frac{\pi}{2n}$$

**Observação 3.14.** *Seja  $|\lambda - \lambda_j| \leq 1/64n$  em que  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  são  $(n-1)$ -ésimas raízes complexas de  $-4^{-n}$ . Dessa forma, visto que,  $|\lambda - \lambda_j| \geq ||\lambda| - |\lambda_j||$ , então*

$$|\lambda_j| - \frac{1}{64n} \leq |\lambda| \leq |\lambda_j| + \frac{1}{64n}.$$

Além disso, dado que para  $j = 1, \dots, n-1$  temos  $\lambda_j^{n-1} = -4^{-n}$ , segue que

$$4^{-\frac{n}{n-1}} - \frac{1}{64n} = |\lambda_j| - \frac{1}{64n} \leq |\lambda| \leq |\lambda_j| + \frac{1}{64n} = 4^{-\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{64n}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio aplicado para a função  $x \mapsto x^{\frac{1}{n-1}}$  no intervalo  $[1, 4]$ , temos

$$\left(4^{\frac{1}{n-1}} - 1\right) \geq \frac{3}{n-1} 4^{\frac{2-n}{n-1}}.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - 4^{-\frac{n}{n-1}} &= 4^{-\frac{n}{n-1}} \left(4^{\frac{1}{n-1}} - 1\right) \geq 4^{-\frac{n}{n-1}} \frac{3}{n-1} 4^{\frac{2-n}{n-1}} \\
&= \frac{3}{16(n-1)} \\
&> \frac{1}{64n}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

e

$$\begin{aligned}
4^{-\frac{n}{n-1}} - 4^{-\frac{n+1}{n-1}} &= 4^{-\frac{n+1}{n-1}} \left( 4^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right) \geq 4^{-\frac{n+1}{n-1}} \frac{3}{n-1} 4^{\frac{2-n}{n-1}} \\
&= \frac{3}{16(n-1)} 4^{-\frac{1}{n-1}} \\
&> \frac{1}{64n}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto das desigualdades (3.15) e (3.16)

$$4^{-\frac{n+1}{n-1}} < |\lambda| < \frac{1}{4}. \tag{3.17}$$

Com o auxílio das observações anteriores, exibimos a seguir uma sequência de cinco lemas necessários para a prova do Teorema 3.20.

**Lema 3.15.** *Se  $z \in \mathbb{C}$  e  $|z| \geq 1$ , então*

$$|z - u_z| \leq \frac{\pi}{4n} |z^{2n} - 1|.$$

*Demonstração.* Seja  $u_z$  um ponto crítico livre de  $G_{\lambda,n}$ , assim,  $u_z^{2n} = 1$  e tome  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| \geq 1$ . Consideraremos um semicírculo  $\gamma$  conectando  $z^{2n}$  a 1, de modo que, seu diâmetro seja o segmento ligando os dois pontos. Sendo assim, o comprimento de  $\gamma$  é dado por

$$\frac{\pi |z^{2n} - 1|}{2}$$

e para cada  $\zeta \in \gamma$  temos  $|\zeta| \geq 1$ . Além disso, pela Observação 3.13 para  $\gamma$  existe um ramo da raiz  $g(w) = w^{\frac{1}{2n}}$ , tal que  $g(z^{2n}) = z$  e  $g(1) = u_z$ . Portanto, por meio do que foi posto e pelo Teorema do Valor Médio para a função  $g$ ,

$$\begin{aligned}
|z - u_z| &= |g(z^{2n}) - g(1)| = |g'(\zeta)| |z^{2n} - 1| \\
&\leq \frac{\pi}{2} |z^{2n} - 1| \sup_{\zeta \in \gamma} |g'(\zeta)| \\
&\leq \frac{\pi}{4n} |z^{2n} - 1| \sup_{\zeta \in \gamma} |\zeta|^{\frac{1}{2n}-1} \\
&\leq \frac{\pi}{4n} |z^{2n} - 1|.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.16.** *Se  $z \in \mathbb{C}$  e  $1 \leq |z| \leq r_{\lambda,n}$ , então*

$$|G_{\lambda,n}(z) - G_{\lambda,n}(u_z)| \leq \frac{\pi^2 |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} r_{\lambda,n}^{2n-1}}{16 \cos^{n+1} \frac{\pi}{4n}} |z^{2n} - 1|^2.$$

*Demonstração.* Seja  $z \in \mathbb{C}$  e  $1 \leq |z| \leq r_{\lambda,n}$ . Considere  $\gamma$  o segmento de linha reta conectando  $z$  a  $u_z$ . Uma vez que,  $|z| \geq 1$  e  $|u_z| = 1$ , pela Observação 3.13, obtemos

$$|\zeta| \geq \cos \frac{\pi}{4n}$$

para cada  $\zeta \in \gamma$ . Portanto, pelo Teorema do Valor Médio e Lema 3.15, temos

$$\begin{aligned}
|G_{\lambda,n}(z_1) - G_{\lambda,n}(z_2)| &= \left| \int_{\gamma} G'_{\lambda,n}(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\gamma} |G'_{\lambda,n}(\zeta)| |d\zeta| \\
&= n|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \int_{\gamma} \frac{|\zeta^{2n} - 1|}{|\zeta|^{n+1}} |d\zeta| \\
&\leq \frac{n|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}}{\cos^{n+1} \frac{\pi}{4n}} \int_{\gamma} |\zeta^{2n} - 1| |d\zeta| \\
&\leq \frac{2n^2 |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}}{\cos^{n+1} \frac{\pi}{4n}} \sup_{\zeta \in \gamma} |\zeta|^{2n-1} \int_{\gamma} |\zeta - u_z| |d\zeta| \\
&\leq \frac{2n^2 |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}}{\cos^{n+1} \frac{\pi}{4n}} r_{\lambda,n}^{2n-1} \int_{\gamma} |\zeta - u_z| |d\zeta| \\
&= \frac{2n^2 |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}}}{\cos^{n+1} \frac{\pi}{4n}} r_{\lambda,n}^{2n-1} |z - u_z|^2 \\
&\leq \frac{\pi^2 |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} r_{\lambda,n}^{2n-1}}{16 \cos^{n+1} \frac{\pi}{4n}} |z^{2n} - 1|^2.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.17.** Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e  $|z_1|, |z_2| \in [1/r_{\lambda,n}, r_{\lambda,n}]$ , então,

$$|G_{\lambda,n}(z_1) - G_{\lambda,n}(z_2)| \leq 2n|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} r_{\lambda,n}^{n+1} |z_1 - z_2|.$$

*Demonstração.* Suponha  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $|z_1|, |z_2| \in [1/r_{\lambda,n}, r_{\lambda,n}]$ . Consideremos  $\gamma$  o segmento de linha reta ligando  $z_1$  a  $z_2$  e  $\zeta \in \gamma$ . Então,

$$\begin{aligned}
|G_{\lambda,n}(z_1) - G_{\lambda,n}(z_2)| &= \left| \int_{\gamma} G'_{\lambda,n}(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\gamma} |G'_{\lambda,n}(\zeta)| |d\zeta| \\
&= \int_{\gamma} \left| \lambda^{\frac{n-1}{2n}} n (\zeta^{n-1} - \zeta^{-n-1}) \right| |d\zeta| \\
&\leq n|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} \int_{\gamma} (|\zeta|^{n-1} + |\zeta|^{-n-1}) |d\zeta| \\
&\leq n|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} r_{\lambda,n}^{n+1} |z_1 - z_2|.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.18.** Se  $z_1, z_2 \geq 1/r_{\lambda,n}$  e  $|\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)| \leq \pi$ , então

$$|z_1 - z_2| \geq \frac{2}{\pi r_{\lambda,n}} |\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)|.$$

*Demonstração.* Seja  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tais que  $|z_1|, |z_2| \geq 1/r_{\lambda,n}$  e  $|\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)| \leq \pi$ . Considerando a seguinte relação trigonométrica,

$$1 - \cos \theta = 2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Obtemos que,

$$\begin{aligned}
|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| &= \sqrt{(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2 + (\sen \theta_1 - \sen \theta_2)^2} \\
&= \sqrt{2 - 2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sen \theta_1 \sen \theta_2)} \\
&= \sqrt{2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2))} \\
&= \sqrt{2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2))} \\
&= \sqrt{4 \sen^2 \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}} \\
&= 2 \sen \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}.
\end{aligned}$$

Posto isso, e tomando,  $z_1 = |z_1|e^{i \text{Arg}(z_1)}$  e  $z_2 = |z_2|e^{i \text{Arg}(z_2)}$ , temos

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2| &\geq ||z_1|e^{i \text{Arg}(z_1)} - |z_2|e^{i \text{Arg}(z_2)}| \\
&\geq \frac{|e^{i \text{Arg}(z_1)} - e^{i \text{Arg}(z_2)}|}{r_{\lambda,n}} \\
&= \frac{2}{r_{\lambda,n}} \sen \frac{|\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)|}{2} \\
&\geq \frac{2}{\pi r_{\lambda,n}} |\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)|.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.19.** *Se  $n \geq 7$  então*

$$|G_{\lambda,n}(\pm w_{\lambda,n})| < \frac{1}{r_{\lambda,n}} - \frac{1}{2}.$$

*Demonstração.* Suponha  $n \geq 7$ , mostramos que

$$|G_{\lambda,n}(\pm w_{\lambda,n})| < \frac{1}{4}$$

e

$$r_{\lambda,n} < \frac{4}{3}.$$

Com efeito, pela Observação 3.14, obtemos

$$|\lambda| < 1/4 < 1 < 2^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Logo, pela Observação 2.3

$$r_{\lambda,n} = \frac{n^{-1}\sqrt{2}}{2^n\sqrt{|\lambda|}}.$$

Assim,

$$r_{\lambda,n} = \frac{n^{-1}\sqrt{2}}{2^n\sqrt{|\lambda|}} < \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{2^{-2(\frac{n+1}{2n(n-1)})}} = 2^{\frac{2n+1}{n(n-1)}}. \quad (3.18)$$

Note que,  $2^{\frac{2(n+1)}{n(n-1)^2}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, para  $n \geq 7$  temos

$$r_{\lambda,n} < 2^{\frac{2n+1}{n(n-1)}} < \frac{4}{3} \quad (3.19)$$

como queríamos. Por outro lado, dado que,  $\pm w_{\lambda,n} = \pm 2\lambda^{\frac{n-1}{2n}}$ , então

$$\begin{aligned} |G_{\lambda,n}(\pm w_{\lambda,n})| &= \lambda^{\frac{n-1}{2n}} \frac{|2^{2n}\lambda^{n-1} + 1|}{2^n |\lambda|^{\frac{n-1}{2}}} \\ &= \frac{|2^{2n}(\lambda^{n-1} + 2^{-2n})|}{2^n |\lambda|^{\frac{(n-1)^2}{2n}}} \\ &= \frac{2^n |\lambda^{n-1} + 2^{-2n}|}{|\lambda|^{\frac{(n-1)^2}{2n}}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Suponha sem perda de generalidade que  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} < \lambda$  então pelo Teorema do Valor Médio para a função  $x \mapsto x^{n-1}$

$$|\lambda^{n-1} - \lambda_j^{n-1}| \leq (n-1)|\lambda|^{n-2}|\lambda - \lambda_j|$$

Isto posto, e considerando novamente a Observação 3.14, temos

$$\begin{aligned} |\lambda^{n-1} - 2^{-2n}| &= |\lambda^{n-1} - \lambda_j^{n-1}| \\ &\leq (n-1)|\lambda|^{n-2}|\lambda - \lambda_j| \\ &\leq \frac{n-1}{64n} \left( |\lambda_j| + \frac{1}{64n} \right)^{n-2} \\ &< \frac{1}{64} \left( 4^{-\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{64n} \right)^{n-2} \\ &< \frac{1}{64} \left( \frac{1}{4} \right)^{n-2} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Usando a desigualdade (3.21) e a Observação 3.14, temos

$$\begin{aligned} |G_{\lambda,n}(\pm w_{\lambda,n})| &= \frac{2^n |\lambda^{n-1} + 2^{-2n}|}{|\lambda|^{\frac{(n-1)^2}{2n}}} \\ &< \frac{2^n}{2^{-2\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(\frac{(n-1)^2}{2n}\right)} 2^{2n+2}} \\ &= \frac{1}{2^{2+\frac{1}{n}}} \\ &< \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Portanto, pela desigualdade (3.19)

$$|G_{\lambda,n}(\pm w_{\lambda,n})| < \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} < \frac{1}{r_{\lambda,n}} - \frac{1}{2}.$$

□

**Teorema 3.20.** *Seja  $n \geq 63018$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se*

$$|\lambda - \lambda_j| \leq \frac{1}{64n},$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  são  $(n-1)$ -enésimas raízes complexas de  $-4^{-n}$  então  $G_{\lambda,n}^k(w_{\lambda,n}) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  com  $G_{\lambda,n}(w_{\lambda,n}) \notin \tilde{B}_{\lambda,n}$  e  $G_{\lambda,n}^2(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Além disso,  $J(G_{\lambda,n})$  é uma curva Sierpinski e

$$1 \leq \dim_H J(G_{\lambda,n}) \leq 1 + \frac{10}{\ln n}.$$

*Demonstração.* Seja  $n \geq 63018$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Suponhamos

$$|\lambda - \lambda_j| \leq \frac{1}{64n},$$

onde,  $\lambda_j^{n-1} = -4^{-n}$  para  $j = 1, \dots, n-1$ . Então, pelo Lema 3.19

$$|G_{\lambda,n}(\pm w_{\lambda,n})| < \frac{1}{r_{\lambda,n}} - \frac{1}{2} < \frac{1}{r_{\lambda,n}},$$

consequentemente, conforme o Lema 2.5, temos  $\tilde{T}_{\lambda,n} \neq \tilde{B}_{\lambda,n}$ ,  $G_{\lambda,n}(w_{\lambda,n}) \in \tilde{T}_{\lambda,n}$  e  $G_{\lambda,n}^2(w_{\lambda,n}) \in \tilde{B}_{\lambda,n}$ . Sendo assim, pelo Lema 2.4

$$|w_{\lambda,n}| \in \left[ \frac{1}{r_{\lambda,n}}, r_{\lambda,n} \right] \quad (3.23)$$

e além disso, concluímos pelo Teorema da Tricotomia de Escape 2.1 que o conjunto de Julia da função  $G_{\lambda,n}$ ,  $J(G_{\lambda,n})$ , é uma curva Sierpinski. Vejamos agora que,

$$1 \leq \dim_H J(G_{\lambda,n}) \leq 1 + \frac{10}{\ln n}. \quad (3.24)$$

Com efeito, uma vez que,  $J(G_{\lambda,n})$  é uma curva Sierpinski então nele está contido curvas contínuas não triviais de dimensão topológica um e através do Teorema Szpilrajn's [21] temos,

$$\dim_H J(G_{\lambda,n}) > 1.$$

Mostramos agora a estimativa superior de (3.24). Seja  $z \in J(G_{\lambda,n})$  tal que  $|z| \geq 1$ , dessa forma, pelo Lema 2.4

$$|z| \in \left[ \frac{1}{r_{\lambda,n}}, r_{\lambda,n} \right] \quad (3.25)$$

em vista disso,

$$1 \leq |z| \leq r_{\lambda,n}. \quad (3.26)$$

Logo pelo Lema 3.16 obtemos

$$\frac{1}{|z^{2n} - 1|} \leq \frac{\pi |\lambda|^{\frac{n-1}{4n}} r_{\lambda,n}^{\frac{2n-1}{2}}}{4 \cos^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi}{4n} \sqrt{|G_{\lambda,n}(z) - G_{\lambda,n}(u_z)|}}. \quad (3.27)$$

Além disso, por (3.23) e (3.26) temos pelo Lema 3.17 que

$$\frac{1}{\sqrt{|G_{\lambda,n}(z) - G_{\lambda,n}(u_z)|}} \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}|\lambda|^{\frac{n-1}{4n}} r_{\lambda,n}^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{|G_{\lambda,n}^2(z) - G_{\lambda,n}^2(u_z)|}}. \quad (3.28)$$

Desse modo, uma vez que,  $G_{\lambda,n}(u_z) = \pm w_{\lambda,n}$  e conforme as desigualdades (3.26), (3.27) e (3.28), temos

$$\begin{aligned} \frac{|z|^{n+1}}{|z^{2n} - 1|} &\leq \frac{\pi|\lambda|^{\frac{n-1}{4n}} r_{\lambda,n}^{\frac{4n+1}{2}}}{4 \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sqrt{|G_{\lambda,n}(z) - G_{\lambda,n}(u_z)|}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}\pi\sqrt{n}|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} r_{\lambda,n}^{\frac{5n+2}{2}}}{4 \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sqrt{|G_{\lambda,n}^2(z) - G_{\lambda,n}^2(u_z)|}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{n}|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} r_{\lambda,n}^{\frac{5n+2}{2}}}{2\sqrt{2} \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sqrt{|G_{\lambda,n}^2(z) - G_{\lambda,n}^2(u_z)|}} \\ &\leq \frac{\pi\sqrt{n}|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}} r_{\lambda,n}^{\frac{5n+2}{2}}}{2 \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por outro lado, se considerarmos

$$\frac{2\pi m}{n} \leq |\text{Arg}(G_{\lambda,n}(z)) - \text{Arg}(G_{\lambda,n}(u_z))| \leq \pi \quad (3.30)$$

para algum  $1 \leq m \leq n/2$ . Temos em vista disso pelo Lema 3.18 que

$$\frac{1}{\sqrt{|G_{\lambda,n}(z) - G_{\lambda,n}(u_z)|}} \leq \frac{\pi^{1/2} r_{\lambda,n}^{1/2}}{\sqrt{2}\sqrt{|\text{Arg}(G_{\lambda,n}(z)) - \text{Arg}(G_{\lambda,n}(u_z))|}}. \quad (3.31)$$

Então, de acordo com as desigualdades (3.26), (3.27), (3.30) e (3.31), temos

$$\begin{aligned} \frac{|z|^{n+1}}{|z^{2n} - 1|} &\leq \frac{\pi|\lambda|^{\frac{n-1}{4n}} r_{\lambda,n}^{\frac{4n+1}{2}}}{4 \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sqrt{|G_{\lambda,n}(z) - G_{\lambda,n}(u_z)|}} \\ &\leq \frac{\pi^{\frac{3}{2}}|\lambda|^{\frac{n-1}{4n}} r_{\lambda,n}^{2n+1}}{4\sqrt{2} \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sqrt{|\text{Arg}(G_{\lambda,n}(z)) - \text{Arg}(G_{\lambda,n}(u_z))|}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}|\lambda|^{\frac{n-1}{4n}} r_{\lambda,n}^{2n+1}}{4\sqrt{2} \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sqrt{|\text{Arg}(G_{\lambda,n}(z)) - \text{Arg}(\pm w_{\lambda,n})|}} \\ &\leq \frac{\pi\sqrt{n}|\lambda|^{\frac{n-1}{4n}} r_{\lambda,n}^{2n+1}}{8\sqrt{m} \cos^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sabemos que para cada  $z \in J(G_{\lambda,n})$  a cardinalidade do conjunto  $G_{\lambda,n}^{-1}(z)$  é  $2n$  pontos, digamos

$$z_1, \dots, z_n, \dots, z_{2n}$$

nos quais  $z_{j+n} = 1/z_j$  para  $j = 1, \dots, n$ . Devido ao Lema 2.4 temos  $1 \leq |z_j| \leq r_{\lambda, n}$  para  $j = 1, \dots, 2n$  e além disso, consideremos que

$$\text{Arg}(z_{j+1}) = \text{Arg}(z_1) + \frac{2\pi j}{n}$$

para  $j = 1, \dots, n-1$ . Consequentemente, de forma análoga para  $k \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $G_{\lambda, n}^{-1}(z)$  consiste de  $(2n)^k$  pontos digamos  $z_{j_1, \dots, j_k}$  com  $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, 2n\}$  e  $z_{j_1, \dots, j_{k+n}} = 1/z_{j_1, \dots, j_k}$  para  $k = 1, \dots, n$ , tal que,  $G_{\lambda, n}(z_{j_1, \dots, j_k}) = z_{j_1, \dots, j_{k-1}}$  e  $1 \leq |z_{j_1, \dots, j_k}| \leq r_{\lambda, n}$ . Para mais,

$$\text{Arg}(z_{j_1, \dots, j_{k-1}, j+1}) = \text{Arg}(z_{j_1, \dots, j_{k-1}, 1}) + \frac{2\pi j}{n}$$

para  $j = 1, \dots, n-1$ . Isto posto, temos que para  $k \geq 2$  e cada  $j_1, \dots, j_{k-2}, j_k \in \{1, \dots, 2n\}$  existem conjuntos de índices

$$\mathcal{J}_0, \dots, \mathcal{J}_{\lceil n/4 \rceil - 1} \subset \{1, \dots, n\},$$

tal que,  $\cup_{m=0}^{\lceil n/4 \rceil - 1} \mathcal{J}_m = \{1, \dots, n\}$  e cada conjunto  $\mathcal{J}_m$  tem no máximo 4 elementos e

$$\frac{2\pi m}{n} \leq |\text{Arg}(z_{j_1, \dots, j_k}) - \text{Arg}(\pm w_{\lambda, n})| \leq \pi \quad (3.33)$$

para cada  $j_{k-1} \in \mathcal{J}_m$  e  $m = 0, \dots, \lceil n/4 \rceil - 1$ . Analogamente, existem conjuntos de índices

$$\mathcal{J}'_0, \dots, \mathcal{J}'_{\lceil n/4 \rceil - 1} \subset \{n+1, \dots, 2n\},$$

tal que,  $\cup_{m=0}^{\lceil n/4 \rceil - 1} \mathcal{J}'_m = \{n+1, \dots, 2n\}$  e cada conjunto  $\mathcal{J}'_m$  tem no máximo 4 elementos e

$$\frac{2\pi m}{n} \leq |\text{Arg}(z_{j_1, \dots, j_k}) - \text{Arg}(\pm w_{\lambda, n})| \leq \pi \quad (3.34)$$

para cada  $j_{k-1} \in \mathcal{J}'_m$  e  $m = 0, \dots, \lceil n/4 \rceil - 1$ . Seja,  $k \geq 2$ ,  $1 < t < 2$ ,  $j_1, \dots, j_{k-1} \in \{1, \dots, 2n\}$  e  $j_k \in \{1, \dots, n\}$ . Então, uma vez que,  $|z_{j_1, \dots, j_k}| \geq 1$  temos pelo Lema 2.4 e as inequações (3.29), (3.32), (3.33) e (3.34) que

$$\begin{aligned} \sum_{j_{k-1}=1}^{2n} \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t} &= \sum_{j_{k-1}=1}^n \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t} + \sum_{j_{k-1}=n+1}^{2n} \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\lceil n/4 \rceil - 1} \left( \sum_{j_{k-1} \in \mathcal{J}_m} \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t} + \sum_{j_{k-1} \in \mathcal{J}'_m} \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t} \right) \\ &\leq 8 \left( \frac{\pi}{2} \right)^t \frac{n^{\frac{t}{2}} |\lambda|^{\frac{n-1}{2n} t} r_{\lambda, n}^{\frac{5n+2}{2} t}}{\cos^{\frac{n+1}{2} t} \frac{\pi}{4n}} + 8 \left( \frac{\pi}{8} \right)^t \frac{n^{\frac{t}{2}} |\lambda|^{\frac{n-1}{4n} t} r_{\lambda, n}^{(2n+1)t}}{\cos^{\frac{n+1}{2} t} \frac{\pi}{4n}} \sum_{m=1}^{\lceil n/4 \rceil - 1} \frac{1}{m^{\frac{t}{2}}} \end{aligned}$$

Isto posto, junto com a estimativa

$$\sum_{m=1}^{\lceil n/4 \rceil - 1} \frac{1}{m^{\frac{t}{2}}} < \int_0^{n/4} \frac{dx}{x^{\frac{t}{2}}} = \frac{2^{t-1} n^{1-\frac{t}{2}}}{2-t}$$

e a inequação (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j_{k-1}=1}^{2n} \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t} &\leq 8 \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{n^{\frac{t}{2}} |\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} r_{\lambda, n}^{\frac{5n+2}{2}t}}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} + 8 \left(\frac{\pi}{8}\right)^t \frac{n^{\frac{t}{2}} |\lambda|^{\frac{n-1}{4n}t} r_{\lambda, n}^{(2n+1)t}}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} \sum_{m=1}^{\lceil n/4 \rceil - 1} \frac{1}{m^{\frac{t}{2}}} \\
&< \frac{\pi^t}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} \left( \frac{8}{2^t} n^{\frac{t}{2}} |\lambda|^{\frac{(n-1)}{2n}t} \frac{2^{\frac{(5n+2)t}{2(n-1)}}}{|\lambda|^{\frac{(5n+2)t}{4n}}} + \frac{8}{8^t} n^{\frac{t}{2}} |\lambda|^{\frac{(n-1)}{4n}t} \frac{2^{\frac{(2n+1)t}{n-1}}}{|\lambda|^{\frac{(2n+1)t}{2n}}} \frac{2^{t-1} n^{1-\frac{t}{2}}}{2-t} \right) \\
&= \frac{\pi^t}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} \left( 8 \frac{2^{\frac{3n+4}{2(n-1)}t} n^{\frac{t}{2}}}{|\lambda|^{\frac{3n+4}{4n}t}} + \frac{4}{2-t} \frac{2^{\frac{3}{n-1}t} n}{|\lambda|^{\frac{3(n+1)}{4n}t}} \right). \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Para  $1 < t < 2$ , seja

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_t^+ &= \sup_{k \geq 2} \max_{j_1, \dots, j_{k-2}, j_k} \sum_{j_{k-1}=1}^{2n} |G'_{\lambda, n}(z_{j_1, \dots, j_k})|^{-t} \\
&= \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sup_{k \geq 2} \max_{j_1, \dots, j_{k-2}, j_k} \sum_{j_{k-1}=1}^{2n} \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t}
\end{aligned}$$

e a função pressão dada por

$$\begin{aligned}
P(G_{\lambda, n}, t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \sum_{j_1=1}^{2n} \cdots \sum_{j_1=1}^{2n} |(G_{\lambda, n}^k)'(z_{j_1, \dots, j_k})|^{-t} \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left( 2n (\tilde{S}_t^+)^{k-2} |G'_{\lambda, n}(z_{j_1, \dots, j_k})|^{-t} \right) \\
&= \ln \tilde{S}_t^+.
\end{aligned}$$

Então pelo Teorema da Fórmula de Bowen 3.7,

$$\dim_H J(G_{\lambda, n}) \leq \inf \{ t > 0 ; \ln S_t^+ \geq 0 \}. \tag{3.36}$$

Note que para  $j_k \in \{n+1, \dots, 2n\}$  temos  $|z_{j_1, \dots, j_{k-n}}|^{(n-1)t} \geq 1$ , então

$$\begin{aligned}
\frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t} &= \frac{|1/z_{j_1, \dots, j_{k-n}}|^{(n+1)t}}{|(1/z_{j_1, \dots, j_{k-n}})^{2n} - 1|^t} \\
&= \frac{|z_{j_1, \dots, j_{k-n}}|^{(n-1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_{k-n}}^{2n} - 1|^t} \\
&\leq \frac{|z_{j_1, \dots, j_{k-n}}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_{k-n}}^{2n} - 1|^t}
\end{aligned}$$

E consequentemente,

$$\tilde{S}_t^+ = \frac{1}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2n}t} n^t} \sup_{k \geq 2} \max_{j_1, \dots, j_{k-2}, j_k} \max_{j_k \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j_{k-1}=1}^{2n} \frac{|z_{j_1, \dots, j_k}|^{(n+1)t}}{|z_{j_1, \dots, j_k}^{2n} - 1|^t},$$

E por (3.35) e (3.17), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_t^+ &\leq \frac{\pi^t}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} \left( 8 \frac{2^{\frac{3n+4}{2(n-1)}t} n^{\frac{t}{2}}}{|\lambda|^{\frac{3n+4}{4n}t}} + \frac{4}{2-t} \frac{2^{\frac{3}{n-1}t} n}{|\lambda|^{\frac{3(n+1)}{4n}t}} \right) \\
&< \frac{\pi^t}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} \left( 8 \frac{2^{\frac{3n+4}{2(n-1)}t}}{|\lambda|^{\frac{5n+2}{4n}t} n^{\frac{t}{2}}} + \frac{4}{2-t} \frac{2^{\frac{3}{n-1}t}}{|\lambda|^{\frac{5n+1}{4n}t} n^{t-1}} \right) \\
&< \frac{\pi^t}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} \left( 8 \frac{2^{\frac{3n+4}{2(n-1)}t}}{2^{-\frac{5n^2+7n+2}{2n(n-1)}t} n^{\frac{t}{2}}} + \frac{4}{2-t} \frac{2^{\frac{3}{n-1}t}}{2^{-\frac{5n^2+6n+1}{2n(n-1)}t} n^{t-1}} \right) \\
&= \frac{\pi^t}{\cos^{\frac{n+1}{2}t} \frac{\pi}{4n}} \left( 8 \frac{2^{\frac{8n^2+11n+2}{2n(n-1)}t}}{n^{\frac{t}{2}}} + \frac{4}{2-t} \frac{2^{\frac{5n^2+12n+1}{2n(n-1)}t}}{n^{t-1}} \right) \\
&= \left( \frac{\pi 2^{\frac{5n^2+12n+1}{2n(n-1)}}}{\cos^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi}{4n}} \right)^t \left( 8 \frac{2^{\frac{3n^2-n+1}{2n(n-1)}t}}{n^{1-\frac{t}{2}}} + \frac{4}{2-t} \right) n^{1-t}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Considere  $x = \frac{\pi^2}{32n^2}$  e  $y = \left( \frac{x}{1-x} \right)^{-1}$ , assim

$$\left( 1 + \frac{x}{1-x} \right) = \left[ \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{\frac{1}{y}}.$$

Visto que,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y = e$ , então  $\left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y < e$ . Dessa forma,

$$\left( 1 + \frac{x}{1-x} \right)^{\frac{n+1}{2}} = \left[ \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{\frac{1}{y} \frac{n+1}{2}} < \exp \left( \frac{1}{y} \cdot \frac{n+1}{2} \right)$$

Isto posto, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi}{4n}} &= \frac{1}{\left( 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8n} \right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&< \frac{1}{\left( 1 - \frac{\pi^2}{32n^2} \right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= \left( 1 + \frac{\frac{\pi^2}{32n^2}}{1 - \frac{\pi^2}{32n^2}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \\
&< \exp \left( \frac{\frac{\pi^2}{32n^2} (n+1)}{1 - \frac{\pi^2}{32n^2}} \right) \\
&= \exp \left( \frac{\pi^2 (n+1)}{2(32n^2 - \pi^2)} \right).
\end{aligned}$$

Assim, verificamos diretamente que para  $n > 10^3$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi 2^{\frac{5n^2+12n+1}{2n(n-1)}}}{\cos^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi}{4n}} &= \frac{\pi 2^{\frac{5n^2-5n}{2n(n-1)} + \frac{17n+1}{2n(n-1)}}}{\cos^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi}{4n}} \\
&= \frac{\pi 2^{\frac{5n(n-1)}{2n(n-1)} + \frac{17+\frac{1}{n}}{2(n-1)}}}{\cos^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi}{4n}} \\
&< 4\sqrt{2}\pi 2^{\frac{17+\frac{1}{n}}{2(n-1)}} \exp\left(\frac{\pi^2(n+1)}{2(32n^2-\pi^2)}\right) \\
&= 4\sqrt{2}\pi 2^{\frac{17+\frac{1}{n}}{2(n-1)}} \exp\left(\frac{\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\left(32n-\frac{\pi^2}{n}\right)}\right) \\
&< 4\sqrt{2}\pi 2^{\frac{17001}{1998}} \exp\left(\frac{\pi^2\frac{1001}{1000}}{64000-\frac{\pi^2}{1000}}\right) \\
&< 4\sqrt{2}\pi 2^{\frac{18}{1998}} \exp\left(\frac{2\pi^2}{63999}\right) \\
&< 18.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Similarmente, para  $n > 2^{10}$  e  $t < 19/10$ ,

$$\begin{aligned}
8 \frac{2^{\frac{3n^2-n+1}{2n(n-1)}t}}{n^{1-\frac{t}{2}}} + \frac{4}{2-t} &< 8 \frac{2^{\frac{3n^2-n+1}{2n(n-1)}\frac{19}{10}}}{n^{1-\frac{19}{2}}} + \frac{4}{2-\frac{19}{10}} \\
&< 8 \frac{2^{\frac{3n^2-n+1}{2n(n-1)}2}}{n^{\frac{1}{20}}} + 40 \\
&= 8 \frac{2^{\frac{3n(n-1)}{n(n-1)} + \frac{2n+1}{n(n-1)}}}{n^{\frac{1}{20}}} + 40 \\
&= 64 \frac{2^{\frac{2n+1}{n(n-1)}}}{n^{\frac{1}{20}}} + 40 \\
&= 64 \frac{2^{\frac{2+\frac{1}{n}}{(n-1)}}}{n^{\frac{1}{20}}} + 40 \\
&< 2^6 \frac{2^{\frac{2+\frac{1}{2^{10}}}}{2^{10}-1}}}{2^{\frac{10}{20}}} + 40 \\
&= 32\sqrt{2} \frac{2^{\frac{2^{11}+1}{2^{10}-1}}}{2^{\frac{10}{20}}} + 40 \\
&< 32\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{1}{500}} + 40 \\
&< 86.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Logo, concluímos de acordo com (3.37) (3.38) e (3.39) para  $n > 2^{10}$  e  $1 < t < 19/10$ ,

$$\tilde{S}_t^+ \leq 86 \cdot 18^t n^{1-t},$$

o que implica em,

$$\ln \tilde{S}_t^+ \leq \ln n + \ln 86 - t(\ln n - \ln 18).$$

Suponhamos,

$$\ln n + \ln 86 - t(\ln n - \ln 18) \leq 0,$$

desa forma,

$$t \geq \frac{\ln n + \ln 86}{\ln n - \ln 18}.$$

Portanto, pela desigualdade (3.36)

$$\begin{aligned} \dim_H J(G_{\lambda,n}) &\leq \inf \left\{ t > 0 ; \ln \tilde{S}_t^+ \leq 0 \right\} \\ &\leq \frac{\ln n + \ln 86}{\ln n - \ln 18} \\ &= \frac{\ln n + \ln 1348 - \ln 18}{\ln n - \ln 18} \\ &= 1 + \frac{\ln 1348}{\ln n - \ln 18} \\ &< 1 + \frac{10}{\ln n} \end{aligned}$$

□

## Considerações Finais

Neste trabalho, investigamos a dimensão de Hausdorff dos conjuntos de Julia da família de funções  $F_{\lambda,n}$ , os quais são descritos no Teorema da Tricotomia de Escape. Com as estimativas apresentadas foi possível fornecer exemplos de conjuntos de Julia da função  $F_{\lambda,n}$  do tipo Cantor, Cantor de quasi-círculos ou de curva Sierpinski com dimensão de Hausdorff arbitrariamente próximo de 1.

Uma observação interessante é o fato do Teorema 3.12 não ser válido para  $n \geq 3$  quando  $\lambda$  está próximo de 0. Além disso, estudando alguns artigos na construção deste trabalho, vimos que para  $n = 2$  o conjunto de Julia da função  $F_{\lambda,2}$  converge para um disco unitário fechado na métrica de Hausdorff quando  $\lambda \rightarrow 0$ , [10]. Assim, surge a seguinte indagação: É possível determinar o comportamento da dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia da função  $F_{\lambda,n}$  quando  $\lambda \rightarrow 0$  ?

Por fim, espera-se que este trabalho sirva de fonte de pesquisa para a comunidade acadêmica, bem como seja motivação para futuras pesquisas.

## Referências Bibliográficas

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1996.
- [2] K. Barański, B. Karpińska, and A. Zdunik. Bowen’s formula for meromorphic functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 32(4):1165–1189, 2012.
- [3] K. Barański and M. Wardal. On the hausdorff dimension of the sierpiński julia sets. *Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series A*, 35(8):3293–3313, 2015.
- [4] A. F. Beardon. *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*, volume 132. Springer Science & Business Media, 1 edition, 2000.
- [5] P. Blanchard, R. L. Devaney, D. M. Look, P. Seal, and Y. Shapiro. Sierpinski-curve Julia sets and singular perturbations of complex polynomials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(4):1047–1055, 2005.
- [6] M. Brin and G. Stuck. *Introduction To Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Bloomington, 2 edition, 1978.
- [8] R. L. Devaney. Cantor and Sierpinski, Julia and Fatou: Complex topology meets complex dynamics. *Notices of the American Mathematical Society*, 51(1):9–15, 2004.
- [9] R. L. Devaney. Structure of the McMullen domain in the parameter planes for rational maps. *Fundamenta Mathematicae*, 185:267–285, 2005.
- [10] R. L. Devaney and A. Garijo. Julia sets converging to the unit disk. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(03):981–989, 2007.
- [11] R. L. Devaney, K. Josić, and Y. Shapiro. Singular perturbations of quadratic maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 14(1):161–169, 2004.
- [12] R. L. Devaney, D. M. Look, and D. Uminsky. The Escape Trichotomy for Singularly Perturbed Rational Maps. *Indiana University Mathematics J.*, 54:1621–1634, 2005.
- [13] K. Falconer. *Fractal Geometry*. John Wiley & Sons Ltd, Hoboken, 2<sup>a</sup> edition, 2003.
- [14] P. Haïssinsky and K. M. Pilgrim. Quasisymmetrically inequivalent hyperbolic Julia sets. *Revista Matemática Iberoamericana*, 28(4):1025–1034, 2012.

- [15] C. T. McMullen. Automorfismos de mapas racionales. In *Funções holomorfas e I módulos*, volume 10, pages 31–60. Springer, Now York, 10 edition, 1998.
- [16] J. Milnor. Geometry and Dynamics of Quadratic Rational Maps. *Experimental Mathematics*, 2:37–83, 1993.
- [17] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. Princeton University Press, 3 edition, 2011.
- [18] F. Przytycki and M. Urbanski. *Conformal fractals: ergodic theory methods*. Cambridge University Press, 2010.
- [19] D. Ruelle. Repellers for real analytic maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2(1):99–107, 1982.
- [20] D. Ruelle. *Thermodynamic formalism: the mathematical structure of equilibrium statistical mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [21] E. Szpilrajn. La dimension et la mesure. *Fundamenta Mathematicae*, pages 81–89, 1937.