

WELLISSON BARBOSA DE LIMA

**ESPALHAMENTO MØLLER DE FÉRMIONS DE MASSA NULA NA  
QED<sub>3</sub> MAXWELL-CHERN-SIMONS COM PARIDADE PRESERVADA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2019

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

L732e  
2019  
Lima, Wellisson Barbosa de, 1995-  
Espalhamento Møller de férmions de massa nula na QED3  
Maxwell-Chern-Simons com paridade preservada / Wellisson  
Barbosa de Lima. – Viçosa, MG, 2019.  
vii, 69 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.67-69.

1. Eletrodinâmica quântica. 2. Teoria de campos (Física).  
3. Elétrons. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de  
Física. Programa de Pós-Graduação em Física. II. Título.

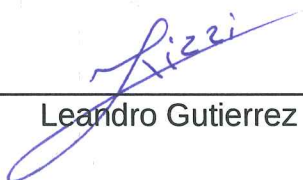
CDD 22. ed. 530.1433

WELLISSON BARBOSA DE LIMA

**ESPALHAMENTO MØLLER DE FÉRMIONS DE MASSA NULA NA QED<sub>3</sub>  
MAXWELL-CHERN-SIMONS COM PARIDADE PRESERVADA**

Dissertação apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Física, para  
obtenção do título de *Magister  
Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2019.



---

Leandro Gutierrez Rizzi



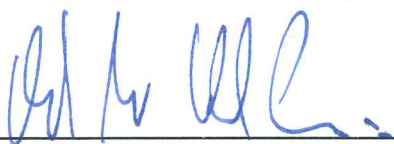
---

Olivier Piguet



---

José Abdalla Helayël Neto



---

Oswaldo Monteiro Del Cima  
(Orientador)

*“Se você só fizer o que sabe, nunca será nada além do que já é.”*

—Mestre Shifu, *Kung Fu Panda 3*

# Agradecimentos

É muito fácil subestimar a contribuição das várias pessoas ao nosso redor ou das circunstâncias favoráveis que nos permitem alcançar os resultados que desejamos em nossas vidas, e acabar caindo na falácia da meritocracia. Num cenário otimista, 50% dos resultados que obtemos em nossas vidas dependem exclusivamente de nós, de nosso esforço e trabalho ou da falta deles, e os outros 50% são completamente alheios a nós. Como é inútil tentar lutar contra ou reclamar daquilo que está além do nosso alcance, resta-nos tomar as rédeas daquilo que podemos; nossas próprias ações e nossas palavras; e tentar, no melhor da nossa habilidade e capacidade, fazer do mundo aquilo que acreditamos ser melhor. E, no que acredito ser um mundo melhor, é bom usar as palavras para reconhecer aqueles que nos ajudaram a chegar onde chegamos.

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Oswaldo Monteiro Del Cima, sem o qual, obviamente, este trabalho não seria realizado, mas também por suas palavras e atitudes seja como orientador ou como amigo, pois, apesar dos seus atrasos e demorados discursos, é possível perceber sua genuína boa intenção. E poder confiar, pessoal e profissionalmente, em alguém sabendo que esta pessoa deseja, genuinamente, o melhor pra você, é um privilégio. Soma-se a isso a sua grande capacidade de motivar e inspirar seus alunos; um grande e importante diferencial em relação a muitos professores que encontrei no ambiente acadêmico. Também sou grato por tudo que aprendi sobre física, ou sobre ser físico, com ele ou por causa dele.

Agradeço aos meus dois grandes amigos, Jackson e Edrey, pois devo muito do meu crescimento pessoal e profissional, ao longo da minha vida acadêmica até este momento, a esses dois; seja pelas discussões sobre física, política, filosofia, religião, ... que tivemos na universidade (ou no bar) ou pelas banais conversas/piadas sobre, literalmente, qualquer coisa. Com eles tive, e tenho, o privilégio de falar e rir abertamente de tudo. Se a vida é difícil, com esses dois ela continua difícil, mas pelo menos engraçada e, por isso, vale a pena ser vivida.

Gostaria de agradecer também ao Halef, pois sem ele parte de quem eu sou talvez nunca tivesse tido a motivação necessária pra vir a ser. E sem ele e sua insistência, irritantemente necessária, pra que eu faça o que eu deva fazer, este trabalho não teria sido concluído no prazo necessário.

Por fim, aos meus pais, pois se em momento algum da minha vida eu precisei me preocupar com a falta de comida na mesa ou com a falta de algum item básico para uma vida minimamente digna e pude focar exclusivamente nos meus estudos, foi graças a eles e suas incontáveis horas trabalhando pra que assim fosse.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

# Conteúdo

|   |            |
|---|------------|
| <b>Resumo</b>   | <b>vi</b>  |
| <b>Abstract</b>   | <b>vii</b> |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 O modelo . . . . .  | 2          |
| 1.2 Objetivos . . . . .   | 5          |
| <b>2 Desenvolvimento e Resultados</b>                                   | <b>6</b>   |
| 2.1 O eletromagnetismo do modelo . . . . .                              | 6          |
| 2.2 Férmions não-massivos em 2+1 dimensões . . . . .                    | 9          |
| 2.2.1 Equação de Dirac não-massiva . . . . .                            | 9          |
| 2.2.2 O spin . . . . .  | 13         |
| 2.2.3 Quantização e interpretação partícula/antipartícula . . . . .     | 14         |
| 2.2.4 Os níveis de Landau . . . . .                                     | 17         |
| 2.3 Consistência física do modelo: Causalidade e Unitariedade . . . . . | 19         |
| 2.3.1 Propagador dos férmions . . . . .                                 | 20         |
| 2.3.2 Propagador dos bósons . . . . .                                   | 24         |
| 2.4 O espalhamento . . . . .  | 28         |
| 2.4.1 As amplitudes de espalhamento . . . . .                           | 28         |
| 2.4.2 O potencial de espalhamento . . . . .                             | 35         |
| <b>3 Conclusões e Perspectivas</b>                                      | <b>45</b>  |
| <b>A Eletromagnetismo do Modelo</b>                                     | <b>50</b>  |
| A.1 Equação de onda massiva . . . . .                                   | 50         |
| <b>B A equação de Dirac não massiva</b>                                 | <b>54</b>  |
| B.1 Normalização dos espinores $u(p)$ e $v(p)$ . . . . .                | 54         |
| <b>C O espalhamento</b>   | <b>58</b>  |
| C.1 Cálculo das amplitudes de espalhamento . . . . .                    | 58         |

Conteúdo

v

**Bibliografia**

**67**

# Resumo

LIMA, Wellisson Barbosa de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Espalhamento Møller de férmions de massa nula na QED<sub>3</sub> Maxwell-Chern-Simons com paridade preservada.** Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.

Neste trabalho, investigaremos um modelo de eletrodinâmica quântica com paridade preservada em 2+1 dimensões espaço-temporais. O modelo acopla minimamente dois campos de calibre massivos, associados a uma simetria local  $U(1) \times U(1)$ , aos férmions não-massivos, sendo a massa dos campos vetoriais determinada por um termo de Chern-Simons misto que preserva paridade e a invariância de calibre da teoria. Faremos uma breve apresentação do eletromagnetismo clássico produzido por este modelo. Calcularemos as soluções da equação de Dirac não-massiva e estudaremos seus graus de liberdade, não estando estes mais associados ao spin ou à helicidade, diferentemente do caso massivo ou não massivo quadrimensional. Calcularemos também as respectivas cargas dos férmions associadas à simetria  $U(1) \times U(1)$ . Mostraremos o desdobramento dos níveis de Landau evidenciando um segundo desdobramento além do efeito Zeeman usual. Determinaremos os propagadores da teoria livre e, através de uma análise semiclássica, provaremos sua causalidade e unitariedade a *tree-level*. Por fim, a partir das regras de Feynmann para os vértices de interação, calcularemos a amplitude de espalhamento Møller, a partir da qual determinaremos o potencial de espalhamento (interação) elétron-elétron ( $e^- - e^-$ ).

# Abstract

LIMA, Wellisson Barbosa de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019.  
**Møller scattering of massless fermions in a parity-even Maxwell-Chern-Simons QED<sub>3</sub>**. Adviser: Oswaldo Monteiro Del Cima.

In this work, we will investigate a parity preserving quantum electrodynamical model in 2+1 spacetime dimensions. The model couples minimally two massive gauge fields, associated to a local  $U(1) \times U(1)$  symmetry, to the massless fermions, being the mass of the vector fields generated by a mixed Chern-Simons term that preserves both parity and the gauge invariance of the theory. We will outline the classical electromagnetism produced by this model. We will calculate the solutions to the massless Dirac equation and we will study its degrees of freedom, which no longer are associated to the spin nor helicity, unlike the massive or massless four-dimensional counterparts. We will also calculate the charge of the fermions associated to the respective  $U(1) \times U(1)$  symmetry. We will show a splitting of the Landau levels beyond the usual Zeeman splitting. We will determine the propagators of the free theory and, through a semi-classical analysis, prove its causality and unitarity at *tree-level*. Finally, from the Feynmann rules for the interaction vertices, we will calculate the amplitude for the Møller scattering from which we will determine the electron-electron ( $e^- - e^-$ ) scattering (interaction) potential.

# Capítulo 1

## Introdução

A dimensionalidade tem um papel crucial em muitos aspectos da física e da matemática, levando a particularidades e singularidades específicas de cada dimensão. Não é diferente quando se trata da eletrodinâmica quântica (QED). Neste sentido, já houveram trabalhos envolvendo o estudo de questões importantes da Teoria de Campos e Partículas [1–5]. Desta forma, não podemos inferir, *a priori*, as propriedades de uma QED em 2+1 dimensões (2 espaciais e 1 temporal) (QED<sub>3</sub>) a partir da simples redução de uma dimensão espacial da QED<sub>4</sub> (3+1). As sutilezas do mundo bidimensional seriam, por si só, motivo suficiente para estudar esses tipos de sistemas. No entanto, já existem aplicações desse formalismo a sistemas de matéria condensada [6]. O aparecimento de aplicações da QED<sub>3</sub> ao efeito Hall quântico [7–9], à SAT<sub>c</sub> (Supercondutividade de alta temperatura crítica) e ao grafeno [10–12] reforçam a necessidade de novas perspectiva às teorias planares.

Após a descoberta do fenômeno da SAT<sub>c</sub> por A. Bednorz e K.A. Müller em 1986: “Possible High-T<sub>c</sub> Superconductivity in the Ba-La-Cu-O system” [13] e posteriores pesquisas sobre a estrutura das cerâmicas supercondutoras de óxido-cobre, revelou-se, uma estrutura planar: estes óxidos são constituídos por sucessivas camadas de planos de cobre-oxigênio (planos Cu-O), separados entre si por planos de outros óxidos e terras raras. A estrutura quasi-planar destes materiais serviu como motivação para a aplicação da modelagem via QED<sub>3</sub> como uma tentativa de explicar a Supercondutividade “High-T<sub>c</sub>”, já que ela implica numa planificação de algumas grandezas físicas fundamentais do estado supercondutor, como o parâmetro de ordem e distância de penetração entre planos Cu-O.

Outro fenômeno interessante que pode ser analisado sobre essa mesma perspectiva é o efeito Hall quântico, que se mostra macroscopicamente como efeito resultante de interações quânticas microscópicas planares. O efeito Hall quântico (EHQ) é caracterizado pela quantização da condutividade Hall ( $\sigma = ne^2/h$ , onde  $n$  é um inteiro) e pela quase anulação da condutividade longitudinal ( $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ ) de um gás de elétrons bidimensional submetido à ação de um intenso campo magnético ( $B > 10T$ ) ortogonal ao plano, a baixíssimas temperaturas ( $T < 4K$ ). A condutividade Hall é universal sendo independente

de particularidades (impurezas, estruturas, etc...) dependendo apenas de constantes fundamentais (acoplamento eletromagnético e constante de Planck). Esta universalidade é consequência da quantização dos níveis de Landau e do fato da condutividade (em  $D = 1 + 2$ ) não depender das extensões espacial da amostra.

Como último exemplo, temos o grafeno. Grafeno é uma estrutura cristalina bidimensional de átomos de carbono cujas excitações, quasipartículas, de mais baixas energias mostraram-se [10] comportando como férmions de Dirac não massivos. A presença de férmions bidimensionais de Dirac não massivos não é característica exclusiva do grafeno [14]. Esta é a constatação mais direta e evidente da aplicabilidade da QED<sub>3</sub> no âmbito da matéria condensada. Mais do que isso, serve como excelente motivação para o trabalho que iremos realizar, consistindo no estudo da dinâmica de férmions não massivos em 2+1 dimensões espaço-temporais.

## 1.1 O modelo

Num trabalho já realizado [15, 16] estudou-se o espalhamento entre os férmions e os aspectos semi-clássicos no que concerne a consistência física do modelo de QED<sub>3</sub> definido pela seguinte ação:

$$\begin{aligned} \Sigma = \int d^3x \{ & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \mu\epsilon^{\mu\rho\nu}A_\mu\partial_\rho a_\nu - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ & - \frac{1}{2\beta}(\partial_\mu a^\mu)^2 + \bar{\psi}_+\not{D}\psi_+ + \bar{\psi}_-\not{D}\psi_- - m(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-) \}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Aqui as intensidades dos campos são representados por  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$  e a derivada covariante definida por  $\not{D}\psi_\pm \equiv (\not{\partial} + ie\mathcal{A} \pm ig\mathcal{d})\psi_\pm$ , com a definição genérica  $\mathcal{C} \equiv \gamma^\mu C_\mu$  operando no espaço bidimensional. A ação (1.1) pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\Sigma = \Sigma_{MCS} + \Sigma_D + \Sigma_{int} + \Sigma_{gf} \quad , \quad (1.2)$$

onde,

$$\Sigma_{MCS} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \mu\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu a_\rho \right\} \quad , \quad (1.3)$$

$$\Sigma_D = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}_+(\not{\partial} - m)\psi_+ + \bar{\psi}_-(\not{\partial} + m)\psi_- \right\} \quad , \quad (1.4)$$

$$\Sigma_{int} = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}_+(ie\mathcal{A})\psi_+ + \bar{\psi}_-(ie\mathcal{A})\psi_- + \bar{\psi}_+(ig\mathcal{d})\psi_+ + \bar{\psi}_-(-ig\mathcal{d})\psi_- \right\} \quad , \quad (1.5)$$

$$\Sigma_{gf} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\beta}(\partial_\mu a^\mu)^2 \right\} \quad . \quad (1.6)$$

A ação de Maxwell-Chern-Simons ( $\Sigma_{MCS}$ ) acopla com um termo de Chern-Simons misto os dois campos, a princípio, vetoriais  $A_\mu$  e  $a_\mu$ . A origem deste termo remonta uma formulação alternativa à supercondutividade aniônica [17]. Originalmente, o termo envolvia um único campo vetorial, no entanto, observou-se que este quebrava a simetria de paridade (fato característico de teorias de CS); uma vez que a quebra desta simetria nos supercondutores não é um fato bem estabelecido, propôs-se o acoplamento misto e impôs-se as leis de transformações adequadas sobre os campos de modo a manter a simetria de paridade. A saber, sob paridade, temos as seguintes transformações:

$$\begin{cases} A_\mu & \xrightarrow{P} & A_\mu^P = (A_0, -A_1, A_2) \\ \partial_\mu & \xrightarrow{P} & \partial_\mu^P = (\partial_0, -\partial_1, \partial_2) \\ a_\mu & \xrightarrow{P} & a_\mu^P = (-a_0, a_1, -a_2) \end{cases} \quad (1.7)$$

Isto é, para preservar a paridade do modelo, precisamos de um vetor de Lorentz  $A_\mu$  e um pseudovetor<sup>1</sup>  $a_\mu$ .

$\Sigma_D$  é a ação de Dirac para os férmions, já com sua interessante característica da necessidade de dois férmions para poder descrever as diferentes polaridades de spin. Outra justificativa para a necessidade de dois férmions é a própria simetria de paridade, pois sob esta transformação, em 3 dimensões, o spin troca de sinal; como os férmions com diferentes spins são descritos por diferentes termos de massa, ambos são necessárias caso desejemos uma teoria invariante com relação a esta simetria. Sob paridade, os espinores se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \psi_\pm & \xrightarrow{P} & \psi_\pm^P = -i\gamma^1\psi_\mp \\ \bar{\psi}_\pm & \xrightarrow{P} & \bar{\psi}_\pm^P = i\bar{\psi}_\mp\gamma^1 \end{cases}, \quad \text{onde } \bar{\psi}_\pm = \psi_\pm^\dagger\gamma^0. \quad (1.8)$$

$\Sigma_{int}$  é a ação que representa a interação entre os campos vetoriais e os férmions. Em (1.1), a interação está representada implicitamente pelo acoplamento mínimo através da derivada covariante  $\mathcal{D}\psi_\pm \equiv (\not{\partial} + ie\not{A} \pm ig\not{a})\psi_\pm$ .  $\Sigma_{int}$  torna o acoplamento mais explícito e nos permite ver, por exemplo, que os férmions  $\psi_+$  e  $\psi_-$  possuem a mesma carga, que chamaremos elétrica,  $e$  e cargas, que chamaremos quiral, de sinais opostos  $g$ .

$\Sigma_{gf}$  é a ação do *gauge fixing*, que é necessária para que possamos calcular os propagadores livres dos campos vetoriais.

O modelo, a menos do *gauge fixing*, é invariante sob as transformações de paridade e  $U_A(1) \times U_a(1)$  local, a seguir definida:

---

<sup>1</sup>Um pseudovetor sob transformações de Lorentz é definido pela transformação:  $a^\mu \xrightarrow{\Lambda} a'^\mu = \det(\Lambda)\Lambda^\mu_\nu a^\nu$ . Sendo  $\Lambda$  uma transformação de Lorentz qualquer.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\pm} \longrightarrow \psi'_{\pm} = e^{i(\rho(x) \pm \xi(x))} \psi_{\pm}. \\ \bar{\psi}_{\pm} \longrightarrow \bar{\psi}'_{\pm} = e^{-i(\rho(x) \pm \xi(x))} \bar{\psi}_{\pm}. \\ \mathcal{D}\psi_{\pm} \longrightarrow (\mathcal{D}\psi_{\pm})' = e^{i(\rho(x) \pm \xi(x))} \mathcal{D}\psi_{\pm}, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{e} \partial_{\mu} \rho(x) , \\ a'_{\mu} = a_{\mu} - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \xi(x) . \end{array} \right. \quad (1.10)$$

O que nos propomos neste trabalho é o estudo da consistência física (semi-clássica) e do espalhamento entre os férmions do seguinte modelo:

$$\Sigma = \Sigma_{MCS} + \Sigma_{D(m=0)} + \Sigma_{int} + \Sigma_{gf} \quad (1.11)$$

Onde,

$$\Sigma_{D(m=0)} = \int d^3x \{ \bar{\psi}_+ \not{\partial} \psi_+ + \bar{\psi}_- \not{\partial} \psi_- \} , \quad (1.12)$$

A princípio, a única modificação seria a massa dos férmions que agora é nula, no entanto isso tem sérias implicações físicas. A primeira é que sabemos que partículas sem massa se propagam à velocidade da luz, fato que é impossível para qualquer partícula massiva. Segundo que se trata de uma partícula carregada (com relação a ambas as cargas, no nosso caso) e de massa nula. Até hoje, não se encontrou na natureza nenhuma partícula desse tipo, ou seja, toda partícula carregada (eletricamente) que encontramos é necessariamente massiva. Não se tem ainda uma explicação para isso, portanto estudos de modelos desse tipo podem aprofundar nosso entendimento de porquê (como) isso acontece. No entanto, no contexto da matéria condensada, em especial quando se trata do grafeno, isso já é comprovadamente possível [10]. Note que não estamos falando, no exemplo do grafeno, de uma partícula elementar com carga elétrica e não massiva, mas de uma excitação coletiva que se comporta como tal. O spin, que já tem suas particularidades em 3 dimensões [18, 19], não possui uma interpretação tão evidente para partículas sem massa. Em 4 dimensões, esse problema é contornado através da grandeza que denominamos helicidade, que é a projeção do spin na direção do movimento, porém não existe um análogo bidimensional para a helicidade. Ainda no tocante ao spin, o sinal da massa é o responsável por fixar o sinal do spin, em 3 dimensões. Sem o termo de massa, a princípio, não haveria distinção entre os férmions  $\psi_+$  e  $\psi_-$ . De fato, a distinção só é feita, no nosso modelo, à nível de interação através do acoplamento com o campo quiral  $a_{\mu}$ . Por fim, a natureza não massiva dos férmions gera sérias divergências físicas no modelo, conhecidas como divergências infravermelhas, associadas aos férmions de baixas energias (longos

comprimentos de onda). Nossa perspectiva é o estudo de todos esses aspectos do modelo, mas em primeiro momento, faz-se necessária a análise da consistência física do mesmo, pois só fará sentido uma investigação mais profunda uma vez garantidos alguns critérios mínimos de razoabilidade física como causalidade, unitariedade, renormalizabilidade, estabilidade e ausência de anomalia. Visando uma futura aplicação no contexto da matéria condensada, calcularemos também o potencial de interação (espalhamento) [20–24] entre os férmions.

## 1.2 Objetivos

De modo mais objetivo, nos propomos a:

- Obter as equações de movimento para os campos livres e analisar suas soluções. São elas:
  - Equações de “Maxwell” para os campos vetoriais;
  - Equação de Dirac para os férmions não massivos;
- Ainda no contexto da equação de Dirac, discutir sobre o spin.
- Obter o espectro dinâmico das partículas envolvidadas, ou seja, as cargas dos férmions associadas à interação do modelo, advinda do *gauging* da simetria  $U_A(1) \times U_a(1)$ .
- Calcular o desdobramento dos níveis de Landau, estudando o acoplamento dos férmions com um campo magnético e um “magnetoquiral”.
- Calcular os propagadores livres do modelo e estudar os seguintes aspectos físicos do modelo:
  - Causalidade: Através dos pólos dos propagadores;
  - Unitariedade: Atráves da imagem do resíduo da amplitude, obtida através do acoplamento corrente-propagador-corrente, nos pólos;
- Calcular a amplitude do espalhamento entre os férmions (espalhamento Møller) e, desta, obter o potencial de espalhamento associado.
- Estudar a renormalizabilidade do modelo por meio do método de renormalização algébrica [25] e, tendo em vista a presença de quanta fermiônicos de massa nula, fazendo-se uso do esquema de subtração de Lowenstein-Zimmermann [26] das divergências infravermelhas;

## Capítulo 2

# Desenvolvimento e Resultados

### 2.1 O eletromagnetismo do modelo

Levando em consideração apenas a parte de Maxwell-Chern-Simons (1.3) do modelo, temos a seguinte ação:

$$\Sigma_{MCS} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \mu \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho \right\}$$

Ao longo de todo trabalho, usaremos do seguinte fato:

$$\int_V d^3x \partial_\mu \phi^\mu = 0$$

Pois, pelo teorema da divergência, a integral acima é igual à integral do campo  $\phi^\mu$  em  $\partial V$ , ou seja, na fronteira do volume  $V$ . Assumiremos que o volume  $V$  se trata de todo o espaço-tempo e que os campos e, possivelmente, suas derivadas se anulam suficientemente rápido no infinito. Deste modo, se tomarmos, sem perda de generalidade,  $\phi^\mu = \theta^{\mu\nu} \psi_\nu$ , onde  $\theta^{\mu\nu}$  e  $\psi_\nu$  são campos tensoriais, teremos:

$$\begin{aligned} \int d^3x \partial_\mu (\theta^{\mu\nu} \psi_\nu) &= 0 \\ \int d^3x (\partial_\mu \theta^{\mu\nu}) \psi_\nu + \int d^3x \theta^{\mu\nu} \partial_\mu (\psi_\nu) &= 0 \\ \int d^3x (\partial_\mu \theta^{\mu\nu}) \psi_\nu &= - \int d^3x \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_\nu \end{aligned}$$

Ou seja, dentro de integrais, podemos alternar o campo sob o qual as derivadas estão atuando, contanto que mudemos o sinal. Reescreveremos isso de maneira simbólica:  $(\partial_\mu \theta^{\mu\nu}) \psi_\nu = -\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_\nu$ .

Com base nisso, podemos mostrar que os seguintes dois termos são equivalentes:

$$\int d^3x \{ \mu \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho \} = \int d^3x \{ \mu \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu A_\rho \}.$$

Nos permitindo, então, reescrever a ação (1.3) numa forma simétrica com relação aos campos  $A_\mu$  e  $a_\mu$ :

$$\Sigma_{MCS} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu A_\rho \right\}. \quad (2.1)$$

Por fim, sabendo que a contração de um tensor antissimétrico qualquer,  $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ , com um tensor simétrico qualquer,  $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ , é zero, ou seja, que  $A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0$  e que  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$  é o tensor completamente antissimétrico, então sua contração com qualquer outro tensor só será não nula com a parte antissimétrica deste. Por exemplo,  $\epsilon^{\mu\nu\rho} T_{\nu\rho} = \epsilon^{\mu\nu\rho} T_{\nu\rho}^A$ , onde  $T_{\nu\rho}^A = \frac{1}{2}(T_{\nu\rho} - T_{\rho\nu})$  é a parte antissimétrica do tensor  $T_{\nu\rho}$ .

Podemos, finalmente, então escrever a ação (1.3) na forma com a qual trabalharemos nesta seção:

$$\Sigma_{MCS} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} A_\mu \omega^\mu + \frac{\mu}{2} a_\mu W^\mu \right\}. \quad (2.2)$$

Onde,  $\omega^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}$  e  $W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$ .

Da ação (2.2) obtemos as seguintes equações de movimento para os campos  $A^\mu$  e  $a^\mu$ :

$$\frac{\delta \Sigma_{MCS}}{\delta A_\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} - \mu \omega^\mu = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{MCS}}{\delta a_\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\nu f^{\mu\nu} - \mu W^\mu = 0 \quad (2.4)$$

Note que, os vetores  $\omega^\mu$  e  $W^\mu$  atuam como se fossem fontes para os campos  $f^{\mu\nu}$  e  $F^{\mu\nu}$  e, assim como é de se esperar de fontes,  $\partial_\mu \omega^\mu = \partial_\mu W^\mu = 0$ , isto é, eles satisfazem uma equação de continuidade. É fácil obter esse resultado atuando com a derivada  $\partial_\mu$  nas equações (2.3) e (2.4) e utilizando-se da antissimetria dos tensores  $F^{\mu\nu}$  e  $f^{\mu\nu}$ . Este mesmo resultado pode ser obtido diretamente das definições de  $\omega^\mu$  e  $W^\mu$  em termo das derivadas dos campos  $a^\mu$  e  $A^\mu$ ; por este caminho vemos que, mais do que uma equação local, as quantidades  $\partial_\mu \omega^\mu$  e  $\partial_\mu W^\mu$  são *identicamente nulas*. Em verdade, reconhecemos essas identidades como as análogas bidimensionais das equações de Maxwell homogêneas em 3 dimensões espaciais.

Vamos definir os análogos aos campos elétricos e magnéticos<sup>1</sup>  $E_i = F_{0i}$ ,  $e_i = f_{0i}$ ,

---

<sup>1</sup>i=1,2. Note que o campo magnético agora é um pseudoescalar, pois ele possui uma única “componente” e sob paridade, ele troca de sinal.

$B = -F_{12}$  e  $b = -f_{12}$ . Em termos destes campos, as equações (2.3) e (2.4) e as equações homogêneas  $\partial_\mu \omega^\mu = \partial_\mu W^\mu = 0$  tomam seguinte forma<sup>2</sup>:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \mu b = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{e} - \mu B = 0, \\ \vec{\nabla} B - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \vec{e} = 0, & \vec{\nabla} b - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} - \mu \vec{E} = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{e} + \frac{\partial b}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir do conjunto de equações (2.5) podemos mostrar (Seção A.1) que todas as quantidades  $\phi_i = \vec{E}, B, \vec{e}$  ou  $b$  satisfazem a seguinte equação de onda massiva:

$$(\square + \mu^2) \phi_i = 0 \quad (2.6)$$

Por não ser o propósito deste trabalho, não aprofundaremos no estudo mais detalhado sobre o eletromagnetismo de (2.5). Mas podemos discutir brevemente alguns aspectos. Num regime estático, ou seja, em que todas as derivadas temporais se anulem, a Equação (2.6) se reduz à equação de Helmholtz modificada<sup>3</sup> em 2 dimensões, pois como  $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$ , então sinal do laplaciano é diferente do sinal da massa. As soluções pra essa equação são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo,  $I_m(\mu r)$  e  $K_m(\mu r)$ , onde  $m$  é a ordem da função de Bessel. A partir destas soluções, as equações (2.5) levam a vínculos entre as soluções correspondentes aos diferentes campos, assim como as equações de Maxwell usuais fazem com que as soluções de onda plana para os campos elétrico e magnético sejam perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação. O comportamento das funções de Bessel modificadas está exibido nas figuras a seguir:

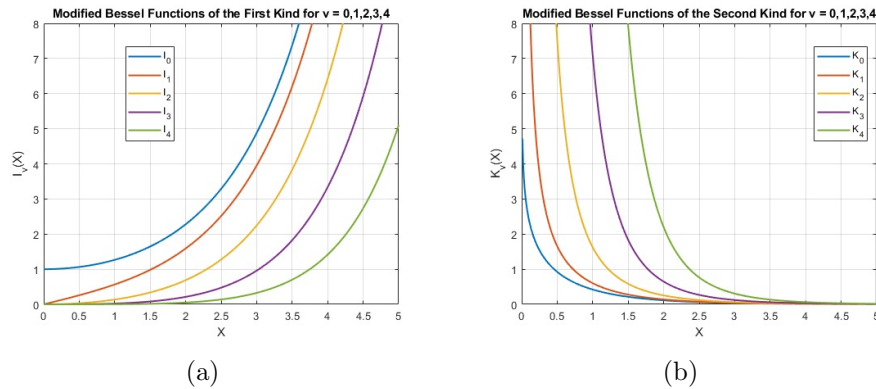


Figura 2.1: Comportamento das funções de Bessel Modificadas  $I_\nu(x)$  e  $K_\nu(x)$ .

<sup>2</sup>Usando a notação  $\vec{V} = (V_1, V_2) = (V_x, V_y)$ ;  $\vec{\nabla} = (V_y, -V_x)$  e  $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$   
<sup>3</sup> $(\nabla^2 - \mu^2)\phi_i = 0$

O estudo mais aprofundado e detalhado destas soluções, fica como perspectiva futura.

## 2.2 Férmions não-massivos em 2+1 dimensões

Como podemos verificar, em (1.12) existem duas famílias de férmions  $\psi_+$  e  $\psi_-$ , cuja diferença, essencialmente, reside no acoplamento com o campo  $a_\mu$ . Do ponto de vista da teoria livre ( $e = g = 0$ ), ambos os férmions são indistinguíveis. Trataremos, portanto, como um só, a não ser quando necessário e explicitamente dito o contrário.

### 2.2.1 Equação de Dirac não-massiva

A ação de Dirac livre nos dá:

$$\Sigma_D = \int d^3x \{i\bar{\psi}\not{\partial}\psi\} \quad (2.7)$$

Onde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ ,  $\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$  e  $\gamma^\mu$  são as matrizes gama de Dirac que satisfazem a álgebra de Clifford:  $\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$ .

Podemos também simetrizar<sup>4</sup> esta ação, usando que<sup>5</sup>  $(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ . Desta forma,

$$\Sigma_D = \int d^3x \left\{ \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - \frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi \right\} \quad (2.8)$$

De (2.8) obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Sigma_D}{\delta\bar{\psi}} = 0 &\Rightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0 \\ \frac{\delta\Sigma_D}{\delta\psi} = 0 &\Rightarrow i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como podemos obter  $\bar{\psi}$  a partir de  $\psi$  através da relação  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ , nos restringiremos apenas à primeira equação ( $i\not{\partial}\psi = 0$ ). Atuando com o operador  $i\not{\partial}$ , teremos:

---

<sup>4</sup>Apesar de  $\psi$  ser um campo espinorial, o teorema da divergência aplicado ao quadrivetor  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  continua válido.

<sup>5</sup>A igualdade é apenas simbólica, pois é válida somente dentro de integrais, como já foi dito.

$$\begin{aligned}(i\cancel{\partial})i\cancel{\partial}\psi &= 0 \\ \cancel{\partial}\cancel{\partial}\psi &= 0 \\ \square\psi &= 0\end{aligned}$$

Onde usamos do fato que  $\cancel{A}\cancel{A} = A_\mu A^\mu = A^2$  e a notação  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ .

Ou seja,  $\psi$  satisfaz a equação de onda e admite, portanto, soluções do tipo onda plana,

$$\psi_p(x) = \psi_{p,+} + \psi_{p,-} = u(p)e^{-ipx} + v(p)e^{+ipx}. \quad (2.10)$$

Onde  $px = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$  e  $p^2 = 0 \Leftrightarrow E^2 = \vec{p}^2$ , que é relação de dispersão característica de partículas relativísticas sem massa.

De (2.9) e (2.10), obtemos a equação:

$$-\cancel{p}u(p)e^{ipx} + \cancel{p}v(p)e^{-ipx} = 0$$

Como os dois termos são linearmente independentes, devemos ter:

$$\cancel{p}u(p) = \cancel{p}v(p) = 0 \quad (2.11)$$

Estas são equações homogêneas e apenas admitirão solução diferente da trivial se  $\det(\cancel{p}) = 0$ . Para calcularmos esse determinante, precisaremos de uma representação explícita das matrizes gama ( $\gamma^\mu$ ). Sabemos da teoria de Dirac que as matrizes gama possuem dimensão par. Em 4 dimensões espaço temporais ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) precisa-se, portanto, de 4 matrizes gama satisfazendo a álgebra de Clifford. Nessas condições, a dimensão mínima das representações das matrizes gama é 4. No entanto, para 3 dimensões espaçotemporais ( $\mu = 0, 1, 2$ ) precisamos apenas de 3 matrizes gama, tornando possível uma representação de dimensão 2 através das matrizes de Pauli. Usaremos  $\gamma^\mu = (\sigma_z, -i\sigma_x, i\sigma_y)$ . Nesta representação,

$$\cancel{p} = \begin{bmatrix} E & ip_+ \\ ip_- & -E \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Onde  $p_\pm = p_x \pm ip_y$ . Vemos então que  $\det(\cancel{p}) = -p^2 = -E^2 + \vec{p}^2$  e, portanto, a relação  $\det(\cancel{p}) = 0$  é nada mais que a relação de dispersão para uma partícula relativística sem massa, que já havíamos suposto anteriormente baseando-nos na equação de onda. Os

resultados são consistentes. As outras representações de 2 dimensões das matrizes gama diferem da nossa apenas por uma transformação de similaridade, mas estas transformações não alteram o determinante da matriz, então o determinante que encontramos é o mesmo qualquer que seja a representação bidimensional utilizada. Enfim, as equações (2.11) homogêneas determinam uma família de soluções para  $u(p)$  e  $v(p)$  que diferem entre si apenas por um fator de normalização, pois apesar de, pra cada espinor, termos duas equações e duas incógnitas, o determinante igual a zero faz com que haja na verdade apenas uma equação independente para as duas incógnitas, o que leva a uma solução indeterminada a menos de uma constante multiplicativa. Colocado de outra forma, fixadas as normalizações dos espinores  $u(p)$  e  $v(p)$ , temos uma única solução para cada um deles. Portanto, em 3 dimensões espaçotemporais, a equação de Dirac nos leva a apenas 2 graus de liberdade, representados pelas soluções  $u(p)$  e  $v(p)$  que estão associadas ao par partícula-antipartícula, como veremos posteriormente. Este resultado possui semelhanças e diferenças com o análogo quadridimensional. Em 4 dimensões espaçotemporais, a equação de Dirac massiva nos leva a 4 graus de liberdades; 2 deles associados ao par partícula-antipartícula e a cada um deles temos ainda 2 graus de liberdade associados ao spin  $\frac{1}{2}$ . A indexação através do grau de liberdade de spin é feita indo para o referencial de repouso das partículas no qual, através de uma escolha do sistema de coordenadas, podemos fixar o spin como sendo pra baixo (sentido negativo do eixo z, por exemplo) ou pra cima (sentido positivo do eixo z). Ainda em 4 dimensões espaçotemporais, a equação de Dirac não massiva leva, assim como no nosso caso, a 2 graus de liberdade. Estes graus de liberdade são mais convenientemente indexados através da grandeza denominada helicidade, que consiste na componente do spin ao longo da direção de movimento, pois não mais podemos definir um referencial de repouso para partículas sem massa. A situação que estamos lidando é diferente em, no mínimo, dois aspectos. O primeiro é a dimensionalidade. Em 3 dimensões espaçotemporais, spin não é mais um vetor, mas um pseudoescalar e, por conta disso, não faz sentido definir um eixo de quantização para o mesmo. Caso tenha um certo apego à visão já estabelecida, pode-se imaginar o spin como estando forçadamente quantizado ao longo da direção transversal a esse universo bidimensional. De fato, tratando-se da equação de Dirac *massiva* em 2+1 dimensões, vemos que na verdade existem “2 equações de Dirac” [27] que diferenciam-se entre si pelo sinal que precede o termo de massa. A escolha desse sinal na massa fixa o spin da partícula como sendo positivo ( $+\frac{1}{2}$ ) ou negativo ( $-\frac{1}{2}$ ). O cálculo, assim como no caso quadridimensional, é feito partindo-se para o referencial de repouso da partícula. O “problema” aparece quando estamos lidando com a equação não-massiva, pois supondo que o spin esteja congelado ao longo da direção transversal ao plano e que o movimento da partícula se dá apenas ao longo do plano, não podemos falar mais em helicidade. E tratando-se de partículas sem massa, não podemos ir para o referencial de repouso para avaliar o spin. A solução que nos resta é não usar nenhuma dessas grandezas para indexar nossas soluções e nos restringir na

característica mais imediata que diferencia  $u(p)$  de  $v(p)$  que é o sinal da energia (frequência) em (2.10), onde usualmente sabemos que energia positiva está associada a partículas e energia negativa a antipartículas. Apesar destas sutilezas que discutimos com respeito ao spin, mostraremos mais à frente que ele ainda é uma quantidade física de relevância e que se faz presente em alguns fenômenos.

Voltemos às equações  $u(p)$  e  $v(p)$  que agora sabemos serem da forma:

$$\begin{pmatrix} E & ip_+ \\ ip_- & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u, v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Da relação  $E^2 = \vec{p}^2$ , temos que  $E = \pm|\vec{p}|$  e, para sermos consistentes com as soluções  $\psi_{p,+}$  e  $\psi_{p,-}$  em (2.10) devemos ter<sup>6</sup>  $u(p)$  associado à energia positiva  $+|\vec{p}|$  e momento  $\vec{p}$ , enquanto  $v(p)$  associado à energia negativa  $-|\vec{p}|$  e momento  $-\vec{p}$ .

Assim, para  $u(p)$ :

$$\begin{pmatrix} E_p & ip_+ \\ ip_- & -E_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u(p) = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_-}{E_p} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

E para  $v(p)$ :

$$\begin{pmatrix} -E_p & -ip_+ \\ -ip_- & +E_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v(p) = b \begin{pmatrix} \frac{-ip_+}{E_p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Onde  $E_p = +|\vec{p}|$ . A diferença nas formas de  $u(p)$  e  $v(p)$  é apenas aparente e isto pode ser verificado, multiplicando-se  $v(p)$  por  $\frac{ip_-}{E_p}$ . Ou seja, a diferença entre os dois é apenas uma fase<sup>7</sup>. A diferença essencial é que um está associado à energia positiva e o outro à energia negativa. Isto não é surpresa à luz das equações (2.11) e do fato, que já discutimos, que suas soluções são determinadas a menos de um fator de normalização. Em outras palavras, assim que escolhermos o fator de normalização, as duas soluções diferirão apenas por uma fase complexa.

É interessante notar que *independentemente do fator de normalização* (Seção B.1), as soluções  $u(p)$  e  $v(p)$  satisfazem  $\bar{u}(p)u(p) = \bar{v}(p)v(p) = 0$ . Mas este resultado pode ser identificado como resultando do fato de que essas quantidades, quando calculadas para as soluções da equação de Dirac massiva, são proporcionais à massa. Como os férmions que estamos tratando são não massivos, esse resultado é compreensível. Portanto, precisamos de

<sup>6</sup>Basta atuar com os operadores energia ( $i\partial_t$ ) e momento ( $-i\vec{\nabla}$ ) nas soluções  $\psi_{p,+}$  e  $\psi_{p,-}$ .

<sup>7</sup>Note que  $|\frac{ip_-}{E_p}| = |\frac{ip_+}{E_p}| = 1$

outra quantidade para fixarmos a normalização. Usaremos o fato de que  $u(p)^\dagger u(p) = 2|a|^2$  e  $v(p)^\dagger v(p) = 2|b|^2$  (Seção B.1) para fixarmos  $a = b = \sqrt{E_p}$ . A escolha dessa normalização simplifica/facilita algumas expressões que viremos a calcular.

Por fim, a solução geral pra Equação de Dirac (2.9) será:

$$\psi(x) = \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \{ a(\vec{p})u(p)e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})v(p)e^{+ipx} \} \quad (2.15)$$

Inversamente:

$$\begin{aligned} a(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \int d^2\vec{x} \{ e^{ipx} u^\dagger(p)\psi(x) \}, \\ b^\dagger(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \int d^2\vec{x} \{ e^{-ipx} v^\dagger(p)\psi(x) \} \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.2.2 O spin

Seguiremos aqui a linha de raciocínio seguida por Dirac em seu livro [28] que mostra como sua equação leva naturalmente ao spin. Como já discutimos, spin não é um bom índice para as soluções da equação de Dirac, no caso não massivo, mas precisamos deixar claro que ele ainda é uma quantidade física de relevância.

Das relações de comutação canônicas da mecânica quântica para os operadores de posição e momento, temos  $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ ,  $[x_i, x_j] = 0$  e  $[p_i, p_j] = 0$ . Sabemos também que quantidades que comutem com a Hamiltoniana são constantes de movimento, ou seja, seus valores esperados não variam no tempo. Definindo o operador momento angular orbital como  $L = x_1p_2 - x_2p_1$ , temos que seu comutador com a Hamiltoniana de Dirac<sup>8</sup>,  $H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$  é:

$$[H_D, L] = [\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2, x_1p_2 - x_2p_1] = i(\alpha_2p_1 - \alpha_1p_2)$$

Portanto, o momento angular orbital não é uma constante de movimento.

Sabemos, também, da teoria de Dirac que as matrizes  $\gamma^\mu$  fornecem uma representação do grupo de Lorentz homogêneo. Mais especificamente, na representação que estamos trabalhando, os geradores do grupo de Lorentz homogêneo,  $\Sigma^{\mu\nu}$ , são dados por  $\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . O gerador das rotações é, então,  $\Sigma^{12} = -\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2$ . Em termos das matrizes  $\vec{\alpha}$ ,  $\Sigma^{12} = \frac{i}{2}\alpha_1\alpha_2$ . O cálculo do comutador de  $H_D$  com  $\Sigma^{12}$  nos dá:

---

<sup>8</sup> $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$ .

$$[H_D, \Sigma^{12}] = [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \frac{i}{2} \alpha_1 \alpha_2] = -i(\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2).$$

Portanto  $\Sigma^{12}$  também não é uma quantidade conservada, mas podemos ver que:

$$[H_D, L + \Sigma^{12}] = 0 \quad (2.17)$$

Então, a grandeza  $L + \Sigma^{12}$  é uma constante de movimento. Interpretamos  $\Sigma^{12}$  como sendo o operador spin. Em favor da interpretação que o spin se encontra “congelado” fora do plano-xy, na representação das matrizes gama que utilizamos, temos que  $\Sigma^{12} = \frac{1}{2} \sigma_z$ , o que implica também que os autovalores de spin são  $+\frac{1}{2}$  ou  $-\frac{1}{2}$ . Em resumo, a existência e relevância do spin pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$\left[ H_D, L + \frac{1}{2} \sigma_z \right] = 0 \quad (2.18)$$

### 2.2.3 Quantização e interpretação partícula/antipartícula

O método de quantização canônica para férmions leva à imposição das seguintes relações de anticomutação a tempos iguais.

$$\begin{aligned} \left\{ \psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t) \right\} &= \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \left\{ \psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t) \right\} &= \left\{ \psi^\dagger(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Das relações (2.19) e de (2.16), obtemos as usuais relação de anticomutação para os operadores de criação e destruição:

$$\begin{aligned} \left\{ a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}') \right\} &= \left\{ b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}') \right\} = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\ \left\{ a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}') \right\} &= \left\{ a(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}') \right\} = \left\{ b^\dagger(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}') \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A densidade hamiltoniana é dada por  $\mathcal{H} = \pi^i \dot{\phi}_i - \mathcal{L}$ , onde  $\dot{\phi}_i = \partial_0 \phi_i$ ,  $\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}$  é o momento canônico conjugado ao campo  $\phi_i$  e  $\mathcal{L}$  é a densidade lagrangiana. De posse da solução (2.15), da lagrangiana da ação (2.7) e das relações de anticomutação (2.20), obtemos para a Hamiltoniana de Dirac o seguinte resultado:

$$H = \int d^2\vec{x}\mathcal{H} = \int d^2\vec{p}E_p \{a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\} - \int d^2\vec{p}E_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.21)$$

As aspas em “ $\delta(\vec{p} - \vec{p}') = \vec{0}$ ” são para chamar atenção ao abuso de notação que estamos utilizando ao escrever  $\delta(0)$ , dadas as sutilezas e complexidades matemáticas envolvidas na definição da distribuição  $\delta(x)$ .

Antes de interpretarmos este resultado, vamos fazer algumas definições usuais. O vácuo da teoria *livre*, denotado por  $|0\rangle$  é o estado no qual:

$$a(\vec{p})|0\rangle = b(\vec{p})|0\rangle = 0$$

Definimos o operador, hermitiano e positivo definido, número  $N$  como:

$$N = \int d^2\vec{p} \{a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\}$$

De forma que obtemos as seguinte relações de comutação:

$$[N, H] = 0, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} [N, a(\vec{p})] &= -a(\vec{p}), & [N, a^\dagger(\vec{p})] &= a^\dagger(\vec{p}), \\ [N, b(\vec{p})] &= -b(\vec{p}), & [N, b^\dagger(\vec{p})] &= b^\dagger(\vec{p}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Reconhecemos os operadores  $a^\dagger(\vec{p})$  e  $b^\dagger(\vec{p})$  como operadores de criação de partículas, enquanto  $a(\vec{p})$  e  $b(\vec{p})$  como operadores de destruição de partículas. Mas ainda não sabemos no que consiste a diferença entre essas partículas. Pra isso, vamos precisar de levar em consideração a simetria rígida  $U(1) \times U(1)$  presente no modelo que distingue, também, os férmions em  $\psi_+$  e  $\psi_-$ . Deste modo, vamos diferenciar, a partir de agora, as duas soluções da equação Dirac não massiva:

$$\psi_+(x) = \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \left\{ a_+(\vec{p})u(p)e^{-ipx} + b_+(\vec{p})v(p)e^{+ipx} \right\} \quad (2.24)$$

$$\psi_-(x) = \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \left\{ a_-(\vec{p})u(p)e^{-ipx} + b_-(\vec{p})v(p)e^{+ipx} \right\} \quad (2.25)$$

Sendo,

$$\begin{aligned}
 a_{\pm}(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \int d^2\vec{x} \{ e^{ipx} u^{\dagger}(p) \psi_{\pm}(x) \}, \\
 b_{\pm}^{\dagger}(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \int d^2\vec{x} \{ e^{-ipx} v^{\dagger}(p) \psi_{\pm}(x) \}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

O *gauging* desta simetria gera a interação dos férmions com os campos  $A_{\mu}$  e  $a_{\mu}$ . O teorema de Noether nos garante que a cada simetria contínua presente numa teoria, existe uma quantidade conservada. Esta quantidade chamamos carga de Noether. Para o modelo que estamos trabalhando, as cargas conservadas são:

$$\begin{aligned}
 Q_{\pm} &= -e \int d^2\vec{x} : \psi_{\pm}^{\dagger}(x) \psi_{\pm}(x) : = -e \int d^2\vec{p} \{ a_{\pm}^{\dagger}(\vec{p}) a_{\pm}(\vec{p}) - b_{\pm}^{\dagger}(\vec{p}) b_{\pm}(\vec{p}) \}, \\
 q_{\pm} &= \mp g \int d^2\vec{x} : \psi_{\pm}^{\dagger}(x) \psi_{\pm}(x) : = \mp g \int d^2\vec{p} \{ a_{\pm}^{\dagger}(\vec{p}) a_{\pm}(\vec{p}) - b_{\pm}^{\dagger}(\vec{p}) b_{\pm}(\vec{p}) \},
 \end{aligned}$$

A notação  $:\psi_{\pm}^{\dagger}(x)\psi_{\pm}(x):$  significa *produto normal* ou *ordenamento normal*. Ela faz com que todos os operadores  $O^{\dagger}$  estejam à esquerda dos operadores  $O$  e, assim, previne que termos como o último de (2.21) apareçam constantemente. Ou seja, nesta notação:

$$:H: = \int d^2\vec{x} : \mathcal{H} := \int d^2\vec{p} E_p \{ a^{\dagger}(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^{\dagger}(\vec{p}) b(\vec{p}) \} \tag{2.27}$$

Agora começa a tornar-se mais evidente a diferença entre os férmions  $\psi_{+}$  e  $\psi_{-}$ . Do ponto de vista da interação, digamos, eletromagnética, parece não haver distinção, ao contrário da interação com o campo quiral. Vamos tornar esta afirmação mais precisa através dos seguintes comutadores:

$$[Q_{+}, a_{+}^{\dagger}(\vec{p})] = -e a_{+}^{\dagger}(\vec{p}) \quad [q_{+}, a_{+}^{\dagger}(\vec{p})] = -g a_{+}^{\dagger}(\vec{p}) \tag{2.28}$$

$$[Q_{+}, b_{+}^{\dagger}(\vec{p})] = +e b_{+}^{\dagger}(\vec{p}) \quad [q_{+}, b_{+}^{\dagger}(\vec{p})] = +g a_{+}^{\dagger}(\vec{p}) \tag{2.29}$$

$$[Q_{-}, a_{-}^{\dagger}(\vec{p})] = -e a_{-}^{\dagger}(\vec{p}) \quad [q_{-}, a_{-}^{\dagger}(\vec{p})] = +g a_{-}^{\dagger}(\vec{p}) \tag{2.30}$$

$$[Q_{-}, b_{-}^{\dagger}(\vec{p})] = +e b_{-}^{\dagger}(\vec{p}) \quad [q_{-}, a_{-}^{\dagger}(\vec{p})] = -g a_{-}^{\dagger}(\vec{p}) \tag{2.31}$$

Fica evidente agora que  $a_{+}^{\dagger}(\vec{p})$  cria uma partícula de carga elétrica  $-e$  e  $b_{+}^{\dagger}(\vec{p})$  cria uma partícula de carga elétrica  $+e$ . O mesmo vale, respectivamente, para  $a_{-}^{\dagger}(\vec{p})$  e  $b_{-}^{\dagger}(\vec{p})$ . Por isso, diremos que  $a^{\dagger}$  cria partículas e  $b^{\dagger}$  antipartículas. Com relação à carga, que denominaremos quiral, temos que  $a_{+}^{\dagger}(\vec{p})$  ( $b_{+}^{\dagger}(\vec{p})$ ) cria uma partícula (antipartícula) com carga quiral  $-g$  ( $+g$ ) e  $a_{-}^{\dagger}(\vec{p})$  ( $b_{-}^{\dagger}(\vec{p})$ ) cria uma partícula (antipartícula) com carga quiral

$+g$  ( $-g$ ). Vamos resumir esses resultados numa tabela:

| Estado                    | Carga Elétrica | Carga Quiral | Partículas                |
|---------------------------|----------------|--------------|---------------------------|
| $a_+^\dagger(p) 0\rangle$ | $-e$           | $-g$         | $e_{(+)}^-$ (fermion)     |
| $a_-^\dagger(p) 0\rangle$ | $-e$           | $+g$         | $e_{(-)}^-$ (fermion)     |
| $b_+^\dagger(p) 0\rangle$ | $+e$           | $+g$         | $e_{(+)}^+$ (antifermion) |
| $b_-^\dagger(p) 0\rangle$ | $+e$           | $-g$         | $e_{(-)}^+$ (antifermion) |

Tabela 2.1: Espectro dinâmico da teoria

Com base em todas essas informações, podemos agora interpretar a Hamiltoniana (2.21). O termo  $d^2\vec{p}\{a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})\}$  conta o número de partículas com momento igual a  $\vec{p}$  e  $d^2\vec{p}\{b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\}$  conta o número de antipartículas com momento igual a  $\vec{p}$ . A energia total é a soma do número de partículas e antipartículas com momento  $\vec{p}$  multiplicado pela energia  $E_p = |\vec{p}|$  de cada uma delas, somando-se para todos os valores de momento. O último termo é interpretado como a energia do vácuo, ou seja, a energia que o sistema apresenta mesmo na ausência de partículas e antipartículas. Ele pode ser reescrito da seguinte forma:

$$- \int d^2\vec{p} E_p \delta(\vec{p} - \vec{p}' = \vec{0}) = \frac{1}{h^2} \int d^2\vec{x} d^2\vec{p} \left( -\frac{1}{2} E_p - \frac{1}{2} E_p \right) \quad (2.32)$$

Onde usamos que  $\delta(\vec{p} - \vec{p}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{x} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}$  e  $\hbar = 1 = \frac{h}{2\pi}$ .

Deste modo pode-se interpretar que cada célula do espaço de fase ( $\frac{d^2\vec{x}d^2\vec{p}}{h^2}$ ) contribui com  $-\frac{1}{2}E_p$  para cada grau de liberdade para a energia do vácuo, temos dois graus de liberdade, sendo um associado à partículas e outro a antipartículas. No entanto, este termo é, claramente, divergente e lidamos na maioria dos casos de interesse físico com as excitações sobre o vácuo, ou seja, em relação a ele, então medimos a energia e outras grandezas descontando as contribuições do vácuo, o que pode ser resolvido simplesmente aplicando o *produto normal* já mencionado.

## 2.2.4 Os níveis de Landau

Vamos considerar agora a questão envolvendo o comportamento desses férmions na presença de um campo magnético externo e de um campo “magnético quiral” externo. Seguindo a prescrição de acoplamento mínimo da Hamiltoniana, característica do acoplamento com campos de gauge, teremos as duas Hamiltonianas:

$$H_{\mp} = c\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - e\vec{A} \mp g\vec{a}) \quad (2.33)$$

Como podemos ver, a diferença entre as duas Hamiltonianas está na carga quiral do férmion a qual elas se aplicam.

Definindo o momento mecânico:

$$\vec{\Pi}_{\mp} \equiv \vec{p} - e\vec{A}_{\mp} + g\vec{a}$$

O comutador das componentes do momento mecânico pode ser calculado facilmente<sup>9</sup>

$$[\Pi_{x,\mp}, \Pi_{y,\mp}] = i\hbar(eB \pm gb). \quad (2.34)$$

Onde  $B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$  e  $b = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$ . E os comutadores das outras componentes, referentes ao mesmo férmion, se anulam.

Voltando nas Hamiltonianas, teremos:

$$\begin{aligned} H_{\mp} &= c\vec{\alpha} \cdot \vec{\Pi}_{\mp} \Rightarrow H_{\mp}^2 = c^2 \vec{\Pi}_{\mp}^2 + c^2 \alpha_1 \alpha_2 [\Pi_{x,\mp}, \Pi_{y,\mp}] \\ &H_{\mp}^2 = c^2 \vec{\Pi}_{\mp}^2 + c^2 \hbar(eB \pm gb) \sigma_z \end{aligned}$$

Aqui, usamos do fato de que  $\alpha_1 \alpha_2 = -i\sigma_z$ .

Vamos definir:

$$\begin{aligned} a_{\mp} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar(eB \pm gb)}} (\Pi_{x,\mp} + i\Pi_{y,\mp}), \\ a_{\mp}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar(eB \pm gb)}} (\Pi_{x,\mp} - i\Pi_{y,\mp}), \\ &[a_{\mp}, a_{\mp}^{\dagger}] = 1 \end{aligned}$$

Em termos desses operadores, podemos escrever:

$$H_{\mp}^2 = \hbar^2 \omega_{\mp}^2 \left[ a_{\mp}^{\dagger} a_{\mp} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sigma_z \right]$$

Onde  $\omega_{\mp} = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{gb}{eB}}$  e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2c^2}{\hbar}} eB$ .

Como  $a_{\mp}$  e  $a_{\mp}^{\dagger}$  são os usuais operadores de abaixamento e levantamento e eles comutam com o operador de spin  $\frac{1}{2}\sigma_z$ , e sendo a Hamiltonian quadrada um operador limitado inferiormente, teremos os seguintes autovalores para a Hamiltoniana:

---

<sup>9</sup>Usamos o fato de que  $[\vec{p}, f(\vec{x})] = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} f$ .

$$E_{n,i,s} = \pm \hbar \omega_i \sqrt{n + \frac{1}{2} + s}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Onde os índices  $i$  e  $s$  correspondem à carga estatística ( $\mp$ ) e ao spin ( $\pm \frac{1}{2}$ ), respectivamente.

Tomando  $g = 0$ , temos o resultado usual para férmions de Dirac não massivos. Nessa situação, existe uma característica interessante que é a existência de um modo de energia zero ( $n = 0, s = -\frac{1}{2}$ ). A existência desse modo leva ao efeito Hall quântico (EHQ) anômalo [9, 10], que consiste na quantização *semi-inteira* da condutividade Hall. Isto está relacionado com o fato de que este modo zero de energia possui metade da degenerescência usual de todos os outros níveis de Landau. A energia é proporcional à  $\sqrt{p}$ , onde  $p \geq 1$  é um número inteiro. Para cada valor de  $p$ , existem dois estados com essa mesma energia, o estado com  $n = p$  e  $s = -\frac{1}{2}$  e o estado com  $n = p - 1$  e  $s = +\frac{1}{2}$ . A descoberta do EHQ anômalo foi a evidência mais direta dos férmions de Dirac não massivos no grafeno [10].

Se  $g \neq 0$ , então vemos que há na verdade um desdobramento dos níveis de Landau além do efeito Zeeman usual. Esse “desdobramento”, no nosso modelo, é consequência da existência de dois tipos de férmions. Interessante mencionar que existe na literatura a constatação experimental de um desdobramento *4-fold* no grafeno quando submetido a altos campos magnéticos [29].

## 2.3 Consistência física do modelo: Causalidade e Unitariedade

O propagador está diretamente relacionado com as funções de Green, isto é, com o produto de campos ordenados temporalmente. A função de Green de 2 pontos é dada por:

$$\langle T \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle = -i \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_c}{\delta J^i(x) \delta J^j(y)} \quad (2.36)$$

Onde  $T \Phi_i(x) \Phi_j(y)$  significa:

$$T \Phi_i(x) \Phi_j(y) = \begin{cases} \Phi_i(x) \Phi_j(y), & \text{se } x_0 > y_0. \\ \pm \Phi_j(y) \Phi_i(x), & \text{se } y_0 > x_0. \end{cases}$$

Sendo  $\Phi_i(x)$  a  $i$ -ésima componente de um campo qualquer da teoria e o sinal de menos caso ambos os campos sejam fermiônicos.  $\Gamma$  é o funcional gerador das funções de Green

conexas e está relacionado com a ação do modelo via<sup>10</sup>

$$\mathcal{Z}_c = \Sigma_0[\Phi_i] + \int d^3x \{J^i \Phi_i\} \quad (2.37)$$

Como estaremos lidando com cálculos a *tree level*<sup>11</sup>, em (2.37), a ação  $\Sigma_0[\Phi_i]$  é a ação livre, isto é, na ausência de interações ( $e = g = 0$ ) e  $J$  é uma corrente externa.

De (2.37), obtemos as seguintes relações funcionais:

$$\frac{\delta \Sigma_0}{\delta \Phi_i(x)} = -J^i(x), \quad (2.38)$$

$$\frac{\delta \mathcal{Z}_c}{\delta J^i(x)} = \Phi_i(x). \quad (2.39)$$

Portanto, substituindo (2.39) em (2.36), temos:

$$\langle T \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle = -i \frac{\delta \Phi_j(y)}{\delta J^i(x)} \quad (2.40)$$

Portanto, ao considerarmos a teoria livre, a menos de acoplamentos com correntes (fontes) externas, obtendo os campos como funções (funcionais) das correntes via as equações do movimento, a (2.40) nos fornece um meio de obter a função de Green de 2 pontos.

### 2.3.1 Propagador dos férmions

Ao desconsiderarmos as interações, os férmions  $\psi_+$  e  $\psi_-$  obedecem à mesma Equação de movimento (2.9), portanto vamos considerar, a fim de cálculo, apenas um único campo.

$$\mathcal{Z}_c = \int d^3x \{ \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \bar{\mathcal{J}} \psi + \bar{\psi} \mathcal{J} \} \quad (2.41)$$

A equação de movimento será:

$$\frac{\delta \mathcal{Z}_c}{\delta \bar{\psi}} = 0 \Rightarrow i \not{\partial} \psi + \mathcal{J} = 0 \quad (2.42)$$

$$i \not{\partial} \psi = -\mathcal{J} \quad (2.43)$$

<sup>10</sup>Ao longo desta seção os índices latinos podem ser, por exemplo, tanto índices de Lorentz quanto espinoriais, de modo que a diferenciação entre índices em cima ou embaixo é mera conveniência notacional.

<sup>11</sup>Desconsiderando correções quânticas de ordens superiores correspondentes à gráficos de Feynman envolvendo *loops*.

Vamos considerar a expansão de Fourier de  $\psi$  e  $\mathcal{J}$ :

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-ikx} \tilde{\psi}(k), \quad (2.44)$$

$$\mathcal{J}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-ikx} \tilde{\mathcal{J}}(k). \quad (2.45)$$

De forma que, a Equação (2.43) no espaço de Fourier será:

$$k\tilde{\psi}(k) = -\tilde{\mathcal{J}}(k) \quad (2.46)$$

Multiplicando (2.46) por  $k$  e lembrando que  $k k = k^2$ , teremos:

$$\begin{aligned} k^2\tilde{\psi}(k) &= -k\tilde{\mathcal{J}}(k) \\ \tilde{\psi}(k) &= -\frac{k}{k^2}\tilde{\mathcal{J}}(k) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Substituindo (2.47) em (2.44), temos:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-ikx} \left\{ -\frac{k}{k^2} \right\} \tilde{\mathcal{J}}(k) \quad (2.48)$$

Por fim, invertendo (2.45) e substituindo em (2.48):

$$\psi(y) = \int d^3x' \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x'-y)} \left\{ -\frac{k}{k^2} \right\} \mathcal{J}(x') \quad (2.49)$$

Agora temos  $\psi$  em termos da corrente externa  $\mathcal{J}$ . De (2.40), podemos agora obter a função de Green de 2 pontos para os férmions:

$$\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = -i \frac{\delta\bar{\psi}(y)}{\delta\mathcal{J}(x)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \Delta(k) \quad (2.50)$$

Onde,

$$\Delta(k) = i \frac{k}{k^2} \quad (2.51)$$

é o propagador dos espinores. Note que:

$$i\partial \langle T\psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = i\delta^3(x-y) \quad (2.52)$$

Ou seja, a função de Green de 2 pontos é a inversa do operador que aparece “sanduíchado” entre os campos  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  na ação (2.41). Esse resultado é geral e, muitas vezes, tomado como a própria definição da função de Green. Sendo a ação da forma,

$$\mathcal{Z}_c = \int d^3x \{ \Phi_i O^{ij}(\partial) \Phi_j + J^i \Phi_i \} \quad (2.53)$$

onde  $O^{ij}(\partial)$  é um operador diferencial de primeira ou segunda ordem<sup>12</sup> nas derivadas  $\partial$ , sempre teremos que:

$$O^{ik}(\partial) \langle T\Phi_k(x)\Phi_j(y) \rangle = \pm i\delta_j^i \delta(x-y) \Rightarrow \langle T\Phi_i(x)\Phi_j(y) \rangle = \pm iO_{ij}^{-1}(\partial)\delta(x-y) \quad (2.54)$$

O sinal negativo é utilizado quando  $\Phi_i$  é um campo bosônico. É, portanto, crucial que o operador  $O^{ij}(\partial)$  seja invertível. No caso dos nossos campos espinoriais isso não foi um problema, mas para lidar com campos vetoriais originados do *gauging* de uma simetria, a tarefa já não é tão trivial. Mas, antes de passarmos para o caso dos campos vetoriais, vamos finalizar o cálculo dos propagadores lembrando que no nosso modelo existem dois campos espinoriais  $\psi_+$  e  $\psi_-$  e, portanto, teremos os propagadores associados às duas funções de Green  $\langle T\psi_+(x)\bar{\psi}_+(y) \rangle$  e  $\langle T\psi_-(x)\bar{\psi}_-(y) \rangle$ :

$$\Delta^{++}(k) = i \frac{k}{k^2} \quad (2.55)$$

$$\Delta^{--}(k) = i \frac{k}{k^2} \quad (2.56)$$

## Causalidade e Unitariedade

A causalidade é obtida através dos pólos<sup>13</sup> do propagador. Tem-se um pólo causal ou bradiônico quando o pólo é do tipo  $k^2 \geq 0$ . Tem-se pólo taquiônico quando  $k^2 < 0$ . Os pólos do propagador são interpretados como os mediadores estáveis da teoria, sendo  $k^\mu$  seu quadrimomento; a relação  $k^2 = k^\mu k_\mu \geq 0$  vem do fato esperado de que partículas relativísticas não taquiônicas satisfazem a relação de dispersão  $k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = m^2 \rightarrow$

<sup>12</sup>Geralmente, tratando-se de um operador de segunda ordem nas derivadas, um fator  $\frac{1}{2}$  é inserido por conveniência, ou seja, fazendo  $O^{ij}(\partial) \rightarrow \frac{1}{2}O^{ij}(\partial)$  na ação.

<sup>13</sup>Nos valores de  $k^2$  onde o propagador não é definido

$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , sendo  $m^2$  (sua massa quadrada) uma quantidade necessariamente não negativa; não fosse assim, teríamos uma partícula mediadora com massa imaginária pura.

Os propagadores (2.55) e (2.56) possuem pólos do tipo  $k^2 = 0$  e são, portanto, causais.

A unitariedade consiste na ausência de estados de norma negativa, os *ghosts*. Calcularemos amplitudes que representam a emissão ou absorção dos férmion  $\psi_+$  e  $\psi_-$  através de um acoplamento de correntes externas com os propagadores. A unitariedade é garantida caso a parte imaginária do resíduo da amplitude avaliado nos pólos for maior ou igual a zero [30–32].

As amplitudes serão dadas por:

$$\mathcal{A}^{ii} = \bar{\mathcal{J}}^i \Delta^{ii} \mathcal{J}^i \quad (2.57)$$

O índice  $i$  não é pra ser somado, ele apenas indica se estamos calculando a amplitude para o férmion  $i = +$  ou  $i = -$ , mas como os propagadores (2.55) e (2.56) são os mesmos, não vamos usar os índices. A fonte externa  $\mathcal{J}$  e o termo  $\not{k}$  do propagador, de forma mais explícita são:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \not{k} = \gamma^\mu k_\mu = \begin{pmatrix} k_0 & ik_x + k_y \\ ik_x - k_y & -k_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & ik_+ \\ ik_- & -k_0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Sendo  $k_\pm = k_x \pm ik_y$ . Lembrando que  $\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{J}^\dagger \gamma^0$ , a amplitude (2.57) será:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \bar{\mathcal{J}} \Delta(k) \mathcal{J} = (\theta_1^* \quad \theta_2^*) \frac{i}{k^2} \begin{pmatrix} k_0 & ik_+ \\ -ik_- & k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{k^2} (k_0 |\theta_1|^2 + ik_+ \theta_1^* \theta_2 - ik_- \theta_2^* \theta_1 + k_0 |\theta_2|^2) \\ &= \frac{i}{k^2} k_0 \left( |\theta_1|^2 + \frac{ik_+}{k_0} \theta_1^* \theta_2 - \frac{ik_-}{k_0} \theta_2^* \theta_1 + |\theta_2|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

De forma que o resíduo da amplitude no pólo  $k^2 = 0 \Rightarrow k_+ k_- = \vec{k}^2 = k_0^2$ , será:

$$\mathcal{R}es(\mathcal{A}) = ik_0 |\theta_1 + ie^{i\phi} \theta_2|^2 \quad (2.60)$$

Onde  $e^{i\phi}$  é uma fase complexa dada por  $e^{i\phi} = \frac{k_x + ik_y}{k_0}$ . Para isso, obviamente, estamos supondo  $k_0 \neq 0$ , até porque se  $k^2 = 0$  e  $k_0 = 0$ , então  $k_\mu = 0$ . Por fim, tomando a parte imaginária do resíduo da amplitude avaliada no pólo, teremos:

$$Im \{Res(\mathcal{A})\} = k_0 |\theta_1 + ie^{i\phi}\theta_2|^2 \quad (2.61)$$

Voltando agora ao nosso caso dos dois férmions  $\psi_+$  e  $\psi_-$ , a única diferença residirá nas fontes externas, que denotaremos  $\mathcal{J}_+$  e  $\mathcal{J}_-$ . Os resultados serão:

$$Im \{Res(\mathcal{A}^{++})\} = k_0 |\theta_1^+ + ie^{i\phi}\theta_2^+|^2 > 0 \quad (2.62)$$

$$Im \{Res(\mathcal{A}^{--})\} = k_0 |\theta_1^- + ie^{i\phi}\theta_2^-|^2 > 0 \quad (2.63)$$

Portanto, a unitariedade também está garantida a *tree level*. Note que estamos supondo a condição fisicamente razoável da positividade da energia ( $k_0 > 0$ ). A imposição de uma condição desse tipo não é característica particular do caso de férmions não massivos, pois as quantidades (2.62) e (2.63) quando calculadas para férmions massivos, em vez de serem proporcionais à componente zero do vetor  $k_\mu$ , são proporcionais à massa dos férmions, que pode ser pensada como a componente zero do vetor  $k_\mu$  no seu referencial de repouso; de qualquer modo, a condição física implicitamente imposta nesse caso acaba sendo a positividade da massa das partículas.

### 2.3.2 Propagador dos bósons

Voltemos à ação de Maxwell-Chern-Simons (2.1), mas agora acrescida dos termos de *gauge fixing* (1.6):

$$\Sigma = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu a^\mu)^2 \right\} \quad (2.64)$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu) \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (-A^\nu \partial^\mu \partial_\nu A_\mu + A^\nu \partial^\mu \partial_\mu A_\nu) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (A^\nu \square A_\nu - A_\nu \partial^\mu \partial^\nu A_\mu) \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (A_\nu \eta^{\mu\nu} \square A_\mu - A_\nu \partial^\mu \partial^\nu A_\mu) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\nu \square \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\mu \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (A_\mu \square \Theta^{\mu\nu} A_\nu) \right\}
\end{aligned}$$

Já o termo de *gauge fixing*:

$$\begin{aligned}
\int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\alpha} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\alpha} A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\alpha} A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\nu \frac{\square}{\alpha} \left( \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\mu \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (A_\mu \frac{\square}{\alpha} \Omega^{\mu\nu} A_\nu) \right\}
\end{aligned}$$

De modo que, estamos definindo os chamados operadores de projeção:

$$\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}, \quad \Omega^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (2.65)$$

Vamos definir também:

$$S^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\rho\nu} \partial_\rho \quad (2.66)$$

Em termos destes operadores, a ação (2.64) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\Sigma = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \square \left( \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha} \Omega^{\mu\nu} \right) A_\nu + \frac{1}{2} A_\mu (\mu S^{\mu\nu}) a_\nu + \right. \\
\left. a_\mu \square \left( \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta} \Omega^{\mu\nu} \right) a_\nu + \frac{1}{2} a_\mu (\mu S^{\mu\nu}) A_\nu \right\} \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Podemos colocá-la numa forma mais apropriada:

$$\Sigma = \int d^3x \frac{1}{2} (A_\mu \quad a_\mu) \underbrace{\begin{pmatrix} \square\Theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square}\Omega^{\mu\nu} & \mu S^{\mu\nu} \\ \mu S^{\mu\nu} & \square\Theta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\square}\Omega^{\mu\nu} \end{pmatrix}}_{\hat{O}^{\mu\nu}} \begin{pmatrix} A_\nu \\ a_\nu \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Agora, basta voltarmos na Equação (2.53) e a definição da função de Green de dois pontos através de (2.54), para entendermos o propósito destas manipulações. De acordo com (2.54), a função de Green é a inversa do operador  $\hat{O}^{\mu\nu}$ .

Como a função de Green para os campos bosônicos é a mesma do modelo com os férmions massivos [16], vamos simplesmente reproduzir o resultado lá obtido, a saber:

$$(\hat{O}^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\square+\mu^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square}\Omega^{\mu\nu} & -\frac{\mu}{\square(\square+\mu^2)}S^{\mu\nu} \\ -\frac{\mu}{\square(\square+\mu^2)}S^{\mu\nu} & \frac{1}{\square+\mu^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\square}\Omega^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Neste momento, é importante ressaltar que a existência e o cálculo dessa inversa só se tornou possível devido à presença dos termos de *gauge fixing*. Neste sentido, eles podem parecer meros artifícios matemáticos e, de certa forma, o são, mas também estão associados à fixação dos número correto de graus de liberdades físicos do modelo.

Usando a (2.54), teremos então:

$$\begin{aligned} \langle T\Phi^\mu(x)\Phi^\nu(y) \rangle &= -i(\hat{O}^{\mu\nu})^{-1}\delta(x-y) = -i(\hat{O}^{\mu\nu})^{-1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-y)} \hat{\Delta}^{\mu\nu}(k) \end{aligned}$$

Onde,

$$\hat{\Delta}^{\mu\nu}(k) = \begin{pmatrix} \Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) & \Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) \\ \Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) & \Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Sendo,

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) = -i \left[ \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \quad (2.71)$$

$$\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \quad (2.72)$$

$$\Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \quad (2.73)$$

$$\Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) = -i \left[ \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\beta}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]. \quad (2.74)$$

## Causalidade e Unitariedade

Já podemos inferir sobre a causalidade com base nos pólos dos propagadores acima. A simples inspeção nos mostra que os pólos são do tipo  $k^2 = \mu^2 > 0$  ou  $k^2 = 0$ , ou seja, a causalidade está garantida a *tree level*.

Para inferir sobre a unitariedade, necessita-se calcular a amplitude da forma:

$$\mathcal{A} = J_\mu(k)\Delta^{\mu\nu}(k)J_\nu(k)$$

Onde  $J^\mu(k)$  são componentes de Fourier das correntes externas e estas satisfazem a equação de continuidade,  $\partial_\mu J^\mu(x) = k_\mu J^\mu(k) = 0$ . Decompondo as correntes, associadas aos campos  $A_\mu$  e  $a_\mu$  respectivamente, na seguinte base completa do espaço de Fourier:

$$\begin{cases} J^\mu & \equiv Ak^\mu + B\tilde{k}^\mu + C\varepsilon^\mu, \\ j^\mu & \equiv ak^\mu + b\tilde{k}^\mu + c\varepsilon^\mu. \end{cases} \quad (2.75)$$

Tendo  $k^\mu = (k^0, k^1, k^2)$ ,  $\tilde{k}^\mu = (k^0, -k^1, -k^2)$  e  $\varepsilon^\mu = (0, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$  obedecendo aos vínculos covariantes  $k^\mu\varepsilon_\mu = 0$ ,  $\tilde{k}^\mu\varepsilon_\mu = 0$  e  $\varepsilon^\mu\varepsilon_\mu = -1$ .

O cálculo das amplitudes está realizado em detalhes em [16] para os 4 propagadores (2.71)(2.72)(2.73)(2.74) e apresentaremos aqui apenas o resultado que nos interessa, que é a parte imaginária dos resíduos das amplitudes avaliada nos pólos:

$$\begin{aligned} \text{Im}\left\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{AA})\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= C^2 & \text{Im}\left\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{aa})\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= c^2 \\ \text{Im}\left\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{Aa})\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= 0 & \text{Im}\left\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{aA})\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Note que as amplitudes estão avaliadas apenas nos pólos massivos ( $k^2 = \mu^2$ ). No caso das amplitudes mistas  $\mathcal{A}_{Aa}$  e  $\mathcal{A}_{aA}$ , isso se deve à presença do tensor antissimétrico em (2.72) e (2.73) que faz com que as amplitudes se anulem, ou seja, não há graus de liberdade propagados. No caso das amplitudes  $\mathcal{A}_{AA}$  e  $\mathcal{A}_{aa}$ , a conservação das correntes faz com que as amplitudes não só desacoplem do setor longitudinal, como também dependam apenas o pólo massivo.

Enfim, podemos ver que a unitariedade também está garantida a *tree level* para este caso, com a ressalva de que graus de liberdade não são propagados no caso das amplitudes  $\mathcal{A}_{Aa}$  e  $\mathcal{A}_{aA}$

## 2.4 O espalhamento

Em teoria quântica de campos, a quantidade física a partir da qual obtém-se a maioria dos resultados de interesse físico são as amplitudes de espalhamento ou matriz S.

Nesta seção, estaremos interessados no espalhamento cujos estados iniciais são dois férmions e os estados finais também são dois férmions (espalhamento Møller). No regime de acoplamento fraco, de modo a valer a teoria de perturbação, a amplitude total pode ser escrita como uma soma de gráficos Feynman. Nestas condições, a expansão naturalmente se dá em potências das constantes de acoplamento, sendo assim, como as estamos supondo fracas, quanto maiores as potências, menor será sua contribuição para a amplitude total. Calcularemos a amplitude na aproximação a *tree level*, ou seja, desconsiderando os termos de *loop*. Para nosso modelo, as contribuições de *loop* para o espalhamento Møller, necessariamente, são da ordem das constantes de acoplamento elevadas à quarta potência ou mais. Há também o fato conhecido da presença de divergências em gráficos desse tipo (com *loops*), que precisam ser tratadas. Mais do que as usuais divergências ultravioletas (altas energias), a presença dos férmions não massivos faz com que existam também as divergências infravermelhas (baixas energias). O tratamento destas últimas é mais delicado e requer uma análise mais cuidadosa. Faz parte da nossa perspectiva futura tratar destas divergências ultravioleta e infravermelha através do método BPHZL. Por esses motivos, nos manteremos na aproximação a *tree level*.

### 2.4.1 As amplitudes de espalhamento

Na aproximação que estamos considerando, a amplitude de espalhamento Møller é dada por [33]:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} &= \bar{u}(p'_1)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(1)}]u(p_1)\{\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_1)\}\bar{u}(p'_2)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(2)}]u(p_2) + \\
 &\quad -\bar{u}(p'_2)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(3)}]u(p_1)\{\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_2)\}\bar{u}(p'_1)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(4)}]u(p_2), \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(1)}$ ,  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(2)}$ ,  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(3)}$ ,  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(4)}$  são as regras de Feynman para cada vértice de interação,  $\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_1)$  e  $\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_2)$  os propagadores no canal-*t* e canal-*u* e  $u(p_1)$ ,  $u(p'_1)$ ,  $u(p_2)$ ,  $u(p'_2)$  as funções de onda dos férmions no espaço dos momenta.

Vamos reescrever (2.77) da seguinte maneira:

$$-i\mathcal{M} = -i(\mathcal{M}^{direto} + \mathcal{M}^{cruzado}) = -i(\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)}), \tag{2.78}$$

e a Figura (2.2) representa estas contribuições em termos dos gráficos de Feynman: As amplitudes como dadas em (2.77) deixam implícitas certas condições. A primeira

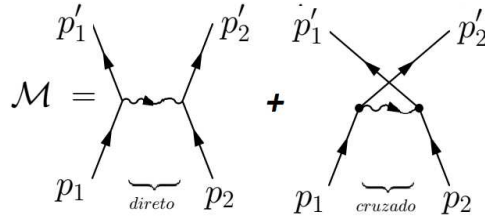


Figura 2.2: Amplitude de espalhamento total.

delas é a do campo vetorial que está mediando a interação. Temos duas possibilidades,  $A_\mu$  e  $a_\mu$ . A amplitude total deverá levar em conta as contribuições de ambos. A segunda condição é o tipo de férmion que estamos espalhando. No caso massivo [16] esta condição é especificada fixando a polarização de spin dos férmions, no entanto, como já discutimos, spin não é um bom número quântico da nossa teoria, no sentido de que não podemos indexar os férmions com base nesta grandeza. No nosso caso, iremos usar a carga quiral. Teremos, então, 4 tipos de espalhamento. Os espalhamentos do tipo ++ ou -- ( $\uparrow\uparrow$  ou  $\downarrow\downarrow$ ) e os espalhamentos do tipo +- ou -+ ( $\uparrow\downarrow$  ou  $\downarrow\uparrow$ ). Em [16] verificou-se que os férmions ( $-e$ ) com carga quiral  $-g$ , no referencial de repouso, possuíam spin para cima ( $\uparrow$ ) e os férmions com carga quiral  $+g$  possuíam spin para baixo ( $\downarrow$ ). Então, para manter a notação, **o sinal de + ou - utilizados daqui pra frente, representados pictoricamente por  $\uparrow$  ou  $\downarrow$ , indicam o oposto da carga quiral.** Em resumo,  $\uparrow \Rightarrow -g$  e  $\downarrow \Rightarrow +g$ .

Teremos, então, os gráficos de Feynman para o espalhamento +- ( $\downarrow\uparrow$ ) ou -+ ( $\uparrow\downarrow$ ) mediado pelo campo  $A_\mu$ :

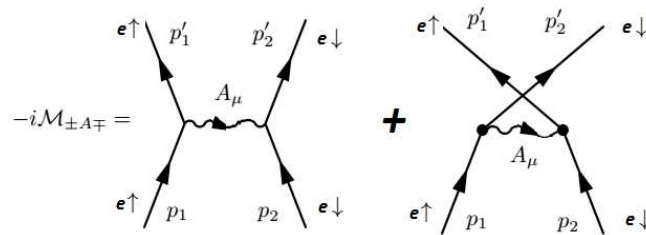


Figura 2.3: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) tipo  $\uparrow\downarrow$  ou  $\downarrow\uparrow$  mediado por  $A_\mu$ .

E pelo campo  $a_\mu$ : A representação gráfica do espalhamento -- ( $\downarrow\downarrow$ ) mediado por  $A_\mu$ :

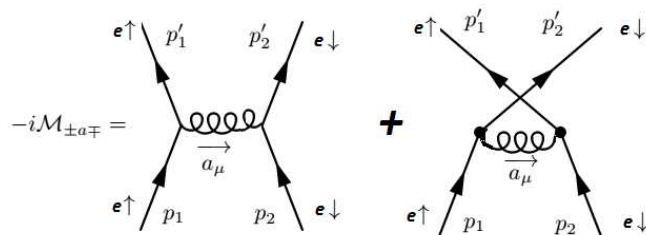


Figura 2.4: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) tipo  $\uparrow\downarrow$  ou  $\downarrow\uparrow$  mediado por  $a_\mu$ .

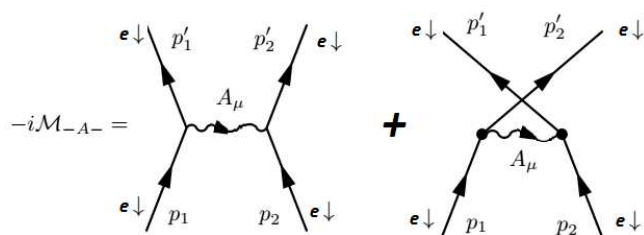


Figura 2.5: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) tipo  $\downarrow\downarrow$  mediado por  $A_\mu$ .

E do tipo  $--$  ( $\downarrow\downarrow$ ) para o campo  $a_\mu$ :

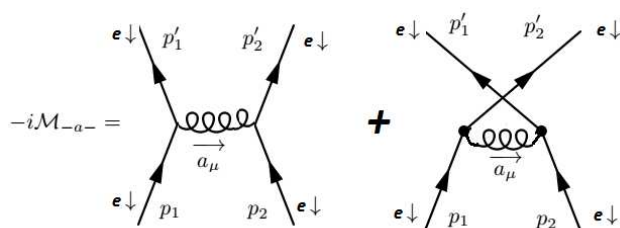


Figura 2.6: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) tipo  $\downarrow\downarrow$  mediado por  $a_\mu$ .

A representação gráfica do espalhamento tipo  $++$  ( $\uparrow\uparrow$ ) mediado por  $A_\mu$ :

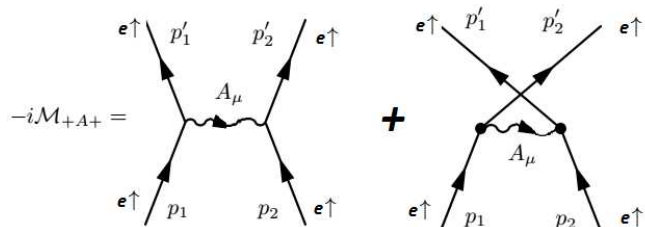


Figura 2.7: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) tipo  $\uparrow\uparrow$  mediado por  $A_\mu$ .

E do tipo  $++$  ( $\uparrow\uparrow$ ) pelo campo  $a_\mu$ :

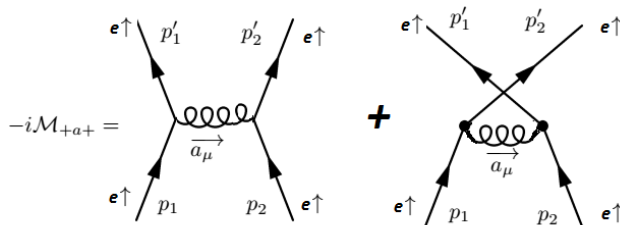


Figura 2.8: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) tipo  $\uparrow\uparrow$  mediado por  $a_\mu$ .

Para os cálculos das amplitudes, necessitaremos dos vértices de interação  $\mathcal{V}_{Feyn}^{(i)}$  e dos propagadores, que dependem do tipo do espalhamento e do campo vetorial mediando o espalhamento, respectivamente. Como os vértices de interação são os mesmos do modelo massivo [16], não necessitamos calculá-los novamente. São eles:

$$\mathcal{V}_{+A+}^{\mu} = ie\gamma^{\mu}, \quad (2.79)$$

$$\mathcal{V}_{+a+}^{\mu} = ig\gamma^{\mu}, \quad (2.80)$$

$$\mathcal{V}_{-A-}^{\mu} = ie\gamma^{\mu}, \quad (2.81)$$

$$\mathcal{V}_{-a-}^{\mu} = -ig\gamma^{\mu}. \quad (2.82)$$

Os sub-índices em  $\mathcal{V}_{i\Phi_i}^{\mu}$  indicam que estamos lidando com espinores do tipo  $u_i(p)$  e mediados pelo campo  $\Phi$ . Quanto aos propagadores, como já discutimos os propagadores  $\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k)$  e  $\Delta_{aA}^{\mu\nu}(k)$  são não dinâmicos, enquanto os propagadores  $\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k)$  e  $\Delta_{aa}^{\mu\nu}(k)$ , contribuem apenas com sua parte não longitudinal para a amplitude de espalhamento. Para tornar tudo isso mais claro, vamos ver como fica a amplitude do espalhamento do tipo  $+-$  mediado pelo campo  $A_{\mu}$  no canal direto (ou canal- $t$ ):

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+A+}^{\mu}] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_1) \} \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-A-}^{\nu}] u_-(p_2), \\ -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [ie\gamma^{\mu}] u_+(p_1) \left\{ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k_1^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}_-(p'_2) [ie\gamma^{\nu}] u_-(p_2). \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde  $k_1 = p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2$ .

Já a amplitude, nas mesmas condições, mas referente à contribuição do canal cruzado (canal- $u$ ), será:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{+A-}^{(2)} &= -\bar{u}_+(p'_2) [\mathcal{V}_{+A+}^{\mu}] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_2) \} \bar{u}_-(p'_1) [\mathcal{V}_{-A-}^{\nu}] u_-(p_2) \\ -i\mathcal{M}_{+A-}^{(2)} &= -\bar{u}_+(p'_2) [ie\gamma^{\mu}] u_+(p_1) \left\{ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k_2^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}_-(p'_1) [ie\gamma^{\nu}] u_-(p_2). \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde  $k_2 = p_1 - p'_2 = p'_1 - p_2$ .

Antes de prosseguirmos, vamos fixar os cálculos como sendo no referencial do centro de massa ou, mais apropriadamente, centro de momento (CM), ou seja, no referencial tal que o momento linear total do sistema é nulo. Ele está representado na figura a seguir:

O ângulo pós espalhamento  $\phi$  é definido a partir da direção inicial dos férmions.

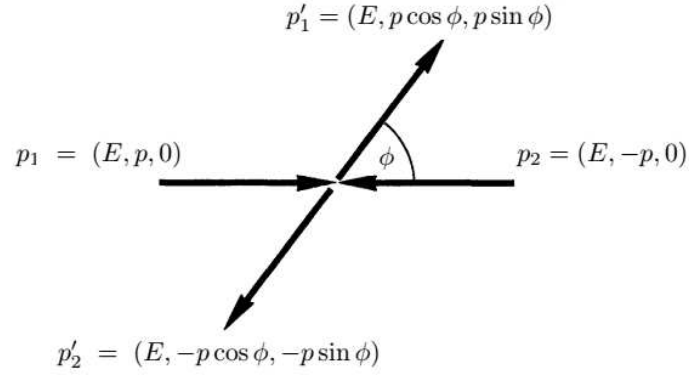


Figura 2.9: Espalhamento férmion-férmion no referencial do CM.

Uma das principais diferenças para o resultado do cálculo dessas amplitudes, em relação ao caso massivo, está nas soluções  $u_{\pm}(p)$  utilizadas. Pois lá, as soluções se referem às soluções das duas equações de Dirac massivas, que diferem entre si pelo sinal do termo de massa e estão associadas ao spin. Aqui, as soluções referem-se à equação de Dirac não massiva, sendo a diferença entre elas devido à carga quiral  $\mp g$ .

Já temos as contribuições eletromagnéticas ( $A_{\mu}$ ) para o espalhamento do tipo  $+ -$ , mesmo que ainda não explicitamente. Antes de partirmos para os cálculos explícitos, é instrutivo escrevermos as contribuições mediadas pelo campo  $a_{\mu}$ .

Primeiramente do canal- $t$ :

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+a-}^{(1)} &= \bar{u}_{+}(p'_1) [\mathcal{V}_{+a+}^{\mu}] u_{+}(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{aa}(k_1) \} \bar{u}_{-}(p'_2) [\mathcal{V}_{-a-}^{\nu}] u_{-}(p_2), \\
 -i\mathcal{M}_{+a-}^{(1)} &= \bar{u}_{+}(p'_1) [ig\gamma^{\mu}] u_{+}(p_1) \left\{ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k_1^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}_{-}(p'_2) [-ig\gamma^{\nu}] u_{-}(p_2).
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

E do canal- $u$ :

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+a-}^{(2)} &= -\bar{u}_{+}(p'_2) [\mathcal{V}_{+a+}^{\mu}] u_{+}(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{aa}(k_2) \} \bar{u}_{-}(p'_1) [\mathcal{V}_{-a-}^{\nu}] u_{-}(p_2) \\
 -i\mathcal{M}_{+a-}^{(2)} &= -\bar{u}_{+}(p'_2) [ig\gamma^{\mu}] u_{+}(p_1) \left\{ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k_2^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}_{-}(p'_1) [-ig\gamma^{\nu}] u_{-}(p_2).
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

A amplitude total de espalhamento é a soma dessas quatro amplitudes:

$$-i\mathcal{M}_{+-} = -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} - i\mathcal{M}_{+A-}^{(2)} - i\mathcal{M}_{+a-}^{(1)} - i\mathcal{M}_{+a-}^{(2)} \tag{2.87}$$

É importante e útil mencionar agora que, as amplitudes para o espalhamento do tipo  $-+$  são idênticas, ou seja,  $M_{+A-}^{(i)} = M_{-A+}^{(i)}$  e  $M_{+a-}^{(i)} = M_{-a+}^{(i)}$ , com  $i = 1, 2$ . Isso não é difícil de perceber, pois a única diferença entre estes termos viria da permutação entre os vértices 2.79 e 2.81 e da permutação dos vértices 2.80 e 2.82, no entanto, como o que aparece na amplitude é o produto das contribuições dos vértices, estas permutações não alteram o resultado. A permutação dos sinais  $\pm$  nos espinores  $u(p)$ , nestas amplitudes em particular, também não altera o resultado (Seção C.1). Podemos, então, escrever:

$$-i\mathcal{M}_{\pm\mp} = -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} - i\mathcal{M}_{+A-}^{(2)} - i\mathcal{M}_{+a-}^{(1)} - i\mathcal{M}_{+a-}^{(2)} \quad (2.88)$$

De forma que podemos agrupar e organizar estes termos da seguinte forma:

$$-i\mathcal{M}_{\pm\mp} = i(e^2 - g^2) \left[ \left( \frac{\bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_1^2 - \mu^2} \right) - \left( \frac{\bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_2^2 - \mu^2} \right) \right]$$

Mais do que isso, todos os tipos de espalhamentos ( $\pm\mp, ++, --$ ) possuem a mesma forma, a diferença residindo apenas nos sinais dos vértices de interação, que resultam numa diferença nos sinais que precedem  $e$  ou  $g$  e nos sinais das soluções  $u_\pm(p)$ . As amplitudes podem então serem todos escritas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{\pm\mp} &= i(e^2 - g^2) \left[ \left( \frac{\bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_1^2 - \mu^2} \right) - \left( \frac{\bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_2^2 - \mu^2} \right) \right] \\ -i\mathcal{M}_{++} &= i(e^2 + g^2) \left[ \left( \frac{\bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_\mu u_+(p_2)}{k_1^2 - \mu^2} \right) - \left( \frac{\bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_\mu u_+(p_2)}{k_2^2 - \mu^2} \right) \right] \\ -i\mathcal{M}_{--} &= i(e^2 + g^2) \left[ \left( \frac{\bar{u}_-(p'_1)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_1^2 - \mu^2} \right) - \left( \frac{\bar{u}_-(p'_2)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_2^2 - \mu^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Em termos de cálculo, não conquistamos muitas vantagens em colocar as amplitudes desta forma, pois ainda precisamos calcular os termos entre parênteses, mas ela já nos aponta para uma certa direção de interpretação física: O que quer que aconteça quando se espalha férmions com cargas quirais iguais ( $++$  ou  $--$ ), a contribuição quando as cargas são opostas ( $+-$  ou  $-+$ ), também é oposta. É como se valesse, para a carga  $g$ , a regra de que cargas iguais se repelem e cargas opostas se atraem. Certamente, já estamos especulando demais com esta última afirmação, pois o comportamento exato (atração, repulsão, ou qualquer outra possibilidade) obviamente dependerá dos termos entre parênteses, no entanto é apenas uma tentativa de desenvolver uma intuição física sobre o que está acontecendo. Os cálculos a seguir nos ajudarão a iluminar esta questão melhor.

No contexto do espalhamento relativístico de duas partículas, é comum definir-se e

trabalhar-se com as variáveis de Mandelstam, que são quantidades invariantes de Lorentz definidas a seguir:

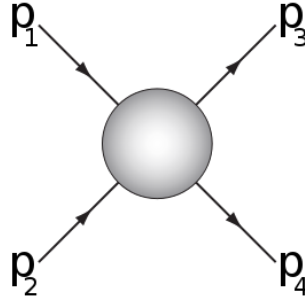


Figura 2.10: Esquema de espalhamento segundo Mandelstam

$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\
 t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\
 u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2,
 \end{aligned}
 \tag{2.89}$$

e obedecem a seguinte relação:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.
 \tag{2.90}$$

Estas quantidades são, basicamente, definidas a partir da conservação do quadrimomento relativístico total durante a colisão:  $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$ . No caso mais geral possível, considera-se duas partículas iniciais com massas  $m_1$  e  $m_2$  e duas partículas finais com massas  $m_3$  e  $m_4$ . Para o problema em nossas mãos:  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$ . E, no referencial do CM definido na Figura 2.9, teremos ainda:

$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \\
 t &= (p_1 - p_1')^2 = -2p^2(1 - \cos \phi) = -4E^2 \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right), \\
 u &= (p_1 - p_2')^2 = -2p^2(1 + \cos \phi) = -4E^2 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right),
 \end{aligned}
 \tag{2.91}$$

onde usamos da relação de dispersão relativística para partículas sem massa:  $E^2 = \vec{p}^2$ .

Em termos das variáveis de Mandelstam as amplitudes de espalhamento calculadas explicitamente em Seção C.1, podem ser escritas como:

$$-i\mathcal{M}_{\pm\mp} = i(e^2 - g^2) \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) - \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \quad (2.92)$$

$$-i\mathcal{M}_{++} = -i(e^2 + g^2)e^{i\phi} \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) + \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \quad (2.93)$$

$$-i\mathcal{M}_{--} = -i(e^2 + g^2)e^{-i\phi} \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) + \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \quad (2.94)$$

Nesta forma, duas informações se tornam evidentes. Uma delas é a invariância de Lorentz manifesta<sup>14</sup> das amplitudes de espalhamento. A outra, que as amplitudes são consistentes com as indistinguibilidade de férmions, pois a permutação dos férmions espalhados representadas pelas transformações<sup>15</sup>  $u \leftrightarrow t$  e  $\phi \rightarrow \phi + \pi$  faz com que as amplitudes troquem de sinal, ou seja,  $\mathcal{M} \rightarrow -\mathcal{M}$ , como é de se esperar para férmions.

## 2.4.2 O potencial de espalhamento

O conceito de potencial de espalhamento se faz útil num contexto de primeira quantização. Por exemplo, para partículas massivas no limite de baixas velocidades, é o termo ou os termos de interação que aparecem na equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}) + V(\vec{x})\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (2.95)$$

Não existe, no entanto, uma equação de Schrödinger para partículas sem massa e, muito menos, um limite de baixas velocidades, pois estas se movem necessariamente à velocidade da luz. Mas isto não é um empecilho para um tratamento à la primeira quantização, se lembrarmos que a Equação (2.95) é apenas a representação no espaço das posições da equação de autovalores para a Hamiltoniana não relativística para partículas sem spin  $\hat{H}_S = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$ . Esta equação é um caso particular de um dos postulados da mecânica quântica. A saber:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (2.96)$$

Onde  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano adequado à situação física a ser trabalhada. Para o caso de partículas sem massa com spin  $\frac{1}{2}$ , é natural utilizar-se a Hamiltoniana de Dirac  $H_D = \vec{\alpha}\cdot\hat{p}c + \hat{V}$ , ou seja:

<sup>14</sup>A dependência em  $\phi$  pode ser eliminada em favor de  $t$  ou  $u$  dados em (2.91)

<sup>15</sup>Comparando com a Figura 2.9, estas transformações equivalem a trocar os momentos finais  $p'_1 \leftrightarrow p'_2$

$$-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) + \not{K}V(\vec{x})\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (2.97)$$

O problema dessa abordagem é que ela não mais nos permite usar diretamente a relação entre amplitude de espalhamento e potencial de interação como utilizada no caso massivo [16], como veremos a seguir. Não sem os devidos comentários.

Segundo a aproximação de Born, na teoria de Schrödinger, a seção de choque diferencial do espalhamento de duas partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$ , no referencial do centro de massa é:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \left|\frac{m_{red}}{2\pi} \int d^2\vec{x} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right|^2, \quad (2.98)$$

onde  $m_{red}$  é a massa reduzida,

$$m_{red} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.99)$$

e  $\vec{p}$  e  $\vec{p}'$  são os momentos inicial e final de uma das partículas no referencial do centro de massa (CM). Da relação entre a seção de choque diferencial e a matriz de espalhamento  $\mathcal{M}$  no limite de baixas velocidades [33]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \left|\left(\frac{1}{4\pi}\right) \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \mathcal{M}\right|^2, \quad (2.100)$$

comparando-se (2.100) e (2.98), obtém-se

$$\mathcal{M} = \int d^2\vec{x} V(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.101)$$

onde  $\vec{k} = \vec{p}'_1 - \vec{p}$ .

A partir de (2.101) obtém-se o potencial de espalhamento:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \mathcal{M} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (2.102)$$

Os problemas dessa abordagem agora são claros. Primeiro, pelo fato da Equação (2.98) ser um resultado obtido através da Equação de Schrödinger (2.95), que sabemos não se aplicar a partículas sem massa. Segundo, o limite de validade de (2.100) restrito ao regime de baixas velocidades. Por fim, a dependência explícita das massas das partículas nas Equações (2.98) e (2.100).

Note, contudo, que o resultado (2.102) não depende das massas das partículas. Poderíamos, simplesmente, supor que esse resultado continua válido mesmo quando as

partículas não são massivas, mas prezando por um mínimo de dignidade e honestidade intelectual, vamos justificar o uso da expressão (2.102) (com algumas alterações) por um outro caminho.

Não podemos escapar do fato de que precisamos relacionar uma quantidade obtida no formalismo de segunda quantização com outra obtida no da primeira quantização. O ponto central é relacionar quantidades que sejam gerais o suficiente para podermos aplicar o resultado independentemente do tipo de partícula tratada.

Em teoria quântica de campos, o elemento de matriz-S  $S_{fi}$  para um espalhamento de um estado inicial  $|i\rangle$  para um estado final  $|f\rangle$  tem a forma:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - (2\pi)^D i \delta(P_f - P_i) T_{fi} \quad (2.103)$$

Onde  $D$  é a dimensão do espaço-tempo considerada,  $P_f$  e  $P_i$  denotam o quadrimomento total final e inicial, respectivamente, e  $T_{fi}$  é a amplitude de transição relacionada à amplitude de espalhamento por:

$$T_{fi} = N_f \mathcal{M}_{fi} N_i \quad (2.104)$$

Sendo os  $N$ 's fatores cinemáticos dependentes da escolha da normalização dos estados de uma partícula. Vamos considerar o caso de um espalhamento elástico de duas partículas A e B no referencial do CM.

Seguindo a proposta de Sucher [20–24], a definição do potencial  $\hat{V}$  é tal que, quando este potencial é adicionado ao operador  $\hat{H}_0$  descrevendo a propagação livre de A e B, e uma equação tipo-Schrödinger

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (2.105)$$

com  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$  é resolvida para os estados espalhados<sup>16</sup>, a amplitude de transição resultante desta teoria  $T_{fi}^{pot}$  deverá coincidir com a amplitude de transição da teoria de campos  $T_{fi}$ . Referimos a  $\hat{V}$  como potencial agora com o entendimento que, em geral, este pode ser não local e dependente da energia, e mais, se a energia for grande o suficiente para criar outras partículas, este pode ser até não auto adjunto.

No referencial do CM, a amplitude de transição  $T_{fi}^{pot}$  de um estado inicial de produto ondas planas com momento linear  $\vec{\mathbf{p}}$  e  $\vec{\mathbf{p}}$  para um estado final de produto de ondas planas

---

<sup>16</sup>Em oposição aos estados ligados, que exigem uma análise mais cuidadosa

com moment linear  $\vec{\mathbf{p}}'$  e  $-\vec{\mathbf{p}}'$  gerada por este potencial é [33] [34]

$$T_{fi}^{pot} = \langle \vec{\mathbf{p}}' | \hat{V} + \hat{V}(E - \hat{H} + i\epsilon)^{-1} \hat{V} | \vec{\mathbf{p}} \rangle \quad (2.106)$$

onde  $|\vec{\mathbf{p}}\rangle$  e  $|\vec{\mathbf{p}}'\rangle$  são os estados iniciais e finais, respectivamente e  $E$  é a energia total no referencial CM

$$E = E_A(\vec{\mathbf{p}}) + E_B(\vec{\mathbf{p}}) = E_A(\vec{\mathbf{p}}') + E_B(\vec{\mathbf{p}}'). \quad (2.107)$$

A definição de  $\hat{V}$  vem, portanto, da exigência de que

$$T_{fi}^{pot} = T_{fi}. \quad (2.108)$$

Desconsiderando correções radiativas para os vértices (*tree-level*) de interação ou de autoenergia para o cálculo da amplitude de transição, esta dependerá apenas de potências pares das constantes de acoplamento, ou seja, poderá ser expandida da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(2)} + \mathcal{M}_{fi}^{(4)} + \dots \quad (2.109)$$

Assumindo que  $\hat{V}$  e  $T_{fi}^{pot}$  podem ser escritos de modo similar, ou seja,

$$\hat{V} = \hat{V}^{(2)} + \hat{V}^{(4)} + \dots \quad (2.110)$$

$$T_{fi}^{pot} = T_{fi}^{pot(2)} + T_{fi}^{pot(4)} + \dots \quad (2.111)$$

Substituindo (2.110) e (2.111) em (2.106) e comparando ordem a ordem, teremos então:

$$T_{fi}^{pot(2)} = \langle \vec{\mathbf{p}}' | \hat{V}^{(2)} | \vec{\mathbf{p}} \rangle \quad (2.112)$$

$$T_{fi}^{pot(4)} = \langle \vec{\mathbf{p}}' | \hat{V}^{(4)} + \hat{V}^{(2)}(E - \hat{H} + i\epsilon)^{-1} \hat{V}^{(2)} | \vec{\mathbf{p}} \rangle \quad (2.113)$$

...

De (2.104), (2.109) e (2.108) obtemos finalmente:

$$N_f \mathcal{M}^{(2)} N_i = \langle \vec{\mathbf{p}}' | \hat{V}^{(2)} | \vec{\mathbf{p}} \rangle \quad (2.114)$$

$$N_f \mathcal{M}^{(4)} N_i = \langle \vec{\mathbf{p}}' | \hat{V}^{(4)} + \hat{V}^{(2)} (E - \hat{H} + i\epsilon)^{-1} \hat{V}^{(2)} | \vec{\mathbf{p}} \rangle \quad (2.115)$$

...

A Equação (2.114) é a relação que buscávamos, pois ela nos diz que, em ordem 2 da constante de acoplamento e, a menos de constantes cinemáticas, o potencial de espalhamento está relacionado com a amplitude de espalhamento através de uma transformada de Fourier.

Na realidade, tratando-se de partículas de spin meio, alguns detalhes envolvendo o espaço dos espinores devem ser levados em consideração para a definição mais precisa do potencial [24]. Prosseguiremos para o cálculo do potencial já levando em consideração estes detalhes e justificaremos os procedimentos utilizados mostrando que estes levam a outros resultados já bem conhecidos.

Um primeiro aspecto que devemos deixar claro é no que diz respeito à indistinguibilidade das partículas. Como já vimos, as amplitudes (2.92), (2.93) e (2.94) são explicitamente compatíveis com a indistinguibilidade de férmions, no entanto, pensando no contexto de mecânica quântica não relativística, a indistinguibilidade é tratada à nível das funções de onda, isto é, é a simetrização ou antissimetrização destas que faz com que a descrição seja compatível com o fato das partículas serem bósons ou férmions indistinguíveis e não o potencial de interação. Portanto, para calcular o potencial de espalhamento através das amplitudes, devemos desconsiderar a indistinguibilidade; para isto, iremos utilizar apenas as amplitudes referentes aos espalhamentos diretos (canal- $t$ ).

Considerando o espalhamento de dois férmions distinguíveis A e B, a forma adequada da amplitude a ser utilizada para calcular a amplitude de espalhamento é:

$$\mathcal{M}^{(2)} = \bar{u}'_A \bar{u}'_B F u_A u_B \quad (2.116)$$

Novamente, façamos isso explicitamente para um espalhamento em particular para deixar mais claro. Voltemos à amplitude (2.83):

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+A+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_1) \} \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-A-}^\nu] u_-(p_2), \\ -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [ie\gamma^\mu] u_+(p_1) \left\{ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k_1^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}_-(p'_2) [ie\gamma^\nu] u_-(p_2). \end{aligned} \quad (2.117)$$

De agora em diante, vamos remover todos os sobrescritos nas amplitudes para evitar confusão de notação. Deixando claro, porém, que estamos lidando, apenas com o canal direto das amplitudes (que antes era diferenciado do canal cruzado pelos sobrescritos <sup>(1)</sup> ou <sup>(2)</sup>) e com processos envolvendo apenas ordem 2 das constantes de acoplamento (que estavam sendo diferenciados de processos de ordens superiores através dos sobrescritos <sup>(2)</sup>, <sup>(4)</sup>, ...).

Na notação que passaremos a utilizar, a amplitude acima será reescrita como:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+A-} &= \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+A+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_1) \} \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-A-}^\nu] u_-(p_2), \\
 -i\mathcal{M}_{+A-} &= \bar{u}_+(p'_1) [ie\gamma^\mu] u_+(p_1) \left\{ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k_1^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}_-(p'_2) [ie\gamma^\nu] u_-(p_2), \\
 \mathcal{M}_{+A-} &= \bar{u}'_A [e_A \gamma_A^\mu] u_A \left\{ \frac{-\eta_{\mu\nu}}{k_1^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}'_B [e_B \gamma_B^\nu] u_B. \\
 \mathcal{M}_{+A-} &= \bar{u}'_A \bar{u}'_B \left\{ \frac{-e_A \gamma_A^\mu \eta_{\mu\nu} e_B \gamma_B^\nu}{k_1^2 - \mu^2} \right\} u_A u_B. \\
 \mathcal{M}_{+A-} &= \bar{u}'_A \bar{u}'_B \left\{ \frac{-e^2 \eta_{\mu\nu} \gamma_A^\mu \gamma_B^\nu}{k_1^2 - \mu^2} \right\} u_A u_B. \tag{2.118}
 \end{aligned}$$

Levando em consideração também a contribuição devida à mediação do campo quiral, teremos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{+-} = \mathcal{M}_{+A-} + \mathcal{M}_{+a-} &= \bar{u}'_A \bar{u}'_B \left\{ \frac{(-e^2 + g^2) \eta_{\mu\nu} \gamma_A^\mu \gamma_B^\nu}{k_1^2 - \mu^2} \right\} u_A u_B \\
 &= \bar{u}'_A \bar{u}'_B F_{+-} u_A u_B. \tag{2.119}
 \end{aligned}$$

Onde,

$$F_{+-} = \frac{(-e^2 + g^2) \eta_{\mu\nu} \gamma_A^\mu \gamma_B^\nu}{k_1^2 - \mu^2}. \tag{2.120}$$

Fazendo o mesmo procedimento para os outros espalhamento, obtemos:

$$F_{\pm\mp} = (-e^2 + g^2) \frac{\eta_{\mu\nu} \gamma_A^\mu \gamma_B^\nu}{k_1^2 - \mu^2} \tag{2.121}$$

$$F_{\pm\pm} = -(e^2 + g^2) \frac{\eta_{\mu\nu} \gamma_A^\mu \gamma_B^\nu}{k_1^2 - \mu^2} \tag{2.122}$$

No referencial do CM, temos que  $k_1 = p_1 - p'_1 = (0, \vec{k}) \Rightarrow k_1^2 = -\vec{k}^2$ . Sendo  $\vec{k} = \vec{p} - \vec{p}'$  o *momentum transfer*. Teremos, então:

$$F_{\pm\mp}^{CM} = (e^2 - g^2) \frac{\eta_{\mu\nu} \gamma_A^\mu \gamma_B^\nu}{\vec{k}^2 + \mu^2} \quad (2.123)$$

$$F_{\pm\pm}^{CM} = (e^2 + g^2) \frac{\eta_{\mu\nu} \gamma_A^\mu \gamma_B^\nu}{\vec{k}^2 + \mu^2} \quad (2.124)$$

Seguindo a prescrição para férmions distinguíveis [24], o potencial de espalhamento será dado por:

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \beta_A \beta_B F^{CM}(\vec{k}) \quad (2.125)$$

Onde  $\beta_i = \gamma_i^0$ . Chegamos, por fim, nos potenciais de espalhamento:

$$V_{\pm\mp}(r) = (1 - \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \frac{(e^2 - g^2)}{2\pi} K_0(\mu r) \quad (2.126)$$

$$V_{\pm\pm}(r) = (1 - \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \frac{(e^2 + g^2)}{2\pi} K_0(\mu r) \quad (2.127)$$

A definição (2.125) é claramente diferente da conexão que havíamos chegado entre potencial e amplitude de espalhamento, o único fator em comum sendo a presença da transformada de Fourier. Como já foi dito, esta diferença se deve à detalhes no que concerne o tratamento de partículas de spin  $\frac{1}{2}$ . Vamos “justificar” a escolha da definição (2.125) mostrando que ela nos leva a resultados já conhecidos. Notemos primeiro que o fator  $\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2$  é de origem relativística. Se os férmions fossem massivos, este fator seria da ordem de  $\frac{v^2}{c^2}$  e, num regime de baixas velocidades, poderia ser desprezado. Vamos supor que este fosse o caso. Suponhamos também que  $g = 0$  e que estivéssemos em 3 dimensões espaciais, ou seja, que a transformada de Fourier fosse na verdade  $\propto \int d^3\vec{k}$ . Nestas condições, a definição (2.125) nos levaria a um potencial do tipo  $V(r) \propto e^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}$ , isto é, a um potencial de Yukawa característico de uma teoria com fóton massivo em 3 dimensões. Se o fóton fosse não massivo ( $\mu^2 = 0$ ), então teríamos um potencial do tipo  $V(r) \propto \frac{e^2}{r}$ , isto é, o conhecido potencial de Coulomb. Por fim, se o fóton ainda fosse não massivo, mas voltando para o caso de 2 dimensões espaciais, então teríamos o também conhecido potencial de “Coulomb” bidimensional  $V(r) \propto \ln r$ . Estes resultados sugerem, no mínimo, a razoabilidade física da definição que utilizada.

Finalizaremos a seção sobre o potencial de espalhamento discutindo os detalhes que envolvem sua aplicação num formalismo tipo Schrödinger, isto é, à luz de uma equação tipo Schrödinger e sua extensão para lidar com várias partículas. Como já dissemos, a

extensão “natural” a ser pensada para partículas de spin  $\frac{1}{2}$  não massivas é a Equação (2.97) que repetiremos aqui:

$$H_D\psi + \not{K}V(\vec{x})\psi = E\psi \quad (2.128)$$

Sendo  $H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ . Uma vez que estamos lidando com um potencial de interação entre duas partículas e que o potencial foi obtido no referencial do CM, onde o momento das duas partículas satisfaz  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ , então a expressão mais adequada seria:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{p}_1 \psi + \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{p}_2 \psi + \not{K}V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\psi &= E\psi \\ \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{p} \psi - \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{p} \psi + \not{K}V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\psi &= E\psi \end{aligned} \quad (2.129)$$

Onde

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \begin{cases} V_{\pm\mp}(r) = (1 - \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \frac{(e^2 - g^2)}{2\pi} K_0(\mu r) \\ V_{\pm\pm}(r) = (1 + \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \frac{(e^2 + g^2)}{2\pi} K_0(\mu r) \end{cases} \quad (2.130)$$

e  $r = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ .

No entanto, como já pontuado na literatura [35], o uso da Equação (2.129) leva ao problema que chamado *continuum dissolution* que, basicamente, é causado pela existência das soluções de energia negativa da equação de Dirac livre que acaba impedindo a existência de soluções normalizáveis referentes a estados ligados. Para evitar este problema, é recomendado utilizar o potencial do seguinte modo:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \Rightarrow \Lambda(1)\Lambda(2)V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\Lambda(2)\Lambda(1) \quad (2.131)$$

Sendo os  $\Lambda(i)$  operadores de projeção de energia positiva das soluções de equação de Dirac livre referente à  $i$ -ésima partícula, ou seja,  $\Lambda(i) = \frac{1}{2} (\not{K} + \frac{H_{Di}}{E})$ . No nosso caso,  $H_{Di} = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{p}_i$  e  $E = |\vec{p}|$ .

Em resumo, portanto, caso queiramos estudar adequadamente a dinâmica de duas partículas sem massa de spin  $\frac{1}{2}$  interagindo através de algum dos potenciais (2.130), a equação que deve ser utilizada é:

$$\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{p} \psi - \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{p} \psi + \Lambda(1)\Lambda(2)V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\Lambda(2)\Lambda(1)\psi = E\psi \quad (2.132)$$

A figura a seguir ilustra o comportamento da função de Bessel modificada do segundo

tipo de ordem zero  $K_0(\mu r)$  para duas situações fisicamente distintas e a comparação com o potencial logarítmico que teria sido obtido caso os fótons não fossem massivos<sup>17</sup>

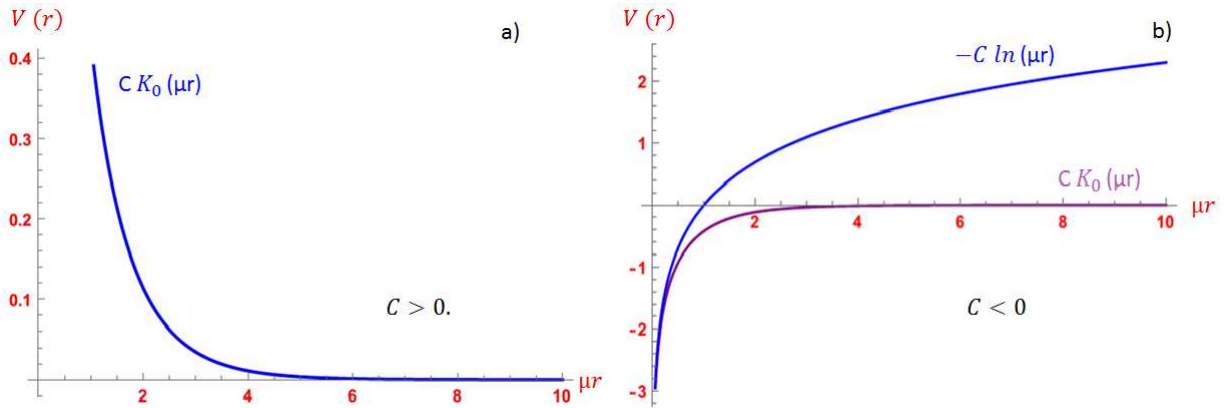


Figura 2.11: Comportamento da função de Bessel  $K_0$  considerando-a como potencial atrativo ou repulsivo e comparação com o potencial logarítmico no caso atrativo

A Figura (2.11) deixa evidente a principal diferença entre os potenciais  $K_0$  e logarítmico, que é o fato de que  $\lim_{\mu r \rightarrow \infty} \ln(\mu r) \rightarrow \infty$ , enquanto  $\lim_{\mu r \rightarrow \infty} K_0(\mu r) \rightarrow 0$ . Isto faz com que o potencial logarítmico seja um potencial confinante, isto é, assim como o potencial harmônico, só permita a existência de estados ligados, enquanto que o potencial de Bessel permite, a princípio, tanto a existência de estados ligados quanto de estados espalhados. Há ainda a interessante propriedade da função de Bessel  $K_0(\mu r)$  que no limite de pequenas distâncias, reduz-se ao logaritmo, ou seja  $\lim_{\mu r \rightarrow 0} K_0(\mu r) \propto \ln(\mu r)$ .

A possibilidade de atração entre férmions ( $e^2 < g^2$ ) e da existência de estados ligados no nosso caso, devido ao sinal distinto das cargas nos potenciais  $V_{\pm\mp}$  em (2.130), levanta a interessante questão da possibilidade da existência de estados ligados entre férmions sem massa em 2 dimensões espaciais, abrindo uma porta para uma investigação futura.

Podemos, agora, finalizar a discussão que iniciamos sobre atração e repulsão entre cargas quirais. Os potenciais (2.126) e (2.127) e a Figura (2.11) agora deixam claro aquilo que as amplitudes de espalhamento já sugeriam. Enquanto que do ponto de vista eletromagnético ( $e^2$ ) os férmions estão se repelindo, do ponto de vista da carga quiral ( $g^2$ ), se elas são iguais, eles também se repelem, mas se elas são opostas, eles se atraem. O efeito total neste último caso, atração ou repulsão, dependerá da intensidade relativa das cargas. Este mesmo resultado também foi encontrado no caso dos férmions massivos [16], mas lá os índices  $\pm\mp$  e  $\pm\pm$  nos potenciais eram referentes à polarização de spin dos férmions, o que faz sentido naquele contexto. Mas dada a relação encontrada naquele trabalho entre spin e

<sup>17</sup>O fator  $\mu$  presente no logaritmo é apenas para manter a consistência dimensional, pois o argumento do logaritmo não pode ter dimensão. Ele pode ser visto como uma simples constante aditiva no potencial  $(-C \ln(\mu))$  que não altera a física do problema.

carga quiral, a interpretação do ponto de vista da carga quiral estende-se sem complicações também para aquele caso. Apelando para uma perspectiva unificadora, muito comum em física, sugerimos a interpretação proposta neste trabalho em favor da interpretação do ponto de vista de spin, visto que este último só faz sentido, em 2 dimensões espaciais, para partículas massivas.

## Capítulo 3

# Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, investigamos alguns aspectos do seguinte modelo:

$$\Sigma = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \mu \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu + \bar{\psi}_+ \not{D} \psi_+ + \bar{\psi}_- \not{D} \psi_- \right. \\ \left. - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu a^\mu)^2 \right\}$$

O modelo contém um campo vetorial de gauge  $A_\mu$ , um campo pseudo vetorial, também de gauge,  $a_\mu$  e dois espinores  $\psi_+$  e  $\psi_-$ . A interação está representada pelo acoplamento mínimo  $\not{D}\psi_\pm = (\not{\partial} + ieA \pm ig\not{a})\psi_\pm$ . O modelo apresenta simetria de paridade e de gauge da simetria  $U(1) \times U(1)$ .

Apresentamos a dinâmica clássica do setor eletromagnético

$$\Sigma_{MCS} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \mu \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho \right\}$$

obtendo as equações de movimento

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - \mu \omega^\mu = 0$$

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} - \mu W^\mu = 0$$

e os vínculos  $\partial_\mu \omega^\mu = \partial_\mu W^\mu = 0$ , sendo  $\omega^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}$  e  $W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$ . Estas equações escritas em forma mais similar às usuais equações de Maxwell são:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \mu b = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{e} - \mu B = 0, \\ \vec{\nabla} B - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \vec{e} = 0, & \vec{\nabla} b - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} - \mu \vec{E} = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{e} + \frac{\partial b}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Onde definimos os análogos aos campos elétricos e magnéticos  $E_i = F_{0i}$ ,  $e_i = f_{0i}$ ,  $B = -F_{12}$  e  $b = -f_{12}$  e adotamos a notação  $\vec{V} = (V_1, V_2) = (V_x, V_y)$ ;  $\vec{\tilde{V}} = (V_y, -V_x)$  e  $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ .

Mostramos que estas equações fazem com que todos os campos,  $\phi_i = \vec{E}, B, \vec{e}$  ou  $b$ , satisfaçam a equação de onda massiva

$$(\square + \mu^2) \phi_i = 0$$

cujas soluções no regime estacionário são as funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo  $I_m(\mu r)$  e  $K_m(\mu r)$ , onde  $m$  é a ordem da função de Bessel.

Do setor fermiônico livre

$$\Sigma_D = \int d^3x \{ i\bar{\psi}_+ \not{\partial} \psi_+ + i\bar{\psi}_- \not{\partial} \psi_- \}$$

estudamos as soluções da equação de Dirac não massiva em 2+1 dimensões

$$i\not{\partial} \psi_{\pm} = 0$$

e verificamos que sua solução possui apenas 2 graus de liberdade, correspondentes ao par partícula e antipartícula e que estas soluções, por tratarem-se de partículas não massivas em 2 dimensões espaciais, não podem ser indexadas pelo grau de liberdade de spin.

As soluções da equação de Dirac são:

$$\psi_+(x) = \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \left\{ a_+(\vec{p})u(p)e^{-ipx} + b_+^\dagger(\vec{p})v(p)e^{+ipx} \right\}$$

$$\psi_-(x) = \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \left\{ a_-(\vec{p})u(p)e^{-ipx} + b_-^\dagger(\vec{p})v(p)e^{+ipx} \right\}$$

Sendo,

$$a_{\pm}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \int d^2\vec{x} \{ e^{ipx} u^\dagger(p) \psi_{\pm}(x) \},$$

$$b_{\pm}^\dagger(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E_p}} \int d^2\vec{x} \{ e^{-ipx} v^\dagger(p) \psi_{\pm}(x) \}$$

e

$$u(p) = \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_-}{E_p} \end{pmatrix},$$

$v(p) = \frac{-ip_+}{E_p} u(p)$  tais que  $\bar{u}(p)u(p) = \bar{v}(p)v(p) = 0$  e  $u(p)^\dagger u(p) = v(p)^\dagger v(p) = 2E_p$ . Onde  $p_\pm = p_x \pm ip_y$  e  $E_p = |\vec{p}|$ .

Mostramos que, apesar de tudo, spin é um quantidade física relevante, através da conservação do momento angular total expressa através da relação de comutação com a Hamiltoniana de Dirac  $H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ :

$$\left[ H_D, L + \frac{1}{2} \sigma_z \right] = 0$$

e que o spin, conseqüentemente é  $\frac{1}{2}$ , pois os autovalores de  $\frac{1}{2} \sigma_z$  são  $\pm \frac{1}{2}$ .

Através das regras de quantização canônica para férmions e do cálculo das cargas de Noether associadas à simetria  $U(1)_x U(1)$  presente no modelo, consolidamos a interpretação de partículas e antipartículas e calculamos suas cargas. O resultado está resumido na tabela a seguir:

| Estado                    | Carga Elétrica | Carga Quiral | Partículas                |
|---------------------------|----------------|--------------|---------------------------|
| $a_+^\dagger(p) 0\rangle$ | $-e$           | $-g$         | $e_{(+)}^-$ (fermion)     |
| $a_-^\dagger(p) 0\rangle$ | $-e$           | $+g$         | $e_{(-)}^-$ (fermion)     |
| $b_+^\dagger(p) 0\rangle$ | $+e$           | $+g$         | $e_{(+)}^+$ (antifermion) |
| $b_-^\dagger(p) 0\rangle$ | $+e$           | $-g$         | $e_{(-)}^+$ (antifermion) |

Tabela 3.1: Espectro dinâmico da teoria

Estudamos o problema de férmions acoplados com campos magnéticos e “magnético quiral” através da Hamiltoniana

$$H_{\mp} = c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A} \mp g\vec{a})$$

e obtivemos o espectro

$$E_{n,i,s} = \pm \hbar \omega_i \sqrt{n + \frac{1}{2} + s}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Onde os índices  $i$  e  $s$  correspondem à carga estatística ( $\mp$ ) e ao spin ( $\pm \frac{1}{2}$ ), respec-

tivamente. Este resultado teórico [36] sugere um desdobramento *4-fold* dos níveis de Landau similar ao que foi encontrado experimentalmente na literatura [29] para o grafeno submetido a altos campos magnéticos.

Concluimos sobre a causalidade e unitariedade do modelo a *tree level* através dos propagadores:

$$\begin{aligned}\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) &= -i \left[ \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \\ \Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) &= \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \\ \Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) &= \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \\ \Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) &= -i \left[ \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\beta}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \\ \Delta^{++}(k) &= i \frac{\not{k}}{k^2}, \\ \Delta^{--}(k) &= i \frac{\not{k}}{k^2}.\end{aligned}$$

Dos quais verificamos que os pólos são todos causais, isto é, são do tipo  $k^2 \geq 0$  e que a parte imaginária dos resíduos das amplitudes obtidas através do acoplamento corrente-propagador-corrente são todas positivas.

Calculamos as amplitudes de espalhamento entre os férmions  $\psi_+$  e  $\psi_-$  mediados pelos campos  $A_\mu$  e  $a_\mu$ , no referencial do CM, a *tree level* e obtivemos, em termos das variáveis de Mandelstam:

$$\begin{aligned}-i\mathcal{M}_{\pm\mp} &= i(e^2 - g^2) \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) - \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \\ -i\mathcal{M}_{++} &= -i(e^2 + g^2)e^{i\phi} \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) + \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \\ -i\mathcal{M}_{--} &= -i(e^2 + g^2)e^{-i\phi} \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) + \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right]\end{aligned}$$

Amplitudes estas, explicitamente, invariantes de Lorentz e compatíveis com a indistinguibilidade de férmions.

Das amplitudes de espalhamento calculamos os potenciais de espalhamento, obtendo:

$$V_{\pm\mp}(r) = (1 - \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \frac{(e^2 - g^2)}{2\pi} K_0(\mu r)$$

$$V_{\pm\pm}(r) = (1 - \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \frac{(e^2 + g^2)}{2\pi} K_0(\mu r)$$

Que já exhibe a interessante possibilidade de atração entre os férmions ( $e^2 < g^2$ ) [37].

Este trabalho abre possibilidades para a investigação mais aprofundada do eletromagnetismo gerado pelo modelo estudado e para o estudo da possibilidade de estados ligados de férmions sem massa em 2 dimensões espaciais, sendo estas, poranto, nossas perspectivas futuras. Um outro aspecto importante no que diz respeito à consistência física do modelo e que ainda precisa-se analisar é a sua renormalizabilidade, pois como dissemos, a presença dos férmions não massivos leva à sérias divergências, conhecidas como divergências infravermelhas, que precisam ser tratadas adequadamente, através do método BPHZL [38], por exemplo.

# Apêndice A

## Eletromagnetismo do Modelo

### A.1 Equação de onda massiva

Mostremos que as equações

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \mu b = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{e} - \mu B = 0, \\ \vec{\nabla} B - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \vec{e} = 0, & \vec{\nabla} b - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} - \mu \vec{E} = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{e} + \frac{\partial b}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

levam à equação de movimento

$$(\square + \mu^2) \phi_i = 0 ,$$

onde,  $\phi_i = \vec{E}, B, \vec{e}$  ou  $b$ .

Façamos primeiro para  $B$ .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Na notação que estamos utilizando, se  $\vec{V}$  é um vetor do tipo  $(V_x, V_y)$ , então  $\vec{\tilde{V}}$  denota o vetor "transformado"  $(V_y, -V_x)$ , portanto se "transformarmos" duas vezes seguidas, teremos  $\vec{\tilde{\tilde{V}}} = (-V_x, -V_y) = -\vec{V}$ . Com isso em mente, temos que

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} B - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \vec{e} &= 0 \\
 -\vec{\nabla} B - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{e} &= 0 \\
 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} B + \mu \vec{e}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Substituindo (A.2) em (A.1), obtemos

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla} B + \mu \vec{e} \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \nabla^2 B + \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{e} &= 0
 \end{aligned}$$

Por fim, usando que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{e} - \mu B = 0$ , teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \nabla^2 B + \mu(\mu B) &= 0 \\
 (\square + \mu^2) B &= 0
 \end{aligned}$$

Vejamos agora para o campo  $\vec{E}$ :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} B - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \vec{e} &= 0 \\
 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{\nabla} B - \mu \vec{e} \\
 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} B - \mu \vec{e}) \\
 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{\nabla} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) - \mu \left( \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Mas sabemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \tag{A.4}$$

$$\vec{\nabla} b - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} - \mu \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \vec{\nabla} b - \mu \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = -\vec{\nabla} b + \mu \vec{E} \tag{A.5}$$

Então, substituindo (A.4) e (A.5) em (A.3), temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{\nabla} \left( -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \mu \left( -\vec{\nabla} b + \mu \vec{E} \right) \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2 \vec{E} &= -\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) + \mu \vec{\nabla} b\end{aligned}$$

Mas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \mu b = 0 \Rightarrow \mu \vec{\nabla} b = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

então

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right).$$

Para deixar este resultado explicitamente linear em  $\vec{E}$ , notemos que para quaisquer dois vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  é verdade que  $\vec{V} \cdot \vec{W} = -\vec{V} \cdot \vec{W}$ . Então, podemos reescrever a última expressão da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right). \quad (\text{A.6})$$

Resta apenas notar que o operador ao lado direito da igualdade é o laplaciano. De fato,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right), -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right), \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right), +\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \right).\end{aligned}$$

Agora, por simples inspeção, notamos que:

$$\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) = \nabla^2 \vec{E} \quad (\text{A.7})$$

Portanto, a Equação (A.6) é a equação que desejávamos, a saber:

$$(\square + \mu^2) \vec{E} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Como as equações de movimento são idênticas para os campos  $\vec{e}$  e  $b$ , os resultados

obtidos estendem-se imediatamente também para estes campos.

## Apêndice B

### A equação de Dirac não massiva

#### B.1 Normalização dos espinores $u(\mathbf{p})$ e $v(\mathbf{p})$

Neste apêndice, mostraremos que os espinores  $u(p)$  e  $v(p)$ , associados à solução da equação de Dirac não massiva, satisfazem  $\bar{u}(p)u(p) = \bar{v}(p)v(p) = 0$  independentemente do fator de normalização.

É instrutivo tratarmos do caso massivo e no fim tomarmos o parâmetro de massa como sendo nulo, tomando-se o cuidado de não tirarmos nenhuma conclusão assumindo, implicitamente ou não, que a massa seja necessariamente diferente de zero.

Como dissemos, em duas dimensões espaciais, temos duas equações de Dirac:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi_+ = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$(i\cancel{\partial} + m)\psi_- = 0 \quad (\text{B.2})$$

Os diferentes índices + ou -, no caso massivo, indicam a polarização de spin avaliada no referencial de repouso, isto é,  $\psi_+$  tem spin  $\frac{1}{2}$  e  $\psi_-$  tem spin  $-\frac{1}{2}$ .

Atuando com  $(i\cancel{\partial} + m)$  em B.1 e com  $(i\cancel{\partial} - m)$  em B.2, temos que:

$$(\square + m^2)\psi_+ = (\square + m^2)\psi_- = 0 \quad (\text{B.3})$$

Portanto, admitem soluções do tipo onda plana:

$$\psi_{+,p}(x) = u_+(p)e^{-ipx} + v_+(p)e^{ipx} \quad (\text{B.4})$$

$$\psi_{-,p}(x) = u_-(p)e^{-ipx} + v_-(p)e^{ipx} \quad (\text{B.5})$$

Onde  $p^\mu$  satisfaz  $p^\mu p_\mu = p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ .

Em termos dos espinores  $u_\pm(p)$  e  $v_\pm(p)$ , as Equações B.1 e B.2 implicam em:

$$(\not{p} - m)u_+(p)e^{-ipx} + (-\not{p} - m)v_+(p)e^{ipx} = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$(\not{p} + m)u_-(p)e^{-ipx} + (-\not{p} + m)v_-(p)e^{ipx} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Como as soluções são linearmente independentes e devem valer para todo ponto  $x^\mu$  do espaçotempo, teremos:

$$(\not{p} - m)u_+(p) = (\not{p} - m)v_-(p) = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$(\not{p} + m)v_+(p) = (\not{p} + m)u_-(p) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Que existem soluções não nulas para estas equações é garantido pelo fato de que a imposição  $\det(\not{p} - m) = \det(\not{p} + m) = 0$  implica, simplesmente, na relação  $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$  que já assumimos para as soluções de onda plana.

Como dos 4 espinores, apenas 2 satisfazem equações distintas, podemos sem perda de generalidade estudar apenas as soluções  $u_+(p)$  e  $v_+(p)$ .

Escolhendo a representação das matrizes gama  $\gamma^\mu = (\sigma_z, -i\sigma_x, i\sigma_y)$ , obteremos as soluções:

$$u_+(p) = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_-}{E_p + m} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$v_+(p) = b \begin{pmatrix} \frac{-ip_+}{E_p + m} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Onde  $p_\pm = p_x \pm ip_y$  e  $E_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Calculemos as quantidades  $\bar{u}_+(p)u_+(p)$ ,  $\bar{v}_+(p)v_+(p)$ ,  $u^\dagger(p)u(p)$  e  $v^\dagger(p)v(p)$ .

$$\begin{aligned} u_+^\dagger(p)u_+(p) &= a^* \left( 1 \quad \frac{-ip_+}{E_p + m} \right) a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_-}{E_p + m} \end{pmatrix} \\ &= |a|^2 \left[ 1 + \frac{\vec{p}^2}{(E_p + m)^2} \right] \\ &= |a|^2 \left[ 1 + \frac{(E_p + m)(E_p - m)}{(E_p + m)^2} \right] \\ &= |a|^2 \left[ \frac{E_p + m}{E_p + m} + \frac{E_p - m}{E_p + m} \right] = |a|^2 \frac{2E_p}{E_p + m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_+^\dagger(p)v_+(p) &= b^* \begin{pmatrix} \frac{ip_-}{E_p+m} & 1 \\ & \end{pmatrix} b \begin{pmatrix} \frac{-ip_+}{E_p+m} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= |b|^2 \left[ \frac{\vec{p}^2}{(E_p+m)^2} + 1 \right] = |b|^2 \frac{2E_p}{E_p+m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_+(p)u_+(p) = u_+^\dagger(p)\gamma^0 u_+(p) &= a^* \begin{pmatrix} 1 & \frac{-ip_+}{E_p+m} \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_-}{E_p+m} \end{pmatrix} \\
 &= a^* \begin{pmatrix} 1 & \frac{-ip_+}{E_p+m} \\ & \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-ip_-}{E_p+m} \end{pmatrix} \\
 &= |a|^2 \left[ 1 - \frac{\vec{p}^2}{(E_p+m)^2} \right] \\
 &= |a|^2 \left[ 1 - \frac{(E_p+m)(E_p-m)}{(E_p+m)^2} \right] \\
 &= |a|^2 \left[ \frac{E_p+m}{E_p+m} - \frac{E_p-m}{E_p+m} \right] = |a|^2 \frac{2m}{E_p+m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_+(p)v_+(p) = v_+^\dagger(p)\gamma^0 v_+(p) &= b^* \begin{pmatrix} \frac{ip_-}{E_p+m} & 1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} b \begin{pmatrix} \frac{-ip_+}{E_p+m} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= b^* \begin{pmatrix} \frac{ip_-}{E_p+m} & 1 \\ & \end{pmatrix} b \begin{pmatrix} \frac{-ip_+}{E_p+m} \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= |b|^2 \left[ \frac{\vec{p}^2}{(E_p+m)^2} - 1 \right] \\
 &= -|b|^2 \left[ 1 - \frac{\vec{p}^2}{(E_p+m)^2} \right] = -|b|^2 \frac{2m}{E_p+m}
 \end{aligned}$$

Note que podemos tomar  $m = 0$  em qualquer momento de nossos cálculos sem comprometer nenhum resultado obtido. A única diferença está no fato de que se  $m = 0$ , então todos os espinores satisfarão a mesma equação ( $\not{p}u_\pm(p) = \not{p}v_\pm(p) = 0$ ), em vez de termos duas equações distintas, mas isto não compromete as soluções obtidas, no sentido de que ainda podemos tomar  $m = 0$  impunemente.

Tomando  $m = 0$ , nas normalizações calculadas, obtemos os resultados que procurávamos:  $\bar{u}_+(p)u_+(p) = \bar{v}_+(p)v_+(p) = 0$ ,  $u_+^\dagger(p)u_+(p) = 2|a|^2$  e  $v_+^\dagger(p)v_+(p) = 2|b|^2$ . Os resultados para os espinores  $u_-(p)$  e  $v_-(p)$  podem ser obtidos simplesmente fazendo  $u_+(p) \rightarrow v_-(p)$  e  $v_+(p) \rightarrow u_-(p)$ .

Note que, o "problema" de  $\bar{u}_+(p)u_+(p) = \bar{v}_+(p)v_+(p) = 0$  pode ser evitado se, desde o princípio, tomarmos  $a = b \propto \frac{1}{2m}$ , por exemplo; entretanto este caminho leva a fatores de

normalização singulares caso estejamos abertos à possibilidade  $m = 0$ , o que pode levar à complicações desnecessárias; os próprios espinores divergiriam se  $m = 0$ , nesse caso. Visto de outra forma, quando dissemos que  $\bar{u}_+(p)u_+(p) = \bar{v}_+(p)v_+(p) = 0$  quando  $m = 0$ , estamos assumindo implicitamente que os fatores de normalização são funções regulares do parâmetro de massa.

# Apêndice C

## O espalhamento

### C.1 Cálculo das amplitudes de espalhamento

Como vimos, as amplitudes são dadas por:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{\pm\mp} &= i(e^2 - g^2) \left[ \left( \frac{\bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_1^2 - \mu^2} \right) - \left( \frac{\bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_2^2 - \mu^2} \right) \right] \\
 -i\mathcal{M}_{++} &= i(e^2 + g^2) \left[ \left( \frac{\bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_\mu u_+(p_2)}{k_1^2 - \mu^2} \right) - \left( \frac{\bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_\mu u_+(p_2)}{k_2^2 - \mu^2} \right) \right] \\
 -i\mathcal{M}_{--} &= i(e^2 + g^2) \left[ \left( \frac{\bar{u}_-(p'_1)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_1^2 - \mu^2} \right) - \left( \frac{\bar{u}_-(p'_2)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2)}{k_2^2 - \mu^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Para calcular as amplitudes, necessitaremos, portanto, obter as quantidades:

$$\begin{aligned}
 &\bar{u}_\pm(p'_1)\gamma^\mu u_\pm(p_1) \\
 &\bar{u}_\pm(p'_2)\gamma^\mu u_\pm(p_2) \\
 &\bar{u}_\pm(p'_2)\gamma^\mu u_\pm(p_1) \\
 &\bar{u}_\pm(p'_1)\gamma^\mu u_\pm(p_2)
 \end{aligned}$$

Lembrando que estamos trabalhando com o referencial do CM, onde:

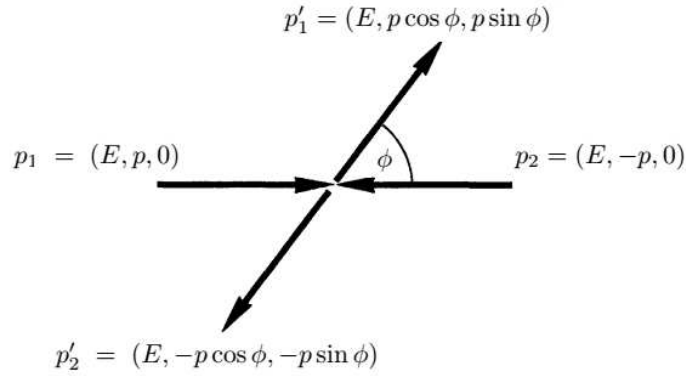


Figura C.1: Espalhamento no referencial do CM.

Para ganharmos um pouco em generalidade, trabalharemos também com os espinores como sendo soluções das equações de Dirac massivas (Seção B.1) e tomaremos  $m = 0$  quando realmente necessário. Usaremos, portanto, os espinores:

$$u_+(p) = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_-}{E_p+m} \end{pmatrix}$$

$$u_-(p) = a \begin{pmatrix} \frac{-ip_+}{E_p+m} \\ 1 \end{pmatrix}$$

E deixaremos, por enquanto, os fatores de normalização ( $a$ ) indeterminados, a menos da fixação de que são iguais para os espinores  $u_+(p)$  e  $u_-(p)$ .

Em termos dos momenta do referencial do CM, teremos:

$$u_+(p_1) = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_+(p_2) = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-ip}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_+(p'_1) = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ipe^{-i\phi}}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_+(p'_2) = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-ipe^{-i\phi}}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$u_-(p_1) = a \begin{pmatrix} \frac{-ip}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_-(p_2) = a \begin{pmatrix} \frac{ip}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_-(p'_1) = a \begin{pmatrix} \frac{-ipe^{i\phi}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_-(p'_2) = a \begin{pmatrix} \frac{ipe^{i\phi}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Faremos uso da representação  $\gamma^\mu = (\sigma_x, -i\sigma_x, i\sigma_y)$ , lembrando que:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Também faremos uso da propriedade satisfeita pelas matrizes gama 2+1 dimensões :

$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} \mathbb{1} + i\epsilon^{\mu\nu\rho} \eta_{\rho\sigma} \gamma^\sigma$ . Teremos, então:

$$\begin{aligned} \bar{u}_+(p'_1)\gamma^0 u_+(p_1) &= u_+^\dagger(p'_1)u(p_1) = |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{-ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{ip}{E+m} & \end{pmatrix} \\ &= |a|^2 \left[ 1 + \frac{p^2}{(E+m)^2} e^{i\phi} \right] = \frac{|a|^2}{(E+m)} \left[ (E+m) + \frac{p^2}{E+m} e^{i\phi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_+(p'_2)\gamma^0 u_+(p_2) &= u_+^\dagger(p'_2)u(p_2) = |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{-ip}{E+m} & \end{pmatrix} \\ &= |a|^2 \left[ 1 + \frac{p^2}{(E+m)^2} e^{i\phi} \right] = \frac{|a|^2}{(E+m)} \left[ (E+m) + \frac{p^2}{E+m} e^{i\phi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_+(p'_1)\gamma^1 u_+(p_1) &= u_+(p'_1)^\dagger \overbrace{\gamma^0 \gamma^1}^{-i\gamma^2} u(p_1) = |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{-ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{ip}{E+m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip}{E+m} \end{pmatrix} \\ &= |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{-ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{ip}{E+m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \\ i \end{pmatrix} = |a|^2 \left[ \frac{p}{E+m} + \frac{p}{E+m} e^{i\phi} \right] = \frac{|a|^2}{(E+m)} p (1 + e^{i\phi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_+(p'_2)\gamma^1 u_+(p_2) &= u_+(p'_2)^\dagger \overbrace{\gamma^0 \gamma^1}^{-i\gamma^2} u(p_2) = |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{-ip}{E+m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-ip}{E+m} \end{pmatrix} \\ &= |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{-ip}{E+m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-p}{E+m} \\ i \end{pmatrix} = |a|^2 \left[ \frac{-p}{E+m} + \frac{-p}{E+m} e^{i\phi} \right] = -\frac{|a|^2}{(E+m)} p (1 + e^{i\phi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_+(p'_1)\gamma^2 u_+(p_1) &= u_+(p'_1)^\dagger \overbrace{\gamma^0 \gamma^2}^{i\gamma^1} u(p_1) = |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{-ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{ip}{E+m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip}{E+m} \end{pmatrix} \\ &= |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{-ipe^{i\phi}}{E+m} \\ \frac{ip}{E+m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ip}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} = |a|^2 \left[ \frac{ip}{E+m} + \frac{-ip}{E+m} e^{i\phi} \right] = \frac{|a|^2}{(E+m)} ip (1 - e^{i\phi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_+(p'_2)\gamma^2 u_+(p_2) &= u_+(p'_2)^\dagger \gamma^0 \gamma^2 u_+(p_2) = |a|^2 \left( 1 \quad \frac{ipe^{i\phi}}{E+m} \right) \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{i\gamma^1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-ip}{E+m} \end{pmatrix} \\
 &= |a|^2 \left( 1 \quad \frac{ipe^{i\phi}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} \frac{-ip}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} = |a|^2 \left[ \frac{-ip}{E+m} + \frac{ip}{E+m} e^{i\phi} \right] = -\frac{|a|^2}{(E+m)} ip (1 - e^{i\phi})
 \end{aligned}$$

Felizmente, não precisaremos repetir os mesmos cálculos para os espinores  $u_-(p)$ . Para isso, notemos primeiramente que  $u_-(p) = i\gamma^1 u_+^*(p)$ , onde o asterisco denota conjugação complexa. Notemos também que, na representação que estamos utilizando,  $\gamma^{0*} = \gamma^0$ ,  $\gamma^{1*} = -\gamma^1$  e  $\gamma^{2*} = \gamma^2$ , o que pode ser resumido em  $\gamma^{\mu*} = \gamma^1 \gamma^\mu \gamma^1$ . Por fim, usaremos as propriedades satisfeitas pelas matrizes gama independentemente da representação e que, na realidade, as definem, a saber:  $\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \mathbb{K}$  e  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_-(p')\gamma^\mu u_-(p) &= \overline{i\gamma^1 u_+^*(p')} \gamma^\mu i\gamma^1 u_+^*(p) \\
 &= (i\gamma^1 u_+^*(p'))^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu i\gamma^1 u_+^*(p) \\
 &= u_+^{*\dagger}(p') \gamma^{1\dagger} i^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu i\gamma^1 u_+^*(p) \\
 &= u_+^{*\dagger}(p') (-\gamma^1) (-i) \gamma^0 \gamma^\mu i\gamma^1 u_+^*(p) \\
 &= -u_+^{*\dagger}(p') \gamma^1 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^1 u_+^*(p) \\
 &= u_+^{*\dagger}(p') \gamma^0 \gamma^1 \gamma^\mu \gamma^1 u_+^*(p) \\
 &= u_+^{*\dagger}(p') \gamma^0 \gamma^{\mu*} u_+^*(p) \\
 &= u_+^{*\dagger}(p') \gamma^{0*} \gamma^{\mu*} u_+^*(p) \\
 &= \bar{u}_+^*(p') \gamma^{\mu*} u_+^*(p) \\
 &= (\bar{u}_+(p') \gamma^\mu u_+(p))^*
 \end{aligned}$$

Ou seja, os termos de corrente  $\bar{u}_-(p')\gamma^\mu u_-(p)$  são simplesmente os complexos conjugados de  $\bar{u}_+(p')\gamma^\mu u_+(p)$ .

Resumindo nossos resultados:

$$\bar{u}_\pm(p'_1)\gamma^\mu u_\pm(p_1) = \frac{|a|^2}{E+m} \left( E+m + \frac{p^2}{E+m} e^{\pm i\phi}, p(1+e^{\pm i\phi}), \pm ip(1-e^{\pm i\phi}) \right) \quad (\text{C.1})$$

$$\bar{u}_\pm(p'_2)\gamma^\mu u_\pm(p_2) = \frac{|a|^2}{E+m} \left( E+m + \frac{p^2}{E+m} e^{\pm i\phi}, -p(1+e^{\pm i\phi}), \mp ip(1-e^{\pm i\phi}) \right) \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{u}_{\pm}(p'_2)\gamma^{\mu}u_{\pm}(p_1) = \frac{|a|^2}{E+m} \left( E+m - \frac{p^2}{E+m}e^{\pm i\phi}, p(1-e^{\pm i\phi}), \pm ip(1+e^{\pm i\phi}) \right) \quad (\text{C.3})$$

$$\bar{u}_{\pm}(p'_1)\gamma^{\mu}u_{\pm}(p_2) = \frac{|a|^2}{E+m} \left( E+m - \frac{p^2}{E+m}e^{\pm i\phi}, -p(1-e^{\pm i\phi}), \mp ip(1-e^{\pm i\phi}) \right) \quad (\text{C.4})$$

Por fim, precisaremos calcular as contrações:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_+(p'_1)\gamma^{\mu}u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_{\mu}u_-(p_2), \quad \bar{u}_+(p'_2)\gamma^{\mu}u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_{\mu}u_-(p_2), \\ & \bar{u}_+(p'_1)\gamma^{\mu}u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_{\mu}u_+(p_2), \quad \bar{u}_+(p'_2)\gamma^{\mu}u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_{\mu}u_+(p_2), \\ & \bar{u}_-(p'_1)\gamma^{\mu}u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_{\mu}u_-(p_2), \quad \bar{u}_-(p'_2)\gamma^{\mu}u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_{\mu}u_-(p_2). \end{aligned}$$

Começemos por  $-i\mathcal{M}_{++}$ , com o termo do canal-t:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_+(p'_1)\gamma^{\mu}u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_{\mu}u_+(p_2) = \\ & = \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ \left( E+m + \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi} \right)^2 + p^2(1+e^{i\phi})^2 - p^2(1-e^{i\phi})^2 \right] \\ & = \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ \left( E+m + \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi} \right)^2 + p^2(1+2e^{i\phi}+e^{2i\phi}-1+2e^{i\phi}-e^{2i\phi}) \right] \quad (\text{C.5}) \\ & = \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ \left( E+m + \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi} \right)^2 + 4p^2e^{i\phi} \right] \\ & = \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 4p^2e^{i\phi} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{E+m}{p} \right) e^{-i\frac{\phi}{2}} + \left( \frac{p}{E+m} \right) e^{i\frac{\phi}{2}} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Já o termo do canal-u:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_+(p'_2)\gamma^{\mu}u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_{\mu}u_+(p_2) = \\ & = \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ \left( E+m - \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi} \right)^2 + p^2(1-e^{i\phi})^2 - p^2(1+e^{i\phi})^2 \right] \\ & = \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ \left( E+m - \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi} \right)^2 + p^2(1-2e^{i\phi}+e^{2i\phi}-1-2e^{i\phi}-e^{2i\phi}) \right] \quad (\text{C.6}) \\ & = \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ \left( E+m - \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi} \right)^2 - 4p^2e^{i\phi} \right] \\ & = - \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 4p^2e^{i\phi} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{E+m}{p} \right) e^{-i\frac{\phi}{2}} - \left( \frac{p}{E+m} \right) e^{i\frac{\phi}{2}} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Agora, para  $-i\mathcal{M}_{+-}$ . Do canal-t:

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2) = \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ \left(E+m + \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi}\right) \left(E+m + \frac{p^2}{E+m}e^{-i\phi}\right) + p^2(1+e^{i\phi})(1+e^{-i\phi}) + \right. \\
 & \left. + p^2(1-e^{i\phi})(1-e^{-i\phi}) \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 + p^2(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + \frac{p^4}{(E+m)^2} + \right. \\
 & \left. + p^2(1+e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 1 + 1 - e^{i\phi} - e^{-i\phi} + 1) \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 + 2p^2 \cos \phi + \frac{p^4}{(E+m)^2} + 4p^2 \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 + 2p^2(1 + \cos \phi) + \frac{p^4}{(E+m)^2} + 2p^2 \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 + 4p^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} + \frac{p^4}{(E+m)^2} + 2p^2 \right]
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

E o termo do canal-u:

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2) = \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ \left(E+m - \frac{p^2}{E+m}e^{i\phi}\right) \left(E+m - \frac{p^2}{E+m}e^{-i\phi}\right) + p^2(1-e^{i\phi})(1-e^{-i\phi}) \right. \\
 & \left. + p^2(1+e^{i\phi})(1+e^{-i\phi}) \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 - p^2(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + \frac{p^4}{(E+m)^2} + \right. \\
 & \left. + p^2(1-e^{i\phi} - e^{-i\phi} + 1 + 1 + e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 1) \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 - 2p^2 \cos \phi + \frac{p^4}{(E+m)^2} + 4p^2 \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 + 2p^2(1 - \cos \phi) + \frac{p^4}{(E+m)^2} + 2p^2 \right] \\
 & = \left(\frac{|a|^2}{E+m}\right)^2 \left[ (E+m)^2 + 4p^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{p^4}{(E+m)^2} + 2p^2 \right]
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Não precisamos calcular os outros termos, pois:

$$\begin{aligned}
 (\bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_\mu u_+(p_2))^* &= \bar{u}_-(p'_1)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2) \\
 (\bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_\mu u_+(p_2))^* &= \bar{u}_-(p'_2)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2) \\
 (\bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2))^* &= \bar{u}_-(p'_1)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_\mu u_+(p_2) \\
 (\bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2))^* &= \bar{u}_-(p'_2)\gamma^\mu u_-(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_\mu u_+(p_2)
 \end{aligned}$$

Como (C.7) e (C.8) são necessariamente reais, vemos que a permutação dos sinais  $\pm$  dos espinores nos espalhamentos  $\mathcal{M}_{\pm\mp}$  não alteram o resultado, como mencionado em 2.4.1.

Antes de irmos diretamente para as amplitudes, vamos simplificar um pouco mais as expressões e colocá-las numa forma mais conveniente. Note que:

$$\begin{aligned}
 \left[ \left( \frac{E+m}{p} \right) e^{-i\frac{\phi}{2}} + \left( \frac{p}{E+m} \right) e^{i\frac{\phi}{2}} \right] &= \left( \frac{E+m}{p} \right) \left[ e^{-i\frac{\phi}{2}} + \frac{p^2}{(E+m)^2} e^{i\frac{\phi}{2}} \right] \\
 &= \left( \frac{E+m}{p} \right) \left[ \left( \frac{E+m}{E+m} \right) e^{-i\frac{\phi}{2}} + \frac{(E+m)(E-m)}{(E+m)^2} e^{i\frac{\phi}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{p} \left[ (E+m) e^{-i\frac{\phi}{2}} + (E-m) e^{i\frac{\phi}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{p} \left[ E \left( e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}} \right) + m \left( e^{-i\frac{\phi}{2}} - e^{i\frac{\phi}{2}} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{p} \left[ E \cos \frac{\phi}{2} - im \sin \frac{\phi}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \left( \frac{E+m}{p} \right) e^{-i\frac{\phi}{2}} - \left( \frac{p}{E+m} \right) e^{i\frac{\phi}{2}} \right] &= \left( \frac{E+m}{p} \right) \left[ e^{-i\frac{\phi}{2}} - \frac{p^2}{(E+m)^2} e^{i\frac{\phi}{2}} \right] \\
 &= \left( \frac{E+m}{p} \right) \left[ \left( \frac{E+m}{E+m} \right) e^{-i\frac{\phi}{2}} - \frac{(E+m)(E-m)}{(E+m)^2} e^{i\frac{\phi}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{p} \left[ (E+m) e^{-i\frac{\phi}{2}} - (E-m) e^{i\frac{\phi}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{p} \left[ m \left( e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}} \right) + E \left( e^{-i\frac{\phi}{2}} - e^{i\frac{\phi}{2}} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{p} \left[ m \cos \frac{\phi}{2} - iE \sin \frac{\phi}{2} \right] \\
 &= -\frac{2i}{p} \left[ E \sin \frac{\phi}{2} + im \cos \frac{\phi}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ (E+m)^2 + \frac{p^4}{(E+m)^2} + 2p^2 \right] &= \left[ (E+m)^2 + \frac{(E-m)^2(E+m)^2}{(E+m)^2} + 2(E^2 - m^2) \right] \\
 &= \left[ (E+m)^2 + (E-m)^2 + 2(E^2 - m^2) \right] \\
 &= \left[ E^2 + 2Em + m^2 + E^2 - 2Em + m^2 + 2E^2 - 2m^2 \right] \\
 &= 4E^2 \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

Teremos, então:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_\mu u_+(p_2) &= \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 e^{i\phi} \left\{ 4p^2 + 4 \left( E \cos \frac{\phi}{2} - im \sin \frac{\phi}{2} \right)^2 \right\} \\
 \bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_\mu u_+(p_2) &= - \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 e^{i\phi} \left\{ 4p^2 + 4 \left( E \sin \frac{\phi}{2} + im \cos \frac{\phi}{2} \right)^2 \right\} \\
 \bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2) &= \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ 4E^2 + 4p^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \right] \\
 \bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2) &= \left( \frac{|a|^2}{E+m} \right)^2 \left[ 4E^2 + 4p^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Da definição das variáveis de Mandelstam, temos:

$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \\
 t &= (p_1 - p'_1)^2 = -2p^2(1 - \cos \phi) = -4p^2 \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right), \\
 u &= (p_1 - p'_2)^2 = -2p^2(1 + \cos \phi) = -4p^2 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right),
 \end{aligned}$$

Desta forma, fica clara a conveniência da forma que deixamos nossos resultados. Outra razão para a conveniência dos resultados é que as expressões obtidas são válidas quer os férmions sejam massivos ou não e podemos tomar  $m = 0$  sem maiores problemas. É o que faremos a seguir. Lembrando que, neste caso,  $E^2 = p^2$  e que usaremos a normalização  $a = \sqrt{E} = \sqrt{|p|}$ . Teremos, por fim:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_2)\gamma_\mu u_+(p_2) &= e^{i\phi} (s - u) \\
 \bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_+(p'_1)\gamma_\mu u_+(p_2) &= -e^{i\phi} (s - t) \\
 \bar{u}_+(p'_1)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_2)\gamma_\mu u_-(p_2) &= (s - u) \\
 \bar{u}_+(p'_2)\gamma^\mu u_+(p_1)\bar{u}_-(p'_1)\gamma_\mu u_-(p_2) &= (s - t)
 \end{aligned}$$

E como  $k_1^2 = (p_1 - p'_1)^2 = t$  e  $k_2^2 = (p_1 - p'_2)^2 = u$ , obtemos finalmente as amplitudes de espalhamento na forma desejada:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{\pm\mp} &= i(e^2 - g^2) \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) - \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \\ -i\mathcal{M}_{++} &= -i(e^2 + g^2)e^{i\phi} \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) + \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \\ -i\mathcal{M}_{--} &= -i(e^2 + g^2)e^{-i\phi} \left[ \left( \frac{s-u}{t-\mu^2} \right) + \left( \frac{s-t}{u-\mu^2} \right) \right] \end{aligned}$$

# Bibliografia

- [1] W. Siegel, “Superfields in higher-dimensional spacetime,” *Phys. Lett. B*, vol. 80, pp. 220 – 223, Jan 1979.
- [2] S. Jackiw, R.; T empleton, “How super-renormalizable interactions cure their infrared divergences,” *Phys. Rev. D*, vol. 23, pp. 2291 – 2304, May 1981.
- [3] J. Schonfeld, “A mass term for three-dimensional gauge fields,” *Nucl. Phys. B*, vol. 185, pp. 157 – 171, Jul 1981.
- [4] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Topologically massive gauge theories,” *Annals of Physics*, vol. 140, no. 2, pp. 372 – 411, 1982.
- [5] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, “Dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in 2+1 dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 52, pp. 4718–4735, Oct 1995.
- [6] H. B. Jr, O. M. D. Cima, M. M. F. Jr, and J. A. Helayël-Neto, “Electron–electron bound states in parity-preserving  $QED_3$ ,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 29, no. 7, p. 1431, 2003.
- [7] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, pp. 494–497, Aug 1980.
- [8] R. B. Laughlin, “Quantized Hall conductivity in two dimensions,” *Phys. Rev. B*, vol. 23, pp. 5632–5633, May 1981.
- [9] V. P. Gusynin and S. G. Sharapov, “Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 146801, Sep 2005.
- [10] M. Katsnelson and K. Novoselov, “Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics,” *Solid State Communications*, vol. 143, no. 1, pp. 3 – 13, 2007. Exploring graphene.
- [11] I. V. Fialkovsky and D. V. Vassilevich, “Quantum Field Theory in Graphene,” *Int. J. Mod. Phys*, vol. 14, pp. 88–99, Jul 2012.

- [12] V. Gusynin, “Graphene and quantum electrodynamics,” *Voprosy atomnoj nauki i tehniki = Pytannja atomnoï nauky i tehniky = Problems of atomic science and technology*, vol. 3 (85), pp. 29 – 34, 06 2013.
- [13] K. A. Bednorz, J. G. and Müller, “Possible high-Tc superconductivity in the Ba-La-Cu-O system,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 64, pp. 189–193, Jun 1986.
- [14] Z.-G. Chen, L. Wang, Y. Song, X. Lu, H. Luo, C. Zhang, P. Dai, Z. Yin, K. Haule, and G. Kotliar, “Two-Dimensional Massless Dirac Fermions in Antiferromagnetic  $AFe_2As_2$  ( $A = Ba, Sr$ ),” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, p. 096401, Aug 2017.
- [15] O. M. Del Cima and E. S. Miranda, “Electron-polaron—electron-polaron bound states in mass-gap graphene-like planar quantum electrodynamics: s-wave bipolarons,” *The European Physical Journal B*, vol. 91, p. 212, Oct 2018.
- [16] E. S. Miranda, “Potencial atrativo elétron-elétron na Maxwell-Chern-Simons  $QED_3$  paridade invariante,” Master’s thesis, Universidade Federal de Viçosa, 2016.
- [17] J. D. Lykken, J. Sonnenschein, and N. Weiss, “Anyonic superconductivity,” *Phys. Rev. D*, vol. 42, pp. 2161–2165, Sep 1990.
- [18] B. Binengar, “Relativistic field theories in three dimensions,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 23, no. 8, pp. 1511–1517, 1982.
- [19] S. Deser and R. Jackiw, “Statistics without spin. Massless  $d=3$  systems,” *Physics Letters B*, vol. 263, no. 3, pp. 431 – 436, 1991.
- [20] J. Sucher, “What is the Force Between Electrons?,” vol. 30 of *Advances in Quantum Chemistry*, pp. 433 – 443, Academic Press, 1998.
- [21] J. Sucher, “The Concept of potential in quantum field theory,” in *Proceedings, Quantum Systems: New Trends and Methods (QS 94): Minsk, Belarus, Russia, May 23-29, 1994*.
- [22] J. Sucher, “Foundations of the relativistic theory of many-electron atoms,” *Phys. Rev. A*, vol. 22, pp. 348–362, Aug 1980.
- [23] G. Feinberg and J. Sucher, “Two-photon-exchange force between charged systems: Spinless particles,” *Phys. Rev. D*, vol. 38, pp. 3763–3798, Dec 1988.
- [24] J. Sucher, “Potentials from field theory: Non-uniqueness, Gauge dependence and all that,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 189, no. 1, pp. 337–370, 1989.

- [25] O. Piguet and S. Sorella, *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies*. Lecture Notes in Physics Monographs, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [26] K. Sibold, “Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann renormalization scheme,” *Scholarpedia*, vol. 5, no. 5, p. 7306, 2010. revision #137544.
- [27] C.-Y. Lee, “Massive fermions in 2+1 dimensions,” 2013.
- [28] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 4 ed., 1982.
- [29] Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small, M. S. Purewal, Y.-W. Tan, M. Fazlollahi, J. D. Chudow, J. A. Jaszczak, H. L. Stormer, and P. Kim, “Landau-Level Splitting in Graphene in High Magnetic Fields,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 136806, Apr 2006.
- [30] P. van Nieuwenhuizen, “On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation,” *Nuclear Physics B*, vol. 60, pp. 478 – 492, 1973.
- [31] F. Nunes and G. Pires, “Extending the barnes-rivers operators to  $d = 3$  topological gravity,” *Physics Letters B*, vol. 301, no. 4, pp. 339 – 344, 1993.
- [32] C. Pinheiro, G. O. Pires, and F. A. B. Rabelo de Carvalho, “Some Quantum Aspects of  $D=3$  Space-Time Massive Gravity,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 27, pp. 14–19, Mar. 1997.
- [33] J. J. Sakurai, *Advanced quantum mechanics*. Addison Wesley, 1967.
- [34] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 ed., 2015.
- [35] J. Sucher, “Continuum Dissolution and the Relativistic Many-Body Problem: A Solvable Model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 1033–1035, Sep 1985.
- [36] O. M. Del Cima and W. B. Lima, “A  $QED_3$  model leading to a  $4$ -fold splitting of the landau levels for massless fermions,” em fase de redação.
- [37] O. M. Del Cima and W. B. Lima, “Electron-polaron - electron-polaron attractive interaction in gapless graphene-like planar quantum electrodynamics,” em fase de redação.
- [38] O. M. Del Cima, D. H. T. Franco, O. Piguet, and M. Schweda, “No parity anomaly in massless  $QED_3$ : A BPHZL approach,” *Physics Letters B*, vol. 680, no. 1, pp. 108 – 110, 2009.