KAMILA FERNANDA LOBO MADALENA

UMA ANÁLISE DE UM MODELO ÍNTEGRO-DIFERENCIAL DO TIPO LOTKA-VOLTERRA COM CONTROLE ÓTIMO

Dissertação apresentada na Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Anderson L. A. de Araujo

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T
M178a
2021

Madalena, Kamila Fernanda Lobo, 1993-
Uma análise de um modelo íntegro-diferencial do tipo Lotka-Volterra com controle ótimo / Kamila Fernanda Lobo Madalena. – Viçosa, MG, 2021.
77 f. ; 29 cm.

Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 76-77.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Otimização matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.353

KAMILA FERNANDA LOBO MADALENA

UMA ANÁLISE DE UM MODELO ÍNTEGRO-DIFERENCIAL DO TIPO LOTKA-VOLTERRA COM CONTROLE ÓTIMO

Dissertação apresentada na Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 29 de março de 2021.

Assentimento:

Kamila F. L. Madalena

Kamila Fernanda Lobo Madalena
Autora

Anderson L. A. de Araujo

Anderson Luis Albuquerque de Araujo
Orientador

Dedico este trabalho aos meus pais,
Walter e Eliandra.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

À minha família por todo apoio.

Ao professor Anderson, pela orientação e por todo aprendizado.

Aos meus colegas de curso por toda ajuda prestada.

Aos professores e funcionários da UFV/DMA pela formação e todo serviço prestado.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro fundamental para a realização deste trabalho.

Se você não puder se destacar pelo talento, vença pelo esforço.

Dave Weinbaum

Resumo

MADALENA, K.F.L, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, março de 2021. **Uma análise de um modelo íntegro-diferencial do tipo Lotka-Volterra com controle ótimo**. Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo .

Neste trabalho apresentaremos um modelo matemático do tipo Lotka-Volterra associado à modelagem e estudo do crescimento de câncer composto por um sistema de equações íntegro-diferenciais parciais parabólicas. Nosso objetivo é descrever resultados sobre existência e unicidade de soluções para tal modelo. Além disso, estudaremos um problema de controle ótimo, mostrando a existência de um controle ótimo e estabelecendo resultados de otimalidade para tal controle.

Palavras-chave: EDP. Soluções. Controle Ótimo.

Abstract

MADALENA, K.F.L, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, March, 2021. **An analysis of an integral-differential Lotka-Volterra model with optimal control**. Adviser: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

In this work we will present a mathematical model of the Lotka-Volterra type associated with the modeling and study of cancer growth composed by a system of partial parabolic integral-differential equations. Our goal is to describe results concerning. the existence and uniqueness of solutions for the model. Furthermore, we will study an optimal control problem, showing the existence of an optimal control and establishing optimally results for such model.

Keywords: PDE. Solutions. Optimal Control.

Sumário

Introdução **9**

1 Preliminares **15**

1.1 Espaços de Sobolev 15

1.2 Espaços à valores vetoriais 18

1.3 Desigualdades notáveis e fórmulas de integração 20

1.4 Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial 21

1.5 Existência e unicidade de solução para um problema parabólico 23

1.6 O Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder 24

2 Teorema de existência e unicidade para o modelo **26**

2.1 O problema principal 26

2.2 Solução do problema principal 27

2.3 Propriedades do Operador Solução 51

3 Um problema de controle ótimo **60**

3.1 Existência de um controle ótimo 60

3.2 Condições de otimalidade para o controle ótimo 64

Considerações Finais **75**

Referências Bibliográficas **76**

Introdução

A biologia de populações, num quadro de modelagem matemática, se inicia com Thomas Malthus (1766-1834) cuja fama advém do seu famoso modelo que prediz o crescimento exponencial da população, veja [16]:

$$\frac{dN}{dt} = aN - mN \Rightarrow N(t) = N_0 \exp^{(a-m)t}, \tag{1}$$

onde N é o número de indivíduos da população em apreço e a e m são constantes positivas que representam as taxas de nascimento e de morte, normalmente fundidas numa só constante, n.

Apesar de incompleto, o modelo de Malthus foi muito importante, pois a partir dele muitos outros cientistas puderam desenvolver modelos cada vez mais realistas. Proeminente entre estes está o modelo de Verhulst(1804-1849) que contém um fator limitante o qual depende de um parâmetro chamado capacidade de suporte cujo significado é o número máximo de indivíduos que um ambiente pode suportar. Esse fator faz com que a população cresça até um estado estacionário quando $t \to \infty$. Matematicamente, o modelo é expresso por:

$$\frac{dN}{dt} = nN(1 - N/K) \to N(t) = \frac{N_0 K \exp^{nt}}{K + N_0 \exp^{nt-1}} \to K, \tag{2}$$

que também é conhecido por modelo logístico.

Se $N_0(0) < K$, então $N(t)$ aumenta monotonicamente, indo assintoticamente para K, e se $N(0) > K, N(t)$ diminuirá assintoticamente a K.

Após a primeira guerra mundial, Lotka(1925) e Volterra(1926) propuseram, de forma independente, um par de equações diferenciais (não lineares) utilizadas para descrever a interação entre duas populações, veja [6].

O modelo inicial de Lotka-Volterra é o que hoje chamamos de modelo predador-presa. O modelo de Lotka-Volterra desempenha um papel importante no estudo de sistemas ecológicos, pois foi o primeiro modelo proposto para tentar compreender como duas espécies estão relacionadas na dinâmica entre presas e predadores. De fato, é possível categorizar as interações entre duas espécies em três tipos, cada qual descrito por um modelo do tipo Lotka-Volterra generalizado. Assim pode-se ter:

a) **predação ou parasitismo** - Em 1925 o matemático italiano Vito Volterra desenvolveu o modelo presa-predador, ao tomar conhecimento dos trabalhos do jovem zoologista Umberto D'Ancona. O estudo estatístico de D'Ancona, mostrou que houve um aumento do número de predadores como tubarões e a diminuição de peixes predados pelos tubarões durante a suspensão da pesca em determinada parte do mar Adriático na Itália, devido à Primeira Guerra Mundial (1914 a 1918). No mesmo ano em que Volterra tornou-se um estudioso dos problemas da ecologia, o americano Alfred J. Lotka publica em 1924 seu livro intitulado "Elements of Physical Biology". Em seu livro, Lotka discute a mesma modelagem para estudar a interacão presa-predador. Como os modelos foram propostos de forma independente por Lotka e Volterra, este conjunto de equações ficou conhecido como equações de Lotka-Volterra. Em linhas gerais o modelo pode ser descrito da seguinte forma. Definindo $u(t)$ como o número (ou densidade) de presas de uma determinada espécie e $v(t)$ como o número (ou densidade) de predadores de outra espécie, essas duas quantidades se relacionam nas equações de Lotka-Volterra, veja [16] (veja [9] para mais detalhes):

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= a_u u(t) - b_u u(t)v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= a_v u(t)v(t) - b_v v(t). \end{aligned} \tag{3}$$

No sistema (3), se não existissem os predadores, a população de presas cresceria exponencialmente segundo o modelo Malthusiano, mas este crescimento é regulado pelo encontro das presas com os predadores dado pelo produto do número de ambos. Como pode ser observado na segunda equação de (3), o número de predadores por sua vez, deveria decrescer exponencialmente em uma região sem alimentos até atingir sua extinção, mas este decréscimo é regulado pelo produto do número de presas pelo número de predadores. Estes comportamentos são regulados pelas taxas a_u, b_u, a_v e b_v. A constante a_u indica a taxa de crescimento das presas, b_u a taxa de predação das presas. O termo a_v se refere à taxa de crescimento, taxa de eficiência ou frequência de encontro dos predadores com suas presas e b_v é a taxa de mortes dos predadores.

b) **simbiose ou mutualismo** - ocorre quando as espécies envolvidas se beneficiam entre si:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= u(t)\left(a + bv(t)\right) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= v(t)\left(cu(t) + e\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Nesse modelo, a espécie u se beneficia da presença de v e vice-versa.

c) **competição** - ocorre quando as espécies envolvidas disputam algo entre si:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \rho_1 u(t)\left(1 - u(t) - a_{12}v(t)\right) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \rho_2 v(t)\left(1 - v(t) - a_{21}u(t)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Nesse caso, as espécies u e v são prejudicadas, uma pela presença da outra.

Para se levar em conta como uma população se distribui no espaço devemos inicialmente considerar a variável que a descreve como sendo uma densidade populacional, $u(x,t)$, e não a população total. Esta densidade evolui no tempo e no espaço. Para uma única população, teremos então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(u).$$

Nos casos mais simples, $F(u) = u(1-u)$. Com este termo a equação acima é chamada de equação de Fisher-Kolmogorov.

Fisher e Kolmogorov propuseram, de forma independente, uma equação que descreve o crescimento de uma dada população com um termo logístico, semelhante ao modelo de Verhulst, mais um termo de difusão. A equação de Fisher-Kolmogorov descreve um fenômeno muito interessante que apareçe em muitos sistemas físicos chamado de onda viajante, veja [13]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u) + D\Delta u.$$

Esta equação é uma excelente ferramenta para se investigar e analisar a propagação de ondas viajantes e devido a esse fato, ela é muito importante para o estudo de dinâmica de populações.

Na perspectiva da Equação de Fisher-Kolmogorov normal em uma dimensão

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + au(x,t) - bu^2(x,t), \tag{6}$$

o ponto central da modelagem do fenômeno padrão é escrever as interações em um formato não-local considerando $a = a(x,t)$ e $b = b(x,t)$ ou como considerado em [3],

$$-bu(x,t) \times u(x,t) \overset{\text{substituir por}}{\longrightarrow} -bu(x,t) \int_L f_\beta \left(x - x'\right) u\left(x', t\right) dx'. \tag{7}$$

A não-localidade nas interações, equação (7), significa irmos além na descrição das interações propostas por Verhust. Nesta formulação não-local os constituintes de um coletivo interagem com os demais indivíduos não apenas quando estão no mesmo ponto, x, do espaço, $u(x,t) \times u(x,t)$, mas interagem também com seus vizinhos a uma distância β pesadas pela função de distribuição $f\left(x - x'\right)$. Do ponto de vista de um elemento da população, quando um segundo indivíduo entrar no raio de interação β este já o perceberá e, dependendo da escolha do peso f, esta interação será intensa ou não. Esta é uma descrição equivalente ao que ocorre nas interações de longo alcance de elétrons, bactérias, peixes, pássaros e outros animais na natureza distribuídas coletivamente, que apresentam forte necessidade em ficar equidistantes dos demais vizinhos formando estruturas regulares no espaço-tempo, para mais detalhes, ver [3]. A equação de Fisher-Kolmogorov para interações não-locais é escrita como:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + au(x,t) - bu(x,t) \int_L f_\beta \left(x - x'\right) u\left(x', t\right) dx'. \tag{8}$$

Como proposto em [29], considere a seguinte equação:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \int_L g_\alpha \left(x - x'\right) u\left(x', t\right) dx' - bu(x,t) \int_L f_\beta \left(x - x'\right) u\left(x', t\right) dx'. \tag{9}$$

Nesta expressão é realizado uma aplicacão da não-localidade também no termo de crescimento. Com isso a populacão crescerá não mais com a contribuição de $u(x,t)$ apenas no ponto x, mas também devido a distribuicão desta função em um alcance α pesada pela função de distribuição $g\left(x-x'\right)$. Esta proposta, equação (9), é uma generalização da equação (8) e como tal é capaz de resgatar a formulação anterior, equação (8) e também a equação de Fisher-Kolmogorov normal equação (6).

A equação logística de Verhust pode ser obtida considerando $f_{\beta}\left(x-x'\right) = g_{\alpha}\left(x-x'\right)=\delta\left(x-x'\right)$ na equação (9), ou seja,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=au(x,t)-bu^{2}(x,t).$$

Uma generalização para o modelo de Lokta-Volterra (5) para modelar as interações entre presas e predadores utilizando a metodologia de não-localidade nos termos de interações e crescimentos, foi proposto em [10]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}&=a_u\int_{\Omega}g_{\alpha}\left(x-x'\right)u\left(x',t\right)dx'-b_u v(x,t)\int_{\Omega}f_{\mu}\left(x-x''\right)u\left(x'',t\right)dx''\\
\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}&=a_v u(x,t)\int_{\Omega}g_{\beta}\left(x-x'\right)v\left(x',t\right)dx'-b_v v(x,t)\int_{\Omega}f_{\nu}\left(x-x''\right)v\left(x'',t\right)dx''.
\end{aligned}$$

Além de não incluir o efeito da difusão como em (8), também não foi feito nenhum estudo matemático para tal modelo.

Tomaremos os modelos apresentados anteriormente e com algumas adaptações aplicaremos tais modelos para o estudo da interação (e competição, que generalisa (5)) entre células normais e células tumorais ou infectadas com ambas as populações apresentando processos difusivos e não-localidade nos termos de competição.

Sejam $T\in(0,\infty)$ e $a,b\in\mathbb{R}$ tal que $a<b$ e $(a,b)\in\mathbb{R}$ um intervalo aberto e limitado. Denotemos por $Q=(a,b)\times(0,T)$. O objetivo do presente trabalho é estudar o seguinte modelo:

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial N(x,t)}{\partial t}=D_N\dfrac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2} & & \\
+\left(r_N(x)-\alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N(x,t)dx-\alpha_{IN}\int_a^b I(x,t)dx\right)N(x,t)+f & \text{em} & Q\\
\dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t}=D_I\dfrac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} & & \\
+\left(r_I(x)-\alpha_{II}\displaystyle\int_a^b I(x,t)dx-\alpha_{NI}\int_a^b N(x,t)dx\right)I(x,t)+g & \text{em} & Q\\
N_x(a,t)=N_x(b,t)=I_x(a,t)=I_x(b,t)=0 & \text{em} & (0,T)\\
N(x,0)=N_0(x), I(x,0)=I_0(x) & \text{em} & (a,b),
\end{array}\right. \tag{10}$$

em que N representa as células normais em um dado tecido do corpo humano e I representa as células infectadas neste tecido.

O parâmetro $r_N(x)$ representa a reprodução total de células normais, e $r_I(x)$ representa a reprodução total de células infectadas, ambos são assumidos não-constantes. Várias leis de crescimento poderiam ser usadas, como Gompertz, logistica generalizada, Von Bertanlanfy e outras, veja [18]. Escolhemos os crescimentos do tipo logístico devido à sua simplicidade, mas os consideramos não-constantes.

O sistema (10) é semelhante ao clássico modelo de competição Lotka-Volterra, mas é um modelo do tipo Lotka-Volterra estruturado, estruturado porque o modelo tem estrutura na população variando pelos coeficientes dados pelas integrais. Tais equações são comumente usadas em modelos para crescimento tumoral e invasões biológicas, mas tem uma diferença fundamental. O uso de fluxos não-constantes com crescimento logístico para células normais e células infectadas, mas com a presença de não-localidade nas duas populações. Um termo de fluxo constante já foi tomado em outros modelos bem conhecidos de câncer, especificamente, para descrever o crescimento de células imunes, veja por exemplo [4], mas sem a presença dos termos com a estrutura da população. Consideramos também o acréscimo dos termos de difusão $D_N \frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2}$ e $D_I \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2}$ na equação das células normais e células infectadas, respectivamente.

Também contamos com o acréscimo dos termos de controle f e g no problema (10). Neste sentido, o presente trabalho tem como interesse a análise matemática rigorosa de um problema de controle ótimo associado ao sistema (10). Em termos matemáticos, uma versão relativamente simples do problema a ser analisado é a seguinte: queremos achar uma quadupla $(N, I; f^*, g^*)$ (que será o controle ótimo desejado) tal que

$$J[N, I; f^*, g^*] = \min\{J[R, S; f, g] : (f, g) \in \mathcal{U}\}. \tag{11}$$

Nesta expressão, $\mathcal{U}$ é o conjunto dos *controles admissíveis* do problema, no caso, $\mathcal{U}$ é um subconjunto convexo, fechado e não-vazio do espaço de Banach $L^4(Q) \times L^4(Q)$.

O funcional J é dado por:

$$\begin{aligned} J[N, I; f, g] := \frac{\alpha_1}{2} \int_Q |N(x,t) - N_d(x,t)|^2 \, dxdt + \frac{\alpha_2}{2} \int_Q |I(x,t) - I_d(x,t)|^2 \, dxdt \\ + \frac{\beta_1}{2} \int_Q |f(x,t)|^4 dxdt + \frac{\beta_2}{2} \int_Q |g(x,t)|^4 dxdt, \end{aligned} \tag{12}$$

onde $N(x,t)$ e $I(x,t)$ é solução do sistema (10) associado a f e g. Também estudaremos as condições de otimalidade de primeira ordem que que o controle ótimo deve satisfazer.

Tais condições de otimalidade são dadas pelo seguinte: denotando o controle ótimo por (f, g) e por (N, I), (P, Q) os correspondentes estado ótimo e estado adjunto, respectivamente, que devem satisfazer o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN}\int_a^b I dx\right)N + f, & \text{em} & Q, \\
\dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{NI}\displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{II}\int_a^b I dx\right)I + g, & \text{em} & Q, \\
-\dfrac{\partial P}{\partial t} - D_N P_{xx} - \left(r_N - \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N - \alpha_{IN}\int_a^b I\right)P+ & & \\
+\alpha_{NN}\left(\displaystyle\int_a^b NP\right) + \alpha_{NI}\left(\displaystyle\int_a^b IQ\right) = \alpha_1\left(N - N_d\right) & \text{em} & Q \\
-\dfrac{\partial Q}{\partial t} - D_I Q_{xx} - \left(r_I - \alpha_{II}\displaystyle\int_a^b I - \alpha_{NI}\int_a^b N\right)Q+ & & \\
+\alpha_{II}\left(\displaystyle\int_a^b IQ\right) + \alpha_{IN}\left(\displaystyle\int_a^b NP\right) = \alpha_2\left(I - I_d\right) & \text{em} & Q, \\
N_x\left(a,t\right) = N_x\left(b,t\right) = I_x(a,t) = I_x\left(b,t\right) = 0 & \text{em} & (0,T) \\
P_x\left(a,t\right) = P_x\left(b,t\right) = Q_x(a,t) = Q_x\left(b,t\right) = 0 & \text{em} & (0,T) \\
N(x,0) = N_0(x), I(x,0) = I_0(x) & \text{em} & (a,b) \\
P(x,T) = Q(x,T) = 0 & \text{em} & (a,b)
\end{array}\right. \tag{13}$$

e

$$\int_Q \left(P + \beta_1 f\right)\left(h - f\right) dxdt + \int_Q \left(Q + \beta_2 g\right)\left(j - g\right) dxdt \geq 0 \tag{14}$$

para todo $(h, j) \in \mathcal{U}_{ad}$.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, tratamos das ferramentas utilizadas para o desenvolvimento desse trabalho. Algumas delas são: os Espaços de Sobolev, uma Proposição que se resume a garantir existência, unicidade e uma estimativa para a solução de um problema parabólico linear geral (ver [14]) e o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (ver [12]).

No Capítulo 2, iremos estudar questões de existência e unicidade para o modelo proposto (2.1). Para isso, vamos definir um problema auxiliar formado por duas equações lineares desacopladas e em seguida, vamos definir um operador e, mostraremos que tal operador satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder. Em seguida, definiremos o operador solução F que aplica o termo fonte (f, g) na solução correspondente (N, I). As propriedades deste operador serão úteis para o estudo do problema de controle ótimo.

No Capítulo 3, vamos abordar um problema de controle ótimo para o sistema (2.1). Vamos associar um funcional de custo e provaremos a existência de um controle ótimo, ou seja, um mínimo do funcional, em seguida, provaremos que tal mínimo satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem e para isso, o estudo feito no capítulo anterior para o operador solução F será de fundamental importância.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados os espaços e as ferramentas principais para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev

Nesta e na próxima seção apresentaremos os espaços funcionais que serão utilizados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes sobre tais espaços consultar [8], [1], [7] e [15].

Definição 1.1. *Seja* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *contínua. O suporte de* u*, que será denotado por* $\operatorname{supp}(u)$*, é definido como o fecho em* Ω *do conjunto* $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$*. Se* $\operatorname{supp}(u)$ *for um compacto dizemos que* u *possui suporte compacto. Denotamos por* $C_0(\Omega)$ *o espaço das funções contínuas com suporte compacto.*

Definição 1.2. *Denotemos por* $C^j(\Omega)$*,* j *um número inteiro não-negativo ou infinito, o conjunto das funções* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *que possuem derivadas parciais contínuas até ordem* j*.*

Definição 1.3. *Denotemos por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o conjunto das funções* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens e que têm suporte compacto.*

Definição 1.4. *Uma sucessão* $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *de funções de* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para zero quando existe* $K \subset \Omega$ *compacto tal que*

- $\operatorname{supp} \varphi_\nu \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;
- *Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*,* $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ *uniformemente em* K*,*

onde D^α *denota o operador derivação de ordem* α *definido por*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *e* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$*.*

Definição 1.5. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.6. *Denotemos por $C_B^j(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi \in C^j(\Omega)$ tais que $D^\alpha\varphi$ é limitada em Ω para $|\alpha| \leq j$. $C_B^j(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$||\varphi||_{C_B^j(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha(x)|.$$

Definição 1.7. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das (classes de equivalência das) funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω. $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com as normas*

$$||u||_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < \infty; \\ \sup\limits_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)|, & se\ p = \infty. \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Definição 1.8. *Denotemos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega))$. Tal conjunto é chamado o espaço das distribuições de Ω em $\mathbb{R}$.*

Definição 1.9. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos a derivada de ordem α da distribuição T, $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.10. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que para todo compacto $K \subset \Omega$, $u_{|K} \in L^p(\Omega)$.*

Proposição 1.11. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi$$

define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração. Ver [8], p. 42. □

Proposição 1.12. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então, $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty]$.*

Demonstração. Ver [8], p. 42. □

Definição 1.13. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W_p^m(\Omega)$ é definido como sendo o conjunto*

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ *é a derivada de* u *no sentido das distribuições.* $W_p^m(\Omega)$ *é um espaço de Banach com as normas*

$$||u||_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le m} ||D^\alpha u(x)||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \le p < \infty; \\ \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, & se\ p = \infty. \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$*, denotamos* $W_p^m(\Omega)$ *por* $H^m(\Omega)$*. O espaço* $H^m(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Proposição 1.14. *Seja* $1 < p < \infty$*. Se* $u \in W_p^1(\Omega)$ *então* $u_+, u_- \in W_p^1(\Omega)$ *e temos as expressões*

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u, & se\ u > 0 \\ 0, & se\ u \le 0 \end{cases}$$

e

$$\nabla u_- = \begin{cases} 0, & se\ u \ge 0 \\ -\nabla u, & se\ u < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [11], p. 292. □

Vamos precisar de alguns resultados sobre espaços de Sobolev na reta.

Definição 1.15. *Consideremos o espaço de Hilbert* $H^1(a, b) = W_2^1(a, b)$ *definido por*

$$H^1(a, b) = \{u \in L^2(a, b) : u' \in L^2(a, b)\},$$

com a norma definida por

$$\|u\|_{H^1(a,b)} = \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Lema 1.16. *Seja* (a, b) *um intervalo limitado da reta. A imersão* $H^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$ *é contínua e compacta.*

Demonstração. Ver [5], p. 129. □

1.2 Espaços à valores vetoriais

Para esta seção, consideremos $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e X um espaço de Banach.

Apesar da semelhança entre as definições dessa seção e da anterior, devemos nos precaver com os conceitos de mensurabilidade e integrabilidade em espaços de Banach quaisquer.

Definição 1.17. *Uma função $f : I \to X$ é mensurável se existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0(I, X)$ tal que $f_n \to f$ q.t.p., quando $n \to \infty$.*

Proposição 1.18. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de I para X e $f : I \to X$. Se $f_n \to f$ q.t.p. em I, então f é mensurável.*

Demonstração. Ver [7], p. 4. □

Definição 1.19. *Uma função mensurável $f : I \to X$ é integrável se existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0(I, X)$ tal que*

$$\int_I ||f_n(t) - f(t)|| \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Proposição 1.20 (Teorema de Bochner)**.** *Seja $f : I \to X$ mensurável. Então f é integrável se, e somente se, $||f||$ é integrável. Mais ainda,*

$$\left|\left| \int_I f \right|\right| \leq \int_I ||f||.$$

Demonstração. Ver [7], p. 7. □

Definição 1.21. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(I, X)$ o conjunto das (classes de equivalência das) funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que $t \mapsto ||f(t)||$ pertence ao $L^p(I)$. $L^p(I, X)$ é um espaço de Banach com as normas*

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I ||f(t)||^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < \infty; \\ \displaystyle\sup_{t\in I} \mathrm{ess} ||f(t)||, & se\ p = \infty. \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, $L^p(I, X)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2(I,X)} = \int_I \langle u(x), v(x)\rangle_X \ dx, \quad \forall\ u, v \in L^2(I, X).$$

Definição 1.22. *Denotemos por $\mathcal{D}'(I, X)$ o espaço $\mathcal{L}(\mathcal{D}(I), X)$. Tal conjunto é chamado o espaço das distribuições de I em X.*

Definição 1.23. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p_{loc}(I, X)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que para todo intervalo compacto $J \subset I$, $f_{|J} \in L^p(I, X)$.*

Definição 1.24. *Seja $T \in \mathcal{D}'(I, X)$. Definimos a derivada da distribuição T, $T' \in \mathcal{D}'(I, X)$, por*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle,$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

Proposição 1.25. *Seja $f \in L^1_{loc}(I, X)$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, então*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_I f\varphi$$

define uma distribuição em $\mathcal{D}'(I, X)$.

Demonstração. Ver [7], p. 10. □

Proposição 1.26. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então, $L^p(I, X) \hookrightarrow L^1_{loc}(I, X)$, para todo $p \in [1, \infty]$.*

Demonstração. Ver [7], p. 10. □

O próximo espaço a ser definido terá suma importância no desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.27. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $L^p(Q) = L^p(0, T; L^p(\Omega))$. Denotemos por $W^{2,1}_p(Q)$ o conjunto das (classes de equivalências das) funções mensuráveis $u \in L^p(Q)$ tais que $u_t \in L^p(Q)$ e $D^\alpha u \in L^p(Q)$, para todo $1 \leq |\alpha| \leq 2$, onde $D^\alpha u$ é a derivada de u no sentido das distribuições. $W^{2,1}_p(Q)$ é um espaço de Banach com a seguinte norma*

$$||u||_{W^{2,1}_p(Q)} = \left(||u||^p_{L^p(Q)} + ||u_t||^p_{L^p(Q)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} ||D^\alpha u||^p_{L^p(Q)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 1.28. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. Então, $W^{2,1}_p(Q) \hookrightarrow L^q(Q)$ para q satisfazendo:*

(i) $1 \leq q \leq \dfrac{p(n+2)}{n+2-2p}$, *se* $p < \dfrac{n+2}{2}$;

(ii) $1 \leq q < \infty$, *se* $p = \dfrac{n+2}{2}$;

(iii) $q = \infty$, *se* $p > \dfrac{n+2}{2}$.

Em particular, para qualquer função $u \in W^{2,1}_p(Q)$, existe uma constante C dependendo de Ω, T, p, q e n tal que

$$||u||_{L^q(Q)} \leq C\, ||u||_{W^{2,1}_p(Q)}. \tag{1.2}$$

*Nos casos **(ii)** e **(iii)** a imersão é compacta, e em **(i)** teremos imersão compacta para q satisfazendo $1 \leq q < \frac{p(n+2)}{n+2-2p}$.*

Demonstração. Ver [15], p. 20. □

Em particular, no caso unidimensional (quando $n = 1$) e considerando $p = 2$, segue da Proposição 1.28 - **(iii)** que

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \quad \leq \quad C \, \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}.$$

1.3 Desigualdades notáveis e fórmulas de integração

Nesta seção, seguem algumas desigualdades e fórmulas de integração conhecidas que serão utilizadas ao longo do texto. Para mais detalhes consultar [11].

Proposição 1.29 (Desigualdade de Young)**.** *Se $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.*

Demonstração. Ver [11], p. 622. □

Lema 1.30. *Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p > 1$, então*

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo, obtemos

$$\begin{aligned}(a+b)^p &\leq (2\max\{a, b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leq 2^p(a^p + b^p).\end{aligned}$$

□

Definição 1.31. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada convexa se*

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e cada $0 \leq \theta \leq 1$.

Proposição 1.32. *Seja E um espaço de Banach e $\phi : E \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente (na topologia forte). Então ϕ é semicontínua inferiormente na topologia fraca. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente, então*

$$\phi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(x_n)$$

Proposição 1.33 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja Ω um conjunto mensurável, então para toda função convexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e toda função $u \in L^1(\Omega)$, temos*

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u(x))dx.$$

Demonstração. Ver [11], p. 705. □

Proposição 1.34 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p.\|g\|_q.$$

Demonstração. Ver [5], p. 92. □

Proposição 1.35 (Desigualdade de Gronwall - forma diferencial)**.** *Seja $f(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$, que satisfaz para cada t a desigualdade diferencial*

$$f'(t) \leq \phi(t)f(t) + \psi(t),$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas, integráveis em $[0, T]$. Então

$$f(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(f(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right),$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se

$$f' \leq \phi f \text{ em } [0, T] \text{ e } f(0) = 0,$$

então

$$f \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

Demonstração. Ver [11], p. 624. □

1.4 Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial

Nesta seção, seguem algumas ferramentas do Cálculo Diferencial que serão utilizadas ao longo do texto. Para mais detalhes consultar [2] e [17].

Definição 1.36. *Dizemos que F é uma* ***derivada direcional*** *no ponto x_0, na direção h, se o limite*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{F(x_0 + \epsilon h) - F(x_0)}{\epsilon}$$

existe. Denotaremos por $F'(x_0, h)$.

Definição 1.37. *Suponhamos que para todo $h \in X$ a derivada $F'(x_0, h)$ na direção h exista. A aplicação $\delta_+ F(x_0, \cdot) : X \to Y$ definida por $\delta_+ F(x_0, h) = F'(x_0, h)$ é denominada* ***primeira variação*** *da aplicação F no ponto x_0.*

Definição 1.38. *Suponhamos que F possua uma primeira variação no ponto x_0 e que existe um operador linear contínuo $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\delta_+ F(x_0, h) = \Lambda h$. Então o operador Λ é denominado a* ***derivada de Gâteaux*** *da aplicação F no ponto x_0 e denotamos por $\nabla_G F(x_0)$.*

Assim, $\nabla_G F(x_0)$ é um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para cada $h \in X$ temos a relação

$$F(x_0 + \epsilon h) = F(x_0) + \epsilon \nabla_G F(x_0) h + o(\epsilon),$$

quando $\epsilon \to 0^+$.

Definição 1.39. *Dizemos que o operador F é* ***Fréchet-diferenciável*** *em x_0 se, em uma vizinhança de x_0, ele pode ser representado sob a forma*

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \Lambda h + \alpha(h)\|h\|$$

onde $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ e

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|\alpha(h)\| = \|\alpha(0)\| = 0.$$

O operador Λ é chamado derivada de Fréchet (ou simplesmente derivada) da aplicação F no ponto x_0 e é denotado por $F'(x_0)$.

Definição 1.40. *Dizemos que o operador $F : U \subset X \to Y$ definido sobre um aberto U é* ***de classe*** *$C^1(U)$ se ele possui uma derivada em cada ponto $x \in U$ e a aplicação $x \mapsto F'(x)$ é contínua.*

Observação 1.41. *Se F é Fréchet-diferenciável em x_0, então F é Gâteaux-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) = \nabla_G F(x_0)$.*

Teorema 1.42. *Suponha que f é definida em um conjunto convexo aberto U em um espaço de Banach. Se f é convexa em U e Gâteaux-diferenciável em $a \in U$, então*

$$f(x) \geq f(a) + f'(a; x - a) \text{ para todo } x \in U. \tag{1.3}$$

Se f for Gâteaux-diferenciável em U, então f é convexa se, e somente se, (1.3) for válida para todo $a \in U$. Além disso, f é estritamente convexa se, e somente se, a desigualdade for estrita para $x \neq a$.

Demonstração. Ver [17]. □

Teorema 1.43. *Seja C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach E. Então C é fechado na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ se, e somente se, é fechado na topologia forte.*

Demonstração. Ver [5, p. 60]. □

Proposição 1.44 (Fórmula de Green)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $f, g \in H^2(\Omega)$. Então:*

$$\int_\Omega (\Delta f) g \, dx = -\int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} g \, dS.$$

Demonstração. Ver [5], p. 316. □

1.5 Existência e unicidade de solução para um problema parabólico

Nesta e na próxima seção, consistem os resultados principais para o desenvolvimento desse trabalho. Para mais detalhes sobre tais resultados consultar [14] e [12].

Consideremos o seguinte problema parabólico de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x,t)u = f, & \text{em} \quad Q, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x,t)u = 0, & \text{em} \quad \Gamma, \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot), & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Proposição 1.45. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave, $p > 1$ e funções a_{ij} contínuas e limitadas em Q. Suponhamos que*

(i) *$a_{ij} \in C(\bar{Q})$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ onde $[a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz real positiva tal que para alguma constante positiva β tem-se $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \beta|\xi|^2$, para quaisquer $(x,t) \in Q$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$;*

(ii) *$f \in L^p(Q)$;*

(iii) *$a_i \in L^r(Q)$ com $r = max\{p, n+2\}$ se $p \neq n+2$ ou $r = n+2+\epsilon$, para qualquer $\epsilon > 0$, se $p = n+2$;*

(iv) *$a \in L^s(Q)$ com $s = max\{p, \frac{n+2}{2}\}$ se $p \neq \frac{n+2}{2}$ ou $s = \frac{n+2}{2} + \epsilon$, para qualquer $\epsilon > 0$, se $p = \frac{n+2}{2}$;*

(v) *$b_i, b \in C^2(\bar{\Gamma})$, $i = 1,\ldots,n$, e os coeficientes $b_i(x,t)$ satisfazendo a condição $\left|\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\eta_i(x)\right| \geq \delta > 0$ em $\partial\Omega \times (0,T)$, onde $\eta_i(x)$ é a i-ésima componente do vetor exterior normal à $\partial\Omega$ em $x \in \partial\Omega$;*

(vi) *$u_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ com $p \neq 3$, satisfazendo a condição de compatibilidade $\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + bu_0 = 0$ em $\partial\Omega$ quando $p > 3$.*

Então, existe uma única solução $u \in W_p^{2,1}(Q)$ do problema (2.46) e uma constante M dependendo de T, p, r, s e Ω satisfazendo

$$\begin{aligned} ||u||_{W_p^{2,1}(Q)} \;\; &\leq \;\; M\Bigg(||f||_{L^p(Q)} + \Bigg(\sum_{i=1}^{n} ||a_i||_{L^r(Q)} + ||a||_{L^s(Q)}\Bigg)||u_0||_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} \\ &+ \;\; ||u_0||_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\Bigg). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Demonstração. Ver [14], p. 341. □

Em particular, no caso unidimensional (quando $n = 1$) e considerando $p = 2$, $b_i \equiv 1$ e $b \equiv 0$ prodemos reescrever o resultado anterior de uma forma mais simplificada:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A_{11}(x,t)u_{xx} + A_1(x,t)u_x + A(x,t)u = f, & \text{em} \quad Q = (a,b) \times (0,T), \\ u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0, & \text{em} \quad (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot), & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{1.6}$$

Proposição 1.46. *Sejam $(a,b) \subset \mathbb{R}$ limitado, $p = 2$ e a função A_{11} contínua e limitada em Q. Suponhamos que*

- ***(i)*** *$A_{11} \in C(\bar{Q})$, onde para alguma constante positiva β tem-se $A_{11}(x,t) \geq \beta$, para quaisquer $(x,t) \in Q$;*
- ***(ii)*** *$f \in L^2(Q)$;*
- ***(iii)*** *$A_1 \in L^3(Q)$;*
- ***(iv)*** *$A \in L^2(Q)$;*
- ***(v)*** *$u_0 \in H^1(a,b) = W_2^1(a,b)$.*

Então, existe uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (1.6) e uma constante M dependendo de T, a, b satisfazendo

$$||u||_{W_2^{2,1}(Q)} \leq M\Big(||f||_{L^2(Q)} + ||A||_{L^2(Q)}||u_0||_{H^1(a,b)} + ||u_0||_{H^1(a,b)} \Big). \tag{1.7}$$

1.6 O Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder

Finalmente, segue a ferramenta principal para o desenvolvimento deste trabalho.

Proposição 1.47 (Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder). *Sejam X um espaço de Banach e $T : [0,1] \times X \to X$ um operador tal que $T(l,x) = y$, para todos $x, y \in X$ e $l \in [0,1]$. Suponha que:*

- ***(i)*** *O operador T está bem definido;*
- ***(ii)*** *Para cada $l \in [0,1]$ fixado, o operador $T(l,\cdot) : X \to X$ é contínuo;*
- ***(iii)*** *Para cada $B \subset X$ limitado e $x \in B$, o operador $T(\cdot,x) : [0,1] \to X$ é uniformemente contínuo com relação a primeira variável;*
- ***(iv)*** *Para cada $l \in [0,1]$ fixado, o operador $T(l,\cdot) : X \to X$ é compacto;*
- ***(v)*** *Existe $\rho > 0$ tal que para todo $l \in [0,1]$ e $x \in X$ satisfazendo $x - T(l,x) = 0$, então $||x|| < \rho$;*

(vi) *A equação* $x - T(0, x) = 0$ *tem uma única solução em* X.

Então, existe uma solução da equação $x - T(1, x) = 0$.

Demonstração. Ver [12], p. 189. □

Capítulo 2

Teorema de existência e unicidade para o modelo

Neste capítulo vamos estudar questões de existência e unicidade para o modelo proposto. Para isso, vamos definir um problema auxiliar formado por duas equações lineares e desacopladas e em seguida vamos definir um operador e, mostraremos que tal operador satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder. Em seguida definiremos o operador solução F que aplica o termo fonte $(f,g) \in L^4(Q) \times L^4(Q)$ na solução correspondente $(N,I) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ e mostraremos que F é Fréchet-diferenciável. As propriedades deste operador serão úteis para o estudo do problema de controle ótimo.

2.1 O problema principal

Sejam $T \in (0,\infty)$ e $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ e $(a,b) \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto e limitado. Denotemos por $Q = (a,b) \times (0,T)$.

Nosso objetivo é provar a existência de solução forte para o sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial N}{\partial t} & = & D_N N_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN}\int_a^b N(x,t)dx - \alpha_{IN}\int_a^b I(x,t)dx\right)N(x,t) \\ & + & f \text{ em } Q; \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} & = & D_I I_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II}\int_a^b I(x,t)dx - \alpha_{NI}\int_a^b N(x,t)dx\right)I(x,t) \\ & + & g \text{ em } Q; \\ N_x(a,t) & = & N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 \text{ em } (0,T); \\ N(x,0) & = & N_0(x), I(x,0) = I_0(x) \text{ em } (a,b). \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Definição 2.1. *Dizemos que (N, I) é uma solução (forte) do problema (2.1) em Q, se (N, I) satisfaz as equações em (2.1) em quase todo ponto e $N, I \in W_2^{2,1}(Q)$, ou seja, $N_x, I_x, N_{xx}, I_{xx}, N_t, I_t \in L^2(Q)$.*

Trabalharemos para provar um significativo resultado sobre existência e unicidade de solução forte para o sistema (2.1). Segue o enunciado do teorema principal deste capítulo:

Teorema 2.2. *Suponhamos que $N_0, I_0 \in H^1(a,b)$, $f, g \in L^4(Q)$ satisfazendo $N_0, I_0, f, g \geq 0$ e $r_N, r_I \in L^\infty(a,b)$. Então, existe uma única solução $(N, I) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ do sistema (2.1). Mais ainda,*

$$\begin{aligned}
&\|(N,I)\|_{W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)} \leq M_0 \left(\|(f,g)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}\right. \\
&\left.+ \left(1 + \|(f,g)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} + \|(N_0,I_0)\|_{L^4(a,b)\times L^4(a,b)}\right) \|(N_0,I_0)\|_{H^1(a,b)}\right), \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

onde M_0 depende de α_{NN}, α_{IN}, α_{II}, α_{NI}, $\|r_N\|_{L^\infty}$, $\|r_I\|_{L^\infty}$, T, a e b.

2.2 Solução do problema principal

Afim de determinar uma solução para o problema inicial (2.1), definimos o seguinte operador:

$$\begin{array}{rrcl}
L: & [0,1]\times L^4(Q)\times L^4(Q) & \to & L^4(Q)\times L^4(Q) \\
 & (\lambda,\phi,\psi) & \mapsto & L(\lambda,\phi,\psi) = (N,I),
\end{array} \qquad (2.3)$$

em que $Q = (a,b) \times (0,T)$ e (N, I) é a solução do problema:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + \lambda\left(r_N(x) - \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b \phi dx - \alpha_{IN}\int_a^b \psi dx\right)N + f & \text{em} \quad Q; \\
\dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + \lambda\left(r_I(x) - \alpha_{II}\displaystyle\int_a^b \psi dx - \alpha_{NI}\int_a^b \phi dx\right)I + g & \text{em} \quad Q; \\
N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\
N(x,0) = N_0(x), I(x,0) = I_0(x) & \text{em} \quad (a,b).
\end{cases} \qquad (2.4)$$

O objetivo é provar que o operador L satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder. Para isso, dividiremos a prova em uma série de Lemas.
A boa definição do operador definido em (2.3) segue do seguinte resultado:

Lema 2.3. *Suponhamos que $N_0, I_0 \in H^1(a,b)$ e $(f,g) \in L^4(Q) \times L^4(Q)$. Então, o problema (2.4) possui uma única solução $(N,I) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \subset L^4(Q) \times L^4(Q)$.*

Demonstração. Primeiramente, podemos reescrever o sistema (2.4) da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + A_\lambda(x,t)N(x,t) + f & \text{em} \quad Q; \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N(x,0) = N_0(x) & \text{em} \quad (a,b), \end{cases} \tag{2.5}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + B_\lambda(x,t)I(x,t) + g & \text{em} \quad Q; \\ I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ I(x,0) = I_0(x) & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.6}$$

Em que

$$A_\lambda(x,t) = \lambda\left(r_N(x) - \alpha_{NN}\int_a^b \phi(x,t)dx - \alpha_{IN}\int_a^b \psi(x,t)dx\right)$$

e

$$B_\lambda(x,t) = \lambda\left(r_I(x) - \alpha_{II}\int_a^b \psi(x,t)dx - \alpha_{NI}\int_a^b \phi(x,t)dx\right).$$

Para o operador L estar bem definido devemos mostrar que o sistema (2.5) têm única solução. Para isso, mostraremos que $A_\lambda, B_\lambda \in L^2(Q)$.

(i) $A_\lambda \in L^2(Q)$.
De fato, usando o Desigualdade de Jensen (Proposição 1.33) e o Lema 1.30, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_a^b |A_\lambda|^4 dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_a^b \lambda^4 \left[|r_N(x)| + \alpha_{NN}\int_a^b |\phi|dx + \alpha_{IN}\int_a^b |\psi|dx\right]^4 dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_a^b \left[|r_N(x)| + \alpha_{NN}\int_a^b |\phi|dx + \alpha_{IN}\int_a^b |\psi|dx\right]^4 dxdt \\
&\leq 81\int_0^T \int_a^b \left[|r_N(x)|^4 + \alpha_{NN}^4\left(\int_a^b |\phi|dx\right)^4 + \alpha_{IN}^4\left(\int_a^b |\psi|dx\right)^4\right] dxdt \\
&\leq 81\int_0^T \int_a^b \left[|r_N(x)|^4 + \alpha_{NN}^4(b-a)^3\int_a^b |\phi|^4dx + \alpha_{IN}^4(b-a)^3\int_a^b |\psi|^4dx\right] dxdt \\
&\leq 81\left[\int_0^T \int_a^b |r_N(x)|^4dxdt + \alpha_{NN}^4(b-a)^4\int_0^T \int_a^b |\phi|^4dxdt \right.\\
&\left. + \alpha_{IN}^4(b-a)^4\int_0^T \int_a^b |\psi|^4dxdt\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 81\left[\|r_N(x)\|^4_{L^4(Q)} + \alpha^4_{NN}(b-a)^4\|\phi\|^4_{L^4(Q)} + \alpha^4_{IN}(b-a)^4\|\psi\|^4_{L^4(Q)}\right] \\
&\leq 81\left[\|r_N(x)\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NN}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)}\right]^4.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\|A_\lambda\|_{L^4(Q)} \leq 3\left[\|r_N(x)\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NN}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)}\right],
$$

ou seja,

$$
\|A_\lambda\|_{L^4(Q)} \leq C_1\left(1 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right), \tag{2.7}
$$

na qual C_1 depende de α_{NN}, α_{IN}, $(b-a)$, $\|r_N\|_{L^4(Q)}$. Logo, $A_\lambda(x,t) \in L^4(Q)$ e por imersão, segue que $A_\lambda(x,t) \in L^2(Q)$.
Pela Proposição 1.46, existe uma única solução $N \in W^{2,1}_2(Q)$ da equação (2.5) satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\|N\|_{W^{2,1}_2(Q)} &\leq M_1\left(\|f\|_{L^4(Q)} + \|A_\lambda\|_{L^4(Q)}\|N_0\|_{W^1_2(a,b)} + \|N_0\|_{W^1_2(a,b)}\right) \\
&\leq M_1\left(\|f\|_{L^4(Q)} + C_1\left(1 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|N_0\|_{W^1_2(a,b)} + \|N_0\|_{W^1_2(a,b)}\right) \\
&= M_1\|f\|_{L^4(Q)} + M_1C_1\left(1 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|N_0\|_{W^1_2(a,b)} + M_1\|N_0\|_{W^1_2(a,b)} \\
&\leq K_1\left(\|f\|_{L^4(Q)} + \left(1 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|N_0\|_{W^1_2(a,b)} + \|N_0\|_{W^1_2(a,b)}\right) \\
&= K_1\left(\|f\|_{L^4(Q)} + \left(2 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|N_0\|_{W^1_2(a,b)}\right),
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

onde M_1 é uma constante que satisfaz as hipóteses da Proposição 1.46 e $K_1 = \max\{M_1, C_1M_1\}$.

Analogamente,
(ii) $B_\lambda \in L^2(Q)$
De fato, novamente usando a Desigualdade de Jensen (Proposição 1.33) e o Lema 1.30, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_a^b |B_\lambda|^4 dxdt \\
&\leq \int_0^T\int_a^b \lambda^4\left[|r_I(x)| + \alpha_{II}\int_a^b|\psi|dx + \alpha_{NI}\int_a^b|\phi|dx\right]^4 dxdt \\
&\leq \int_0^T\int_a^b \left[|r_I(x)| + \alpha_{II}\int_a^b|\psi|dx + \alpha_{NI}\int_a^b|\phi|dx\right]^4 dxdt \\
&\leq 81\int_0^T\int_a^b \left[|r_I(x)|^4 + \alpha^4_{II}\left(\int_a^b|\psi|dx\right)^4 + \alpha^4_{NI}\left(\int_a^b|\phi|dx\right)^4\right] dxdt \\
&\leq 81\int_0^T\int_a^b \left[|r_I(x)|^4 + \alpha^4_{II}(b-a)^3\int_a^b|\psi|^4dx + \alpha^4_{NI}(b-a)^3\int_a^b|\phi|^4dx\right] dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 81\left[\int_0^T\int_a^b |r_I(x)|^4 dxdt + (b-a)^4\left(\alpha_{II}^4\int_0^T\int_a^b |\psi|^4 dxdt\right.\right.\\
&\left.\left.+\,\alpha_{NI}^4\int_0^T\int_a^b |\phi|^4 dxdt\right)\right]\\
&= 81\left[\|r_I(x)\|^4_{L^4(Q)} + \alpha_{II}^4(b-a)^4\|\psi\|^4_{L^4(Q)} + \alpha_{NI}^4(b-a)^4\|\phi\|^4_{L^4(Q)}\right]\\
&\leq 81\left[\|r_I(x)\|_{L^4(Q)} + \alpha_{II}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NI}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)}\right]^4.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$\|B_\lambda\|_{L^4(Q)} \leq 3\left[\|r_I(x)\|_{L^4(Q)} + \alpha_{II}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NI}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)}\right],$$

ou seja,

$$\|B_\lambda\|_{L^4(Q)} \leq C_2\left(1 + \|\psi\|_{L^4(Q)} + \|\phi\|_{L^4(Q)}\right). \tag{2.9}$$

em que C_2 depende de α_{II}, α_{NI}, $(b-a)$, $\|r_I\|_{L^4(Q)}$. Logo, $B_\lambda(x,t) \in L^4(Q)$ e por imersão, segue que $B_\lambda(x,t) \in L^2(Q)$.

Pela Proposição 1.46 existe uma única função $I \in W_2^{2,1}(Q)$ solução da equação (2.6) satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\|I\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq M_2\left(\|g\|_{L^4(Q)} + \|B_\lambda\|_{L^4(Q)}\|I_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right)\\
&\leq M_2\left(\|g\|_{L^4(Q)} + C_2\left(1 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|I_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right)\\
&= M_2\|g\|_{L^4(Q)} + M_2C_2\left(1 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|I_0\|_{W_2^1(a,b)} + M_2\|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\\
&\leq K_2\left(\|g\|_{L^4(Q)} + \left(1 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|I_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right)\\
&= K_2\left(\|g\|_{L^4(Q)} + \left(2 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)}\right)\|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right),
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

em que M_2 é uma constante que satisfaz as hipóteses da Proposição 2.47 e $K_2 = \max\{M_2, C_2M_2\}$. Concluímos que $(N,I) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \subset L^4(Q) \times L^4(Q)$ é a única solução de (2.4) associada a (ϕ,ψ) e isto conclui a prova do Lema. $\square$

Lema 2.4. *Fixado $\lambda \in [0,1]$, $L(\lambda,\cdot,\cdot)$ é compacto e contínuo.*

Demonstração. Mostraremos que $L(\lambda,\cdot,\cdot)$ é contínuo.
Com efeito, defina $L(\lambda,\phi_1,\psi_1) = (N_1,I_1)$ e $L(\lambda,\phi_2,\psi_2) = (N_2,I_2)$ com $(N_i,I_i), i \in \{1,2\}$ soluções dos sistemas linearizados

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial N_1}{\partial t} = D_N(N_1)_{xx} + A_\lambda(\phi_1,\psi_1)N_1 + f & \text{em} \quad Q;\\[2ex]
\dfrac{\partial I_1}{\partial t} = D_I(I_1)_{xx} + B_\lambda(\phi_1,\psi_1)I_1 + g & \text{em} \quad Q;\\[2ex]
(N_1)_x(a,t) = (N_1)_x(b,t) = (I_1)_x(a,t) = (I_1)_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T);\\[2ex]
(N_1)(x,0) = N_0(x), (I_1)(x,0) = I_0(x) & \text{em} \quad (a,b)
\end{cases} \tag{2.11}
$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_2}{\partial t} = D_N (N_2)_{xx} + A_\lambda(\phi_2, \psi_2) N_2 + f & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I_2}{\partial t} = D_I (I_2)_{xx} + B_\lambda(\phi_2, \psi_2) I_2 + g & \text{em} \quad Q; \\ (N_2)_x(a,t) = (N_2)_x(b,t) = (I_2)_x(a,t) = (I_2)_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ (N_2)(x,0) = N_0(x), (I_2)(x,0) = I_0(x) & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.12}$$

Fazendo $N = N_1 - N_2$, $I = I_1 - I_2$ e subtraindo (2.12) de (2.11), obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + A_\lambda(\phi_1, \psi_1) N_1 - A_\lambda(\phi_2, \psi_2) N_2 & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + B_\lambda(\phi_1, \psi_1) I_1 - B_\lambda(\phi_2, \psi_2) I_2 & \text{em} \quad Q; \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N(x,0) = I(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.13}$$

Agora, somando e subtraindo $A_\lambda(\phi_2, \psi_2)N_1$ e $B_\lambda(\phi_2, \psi_2)I_1$ na primeira e segunda equação do sistema (2.13), respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + A_\lambda(\phi_2, \psi_2) N + (A_\lambda(\phi_1, \psi_1) - A_\lambda(\phi_2, \psi_2)) N_1 & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + B_\lambda(\phi_2, \psi_2) I + (B_\lambda(\phi_1, \psi_1) - B_\lambda(\phi_2, \psi_2)) I_1 & \text{em} \quad Q; \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N(x,0) = I(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.14}$$

Afirmação 2.5. *$(A_\lambda(\phi_1, \psi_1) - A_\lambda(\phi_2, \psi_2))N_1 \in L^2(Q)$.*

Demonstração da Afirmação 2.5. De fato, usando o Lema 1.30, as Desigualdades de

Jensen (Proposição 1.33) e Hölder (Proposição 1.34), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_a^b |A_\lambda(\phi_1,\psi_1) - A_\lambda(\phi_2,\psi_2)|^2 |N_1|^2 dxdt \\
&\leq \left(\int_0^T \int_a^b |A_\lambda(\phi_1,\psi_1) - A_\lambda(\phi_2,\psi_2)|^4 dxdt \right)^{\frac{2}{4}} \left(\int_0^T \int_a^b |N_1|^4 dxdt \right)^{\frac{2}{4}} \\
&= \left(\int_0^T \int_a^b |\lambda \left(-\alpha_{NN} \int_a^b (\phi_1 - \phi_2) dx - \alpha_{IN} \int_a^b (\psi_1 - \psi_2) dx \right) |^4 dxdt \right)^{\frac{2}{4}} \\
&\times \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \left(16 \int_0^T \int_a^b \left[\alpha_{NN}^4 \left(\int_a^b |\phi_1 - \phi_2| dx \right)^4 + \alpha_{IN}^4 \left(\int_a^b |\psi_1 - \psi_2| dx \right)^4 \right] dxdt \right)^{\frac{2}{4}} \\
&\times \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \left(16(b-a)^3 \int_0^T \int_a^b \left[\alpha_{NN}^4 \int_a^b |\phi_1 - \phi_2|^4 dx + \alpha_{IN}^4 \int_a^b |\psi_1 - \psi_2|^4 dx \right] dxdt \right)^{\frac{2}{4}} \\
&\times \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \left(16(b-a)^4 \left[\alpha_{NN}^4 \int_0^T \int_a^b |\phi_1 - \phi_2|^4 dxdt + \alpha_{IN}^4 \int_0^T \int_a^b |\psi_1 - \psi_2|^4 dxdt \right] \right)^{\frac{2}{4}} \\
&\times \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&= \left(16 \left[\alpha_{NN}^4 (b-a)^4 \|\phi_1 - \phi_2\|^4_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}^4 (b-a)^4 \|\psi_1 - \psi_2\|^4_{L^4(Q)} \right] \right)^{\frac{2}{4}} \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \left(2 \left[\alpha_{NN}(b-a) \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}(b-a) \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)} \right] \right)^2 \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq C(\alpha_{NN}, \alpha_{IN}, (b-a)) (\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)})^2 \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq C(\alpha_{NN}, \alpha_{IN}, (b-a)) (\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)})^2 \|N_1\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\|(A_\lambda(\phi_1,\psi_1) - A_\lambda(\phi_2,\psi_2)) N_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq c_1 (\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)}) \|N_1\|_{W_2^{2,1}(Q)},
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

na qual c_1 é uma constante que depende de α_{NN}, α_{IN}, $(b-a)$. □

Como mostrado anteriormente em (2.8), temos

$$
\|N_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_1 \left(\|f\|_{L^4(Q)} + \left(2 + \|\phi_1\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1\|_{L^4(Q)} \right) \|N_0\|_{W_2^1(a,b)} \right). \tag{2.16}
$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
&\|(A_\lambda(\phi_1,\psi_1) - A_\lambda(\phi_2,\psi_2)) N_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq c_1 \left(\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)} \right) \|N_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\
&\leq c_1 \left(\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)} \right) \\
&\times \left(\|f\|_{L^4(Q)} + \left(2 + \|\phi_1\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1\|_{L^4(Q)} \right) \|N_0\|_{W_2^1(a,b)} \right).
\end{aligned}
$$

Então, pela Proposição 1.46 aplicada na primeira equação de (2.14) e pelo fato de $N_0(x) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\|N\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq M\|(A_\lambda(\phi_1,\psi_1) - A_\lambda(\phi_2,\psi_2))N_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq M.c_1\left(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}\right)\left(\|f\|_{L^4(Q)} + \right. \\
&\left. + \left(2 + \|\phi_1\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1\|_{L^4(Q)}\right)\left\|N_0\right\|_{W_2^1(a,b)}\right) \\
&\leq m_1\left(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}\right). \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Em que m_1 depende de M, c_1 e $\|f\|_{L^4(Q)}$.

De modo análogo feito na Afirmação 2.5 mostramos que $(B_\lambda(\phi_1,\psi_1) - B_\lambda(\phi_2,\psi_2))I_1 \in L^2(Q)$ e

$$\begin{aligned}
&\|(B_\lambda(\phi_1,\psi_1) - B_\lambda(\phi_2,\psi_2))I_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq c_2\left(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}\right)\|I_1\|_{W_2^{2,1}(Q)}.
\end{aligned}$$

Em que c_2 é uma constante que depende de α_{II}, α_{NI}, $(b-a)$. Como mostrado em (2.10), temos

$$\|I_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_2\left(\|g\|_{L^4(Q)} + \left(2 + \|\phi_1\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1\|_{L^4(Q)}\right)\|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right). \qquad (2.18)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
&\|(B_\lambda(\phi_1,\psi_1) - B_\lambda(\phi_2,\psi_2))I_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq c_2\left(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)})\right)\|I_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\
&\leq c_2\left(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}\right) \\
&\times\left(\|g\|_{L^4(Q)} + \left(2 + \|\phi_1\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1\|_{L^4(Q)}\right)\|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right).
\end{aligned}$$

Então, pela Proposição 1.46 aplicada na segunda equação de (2.14) e pelo fato de $I_0(x) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\|I\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq M\|(B_\lambda(\phi_1,\psi_1) - B_\lambda(\phi_2,\psi_2))I_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq M.c_2\left(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}\right)\left(\|g\|_{L^4(Q)} + \right. \\
&\left. + \left(2 + \|\phi_1\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1\|_{L^4(Q)}\right)\left\|I_0\right\|_{W_2^1(a,b)}\right) \\
&\leq m_2\left(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}\right). \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Em que m_2 depende de M, c_2 e $\|g\|_{L^4(Q)}$.

Somando (2.17) e (2.19) e pela imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^4(Q)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)} \\
&\leq m_1(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}) + m_2(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}) \\
&\leq m_3(\|\phi_1-\phi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1-\psi_2\|_{L^4(Q)}),
\end{aligned}$$

em que $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$. Daí,

$$\|(N_1,I_1),(N_2,I_2)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} \leq m_3\|(\phi_1,\psi_1) - (\phi_2,\psi_2)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}.$$

Logo,

$$\|L(\lambda, \phi_1, \psi_1) - L(\lambda, \phi_2, \psi_2)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} \leq M_3\|(\phi_1, \psi_1) - (\phi_2, \psi_2)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}.$$

Concluímos que o operador $L(\lambda, \cdot, \cdot)$ é lipschitziano e, portanto, contínuo.

A compacidade vem pelo fato de $L = S \circ i$, onde $S : [0, 1] \times L^4(Q) \times L^4(Q) \hookrightarrow W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é o operador solução e $i : W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^4(Q) \times L^4(Q)$ é uma imersão compacta, ver Proposição 1.28 (iii). □

Lema 2.6. *Para cada $A \subset L^4(Q) \times L^4(Q)$ limitado e $(\phi, \psi) \in A$, $L(\cdot, \phi, \psi) : [0, 1] \to L^4(Q) \times L^4(Q)$ é uniformemente contínuo.*

Demonstração. Como A é limitado, existe $M > 0$ tal que para todo $(\phi, \psi) \in A$ temos $\|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)} \leq M$. Agora, defina $L(\lambda_1, \phi, \psi) = (N_1, I_1)$ e $L(\lambda_2, \phi, \psi) = (N_2, I_2)$ com (N_i, I_i), $i \in \{1, 2\}$ soluções dos sistemas linearizados

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial t} = D_N(N_1)_{xx} + A_{\lambda_1}(\phi, \psi)N_1 + f & \text{em} \quad Q; \\[2ex] \dfrac{\partial I_1}{\partial t} = D_I(I_1)_{xx} + B_{\lambda_1}(\phi, \psi)I_1 + g & \text{em} \quad Q; \\[2ex] (N_1)_x(a, t) = (N_1)_x(b, t) = (I_1)_x(a, t) = (I_1)_x(b, t) = 0 & \text{em} \quad (0, T); \\[2ex] (N_1)(x, 0) = N_0(x), (I_1)(x, 0) = I_0(x) & \text{em} \quad (a, b) \end{cases} \tag{2.20}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_2}{\partial t} = D_N(N_2)_{xx} + A_{\lambda_2}(\phi, \psi)N_2 + f & \text{em} \quad Q; \\[2ex] \dfrac{\partial I_2}{\partial t} = D_I(I_2)_{xx} + B_{\lambda_2}(\phi, \psi)I_2 + g & \text{em} \quad Q; \\[2ex] (N_2)_x(a, t) = (N_2)_x(b, t) = (I_2)_x(a, t) = (I_2)_x(b, t) = 0 & \text{em} \quad (0, T); \\[2ex] N_2(x, 0) = N_0(x), I_2(x, 0) = I_0(x) & \text{em} \quad (a, b). \end{cases} \tag{2.21}$$

Fazendo $N = N_1 - N_2$, $I = I_1 - I_2$ e subtraindo (2.21) de (2.20), obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + A_{\lambda_1}(\phi, \psi)N_1 - A_{\lambda_2}(\phi, \psi)N_2 & \text{em} \quad Q; \\[2ex] \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + B_{\lambda_1}(\phi, \psi)I_1 - B_{\lambda_2}(\phi, \psi)I_2 & \text{em} \quad Q; \\[2ex] N_x(a, t) = N_x(b, t) = I_x(a, t) = I_x(b, t) = 0 & \text{em} \quad (0, T); \\[2ex] N(x, 0) = I(x, 0) = 0 & \text{em} \quad (a, b). \end{cases} \tag{2.22}$$

Agora, somando e subtraindo $A_{\lambda_2}(\phi, \psi)N_1$ e $B_{\lambda_2}(\phi, \psi)I_1$ na primeira e segunda equação do sistema (2.22), respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + A_{\lambda_2}(\phi,\psi)N + (A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi))N_1 & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + B_{\lambda_2}(\phi,\psi)I + (B_{\lambda_1}(\phi,\psi) - B_{\lambda_2}(\phi,\psi))I_1 & \text{em} \quad Q; \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N(x,0) = I(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.23}$$

Afirmação 2.7. *$(A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi))N_1 \in L^2(Q)$.*

Demonstração da Afirmação 2.7. De fato, usando o Lema 1.30, as Desigualdades de Hölder (Proposição 1.34) e Jensen (Proposição 1.33), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_a^b |A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi)|^2 |N_1|^2 dxdt \\
&\leq \left(\int_0^T \int_a^b |A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi)|^4 dxdt\right)^{\frac{2}{4}} \left(\int_0^T \int_a^b |N_1|^4 dxdt\right)^{\frac{2}{4}} \\
&= \left(\int_0^T \int_a^b \left|(\lambda_1 - \lambda_2)\left(r_N(x) - \alpha_{NN}\int_a^b \phi dx - \alpha_{IN}\int_a^b \psi dx\right)\right|^4 dxdt\right)^{\frac{2}{4}} \\
&\times \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \left(\int_0^T \int_a^b |\lambda_1 - \lambda_2|^4 \left[|r_N(x)| + \alpha_{NN}\int_a^b |\phi| dx + \alpha_{IN}\int_a^b |\psi| dx\right]^4 dxdt\right)^{\frac{2}{4}} \\
&\times \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \Bigg(81|\lambda_1 - \lambda_2|^4 \Bigg[\int_0^T \int_a^b |r_N(x)|^4 dxdt + \alpha_{NN}^4 (b-a)^4 \int_0^T \int_a^b |\phi|^4 dxdt + \\
&\alpha_{IN}^4 (b-a)^4 \int_0^T \int_a^b |\psi|^4 dxdt\Bigg]^4 dxdt\Bigg)^{\frac{2}{4}} \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&= \left(81|\lambda_1 - \lambda_2|^4 \left[\|r_N\|^4_{L^4(Q)} + (b-a)^4(\alpha_{NN}^4 \|\phi\|^4_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}^4 \|\psi\|^4_{L^4(Q)})\right]\right)^{\frac{2}{4}} \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \left(3|\lambda_1 - \lambda_2| \left[\|r_N\|_{L^4(Q)} + (b-a)(\alpha_{NN}\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}\|\psi\|_{L^4(Q)})\right]\right)^2 \|N_1\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leq \left(3|\lambda_1 - \lambda_2| \left[\|r_N\|_{L^4(Q)} + (b-a)(\alpha_{NN}\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}\|\psi\|_{L^4(Q)})\right]\right)^2 \|N_1\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
&\|(A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi))N_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq \left(3|\lambda_1 - \lambda_2| \left[\|r_N\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NN}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)}\right]\right) \\
&\times \|N_1\|_{W_2^{2,1}(Q)}.
\end{aligned}$$

□

Por (2.8) sabemos que

$$\|N_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_1(\|f\|_{L^4(Q)} + (2 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)})\|N_0\|_{W_2^1(a,b)}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\|(A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi))N_1\|_{L^2(Q)} \leq \\
&\big(3|\lambda_1 - \lambda_2|\,\big[\|r_N\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NN}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{IN}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)}\big]\big) \\
&K_1(\|f\|_{L^4(Q)} + (2 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)})\|N_0\|_{W_2^1(a,b)}).
\end{aligned}$$

Como $\|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)} \leq M$, obtemos

$$\|(A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi))N_1\|_{L^2(Q)} \leq \overline{C}_1|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

em que $\overline{C}_1$ depende de M, $\|N_0\|_{W_2^1(a,b)}$, $\|f\|_{L^4(Q)}$, $\|r_N\|_{L^4(Q)}$, α_{NN}, α_{IN} e $(b-a)$.

De forma análoga a Afirmação 2.7 mostramos que $(B_{\lambda_1}(\phi,\psi) - B_{\lambda_2}(\phi,\psi))I_1 \in L^2(Q)$ e

$$\begin{aligned}
&\|(B_{\lambda_1}(\phi,\psi) - B_{\lambda_2}(\phi,\psi))I_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq \big(3|\lambda_1 - \lambda_2|\,\big[\|r_I\|_{L^4(Q)} + \alpha_{II}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NI}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)}\big]\big) \\
&\times \|I_1\|_{W_2^{2,1}(Q)}.
\end{aligned}$$

Por (2.10) sabemos que

$$\|I_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_2(\|g\|_{L^4(Q)} + (2 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)})\|I_1\|_{W_2^1(a,b)}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\|(B_{\lambda_1}(\phi,\psi) - B_{\lambda_2}(\phi,\psi))I_1\|_{L^2(Q)} \leq \\
&\big(3|\lambda_1 - \lambda_2|\,\big[\|r_I\|_{L^4(Q)} + \alpha_{II}(b-a)\|\phi\|_{L^4(Q)} + \alpha_{NI}(b-a)\|\psi\|_{L^4(Q)}\big]\big) \\
&K_2(\|g\|_{L^4(Q)} + (2 + \|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)})\|I_0\|_{W_2^1(a,b)}).
\end{aligned}$$

Como $\|\phi\|_{L^4(Q)} + \|\psi\|_{L^4(Q)} \leq M$, obtemos

$$\|(B_{\lambda_1}(\phi,\psi) - B_{\lambda_2}(\phi,\psi))I_1\|_{L^2(Q)} \leq \overline{C}_2|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

em que $\overline{C}_2$ depende de M, $\|I_0\|_{W_2^1(a,b)}$, $\|g\|_{L^4(Q)}$, $\|r_I\|_{L^4(Q)}$, α_{II}, α_{NI} e $(b-a)$.

Assim, pela Proposição 1.46 aplicada nas duas equações de (2.23) e por $N(x,0) = I(x,0) = 0$ temos as desigualdades

$$\begin{aligned}
\|N\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq m\|(A_{\lambda_1}(\phi,\psi) - A_{\lambda_2}(\phi,\psi))N_1\|_{L^2(Q)} \\
&\leq m\overline{C}_1|\lambda_1 - \lambda_2| = \overline{C}|\lambda_1 - \lambda_2| \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

e

$$\|I\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq m\|(B_{\lambda_1}(\phi,\psi) - B_{\lambda_2}(\phi,\psi))I_1\|_{L^2(Q)}$$
$$\leq m\overline{C}_2|\lambda_1 - \lambda_2| = \overline{K}|\lambda_1 - \lambda_2|. \tag{2.25}$$

Somando (2.24) e (2.25) e pela imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^4(Q)$, obtemos

$$\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)} \leq \overline{C}|\lambda_1 - \lambda_2| + \overline{K}|\lambda_1 - \lambda_2| \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

onde $C = \max\{\overline{C}, \overline{K}\}$. Daí,

$$\|(N_1, I_1) - (N_2, I_2)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Dessa forma,

$$\|L(\lambda_1, \phi, \psi) - L(\lambda_2, \phi, \psi)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Portanto, o operador $L(\cdot, \phi, \psi) : [0,1] \to L^4(Q) \times L^4(Q)$ é uniformemente contínuo. □

Lema 2.8. *Supondo $N_0(x), I_0(x), f, g \geq 0$. As funções N e I são não negativas.*

Demonstração. Escrevendo $N = N^+ - N^-$ no sistema (2.1), onde $N^+ = max\{N, 0\}$ é a parte positiva da função N e $N^- = -min\{N, 0\}$ é a parte negativa de N. Temos,

$$\frac{\partial(N^+ - N^-)}{\partial t} = D_N(N^+ - N^-)_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN}\int_a^b (N^+ - N^-)dx\right.$$
$$\left. - \alpha_{IN}\int_a^b Idx\right)(N^+ - N^-) + f.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por N^- e integrando de a até b, obtemos

$$\int_a^b \frac{\partial(N^+ - N^-)}{\partial t}N^- dx = \int_a^b D_N(N^+ - N^-)_{xx}N^- dx + \int_a^b r_N(x)(N^+ - N^-)N^- dx$$
$$+ \int_a^b \left(-\alpha_{NN}\int_a^b (N^+ - N^-)dx - \alpha_{IN}\int_a^b Idx\right)(N^+ - N^-)N^- dx + \int_a^b fN^- dx. \tag{2.26}$$

Note que usando a Fórmula de Green (Proposição 1.44), temos

$$\int_a^b (N^+ - N^-)_{xx}N^- dx = (N^+ - N^-)_x N^-\Big|_a^b - \int_a^b (N_x^+ - N_x^-)N_x^- dx$$
$$= -\int_a^b N_x^+ N_x^- dx + \int_a^b (N_x^-)^2 dx \tag{2.27}$$
$$= \int_a^b (N_x^-)^2 dx, \tag{2.28}$$

(2.27) segue pelo fato de $(N^+ - N^-)_x(a,t) = (N^+ - N^-)_x(b,t) = 0$ e (2.28) pois $N_x^+ N_x^- = 0$

(ver Proposição 1.14). Portanto, podemos reescrever (2.26) como

$$\int_a^b \frac{\partial(N^+ - N^-)}{\partial t} N^- dx = D_N \int_a^b (N_x^-)^2 dx + \int_a^b r_N(x)(N^+ - N^-)N^- dx +$$
$$+ \int_a^b \left(-\alpha_{NN} \int_a^b (N^+ - N^-)dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx\right)(N^+ - N^-)N^- dx + \int_a^b f N^- dx.$$

Sabendo que o produto $N^+N^- = 0$, obtemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b (N^-)^2 dx = D_N \int_a^b (N_x^-)^2 dx - \int_a^b r_N(x)(N^-)^2 dx +$$
$$+ \int_a^b \left(\alpha_{NN} \int_a^b (N^+ - N^-)dx + \alpha_{IN} \int_a^b I dx\right)(N^-)^2 dx + \int_a^b f N^- dx. \tag{2.29}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.29) por -1, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b (N^-)^2 dx = -D_N \int_a^b (N_x^-)^2 dx + \int_a^b r_N(x)(N^-)^2 dx +$$
$$- \int_a^b \left(\alpha_{NN} \int_a^b (N^+ - N^-)dx + \alpha_{IN} \int_a^b I dx\right)(N^-)^2 dx - \int_a^b f N^- dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b (N^-)^2 dx = -D_N \int_a^b (N_x^-)^2 dx + \int_a^b r_N(x)(N^-)^2 dx + \\
&- \int_a^b \left(\alpha_{NN} \int_a^b (N^+ - N^-)dx + \alpha_{IN} \int_a^b I dx\right)(N^-)^2 dx - \int_a^b f N^- dx \\
&= -D_N \int_a^b (N_x^-)^2 dx + \int_a^b r_N(x)(N^-)^2 dx \\
&- \left[\alpha_{NN} \int_a^b (N^+ - N^-)dx + \alpha_{IN} \int_a^b I dx\right] \int_a^b (N^-)^2 dx - \int_a^b f N^- dx \\
&= -D_N \int_a^b (N_x^-)^2 dx + \int_a^b r_N(x)(N^-)^2 dx - \alpha_{NN}\left(\int_a^b N^+ dx\right)\left(\int_a^b (N^-)^2 dx\right) \\
&+ \left[\alpha_{NN} \int_a^b N^- dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx\right] \int_a^b (N^-)^2 dx - \int_a^b f N^- dx.
\end{aligned}$$

Como $f, D_N, N^-, N^+ \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b (N^-)^2 dx \\
&\leq \int_a^b r_N(x)(N^-)^2 dx + \left[\alpha_{NN} \int_a^b N^- dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx\right] \int_a^b (N^-)^2 dx \\
&\leq \int_a^b |r_N(x)|(N^-)^2 dx + \left[\alpha_{NN} \int_a^b N^- dx + \alpha_{IN} \int_a^b |I| dx\right] \int_a^b (N^-)^2 dx \\
&\leq \|r_N\|_{L^\infty(Q)} \int_a^b (N^-)^2 dx \left[\alpha_{NN} \int_a^b N^- dx + \alpha_{IN} \int_a^b |I| dx\right] \int_a^b (N^-)^2 dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_a^b (N^-)^2 dx \leq A\int_a^b (N^-)^2 dx,$$

em que

$$A = 2\left(\|r_N\|_{L^\infty(Q)} + \left[\alpha_{NN}\int_a^b N^- dx + \alpha_{IN}\int_a^b |I| dx\right]\right).$$

Pela Desigualdade de Gronwall (1.35),

$$\int_a^b (N^-)^2 dx \leq e^{\int_0^t Ads}\left(\int_a^b (N_0^-)^2(x)dx\right) \leq e^{\int_0^T Adt}\left(\int_a^b (N_0^-)^2(x)dx\right), \forall t \in [0,T].$$

Por hipótese $N_0(x) \geq 0$, portanto $N_0^-(x) = 0$. Assim,

$$\int_a^b (N^-)^2 dx \leq 0.$$

Dessa forma,

$$\|N^-\| \leq 0, \text{ então } \|N^-\| = 0.$$

Concluímos que $N^-(x) = 0$ e portanto N é uma função não negativa.

De forma análoga prova-se que I é uma função não negativa.

□

Lema 2.9. *Existe uma constante $M > 0$ independente de λ, tal que se (N, I) é solução de $L(\lambda, N, I) = (N, I)$, $\lambda \in (0, 1)$. Então, $\|(N, I)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} = \|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)} < M$.*

Demonstração. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + \lambda\Big(r_N(x) - \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN}\int_a^b I dx\Big)N + f & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + \lambda\Big(r_I(x) - \alpha_{II}\displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI}\int_a^b N dx\Big)I + g & \text{em} \quad Q; \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N(x,0) = N_0(x), I(x,0) = I_0(x) & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.30}$$

Multiplicando ambos os lados da primeira equação do sistema (2.30) por N^3 e integrando de a até b, obtemos

$$\int_a^b \frac{\partial N}{\partial t} N^3 dx = D_N \int_a^b N_{xx} N^3 dx + \lambda \Bigg[\int_a^b r_N(x) N^4 dx$$
$$- \alpha_{NN} \left(\int_a^b N dx \right) \left(\int_a^b N^4 dx \right) - \alpha_{IN} \left(\int_a^b I dx \right) \left(\int_a^b N^4 dx \right) \Bigg]$$
$$+ \int_a^b f N^3 dx.$$

Pela Fórmula de Green (Proposição 1.44), temos

$$\int_a^b \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} N^4 dx = -3D_N \int_a^b (N_x)^2 N^2 dx$$
$$+ \lambda \Bigg[\int_a^b r_N(x) N^4 dx - \alpha_{NN} \left(\int_a^b N dx \right) \left(\int_a^b N^4 dx \right)$$
$$- \alpha_{IN} \left(\int_a^b I dx \right) \left(\int_a^b N^4 dx \right) \Bigg] + \int_a^b f N^3 dx.$$

Por D_N, $(N_x)^2$, α_{NN}, α_{IN}, N, I serem não negativas e $\lambda \in [0,1]$, segue que

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_a^b N^4 dx \leq \int_a^b r_N(x) N^4 dx + \int_a^b f N^3 dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder (Proposição 1.34), com $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$, temos

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_a^b N^4 dx \leq \|r_N\|_{L^\infty(Q)} \int_a^b N^4 dx + \left(\int_a^b f^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b N^4 dx \right)^{\frac{3}{4}}.$$

Pela Desigualdade de Young (Prposição 1.29),

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_a^b N^4 dx \leq \|r_N\|_{L^\infty(Q)} \int_a^b N^4 dx + \frac{1}{4} \int_a^b f^4 dx + \frac{3}{4} \int_a^b N^4 dx.$$

Daí,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b N^4 dx \leq (4\|r_N\|_{L^\infty(Q)} + 3) \int_a^b N^4 dx + \int_a^b f^4 dx.$$

Pela Desigualdade Gronwall (Proposição 1.35),

$$\int_a^b N^4(x,t) dx \leq e^{(4\|r_N\|_{L^\infty(Q)}+3)t} \left(\int_a^b N^4(x,0) dx + \int_0^t \int_a^b f^4(x,t) dx dt \right)$$
$$\leq e^{(4\|r_N\|_{L^\infty(Q)}+3)T} \left(\int_a^b N^4(x,t) dx + \int_0^T \int_a^b f^4(x,t) dx dt \right), \forall t \in [0,T],$$

isto é,

$$\|N\|_{L^4(Q)} \leq \left[T e^{(4\|r_N\|_{L^\infty(Q)}+3)T} \left(\int_a^b N_0^4(x)dx + \|f\|_{L^4(Q)}^4 \right) \right]^{\frac{1}{4}}. \tag{2.31}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\|I\|_{L^4(Q)} \leq \left[T e^{(4\|r_I\|_{L^\infty(Q)}+3)T} \left(\int_a^b I_0^4(x)dx + \|g\|_{L^4(Q)}^4 \right) \right]^{\frac{1}{4}}. \tag{2.32}$$

Somando (2.31) e (2.32), temos

$$\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)} \leq \left[T e^{(4\|r_N\|_{L^\infty(Q)}+3)T} \left(\int_a^b N_0^4(x)dx + \|f\|_{L^4(Q)}^4 \right) \right]^{\frac{1}{4}} +$$
$$+ \left[T e^{(4\|r_I\|_{L^\infty(Q)}+3)T} \left(\int_a^b I_0^4(x)dx + \|g\|_{L^4(Q)}^4 \right) \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Basta considerarmos

$$M = \left[T e^{(4\|r_N\|_{L^\infty(Q)}+3)T} \left(\int_a^b N_0^4(x)dx + \|f\|_{L^4(Q)}^4 \right) \right]^{\frac{1}{4}} +$$
$$\left[T e^{(4\|r_I\|_{L^\infty(Q)}+3)T} \left(\int_a^b I_0^4(x)dx + \|g\|_{L^4(Q)}^4 \right) \right]^{\frac{1}{4}} + 1.$$

Portanto, $\|(N,I)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} = \|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)} < M$. □

Lema 2.10. *A equação $(N,I) - L(0,N,I) = 0$ tem uma única solução em $L^4(Q) \times L^4(Q)$.*

Demonstração. Observemos que a equação $(N,I) - L(0,N,I) = 0$ possui uma única solução se, e somente se, (N,I) satisfaz o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + f, & \text{em} \quad Q, \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + g, & \text{em} \quad Q, \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0, & \text{em} \quad (0,T), \\ N(x,0) = N_0(x), I(x,0) = I_0(x), & \text{em} \quad (a,b). \end{cases}$$

Como os coeficientes do problema acima satisfazem as hipóteses do Teorema da Existência e Unicidade (Proposição 1.46), isso nos garante existência e unicidade da solução (N,I) para o sistema acima e portanto segue o resultado. □

Lema 2.11. *Existe uma solução (N,I) do sitema (2.1).*

Demonstração. Basta observar que o operador L definido em (2.3) satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e a consequência desse teorema é que existe $(N,I) \in L^4(Q) \times L^4(Q)$ tal que $L(1,N,I) = (N,I)$, ou seja, (N,I) é solução do problema (2.1). □

Observação 2.12. *Dados (f_1, g_1) e (f_2, g_2) em $L^4(Q) \times L^4(Q)$, considere (N_1, I_1) e (N_2, I_2) as soluções do sistema (2.1) associadas a (f_1, g_1) e (f_2, g_2), respectivamente. Denotando por $N = N_1 - N_2$, $I = I_1 - I_2$, segue da Desigualdade de Hölder (Proposição 1.34) e das estimativas (2.31) e (2.32), as seguintes desigualdades.*

1. $$\int_a^b N_i dx \leq c_i, \quad i \in \{1,2\}, \quad \text{onde } c_i \text{ é uma constante.}$$

   De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |N_i| dx \leq \left(\int_a^b (1)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |N_i|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |N_i|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_N\|_\infty + 3)t} \int_a^b |N_0(x)|^4 dx + \|f_i\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_N\|_\infty + 3)T} \int_a^b |N_0(x)|^4 dx + \|f_i\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}}, \forall t \in [0,T] \\
&= c_i.
\end{aligned}$$

2. $$\int_a^b I_i dx \leq k_i, \quad i \in \{1,2\}, \quad \text{onde } k_i \text{ é uma constante.}$$

   De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |I_i| dx \leq \left(\int_a^b (1)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |I_i|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |I_i|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_I\|_\infty + 3)t} \int_a^b |I_0(x)|^4 dx + \|g_i\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_I\|_\infty + 3)T} \int_a^b |I_0(x)|^4 dx + \|g_i\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}}, \forall t \in [0,T] \\
&= k_i.
\end{aligned}$$

3. $$\int_a^b \left[\int_a^b N dx N_2 N^3\right] dx \leq c_2 \int_a^b |N^4| dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[\int_a^b N dx N_2 N^3\right] dx \leq \int_a^b |N| dx \int_a^b |N_2||N|^3 dx \\
&\leq \left(\int_a^b (1)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |N_2|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b \left(|N|^3\right)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_N\|_\infty+3)T} \int_a^b |N_0(x)|^4 dx + \|f_2\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |N|^4 dx\right) \\
&= c_2 \left(\int_a^b |N|^4 dx\right).
\end{aligned}$$

4.

$$\int_a^b \left[\int_a^b I dx I_2 I^3\right] dx \leq k_2 \int_a^b |I^4| dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[\int_a^b I dx I_2 I^3\right] dx \leq \int_a^b |I| dx \int_a^b |I_2||I|^3 dx \\
&\leq \left(\int_a^b (1)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |I_2|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b \left(|I|^3\right)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_I\|_\infty+3)T} \int_a^b |I_0(x)|^4 dx + \|g_2\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |I|^4 dx\right) \\
&= k_2 \left(\int_a^b |I|^4 dx\right).
\end{aligned}$$

5.

$$\int_a^b \left[\int_a^b I dx N_2 N^3\right] dx \leq c_2 \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[\int_a^b I dx N_2 N^3\right] dx \leq \int_a^b |I| dx \int_a^b |N_2||N|^3 dx \\
&\leq \left(\int_a^b (1)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |N_2|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b \left(|N|^3\right)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_N\|_\infty+3)T} \int_a^b |N_0(x)|^4 dx + \|f_2\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\times \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}} \\
&= c_2 \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

6.

$$\int_a^b \left[\int_a^b N dx I_2 I^3\right] dx \leq k_2 \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[\int_a^b N dx I_2 I^3\right] dx \leq \int_a^b |N| dx \int_a^b |I_2||I|^3 dx \\
&\leq \left(\int_a^b (1)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |I_2|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b (|I|^3)^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq (b-a)^{\frac{3}{4}} \left(e^{(4\|r_I\|_\infty + 3)T} \int_a^b |I_0(x)|^4 dx + \|g_2\|^4_{L^4(Q)}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\times \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}} \\
&= k_2 \left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

Lema 2.13. *A solução (N, I) do sistema (2.1) depende continuamente de (f, g).*

Demonstração. Suponha que existam duas soluções $(N_1, I_1), (N_2, I_2)$ do sistema (2.1). Então,

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial N_1}{\partial t} = D_N N_{1_{xx}} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N_1 dx - \alpha_{IN} \int_a^b I_1 dx\right) N_1 + f_1; \\[2ex]
\dfrac{\partial I_1}{\partial t} = D_I I_{1_{xx}} + \left(r_I(x) - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I_1 dx - \alpha_{NI} \int_a^b N_1 dx\right) I_1 + g_1; \\[2ex]
N_{1_x}(a,t) = N_{1_x}(b,t) = I_{1_x}(a,t) = I_{1_x}(b,t) = 0; \\[2ex]
N_1(x,0) = N_0(x), I_1(x,0) = I_0(x)
\end{cases} \tag{2.33}$$

e

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial N_2}{\partial t} = D_N N_{2_{xx}} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N_2 dx - \alpha_{IN} \int_a^b I_2 dx\right) N_2 + f_2; \\[2ex]
\dfrac{\partial I_2}{\partial t} = D_I I_{2_{xx}} + \left(r_I(x) - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I_2 dx - \alpha_{NI} \int_a^b N_2 dx\right) I_2 + g_2; \\[2ex]
N_{2_x}(a,t) = N_{2_x}(b,t) = I_{2_x}(a,t) = I_{2_x}(b,t) = 0; \\[2ex]
N_2(x,0) = N_0(x), I_2(x,0) = I_0(x).
\end{cases} \tag{2.34}$$

Fazendo $N = N_1 - N_2, I = I_1 - I_2,\ f = f_1 - f_2$ e $g = g_1 - g_2$ e subtraindo (2.34) de

(2.33), obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + (r_N(x)N - \alpha_{NN}\left(\displaystyle\int_a^b N_1 dx N_1 - \int_a^b N_2 dx N_2\right) - \\ -\alpha_{IN}\left(\displaystyle\int_a^b I_1 dx N_1 - \int_a^b I_2 dx N_2\right) + f; \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + (r_I(x)I - \alpha_{II}\left(\displaystyle\int_a^b I_1 dx I_1 - \int_a^b I_2 dx I_2\right) - \\ -\alpha_{NI}\left(\displaystyle\int_a^b N_1 dx I_1 - \int_a^b N_2 dx I_2\right) + g; \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0; \\ N(x,0) = I(x,0) = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Somando e subtraindo $\alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N_1 dx N_2$ e $\alpha_{IN}\displaystyle\int_a^b I_1 dx N_2$, multiplicando por N^3 na primeira equação do sistema (2.35) e integrando de a até b, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial N}{\partial t} N^3 dx &= D_N \int_a^b N_{xx} N^3 dx + \int_a^b r_N(x) N^4 dx \\ &- \alpha_{NN}\int_a^b \left(\int_a^b N_1 dx N^4 + \int_a^b N dx N_2 N^3\right) dx \\ &- \alpha_{IN}\int_a^b \left(\int_a^b I_1 dx N^4 + \int_a^b I dx N_2 N^3\right) dx + \int_a^b f N^3 dx. \end{aligned}$$

Pela Fórmula de Green (Proposição 1.44), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b N^4 dx &= -3D_N \int_a^b (N_x)^2 N^2 dx + \int_a^b r_N(x) N^4 dx \\ &- \alpha_{NN}\int_a^b \left(\int_a^b N_1 dx N^4 + \int_a^b N dx N_2 N^3\right) dx \\ &- \alpha_{IN}\int_a^b \left(\int_a^b I_1 dx N^4 + \int_a^b I dx N_2 N^3\right) dx + \int_a^b f N^3 dx. \end{aligned}$$

Como $D_N \geq 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b N^4dx \leq \int_a^b r_N(x)N^4dx - \alpha_{NN}\int_a^b \left(\int_a^b N_1dxN^4 + \int_a^b NdxN_2N^3\right)dx \\
&- \alpha_{IN}\int_a^b \left(\int_a^b I_1dxN^4 + \int_a^b IdxN_2N^3\right)dx + \int_a^b fN^3dx \\
&= \int_a^b r_N(x)N^4dx - \alpha_{NN}\left[\left(\int_a^b N_1dx\right)\left(\int_a^b N^4dx\right) + \int_a^b \left(\int_a^b NdxN_2N^3\right)dx\right] \\
&- \alpha_{IN}\left[\left(\int_a^b I_1dx\right)\left(\int_a^b N^4dx\right) + \int_a^b \left(\int_a^b IdxN_2N^3\right)dx\right] + \int_a^b fN^3dx \\
&\leq \int_a^b |r_N(x)||N|^4dx + \int_a^b |f||N|^3dx \\
&+ \alpha_{NN}\left[\left(\int_a^b |N_1|dx\right)\left(\int_a^b |N|^4dx\right) + \int_a^b \left(\int_a^b |N|dx|N_2||N|^3\right)dx\right] \\
&+ \alpha_{IN}\left[\left(\int_a^b |I_1|dx\right)\left(\int_a^b |N|^4dx\right) + \int_a^b \left(\int_a^b |I|dx|N_2||N|^3\right)dx\right],
\end{aligned}
$$

pela Observação 2.12 e pela Desigualdade de Hölder (Proposição 1.34), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b N^4dx \leq \|r_N\|_{L^\infty(Q)}\int_a^b |N|^4dx + \alpha_{NN}c_1\int_a^b |N|^4dx \\
&+ \alpha_{NN}c_2\int_a^b |N|^4dx + \alpha_{IN}k_1\int_a^b |N|^4dx \\
&+ \alpha_{IN}c_2\left(\int_a^b |I|^4dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_a^b |N|^4dx\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\int_a^b f^4dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_a^b |N|^4dx\right)^{\frac{3}{4}},
\end{aligned}
$$

pela Desigualdade de Young (Proposição 1.29), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b |N|^4dx \leq (\|r_N\|_{L^\infty(Q)} + \overline{c_1} + \overline{c_2} + \overline{c_3})\int_a^b |N|^4dx \\
&+ \overline{c_4}\left(\frac{1}{4}\left[\left(\int_a^b |I|^4dx\right)^{\frac{1}{4}}\right]^4 + \frac{3}{4}\left[\left(\int_a^b |N|^4dx\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left[\left(\int_a^b f^4dx\right)^{\frac{1}{4}}\right]^4 + \frac{3}{4}\left[\left(\int_a^b |N|^4dx\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} \\
&= \overline{c}\int_a^b |N|^4dx + \overline{c_4}\left(\frac{1}{4}\int_a^b |I|^4dx + \frac{3}{4}\int_a^b |N|^4dx\right) + \frac{1}{4}\int_a^b f^4dx + \frac{3}{4}\int_a^b |N|^4dx \\
&= \left(\overline{c} + \frac{3\overline{c}_4}{4} + \frac{3}{4}\right)\int_a^b |N|^4dx + \frac{\overline{c_4}}{4}\int_a^b |I|^4dx + \frac{1}{4}\int_a^b f^4dx \\
&= \overline{C}\int_a^b |N|^4dx + \frac{\overline{c_4}}{4}\int_a^b |I|^4dx + \frac{1}{4}\int_a^b f^4dx, \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

onde $\overline{c_1} = \alpha_{NN}c_1$, $\overline{c_2} = \alpha_{NN}c_2$, $\overline{c_3} = \alpha_{IN}k_1$, $\overline{c_4} = \alpha_{IN}c_2$, $\overline{c} = (\|r_N\|_{L^\infty(Q)} + \overline{c_1} + \overline{c_2} + \overline{c_3})$ e $\overline{C} = \overline{c} + \dfrac{3\overline{c}_4}{4} + \dfrac{3}{4}$.

Analogamente, somando e subtraindo $\alpha_{II}\int_a^b I_1 dx I_2$ e $\alpha_{NI}\int_a^b N_1 dx I_2$, multiplicando por I^3 na segunda equação do sistema (2.35) e integrando de a até b, temos

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\partial I}{\partial t} I^3 dx = D_I \int_a^b I_{xx} I^3 dx + \int_a^b r_I(x) I^4 dx \\
&- \alpha_{II} \int_a^b \left(\int_a^b I_1 dx I^4 + \int_a^b I dx I_2 I^3 \right) dx \\
&- \alpha_{NI} \int_a^b \left(\int_a^b N_1 dx I^4 + \int_a^b N dx I_2 I^3 \right) dx + \int_a^b g I^3 dx.
\end{aligned}$$

Pela Fórmula de Green (Proposição 1.44), segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b I^4 dx = -3D_I \int_a^b (I_x)^2 I^2 dx + \int_a^b r_I(x) I^4 dx \\
&- \alpha_{II} \int_a^b \left(\int_a^b I_1 dx I^4 + \int_a^b I dx I_2 I^3 \right) dx \\
&- \alpha_{NI} \int_a^b \left(\int_a^b N_1 dx I^4 + \int_a^b N dx I_2 I^3 \right) dx + \int_a^b g I^3 dx.
\end{aligned}$$

Como $D_I \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b I^4 dx \leq \int_a^b r_I(x) I^4 dx - \alpha_{II} \int_a^b \left(\int_a^b I_1 dx I^4 + \int_a^b I dx I_2 I^3 \right) dx \\
&- \alpha_{NI} \int_a^b \left(\int_a^b N_1 dx I^4 + \int_a^b N dx I_2 I^3 \right) dx + \int_a^b g I^3 dx \\
&= \int_a^b r_I(x) I^4 dx - \alpha_{II} \left[\left(\int_a^b I_1 dx \right) \left(\int_a^b I^4 dx \right) + \int_a^b \left(\int_a^b I dx I_2 I^3 \right) dx \right] \\
&- \alpha_{NI} \left[\left(\int_a^b N_1 dx \right) \left(\int_a^b I^4 dx \right) + \int_a^b \left(\int_a^b N dx I_2 I^3 \right) dx \right] + \int_a^b g I^3 dx \\
&\leq \int_a^b |r_I(x)||I|^4 dx + \int_a^b |g||I|^3 dx \\
&+ \alpha_{II} \left[\left(\int_a^b |I_1| dx \right) \left(\int_a^b |I|^4 dx \right) + \int_a^b \left(\int_a^b |I| dx |I_2||I|^3 \right) dx \right] \\
&+ \alpha_{NI} \left[\left(\int_a^b |N_1| dx \right) \left(\int_a^b |I|^4 dx \right) + \int_a^b \left(\int_a^b |N| dx |I_2||I|^3 \right) dx \right],
\end{aligned}$$

pela Observação 2.12 e pela Desigualdade de Hölder (Proposição 1.34), temos

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b I^4 dx \leq \|r_I\|_{L^\infty(Q)}\int_a^b |I|^4 dx + \alpha_{II}k_1\int_a^b |I|^4 dx$$
$$+\alpha_{II}k_2\int_a^b |I|^4 dx + \alpha_{NI}k_1\int_a^b |I|^4 dx$$
$$+\alpha_{IN}k_2\left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\int_a^b g^4 dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}},$$

pela Desigualdade de Young (Proposição 1.29), obtemos

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_a^b |I|^4 dx \leq (\|r_I\|_{L^\infty(Q)} + \overline{k_1} + \overline{k_2} + \overline{k_3})\int_a^b |I|^4 dx +$$
$$\overline{k_4}\left(\frac{1}{4}\left[\left(\int_a^b |N|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}}\right]^4 + \frac{3}{4}\left[\left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left[\left(\int_a^b g^4 dx\right)^{\frac{1}{4}}\right]^4 + \frac{3}{4}\left[\left(\int_a^b |I|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}$$
$$= \overline{k}\int_a^b |I|^4 dx + \overline{k_4}\left(\frac{1}{4}\int_a^b |N|^4 dx + \frac{3}{4}\int_a^b |I|^4 dx\right)$$
$$+\frac{1}{4}\int_a^b g^4 dx + \frac{3}{4}\int_a^b |I|^4 dx$$

$$= \left(\overline{k} + \frac{3\overline{k}_4}{4} + \frac{3}{4}\right)\int_a^b |I|^4 dx + \frac{\overline{k_4}}{4}\int_a^b |N|^4 dx + \frac{1}{4}\int_a^b g^4 dx$$
$$= \overline{K}\int_a^b |I|^4 dx + \frac{\overline{k_4}}{4}\int_a^b |N|^4 dx + \frac{1}{4}\int_a^b g^4 dx, \tag{2.37}$$

onde $\overline{k_1} = \alpha_{II}k_1$, $\overline{k_2} = \alpha_{II}k_2$, $\overline{k_3} = \alpha_{NI}c_1$, $\overline{k_4} = \alpha_{NI}k_2$, $\overline{k} = (\|r_I\|_{L^\infty(Q)} + \overline{k_1} + \overline{k_2} + \overline{k_3})$ e $\overline{K} = \overline{k} + \dfrac{3\overline{k}_4}{4} + \dfrac{3}{4}$.

Somando (2.36) e (2.37), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\int_a^b |N|^4dx + \int_a^b |I|^4dx\right) \leq \\
&4\overline{C}\int_a^b |N|^4dx + \overline{c_4}\int_a^b |I|^4dx + \int_a^b f^4dx + 4\overline{K}\int_a^b |I|^4dx \\
&+\overline{k_4}\int_a^b |N|^4dx + \int_a^b g^4dx \\
&= C\int_a^b |N|^4dx + K\int_a^b |I|^4dx + \int_a^b f^4dx + \int_a^b g^4dx \\
&\leq M\left(\int_a^b (|N|^4 + |I|^4)\right) + \int_a^b (f^4+g^4)dx,
\end{aligned}
$$

onde $C = (4\overline{c} + \overline{k_4})$, $K = (4\overline{k} + \overline{c_4})$ e $M = \max\{C, K\}$.

Aplicando a Desigualdade de Gronwall (Proposição 1.35), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (|N|^4 + |I|^4)dx \leq e^{Mt}\left(\int_a^b (|N_0(x)|^4 + |I_0(x)|^4)dx + \int_0^t\int_a^b (f^4+g^4)dxdt\right) \\
&\leq e^{MT}\left(\int_a^b (|N_0(x)|^4 + |I_0(x)|^4)dx + \int_0^T\int_a^b (f^4+g^4)dxdt\right), \forall t\in[0,T] \\
&\leq e^{MT}\left(\int_0^T\int_a^b (f^4+g^4)dxdt\right) \qquad (2.38) \\
&= e^{MT}\|(f,g)\|^4_{L^4(Q)\times L^4(Q)},
\end{aligned}
$$

(2.38) acontece pois $N_0(x) = I_0(x) = 0$. Dessa maneira,

$$
\left(\|(N,I)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}\right)^4 \leq e^{MT}T\left(\|(f,g)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}\right)^4,
$$

então,

$$
\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)} \leq (e^{MT}T)^{\frac{1}{4}}(\|f\|_{L^4(Q)} + \|g\|_{L^4(Q)}).
$$

Portanto,

$$
\|N_1 - N_2\|_{L^4(Q)} + \|I_1 - I_2\|_{L^4(Q)} \leq \overline{M}(\|f_1 - f_2\|_{L^4(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^4(Q)}),
$$

sendo $\overline{M} = (e^{MT}T)^{\frac{1}{4}}$. □

Corolário 2.14. *Dado qualquer $(f,g) \in L^4(Q)\times L^4(Q)$, a solução (N,I) do problema (2.1), associada a (f,g) é única.*

Demonstração. Considerando $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$ no Lema 2.13, concluímos que a solução (N,I) é única. □

Demonstração do Teorema 2.2. A existência da solução $(N,I) \in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$ segue do Lema 2.11 e do Corolário 2.14 segue que tal solução é única. Pelas desigualdades (2.8), (2.10) e pelo Lema 2.9 obtemos a desigualdade (2.2). □

O Lema 2.9 pode ser provado de uma outra forma sem considerar a positividade de f e g. Isso é o conteúdo do seguinte Lema:

Lema 2.15. *Existe $\epsilon > 0$ tal que se*

$$\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)} \leq \epsilon.$$

Então, vale a mesma conclusão do Lema 2.9.

Demonstração. Seja $L(\lambda, N, I) = (N, I)$, de (2.8) e (2.10) com $\phi = N$ e $\psi = I$, obtemos

$$\|N\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_1 \left(\|f\|_{L^4(Q)} + 2\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \left(\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)}\right) \|N_0\|_{W_2^1(a,b)} \right)$$

e

$$\|I\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_2 \left(\|g\|_{L^4(Q)} + 2\|I_0\|_{W_2^1(a,b)} + \left(\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)}\right) \|I_0\|_{W_2^1(a,b)} \right).$$

Da continuidade da imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^4(Q)$, existe $K_3 > 0$ tal que

$$\|N\|_{L^4(Q)} \leq K_3 \|N\|_{W_2^{2,1}(Q)} \text{ e } \|I\|_{L^4(Q)} \leq K_3 \|I\|_{W_2^{2,1}(Q)}.$$

De onde obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)}\right) \leq \\
&K_3(K_1 + K_2) \left[\|f\|_{L^4(Q)} + \|g\|_{L^4(Q)} + 2\left(\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right) \right. \\
&\left. + \left(\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)}\right) \left(\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right) \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\left[1 - K_3(K_1 + K_2)\left(\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right)\right] \left(\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)}\right) \leq \\
&K_3(K_1 + K_2) \left[\|f\|_{L^4(Q)} + \|g\|_{L^4(Q)} + 2\left(\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right) \right].
\end{aligned}$$

Considerando $\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)} \leq \epsilon$, em que $\epsilon > 0$ é tal que

$$1 - K_3(K_1 + K_2)\epsilon \geq \frac{1}{2}$$

que é equivalente a

$$0 < \epsilon \leq \frac{1}{2K_3(K_1 + K_2)}.$$

Assim, obtemos que

$$1 - K_3(K_1 + K_2)\left(\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Portanto, basta considerar

$$M = \frac{K_3(K_1+K_2)\left[\|f\|_{L^4(Q)} + \|g\|_{L^4(Q)} + 2\left(\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right)\right.}{1 - K_3(K_1+K_2)\left(\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)}\right)} + 1.$$

Para concluir que

$$\|N\|_{L^4(Q)} + \|I\|_{L^4(Q)} < M.$$

$\square$

Observação 2.16. *Assumindo as hipóteses do Lema 2.15 sobre (N_0, I_0) podemos obter a mesma conclusão do Teorema 2.2 para $(f,g) \in L^4(Q) \times L^4(Q)$ quaisquer.*

2.3 Propriedades do Operador Solução

Considere o operador

$$\begin{array}{rccl} F: & L^4(Q)\times L^4(Q) & \to & L^4(Q)\times L^4(Q) \\ & (f,g) & \mapsto & F(f,g) = (N,I), \end{array} \tag{2.39}$$

onde (N,I) é solução de (2.1). Segue do Corolário 2.14 que F está bem definido.

Teorema 2.17. *Sejam $f, g, h_1, h_2 \in L^4(Q)$ com $F(f,g)$ e $F(f+h_1, g+h_2)$ sendo as soluções de (2.1) correspondentes a (f,g) e $(f+h_1, g+h_2)$, respectivamente. Então*

$$\|F(f+h_1, g+h_2) - F(f,g) - F'(f,g)(h_1,h_2)\|_{W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)} \tag{2.40}$$

$$\le C\|(h_1,h_2)\|^2_{L^4(Q)\times L^4(Q)}, \tag{2.41}$$

onde $F'(f,g): L^4(Q)\times L^4(Q) \to L^4(Q)\times L^4(Q)$ é um operador linear e $(N^*, I^*) = F'(f,g)(h_1,h_2)$ é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N^*}{\partial t} = D_N N^*_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN}\int_a^b I dx\right) N^* & \\ -\alpha_{NN}\left(\displaystyle\int_a^b N^* dx\right) N - \alpha_{IN}\left(\displaystyle\int_a^b I^* dx\right) N + h_1 & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I^*}{\partial t} = D_I I^*_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II}\displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI}\int_a^b N dx\right) I^* & \\ -\alpha_{II}\left(\displaystyle\int_a^b I^* dx\right) I - \alpha_{NI}\left(\displaystyle\int_a^b N^* dx\right) I + h_2 & \text{em} \quad Q; \\ N^*_x(a,t) = N^*_x(b,t) = I^*_x(a,t) = I^*_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N^*(x,0) = I^*(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.42}$$

Demonstração. Considere $(h_1, h_2) \in L^4(Q) \times L^4(Q)$ e $F(f+h_1, g+h_2) = (\overline{N}, \overline{I})$. Pela dependência contínua em relação aos dados f e g, obtemos

$$\|\overline{N} - N\|_{L^4(Q)} + \|\overline{I} - I\|_{L^4(Q)} \leq C\|(h_1, h_2)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}. \tag{2.43}$$

Seja

$$\begin{cases} \widehat{N} := \overline{N} - N - N^* \\ \widehat{I} := \overline{I} - I - I^*, \end{cases} \tag{2.44}$$

onde (N^*, I^*) é o candidato a $F'(f,g)(h_1,h_2)$.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial t} = D_N \overline{N}_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b \overline{N}dx - \alpha_{IN}\int_a^b \overline{I}dx\right)\overline{N} + (f+h_1); \\ \dfrac{\partial \overline{I}}{\partial t} = D_N \overline{I}_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II}\displaystyle\int_a^b \overline{I}dx - \alpha_{NI}\int_a^b \overline{N}dx\right)\overline{I} + (g+h_2); \\ \overline{N}_x(a,t) = \overline{N}_x(b,t) = \overline{I}_x(a,t) = \overline{I}_x(b,t) = 0; \\ \overline{N}(x,0) = N_0(x), \overline{I}(x,0) = I_0(x). \end{cases} \tag{2.45}$$

Subtraindo (2.1) de (2.45), temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{N} - N}{\partial t} = D_N(\overline{N}_{xx} - N_{xx}) + r_N(x)(\overline{N} - N) - \alpha_{NN}\left(\displaystyle\int_a^b \overline{N}dx\right)\overline{N} \\ +\alpha_{NN}\left(\displaystyle\int_a^b Ndx\right)N - \alpha_{IN}\left[\left(\displaystyle\int_a^b \overline{I}dx\right)\overline{N} - \left(\displaystyle\int_a^b Idx\right)N\right] + h_1; \\ \dfrac{\partial \overline{I}}{\partial t} - \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I(\overline{I}_{xx} - I_{xx}) + r_I(x)(\overline{I} - I) - \alpha_{II}\left(\displaystyle\int_a^b \overline{I}dx\right)\overline{I} \\ +\alpha_{II}\left(\displaystyle\int_a^b Idx\right)I - \alpha_{NI}\left(\displaystyle\int_a^b \overline{N}dx\right)\overline{I} + \alpha_{NI}\left(\displaystyle\int_a^b Ndx\right)I + h_2; \\ \overline{N}_x(a,t) - N_x(a,t) = \overline{N}_x(b,t) - N_x(b,t) = 0; \\ \overline{I}_x(a,t) - I_x(a,t) = \overline{I}_x(b,t) - I_x(b,t) = 0; \\ \overline{N}(x,0) - N(x,0) = \overline{I}(x,0) - I(x,0) = 0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Somando e subtraindo $\alpha_{NN}\left(\displaystyle\int_a^b Ndx\right)\overline{N}$ e $\alpha_{IN}\left(\displaystyle\int_a^b Idx\right)\overline{N}$ na primeira equação do sistema (2.46), segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\overline{N}-N)}{\partial t} &= D_N(\overline{N}_{xx}-N_{xx}) + r_N(x)(\overline{N}-N) - \alpha_{NN}\left(\int_a^b \overline{N}dx\right)\overline{N} \\
&+ \alpha_{NN}\left(\int_a^b Ndx\right)\overline{N} - \alpha_{NN}\left(\int_a^b Ndx\right)\overline{N} + \alpha_{NN}\left(\int_a^b Ndx\right) \\
&- \alpha_{IN}\left(\int_a^b \overline{I}dx\right)\overline{N} + \alpha_{IN}\left(\int_a^b Idx\right)N + \alpha_{IN}\left(\int_a^b Idx\right)\overline{N} \\
&- \alpha_{IN}\left(\int_a^b Idx\right)\overline{N} + h_1 \\
&= D_N(\overline{N}_{xx}-N_{xx}) + r_N(x)(\overline{N}-N) - \alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N}-N)dx\right)\overline{N} \\
&- \alpha_{NN}\left(\int_a^b Ndx\right)(\overline{N}-N) - \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I}-I)dx\right)\overline{N} \\
&- \alpha_{NI}\left(\int_a^b Idx\right)(\overline{N}-N) + h_1.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Somando e subtraindo $\alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N}-N)dx\right)N$ e $\alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I}-I)dx\right)N$ em (2.47), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\overline{N}-N)}{\partial t} &= D_N(\overline{N}_{xx}-N_{xx}) + r_N(x)(\overline{N}-N) \\
&- \alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N}-N)dx\right)\overline{N} - \alpha_{NN}\left(\int_a^b Ndx\right)(\overline{N}-N) \\
&- \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I}-I)dx\right)\overline{N} - \alpha_{NI}\left(\int_a^b Idx\right)(\overline{N}-N) \\
&+ \alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N}-N)dx\right)N - \alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N}-N)dx\right)N \\
&+ \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I}-I)dx\right)N - \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I}-I)dx\right)N + h_1 \\
&= D_N(\overline{N}_{xx}-N_{xx}) + r_N(x)(\overline{N}-N) \\
&- \left[\alpha_{NN}\left(\int_a^b Ndx\right) + \alpha_{IN}\left(\int_a^b Idx\right)\right](\overline{N}-N) \\
&- \left[\alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N}-N)dx\right) + \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I}-I)dx\right)\right](\overline{N}-N) \\
&- \left[\alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N}-N)dx\right) + \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I}-I)dx\right)\right]N + h_1.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&D_N(\overline{N}_{xx} - N_{xx}) + \left[r_N(x) - \alpha_{NN}\left(\int_a^b N dx\right) - \alpha_{IN}\left(\int_a^b I dx\right)\right](\overline{N} - N) \\
&- \left[\alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N} - N) dx\right) + \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I} - I) dx\right)\right] N + h_1
\end{aligned}
$$

é linear em relação ao termo $\overline{N} - N$ e

$$
- \left[\alpha_{NN}\left(\int_a^b (\overline{N} - N) dx\right) + \alpha_{IN}\left(\int_a^b (\overline{I} - I) dx\right)\right](\overline{N} - N)
$$

não é linear em relação ao termo $\overline{N} - N$.

De modo análogo, somando e subtraindo $\alpha_{II}\left(\int_a^b I dx\right)\overline{I}$ e $\alpha_{NI}\left(\int_a^b N dx\right)\overline{I}$ na segunda equação do sistema (2.46), segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\overline{I} - I)}{\partial t} = D_N(\overline{I}_{xx} - I_{xx}) + r_I(x)(\overline{I} - I) \\
&\left[-\alpha_{II}\left(\int_a^b I dx\right) - \alpha_{NI}\left(\int_a^b N dx\right)\right](\overline{I} - I) \\
&- \left[\alpha_{II}\left(\int_a^b (\overline{I} - I) dx\right) + \alpha_{NI}\left(\int_a^b (\overline{N} - N) dx\right)\right](\overline{I} - I) \\
&- \left[\alpha_{II}\left(\int_a^b (\overline{I} - I) dx\right) + \alpha_{NI}\left(\int_a^b (\overline{N} - N) dx\right)\right] I + h_2,
\end{aligned}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
&D_I(\overline{I}_{xx} - I_{xx}) + \left[r_I(x) - \alpha_{II}\left(\int_a^b I dx\right) - \alpha_{NI}\left(\int_a^b N dx\right)\right](\overline{I} - I) \\
&- \left[\alpha_{II}\left(\int_a^b (\overline{I} - I) dx\right) + \alpha_{NI}\left(\int_a^b (\overline{N} - N) dx\right)\right] I + h_2
\end{aligned}
$$

é linear em relação ao termo $\overline{I} - I$ e

$$
- \left[\alpha_{II}\left(\int_a^b (\overline{I} - I) dx\right) + \alpha_{NI}\left(\int_a^b (\overline{N} - N) dx\right)\right](\overline{I} - I)
$$

não é linear em relação ao termo $\overline{I} - I$.

Considere (N^*, I^*) solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N^*}{\partial t} = D_N N^*_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) N^* \\ -\alpha_{NN} \left(\displaystyle\int_a^b N^* dx \right) N - \alpha_{IN} \left(\displaystyle\int_a^b I^* dx \right) N + h_1 & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I^*}{\partial t} = D_I I^*_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI} \int_a^b N dx \right) I^* \\ -\alpha_{II} \left(\displaystyle\int_a^b I^* dx \right) I - \alpha_{NI} \left(\displaystyle\int_a^b N^* dx \right) I + h_2 & \text{em} \quad Q; \\ N^*_x(a,t) = N^*_x(b,t) = I^*_x(a,t) = I^*_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N^*(x,0) = I^*(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{2.48}$$

Assim, $\widehat{N}$ e $\widehat{I}$ definidos em (2.44) satisfazem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{N}}{\partial t} = D_N \widehat{N}_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) \widehat{N} \\ -\alpha_{NN} \left(\displaystyle\int_a^b \widehat{N} dx \right) N - \alpha_{IN} \left(\displaystyle\int_a^b \widehat{I} dx \right) N + \widehat{f} & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial \widehat{I}}{\partial t} = D_I \widehat{I}_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI} \int_a^b N dx \right) \widehat{I} \\ -\alpha_{II} \left(\displaystyle\int_a^b \widehat{I} dx \right) I - \alpha_{NI} \left(\displaystyle\int_a^b \widehat{N} dx \right) I + \widehat{g} & \text{em} \quad Q; \\ \widehat{N}_x(a,t) = \widehat{N}_x(b,t) = \widehat{I}_x(a,t) = \widehat{I}_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ \widehat{N}(x,0) = \widehat{I}(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b), \end{cases} \tag{2.49}$$

em que

$$\widehat{f} := -\left[\alpha_{NN} \int_a^b (\overline{N} - N) dx + \alpha_{IN} \int_a^b (\overline{I} - I) dx \right] (\overline{N} - N),$$
$$\widehat{g} := -\left[\alpha_{II} \int_a^b (\overline{I} - I) dx + \alpha_{NI} \int_a^b (\overline{N} - N) dx \right] (\overline{I} - I).$$

Daí, usando o Lema 1.30, temos

$$\begin{aligned}(\widehat{f})^4 &= \left(\alpha_{NN}\int_a^b(\overline{N}-N)dx+\alpha_{IN}\int_a^b(\overline{I}-I)dx\right)^4(\overline{N}-N)^4\\ &\leq 16\alpha_{NN}^4\left(\int_a^b|\overline{N}-N|dx\right)^4(\overline{N}-N)^4\\ &+16\alpha_{IN}^4\left(\int_a^b|\overline{I}-I|dx\right)^4(\overline{N}-N)^4.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Integrando de a até b ambos os lados da desigualdade (2.50),

$$\begin{aligned}\int_a^b(\widehat{f})^4dx &\leq 16\alpha_{NN}^4\left(\int_a^b|\overline{N}-N|dx\right)^4\left(\int_a^b|\overline{N}-N|^4dx\right)\\ &+16\alpha_{IN}^4\left(\int_a^b|\overline{I}-I|dx\right)^4\left(\int_a^b|\overline{N}-N|^4dx\right).\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Jensen (Proposição 1.33), obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b(\widehat{f})^4dx &\leq 16\alpha_{NN}^4(b-a)^3\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right)\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right)\\ &+16\alpha_{IN}^4(b-a)^3\left(\int_a^b(\overline{I}-I)^4dx\right)\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right)\\ &=16\alpha_{NN}^4(b-a)^3\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right)^2\\ &+16\alpha_{IN}^4(b-a)^3\left(\int_a^b(\overline{I}-I)^4dx\right)\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right).\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young (Proposição 1.29),

$$\begin{aligned}\int_a^b(\widehat{f})^4dx &\leq 16\alpha_{NN}^4(b-a)^3\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right)^2\\ &+16\alpha_{IN}^4(b-a)^3\left[\frac{1}{2}\left(\int_a^b(\overline{I}-I)^4dx\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right)^2\right].\end{aligned} \tag{2.51}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\int_a^b(\widehat{g})^4dx &\leq 16\alpha_{II}^4(b-a)^3\left(\int_a^b(\overline{I}-I)^4dx\right)^2\\ &+16\alpha_{NI}^4(b-a)^3\left[\frac{1}{2}\left(\int_a^b(\overline{N}-N)^4dx\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_a^b(\overline{I}-I)^4dx\right)^2\right].\end{aligned} \tag{2.52}$$

Somando (2.51) e (2.52), temos

$$\int_a^b (\widehat{f})^4 dx + \int_a^b (\widehat{g})^4 dx \leq 16\alpha_{NN}^4 (b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{N}-N)^4 dx\right)^2$$
$$+ 16\alpha_{II}^4 (b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{I}-I)^4 dx\right)^2 + 8\alpha_{IN}^4 (b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{I}-I)^4 dx\right)^2$$
$$+ 8\alpha_{IN}^4 (b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{N}-N)^4 dx\right)^2 + 8\alpha_{NI}^4 (b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{N}-N)^4 dx\right)^2$$
$$+ 8\alpha_{NI}^4 (b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{I}-I)^4 dx\right)^2$$
$$= (16\alpha_{NN}^4 + 8\alpha_{IN}^4 + 8\alpha_{NI}^4)(b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{N}-N)^4 dx\right)^2$$
$$+ (16\alpha_{II}^4 + 8\alpha_{IN}^4 + 8\alpha_{NI}^4)(b-a)^3 \left(\int_a^b (\overline{I}-I)^4 dx\right)^2$$

$$= A\left(\int_a^b (\overline{N}-N)^4 dx\right)^2 + B\left(\int_a^b (\overline{I}-I)^4 dx\right)^2$$
$$\leq C\left[\left(\int_a^b (\overline{N}-N)^4 dx\right)^2 + \left(\int_a^b (\overline{I}-I)^4 dx\right)^2\right],$$

em que $A = (16\alpha_{NN}^4 + 8\alpha_{IN}^4 + 8\alpha_{NI}^4)(b-a)^3$, $B = (16\alpha_{II}^4 + 8\alpha_{IN}^4 + 8\alpha_{NI}^4)(b-a)^3$ e $C = \max\{A, B\}$. Com isso

$$\int_a^b (\widehat{f})^4 dx + \int_a^b (\widehat{g})^4 dx \leq C\Big(\|\overline{N}-N\|_{L^4(Q)}^8 + \|\overline{I}-I\|_{L^4(Q)}^8\Big)$$
$$= C\|(\overline{N},\overline{I}) - (N,I)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}^8.$$

Portanto

$$\|(\widehat{f},\widehat{g})\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} \leq C\|(\overline{N},\overline{I}) - (N,I)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}^2 \leq \widehat{C}\|(h_1,h_2)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)}^2. \tag{2.53}$$

Para o problema linear (1.47) obtemos, de maneira análoga ao que fizemos no Lema 2.13, a estimativa

$$\|\widehat{N}\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{I}\|_{L^4(Q)} \leq C\Big(\|\widehat{f}\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{g}\|_{L^4(Q)}\Big). \tag{2.54}$$

Analisando a primeira equação de (2.49), temos:

1. $\Big(r_N(x) - \alpha_{NN}\int_a^b N dx - \alpha_{IN}\int_a^b I dx\Big) \in L^\infty(Q)$, pela Observação 2.12 - (1) e (2).

2. $\Big(-\alpha_{NN}\int_a^b \widehat{N} dx N - \alpha_{IN}\int_a^b \widehat{I} dx N\Big) \in L^2(Q)$, e mais, segue das desigualdades de

Jensen (Proposição 1.33) e Hölder (Proposição 1.34) que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b \widehat{N} dx N \right\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^T \int_a^b \left(\int_a^b \widehat{N} dx \right)^2 N^2 dx dt \\
&\leq (b-a) \int_0^T \left(\int_a^b |\widehat{N}|^2 dx \right) \left(\int_a^b N^2 dx \right) dt \\
&\leq (b-a) \left(\int_0^T \left(\int_a^b |\widehat{N}|^2 dx \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left(\int_a^b N^2 dx \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (b-a)^3 \left(\int_0^T \int_a^b |\widehat{N}|^4 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_a^b N^4 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (b-a)^3 \|\widehat{N}\|_{L^4(Q)}^2 \|N\|_{L^4(Q)}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \int_a^b \widehat{N} dx N \right\|_{L^2(Q)} \leq (b-a)^{\frac{3}{2}} \|\widehat{N}\|_{L^4(Q)} \|N\|_{L^4(Q)}.$$

Analogamente,

$$\left\| \int_a^b \widehat{I} dx N \right\|_{L^2(Q)} \leq (b-a)^{\frac{3}{2}} \|\widehat{I}\|_{L^4(Q)} \|N\|_{L^4(Q)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\left\| -\alpha_{NN} \int_a^b \widehat{N} dx N - \alpha_{IN} \int_a^b \widehat{I} dx N \right\|_{L^2(Q)} \\
&\leq \max\{\alpha_{NN}, \alpha_{IN}\} (b-a)^{\frac{3}{2}} \Big(\|\widehat{N}\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{I}\|_{L^4(Q)} \Big) \|N\|_{L^4(Q)}.
\end{aligned}$$

3. Como $\widehat{f} \in L^4(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$, segue do resultado de regularidade da Proposição 1.45, com p=2, que $\widehat{N} \in W_2^{2,1}(Q)$ e

$$\begin{aligned}
\|\widehat{N}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq M \left\| -\alpha_{NN} \int_a^b \widehat{N} dx N - \alpha_{IN} \int_a^b \widehat{I} dx N + \widehat{f} \right\|_{L^2(Q)} \\
&\leq M \max\{\alpha_{NN}, \alpha_{IN}\} (b-a)^{\frac{3}{2}} \Big(\|\widehat{N}\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{I}\|_{L^4(Q)} \Big) \|N\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{f}\|_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Segue de (2.54) e da imersão $L^4(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ que

$$\|\widehat{N}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \Big(\|\widehat{N}\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{I}\|_{L^4(Q)} \Big). \tag{2.55}$$

Aplicando o mesmo argumento na equação para $\widehat{I}$ em (2.49), obtemos

$$\|\widehat{I}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\Big(\|\widehat{N}\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{I}\|_{L^4(Q)}\Big). \tag{2.56}$$

Assim, por (2.55), (2.56) e (2.53), segue que

$$\|\widehat{N}\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\widehat{I}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widehat{C}\|(h_1, h_2)\|^2_{L^4(Q)\times L^4(Q)}.$$

Logo,

$$\|(\overline{N}, \overline{I}) - (N, I) - (N^*, I^*)\|_{W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)} \leq \widehat{C}\|(h_1, h_2)\|^2_{L^4(Q)\times L^4(Q)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} &\|F(f + h_1, g + h_2) - F(f, g) - F'(f, g)(h_1, h_2)\|_{W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq \widehat{C}\|(h_1, h_2)\|^2_{L^4(Q)\times L^4(Q)}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Um problema de controle ótimo

Neste capítulo vamos abordar um problema de controle ótimo para o sistema (2.1). Aqui temos dois casos a considerar:

(H_1) Sendo

$$\|N_0\|_{W_2^1(a,b)} + \|I_0\|_{W_2^1(a,b)} \leq \epsilon.$$

e $\epsilon > 0$ dado como no Lema 2.15. Consideraremos $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto convexo, fechado e não-vazio do espaço de Banach $L^4(Q) \times L^4(Q)$.

(H_2) Considerando $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto convexo, fechado e não-vazio do espaço de Banach $L^4(Q) \times L^4(Q)$, definido por

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(f,g) \in L^4(Q) \times L^4(Q) : f \geq 0, g \geq 0\}.$$

Vamos associar um funcional de custo e provaremos a existência de um controle ótimo, ou seja, um mínimo do funcional, em seguida, provaremos que tal mínimo satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem e para isso, o estudo feito no capítulo anterior para o operador solução (2.39) será de fundamental importância.

3.1 Existência de um controle ótimo

Considere o seguinte funcional de custo:

$$J[N,I;f,g] := \frac{\alpha_1}{2}\int_Q |N(x,t) - N_d(x,t)|^2\,dxdt + \frac{\alpha_2}{2}\int_Q |I(x,t) - I_d(x,t)|^2\,dxdt$$
$$+\frac{\beta_1}{2}\int_Q |f(x,t)|^4 dxdt + \frac{\beta_2}{2}\int_Q |g(x,t)|^4 dxdt, \tag{3.1}$$

com $N_d, I_d \in L^2(Q)$ funções dadas, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ satisfazendo $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\beta_1, \beta_2 \geq 1$.

Queremos encontrar um controle ótimo que minimize o funcional (3.1).

Suponha $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto convexo, fechado e não-vazio do espaço de Banach $L^4(Q) \times L^4(Q)$.

Primeiramenrte, consideraremos o caso (H_1).

Teorema 3.1. *Assuma as hipóteses do Lema 2.15 e suponha que $N_d, I_d \in L^2(Q)$. Então existe um controle ótimo $(f_{opt}, g_{opt}) \in \mathcal{U}_{ad}$ minimizando o funcional (3.1), isto é,*

$$J\left[N, I; f_{opt}, g_{opt}\right] = \inf_{(f,g) \in \mathcal{U}_{ad}} J[R, S; f, g]$$

onde $(N, I) = F\left(f_{opt}, g_{opt}\right)$ e $(R, S) = F(f, g)$.

Demonstração. Seja (N_n, I_n, f_n, g_n), $(N_n, I_n) = F(f_n, g_n)$, uma sequência minimizante e como $J\left[N_n, I_n; f_n, g_n\right] \geq 0$, então J possui um ínfimo, dessa forma $J\left[N_n, I_n; f_n, g_n\right] \to \inf_{(f,g) \in \mathcal{U}_{ad}} J[R, S; f, g]$. Como $J\left[N_n, I_n; f_n, g_n\right]$ converge então, existe $K > 0$ tal que $J\left[N_n, I_n; f_n, g_n\right] \leq K$.

Pela estrutura de J obtemos

$$\|f_n\|_{L^4(Q)} + \|g_n\|_{L^4(Q)} \leq K.$$

Pelo Lema 2.9 segue que

$$\|N_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|I_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K.$$

Como os espaços $W_2^{2,1}(Q)$ e $L^4(Q)$ são reflexivos podemos extrair subsequências de (f_n), (g_n), (N_n), (I_n) fracamente converentes, isto é,

$$\begin{gathered} f_n \to f \text{ fracamente em } L^4(Q), \\ g_n \to g \text{ fracamente em } L^4(Q), \\ N_n \to N \text{ fracamente em } W_2^{2,1}(Q) \text{ e} \\ I_n \to I \text{ fracamente em } W_2^{2,1}(Q). \end{gathered}$$

Pela Proposição 1.28 a imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^\infty(Q)$ é compacta, dessa forma

$$\begin{gathered} N_n \to N \text{ fortemente em } L^\infty(Q) \text{ e} \\ I_n \to I \text{ fortemente em } L^\infty(Q). \end{gathered}$$

E como a imersão $L^\infty(Q) \hookrightarrow L^4(Q)$ é contínua, obtemos

$$\begin{gathered} N_n \to N \text{ fortemente em } L^4(Q) \text{ e} \\ I_n \to I \text{ fortemente em } L^4(Q). \end{gathered}$$

Como (N_n, I_n) é solução do problema (2.1), temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_n}{\partial t} = D_N(N_n)_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N_n dx - \alpha_{IN}\int_a^b I_n dx\right) N_n + f_n; \\ \dfrac{\partial I_n}{\partial t} = D_I(I_n)_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II}\displaystyle\int_a^b I_n dx - \alpha_{NI}\int_a^b N_n dx\right) I_n + g_n; \\ (N_n)_x(a,t) = (N_n)_x(b,t) = (I_n)_x(a,t) = (I_n)_x(b,t) = 0; \\ N_n(x,0) = N_0(x), I_n(x,0) = I_0(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Afirmação 3.2. $\displaystyle\int_a^b N_n dx N_n \to \int_a^b N dx N$ *em* $L^2(Q)$.

Demonstração da Afirmação 3.2. De fato,

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_a^b N_n dx N_n - \int_a^b N dx N \right\|_{L^2(Q)} = \\
&\left\| \int_a^b N_n dx N_n - \int_a^b N dx N_n + \int_a^b N dx N_n - \int_a^b N dx N \right\|_{L^2(Q)} \\
&\leq \left\| \int_a^b N_n dx N_n - \int_a^b N dx N_n \right\|_{L^2(Q)} + \left\| \int_a^b N dx N_n - \int_a^b N dx N \right\|_{L^2(Q)} \\
&= \left\| \int_a^b (N_n - N) dx N_n \right\|_{L^2(Q)} + \left\| \int_a^b N dx (N_n - N) \right\|_{L^2(Q)} \\
&= \left(\int_0^T \int_a^b \left[\left(\int_a^b |N_n - N| dx \right)^2 |N_n|^2 \right] dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_0^T \int_a^b \left[\left(\int_a^b |N| dx \right)^2 |N_n - N|^2 \right] dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^T \left[\left(\int_a^b |N_n - N| dx \right)^2 \left(\int_a^b |N_n|^2 dx \right) \right] dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_0^T \left[\left(\int_a^b |N| dx \right)^2 \left(\int_a^b |N_n - N|^2 dx \right) \right] dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\int_0^T \left(\int_a^b |N_n - N| dx \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left(\int_a^b |N_n|^2 dx \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left[\left(\int_0^T \left(\int_a^b |N| dx \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left(\int_a^b |N_n - N|^2 dx \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[(b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_a^b |N_n-N|^4dxdt\right)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_a^b |N_n|^4dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&+\left[(b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_a^b |N|^4dxdt\right)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_a^b |N_n-N|^4dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=(b-a)^{\frac{1}{4}}\|N_n-N\|_{L^4(Q)}\|N\|_{L^4(Q)}+(b-a)^{\frac{1}{4}}\|N_n-N\|_{L^4(Q)}\|N\|_{L^4(Q)}\\
&=2(b-a)^{\frac{1}{4}}\|N_n-N\|_{L^4(Q)}\|N\|_{L^4(Q)}.
\end{aligned}
$$

Das convergências fortes obtidas anteriormente sabemos que $\|N_n-N\|_{L^4(Q)}\to 0$. Além disso, como $N\in L^4(Q)$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_a^b N_ndxN_n-\int_a^b NdxN\right\|_{L^2(Q)}\\
&\leq 2(b-a)^{\frac{1}{4}}\|N_n-N\|_{L^4(Q)}\|N\|_{L^4(Q)}\to 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

De forma análoga a Afirmação 3.2 podemos mostrar que

$$\int_a^b I_ndxN_n\to\int_a^b IdxN \text{ em } L^2(Q),$$

$$\int_a^b I_ndxI_n\to\int_a^b IdxI \text{ em } L^2(Q),$$

$$\int_a^b N_ndxI_n\to\int_a^b NdxI \text{ em } L^2(Q).$$

Usando as convergências fortes e fracas obtidas acima e tomando o limite em (3.11), vemos que $F(f,g)=(N,I)$, ou seja, (N,I) é solução de (2.1) no sentido de distribuições.

Como J é convexo, pois é a composição de funções convexas, pela Proposição 1.32, temos

$$\liminf_{n\to\infty} J\left[N_n,I_n;f_n,g_n\right]\geq J[N,I;f,g]. \tag{3.3}$$

Como $\{N_n,I_n;f_n,g_n\}$ é uma sequência minimizante, então

$$\lim_{n\to\infty} J\left[N_n,I_n;f_n,g_n\right]=\inf_{(f,g)\in\mathcal{U}_{ad}} J[N,I;f,g]. \tag{3.4}$$

Como $J\left[N_n,I_n;f_n,g_n\right]$ é convergente, temos

$$\lim_{n\to\infty} J\left[N_n,I_n;f_n,g_n\right]=\liminf_{n\to\infty} J\left[N_n,I_n;f_n,g_n\right]. \tag{3.5}$$

Por (3.3), (3.4) e (3.5), temos

$$J\left[N, I; f, g\right] = \inf_{(f,g)\in\mathcal{U}_{ad}} J[N, I; f, g].$$

Portanto, $(f, g) = (f_{opt}, g_{opt})$.

$\square$

Observação 3.3. *Para o caso* (H_2), *ou seja, quando* $\mathcal{U}_{ad}$ *um subconjunto convexo, fechado e não-vazio do espaço de Banach* $L^4(Q) \times L^4(Q)$, *definido por*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(f, g) \in L^4(Q) \times L^4(Q) : f \geq 0, g \geq 0\}.$$

Note que $\mathcal{U}_{ad}$ *é um subconjunto convexo e fechado de* $L^4(Q) \times L^4(Q)$ *na topologia forte, segue do Teorema 1.43 que* $\mathcal{U}_{ad}$ *é fechado na topologia fraca. Seguindo a mesma demonstração do Teorema 3.1, se* $f_n, g_n \in \mathcal{U}_{ad}, \forall n$ *concluímos das convergências*

$$\begin{array}{l} f_n \rightarrow f \text{ fracamente em } L^4(Q) \\ g_n \rightarrow g \text{ fracamente em } L^4(Q) \end{array}$$

que $f, g \in \mathcal{U}_{ad}$. *Desta forma, podemos obter o seguinte teorema.*

Teorema 3.4. *Assuma as hipóteses do Lema 2.9 e suponha que* $N_d, I_d \in L^2(Q)$. *Então existe um controle ótimo* $(f_{opt}, g_{opt}) \in \mathcal{U}_{ad}$ *minimizando o funcional (3.1), isto é,*

$$J\left[N, I; f_{opt}, g_{opt}\right] = \inf_{(f,g)\in\mathcal{U}_{ad}} J[R, S; f, g]$$

onde $(N, I) = F\left(f_{opt}, g_{opt}\right)$ *e* $(R, S) = F(f, g)$.

3.2 Condições de otimalidade para o controle ótimo

Lema 3.5. *O operador (2.39) é Fréchet diferenciável e além disso*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda} J[F((f, g) + \lambda((h, j) - (f, g))); (f, g) + \lambda((h, j) - (f, g))]\Big|_{\lambda=0} \\ &= \alpha_1 \int_Q \left(N - N_d\right) N^{\star} dxdt + \alpha_2 \int_Q \left(I - I_d\right) I^{*} dxdt \\ &+ 2\beta_1 \int_Q f^3 \left(h - f\right) dxdt + 2\beta_2 \int_Q g^3 \left(j - g\right) dxdt, \end{aligned}$$

em que $(h,j) \in \mathcal{U}_{ad}$, $f,g \in L^4(Q)$ *e* (N^*, I^*) *solução do sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N^*}{\partial t} = D_N N^*_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) N^* & \\ -\alpha_{NN} \left(\displaystyle\int_a^b N^* dx \right) N - \alpha_{IN} \left(\int_a^b I^* dx \right) N + h - f & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I^*}{\partial t} = D_I I^*_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI} \int_a^b N dx \right) I^* & \\ -\alpha_{II} \left(\displaystyle\int_a^b I^* dx \right) I - \alpha_{NI} \left(\int_a^b N^* dx \right) I + j - g & \text{em} \quad Q; \\ N^*_x(a,t) = N^*_x(b,t) = I^*_x(a,t) = I^*_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N^*(x,0) = I^*(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{3.6}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.17 segue que o operador F é Frechét diferenciável.

Agora, note que podemos escrever o operador (2.39) como

$$F(f,g) = (F_1(f,g), F_2(f,g)) = (N, I).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &F'(f,g)((h,j)-(f,g)) = (F_1'(f,g)((h,j)-(f,g)), F_2'(f,g)((h,j)-(f,g))) \\ &= (N^*, I^*). \end{aligned}$$

Derivando o funcional (3.1), temos

$$\frac{d}{d\lambda} J[F((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))); (f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))]\Big|_{\lambda=0}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{J[F(h_\lambda, j_\lambda); (h_\lambda, j_\lambda)] - J[F(f,g);(f,g)]}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \frac{|N_\lambda - N_d|^2 - |N - N_d|^2}{\lambda} dxdt + \lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_2}{2} \int_Q \frac{|I_\lambda - I_d|^2 - |I - I_d|^2}{\lambda} dxdt$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0} \frac{\beta_1}{2} \int_Q \frac{|f + \lambda(h-f)|^4 - |f|^4}{\lambda} dxdt + \lim_{\lambda\to 0} \frac{\beta_2}{2} \int_Q \frac{|g + \lambda(j-g)|^4 - |g|^4}{\lambda} dxdt,$$

onde $(h_\lambda, j_\lambda) = (f,g) + \lambda((h,j)-(f,g))$ e $F((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))) = (N_\lambda, I_\lambda)$.

Afirmação 3.6.

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \frac{|N_\lambda - N_d|^2 - |N - N_d|^2}{\lambda} dxdt = \alpha_1 \int_Q (N - N_d)\, N^\star dxdt.$$

Demonstração da Afirmação 3.6. Do Teorema 2.17, segue que

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to 0}\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda}dxdt = \lim_{\lambda\to 0}\frac{F_1((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))) - F_1(f,g)}{\lambda} \\ &= F_1'((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))) = N^* \text{ em } W_2^{2,1}(Q). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado,

$$\lim_{\lambda\to 0} N_\lambda = \lim_{\lambda\to 0} F_1((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))) = F_1(f,g) = N \text{ em } W_2^{2,1}(Q). \tag{3.8}$$

Vamos mostrar que

1.
$$\lim_{\lambda\to 0}\int_Q \frac{(N_\lambda - N)(N_\lambda + N)}{\lambda}dxdt = 2\int_Q NN^* dxdt.$$

2.
$$\lim_{\lambda\to 0}\int_Q N_d\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} = \int_Q N_d N^* dxdt.$$

1. De fato, da Desigualdade de Hölder (Proposição 1.34), obtemos

$$\begin{aligned} &\left|\int_Q \left[(N_\lambda + N)\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - 2NN^*\right]dxdt\right| \\ &= \left|\int_Q \left[(N_\lambda + N)\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - (N_\lambda + N)N^* + (N_\lambda + N)N^* - 2NN^*\right]dxdt\right| \\ &\leq \int_Q \left|(N_\lambda + N)\left(\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N^*\right) + N^*((N_\lambda + N) - 2N)\right|dxdt \\ &\leq \int_Q |N_\lambda + N|\left|\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N^*\right|dxdt + \int_Q |N^*||N_\lambda + N - 2N|dxdt \\ &\leq \left(\int_Q |N_\lambda + N|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q \left|\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N^*\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\int_Q |N^*|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q |N_\lambda + N - 2N|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|N_\lambda + N\|_{L^2(Q)}\left\|\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N^*\right\|_{L^2(Q)} + \|N^*\|_{L^2(Q)}\|N_\lambda + N - 2N\|_{L^2(Q)} \to 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

quando $\lambda \to 0$ por (3.7) e (3.8) e por $N, N^* \in W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$.

2.

$$\left|\int_Q \left[N_d \frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N_d N^*\right] dxdt\right|$$

$$\leq \int_Q \left|N_d \frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N_d N^*\right| dxdt = \int_Q |N_d| \left|\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N^*\right| dxdt$$

$$\leq \left(\int_Q |N_d|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \left|\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N^*\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

$$= \|N_d\|_{L^2(Q)} \left\|\frac{(N_\lambda - N)}{\lambda} - N^*\right\|_{L^2(Q)} \longrightarrow 0,$$

quando $\lambda \to 0$ por (3.7) e por $N_d \in L^2(Q)$.

Dessa forma,

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \frac{|N_\lambda - N_d|^2 - |N - N_d|^2}{\lambda} dxdt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \frac{N_\lambda^2 - 2N_\lambda N_d + N_d^2 - N^2 + 2NN_d - N_d^2}{\lambda} dxdt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \frac{N_\lambda^2 - N_d^2 - 2N_d(N_\lambda - N)}{\lambda} dxdt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_1}{2} \int_Q \frac{(N_\lambda - N)(N_\lambda + N)}{\lambda} dxdt - \lim_{\lambda\to 0} \alpha_1 \int_Q \frac{N_d(N_\lambda - N)}{\lambda} dxdt.$$

$$= \alpha_1 \int_Q NN^* dxdt - \alpha_1 \int_Q N_d N^* dxdt$$

$$= \alpha_1 \int_Q (N - N_d) N^* dxdt.$$

De forma análoga, podemos mostrar que

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_2}{2} \int_Q \frac{|I_\lambda - I_d|^2 - |I - I_d|^2}{\lambda} dxdt = \alpha_2 \int_Q (I - I_d)\, I^\star dxdt.$$

$\square$

Afirmação 3.7.

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\beta_1}{2} \int_Q \frac{|f + \lambda(h - f)|^4 - |f|^4}{\lambda} dxdt = 2\beta_1 \int_Q f^3\, (h - f)\, dxdt.$$

Demonstração da Afirmação 3.7. Note que

$$(f+\lambda(h-f))^4 = f^4 + 6f^2\lambda^2(h-f)^2 + 4f^3\lambda(h-f) + 4f\lambda^3(h-f)^3 + \lambda^4(h-f)^4$$

Assim,

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta_1}{2}\int_Q \frac{|f+\lambda(h-f)|^4 - |f|^4}{\lambda}dxdt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta_1}{2}\int_Q \frac{f^4 + 6f^2\lambda^2(h-f)^2 + 4f^3\lambda(h-f)}{\lambda}dxdt$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta_1}{2}\int_Q \frac{4f\lambda^3(h-f)^3 + \lambda^4(h-f)^4 - f^4}{\lambda}dxdt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta_1}{2}\int_Q [6f^2\lambda(h-f)^2 + 4f^3(h-f) + 4f\lambda^2(h-f)^3 + \lambda^3(h-f)^4]dxdt$$

$$= 2\beta_1\int_Q f^3(h-f)dxdt.$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta_2}{2}\int_Q \frac{|g+\lambda(j-g)|^4 - |g|^4}{\lambda}dxdt = 2\beta_2\int_Q g^3\,(j-g)\,dxdt.$$

□

Pelas Afirmações 3.6 e 3.7, obtemos

$$\frac{d}{d\lambda}J[F((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g)));(f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))]\Big|_{\lambda=0}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\alpha_1}{2}\int_Q \frac{|N_\lambda - N_d|^2 - |N-N_d|^2}{\lambda}dxdt + \lim_{\lambda\to 0}\frac{\alpha_2}{2}\int_Q \frac{|I_\lambda - I_d|^2 - |I-I_d|^2}{\lambda}dxdt$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta_1}{2}\int_Q \frac{|f-\lambda(h-f)|^4 - |f|^4}{\lambda}dxdt + \lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta_2}{2}\int_Q \frac{|g-\lambda(j-g)|^4 - |g|^4}{\lambda}dxdt$$

$$= \alpha_1\int_Q (N-N_d)\,N^\star dxdt + \alpha_2\int_Q (I-I_d)\,I^* dxdt$$
$$+2\beta_1\int_Q f^3\,(h-f)\,dxdt + 2\beta_2\int_Q g^3\,(j-g)\,dxdt.$$

□

Teorema 3.8. *Seja (f,g) um controle ótimo para o problema (2.1). Então existe uma* *sextupla de funções* $(N, I, P, Q; f, g)$ *satisfazendo*

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) N + f, & \text{em} & Q, \\[2ex]
\dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{NI} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{II} \int_a^b I dx \right) I + g, & \text{em} & Q, \\[2ex]
-\dfrac{\partial P}{\partial t} - D_N P_{xx} - \left(r_N - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N - \alpha_{IN} \int_a^b I \right) P + & & \\
+\alpha_{NN} \left(\displaystyle\int_a^b NP \right) + \alpha_{NI} \left(\displaystyle\int_a^b IQ \right) = \alpha_1 (N - N_d) & em & Q \\[2ex]
-\dfrac{\partial Q}{\partial t} - D_I Q_{xx} - \left(r_I - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I - \alpha_{NI} \int_a^b N \right) Q + & & \\
+\alpha_{II} \left(\displaystyle\int_a^b IQ \right) + \alpha_{IN} \left(\displaystyle\int_a^b NP \right) = \alpha_2 (I - I_d) & em & Q, \\[2ex]
N_x(a,t) = N_x(b,t) = I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0 & em & (0,T) \\
P_x(a,t) = P_x(b,t) = Q_x(a,t) = Q_x(b,t) = 0 & em & (0,T) \\
N(x,0) = N_0(x), I(x,0) = I_0(x) & em & (a,b) \\
P(x,T) = Q(x,T) = 0 & em & (a,b)
\end{array}
\right.
\tag{3.11}
$$

e

$$\int_Q (P + \beta_1 f)(h - f)\, dxdt + \int_Q (Q + \beta_2 g)(j - g)\, dxdt \geq 0 \tag{3.12}$$

para todo $(h, j) \in \mathcal{U}_{ad}$.

Demonstração. Seja $(f, g) = (f_{opt}, g_{opt})$ uma solução ótima e $F(f, g) = (N, I)$.

Afirmação 3.9.

$$\frac{d}{d\lambda} J[F((f,g) + \lambda((h,j) - (f,g))); (f,g) + \lambda((h,j) - (f,g))]\Big|_{\lambda=0} \geq 0.$$

Demonstração da Afirmação 3.9. Pelo Lema 3.5 sabemos que F é Frechét diferenciável em que $F'(f,g)((h,j)-(f,g)) = (N^*, I^*)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N^*}{\partial t} = D_N N^*_{xx} + \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) N^* & \\ -\alpha_{NN} \left(\displaystyle\int_a^b N^* dx \right) N - \alpha_{IN} \left(\displaystyle\int_a^b I^* dx \right) N + h - f & \text{em} \quad Q; \\ \dfrac{\partial I^*}{\partial t} = D_I I^*_{xx} + \left(r_I(x) - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI} \int_a^b N dx \right) I^* & \\ -\alpha_{II} \left(\displaystyle\int_a^b I^* dx \right) I - \alpha_{NI} \left(\displaystyle\int_a^b N^* dx \right) I + j - g & \text{em} \quad Q; \\ N^*_x(a,t) = N^*_x(b,t) = I^*_x(a,t) = I^*_x(b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T); \\ N^*(x,0) = I^*(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b). \end{cases} \tag{3.13}$$

Dessa forma, pela Definição 1.39, segue que

$$F((f,g) + \lambda((h,j)-(f,g))) = F(f,g) + \lambda F'(f,g)((h,j)-(f,g)) + R(\lambda), \tag{3.14}$$

Em que $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{R(\lambda)}{\lambda} = 0$.
Por (3.14) e como J é convexo, temos

$$\begin{array}{l} J[F((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))); (f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))] = \\ J[F(f,g)+\lambda F'(f,g)((h,j)-(f,g))+R(\lambda); (f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))] \geq \\ J[F(f,g);(f,g)] + J'[F(f,g)][\lambda F'(f,g)((h,j)-(f,g))+R(\lambda)]. \end{array} \tag{3.15}$$

Como (f,g) é uma solução ótima, então $F(f,g) = (N,I)$ é o mínimo do funcional J e, portanto, $J'[F(f,g)] = 0$.

Reescrevendo (3.15), obtemos

$$J[F((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))); (f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))] \geq J[F(f,g);(f,g)].$$

Assim,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J[F((f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))); (f,g)+\lambda((h,j)-(f,g))] - J[F(f,g);(f,g)]}{\lambda} \geq 0.$$

$\square$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \int_Q (N - N_d)\, N^{\star} dxdt + \alpha_2 \int_Q (I - I_d)\, I^{*} dxdt \\
&+2\beta_1 \int_Q f^3 (h - f)\, dxdt + 2\beta_2 \int_Q g^3 (j - g)\, dxdt \geq 0 \\
&\text{para todo } (h, j) \in \mathcal{U}_{ad}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Vamos simplificar (3.16) introduzindo as variáveis de custo (P, Q) solução do seguinte problema:

$$\begin{cases}
-\dfrac{\partial P}{\partial t} - D_N P_{xx} - \left(r_N - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) P + & \\
+\alpha_{NN} \left(\displaystyle\int_a^b NP dx \right) + \alpha_{NI} \left(\int_a^b IQ dx \right) = \alpha_1 (N - N_d) & \text{em} \quad Q, \\
-\dfrac{\partial Q}{\partial t} - D_I Q_{xx} - \left(r_I - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI} \int_a^b N dx \right) Q + & \\
+\alpha_{II} \left(\displaystyle\int_a^b IQ dx \right) + \alpha_{IN} \left(\int_a^b NP dx \right) = \alpha_2 (I - I_d) & \text{em} \quad Q, \\
P_x (a, t) = P_x (b, t) = Q_x(a, t) = Q_x (b, t) = 0 & \text{em} \quad (0, T), \\
P(x, T) = Q(x, T) = 0 & \text{em} \quad (a, b).
\end{cases} \tag{3.17}$$

Para mostrar que o problema (3.17) possui solução basta fazermos a mudança de variável

$$\overline{P}(x, t) = P(x, T - t).$$

Note que

$$\frac{\partial \overline{P}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(x, T - t)}{\partial t} = \frac{\partial P(x, T - t)}{\partial t} \frac{d(T - t)}{dt} = -\frac{\partial P(x, T - t)}{\partial t}.$$

De forma análoga fazendo

$$\overline{Q}(x, t) = Q(x, T - t),$$

obtemos

$$\frac{\partial \overline{Q}(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial Q(x, T - t)}{\partial t}.$$

Assim podemos reescrever o problema (3.17) como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{P}}{\partial t} - D_N \overline{P}_{xx} - \left(r_N - \alpha_{NN} \displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) \overline{P} + & \\ + \alpha_{NN} \left(\displaystyle\int_a^b N \overline{P} dx \right) + \alpha_{NI} \left(\displaystyle\int_a^b I \overline{Q} dx \right) = \alpha_1 (N - N_d) & \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial t} - D_I \overline{Q}_{xx} - \left(r_I - \alpha_{II} \displaystyle\int_a^b I dx - \alpha_{NI} \int_a^b N dx \right) \overline{Q} + & \\ + \alpha_{II} \left(\displaystyle\int_a^b I \overline{Q} \right) + \alpha_{IN} \left(\displaystyle\int_a^b N \overline{P} dx \right) = \alpha_2 (I - I_d) & \text{em} \quad Q, \\ \overline{P}_x (a,t) = \overline{P}_x (b,t) = \overline{Q}_x (a,t) = \overline{Q}_x (b,t) = 0 & \text{em} \quad (0,T) \\ \overline{P}(x,0) = \overline{Q}(x,0) = 0 & \text{em} \quad (a,b) \end{cases} \tag{3.18}$$

Observe que (3.18) é um problema linear que satisfaz as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade (Proposição 1.46), portanto possui uma única solução.

Agora, multiplicando a primeira equação do problema (3.17) por N^* e integrando em Q, temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_a^b -\frac{\partial P}{\partial t} N^* dx dt - \int_0^T \int_a^b D_N P_{xx} N^* dx dt \\ &- \int_0^T \int_a^b \left(r_N - \alpha_{NN} \int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) P N^* dx dt \\ &+ \int_0^T \int_a^b \alpha_{NN} \left(\int_a^b N P dx \right) N^* dx dt \\ &+ \int_0^T \int_a^b \alpha_{NI} \left(\int_a^b I Q dx \right) N^* dx dt = \alpha_1 \int_0^T \int_a^b (N - N_d) N^* dx dt. \end{aligned}$$

Afirmação 3.10. *1.* $\displaystyle\int_0^T \int_a^b -\frac{\partial P}{\partial t} N^* dx dt = \int_0^T \int_a^b \frac{\partial N^*}{\partial t} P dx dt.$

2. $\displaystyle\int_0^T \int_a^b D_N P_{xx} N^* dx dt = \int_0^T \int_a^b D_N N^*_{xx} P dx dt.$

Demonstração da Afirmação 3.10.

1. Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_a^b -\frac{\partial P}{\partial t} N^* dx dt = \int_a^b -P(x,t) N^*(x,t) dx \Big|_0^T + \int_0^T \int_a^b \frac{\partial N^*}{\partial t} P dx dt \\ &= - \int_a^b P(x,T) N^*(x,T) dx + \int_a^b P(x,0) N^*(x,0) dx + \int_0^T \int_a^b \frac{\partial N^*}{\partial t} P dx dt \\ &= \int_0^T \int_a^b \frac{\partial N^*}{\partial t} P dx dt. \end{aligned}$$

Note que $\int_a^b P(x,T)N^*(x,T)dx = \int_a^b P(x,0)N^*(x,0)dx = 0$, pois $P(x,T) = N^*(x,0) = 0$.

2. Usando integração por partes,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_a^b D_N P_{xx} N^* dxdt = D_N \int_0^T P_x(x,t)N^*(x,t)dt\Big|_a^b \\
&- \int_0^T \int_a^b P_x(x,t)N_x^*(x,t)dxdt \\
&= D_N \int_0^T P_x(a,t)N^*(a,t)dt - D_N \int_0^T P_x(b,t)N^*(b,t)dt \\
&- D_N \int_0^T P(x,t)N_x^*(x,t)dt\Big|_a^b + \int_0^T \int_a^b D_N N_{xx}^* P dxdt \\
&= -D_N \int_0^T P(a,t)N_x^*(a,t)dt + D_N \int_0^T P(b,t)N_x^*(b,t)dt + \int_0^T \int_a^b D_N N_{xx}^* P dxdt \\
&= \int_0^T \int_a^b D_N N_{xx}^* P dxdt.
\end{aligned}
$$

Note que $\int_0^T P_x(a,t)N^*(a,t)dt = \int_0^T P_x(b,t)N^*(b,t)dt = \int_0^T P(a,t)N_x^*(a,t)dt = \int_0^T P(b,t)N_x^*(b,t)dt = 0$, pois $P_x(a,t) = P_x(b,t) = N_x^*(a,t) = N_x^*(b,t) = 0$. □

Dessa forma podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_a^b \left[\frac{\partial N^*}{\partial t} - D_N N_{xx}^* - \left(r_N(x) - \alpha_{NN} \int_a^b N dx - \alpha_{IN} \int_a^b I dx \right) N^* \right. \\
&\left. - \alpha_{NN} \left(\int_a^b N^* dx \right) N \right] P dxdt + \alpha_{NI} \int_0^T \int_a^b \left(\int_a^b N^* dx \right) IQ dxdt \\
&= \alpha_1 \int_0^T \int_a^b (N - N_d) N^* dxdt.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Analogamente, se multiplicarmos a segunda equação do problema (3.17) por I^* e integrarmos em Q, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_a^b \left[\frac{\partial I^*}{\partial t} - D_I I_{xx}^* - \left(r_I(x) - \alpha_{II} \int_a^b I dx - \alpha_{NI} \int_a^b N dx \right) I^* \right. \\
&\left. - \alpha_{II} \left(\int_a^b I^* dx \right) I \right] Q dxdt + \alpha_{IN} \int_0^T \int_a^b \left(\int_a^b I^* dx \right) NP dxdt \\
&= \alpha_2 \int_0^T \int_a^b (I - I_d) I^* dxdt.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Somando (3.19) e (3.20), segue que

$$\alpha_1 \int_0^T \int_a^b (N - N_d)N^* dxdt + \alpha_2 \int_0^T \int_a^b (I - I_d)I^* dxdt$$

$$= \int_0^T \int_a^b (h - f)P dxdt + \int_0^T \int_a^b (j - g)Q dxdt.$$

Logo podemos reescrever (3.16) como

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_a^b (h - f)P dxdt + \int_0^T \int_a^b (j - g)Q dxdt \\ &+2\beta_1 \int_0^T \int_a^b f^3 (h - f)\, dxdt + 2\beta_2 \int_0^T \int_a^b g^3 (j - g)\, dxdt \geq 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo $(h, j) \in \mathcal{U}_{ad}$.

$\square$

Observação 3.11. *Se $\mathcal{U}_{ad} = L^4(Q) \times L^4(Q)$, podemos encontrar uma estimativa para o controle ótimo (f_{opt}, g_{opt}) à partir da função de coestado (P, Q).*

Podemos considerar $h = f + r \in L^4(Q)$ e $j = g$, assim

$$\int_0^T \int_a^b rP dxdt + 2\beta_1 \int_0^T \int_a^b f^3 r dxdt \geq 0. \tag{3.22}$$

Se $h = f - r \in L^4(Q)$ e $j = g$, obtemos

$$-\int_0^T \int_a^b rP dxdt - 2\beta_1 \int_0^T \int_a^b f^3 r dxdt \geq 0. \tag{3.23}$$

De (3.22) e (3.23) segue que

$$\int_0^T \int_a^b r(P + 2\beta_1 f^3) dxdt = 0, \forall r \in L^4(Q). \tag{3.24}$$

Logo,

$$P + 2\beta_1 f^3 = 0.$$

Portanto,

$$f = \left(\frac{-1}{2\beta_1} P\right)^{\frac{1}{3}}.$$

De foma análoga, obtemos

$$g = \left(\frac{-1}{2\beta_2} Q\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Considerações Finais

Neste trabalho mostramos a existência e unicidade de solução para um sistema de equações diferenciais parciais do tipo íntegro-diferencial que modela o crescimento de câncer. Para tal modelo também estudamos questões de existência de um controle ótimo e caracterizamos as condições de optimalidade que o controle deve satisfazer.

Visto que os resultados são originais, juntamente com o Professor Anderson L. A. de Araujo, e o colaborador, Professor Artur C. Fassoni da Universidade Federal de Itajubá, estamos trabalhando em um artigo intitulado "An analysis of a Lotka-Volterra Integral-differential model with optimal control", sendo este o mesmo tema desta dissertação. Esperamos que tal artigo seja publicado em um periódico científico internacional.

As contribuições que serão dadas pelo Professor Artur, aplicam-se principalmente na formulação e implementação numérica para o modelo, tais implementações serão importantes para a validação dos resultados, assim como, para um maior entendimento dos parâmetros apresentados no modelo e suas respectivas aplicações futuras.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, Robert A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] Alexeév, V., Fomine, S., Tikomirov, V., **Commande Optimale**. Moscou, Mir, 1982.

[3] Ben-Jacob, E.; Cohen, I.; Czirok, A.; Shochet, O.; Tenebaum, A. and Vicsek T. **Generic modelling of cooperative growth patterns in bacterial colonies**. Nature, $368, 46 - 49, 1994$

[4] Bramson, J.L.; Earn, D.J.D.; Eftimie, R. **Interactions between the immune system and cancer: a brief review of non-spatial mathematical models**. Bull. Math. Biol. 73 (1), (2011) 2–32.

[5] Brezis, Haim. **Function Analysis, Sobolev Spaces e Partial Differential Equations**. Springer, 2011.

[6] Britton, N. F., **Essential Mathematical Biology**, Springer, 2004.

[7] Casenave, Thierry; Haraux, Alain. **An Introduction to Semilinear Evolution Equations**. New York: Oxford University, 1998.

[8] Cavalcanti, M.M.; Cavalcanti, V.N.D. **Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2011.

[9] Cunha, Jefferson A. R. da et al . **Evolução dos processos físicos nos modelos de dinâmica de populações**. Rev. Bras. Ensino Fís., São Paulo, v.39, n.3, e3302, 2017 .

[10] Cunha, Jefferson A. R. da,**Não-Localidade e Formação de Padrão na Equação de Fisher-Kolmogorov**, Tese de Doutorado em Física, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brazil 2008.

[11] Evans, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. Berkeley: University of California, 1998.

[12] Friedman, Avner. **Partial Differential Equations of Parabolic Type**. New York: Mineola, Dover Publications, 2008

[13] Kan-On, Y., **Fisher wave fronts for the Lotka-Volterra competition model with diffusion**, Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications 28, 145 (1997).

[14] Ladyzhenskaya, O.; Solonnikov, V.; Uraltseva, N. **Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type**. Amer. Math. Soc., 1968

[15] Lions, Jacques-Louis. **Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers**. Méthodes Mathématiques de L'informatique, Gautier-Villars, 1983.

[16] Murray, J.D. **Mathematical Biology I: An Introduction**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[17] Niculescu, C.P.; Persson, L.E. **Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach**; Springer: New York, NY, USA, 2006.

[18] Pillis, L.G.; Sarapata, E.A. **A comparison and catalog of intrinsic tumor growth models**. Bull. Math. Biol. 76 (8), (2014) 2010–2024.