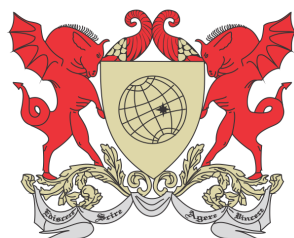


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



POLLYANNA DÉBORA DA SILVA BATISTA

GEOMETRIA HIPERBÓLICA E APLICAÇÕES

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2019

POLLYANNA DÉBORA DA SILVA BATISTA

GEOMETRIA HIPERBÓLICA E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2019

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

B333g
2019

Batista, Pollyanna Débora da Silva, 1986-
Geometria hiperbólica e aplicações : . / Pollyanna Débora da Silva Batista. – Florestal, MG, 2019.
xiv, 112f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Justino Muniz Júnior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Inclui bibliografia.

1. Geometria hiperbólica. 2. Geometria. 3. Modelo de Poincaré. 4. Matemática-Educação e ensino. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

516.9

POLLYANNA DÉBORA DA SILVA BATISTA

GEOMETRIA HIPERBÓLICA E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de fevereiro de 2019.

Alexandre Alvarenga Rocha

Jane Lage Bretas

Luiz Gustavo Perona Araújo

Justino Muniz Júnior
(Orientador)

Dedicatória

Este trabalho é dedicado às dificuldades que foram superadas durante todo o meu processo de formação até aqui e, é claro, à minha linda família: meu esposo Emerson e meus filhos Sophia e João que me mostraram um lado mais completo e complexo da vida!

Dedico especialmente à minha mãe Maria Inez por seu imensurável apoio, sempre!

Agradecimentos

Realmente não foi fácil... mas quem falou que seria?

Primeiramente, agradeço à Deus por tantas bênçãos e surpresas que este período me proporcionou.

À minha mãe, Maria Inez, que me apoiou e ajudou como uma verdadeira guerreira a vida inteira, me dando exemplos de generosidade, força e fé. E me auxiliou de maneira ÚNICA com meus pequeninos e não permitiu que eu perdesse minha sanidade mental diante de tantas adversidades.

Ao meu amado esposo, Emerson Alves Batista, por tanto me incentivar e apoiar, vivenciando esse projeto de vida pessoal e profissional comigo.

Aos meus filhos, Sophia e João, por demonstrarem tanto carinho, amor e dependência a cada sorriso, manha e choro.

Ao meu orientador e professor Dr. Justino Muniz, por tamanha paciência e compreensão durante todo o processo.

A todos os meus professores do PROFMAT: Mehran Sabeti, Alexandre Rocha, Luis Felipe, Luis D'Afonseca e Elisângela, por seus ensinamentos, paciência e sensibilidade durante todo o curso.

Aos colegas do PROFMAT: Alcione, Beto, Emerson, Ezequiel, Félix, Guto, Magno, Joardson, Lucas, Natália, Henrique e Thiago. Obrigada por dividir comigo o carinho, as conversas, as pipocas e, é claro, por me auxiliarem enormemente neste percurso. Sem vocês tudo seria bem mais difícil do que foi.

Agradeço em especial ao secretário do PROFMAT-UFV, João Marcos, pelo imenso profissionalismo de sempre!

Aos meus irmãos, Deva, Érika, Jane e Marquinho que sempre me incentivaram e socorreram em momentos de aperto.

Aos meus pais do coração Efigênia e Nísio Bonformágio, que me deram uma base sólida de persistência e amor.

Encerro como comecei, agradecendo principalmente a Deus, por ter colocado em minha vida pessoas que me impulsionaram positivamente nos campos pessoal e profissional, aumentando minha fé, meu amor e conhecimento.

Resumo

BATISTA, Pollyanna Débora da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Geometria Hiperbólica e Aplicações**. Orientador: Justino Muniz Júnior.

Durante centenas de anos vários matemáticos se debruçaram sobre o problema de obter o postulado 5 de Euclides (ou postulado das paralelas) a partir dos demais. János Bolyai (1802-1860) e Nikolai Lobachevsky (1792-1856) descobriram, independentemente, uma nova geometria, conhecida por Geometria Hiperbólica. Nessa geometria, o postulado 5 de Euclides é falso. De fato, dados uma “reta” e um ponto fora dessa, existem infinitas “retas” passando por esse ponto que são paralelas à reta dada. Estudaremos como se deu o surgimento dessa geometria, bem como algumas propriedades específicas. Em particular, daremos atenção a certas curvas especiais (geodésicas) e sugestões de como aplicar esse conhecimento no ensino médio.

Abstract

BATISTA, Pollyanna Débora da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019. **Hyperbolic Geometry and Applications**. Adviser: Justino Muniz Júnior.

For hundreds of years mathematicians had problem of obtaining Euclid's postulate 5 (or postulate of parallels) to from the others. János Bolyai (1802-1860) and Nikolai Lobachevsky (1792-1856) discovered, independently, a new geometry, known as Hyperbolic Geometry. In this geometry Euclid's postulate 5 is false. In fact, given a "straight" and a point outside that, there are infinite "straight lines" passing through this point that are parallel to the given line. We will study how the appearance of this geometry occurred, as well as some properties. In particular, we will give attention to certain special (geodesic) curves and suggestions on how to apply this knowledge in high school.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α letra grega Alfa

β letra grega Beta

γ letra grega Gama

θ letra grega Teta

κ letra grega Kapa

λ letra grega Lambda

μ letra grega Mi

ν letra grega Ni

ξ letra grega Xi

π letra grega Pi

σ letra grega Sigma

τ letra grega Tau

χ letra grega Chi

ω letra grega Ômega

Lista de Figuras

2.1	Euclides de Alexandria	4
2.2	David Hilbert	6
3.1	Apoio para demonstração da Proposição 3.1.	9
3.2	Proposição 27 do Livro I de <i>Os Elementos</i> : Ângulos correspondentes congruentes implicam em retas paralelas.	10
3.3	Apoio para a demonstração da Proposição 27 do Livro I de <i>Os Elementos</i>	10
3.4	Proposição 28 de Euclides: Soma de colaterais internos igual a um ângulo raso implica em paralelismo	11
3.5	Busto de Ptolomeu I	13
3.6	Claudius Ptolomeu	13
3.7	Busto de Proclus Diadochus	14
3.8	Nasir al-Din al-Tusi	14
3.9	O quadrilátero utilizado por Nasir: possui os ângulos da base retos e os lados AD e BC congruentes entre si	15
3.10	John Wallis	15
3.11	Página da obra de Saccheri: <i>Euclides ab omni naevo vindicatus</i> - Euclides livre de todas as máculas	16
3.12	Página do tratado de lógica demonstrativa de Saccheri	17
3.13	O quadrilátero de Saccheri	17
3.14	Johann Heinrich Lambert	18
3.15	O quadrilátero de Lambert	18
3.16	Adrien Marie Legendre	19
3.17	Apoio para a demonstração do Primeiro Teorema de Legendre.	20
3.18	Apoio para a demonstração do Segundo Teorema de Legendre.	21
3.19	Apoio para a demonstração do Segundo Teorema de Legendre.	22
3.20	Apoio para a demonstração do Segundo Teorema de Legendre.	22
3.21	Apoio para a tentativa de demonstração do Quinto Postulado de Euclides feita por Legendre	23
3.22	Carl Friedrich Gauss.	24
3.23	Farkas Wolfgang Bolyai.	24
3.24	János Johann Bolyai.	25

3.25 Nicolai Ivanovich Lobachewsky.	26
4.1 Retas paralelas a outra passando por um ponto externo.	29
4.2 Apoio para a demonstração da quantidade infinita de paralelas a uma reta, passando por um ponto dado.	29
4.3 Apoio para a demonstração da congruência dos ângulos de paralelismo.	30
4.4 Apoio para a demonstração de que os ângulos de paralelismo são agudos.	31
4.5 Definindo paralelismo entre retas em sentido determinado na Geometria Hiperbólica.	32
4.6 Paralelismo em um sentido determinado.	33
4.7 Apoio para a demonstração do Teorema sobre retas paralelas em sentido determinado.	33
4.8 Simetria no paralelismo de retas na Geometria Hiperbólica.	34
4.9 Apoio para a demonstração do caso 1 do teorema sobre retas paralelas na mesma direção, no qual a terceira reta de mesma direção está entre duas paralelas.	34
4.10 Apoio para a demonstração do caso 2 do teorema sobre retas paralelas na mesma direção, no qual duas retas estão do mesmo lado da terceira.	35
4.11 Representação de pontos ideais.	36
4.12 Exemplos de triângulos generalizados.	37
4.13 Apoio para a demonstração do teorema referente a uma reta que adentra em um vértice do triângulo e então cortará o lado oposto.	38
4.14 Apoio para demonstração do Axioma de Pasch para triângulos generali- zados	39
4.15 Exemplos de ângulos externos em triângulos generalizados com um ou dois vértices ideais. Os triângulos generalizados com três vértices ideais não possuem ângulos externos.	39
4.16 Apoio para a demonstração da versão hiperbólica do Teorema do Ângulo Externo.	40
4.17 Apoio para a demonstração do caso Lado-ângulo de congruência de triângulos generalizados.	41
4.18 Apoio para a demonstração do caso ângulo-ângulo de congruência de triângulos generalizados.	41
4.19 Apoio para a demonstração do caso Triângulo-Isósceles de congruência de triângulos generalizados	42
4.20 Ângulo de paralelismo na Geometria Hiperbólica.	42
4.21 Ângulo de paralelismo no triângulo retângulo generalizado.	43
4.22 A função ângulo de Paralelismo é estritamente decrescente.	43
4.23 Apoio para a demonstração da Proposição 4.3	44
4.24 Apoio para a demonstração de que os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são agudos.	45
4.25 Quadrilátero de Saccheri.	45
4.26 Apoio para a demonstração de que o quadrilátero de Lambert possui um ângulo agudo.	46

4.27 Apoio para a demonstração do Teorema 4.12	46
4.28 Apoio para a demonstração do Teorema 4.12	46
4.29 Quadrilátero de Lambert.	47
4.30 Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo ordinário é menor do que dois ângulos retos.	47
4.31 Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos de um triângulo ordinário qualquer é menor do que dois ângulos retos.	48
4.32 Triângulo generalizado com dois vértices ordinários e um vértice ideal.	48
4.33 Triângulo generalizado com um vértice ordinário e dois vértices ideais.	49
4.34 Triângulo generalizado com três vértices ideais.	49
4.35 Apoio para a demonstração do primeiro caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.	50
4.36 Apoio para a demonstração do segundo caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.	50
4.37 Apoio para a demonstração do terceiro caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.	51
4.38 Apoio para a demonstração do Teorema 4.16	51
4.39 Apoio para a demonstração do Teorema 4.16.	52
4.40 Apoio para a demonstração do Teorema 4.17	53
4.41 Apoio para a demonstração do Teorema 4.18	54
4.42 Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ideal	55
4.43 Situação impossível: três mediatrizes não podem formar um triângulo generalizado	55
4.44 Apoio para a demonstração do terceiro caso do Teorema 4.18	55
4.45 Apoio para a demonstração do Teorema sobre variação da distancia das paralelas	56
4.46 Apoio para a demonstração da propriedade de variação da distância em retas paralelas.	57
4.47 Apoio para demonstrar que qualquer que seja o número positivo r dado, existe um ponto R sobre m tal que a distância deste ponto à reta n é exatamente r	57
4.48 Apoio para a demonstração da propriedade de variação da distância em retas que não se intersectam.	58
4.49 Triângulo retângulo	59
4.50 Apoio para a demonstração de relações entre lados e ângulos de um triângulo retângulo generalizado.	60
4.51 Apoio para a demonstração de equações válidas para o quadrilátero de Lambert.	61
4.52 A cada triângulo retângulo podemos associar um quadrilátero de Lambert em correspondência biunívoca.	62
4.53 Curva limite de um círculo ao fixarmos um de seus pontos e fazermos o raio crescer arbitrariamente.	63
4.54 Exemplos de pontos correspondentes em retas concorrentes, retas paralelas e retas que não se intersectam.	64

4.55	Apoio para a demonstração de que existe apenas um ponto Q de uma reta n correspondente a um ponto dado P em uma reta m paralela à n .	64
4.56	A reta b é a bissetriz generalizada do ângulo generalizado formado entre as retas m e n .	65
4.57	Apoio da demonstração que sempre existe uma bissetriz generalizada de um ângulo generalizado.	65
4.58	Apoio para a demonstração da existência de pontos correspondentes em retas paralelas.	66
4.59	Apoio para a demonstração de que pontos correspondentes em três retas paralelas não são colineares.	66
4.60	Ilustração de um horocírculo: lugar geométrico de todos os pontos correspondentes ao ponto P na família de retas paralelas em um mesmo sentido com o ponto ideal Ω em comum.	67
4.61	Apoio para a demonstração de que dois horocírculos quaisquer são congruentes.	68
4.62	Apoio para a definição de curvas equidistantes congruentes.	69
4.63	Apoio para a definição de condições de congruência entre curvas equidistantes.	69
4.64	Apoio para a definição de arcos e cordas de círculos, horocírculos e curvas equidistantes.	70
4.65	Apoio para a demonstração de condições de congruência de arcos em curvas equidistantes.	71
4.66	Apoio para a demonstração de condições de congruência de arcos em curvas equidistantes.	71
4.67	Apoio para a associação da área de um triângulo à área de um quadrilátero de Saccheri.	72
4.68	Apoio para a demonstração de que dois triângulos que possuem mesmo defeito possuem mesma área.	73
4.69	Apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos retângulos ordinários.	76
4.70	Apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras Hiperbólico.	76
4.71	Triângulo hiperbólico ordinário ABC	77
4.72	Apoio para a demonstração da Segunda versão da Lei dos cossenos Hiperbólica.	80
4.73	Medidas dos lados de triângulos hiperbólicos ordinários em termos da sub-unidades de medida	84
5.1	Henry Poincaré.	87
5.2	Dados dois pontos no interior de um disco, existe apenas uma circunferência ortogonal ao bordo do disco passando pelo pelos pontos dados.	88
5.3	Dados dois pontos no interior de um disco alinhados com seu centro, existe apenas uma reta ortogonal ao bordo do disco passando pelo seu centro.	88
5.4	Exemplos de retas hiperbólicas no modelo do disco de Poincaré.	89
5.5	Ângulo hiperbólico no modelo do disco de Poincaré.	89

5.6	Medindo distâncias no modelo do disco de Poincaré.	90
5.7	O Quinto Postulado de Euclides não é válido no modelo do disco de Poincaré.	90
5.8	Retas hiperbólicas no modelo do semiplano de Poincaré.	91
6.1	Local na página inicial do site [6] para efetuar o download do Software livre Non-Euclid.	93
6.2	Retas paralelas na Geometria Euclidiana.	94
6.3	Apoio para a construção de retas hiperbólicas.	95
6.4	Apoio 2 para a construção de retas hiperbólicas.	95
6.5	Apoio 3 para a construção de retas hiperbólicas.	95
6.6	Apoio 4 para a construção de retas hiperbólicas.	96
6.7	Apoio 5 para a construção de retas hiperbólicas.	97
6.8	Apoio 6 para a construção de retas hiperbólicas.	98
6.9	Apoio 7 para a construção de retas hiperbólicas.	99
6.10	Apoio para a construção de retas hiperbólicas.	100
6.11	Apoio 1 para a construção de triângulos hiperbólicos.	100
6.12	Apoio 3 para a construção de retas hiperbólicas.	101
6.13	Medindo ângulos hiperbólicos.	101
6.14	Medindo ângulos hiperbólicos.	102
6.15	A imagem da esquerda indica o comando de seleção de pontos e a figura da direita, dois pontos no plano hiperbólico	103
6.16	A imagem da esquerda indica o comando de construção de segmentos e a figura da direita, o segmento AB	103
6.17	A imagem da esquerda indica o comando de construção de retas perpendiculares e a figura da direita, uma reta hiperbólica perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A	104
6.18	A imagem da esquerda indica o comando de construção de segmentos e a figura da direita, o triângulo ordinário ABC formado	104
6.19	A imagem da esquerda indica o comando que possibilita visualizar todas as informações sobre as medidas dos ângulos internos, sua soma e as medidas dos lados do triângulo e a figura da direita, os valores obtidos para o triângulo ABC	105
6.20	A imagem da esquerda indica o comando para mover pontos e a figura da direita, um triângulo retângulo hiperbólico	105
6.21	A imagem da esquerda indica o comando para a construção de segmentos de tamanho específico e a figura da direita, o local no canto superior, no qual inserimos o tamanho do segmento desejado	106
6.22	A imagem da esquerda mostra um segmento AB de tamanho 4 e a figura da direita, indica o comando para traçar retas perpendiculares à uma reta dada passando por um ponto	106
6.23	A imagem da esquerda mostra uma reta perpendicular ao segmento AB passando por A e a figura da direita, indica o local para inserir o tamanho do segmento desejado	107

6.24	A imagem da esquerda mostra o triângulo retângulo ABC de catetos 3 e 4 e a figura da direita, indica o comando para medir ângulos internos e lados de um triângulo hiperbólico	107
6.25	A imagem da esquerda mostra o comando para a construção de segmentos e a figura da direita, mostra o triângulo hiperbólico ABC formado pelos segmentos AB , BC e CA	109
6.26	A imagem da esquerda mostra o comando para a construção de retas e a figura da direita, mostra o triângulo hiperbólico ABC e uma reta DE que não intersecta o triângulo	109
6.27	A imagem da esquerda mostra o comando para a reflexão de objetos e a figura a da direita, mostra dois triângulos hiperbólicos congruentes	110

Sumário

1	Introdução	1
2	Um Pouco de História	3
2.1	Euclides de Alexandria	4
2.1.1	Axiomática de Euclides	5
2.2	Axiomática de Hilbert	6
3	O Quinto Postulado	9
3.1	Quatro Importantes Proposições	9
3.2	Os Precursores	12
3.2.1	Ptolomeu	13
3.2.2	Claudius Ptolomeu	13
3.2.3	Proclus	13
3.2.4	Nasir Eddin	14
3.2.5	Wallis	15
3.2.6	Saccheri	16
3.2.7	Lambert	18
3.2.8	Adrien Marie Legendre	19
3.3	O Desenvolvimento de uma Nova Geometria	23
3.3.1	Gauss	24
3.3.2	Bolyai	24
3.3.3	Lobachewsky	26
4	Geometria Hiperbólica	28
4.1	O Quinto Postulado da Geometria Hiperbólica	28
4.2	Propriedades das retas paralelas	32
4.2.1	Pontos Ideais	35
4.3	Triângulos generalizados e suas propriedades	36
4.3.1	Congruência de Triângulos Generalizados	40
4.4	Ângulo de paralelismo	42
4.5	Quadriláteros Especiais	43
4.5.1	Quadriláteros de Saccheri	44
4.5.2	Quadriláteros de Lambert	45

4.6	Soma dos ângulos de um triângulo	47
4.7	Pontos ultra-ideais	52
4.8	Variação da distância entre retas	56
4.9	Construção de retas paralelas	58
4.10	Horocírculos e curvas equidistantes	63
4.11	Área de triângulos e polígonos quaisquer	71
4.12	Trigonometria Hiperbólica em triângulos retângulos	74
4.13	Trigonometria Hiperbólica em triângulos Quaisquer	77
4.14	A função ângulo de paralelismo revisitada	82
4.15	Comparação entre as Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana	83
5	Modelos da Geometria Hiperbólica	87
5.1	Modelos de Poincaré	87
5.1.1	Modelo do Disco de Poincaré	88
5.1.2	Modelo do Semiplano de Poincaré	91
6	Aplicações da Geometria Hiperbólica no Ensino Médio	92
6.1	Retas	92
6.1.1	Construção de retas hiperbólicas	94
6.1.2	Construção de retas paralelas a uma reta dada	97
6.2	Ângulos e Triângulos	99
6.2.1	Investigando os elementos dos triângulos hiperbólicos	99
6.2.2	Construindo um triângulo retângulo	102
6.2.3	Construindo um triângulo retângulo de catetos fixos	105
6.2.4	Visualizando a congruência de triângulos	109
7	Considerações Finais	111
	Bibliografia	112

Introdução

A descoberta das Geometrias Não Euclidianas é um capítulo fascinante da história da Matemática, que se iniciou no momento em que Euclides trouxe a público o livro *Os Elementos*, em que apresentou a Geometria Euclidiana numa forma axiomática, que se baseava numa sequência de teoremas seguido de suas respectivas demonstrações, e terminou na primeira metade do século XIX, com a publicação, em russo, de Lobachewsky no *Kasan Bulletin*, na qual era exposta uma nova versão da teoria das retas paralelas.

Nessa obra de Euclides, foram apresentados cinco teoremas que eram, para ele, aceitos como verdade absoluta e, por isso, não tinham demonstração: eram os Postulados de Euclides. Ao longo dos séculos que seguiram a publicação de *Os Elementos*, muitas foram as tentativas de se provar o Quinto Postulado, a partir dos outros quatro. Foram essas tentativas que transformaram-se, ao final, no estudo da Geometria Absoluta (de Bolyai) e permitiram o entendimento de que havia de fato toda uma família de proposições equivalentes ao Quinto Postulado, entre as quais o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo.

O estudo das três hipóteses possíveis para esta soma (igual, maior ou menor do que 180°) levou à descoberta da Geometria Hiperbólica, por Gauss, Lobachewsky e Bolyai. Nessa nova geometria, coisas incomuns até então passam a ser verdadeiras como, por exemplo, retas paralelas possuem um ponto em comum, a soma dos ângulos internos de um triângulo difere de 180° , podendo até mesmo ser nula! Ou ainda que por um ponto externo a uma reta podem passar infinitas retas paralelas à reta dada. Tanto esforço despendido redundou não apenas na descoberta da nova geometria, mas num profundo entendimento das bases sobre as quais ela e a Geometria Euclidiana se assentam.

Talvez a descoberta da nova Geometria pudesse ter sido feita em época mais remota se não existissem os preconceitos de que a Geometria Euclidiana era a única possível e de que era a Geometria do universo. Um preconceito tão forte que impediu Gauss, a figura dominante do mundo matemático na primeira metade do século XIX, de publicar os próprios achados sobre o assunto. Deste ponto de vista, a descoberta da Geometria Hiperbólica representa uma vitória contra uma concepção euclidiana do mundo.

A apresentação da Geometria Hiperbólica neste trabalho seguirá da seguinte maneira: um pouco da história que precedeu sua descoberta, com o intuito de possibilitar um entendimento maior sobre as consequências profundas do Quinto Postulado na Geometria Euclidiana. Em seguida, faremos um estudo minucioso da axiomática da Geometria Hiperbólica. Apresentaremos, ao final do capítulo 4, as versões hiperbólicas do Teorema de Pitágoras, da Lei dos Senos e duas versões para a Lei dos Cossenos. Em sequência, apresentaremos os modelos propostos para atestar a consistência da Geometria Hiperbólica. Finalizaremos com propostas de atividades para o Ensino Médio, utilizando o Software livre Non - Euclid 2007.04 , nas quais abordaremos conceitos de grande relevância e notoriamente distintos da visão euclidiana, como a noção de retas e suas intersecções, ângulos de triângulos, a soma dos ângulos internos, triângulos retângulos e suas apresentações encerrando com a construção de triângulos congruentes.

A cada construção que será realizada, o leitor terá a oportunidade de vivenciar conceitos que, de certo, irão estimular sua curiosidade e análise crítica, possibilitando-o (ao menos começar a) compreender que a geometria não é única. Na verdade, são muitas!

Um Pouco de História

As primeiras considerações feitas pelo homem em relação ao conhecimento geométrico parecem ser provenientes da necessidade de solucionar problemas práticos da comunidade, como demarcação de terras e construção de moradias que abrigassem homens, animais e alimentos.

Antes do surgimento da escrita, o homem neolítico, por meio de seus desenhos, já demonstrava preocupação com as relações espaciais, pois em seus potes, tecidos e cestas haviam exemplos de congruências e simetrias.

É conhecido que, no Antigo Egito, a demarcação das terras próximas ao Rio Nilo era feita por funcionários do faraó, denominados “esticadores de cordas”. Eles dividiam as terras em lotes de áreas iguais e as cediam aos agricultores a fim de produzir alimentos para a população.

De acordo com Eves [8], com a criação da escrita, a geometria passou a ser registrada e cada civilização antiga tinha a sua forma de fazer registros: a civilização egípcia fazia seus registros em pedras ou papiros que, devido ao clima excepcionalmente seco do Egito, resistiram ao tempo; a civilização babilônica usava barras de argila cozida, que são imperecíveis; os hindus e chineses usavam para escrever fibras de entrecascas de árvores e bambu, que são muito perecíveis. Justamente pela fragilidade desses materiais, poucos relatos da geometria dos hindus resistiram ao tempo, sendo que a maior parte do conhecimento preservado desta época se deve aos egípcios e babilônios.

Segundo Braz [5], os mais antigos registros, datam de 3.000 anos a.C. São tábuas de argila cozida do império babilônico, desenterradas na Mesopotâmia. Elas mostram que a geometria babilônica antiga estava intimamente relacionada com a mensuração prática, demonstrando ter a noção de leis e regras geométricas nas quais a indução, o ensaio, o erro e o conhecimento empírico eram instrumentos de descoberta.

Muitos dos registros matemáticos gregos originais se perderam, mas destes, muitos foram trazidos por outras culturas, possibilitando hoje, o conhecimento das contribuições geométricas desenvolvidas pelos gregos. Com eles, o ensino geométrico passou a ser fundamentado em demonstrações e deduções.

Apesar de ter sido Tales de Mileto o precursor do uso do raciocínio dedutivo nas demonstrações geométricas, o auge do desenvolvimento da geometria pela civilização

grega se deu com três geômetras gregos mais importantes da antiguidade: Euclides, Arquimedes e Apolônio.

Veremos adiante um pouco mais sobre o legado de Euclides, em seguida, introduziremos os postulados de Euclides e a reformulação feita pelo matemático alemão David Hilbert de tais postulados, conhecida como os Axiomas de Hilbert e formam a base para a dedução de todas as demais proposições da Geometria Euclidiana.

2.1 Euclides de Alexandria

De acordo com Braz [5], Euclides viveu nos séculos III e IV a.C., entre os anos de entre 325 a.C. e 265 a.C. e, por não se saber muito a respeito de sua vida, acredita-se que ele possa ter estudado na Academia de Platão, em Atenas. Há alguns pontos de convergência entre a visão platônica do conhecimento e a dele, como, por exemplo, o desinteresse em aplicações práticas.



Figura 2.1: *Euclides de Alexandria.*

Euclides de Alexandria é o autor do livro de Matemática possivelmente mais influente e bem sucedido de todos os tempos: *Os Elementos*, escrito por volta do ano 300 a.C. Essa obra era usada como texto introdutório para a matemática elementar em um importante instituto científico de Alexandria, criado por Ptolomeu I, soberano do Egito na época. Não sabemos qual parte do trabalho foi realmente feito por Euclides, porém a compilação e sistematização da obra garantem seu lugar na História.

Ao contrário da visão que muitos têm, a obra não traz um apanhado geral da geometria da época. Muitos resultados geométricos, já conhecidos, ficaram de fora, como o estudo das Cônicas. Alguns outros incluídos eram aritméticos e algébricos, não geométricos.

A obra segue um formato axiomático de raciocínio matemático que se tornou universal: uma sequência de teoremas seguido por suas respectivas demonstrações. O primeiro teorema não pode ser demonstrado, pois a demonstração dos teoremas é considerada uma sequência lógica de teoremas precedentes, que para o primeiro, não há.

Os assuntos abordados em cada um dos treze volumes de *Os Elementos*, segundo Braz [5], são:

Livro I: Fundamentos da Geometria Plana.

Livro II: Álgebra geométrica.

Livro III: Teoria da circunferência.

Livro IV: Figuras inscritas e circunscritas.

Livro V: Teoria das proporções abstratas.

Livro VI: Figuras geométricas semelhantes e proporcionais.

Livro VII: Fundamentos da teoria dos números.

Livro VIII: Sequências de números em progressão geométricas.

Livro IX: Teoria dos números.

Livro X: Classificação dos incomensuráveis.

Livro XI: Geometria dos sólidos.

Livro XII: Medição de figuras.

Livro XIII: Sólidos Regulares.

2.1.1 Axiomática de Euclides

Euclides acreditava em dez axiomas que foram divididos entre noções comuns e postulados. Em *Os Elementos*, esses axiomas são teoremas indemonstráveis que foram apresentados em dois grupos: as noções comuns e os postulados. E, de acordo com Boyer [4], página 73:

As noções comuns, hipóteses aceitáveis a todas as ciências, são

- a) Coisas iguais a uma mesma coisa também são iguais entre si.
- b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais .
- c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais uma com a outra.
- e) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

E os postulados, as hipóteses específicas da Geometria, correspondem a

Postulado 2.1 (Primeiro Postulado): Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

Postulado 2.2 (Segundo Postulado): Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma linha reta.

Postulado 2.3 (Terceiro Postulado): Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

Postulado 2.4 (Quarto Postulado): Todos os ângulos retos são iguais.

Postulado 2.5 (Quinto Postulado): É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão

os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Aceitando-se todos os postulados acima como verdade, o encadeamento lógico, aparentemente perfeito, deu origem ao primeiro e mais perene modelo para o espaço físico: a Geometria Euclidiana.

Euclides também fez uso de hipóteses não mencionadas acima, dentre as quais

- Retas são conjuntos ilimitados.
- As retas são contínuas.
- Vale o Axioma de Pasch.

Vamos lembrar o que diz o Axioma de Pasch.

Axioma 2.1 (Axioma de Pasch): Sejam A , B e C três pontos não colineares e seja m uma reta que não contém nenhum desses pontos. Se m corta o segmento AB , então ela também corta o segmento AC ou o segmento BC .

Ao escrever *Os Elementos*, Euclides introduziu os postulados um a um na ordem aqui exposta. Em toda a sua obra, 465 proposições foram deduzidas. De acordo com Braz [5], a análise do Livro I demonstra uma subdivisão, informal, em três partes. As 26 primeiras proposições referem-se à teoria elementar dos triângulos. Da proposição 27 à 34 são apresentadas a teoria das paralelas. Posteriormente, a terceira parte refere-se à noção de área de paralelogramos e triângulos culminando com o Teorema de Pitágoras.

2.2 Axiomática de Hilbert



Figura 2.2: *David Hilbert.*

O matemático David Hilbert, viveu nos séculos XIX e XX, entre os anos de 1862 e 1943. Ele publicou um trabalho muito reconhecido, intitulado “*Grundlagen der Geometrie*” (Fundamentos de Geometria), em 1899, no qual apresenta, pela primeira vez, um caráter puramente formal à geometria. A Geometria Euclidiana passa a ser embasada em um grupo de axiomas denominados, de acordo com Boyer [4], página

424, como Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência, Axiomas de Continuidade e Axioma das Paralelas.

Ao analisar as propriedades de um sistema axiomático:

Completude: tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, sem hipóteses subentendidas.

Consistência: É impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas.

Independência: Nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos outros.

Hilbert esclareceu em sua obra *Fundamentos de Geometria* (1899) alguns problemas lógicos e fez um estudo rigoroso de *Os Elementos* de Euclides. O objetivo era identificar um conjunto de axiomas que dessem completude, consistência e independência à Geometria Euclidiana, pois percebeu que apesar de conter uma estrutura dedutiva, o livro de Euclides estava cheio de hipóteses ocultas e demonstrações que continham apelos à intuição como hipóteses implícitas. Hilbert percebeu que nem todos os objetos em matemática podiam ser definidos. Então, iniciou o tratamento da geometria com três objetos não definidos: o ponto, a reta e o plano.

No lugar das noções comuns de Euclides e dos cinco postulados, foram formulados os Axiomas de Hilbert que são apresentados em sequência e estão disponíveis em Arcari [1], páginas 16 e 17.

Axioma 2.2: Axiomas de Incidência (noção de “estar em”)

I₁ Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

I₂ Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

Axioma 2.3: Axiomas de Ordem (noção de ordenação)

II₁ Se um ponto B está entre os pontos A e C , então A , B e C são pontos distintos e B está entre C e A .

II₂ Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

II₃ Dados dois pontos distintos B e D , existem pontos A , C e E tais que B está entre A e C , C está entre B e D e D está entre C e E .

II₄ Sejam três pontos distintos A , B , C e a reta r tal que esses pontos não pertençam a r , então temos duas situações. Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r temos que A e C estão do mesmo lado de r . Ou, em caso contrário, se A e B estão em lados opostos de r , e B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .

Axioma 2.4: Axiomas de Congruência (noção de “igualdade” entre segmentos e ângulos)

III₁ Se A e B são dois pontos distintos e A' é a origem da semirreta s , então

existe um único ponto B' , distinto de A' em s , tal que o segmento AB é congruente ao segmento $A'B'$.

III₂ Se o segmento AB é congruente ao segmento CD e ao segmento EF , então o segmento CD é congruente ao segmento EF . Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.

III₃ Sejam AB e BC segmentos em uma reta r com apenas B em comum. Além disso, seja $A'B'$ e $B'C'$ segmentos em uma reta r' com apenas B' em comum. Se o segmento AB for congruente ao segmento $A'B'$ e o segmento BC for congruente ao segmento $B'C'$ então o segmento AC é congruente ao segmento $A'C'$.

III₄ Sejam um semiplano α e um ângulo $\hat{}$. Tomemos uma semirreta s com origem em B contida na reta que determina o semiplano α . Então, existe apenas um ângulo \hat{B} com lado em s contido no semiplano α e congruente ao ângulo $\hat{}$.

III₅ Se o ângulo $\hat{}$ é congruente ao ângulo \hat{B} e ao ângulo \hat{C} , então o ângulo \hat{B} é congruente ao ângulo \hat{C} . Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

III₆ Dados dois triângulos ABC e EFG , se AB é congruente a EF ; AC é congruente a EG e \hat{A} é congruente a \hat{E} , então ABC é congruente a EFG (caso de congruência LAL).

Axioma 2.5: Axiomas de Continuidade (para a medição de segmentos e ângulos)

IV₁ (Axioma de Arquimedes) Sejam AB e CD dois segmentos. Então existe um número finito de pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ na reta que passa por A e B tal que os segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ são congruentes a CD e o ponto B está entre A e A_n .

IV₂ (Axioma de Dedekind) Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta r está na união dos conjuntos não vazios C_1 e C_2 . Suponha ainda que nenhum ponto de C_1 está entre dois pontos de C_2 e vice-versa. Então “existe um único ponto $O \in r$ tal que O está entre P_1 e P_2 se, e somente se, $P_1 \in C_1$, $P_2 \in C_2$ e $O \neq P_1, P_2$ ”.

Axioma 2.6: Axiomas das Paralelas

V Por um ponto fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela a r .

Em 1904, Hilbert provou que se a Aritmética for consistente, a Geometria Euclidiana também será.

O Quinto Postulado

Neste capítulo inicialmente serão apresentadas quatro proposições importantes do livro *Os Elementos* de Euclides. A primeira e a segunda proposições referem-se ao Teorema do Ângulo Externo e à relação entre ângulos correspondentes congruentes e retas paralelas, respectivamente. A terceira é a última Proposição de *Os Elementos*, de uma sequência de 28, que independem do Quinto Postulado 2.5. Finalmente, a quarta proposição refere-se à formação de ângulos correspondentes em retas paralelas. Todos os postulados posteriores a esse, em *Os Elementos*, tem como prerrogativa a veracidade do Quinto Postulado.

Posteriormente, serão apresentados alguns postulados equivalentes ao Quinto Postulado e alguns matemáticos que, ao tentar prová-lo, desenvolveram, de algum modo, ideias que foram precursoras para o desenvolvimento de outras geometrias.

3.1 Quatro Importantes Proposições

As duas proposições que se seguem foram extraídas de Barbosa [3], a partir da página 61.

Proposição 3.1 ((Proposição 16) Teorema do Ângulo Externo): Em qualquer triângulo, se um dos lados for continuado, o ângulo externo formado mede mais do que qualquer um dos ângulos internos a ele não adjacentes.

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC . Seja D um ponto sobre o prolongamento do segmento BC de tal modo que C esteja entre B e D , como mostrado na Figura 3.1. Seja E o ponto médio de AC . Sobre o prolongamento de BE , consideremos um ponto F , com $F \neq B$, de modo que $BE \equiv EF$.

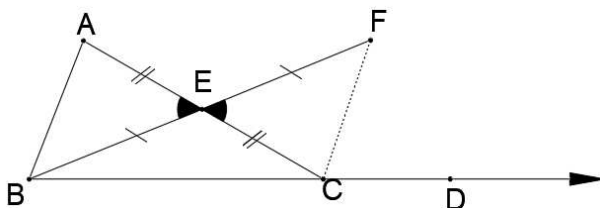


Figura 3.1: Apoio para demonstração da Proposição 3.1.

Os triângulos BAE e FCE são congruentes (caso LAL). Deste modo, os ângulos $B\hat{A}C$ e $F\hat{C}E$ são congruentes e menores que o ângulo $D\hat{C}E$.

Utilizando raciocínio análogo, demonstramos que o ângulo $A\hat{B}C$ é menor que o ângulo $A\hat{C}D$. \square

Proposição 3.2 (Proposição 27): Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes congruentes, então as duas retas são paralelas.

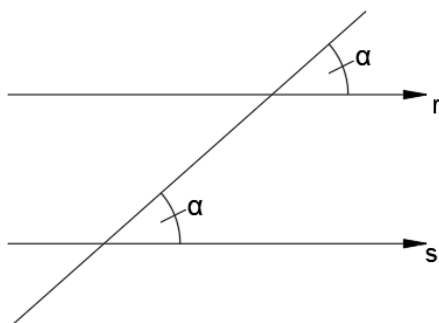


Figura 3.2: Proposição 27 do Livro I de Os Elementos: Ângulos correspondentes congruentes implicam em retas paralelas.

Demonstração. Suponha que as retas r e s não sejam paralelas. Logo, existem os pontos $A \in r$ e $B \in s$, P na intersecção $r \cap s$ e C , no prolongamento do segmento BA , tal que C pertença ao semiplano determinado pela reta r que não contém o ponto B , como indicado a Figura 3.3. No triângulo ABP formado, temos

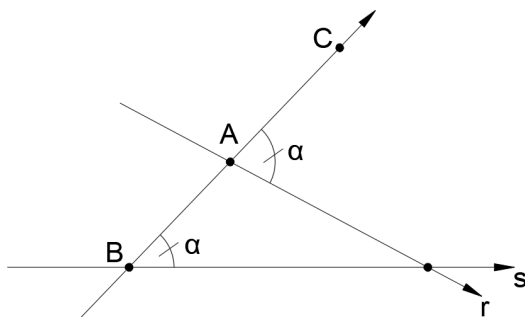


Figura 3.3: Apoio para a demonstração da Proposição 27 do Livro I de Os Elementos.

- $P\hat{A}C$ é um ângulo externo do triângulo ABP e mede α .
- $C\hat{B}P$ é um ângulo interno do triângulo ABP e também mede α .

Ora, de acordo com a Proposição 3.1 isso é uma contradição! Logo, as retas r e s são paralelas. \square

Serão apresentadas a seguir as proposições 28 e 29 de *Os Elementos*, extraídas de Barbosa [2], páginas 6 e 7.

Proposição 3.3 (Proposição 28): Uma reta corta duas outras formando ângulos designados como na Figura 3.4. Se $\alpha + \beta$ é igual a soma de dois ângulos retos, então as duas retas são paralelas. Veja a Figura 3.4.

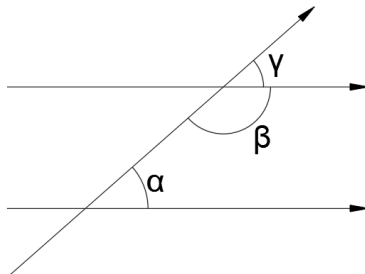


Figura 3.4: Figura da Proposição 28 do livro *Os Elementos*, de Euclides. A soma de ângulos colaterais internos α e β equivalentes a um ângulo raso implica no paralelismo das retas.

Demonstração. Seja γ o ângulo suplementar a β , ou seja $\gamma + \beta = 180^\circ$. Por hipótese, $\alpha + \beta = 180^\circ$. Logo $\alpha = \gamma$, isto é, ângulos correspondentes possuem mesma medida. Além disso, pela Proposição 3.2, as retas são paralelas. \square

Proposição 3.4 (Proposição 29): Quando uma reta corta duas retas paralelas formam-se ângulos correspondentes iguais.

Demonstração. Analisando a Figura 3.4, temos duas retas paralelas e uma transversal formando entre elas ângulos α , β e γ . Devemos provar que $\alpha = \gamma$. Suponha que isso não ocorra. Então $\alpha + \beta$ não equivale a dois ângulos retos. Mas assim, pelo Quinto Postulado, as duas retas se intersectam, o que contradiz nossa hipótese. Deste modo $\alpha + \beta = 180^\circ$ e, conseqüentemente, $\alpha = \gamma$. \square

Utilizando a Proposição 3.3, o Quinto Postulado de Euclides 2.5, pode ser escrito como:

Postulado 3.1 (equivalente ao Quinto Postulado da Geometria Euclidiana): Uma reta corta duas outras formando ângulos designados como na Figura 3.4. Se $\alpha + \beta$ for diferente de dois ângulos retos, então as duas retas se intersectam.

Deste modo, a afirmação inversa do Quinto Postulado é a Proposição 3.3 e foi considerado por muitos uma Proposição que Euclides não conseguia demonstrar. Incontáveis tentativas de demonstração do Quinto Postulado foram feitas nos dois mil anos que se passaram desde que *Os Elementos* foi escrito. E, nesse período, um número muito grande de afirmações equivalentes a eles foram produzidos - chamadas de “substitutos”.

Para que um Postulado P seja substituído do Quinto Postulado, o desenvolvimento dos quatro primeiros postulados, 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, acrescido do Postulado P devem coincidir com a geometria de Euclides.

Para provar se um Postulado P é um substituto para o Quinto Postulado devemos, primeiro, saber se P é uma proposição da Geometria Euclidiana e, em caso afirmativo, devemos provar, utilizando os postulados 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 acrescidos de P , o Quinto Postulado de Euclides como uma proposição.

O substituto mais conhecido é o apresentado pelo matemático escocês John Playfair em seu trabalho “*Elementos de Geometria*”, publicado em 1795, e pode ser encontrado em Braz [5], página 15.

Postulado 3.2 (Substituto₁ - Axioma de Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

São apresentados a seguir vários outros equivalentes ao Quinto Postulado 2.5 na Geometria Euclidiana, extraídos de Arcari [1], página 31:

Postulado 3.3 (Substituto₂): A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.

Postulado 3.4 (Substituto₃): Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Postulado 3.5 (Substituto₄): Existe um par de retas equidistantes.

Postulado 3.6 (Substituto₅): Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.

Postulado 3.7 (Substituto₆): Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o último também é reto.

Postulado 3.8 (Substituto₇): Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas.

Postulado 3.9 (Substituto₈): Se uma reta corta uma de duas paralelas, então, corta a outra.

Esses são apenas alguns exemplos que corroboram a importância do Quinto Postulado 2.5 para o desenvolvimento da Geometria Euclidiana. Sem ele não seria possível obter o teorema dos ângulos internos de um triângulo, tal qual conhecemos. E assim, tanto a teoria dos triângulos semelhantes quanto a trigonometria não existiriam. Entretanto, outras geometrias bem diferentes da que conhecemos habitualmente são obtidas pela substituição do Quinto Postulado por outras proposições. Veremos a seguir os principais precursores da Geometria Hiperbólica.

3.2 Os Precursores

Ao longo dos séculos, muitas tentativas foram feitas a fim de provar o Quinto Postulado como um teorema ou de livrar-se dele através de uma nova definição de retas paralelas. Porém a maior parte das tentativas ou admitiam afirmações que não se podiam provar com os outros quatro primeiros Postulados 2.1, 2.2, 2.3

e 2.4 ou consideravam fatos equivalentes a ele. A seguir são apresentadas algumas características dessas tentativas.

3.2.1 Ptolomeu I



Figura 3.5: Busto de Ptolomeu I.

Ptolomeu I foi contemporâneo de Euclides e escreveu um livro sobre o Quinto Postulado que incluía uma prova dele. Entretanto, assumiu que o paralelismo acarreta na semelhança de duas figuras e isso é prerrogativa válida apenas na Geometria Euclidiana.

3.2.2 Claudius Ptolomeu

Claudius Ptolomeu era egípcio e viveu nos séculos I e II, entre os anos de 85 d.C. e 165 d.C. De acordo com Braz [5], foi um dos matemáticos que contestaram o Quinto Postulado de Euclides e tentou prová-lo utilizando apenas os quatro primeiros postulados. Entretanto, sua demonstração utilizou implicitamente a vigésima nona proposição do primeiro livro de Euclides, ou seja, utilizou uma proposição equivalente ao próprio Quinto Postulado, invalidando sua prova.



Figura 3.6: Claudius Ptolomeu.

Claudius Ptolomeu escreveu uma importante obra, intitulada “*Almagesto*”, que introduziu a trigonometria como ferramenta no estudo de astronomia.

3.2.3 Proclus Diadochus

Segundo Braz [5], ao comentar o livro I de *Os Elementos*, Proclus afirma:

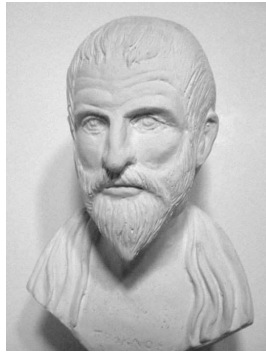


Figura 3.7: *Busto de Proclus Diadochus.*

“... ele (o Quinto postulado da Geometria Euclidiana) deveria ser retirado completamente da relação dos postulados, pois é um teorema difícil... Sua inversa foi, de fato, estabelecida por Euclides como um teorema.”

Proclus viveu no século V, entre os anos de 410 e 485. Foi matemático, filósofo e historiador. Escreveu um trabalho sobre a obra de Euclides denominado “*Comentários sobre Euclides*” no qual critica o Quinto Postulado 2.5 de Euclides e propõe uma demonstração do mesmo, a partir dos quatro outros postulados 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4. Em sua demonstração, entretanto, admite que retas paralelas são equidistantes. Mas essa afirmação é análoga ao Quinto Postulado, o que invalidou sua prova.

3.2.4 Nasir al-din al-Tusin (Nasiredin)



Figura 3.8: *Nasiredin*

Nasir era persa, matemático e astrônomo e viveu no século XIII, entre os anos de 1201 e 1274. Traduziu para o árabe uma versão de *Os Elementos* e escreveu um tratado, que nunca chegou a ser traduzido, sobre os Postulados de Euclides, no qual foi o primeiro a observar a importância do teorema da soma dos ângulos de um triângulo em relação ao Quinto Postulado. Segundo Braz [5], página 16, em sua tentativa de demonstrá-lo, Nasir supôs a validade do teorema a seguir (embora não o tenha demonstrado):

Teorema 3.1 (Axioma de Nasir): “Sejam m e n duas retas, A um ponto de m , B um ponto de n , tais que AB é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com

m . Então as perpendiculares baixadas de m até a reta n , do lado do ângulo agudo, são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB .”

Nasir, utilizando o Teorema 3.1, deduziu o Quinto Postulado. Considerou também um quadrilátero $ABCD$, como o da Figura 3.9 no qual os ângulos da base eram retos e o lado AD era congruente ao lado BC . Sem tanto cuidado em sua prova, ele conclui que os ângulos C e D também são retos, resultando assim, que quadrilátero em questão possui quatro ângulos retos e lados opostos congruentes, sendo deste modo, um retângulo.

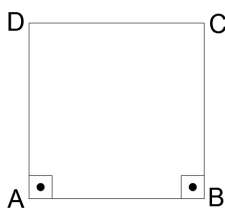


Figura 3.9: O quadrilátero utilizado por Nasir: possui os ângulos da base retos e os lados AD e BC congruentes entre si.

O quadrilátero, representado na Figura 3.9, ao ser dividido por sua diagonal, dá origem à dois triângulos retângulos congruentes. Ao mesmo tempo, prova-se a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos internos é 180° . Fato equivalente ao Quinto Postulado.

3.2.5 John Wallis

As críticas a *Os Elementos* em suas versões árabes apareceram somente após 1550, muito influenciadas pelos *Comentários de Proclus*. Foram muitos aqueles que tentaram provar o Quinto Postulado 2.5 nos séculos XVI e XVII: F. Comandino (1509-1575), C. S. Clavio (1537-1612), P. A. Cataldi (? - 1626), G. A. Boreli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711) e John Wallis (1616-1703). Todos eles, com exceção de



Figura 3.10: John Wallis.

Wallis, trabalharam a ideia de retas equidistantes.

Wallis viveu nos séculos XVII e XVIII, entre os anos de 1616 e 1703. Ele foi um grande matemático inglês que escreveu obras sobre seções cônicas, álgebras e aritmética. Também apresentou uma demonstração para o Quinto Postulado 2.5 que foi baseada em um outro: “Dado um triângulo, é possível construir um outro que lhe

é semelhante, com lados arbitrariamente grandes”. Infelizmente, esse Postulado é equivalente ao Quinto Postulado de Euclides.

A relação entre o Quinto Postulado e o estudo dos triângulos será abordada em outro capítulo ao analisarmos, por exemplo, o quadrilátero de Saccheri com mais detalhes.

3.2.6 Giovanni Girolamo Saccheri

O padre jesuíta Saccheri, também viveu nos séculos XVII e XVIII, entre os anos de 1667 e 1733. Segundo Braz [5], escreveu um livro intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides sem qualquer falha), veja a Figura 3.11, no qual apresentou uma tentativa de prova para o Quinto Postulado 2.5. A obra foi a primeira a considerar diversas hipóteses e consequências não trabalhadas por Euclides. Saccheri, ao ler



Figura 3.11: Página da obra de Saccheri: *Euclides ab omni naevo vindicatus* - *Euclides livre de todas as máculas*.

a mais famosa obra de Euclides, ficou impressionado com o método de prova pela redução ao absurdo. Nesse método, assumia-se como hipótese que a Proposição a ser demonstrada era falsa. Assim, se alguma contradição surgir, a Proposição inicial seria verdadeira.

Em 1697, publicou um tratado de lógica - *Lógica Demonstrativa*, ilustrado na Figura 3.12, na qual aplicou o método utilizado por Euclides no tratamento da lógica formal. Saccheri foi o primeiro, que se tem notícia, a tentar demonstrar o Quinto Postulado pela substituição por um outro contraditório.

Considerando um quadrilátero $ABCD$ no qual os lados AD e BC são congruentes e perpendiculares ao lado AB , Saccheri demonstrou que os ângulos D e C são congruentes, utilizando apenas os quatro primeiros Postulados de Euclides.

Em geral, há três possibilidades para os ângulos:

- hipótese I: Os ângulos \hat{C} e \hat{D} são retos,
- hipótese II: eles são obtusos ou
- hipótese III: ambos são agudos.

Especificamente, para que o Quinto Postulado seja válido é necessário que esses ângulos sejam retos. A segunda hipótese foi facilmente descartada por Saccheri ao assumir, como Euclides fizera, que a reta é ilimitada.



Figura 3.12: Página do tratado de lógica demonstrativa de Saccheri.

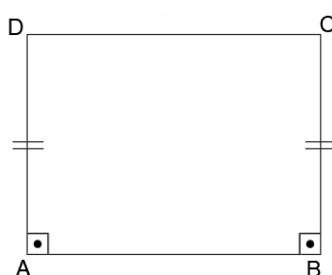


Figura 3.13: O quadrilátero com dois ângulos retos na base e dois lados verticais congruentes é chamado de Quadrilátero de Saccheri.

Então Saccheri assumiu que os ângulos não eram retos e buscou contradições ao analisar as consequências das outras hipóteses. De acordo com Barbosa [2], página 27, devem ser destacadas as seguintes conclusões:

1. se uma das hipóteses é verdadeira para um único quadrilátero do tipo considerado, então é verdade para todos tais quadriláteros;
2. nas hipóteses de ângulos retos, obtusos e agudos, a soma dos ângulos dos triângulos é, respectivamente, igual, maior e menor que 180° ;
3. se existe um único triângulo para o qual a soma dos ângulos é igual a, maior do que, ou menor do que 180° , então, vale, respectivamente a hipótese (I), (II) ou (III);
4. duas retas coplanares ou têm uma perpendicular comum, ou se encontram em um ponto, ou são assintóticas.

Nas tentativas de procurar uma contradição para os ângulos serem agudos, alguns dos resultados obtidos se tornariam teoremas clássicos da Geometria Não Euclidiana. Ao concluir sua análise, Saccheri percebeu que essa hipótese implicava na existência de duas retas assintóticas que possuíam uma perpendicular em comum em um ponto ideal no infinito. Mas não se assuste, esses conceitos serão abordados no Capítulo 4. Entretanto, ao que parece, Saccheri não ficou convencido de que existia uma contradição. Ele tentou ainda uma segunda prova de descartar a hipótese do ângulo do quadrilátero não poder ser obtuso mas não obteve êxito.

A descoberta da Geometria Não Euclidiana poderia ter ocorrido quase um século antes se Saccheri tivesse suspeitado que não chegou a uma contradição porque não havia uma contradição para ser encontrada. Seu trabalho foi de grande relevância e indubitavelmente foi o primeiro a ter um vislumbre sobre outras geometrias possíveis, mesmo sem saber disso.

3.2.7 Johann Heinrich Lambert



Figura 3.14: *Johann Heinrich Lambert.*

Lambert viveu no século XVIII, entre os anos de 1728 e 1777. Uma publicação do trabalho de G.S.Klügel, em 1763, no qual examinava pseudo-demonstrações do Quinto Postulado 2.5, que chamou a atenção de Lambert para a teoria das paralelas. Na conclusão do trabalho, Klügel expressou dúvidas sobre a possibilidade de se obter uma demonstração sobre o Quinto Postulado. Lambert tentou, então, encontrar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo.

Semelhantemente à Saccheri, Lambert escolheu um quadrilátero com três ângulos retos para sua figura fundamental e considerou três hipóteses sobre o quarto ângulo



Figura 3.15: *O quadrilátero de Lambert possui três ângulos retos e o quarto ângulo desconhecido.*

1. Hipótese do ângulo reto;
2. Hipótese do ângulo obtuso e
3. Hipótese do ângulo agudo.

A hipótese do ângulo reto é equivalente ao Quinto Postulado 2.5 de Euclides. Assim, Lambert dedicou-se a analisar as consequências das outras duas hipóteses.

Nas tentativas de demonstrar a hipótese do ângulo agudo além de não ter chegado em nenhuma contradição fez deduções de novas proposições, muito além das conseguidas por Saccheri.

Segundo Barbosa [2], página 29, uma dedução incomum obtida foi a seguinte:

A área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos.

Essa diferença, hoje conhecida como **deficiência do triângulo**, tem seu valor nulo na Geometria Euclidiana uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , e apresenta grande relevância na Geometria Hiperbólica.

Ainda de acordo com Barbosa [2], página 29, vejamos algumas observações feitas por Lambert e posteriormente confirmadas por Riemann e Lobachewsky:

“Em conexão com estas fórmulas, devemos observar que a hipótese do ângulo obtuso vale se considerarmos triângulos esféricos ao invés de triângulos planos, porque neste último caso, também a soma dos ângulos é maior do que dois ângulos retos e a área do triângulo é proporcional ao excesso.

Parece ainda mais interessante que o que afirmo sobre triângulos esféricos, pode ser demonstrado independentemente da dificuldade das paralelas.

Estou inclinado a concluir que a hipótese do ângulo agudo ocorre na superfície de uma esfera de raio imaginário.”

Como Saccheri, ele também eliminou a hipótese do ângulo obtuso ao assumir que a reta era ilimitada. Entretanto suas conclusões finais a cerca do ângulo agudo não foram satisfatórias.

Seu trabalho foi escrito em 1766 e publicado após sua morte por G. Bernoulli e C.F. Hindenburg.

3.2.8 Adrien Marie Legendre



Figura 3.16: Adrien Marie Legendre

Legendre era francês e viveu nos séculos XVIII e XIX, entre os anos de 1752 e 1833. Apesar de seus resultados terem sido obtidos substancialmente por seus predecessores, o estilo direto e simples de suas demonstrações contribuiu de forma

brilhante para renovar o interesse sobre a Geometria. Ele demonstrou diversos teoremas da Geometria Euclidiana e, a seguir, veremos dois deles, incluindo os lemas necessários para prová-los, extraídos de Barbosa [2], páginas 33 a 38.

Teorema 3.2: A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a dois ângulos retos.

Para provar esse teorema, Legendre usou o lema a seguir:

Lema 3.1: Dado um triângulo ABC , existe um triângulo $A'B'C'$ satisfazendo

1. a soma dos ângulos de $A'B'C'$ é igual a soma dos ângulos de ABC ,
2. o triângulo $A'B'C'$ possui um ângulo menor ou igual a metade do menor ângulo do triângulo ABC .

Demonstração do Lema 3.1. Considere um triângulo ABC no qual o ângulo A é o menor ângulo do triângulo, veja a Figura 3.17. Seja D o ponto médio do segmento BC . Sobre a semi-reta de origem A passando por D , marque o ponto E tal que $AD = DE$. Deste modo, os triângulos ABD e ECD são congruentes (caso LAL). Então, segue que a soma dos ângulos do triângulo AEC é igual a soma dos ângulos do triângulo original.

Pela construção, a soma dos ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{E}C$ equivale ao ângulo \hat{A} do triângulo inicial. Deste modo, o novo triângulo AEC possui um ângulo que denominaremos θ e satisfaz a desigualdade $\theta \leq \hat{A}/2$, concluindo a demonstração. \square

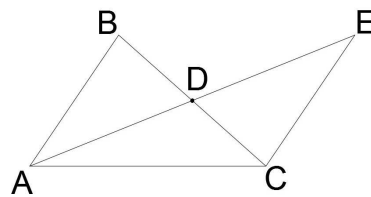


Figura 3.17: Apoio para a demonstração do Primeiro Teorema de Legendre.

Demonstração do Teorema 3.2. Admitindo-se o Lema 3.1, suponha que exista um triângulo cuja soma dos ângulos seja $180^\circ + \alpha$.

Seja, então, θ_0 o menor ângulo desse triângulo. Aplicando o Lema 3.1 obtemos um novo triângulo que chamaremos de $A_1B_1C_1$, cuja soma dos ângulos permanece igual e seu menor ângulo, θ_0 e satisfaz a

$$\theta_1 \leq \frac{1}{2}\theta_0.$$

Aplicando neste novo triângulo o Lema 3.1, conclui-se, pela existência do novo triângulo $A_2B_2C_2$, cuja soma dos ângulos é equivalente à anterior e o menor ângulo, θ_2 , satisfaz a

$$\theta_2 \leq \frac{1}{4}\theta_0.$$

Aplicando este lema n vezes, chegamos a um triângulo $A_nB_nC_n$, no qual a soma dos ângulos ainda é $180^\circ + \alpha$ e cujo menor ângulo, θ_n , satisfaz a

$$\theta_n \leq \frac{1}{2^n}\theta_0.$$

Para n suficientemente grande, teremos $\theta_n < \alpha$. Porém, neste caso a soma dos outros dois ângulos será maior que 180° , o que é um absurdo! \square

Legendre provou outros dois Lemas para ser possível demonstrar o segundo teorema.

Lema 3.2: Se a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, o mesmo é verdade para todos os triângulos obtidos deste, traçando-se um segmento ligando um de seus vértices ao lado oposto.

Demonstração. Considere um triângulo ABC e um ponto qualquer D sobre o lado AC . Tracemos, então, o segmento BD , tal como ilustrado na Figura 3.18.

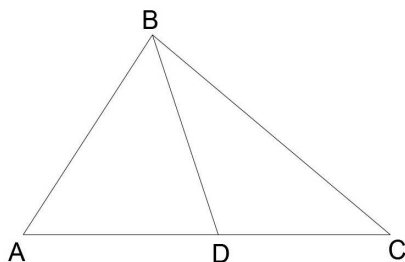


Figura 3.18: Apoio para a demonstração do Segundo Teorema de Legendre.

A soma dos ângulos internos do triângulo ABC é 180° . Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ e $\hat{D} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, a soma dos ângulos internos dos triângulos ABD e DBC será $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 180^\circ = 360^\circ$.

Pelo Teorema 3.2, nenhum desses dois triângulos possui a soma dos ângulos internos superior à 180° . Portanto, cada um deles terá a soma dos ângulos internos exatamente igual a 180° . \square

Lema 3.3: Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, então, pode-se construir triângulos retângulos isósceles com a soma dos ângulos igual a dois ângulos retos e catetos maiores do que qualquer segmento dado.

Demonstração. Considere um triângulo ABC cuja soma dos ângulos seja 180° . Caso esse já seja um triângulo retângulo, baixe a altura do vértice com maior ângulo ao lado oposto. Observe a Figura 3.19. Nela, foi traçada a altura BD do triângulo, obtendo assim dois triângulos retângulos cujas somas dos ângulos internos equivalem a 180° cada.

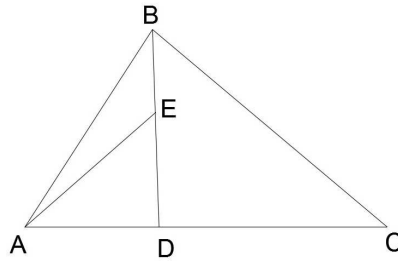


Figura 3.19: Apoio para a demonstração do Segundo Teorema de Legendre.

Se nenhum destes triângulos for isósceles, escolha um deles, por exemplo, o triângulo ADB com ângulo reto em D . Vericamos, então qual dos catetos tem maior comprimento, AD ou BD . Suponhamos que seja BD . Tracemos um segmento ligando o vértice A a um ponto E do segmento BD de modo que $DA = DE$. Pelo Lema 3.2, temos que o triângulo retângulo isósceles ADE tem soma dos ângulos igual a 180° .

Com base neste triângulo retângulo isósceles com soma dos ângulos igual a 180° , observamos que a união de dois deles, ao longo da hipotenusa, produz um quadrado. Quadrados podem ser empilhados, uns sobre os outros, de modo a produzir quadrados de lados arbitrariamente grandes. A diagonal de um deles o divide em dois triângulos retângulos isósceles cuja soma dos ângulos é 180° . Isso conclui a demonstração. \square

Teorema 3.3: Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos, então, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.

Demonstração. Suponhamos que existe um triângulo cuja soma dos ângulos é 180° . Consideremos um triângulo retângulo qualquer DEF com o ângulo reto no vértice E . Pelo Lema 3.3, existe um triângulo isósceles ABC , retângulo em C , cujos catetos são maiores do que quaisquer um dos catetos do triângulo DEF e cuja soma dos ângulos internos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ corresponda a 180° . Observe a Figura 3.20.

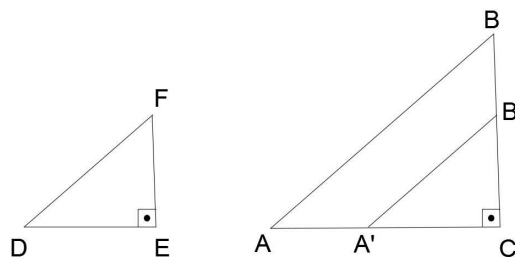


Figura 3.20: Apoio para a demonstração do Segundo Teorema de Legendre.

Desta forma, podemos marcar sobre a semirreta S_{AC} o ponto A' e na semirreta S_{CB} o ponto B' de modo que $A'C = DE$ e $B'C = FE$. Assim, teremos a congruência entre os triângulos $A'CB'$ e DEF (caso LAL). Tracemos, agora, o

segmento $A'B'$ para concluir que a soma dos ângulos internos do triângulo $A'B'C$ vale 180° . Por consequência, a soma dos ângulos internos do triângulo DEF também será 180° .

Ao trocarmos o ângulo reto por outro não nulo e inferior a 180° , seguindo o mesmo raciocínio, concluímos que o resultado é válido para um triângulo qualquer. \square

A seguir, está descrito uma das tentativas feitas por Legendre para demonstrar o quinto postulado de Euclides a partir dos outros quatro.

Suponhamos que $180^\circ - \alpha$ corresponda a soma dos ângulos de um triângulo ABC , para algum número positivo menor que 180° , e que o ângulo \hat{A} seja o menor ângulo desse triângulo.

Construa sobre o lado BC um triângulo BCD , congruente ao triângulo ABC com $D\hat{B}C = A\hat{C}B$ e $D\hat{C}B = A\hat{B}C$. Tracemos, então, pelo ponto D uma reta que encontre os lados do ângulo \hat{A} nos pontos E e F , como indicado na Figura 3.21.

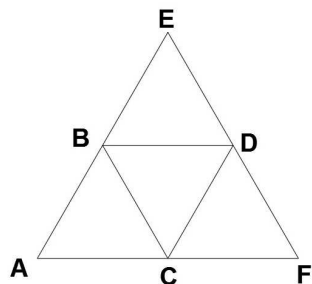


Figura 3.21: Apoio para a tentativa de demonstração do Quinto Postulado 2.5 feita por Legendre.

Sabemos que a soma dos ângulos do triângulo BCD vale $180^\circ - \alpha$. Assim, utilizando o Teorema 3.2, concluímos que a soma dos ângulos do triângulo AEF é menor ou igual a $180^\circ - 2\alpha$. Repetindo-se recursivamente esse procedimento, na n -ésima vez teremos um triângulo cuja soma dos ângulos internos será menor ou igual a $180^\circ - 2^n\alpha$.

Deste modo, para n suficientemente grande, a soma dos ângulos internos de um triângulo passaria a ser negativa, o que é impossível! Assim, concluí-se que não pode existir triângulo cuja soma dos ângulos seja menor que 180° .

Porém, o próprio Legendre verificou a falsidade dessa conclusão. O erro dessa prova ocorreu ao se supor que, por um ponto dentro de um ângulo, podemos sempre traçar uma reta que intercepte os dois lados do ângulo.

3.3 O Desenvolvimento de uma Nova Geometria

A descoberta de outras geometrias, além da Geometria Euclidiana, se deu através do esforço conjunto de muitos matemáticos que, ao longo dos séculos, uniram a própria busca por resultados com o conhecimento publicado em vários trabalhos dos seus antecessores.

3.3.1 Carl Friedrich Gauss

Gauss viveu nos séculos XVIII e XIX, entre os anos de 1777 e 1855. Foi o primeiro a tratar a nova geometria como *Geometria Não Euclidiana* e deixou grande contribuição para o desenvolvimento dessa, sendo considerado o maior matemático de sua época.



Figura 3.22: *Carl Friedrich Gauss.*

Ele dedicou muitos anos de pesquisa aos problemas associados ao Quinto Postulado 2.5, porém muitos de seus resultados só se tornaram públicos após sua morte. Segundo Braz [5], página 22, Gauss era muito cauteloso, pois, na época, aqueles que detinham algum tipo de conhecimento considerado contra à doutrina da Igreja eram fortemente pressionados pela Inquisição. A filosofia de Kant foi adotada, na época, pela Igreja católica. Kant defendia o uso da intuição matemática em detrimento das demonstrações. Entretanto Gauss acreditava que o rigor era essencial.

Os trabalhos de Gauss e Lambert indicavam a existência de uma nova geometria na qual a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície de curvatura negativa constante é proporcional a área desse triângulo.

3.3.2 Farkas Wolfgang Bolyai e Johann Bolyai



Figura 3.23: *Farkas Wolfgang Bolyai.*

Segundo Connor e Robertson [7], Farkas Bolyai, viveu nos séculos XVIII e XIX, entre os anos de 1775 e 1856 e era amigo de Gauss. Eles estudaram juntos na universidade, onde discutiam frequentemente sobre problemas relacionados à teoria das paralelas. Essas discussões se estenderam por muitos anos depois de deixarem a

universidade, através de cartas, demonstrando que ambos tentavam uma prova para o Quinto Postulado 2.5.

Em 1804, F. Bolyai acreditou ter encontrado finalmente a prova procurada e submeteu seu trabalho a Gauss, mas esse logo apontou o erro da prova. Anos mais tarde, F. Bolyai enviou um trabalho suplementando sua prova, mas não obteve resposta de Gauss. Nas duas décadas seguintes, F. Bolyai colocou suas ideias no livro intitulado *Tentamen*. Apesar de muito talentoso, Farkas Bolyai ficou mais conhecido por ser o pai de János.



Figura 3.24: *János Johann Bolyai.*

János Johann Bolyai, viveu entre os anos de 1802 e 1860 e mostrou interesse pela matemática desde muito jovem. Tornou-se adulto durante os anos que levaram à publicação do *Tatemen* e ao estudar matemática com seu pai dedicou-se naturalmente ao estudo da teoria das paralelas, embora seu pai tivesse lhe recomendado expressamente que esse problema deveria ser deixado de lado. Em torno de 1820, tentou uma estratégia diferente: negar o Quinto Postulado 2.5 de Euclides. Não demorou a encontrar resultados interessantes que indicavam a existência de uma geometria geral, na qual, acreditava que a Geometria Euclidiana era um caso particular. Ao negar o Quinto Postulado 2.5, duas hipóteses deveriam ser consideradas, de acordo com Braz [5], página 24:

1. Não existe nenhuma reta paralela à reta dada;
2. Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto.

Por ser consequência dos quatro primeiros Postulados de Euclides, a hipótese 1 foi eliminada. O que mais impressionou János foram as proposições que não dependiam do Quinto Postulado 2.5. Ele acreditou que essas valeriam para a geometria geral e aceitou a sugestão de seu pai ao escrever um apêndice do *Tatemen*, em 1832, apresentando suas ideias e descobertas. Ao receber uma cópia do apêndice, Gauss ficou surpreso com a genialidade do filho de seu amigo e escreveu uma resposta a Farkas que continha as observações, retiradas de Barbosa [2], página 47.

“Se eu começasse com a afirmação de que não ousou louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria: mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo o conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados aos quais ele

chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo...

...A maioria das pessoas não tem a perspicácia para entender nossas conclusões, e encontrei (na vida) apenas uns poucos que receberam com interesse o que lhes comuniquei..”

Segundo Braz [5], página 24, ao receber um cópia dessa carta, János ficou desapontado pois ela lhe trouxera a notícia de que outra pessoa havia feito as mesmas descobertas independente e possivelmente antes dele. Essa foi a última publicação de János. Suas investigações posteriores foram sobre extensões de suas ideias em espaços tridimensionais bem como na comparação da sua Geometria Não Euclidiana com a trigonometria esférica conhecida na época.

3.3.3 Nicolai Ivanovich Lobachewsky

Lobachewsky viveu nos séculos XVIII e XIX, entre os anos de 1793 e 1856. De acordo com Connor and Robertson [7], Lobachewsky formou na Universidade de Kasan em 1813 e tornou-se professor da mesma aos 21 anos de idade. Foi nomeado reitor aos 35 anos e é considerado o maior matemático russo de seu tempo. Publicou conclusões sobre a Geometria Não Euclidiana dois anos antes do apêndice escrito por János Bolyai.



Figura 3.25: Nicolai Ivanovich Lobachewsky.

Em 1826, ao fazer uma conferência para a seção de Física e Matemática de sua universidade sugeriu a existência de uma nova geometria na qual podiam ser traçadas mais de uma reta paralela à uma reta dada e na qual a soma dos ângulos de um triângulo seria menos que dois ângulos retos. Em 1829, publicou no *Kasan Bulletin* (Boletim Kasan) e, segundo Braz [5], página 25, memórias sobre as bases da geometria expondo totalmente a sua teoria das paralelas. Essa foi a primeira publicação sobre Geometria Não Euclidiana e, de fato, não atraiu muita atenção em nenhuma parte do mundo.

Como o idioma russo não era muito popular, ele escreveu vários outros trabalhos sobre a nova geometria em línguas que acreditava possibilitar o acesso universal às pessoas. Em alemão publicou um pequeno, e não menos importante, livro intitulado *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien* (Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas), nos anos de 1840. Tal versão chegou ao

conhecimento de Gauss que ficou muito surpreso pelo fato de Lobachewsky ter obtido os mesmos resultados de forma independente e cujas demonstrações foram feitas de modo totalmente diferente das suas. Gauss chegou a confidenciar, por carta, a um amigo astrônomo de nome Schumacher, que o livro de Lobachewsky continha uma exposição admirável de toda a teoria de Geometria Hiperbólica.

De acordo com Barbosa [2], página 49, embora estivesse cego um ano antes de sua morte, escreveu um trabalho em francês, o *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles* (Pangeometria ou geometria precisa baseada em uma teoria geral e rigorosa das paralelas), contendo todos os seus resultados de pesquisa. Infelizmente não viveu o suficiente para ver seu trabalho ser reconhecido.

De fato, Gauss, János Bolyai e Lobachewsky desenvolveram concomitantemente a Geometria Não Euclidiana. Mas foi Lobachewsky quem publicou primeiro suas descobertas e não temeu o impacto que seu trabalho poderia causar na concepção filosófica da época. A aceitação da nova geometria foi postergada pois Latim, Alemão e francês não eram as línguas principais da época. Além disso, J. Bolyai e Lobachewsky eram membros novos na comunidade científica e tinham que se preservar devido ao antagonismo entre a teoria de Kant e o conhecimento científico encontrado por eles.

Em 1871, Klein deu o nome de Geometria Hiperbólica à nova geometria desenvolvida por esses três matemáticos. Além de Klein, outros grandes matemáticos, como Beltrami, Poincaré e Riemann, continuaram e desenvolveram o estudo da Geometria Não Euclidiana e suas aplicações em diversas áreas. Em 1868, Beltrami, ao provar que definitivamente não era possível demonstrar o Quinto Postulado 2.5, mostrou que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto à Geometria Euclidiana.

Geometria Hiperbólica

Como explicitado anteriormente, a Geometria Hiperbólica surgiu devido à negação do Quinto Postulado de Euclides. Em seu lugar, o embasamento teórico de tal geometria deu-se pelos quatro primeiros grupos de Axiomas de Hilbert: Axiomas de Incidência 2.2, Axiomas de Ordem 2.3, Axiomas de Congruência 2.4 e Axiomas de Continuidade 2.5, juntamente com o postulado que detalharemos a seguir. Logo, ela é baseada nos quatro primeiros postulados de Euclides e na negação do Quinto Postulado, isto é, fundamentada na afirmação que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada!

O leitor poderá ver que as figuras apresentadas neste capítulo preservam as dificuldades encontradas nas épocas de Gauss, Lobachewsky e Bolyai. Isso se deve ao fato de que na época em que foi descoberta a teoria da nova Geometria ainda não existiam modelos que a comprovassem. Os modelos da Geometria Hiperbólica serão apresentados no próximo capítulo. E, para aqueles que quiserem comparar como ficariam as figuras no modelo hiperbólico, serão disponibilizadas algumas versões alternativas das figuras no modelo do Disco de Poincaré ao longo do próprio texto.

4.1 O Quinto Postulado da Geometria Hiperbólica

Nesta seção, veremos a versão hiperbólica do Quinto Postulado de Euclides. Assim, a negação do Quinto Postulado de Euclides dá origem ao Postulado de Lobachewsky, que é descrito a seguir. De acordo com Barbosa [2], na página 54, temos:

Postulado 4.1 (Postulado de Lobachewsky): Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada.

Com isso torna-se imediato perceber que, no espaço hiperbólico, existem infinitas retas passando por um ponto e não intersectando uma reta dada. Assim, considere as retas m e m' passando pelo ponto P e não intersectando uma reta n , como mostrado na Figura 4.1. A reta n está completamente contida em um dos quatro ângulos determinados por m e m' . Deste modo, qualquer reta traçada pelo ponto P e contida

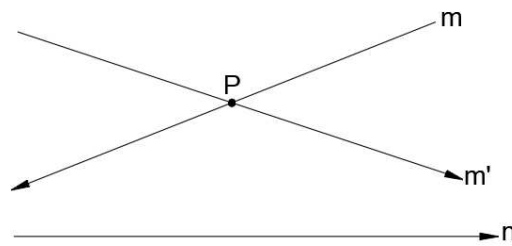


Figura 4.1: Retas paralelas a outra passando por um ponto externo.

no par de ângulos opostos pelo vértice, que não contém n , são exemplos de retas que não possuem intersecção com n . Existem infinitas retas nesse contexto.

Devido a essa situação será conveniente mudar a definição de paralelismo. Chamaremos de reta paralela a n passando por P a apenas duas de tais retas que descreveremos a seguir em uma proposição extraída de Barbosa [2], página 55.

Proposição 4.1: Dados uma reta n e um ponto P fora desta reta, existem exatamente duas retas m e m' que passam por P e que separam o conjunto das retas que interceptam n do conjunto das que não interceptam n .

Demonstração. Seja n uma reta e P um ponto fora dela. Ao se traçar uma reta perpendicular à n passando por P , intersecta-se a reta n num ponto Q , como indicado na Figura 4.2a. Trace a reta m , passando por P tal que m seja perpendicular ao segmento PQ . Como sabemos, m não intercepta a reta n .

Sejam E e F pontos sobre m tal que P pertença ao segmento EF . Considere o triângulo EFQ . Como P pertence ao lado EF , todas as retas que passam por P , com exceção de m , são retas que cortam o segmento EF em um ponto (ponto P) e assim cortam também o segmento EQ ou o segmento QF .

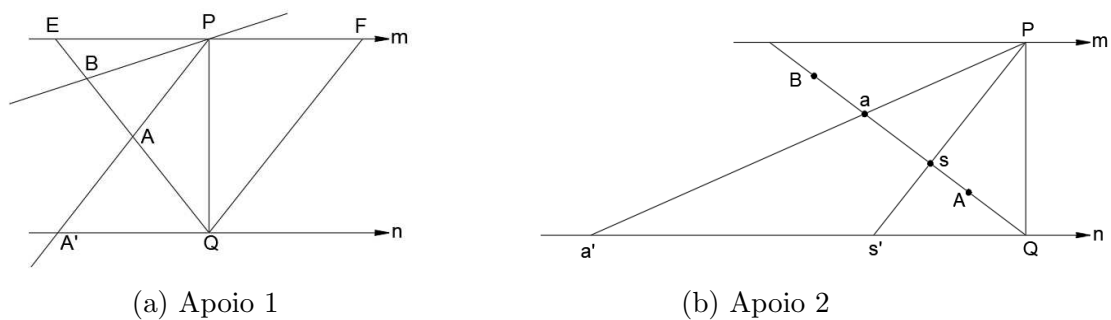


Figura 4.2: Apoio para a demonstração da quantidade infinita de paralelas a uma reta, passando por um ponto dado.

Podemos separá-las em duas classes:

1. retas que não intersectam n , denominadas τ e
2. retas que intersectam n , denominadas χ .

Deste modo, $\tau \cap \chi$ é vazio, o ponto E pertence à τ e $Q \in \chi$.

Além disso, se $A \in \chi$, então $QA \subset \chi$. Para comprovar que isso ocorre, considere o ponto A' pertencente à reta n , tal que a reta que passa por P e A intersecta n em A' . Qualquer reta que passe pelo vértice P do triângulo PQA' deve cortar o lado QA' . Analogamente, se $B \in \tau$, então, $EB \subset \tau$. Segue-se, então, do Axioma de Dedekind 2.5 para os números reais, que existe exatamente um ponto S que separa os conjuntos χ e τ . Suponha que $S \in EQ$ pertença ao conjunto χ , ou seja, a reta que passa por P e S intersecta n em um ponto S' . Tome agora a' , um ponto qualquer da semi-reta de origem Q passando por S' e que esteja fora do segmento QS' , veja a figura 4.2b. Deste modo, a reta Pa' intersecta EQ em um ponto a e a está fora do segmento QS , como ilustrado. O que é um absurdo! Logo $S \in \tau$.

Analogamente, obtemos um outro ponto de separação do lado QF . Estes dois pontos correspondem a retas que separam todas as retas que passam pelo ponto P em duas categorias: as que interceptam n e as que não interceptam n . Chamaremos essas duas de *retas paralelas à n passando por P* . \square

Proposição 4.2: As retas paralelas a n passando por P formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de P até a reta n . Além disto, o ângulo mencionado é agudo.

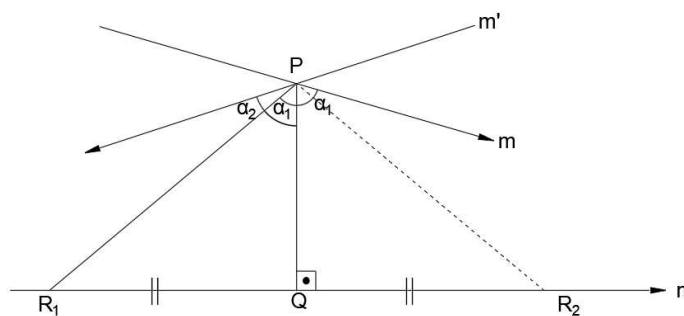


Figura 4.3: Apoio para a demonstração da congruência dos ângulos de paralelismo.

Demonstração. Como anteriormente, seja PQ o segmento perpendicular a n traçado a partir de P . Sejam α_1 e α_2 dois ângulos passando por m e m' , respectivamente. Suponha que $\alpha_1 < \alpha_2$, como indicado na Figura 4.3. No lado em que está o ângulo α_2 , trace uma reta passando por P e que forme o ângulo α_1 com PQ . É, então, claro da escolha das paralelas que tal reta cortará a reta n em um ponto, que chamaremos de R_1 . Seja, então, R_2 um ponto na reta n , tal que Q seja o ponto médio de R_1R_2 . Os triângulos PQR_1 e PQR_2 são, então, congruentes pelo caso LAL. Consequentemente, o ângulo $QPR_2 = \alpha_1$, o que é absurdo. Portanto, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Para mostrarmos a segunda parte da Proposição, uma vez que as retas m e m' são distintas, denotemos por β o ângulo entre essas retas. Veja a Figura 4.4. Portanto, temos:

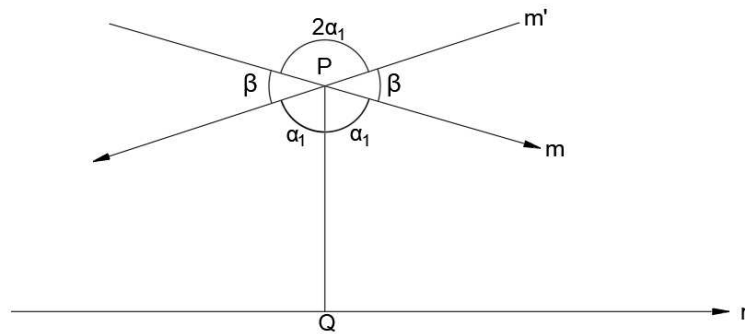


Figura 4.4: Apoio para a demonstração de que os ângulos de paralelismo são agudos.

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 + \alpha_1) + \beta + 2\alpha_1 + \beta &= 360^\circ \\
 4\alpha_1 + 2\beta &= 360^\circ \\
 2\alpha_1 + \beta &= 180^\circ \\
 \alpha_1 &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} \\
 \alpha_1 &< 90^\circ
 \end{aligned}$$

□

Devido à importância na simplificação das demonstrações, falaremos de retas paralelas em um sentido determinado. Isso ocorrerá ao diferenciarmos as duas retas paralelas como reta paralela à direita e reta paralela à esquerda.

De acordo com Arcari [1], página 53 e 54, temos as definições a seguir.

Definição 4.1 (Retas paralelas em determinado sentido): Sejam as retas s e s' passando pelo ponto P e paralelas a uma outra reta r . A uma das retas s ou s' qualquer, chamamos de reta paralela à r por P à direita ou no sentido positivo. À outra, chamamos de reta paralela a r passando por P à esquerda ou no sentido negativo.

Desta forma será única a paralela à uma reta dada em um determinado sentido passando por um ponto.

Definição 4.2 (Ângulo de paralelismo): Consideremos as retas r e s e os pontos P e O tais que P não pertence à r , s é paralela à r por P em determinado sentido e O é o pé da perpendicular baixada de P até r . O ângulo agudo referido na Proposição 4.2, formado por s e PO é chamado de ângulo de paralelismo entre s e r em P .

Então, as retas s e t serão paralelas a reta r por P e Q , respectivamente, em um mesmo sentido, quando uma das duas situações abaixo ocorrer:

1. Todas as semirretas com origem em P e contidas no interior do ângulo de paralelismo entre s e r em P intersectam r em pontos no interior do ângulo de paralelismo entre t e r no ponto Q . Ou
2. Todas as semirretas com origem em Q e contidas no interior do ângulo de Paralelismo entre t e r em Q intersectam r em pontos no interior do ângulo de paralelismo entre s e r no ponto P .

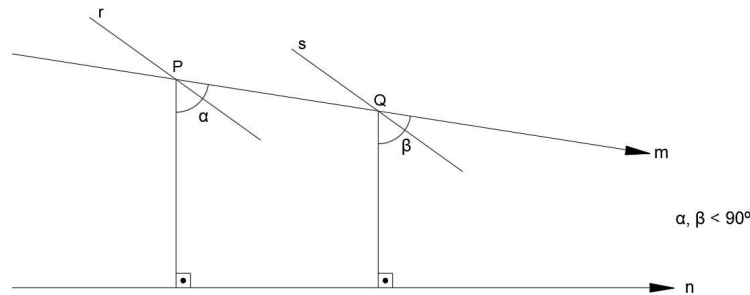


Figura 4.5: Definindo paralelismo entre retas em sentido determinado na Geometria Hiperbólica.

Observe a Figura 4.5. Nela, é possível perceber que toda reta r que entra em α por P é tal que a intersecção entre r e n é não vazia. De modo análogo, toda reta s que entra em β por Q é tal que a intersecção de s e n é não vazia.

4.2 Propriedades das retas paralelas

São apresentadas a seguir três propriedades das retas paralelas que são comuns às Geometrias Euclidiana e Hiperbólica. Os teoremas e demonstrações dessa seção podem ser encontrados em Barbosa [2], nas páginas 58 à 61.

O paralelismo de uma reta s a outra reta r , em um determinado sentido, significa que s é paralela a r por um de seus pontos nesse mesmo sentido. Indicaremos por $s//r$.

Teorema 4.1: Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então ela é, em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido à reta dada.

Para ilustrar o Teorema 4.1, consideramos r e s retas paralelas, como se pode ver na Figura 4.6.

Demonstração. Observe a Figura 4.7. Suponha que a reta m que passa por A e B seja uma das paralelas a n passando por P . Sem perda de generalidade, suponhamos que seja a paralela à direita. Seja R um ponto qualquer de m . Devemos mostrar que m é também uma dessas retas paralela à n passando pelo ponto R e que é paralela à direita. Existem dois casos à considerar .

Caso 1. O ponto R está no lado do ponto P que fica na direção do paralelismo. Trace PQ e RS perpendiculares a n . Vamos mostrar que toda reta passando por

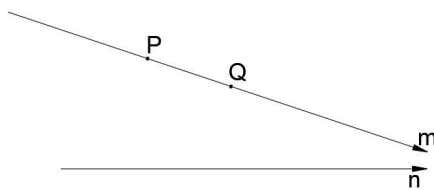


Figura 4.6: *Paralelismo em um sentido determinado. As retas m e n são paralelas à direita por P e Q é um ponto que pertence à m . Logo $m // n$ à direita por Q .*

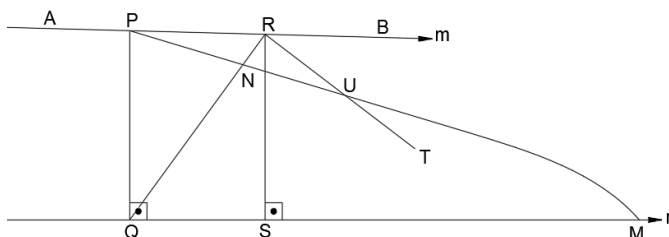


Figura 4.7: *Apoio para a demonstração do Teorema 4.1 sobre retas paralelas paralelas em sentido determinado.*

R e entrando no ângulo $\hat{S}RB$ corta a reta n . Seja RT um segmento de uma destas retas. Escolha nele um ponto qualquer U . Trace PU e RQ . Pelo paralelismo no ponto P , temos que a reta PU deve cortar n em um ponto M e, pelo Axioma de Pasch 2.1, deve cortar o segmento RQ em um ponto N . Novamente usando o Axioma de Pasch, concluímos que RU , se prolongado, deve cortar o lado QM do triângulo QNM . Daí o resultado.

Caso 2. O ponto R está no lado do ponto P oposto ao paralelismo. Seja $S \in n$ tal que RS é perpendicular à n . Seja ainda α o ângulo suplementar de $\hat{S}RP$. Para mostrar que $m // n$ à esquerda por R , basta mostrar que qualquer reta t entrando em α por R corta n . Seja t e o ponto U pertencente à t no interior de α . Temos que a PU corta n em um ponto M , pela Proposição 4.1, pois $m // n$ à esquerda por P . Assim, t entra em PQM por PM . Pelo Axioma de Pasch, t corta QM ou PQ . A reta t não corta PQ pois, caso contrário, t cortaria RS em outro ponto diferente de R , o que implica que $t = RS$, que é impossível. Portanto, a intersecção entre t e QM é não vazia e isso implica que a intersecção entre t e n também é não vazia. Ou seja, $m // n$ à esquerda por R . \square

Teorema 4.2: Se uma reta é paralela à uma segunda, então a segunda é paralela à primeira.

Demonstração. Considere as retas m e n que passam pelos pontos A e B , e C e D , respectivamente, como na Figura 4.8. Seja P um ponto do segmento AB . Suponha que m seja a reta paralela à n , passando por P , à direita. Trace PQ perpendicular à n e QR perpendicular à m . O ponto R ficará à direita do ponto P , do lado do paralelismo. Do contrário, o triângulo PQR teria dois ângulos não agudos, o que é proibido pelo Teorema do Ângulo Externo 3.1. Devemos provar

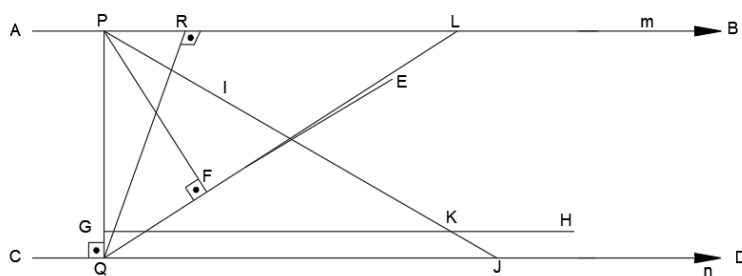


Figura 4.8: Simetria no paralelismo de retas na Geometria Hiperbólica.

que a reta n é paralela à reta m passando pelo ponto Q . Para isto, temos que provar que toda reta que passa pelo ponto Q e divide o ângulo $R\hat{Q}D$, intercepta m .

Considere uma de tais retas e seja E um de seus pontos dentro daquele ângulo. Trace PF perpendicular a esta reta. O ponto F pertence à semirreta de origem Q passando por E . Na semirreta S_{PQ} (semirreta de origem em P e passando por Q), marque um ponto G , de modo que $PG = PF$. O ponto $G \in PQ$, já que $PF < PQ$, como cateto e hipotenusa de um triângulo retângulo. Trace a perpendicular GH ao segmento PQ e construa um ângulo $G\hat{P}I$ igual ao ângulo $F\hat{P}B$.

Seja J o ponto onde a semirreta S_{PI} corta a reta n . Como a semirreta S_{GH} corta o lado PQ do triângulo PQJ , mas não corta o lado QJ , então, deve cortar PJ em algum ponto K . Em S_{PB} marque um ponto L tal que $PL = PK$ e trace FL . Observe que os triângulos PGK e PFL são congruentes. Consequentemente, $P\hat{F}L = P\hat{G}K = 90^\circ$. Logo os pontos Q, F, E e L são colineares. Portanto, a semirreta S_{QE} corta a reta m . \square

Teorema 4.3: Duas retas paralelas a uma terceira, na mesma direção, são paralelas entre si.

Demonstração. Primeiro, vamos considerar o caso em que a terceira reta está entre as outras duas.

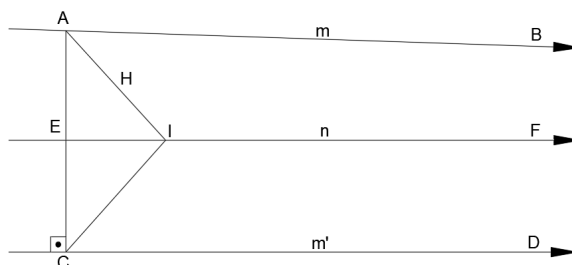


Figura 4.9: Apoio para a demonstração do caso 1 do Teorema 4.3 sobre retas paralelas na mesma direção, no qual a terceira reta de mesma direção está entre duas paralelas.

Considere as retas como na Figura 4.9, sendo a reta m , que passa por A e B , e a reta m' , que passa por C e D , paralelas à reta n , que passa por E e F ,

ambas na mesma direção. Podemos supor que o segmento AC é perpendicular a CD . Considere uma reta que passe nos pontos A e H , este último situado dentro do ângulo CB . Como m é paralela à n , esta corta a reta que passa pelos pontos E e F num ponto I . Trace CI . Usando o Teorema 4.3, sabemos que a reta que passa por E e F é paralela à reta que passa por C e D . Logo, a reta que entra no ângulo $C\hat{I}F$ deve interceptar a que passa por C e D . Isto prova o resultado neste caso.

Agora, vamos considerar o caso em que as duas retas, m e m' , estão do mesmo lado da terceira, n . Considere as retas como na Figura 4.10. Suponha que m' seja a reta m'' , passando por P , paralela a m' , na mesma direção do paralelismo (de m com relação à n).

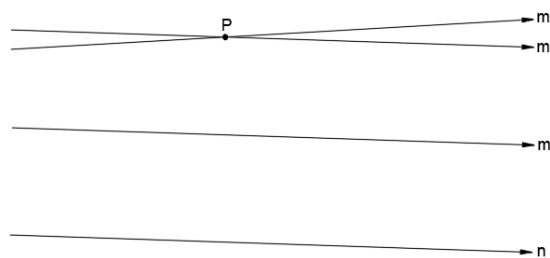


Figura 4.10: Apoio para a demonstração do caso 2 do Teorema 4.3 sobre retas paralelas na mesma direção, no qual duas retas estão do mesmo lado da terceira.

De acordo com a primeira parte provada, m'' é paralela a n . Como m também é paralela a n e o paralelismo de m e m'' é na mesma direção, concluímos que $m = m''$, já que a paralela, em uma determinada direção e passando pelo mesmo ponto, é única. Consequentemente, m é a paralela a m' . \square

A partir de agora, vamos utilizar a noção de pontos ideais e pontos ordinários, com o objetivo de simplificar os enunciados que se seguem.

4.2.1 Pontos Ideais

De uma maneira simplificada podemos afirmar que

Definição 4.3 (Pontos Ideais): Os dois pontos que se localizam um antes e um depois de todos os pontos de cada reta no plano são chamados *pontos ideais*. Tais pontos são representados por letras maiúsculas gregas.

A adição desses pontos é feita de modo que retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo. Deste modo, duas retas são paralelas se possuem um ponto ideal em comum.

Para deixar esse conceito mais embasado, indiquemos o plano hiperbólico por H e consideremos o conjunto S de todas as semirretas de H . Convencionemos por ora que uma reta possa ser paralela a ela mesma. Assim, segundo Arcari [1], página 57, podemos introduzir uma relação de equivalência em S envolvendo tal conceito.

Sejam $s_1, s_2 \in S$. Definimos que s_1 estabelece relação de equivalência com s_2 se, e somente se, s_1 é paralelo à s_2 . Desta forma, a convenção acima estabelecida e os

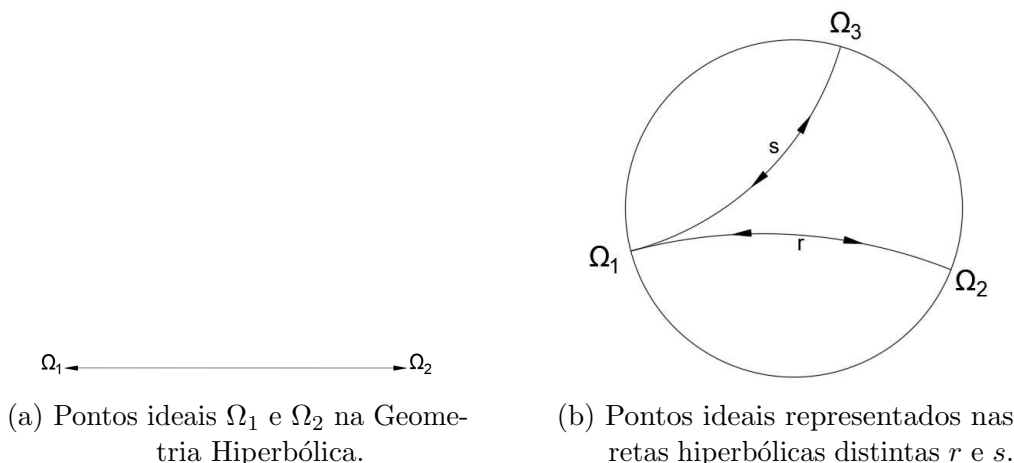


Figura 4.11: Representação de pontos ideais.

Teoremas 4.2 e 4.3 possibilitam de maneira imediata provar que temos uma relação de equivalência entre s_1 e s_2 em S .

As classes de equivalência da relação definida acima no conjunto S , das semirretas do plano hiperbólico H , são chamadas de *pontos ideais de H* . E, geralmente, tal classe de equivalência é indicada pela letra Ω . Veja a Figura 4.11a e a Figura 4.11b.

Sejam r uma reta e A um ponto pertencente à r . Deste modo, A define duas semirretas em r que podem ser representantes de duas classes de equivalência acima definidas. Qualquer outro ponto B pertencente à r irá definir as mesmas classes que A define. Assim, podemos dizer que uma reta r determina dois pontos ideais, um para cada sentido de paralelismo em r . Indicando tais pontos ideais por Ω_- e Ω_+ , podemos imaginá-los com os mesmos papéis dos pontos $-\infty$ e $+\infty$ associados à reta dos números reais. Desta forma, com a noção de reta orientada, é conveniente pensar em Ω_- como sendo um ponto que vem “antes” de todos os pontos de r e Ω_+ como sendo um ponto que vem “depois” de todos de r .

É conveniente ressaltar que os pontos ideais não são pontos do plano hiperbólico, assim como $+\infty$ e $-\infty$ não são pontos da reta real. Para diferenciá-los dos demais pontos do plano também fazemos uso do conceito de pontos ordinários.

Definição 4.4 (Pontos Ordinários): Os pontos pertencentes ao plano hiperbólico são chamados pontos ordinários. Tais pontos são representados por letras maiúsculas do alfabeto latino.

Esses novos conceitos se aplicam em *triângulos generalizados*, que é o tema da próxima seção.

4.3 Triângulos generalizados e suas propriedades

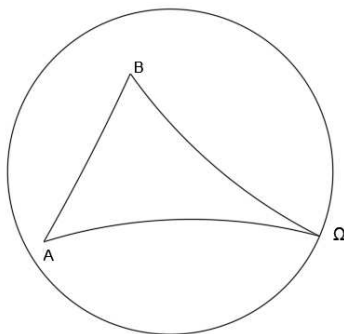
Encontraremos nessa seção outro ponto semelhante entre a teoria de triângulos ordinários e triângulos generalizados: a existência de ângulos internos e externos e como eles se relacionam. Também serão apresentados dois teoremas equivalentes ao Axioma de Pasch para triângulos generalizados.

Os teoremas e demonstrações dessa seção podem ser encontrados em Barbosa [2],

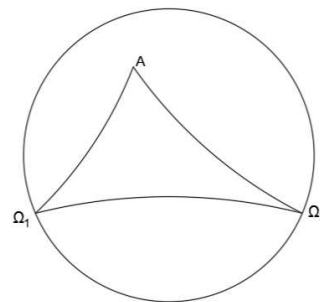
nas páginas 63 à 67.

Definição 4.5 (Triângulos Generalizados): Os triângulos generalizados podem ser formados por três conjuntos de pontos, a saber:

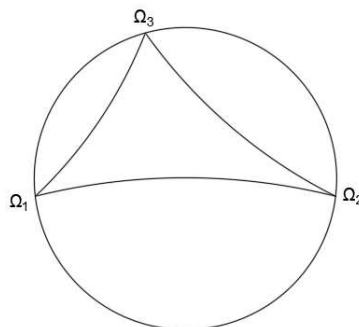
1. dois pontos ordinários e um ponto ideal (Veja a figura 4.12a);
2. dois pontos ideais e um ponto ordinário (Veja a figura 4.12b) ou
3. três pontos ideais (Veja a figura 4.12c).



(a) Triângulo formado por dois pontos ordinários e outro ideal.



(b) Triângulo formado por dois pontos ideais e outro ordinário.



(c) Triângulo formado por três pontos ideais.

Figura 4.12: Exemplos de triângulos generalizados.

Definição 4.6 (Triângulos Ordinários): Os triângulos ordinários são aqueles formados por três pontos ordinários.

Os triângulos generalizados separam o plano em duas regiões: interior e exterior. A região interior é constituída por todos os pontos dos segmentos de reta que ligam dois pontos dos lados do triângulo generalizado e a região complementar a essa é a região exterior. Um ponto pertencerá a esse tipo de triângulo se ele pertence ao seu interior.

Inicialmente, analisaremos os triângulos do tipo 1. Lembre-se que os pontos ideais serão representados por letras maiúsculas gregas e assim o triângulo generalizado $AB\Omega$ tem vértices ordinários A e B , e vértice ideal Ω . Sua figura será formada por duas semirretas paralelas com origens nos pontos A e B e pelo segmento de reta AB .

Dizemos que uma reta entra em um triângulo generalizado quando a intersecção desta reta com o interior do triângulo generalizado for não vazia. Assim, seja $AB\Omega$ um triângulo generalizado. Dizemos que uma reta r passa por um dos vértices de $AB\Omega$ quando A pertence à r ou B pertence à r ou é um dos pontos ideais de r . Analogamente, este conceito estende-se para triângulos generalizados $A\Omega_1\Omega_2$ ou $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$.

Teorema 4.4: Se uma reta entra em um triângulo generalizado $AB\Omega$ por um de seus vértices, então, ela intersecta o lado oposto a esse vértice.

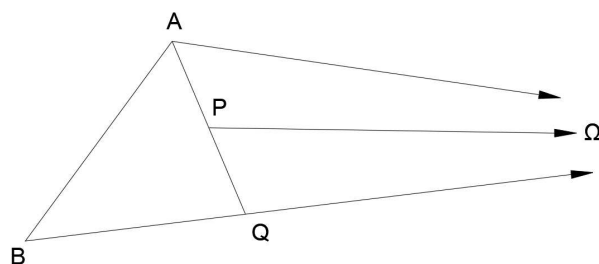


Figura 4.13: Apoio para a demonstração do Teorema 4.4, no qual se uma reta passa por um vértice do triângulo $AB\Omega$ então cortará o lado oposto.

Demonstração. Se a reta passa pelo ponto ordinário A , ou por B , então ela deve intersectar $B\Omega$ ou $A\Omega$, uma vez que as retas $A\Omega$ e $B\Omega$ são paralelas. Considere, pois, uma reta que vem do ponto Ω e passa em algum ponto P interior ao triângulo, como indicado na Figura 4.13. Pelo paralelismo, a semirreta S_{AP} intersecta $B\Omega$ em um ponto Q . Pelo Axioma de Pasch 2.1, a reta que vem de Ω e passa por P deve intersectar um dos outros dois lados do triângulo ABQ . Não pode intersectar BQ , pois do contrário, coincidiria com o lado $B\Omega$. Logo intersecta AB . \square

O seguinte teorema é uma reformulação do Axioma de Pasch, para triângulos generalizados e foi extraídos de Arcari [1], página 59.

Teorema 4.5: Se uma reta corta um dos lados do triângulo generalizado $AB\Omega$ e não passa por nenhum de seus vértices, então, ela intersecta um, e somente um, dos outros dois lados.

Demonstração. Considere a reta r entrando em $AB\Omega$ por $A\Omega$, o ponto Q como a intersecção entre r e $A\Omega$, conforme indicado na Figura 4.14a.

Temos dois casos a considerar. Se r entra em $BQ\Omega$, então, pelo Teorema 4.4, a intersecção entre r e $B\Omega$ é não vazia. Ou, se r entra em ABQ , pelo Axioma de Pasch, a intersecção entre r e AB é não vazia. Sabemos que r não contém BQ pois, caso contrário, B pertenceria a r , e isso contraria a hipótese.

Considere agora a situação em que r entra em $AB\Omega$ por AB . Seja C a intersecção entre a r e AB , conforme indicado na Figura 4.14b.

Temos novamente dois casos a considerar. Se a reta r entra em $AC\Omega$, pelo Teorema 4.4, a intersecção de r e $A\Omega$ é não vazia. Por outro lado, se r entra

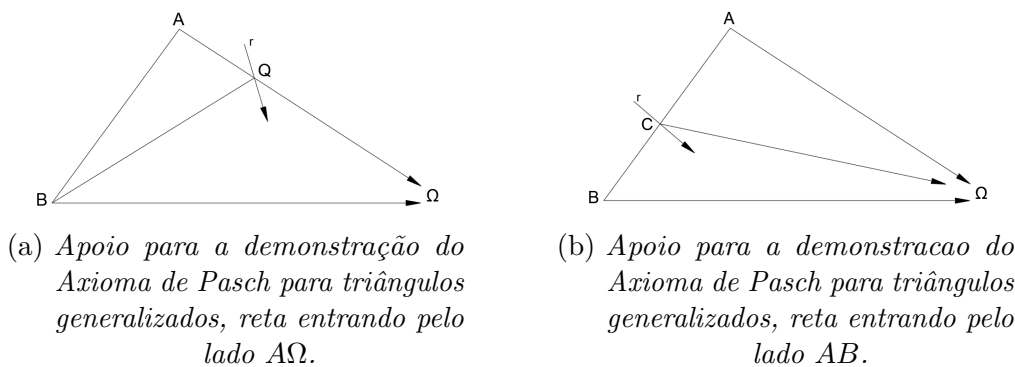


Figura 4.14: Apoio para demonstração do Axioma de Pasch para triângulos generalizados .

em $BC\Omega$, pelo mesmo Teorema 4.4, a intersecção entre r e $B\Omega$ é não vazia. Já que r não contém $C\Omega$, uma vez que r passaria por Ω e isso seria contrário à hipótese. \square

Outro ponto semelhante na teoria de triângulos ordinários e triângulos generalizados é a existência de ângulos internos e externos. Em um triângulo generalizado $AB\Omega$, seus ângulos internos são $A\hat{B}\Omega$ e $B\hat{A}\Omega$, enquanto que os ângulos externos correspondem aos suplementos desses ângulos, que são facilmente observados geometricamente pela extensão do lado AB . Os triângulos generalizados com três vértices ideais não possuem ângulos externos. Observe a Figura 4.15a.

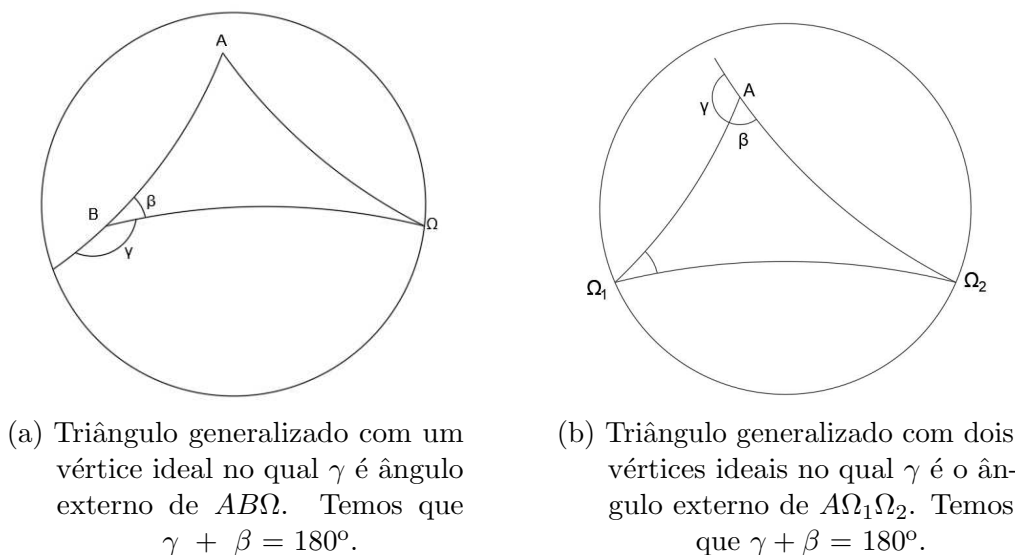


Figura 4.15: Exemplos de ângulos externos em triângulos generalizados com um ou dois vértices ideais. Os triângulos generalizados com três vértices ideais não possuem ângulos externos.

Os Teoremas 4.4 e 4.5 também valem para os demais tipos de triângulos generalizados. Esses dois teoremas são os equivalentes ao Axioma de Pasch para triângulos generalizados.

Observe a Figura 4.15a. Nela, os ângulos externos de $AB\Omega$ são os ângulos suplementares de $A\hat{B}\Omega$ e $B\hat{A}\Omega$, construídos sobre as retas suportes de AB , $A\Omega$ e $B\Omega$. Na Figura 4.15b os ângulos externos de $A\Omega_1\Omega_2$ são construídos sobre as retas suportes de $A\Omega_1$ e $A\Omega_2$. Os triângulos generalizados $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ não possuem ângulos externos.

Vejam a versão do Teorema do Ângulo Externo para triângulos generalizados.

Teorema 4.6 (Teorema do Ângulo Externo para triângulos generalizados): Um ângulo externo de um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

Demonstração. Dado um triângulo generalizado $AB\Omega$, definimos S_{AB} como o segmento de reta que passa por A e B . Tome $C \in S_{AB}$, fora do segmento AB . Temos que $C\hat{B}\Omega$ é um ângulo externo do triângulo. Desejamos provar que $C\hat{B}\Omega > B\hat{A}\Omega$. Para isto, trace, a partir de B , um segmento BD , tal que $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega$. Como decorrência dos quatro primeiros postulados de Euclides, a reta que passa por B e D não intercepta $A\Omega$. Consequentemente, o ponto D não pode estar na região interior ao triângulo $AB\Omega$, para que valha o resultado.

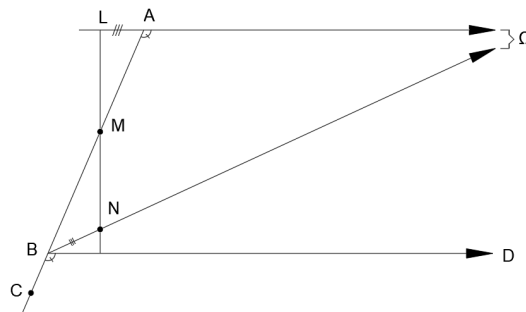


Figura 4.16: Apoio para a Demonstração do Teorema 4.6.

Resta, portanto, excluir a possibilidade de que o ponto D esteja sobre $B\Omega$. Suponha que ocorra. Seja M o ponto médio de AB . Baixe uma perpendicular de M até um ponto $N \in B\Omega$. Na reta que passa por A e Ω , marque um ponto L de modo que $LA = BN$ e que L e N estejam em lados opostos relativamente à reta que passa por A e B . Pelo primeiro caso de congruência de triângulos (ordinários), $LAM = NBM$. Segue-se facilmente, que os pontos L , M e N são colineares e, conseqüentemente, LN é uma perpendicular comum à $L\Omega$ e $N\Omega$. Mas, pela Proposição 4.2, deveriam ser agudos. Contradição! \square

4.3.1 Congruência de Triângulos Generalizados

Quanto à congruência de triângulos na Geometria Hiperbólica, ela existirá sempre que dois triângulos $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ possuírem uma correspondência entre seus vértices de tal forma que os lados finitos e os ângulos correspondentes sejam todos congruentes. Analogamente, a relação descrita por $AB\Omega = A'B'\Omega'$ representa que a congruência de triângulos leva A em A' , B em B' e Ω em Ω' . Serão apresentadas, a seguir, as condições mínimas necessárias para que os triângulos generalizados, do tipo considerado até aqui, sejam congruentes.

Teorema 4.7 (Primeiro caso de congruência de triângulos generalizados - caso “lado-ângulo”): Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ dois triângulos generalizados. Se $AB = A'B'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

Demonstração. Devemos mostrar que $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Vamos supor que este não seja o caso. Sem perda de generalidade, podemos supor que $A\hat{B}\Omega > A'\hat{B}'\Omega'$. Tome, pois, uma semirreta S_{BC} tal que $A\hat{B}C = A'\hat{B}'\Omega'$. Esta semirreta entra no ângulo $A\hat{B}\Omega$, como mostra a Figura 4.17. Logo pelo Teorema 4.4, ela intersecta o lado $A\Omega$ em um ponto D . Tome o ponto D' em $A'\Omega'$, tal que $A'D' = AD$. Segue que $ABD = A'B'D'$.

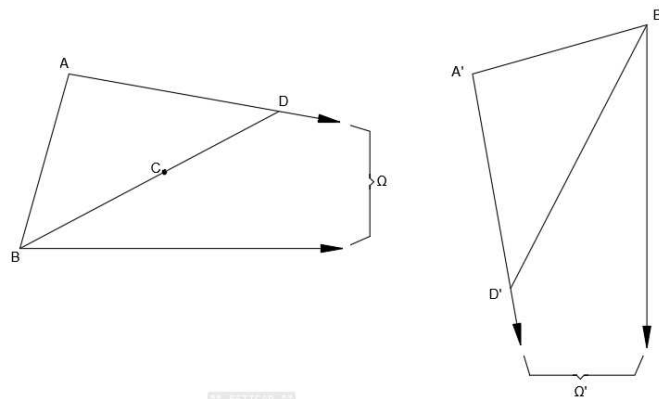


Figura 4.17: Apoio para a demonstração do caso Lado-ângulo de congruência de triângulos generalizados.

Consequentemente, $A'\hat{B}'D = A\hat{B}D = A'\hat{B}'\Omega'$, o que é absurdo. □

Teorema 4.8 (Segundo caso de congruência de triângulos generalizados - caso ângulo - ângulo): Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ dois triângulos generalizados. Se $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

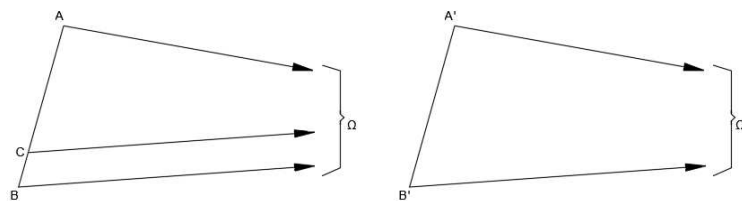


Figura 4.18: Apoio para a demonstração do caso ângulo-ângulo de congruência de triângulos generalizados.

Demonstração. Devemos provar que $AB = A'B'$. Vamos supor que este não seja o caso. Sem perda de generalidade, podemos supor que $AB > A'B'$. Seja C um ponto de AB tal que $AC = A'B'$, como indicado na Figura 4.18. Considere a semirreta $C\Omega$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos generalizados, teremos que $AC\Omega = A'B'\Omega'$. Portanto, $A\hat{C}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Como este último é, por hipótese, igual a $A\hat{B}\Omega$, então, o triângulo $CB\Omega$ possui um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente, o que contradiz o Teorema 4.6. □

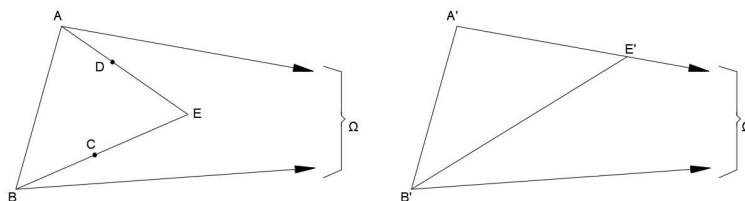


Figura 4.19: Apoio para a demonstração do caso Triângulo-Isósceles de congruência de triângulos generalizados.

Teorema 4.9 (Terceiro caso de congruência de triângulos generalizados - caso “triângulos isósceles”): Todos os triângulos generalizados isósceles com bases de mesma medida são congruentes entre si, ou seja, se $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são tais que $AB = A'B'$, $\hat{A}\hat{B}\Omega = \hat{B}\hat{A}\Omega$ e $\hat{A}'\hat{B}'\Omega' = \hat{B}'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

Demonstração. É suficiente provar que $\hat{A}\hat{B}\Omega = \hat{A}'\hat{B}'\Omega'$. Vamos supor que este não seja o caso. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\hat{A}\hat{B}\Omega > \hat{A}'\hat{B}'\Omega'$. Construa, então, ângulos $\hat{A}\hat{B}C$ e $\hat{B}\hat{A}D$, iguais entre si e iguais a $\hat{A}'\hat{B}'\Omega'$, como mostra a Figura 4.19. Pelo Teorema 4.4 e pelo Axioma de Pasch 2.1, concluímos que as semi-retas S_{AD} e S_{BC} se interceptam em um ponto E no interior do triângulo $AB\Omega$. Marque, no lado $A'\Omega'$, um ponto E' , tal que $A'E' = AE$. Segue que os triângulos ABE e $A'B'E'$ são congruentes. Mas, então, teremos $\hat{A}'\hat{B}'E' = \hat{A}\hat{B}E$. Como este último é igual a $\hat{A}'\hat{B}'\Omega'$, o ponto E' deve pertencer a $B'\Omega'$, o que é absurdo. \square

4.4 Ângulo de Paralelismo

O ângulo de paralelismo entre as retas s e r no ponto P foi caracterizado anteriormente na Definição 4.2 por meio das Proposições 4.1 e 4.2. Veja a Figura 4.20.

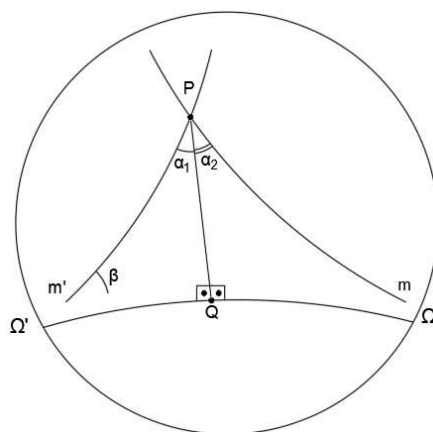


Figura 4.20: Ângulo de paralelismo na Geometria Hiperbólica.

Ressaltamos que a noção de ângulo de paralelismo está associada a um triângulo retângulo generalizado $PQ\Omega$ e que seu ângulo interno \hat{P} é exatamente o ângulo de paralelismo entre s e r em P , como indica a Figura 4.21.

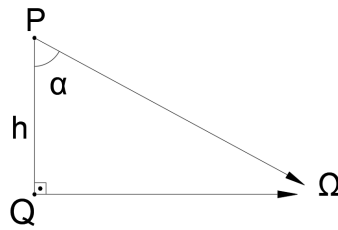


Figura 4.21: Ângulo de paralelismo no triângulo retângulo generalizado.

Segundo Barbosa [2], página 69, tal ângulo depende somente do comprimento do segmento AP , conclusão imediata do primeiro caso de congruência para triângulos generalizados, descrito na seção anterior 4.3.1. Seja h o comprimento de AP e $\Theta(h)$ a medida, em radianos, do ângulo de paralelismo. Como consequência do Teorema do Ângulo Externo 4.6, temos

$$\text{Se } h_1 > h_2 \text{ então } \Theta(h_1) < \Theta(h_2) ,$$

o que caracteriza uma função estritamente decrescente, como exemplifica a Figura 4.22

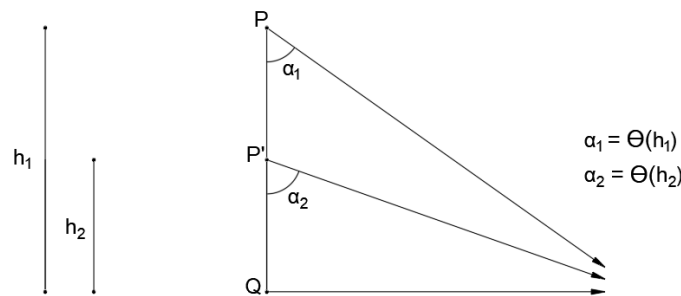


Figura 4.22: A função ângulo de Paralelismo é estritamente decrescente.

Já que AP pode assumir qualquer tamanho, a função Θ está definida para todos os números reais não negativos. Quando $h = 0$ temos que Θ equivale a um ângulo reto. Para valores negativos de h , definimos a função Θ como

$$\Theta(h) + \Theta(-h) = 180^\circ$$

Deste modo, podemos colocar as coordenadas em uma reta, na forma usual, na qual a função Θ estará definida em cada ponto da reta. Ainda poderá ser útil considerar Θ em radianos. Para isso, consideramos que

$$\Theta(0) = \pi/2 \quad \text{e} \quad \Theta(h) + \Theta(-h) = \pi.$$

4.5 Quadriláteros Especiais

Existem dois tipos de quadriláteros especialmente interessantes no estudo da Geometria Hiperbólica. Tais quadriláteros foram mencionados anteriormente no desenvolvimento deste trabalho nas subseções 3.2.6 e 3.2.7. São eles os quadriláteros

de Saccheri e os de Lambert. Vejamos, a seguir, as características principais de cada tipo. Os teoremas, proposições e suas respectivas demonstrações contidos nessa seção podem ser encontrados em [2], nas páginas 70 à 73.

4.5.1 Quadriláteros de Saccheri

Os quadriláteros $ABCD$ nos quais $AB = CD$ e os ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{B}CD$ são retos são chamados de Quadriláteros de Saccheri, pois foram estudados pelo matemático Giovanni Saccheri. Dizemos que, em um quadrilátero de Saccheri, o lado comum aos dois ângulos retos é denominado base, o lado oposto à base é chamado topo, os outros dois são chamados apenas de lados do quadrilátero e os dois ângulos não retos são os ângulos do quadrilátero ou ainda os ângulos do topo. Na Geometria Euclidiana, os quadriláteros de Saccheri são retângulos, entretanto, isso não ocorre na Geometria Hiperbólica.

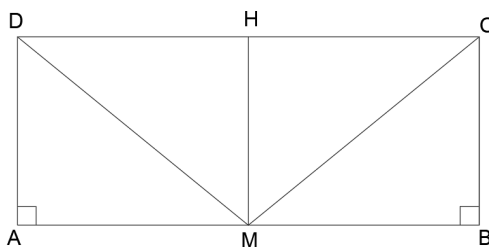


Figura 4.23: Apoio para a demonstração da Proposição 4.3.

Proposição 4.3: A reta ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular ao topo e à base; os ângulos do topo são congruentes.

Demonstração. Seja AB a base do quadrilátero de Saccheri $ABCD$, mostrado na Figura 4.23. Sejam M e H os pontos médios da base e do topo respectivamente. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, vale a igualdade $DAM = CBM$, logo, $DMH = CMH$, pelo caso LLL. Segue daí que MH é perpendicular a DC e, somando os ângulos em M , MH também é perpendicular a AB . Somando ângulos em D e C , obtemos a igualdade dos ângulos do topo. \square

Corolário 4.1: A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte das retas que não se interceptam.

Teorema 4.10: Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.

Demonstração. Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri e Ω um dos pontos ideais da reta que passa por A e B . Sem perda de generalidade, podemos supor que $B \in A\Omega$. Considere, então, as semirretas $D\Omega$ e $C\Omega$. Seja E um ponto tal que $C \in DE$. Observe a Figura 4.24.

Pelo Corolário 4.1, o segmento $D\Omega$ entra no ângulo $\hat{A}DE$, e $C\Omega$ entra no ângulo $\hat{B}CE$. Tem-se que $\hat{A}\hat{D}\Omega = \hat{B}\hat{C}\Omega$, por serem ângulos de paralelismo

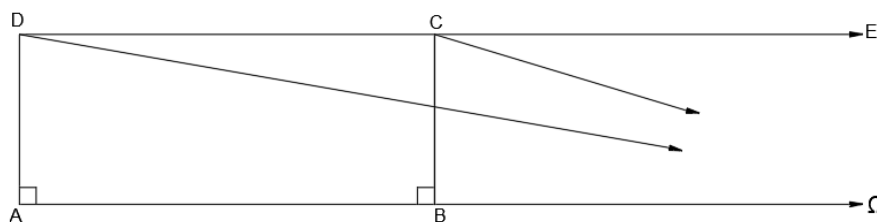


Figura 4.24: Apoio para a demonstração de que os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são agudos.

correspondentes a segmentos congruentes. Além disso, no triângulo generalizado $CD\Omega$, o ângulo externo $\widehat{EC\Omega}$ é maior do que o ângulo interno não adjacente $\widehat{CD\Omega}$. Portanto, $\widehat{BCE} > \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. Logo os ângulos do topo são agudos. \square

Para facilitar a visualização dos ângulos agudos ilustraremos o quadrilátero de Saccheri como na Figura 4.25.

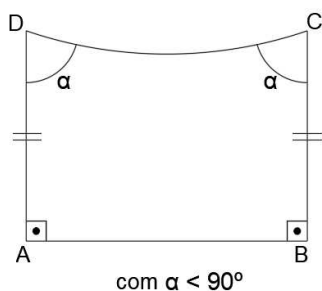


Figura 4.25: O quadrilátero de Saccheri possui dois ângulos da base retos e dois lados, distintos da base e do topo, congruentes e os ângulos do topo congruentes e agudos.

Mesmo com o Teorema 4.10 sendo consequência do quinto postulado da Geometria Hiperbólica 4.1, como a Proposição 4.3 é baseada apenas nos quatro primeiros Postulados de Euclides, ela é também uma proposição válida na Geometria Euclidiana.

4.5.2 Quadriláteros de Lambert

Em seus estudos, Lambert usou quadriláteros $ABCD$ nos quais três dos seus ângulos internos eram retos. O único ângulo desconhecido é denominado ângulo do quadrilátero de Lambert.

Teorema 4.11: O ângulo de um quadrilátero de Lambert é sempre agudo.

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero de Lambert com $\hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$, como ilustra a Figura 4.26. Na semirreta S_{AB} , marque o ponto E , tal que $EA = AB$. Em sua extremidade, trace o segmento EF perpendicular a AB e congruente a BC . Trace FA , FD e AC . É imediato verificar que $FEA = CBA$.

Como consequência, obtêm-se a congruência dos triângulos FAD e CAD . Portanto, o ângulo \widehat{ADF} é reto e, então, os pontos F , D e C são colineares. Por construção, $FEBC$ é um quadrilátero de Saccheri. Logo, o ângulo \widehat{BCD} é agudo. \square

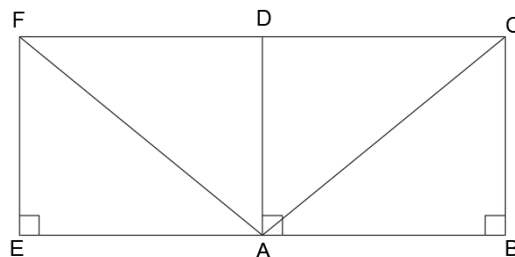


Figura 4.26: Apoio para a Demonstração do teorema 4.11, mostrando que o ângulo desconhecido de um quadrilátero de Lambert é agudo.

Teorema 4.12: Seja $ABCD$ um quadrilátero no qual $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$. Então, $\hat{C} > \hat{D}$ se e só se $AD > CD$.

Demonstração. Para a primeira parte dessa demonstração, considere a Figura 4.27. Se $AD > BC$, tome $E \in AD$, tal que $AE = BC$ e trace EC . Então, $EABC$

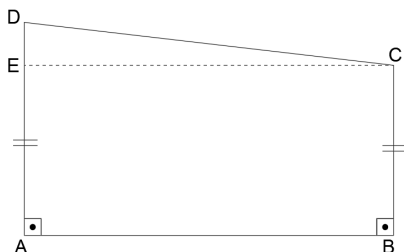


Figura 4.27: Apoio para a demonstração do Teorema 4.12.

é um quadrilátero de Saccheri, logo, $\hat{A}\hat{E}C = \hat{B}\hat{C}E$. Como $\hat{A}\hat{E}C$ é ângulo externo do triângulo DEC e, claramente, $\hat{B}\hat{C}D > \hat{B}\hat{C}E$, podemos concluir que $\hat{A}\hat{D}C < \hat{B}\hat{C}D$.

Analogamente se $AD < CB$, temos que o ângulo \hat{C} é menor do que o ângulo \hat{D} . Seja o ponto E pertencente ao lado BC tal que AD e BE sejam congruentes, como indicado na Figura 4.28. Pela Proposição 4.3 temos $\hat{A}\hat{D}E = \hat{B}\hat{E}D$. Pelo Teorema do Ângulo Externo 4.6, temos $\hat{B}\hat{E}D > \hat{B}\hat{C}D$. Logo $\hat{A}\hat{D}E > \hat{B}\hat{C}D$ e assim $\hat{A}\hat{D}E + \hat{E}\hat{D}C > \hat{B}\hat{C}D$. Portanto, o ângulo \hat{D} é maior do que o ângulo \hat{C} .

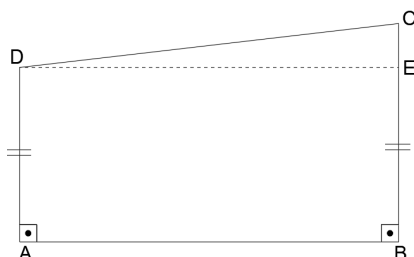


Figura 4.28: Apoio para a demonstração do Teorema 4.12.

□

Para facilitar o entendimento, o quadrilátero de Lambert pode ser pensado como descrito na Figura 4.29.

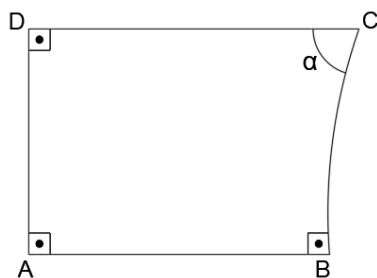


Figura 4.29: O quadrilátero de Lambert possui três ângulos retos e um ângulo α agudo.

4.6 Soma dos ângulos internos de um triângulo

Na Geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a soma de dois ângulos retos. Este resultado não é válido na Geometria Hiperbólica, como veremos no seguinte teorema, disponível em Arcari [1], página 73.

Teorema 4.13 (Soma dos ângulos de um triângulo ordinário): A soma dos ângulos de qualquer triângulo ordinário é menor do que dois ângulos retos.

Prova original de Lobachewsky. A prova se dará em duas etapas. Primeiro mostraremos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo retângulo ordinário é menor do que dois ângulos retos e, posteriormente, mostraremos que esse resultado se estende para triângulos ordinários quaisquer.

Consideremos o triângulo ABC , reto em C , como indicado na Figura 4.30.

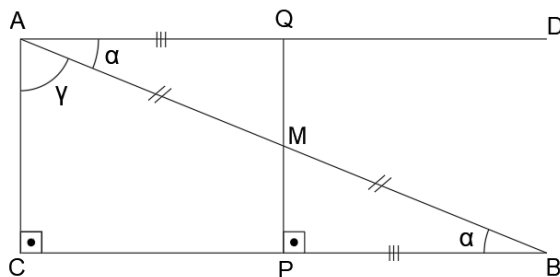


Figura 4.30: Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo ordinário é menor do que dois ângulos retos.

Seja o ponto P , o pé da perpendicular baixada de M à CB , tal que M é o ponto médio de AB . Seja D um ponto tal que $D\hat{A}B = \alpha = A\hat{B}C$. Seja Q um ponto pertencente à reta que passa por AD tal que AQ é congruente à PB . Pelo caso LAL, os triângulos AQM e BPM são congruentes.

Assim, MQ é perpendicular à reta AD e os pontos P, M e Q são colineares. Deste modo, $AQPC$ é um quadrilátero de Lambert e $\alpha + \gamma < 90^\circ$. Portanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$.

Considerando agora um triângulo ordinário qualquer ABC , vamos supor, sem perda de generalidade, que o maior ângulo esteja no vértice A . Traçando a altura relativa à esse vértice, teremos os triângulos retângulos ordinários ABD e ACD ,

como mostrado na Figura 4.31, de onde concluímos que $\alpha + \beta < 90^\circ$, $\gamma + \delta < 90^\circ$ e $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 180^\circ$, pelo caso anterior.

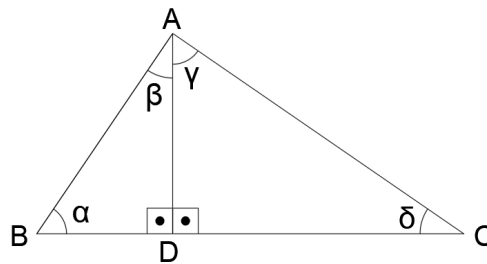


Figura 4.31: Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos de um triângulo ordinário qualquer é menor do que dois ângulos retos.

□

Os três teoremas adiante foram extraídos de Barbosa [2], páginas 75 a 77.

Teorema 4.14: A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.

Demonstração. Devemos provar que a soma dos ângulos de três tipos de triângulos generalizados é menor do que dois ângulos retos. Desta forma, vamos aos casos.

Consideramos, inicialmente, o triângulo generalizado $AB\Omega$ e baixamos a altura relativa ao vértice A até o lado $B\Omega$, intersectando-o no ponto C . Deste modo, obtemos o triângulo retângulo ordinário ABC e o triângulo retângulo generalizado $AC\Omega$, que podem ser vistos na Figura 4.32.

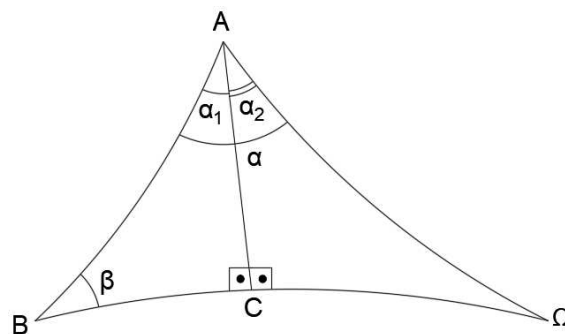


Figura 4.32: Triângulo generalizado com dois vértices ordinários e um vértice ideal.

Pelo Teorema 4.13 $\alpha_1 + \beta < 90^\circ$, $\alpha_2 < 90^\circ$ e $\alpha_1 = \alpha_2$ pela Proposição 4.2 e, por definição $\hat{\Omega}$ é nulo. Assim, teremos que $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta < 180^\circ$ e, como $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, temos que $\alpha + \beta < 180^\circ$.

Consideramos, agora, o triângulo generalizado $A\Omega_1\Omega_2$. Por definição, os ângulos Ω_1 e Ω_2 são nulos. Como as semirretas $A\Omega_1$ e $A\Omega_2$ são paralelas ao lado $\Omega_1\Omega_2$ à esquerda e à direita, respectivamente, basta-nos baixar a perpendicular de $\Omega_1\Omega_2$ pelo ponto A e utilizar a Proposição 4.2, de onde concluímos que os ângulos

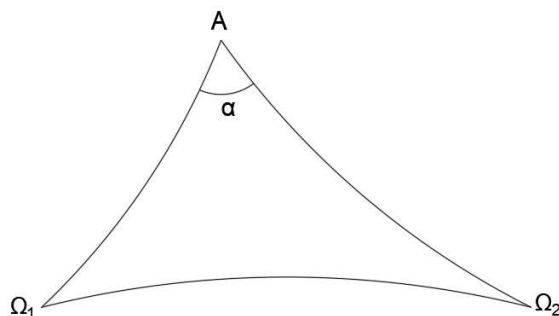


Figura 4.33: Triângulo generalizado com um vértice ordinário e dois vértices ideais.

de paralelismo são agudos e, assim, $\Omega_1\hat{A}\Omega_2 < 180^\circ$. Veja a Figura 4.33. Por fim, no caso do triângulo generalizado $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, veja a Figura 4.34, por definição, os três ângulos de um triângulo generalizado $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ são nulos. Logo, a soma também será nula e a prova se conclui.

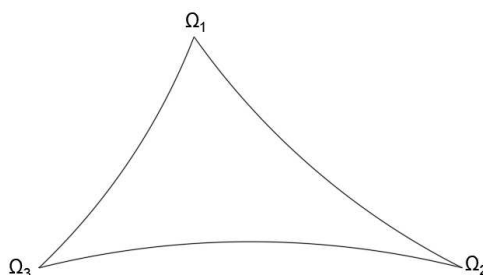


Figura 4.34: Triângulo generalizado com três vértices ideais. Nesta situação todos os ângulos internos são nulos!

□

Corolário 4.2: A soma dos ângulos internos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.

Demonstração. Considere um quadrilátero convexo ordinário $ABCD$. Tracemos por um de seus vértices a diagonal desse quadrilátero, suponhamos, sem perda de generalidade, que seja pelo vértice A . A diagonal AC divide o quadrilátero em dois triângulos ordinários ABC e ADC . Sejam S_{T_1} e S_{T_2} a soma dos ângulos internos dos triângulos ABC e ADC , respectivamente. Do Teorema 4.14, temos que $S_{T_1} < \pi$ e $S_{T_2} < \pi$. Logo, a soma dos ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ será $S_{T_1} + S_{T_2} < 2\pi$. □

Teorema 4.15 (Caso de congruência AAA da Geometria Hiperbólica): Se os três ângulos de um triângulo são respectivamente iguais aos três ângulos de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Considere os triângulos ordinários ABC e $A'B'C'$, nos quais $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Suponhamos que os lados correspondentes sejam

diferentes, por exemplo, $AB > A'B'$. Sejam os pontos D e E tais que D é ponto sobre AB de modo que $AD \equiv A'B'$ e o ponto $E \in AC$ de modo que $AE \equiv AC$. Desta forma, temos três situações possíveis.

1º Caso) Lado $AC =$ Lado AE

Observe a Figura 4.35. Nela os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAL(lado-ângulo-lado). Logo $\hat{A}DE \equiv \hat{A}'B'C' \equiv \hat{A}BC$. O que contradiz o Teorema do Ângulo Externo 4.6.

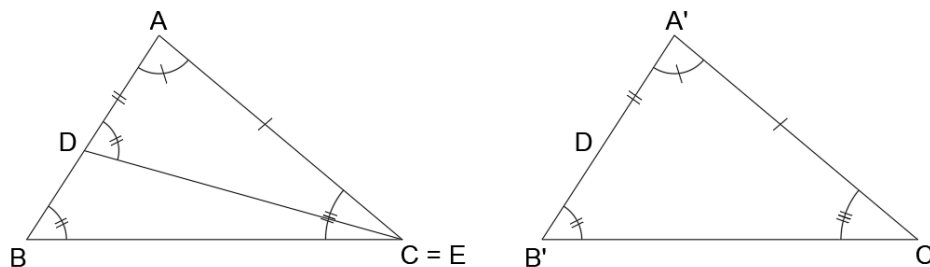


Figura 4.35: Apoio para a demonstração do primeiro caso de congruência “ângulo- ângulo- ângulo” para triângulos ordinários.

2º Caso) Lado $AE <$ lado AC

Pela Figura 4.36 percebemos que os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAL(lado-ângulo-lado). Desta forma, $\hat{A}DE \equiv \hat{A}'B'C'$ e $\hat{A}ED \equiv \hat{A}'C'B'$. Assim, a soma dos ângulos internos do quadrilátero $BDEC$ é 360° , o que contradiz o Corolário 4.2.

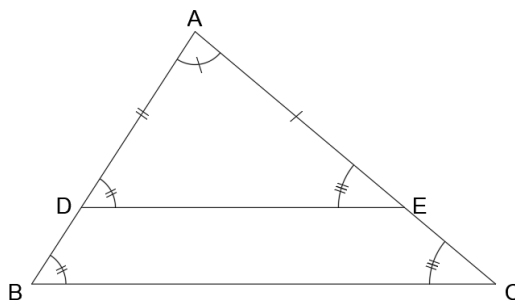


Figura 4.36: Apoio para a demonstração do segundo caso de congruência “ângulo- ângulo- ângulo” para triângulos ordinários.

3º Caso) lado $AE >$ lado AC

Os triângulos ADE e $A'B'C'$ da Figura 4.37 são congruentes pelo caso LAL(lado-ângulo-lado). Desta maneira, os triângulos BDF e FCE possuem um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente. O que contradiz o Teorema do Ângulo Externo 4.6.

Deste modo, $AB \equiv A'B'$ e, pelo caso LAL, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes. \square

Teorema 4.16: A função ângulo de paralelismo Θ está definida para qualquer número real não negativo e é sobre o intervalo $(0,90]$.

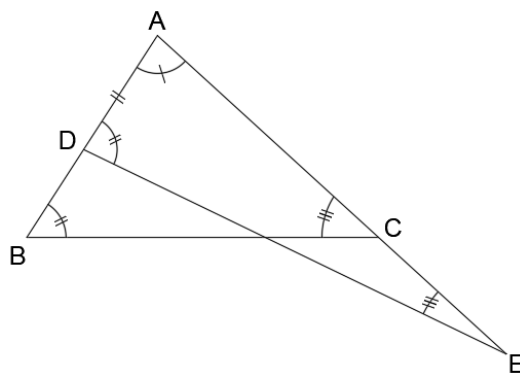


Figura 4.37: Apoio para a demonstração do terceiro caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.

Demonstração. O que queremos mostrar é que para qualquer ângulo agudo α dado, existirá um número não negativo h de tal forma que $\Theta(h) = \alpha$. Para isso, tomemos um ângulo $B\hat{A}C$ de medida equivalente à α . Vamos supor, por absurdo, que todas as retas perpendiculares à S_{AC} intersectam S_{AB} .

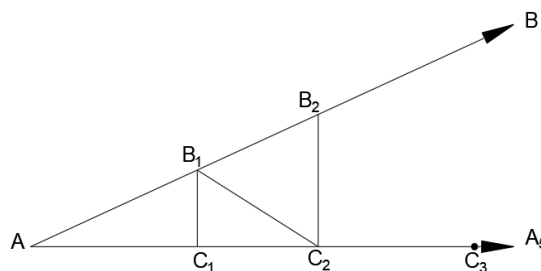


Figura 4.38: Apoio para a demonstração do Teorema 4.16.

Veja a Figura 4.38. Sobre a semirreta S_{AC} marcamos um ponto qualquer C_1 . Seja B_1 a intersecção entre a perpendicular à semirreta S_{AC} e a semirreta S_{AB} . Como a soma dos ângulos internos do triângulo AB_1C_1 é menor que dois ângulos retos, podemos indicá-la por $180^\circ - \epsilon$. Marcamos, então, um ponto C_2 sobre S_{AC} fora de AC_1 , tal que $C_1C_2 = AC_1$, e consideramos o ponto B_2 como sendo a intersecção entre a perpendicular à S_{AC} e a semirreta S_{AB} . Desta forma, os triângulos AB_1C_1 e $C_2B_1C_1$ são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Deste modo, a soma dos ângulos do triângulo AB_1C_2 é $180^\circ - 2\epsilon$. Analogamente, como o triângulo AB_2C_2 é subdividido pelo segmento B_1C_2 , a soma de seus ângulos internos será inferior à $180^\circ - 2\epsilon$. E, repetindo esse argumento indutivamente, encontramos triângulos cuja soma dos ângulos internos é menor que $180^\circ - n\epsilon$. Para n suficientemente grande, obtemos um triângulo cuja soma dos ângulos é negativa, o que é um absurdo! Logo, existe uma reta perpendicular à semirreta S_{AC} e que não intersecta S_{AB} . O conjunto de todas as retas perpendiculares à S_{AC} podem ser separadas em subconjuntos

- das retas que intersectam S_{AB} , e das
- retas que não intersectam S_{AB} e

existe exatamente uma reta m que separa esses dois subconjuntos. Vamos mostrar que m é paralela à S_{AB} e portanto não a intersecta.

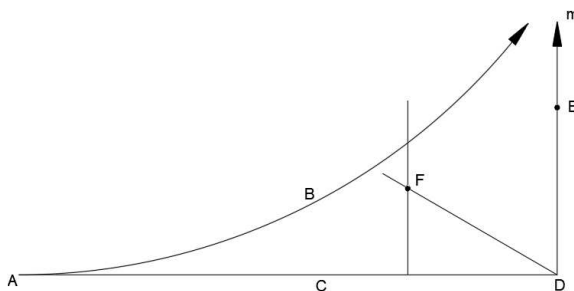


Figura 4.39: Apoio para a demonstração do Teorema 4.16.

Seja D o ponto de intersecção entre m e S_{AC} e $E \in m$ um ponto como indicado na Figura 4.39. O ângulo $\hat{A}DE$ é dividido por uma semirreta qualquer S_{DF} . Como DF não intersecta S_{AB} , F pertence a uma das perpendiculares à S_{AC} que tem intersecção com S_{AB} . Pelo Axioma de Pasch 2.1, a semirreta S_{DF} intersecta S_{AB} . Porém, se qualquer semirreta que divide o ângulo $\hat{A}DE$ intersecta S_{AB} , temos que S_{DE} será paralela à S_{AB} . Desta forma, o ângulo de paralelismo α tem o comprimento h do segmento AD . \square

4.7 Pontos ultra-ideais

Vamos estudar agora propriedades importantes da Geometria Hiperbólica relacionadas às retas que não se intersectam. Os teoremas e demonstrações dessa secção podem ser encontrados em Barbosa [2], páginas 79 a 83.

Teorema 4.17: Duas retas que não se intersectam têm uma e só uma perpendicular em comum.

Demonstração. Vamos inicialmente garantir que exista a reta perpendicular que é comum às duas retas que não se intersectam. Posteriormente, vamos provar que essa perpendicular é única.

(Prova da Existência). Sejam m e n um par de retas que não se intersectam e A e B dois pontos de n . Tracemos os segmentos AC e BD perpendiculares à m . Se $AC = BD$, o quadrilátero $ACDB$ é de Saccheri 4.5.1. Consequentemente, n e m possuem uma perpendicular em comum.

No caso de AC e BD não serem congruentes, sem perda de generalidade, vamos supor que $AC > BD$. Seja Ω o ponto ideal da semirreta S_{AB} . Vamos marcar os pontos E e H tais que $E \in AC$, $EC = BD$ e H seja um ponto qualquer na semirreta S_{CD} fora do segmento CD . Construa o ângulo $\hat{C}EF = \hat{D}B\Omega$ com o ponto F no quadrilátero $ABCD$.

Vamos mostrar que a semirreta S_{EF} intersecta n . Considere a semirreta $C\Omega$ interior ao ângulo $\hat{A}CH$ e a semirreta $D\Omega$ interior ao ângulo $\hat{B}DH$. Desde que $\hat{H}D\Omega > \hat{H}C\Omega$, pelo Teorema do Ângulo Externo 4.6, podemos traçar uma linha

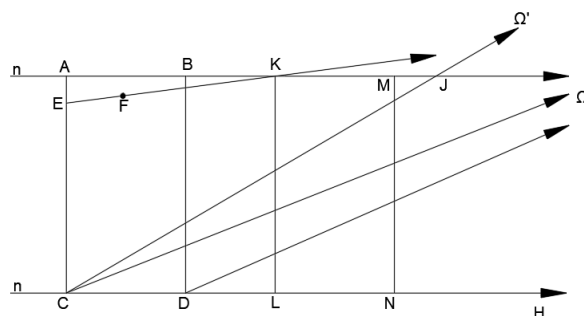


Figura 4.40: Apoio para a demonstração do Teorema 4.17.

CJ , entrando no ângulo $A\hat{C}\Omega$, tal que $H\hat{C}J = H\hat{D}\Omega$. essa reta interceptará a reta n em um ponto J .

Posto isso, ao compararmos S_{EF} e S_{CJ} nos quadriláteros $FECJ$ e $JBD\Omega$, percebemos que elas são paralelas. Logo, S_{EF} tem com a reta n um ponto K de intersecção, situado no intervalo AJ .

Trace o segmento KL perpendicular à reta m , como mostrado na Figura 4.40. Sobre a semirreta $B\Omega$ marcamos o ponto M de modo que $MB = EK$. Na semirreta S_{DH} , marque o ponto N de modo que $ND = CL$ e trace MN . Utilizando congruência de triângulos é fácil mostrar que os quadriláteros $EKLC$ e $BMND$ são congruentes. Desta maneira, MN é perpendicular a m e $MN = KL$. Logo, $KLNM$ é um quadrilátero de Saccheri e o resultado se segue.

(Prova da Unicidade) Se existem duas retas perpendiculares às retas m e n , temos um quadrilátero com quatro ângulos retos, que contradiz o Corolário 4.2. Logo, só existe uma reta que é perpendicular a duas retas que não se intersectam. \square

Com o objetivo de facilitar a notação, enunciados e provas de teoremas e proposições, os pontos ultra-ideais são introduzidos. Segundo Barbosa [2], página 80, vamos associar a cada reta m um ponto ultra ideal, representado por Γ_m . Em uma reta n serão acrescentados os pontos ultra ideais Γ_m aos pontos ordinários e ideais, onde m é qualquer reta perpendicular à n .

Definição 4.7 (Pontos Ultra-Ideais): O ponto ultra-ideal é o único ponto em comum de duas retas que não se intersectam.

Como esse acréscimo juntamente com o Teorema 4.17 podemos afirmar que duas retas que não se intersectam possuem exatamente um ponto em comum: o ponto ultra-ideal!

O feixe de retas perpendiculares à reta m é composto pelo conjunto de todas as retas que passam pelo ponto ultra-ideal Γ_m . Desta forma, duas retas quaisquer sempre terão um ponto em comum, seja ele

- um ponto ordinário;
- um ponto ideal, no caso de retas paralelas, ou

- um ponto ultra-ideal, no caso de retas que não se intersectam.

Teorema 4.18: As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes (em um ponto ordinário, ideal ou ultra-ideal).

Demonstração. Consideraremos três casos possíveis. Caso I. Duas mediatrizes se intersectam em um ponto ordinário do plano. O resultado pode ser obtido diretamente pelo uso de congruência de triângulos. Caso II. Duas mediatrizes se intersectam em um ponto ultra-ideal Γ_m . Neste caso, m é perpendicular comum às duas, e devemos mostrar que a terceira mediatriz também é perpendicular a m , o que é equivalente a mostrar que ela passa também pelo ponto Γ_m .

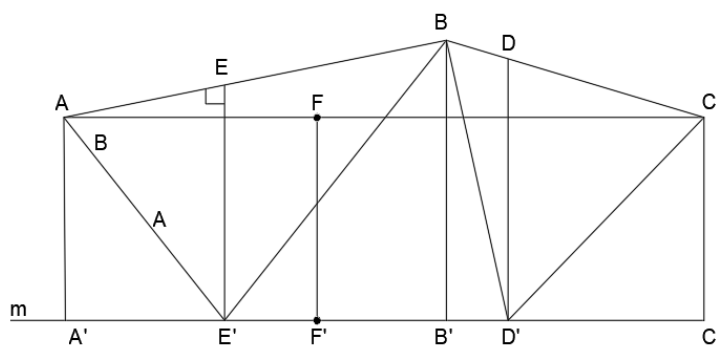


Figura 4.41: Apoio para a demonstração do Teorema 4.18.

Seja ABC um triângulo e, D , E e F os pontos médios dos lados BC , BA e AC , respectivamente. Suponha que as mediatrizes dos lados AB e BC têm m como perpendicular comum. Na Figura 4.41 estas mediatrizes são DD' e EE' e m é a reta passando por D' e E' . Trace os segmentos AA' , BB' e CC' , todos perpendiculares a m . Trace também AE' , BE' , BD' e CD' . Tem-se, então,

$$AA'E' = BEE' \quad \text{e} \quad BDD' = CDD'$$

Como consequência, tem-se também que

$$AA'E' = BB'E' \quad \text{e} \quad BB'D' = CC'D'$$

Segue que

$$AA' = BB' = CC'$$

. Portanto, $AA'C'C$ é um quadrilátero de Saccheri. Logo, o segmento FF' ligando os pontos médios de sua base e de seu topo é também perpendicular à base e ao topo, ou seja, é perpendicular a AC e a m . O resultado fica assim demonstrado.

Caso III. Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ideal Ω . Vamos mostrar que a terceira mediatriz também passa por Ω , ou seja, que as mediatrizes são paralelas em uma mesma direção.

Se a terceira mediatriz intercepta uma das outras duas, em um ponto ordinário do plano ou em um ponto ultra-ideal, então, pelos dois casos considerados,

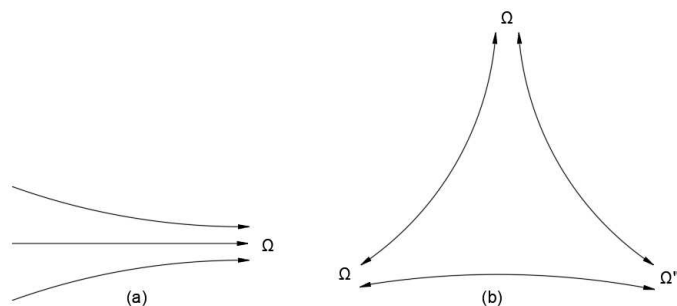


Figura 4.42: Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ideal.

chegamos a uma contradição. Por isto, podemos concluir que a terceira mediatriz intersecta cada uma das outras duas em um ponto ideal. Existem, então, duas destas situações possíveis, ilustradas na Figura 4.42. Vamos mostrar que a situação (b), em que as três mediatrizes formam um triângulo generalizado $\Omega\Omega'\Omega''$, não pode ocorrer. Observe que nenhuma reta pode cortar os três lados desse triângulo em pontos ordinários. De fato, se uma reta n corta $\Omega\Omega'$ em um ponto A e corta $\Omega\Omega''$ em um ponto B , traçando-se a reta $B\Omega$ vemos que n fica dentro da região limitada por dois ângulos opostos pelo vértice, enquanto a reta $\Omega\Omega''$ fica dentro do outro par. Portanto, n não pode cortar $\Omega\Omega''$ em um ponto ordinário, como indica a Figura 4.43.

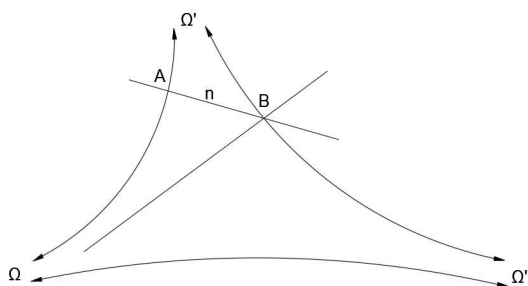


Figura 4.43: Situação impossível: três mediatrizes não podem formar um triângulo generalizado!

Por outro lado, sempre existe uma reta que corta as três mediatrizes de um triângulo em pontos ordinários! De fato, no triângulo ABC , seja \hat{A} o seu maior ângulo, como mostra a Figura 4.44. Sejam K e L pontos sobre BC tais que $B\hat{A}K = A\hat{B}K$ e $C\hat{A}L = A\hat{C}L$. Então, K é ponto da mediatriz do lado AB e L é o ponto da mediatriz do lado AC . Assim, BC intercepta as três mediatrizes.

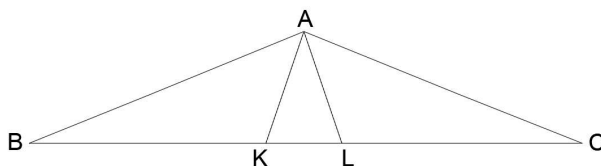


Figura 4.44: Apoio para a demonstração do terceiro caso do Teorema 4.18.

Logo, a situação (b) é impossível. E isso demonstra o teorema. □

4.8 Variação da distância entre retas

Vamos considerar dois pontos P e Q pertencentes às retas m e n , respectivamente. Considere a perpendicular baixada de P até Q . Definimos a distância do ponto P à reta n como sendo a medida do segmento PQ .

Nesta subsecção vamos investigar o comportamento do ponto P ao se mover sobre uma reta m . Para isso, vamos considerar três possibilidades para duas retas: as que se intersectam, as que são paralelas e as que não se intersectam. Os teoremas e demonstrações dessa secção podem ser encontrados em [2], páginas 84 a 87.

Teorema 4.19: Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O . Seja P um ponto de m . A distância do ponto P à reta n cresce quando P se desloca ao longo da reta m se afastando do ponto O , tornando-se maior do que qualquer comprimento prefixado. Esta distância decresce quando P se move na direção de O tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado.

Demonstração. Considere as retas m e n , concorrentes no ponto O . Considere também os pontos de m , P_1 e P_2 tais que $P_1 \in OP_2$. Observe a Figura 4.45. Nela, P_1Q_1 e P_2Q_2 são segmentos perpendiculares à n . Deste modo, os ângulos dos vértices Q_1 e Q_2 , no quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$, são retos. Além disso, nesse quadrilátero os ângulos P_1 e P_2 são ângulos, respectivamente, obtuso e agudo. Dessa forma, $P_1Q_1 < P_2Q_2$. E, isso evidencia que, quando o ponto variável de m se afasta de O , a distância cresce, e quando ele se aproxima, a distância diminui.

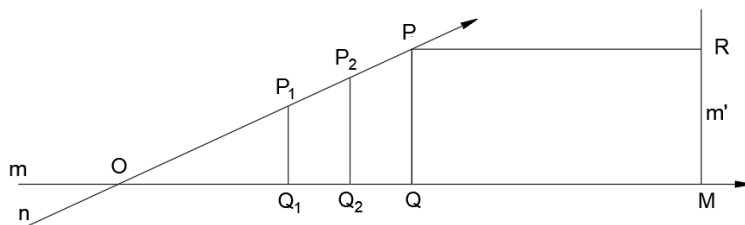


Figura 4.45: Apoio para a demonstração do Teorema 4.19.

Considere o ângulo $P_1\hat{O}Q_1$ como ângulo de paralelismo correspondente a uma distância h . Seja M um ponto de n tal que o comprimento OM seja h . Trace por M a reta m' perpendicular à n . Então, m e m' são paralelas, ou seja, elas se intersectam em um ponto ideal Ω .

Se r é um número positivo qualquer, escolha um ponto R em $M\Omega$ tal que o comprimento de MR seja r e trace a perpendicular a m' que passa por R . Esta reta intersecta m em um ponto P . Seja Q o pé da perpendicular baixada de P à reta n . Então, $PQMR$ é um quadrilátero de Lambert 4.5.2 com ângulo agudo em P . Logo, $PQ > RM$. Isto conclui a prova do teorema. \square

Teorema 4.20: Sejam m e n duas retas paralelas e P um ponto de m . A distância de P à reta n decresce quando P se move na direção do paralelismo, tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado. A distância cresce na direção oposta ao paralelismo, tornando-se maior do que qualquer valor prefixado.

Demonstração. Sejam m e n duas retas paralelas e seja Ω o ponto ideal onde as duas se intersectam. Sejam P_1 e P_2 dois pontos sobre m e Q_1 e Q_2 , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas destes pontos à reta n . Suponha que $P_2 \in P_1\Omega$. Segue-se que $Q_2 \in Q_1\Omega$ e que o quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$ (com ângulos retos nos vértices Q_1 e Q_2) têm ângulo agudo P_1 e ângulo obtuso em P_2 . Logo, $P_1Q_1 > P_2Q_2$. Veja a Figura 4.46.

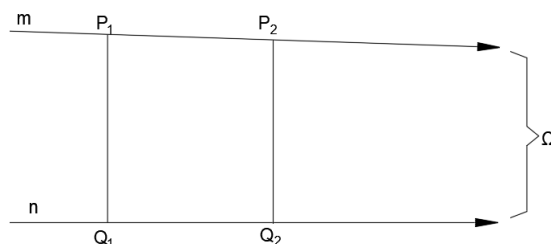


Figura 4.46: Apoio para a demonstração da propriedade de variação da distância em retas paralelas.

Resta, portanto, apenas provar que a distância pode tornar-se tão grande ou tão pequena quanto se queira. Vamos de fato provar que qualquer que seja o número positivo r dado, existe um ponto R sobre m tal que a distância deste ponto à reta n é exatamente r .

Tome $P \in m$ e seja Q o pé da perpendicular baixada deste ponto à reta n . Se o comprimento de PQ é r então P é o ponto desejado. Se não for, então marque na semirreta SQP um ponto R tal que o comprimento de RQ seja r e trace por R a reta m' paralela à n na direção oposta a do paralelismo de m e n . Veja a Figura 4.47.

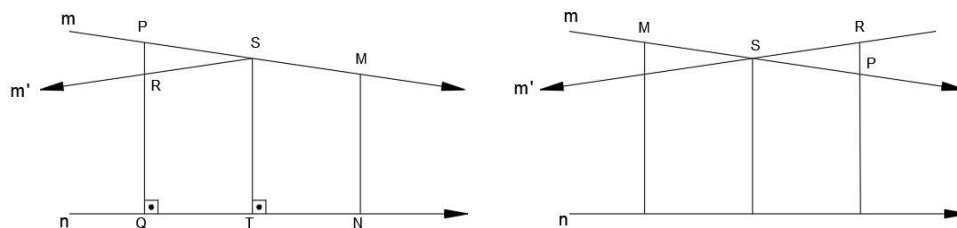


Figura 4.47: Apoio para demonstrar que qualquer que seja o número positivo r dado, existe um ponto R sobre m tal que a distância deste ponto à reta n é exatamente r .

É claro que m' intersecta m em um ponto S . Seja T o pé da perpendicular baixada de S à reta n . Sobre as retas m e n , marque pontos M e N tais que $SM = SR$ e $TQ = TN$. Comparação entre os quadriláteros $STMN$ e $STQR$ permite concluir que eles são congruentes e, portanto, $MN = RQ$ e MN é perpendicular à n . Daí o resultado. \square

A partir deste ponto, fica provado que retas paralelas na Geometria Hiperbólica se comportam de maneira bem distinta da Geometria Euclidiana. Na nova geometria,

retas paralelas não são equidistantes. A distância entre elas diminui para zero na direção do paralelismo indicando assim seu caráter assintótico. Podemos concluir ainda com essa prerrogativa que as figuras formadas por pares de retas paralelas são sempre congruentes.

Teorema 4.21: Sejam m e n duas retas que não se intersectam e P um ponto de m . Seja MN o segmento da perpendicular comum com $M \in m$ e $N \in n$. A distância de P à reta n cresce quando P se afasta do ponto M tornando-se maior do que qualquer valor prefixado, e decresce quando o ponto P se aproxima de M até tornar-se igual à MN quando $P = M$.

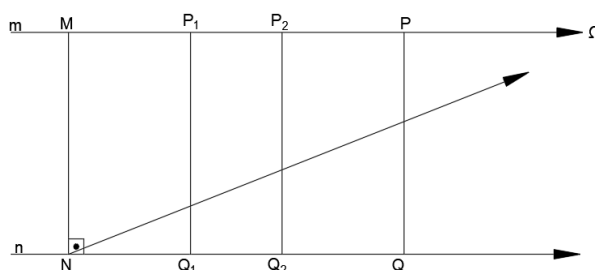


Figura 4.48: Apoio para a demonstração da propriedade de variação da distância em retas que não se intersectam.

Demonstração. Sejam m e n retas que não se intersectam e seja MN um segmento perpendicular comum, com $M \in m$ e $N \in n$. Sejam P_1 e P_2 dois pontos de m situados do mesmo lado relativamente ao ponto M e tais que $MP_1 < MP_2$. Sejam Q_1 e Q_2 os pés das perpendiculares baixadas destes pontos à reta n .

No quadrilátero e Lambert 4.5.2 MNQ_1P_1 , tem-se $P_1Q_1 > MN$. Um exame do quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$, que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo e um obtuso, permite concluir que $P_1Q_1 < P_2Q_2$. Isto mostra que a distância de um ponto m a n cresce quando o ponto se afasta do ponto M . Seja Ω o ponto ideal da semirreta S_{MP_1} . Considere a semirreta $N\Omega$. É fácil ver que toda perpendicular baixada de um ponto de S_{MP_1} à reta n corta $N\Omega$. Segue-se daí e do Teorema 4.19 que o comprimento de tais perpendiculares cresce arbitrariamente. \square

4.9 Construção de retas paralelas

Nesta secção descreveremos o método de construção de uma reta paralela a uma dada reta l passando por um ponto P , exterior à l . Para isso, consideremos o teorema a seguir. Todos os resultados dessa secção podem ser encontrados em Barbosa [2], páginas 88 a 96.

Teorema 4.22: Trace a perpendicular PQ do ponto P à reta l . Marque, agora, na reta l , um ponto R diferente do ponto Q . Trace a reta m perpendicular ao segmento PQ passando pelo ponto P . Trace, em seguida, a perpendicular RS do ponto R à reta m . Formamos, assim, um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no ponto

R. Com P como centro e raio igual a QR , trace um círculo. Este interceptará o segmento RS em um ponto T . A reta que passa por P e T é uma das paralelas à l passando pelo ponto P . A outra pode ser escolhida de forma análoga, escolhendo-se o ponto R do outro lado do ponto Q .

A prova do Teorema 4.22 será mostrada mais adiante, pois depende de algumas considerações sobre triângulos e também de dois lemas que serão mostrados a seguir.

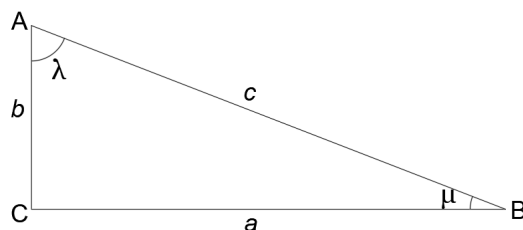


Figura 4.49: *Triângulo retângulo*

Por hora, faremos algumas ponderações sobre os triângulos. Consideremos um triângulo retângulo ABC , descrito na Figura 4.49, no qual $\hat{A} = \lambda$, $\hat{B} = \mu$, \hat{C} é reto e os lados opostos aos vértices A , B e C são respectivamente a , b e c .

Representaremos os ângulos $\Theta(a) = \alpha$, $\Theta(b) = \beta$ e $\Theta(c) = \gamma$. Os comprimentos correspondentes aos ângulos λ e μ , que são correspondentes aos ângulos de paralelismo, serão denominados por l e m , de modo que $\Theta(l) = \lambda$ e $\Theta(m) = \mu$. Os comprimentos dos ângulos α , β , γ , λ e μ serão representados por α' , β' , γ' , λ' e μ' . Por serem ângulos agudos, possuem distâncias associadas que serão designadas por a' , b' , c' , l' e m' , respectivamente. Com esta escolha de notação, teremos como ângulo reto a soma entre $\Theta(a)$ e $\Theta(a')$.

Observamos aqui que uma quantidade muito grande de variáveis devem estar predefinidas para que tenhamos a formação de um triângulo. Para nossa sorte, elas não são independentes.

Como exemplo, vamos analisar a construção de um triângulo retângulo dispondo apenas da medida da hipotenusa (c) e de um ângulo agudo (μ). Assim como na Geometria Euclidiana, tracemos um segmento AB de comprimento c e em seguida o ângulo μ com vértice no ponto B e, então, baixe a perpendicular do ponto A ao outro lado do ângulo. Deste modo, podemos determinar todas as variáveis de um triângulo retângulo dispondo apenas da hipotenusa e de um ângulo agudo.

A partir deste momento, todos os ângulos serão expressos em radianos, pois isso nos possibilitará a obtenção de fórmulas mais simples.

Vamos expor as relações entre as variáveis associadas a um triângulo. A saber, temos inicialmente

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \lambda + \lambda' = \mu + \mu' = \frac{\pi}{2},$$

$$\Theta(a) = \alpha, \quad \Theta(b) = \beta, \quad \Theta(c) = \gamma, \quad \Theta(l) = \lambda, \quad \Theta(m) = \mu,$$

$$\Theta(a') = \alpha', \quad \Theta(b') = \beta', \quad \Theta(c') = \gamma', \quad \Theta(l') = \lambda', \quad \Theta(m') = \mu'.$$

Ainda temos outras relações que não são independentes.

Lema 4.1: Em um triângulo retângulo, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \lambda + \Theta(c + m) &= \beta, & \mu + \Theta(c + l) &= \alpha \\ \lambda + \beta &= \Theta(c - m), & \mu + \alpha &= \Theta(c - l) \\ \Theta(b + l) + \Theta(m - a) &= \frac{\pi}{2}, & \Theta(m + a) + \Theta(l - b) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, queremos observar que as equações na coluna da direita do Lema 4.1, são consequência direta das correspondentes equações da coluna da esquerda, quando trocamos os papéis dos catetos a e b , dos ângulos λ e μ e de todas as grandezas correspondentes. Assim, só é necessário provar as equações de uma das colunas, por exemplo, as da esquerda. Provaremos com detalhes a primeira destas equações e indicaremos como devem ser feitas as provas nos outros dois casos.

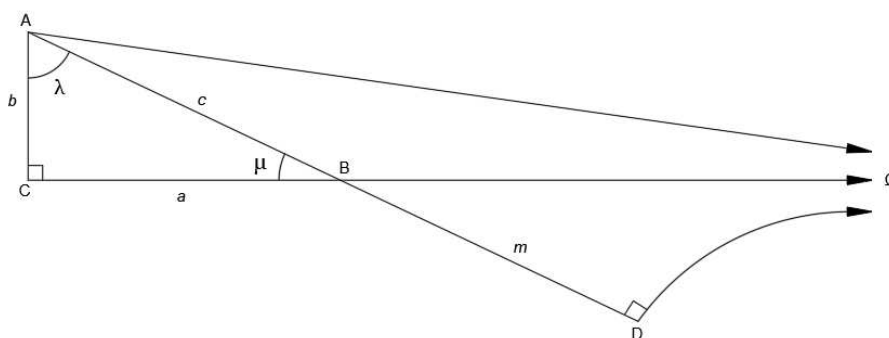


Figura 4.50: Apoio para a demonstração de relações entre lados e ângulos de um triângulo retângulo generalizado, descritas no Lema 4.1.

Consideraremos o triângulo ABC com a notação estabelecida, como indica a Figura 4.50. Na semirreta S_{AB} , marque um ponto D tal que BD tenha comprimento m . Seja Ω o ponto ideal da semirreta S_{CB} . Trace a semirreta $D\Omega$ formando um triângulo generalizado $BD\Omega$. Como $\Theta(m) = \mu$, então concluímos que o ângulo do vértice D é reto. Trace agora a semirreta $A\Omega$, formando um triângulo generalizado $AD\Omega$ com ângulo reto em D . Segue-se que o ângulo $D\hat{A}\Omega = \Theta(c + m)$ e que $C\hat{A}\Omega = \Theta(b) = \beta$. O resultado agora se segue da observação que $\lambda + D\hat{A}\Omega = C\hat{A}\Omega$. A prova de cada uma das duas outras equações é feita de maneira similar. □

Procederemos de maneira análoga para a investigar os quadriláteros de Lambert. Em cada quadrilátero temos o ângulo agudo β_1 e os lados, nominados a partir desse ângulo, c_1, m'_1, a_1 e l_1 . As demais variáveis serão definidas de maneira semelhante às definições feitas anteriormente para triângulos. Desta maneira, temos

$$\beta'_1 + \beta_1 = \gamma'_1 + \gamma_1 = \alpha'_1 + \alpha_1 = \mu_1 + \mu'_1 = \lambda_1 + \lambda'_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \Theta(c_1), & \alpha_1 &= \Theta(a_1), & \beta_1 &= \Theta(b_1), & \mu_1 &= \Theta(m'), & \lambda_1 &= \Theta(l_1), \\ \gamma'_1 &= \Theta(c'_1), & \alpha'_1 &= \Theta(a'_1), & \beta'_1 &= \Theta(b'_1), & \mu_1 &= \Theta(m), & \lambda'_1 &= \Theta(l_1). \end{aligned}$$

É relevante ressaltar que tanto os quadriláteros de Lambert quanto os triângulos retângulos possuem a mesma quantidade de variáveis e suas relações simples são equivalentes. Posto isso, podemos provar o lema a seguir.

Lema 4.2: Em um quadrilátero de Lambert valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) &= \beta_1, & \gamma_1 + \Theta(l_1 + \alpha'_1) &= \beta_1 \\ \lambda_1 + \beta_1 &= \Theta(c_1 - m_1), & \gamma_1 + \beta_1 &= \Theta(l_1 - \alpha'_1), \\ \Theta(b_1 + l_1) + \Theta(m_1 - a_1) &= \frac{\pi}{2}, & \Theta(a'_1 - m'_1) + \Theta(c_1 + b_1) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Como no caso de triângulos, as fórmulas na coluna da direita podem ser deduzidas das da coluna da esquerda, trocando-se c_1 por l_1 , m'_1 por a_1 e fazendo-se as trocas dos ângulos e segmentos correspondentes. Assim, λ_1 será trocado por γ_1 e m_1 por a'_1 . Por esta razão, só precisamos apresentar a demonstração das três equações da coluna à esquerda. Vamos provar a primeira delas e deixar ao leitor a prova das outras duas.

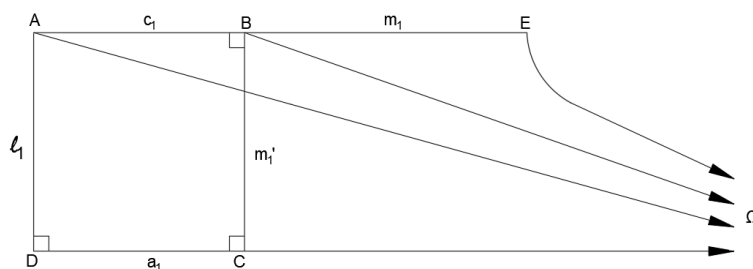


Figura 4.51: Apoio para a demonstração de equações válidas para o quadrilátero de Lambert.

Seja $ABCD$ o quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice A , e os lados AB , BC , CD e DA medindo, respectivamente, c_1 , m'_1 , a_1 , l_1 , como indicado na Figura 4.51. Seja Ω o ponto ideal da semirreta S_{DC} e seja E um ponto da semirreta S_{AB} tal que BE tenha comprimento m_1 . Trace $A\Omega$, $B\Omega$ e $E\Omega$. É evidente que λ_1 é a medida do ângulo $D\hat{A}\Omega$ e que μ'_1 é a medida do ângulo $C\hat{B}\Omega$. Logo, $E\hat{B}\Omega$ é um ângulo reto. Feitas estas considerações, é claro que $E\hat{A}\Omega = \Theta(c_1 + m_1)$ e que $\lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) = \beta_1$. Isto prova a validade da primeira equação. \square

Será sempre possível associar um quadrilátero de Lambert á um triângulo retângulo, como veremos na proposição a seguir.

Proposição 4.4: A cada triângulo retângulo com partes a , b , c , λ e μ podemos associar sempre um quadrilátero de Lambert com partes c , m' , a , l β , sendo esta uma correspondência biunívoca.

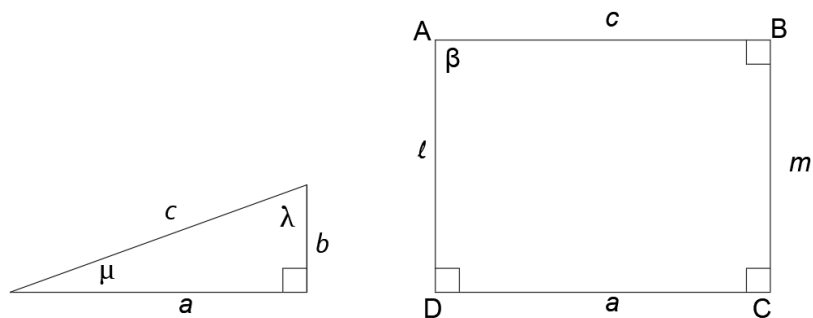


Figura 4.52: A cada triângulo retângulo podemos associar um quadrilátero de Lambert em correspondência biunívoca.

Demonstração. Vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa c e um dos ângulos agudos μ , e os demais elementos como sendo a , b e λ , como indicado na Figura 4.52. De maneira análoga, considere um quadrilátero de Lambert no qual um dos lados do ângulo agudo é c e o próximo lado é $m' = \Theta(\mu')$ (onde $\mu + \mu' = \pi/2$), sendo os outros elementos do quadrilátero designados por a_1, l_1 e β_1 . Isto equivale a assumir que $c_1 = c$ e $m'_1 = m'$. Então $m_1 = m$ e a comparação entre as duas primeiras equações da coluna á esquerda para triângulos e para quadriláteros nos mostra que devemos ter $\beta_1 = \beta$ e $\lambda_1 = \lambda$. E a última equação da coluna da esquerda do Lema 4.2 para triângulos e para quadriláteros agora nos assegura que $\alpha_1 = \alpha$, o que demonstra a proposição. \square

Neste momento podemos retomar o Teorema 4.22 para demonstrá-lo.

Demonstração do Teorema 4.22. Tome um quadrilátero de Lambert $ABCD$ com partes c, m', a, l e β , como feito anteriormente. Centrado no ponto C e com raio igual a c , trace um círculo. Este interceptará o lado DA em um ponto E . Trace, então, a semirreta S_{CE} . Devemos mostrar que esta é paralela à semirreta S_{BA} . Para isto, considere o triângulo retângulo de partes a, b, c, λ e μ associado ao quadrilátero de Lambert. Construa este triângulo sobre o lado CD do quadrilátero: marque na semirreta S_{DA} um ponto E' tal que DE' tenha comprimento b ; o triângulo DCE' é o triângulo desejado. Assim CE' mede c e, conseqüentemente, o ponto E' coincide com o ponto E . portanto, o ângulo $E\hat{C}D$ mede μ e logo o ângulo $B\hat{C}E$ mede μ' . Como BC mede μ' segue-se que a semirreta S_{CE} é paralela à semirreta S_{BA} , terminando assim a demonstração. \square

Uma aplicação prática da Proposição 4.4 é garantir que a existência de cada triângulo retângulo é associada à existência de outros quatro associados à ele. Vejamos como isso ocorre.

Começemos com um triângulo de partes a, b, c, λ e μ . A ele está associado o quadrilátero de Lambert cujas partes são c, m', a, l e β . Tomando as partes desse quadrilátero em outra ordem, temos um quadrilátero de Lambert com partes l, a, m', c e β . Associado a este, temos um segundo triângulo cujas partes são m', b, l, γ e α' . Ao considerarmos as partes desse triângulo de outro modo: b, m', l, α' e γ associamos

a ele um quadrilátero l, c', b, a e μ' . Considerando o seu refletido obtemos como triângulo associado $c', m', a', \lambda, \beta'$ e em seguida um quinto triângulo a, l', m, β' e γ . Na próxima etapa voltamos ao triângulo original, garantindo assim que a cada triângulo retângulo existente estão associados outros quatro triângulos retângulos.

4.10 Horocírculos e curvas equidistantes

Nesta secção, abordaremos uma das distinções mais acentuadas entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica. A situação envolve a curva limite obtida de um círculo quando fixamos um de seus pontos e fazemos o seu raio tornar-se arbitrariamente grande, como ilustrado na Figura 4.53.



Figura 4.53: Curva limite de um círculo ao fixarmos um de seus pontos e fazermos o raio crescer arbitrariamente.

De acordo com Barbosa [2], página 98, enquanto na Geometria Euclidiana essa curva limite é uma reta, na Geometria Hiperbólica essa curva possui características muito singulares. Para compreendê-las, consideraremos a noção de pontos correspondentes, inicialmente ponderada por Gauss, para podermos modificar nossa noção de círculo.

Segundo Arcari [1], página 83, temos a seguinte definição para pontos correspondentes.

Definição 4.8 (Noção de Pontos Correspondentes): Consideremos dois pontos P e Q , pertencentes às retas m e n , respectivamente. Diremos que eles são pontos correspondentes se o segmento PQ forma com as duas retas ângulos congruentes no mesmo lado da reta que passa por P e Q . Desta forma, diremos que o ponto P corresponde ao ponto Q , ou que o ponto Q corresponde ao ponto P .

Veja as três situações possíveis para pontos correspondentes nas Figuras 4.54a, 4.54b e 4.54c.

Os três teoremas que se seguem e suas respectivas demonstrações podem ser encontrados em Barbosa [2], páginas 99 a 103.

Teorema 4.23: Dado um ponto em uma de duas retas paralelas, existe sobre a outra um e somente um ponto que lhe é correspondente.

Demonstração da unicidade do Teorema 4.23. Sejam m e n duas retas paralelas. Seja P um ponto de m e suponha que existam sobre n dois pontos Q_1 e Q_2 , que lhe sejam correspondentes, como indicado na Figura 4.55. Sejam α e β os ângulos que PQ_1 e PQ_2 , respectivamente, formam com a reta m . Estes dois ângulos são

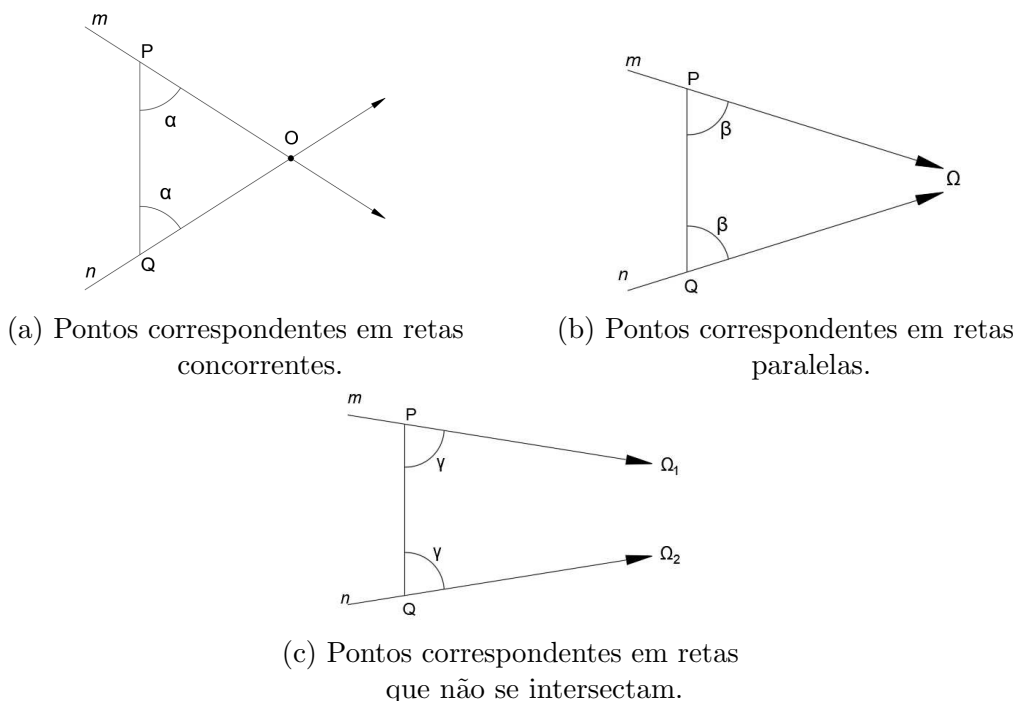


Figura 4.54: Exemplos de pontos correspondentes em retas concorrentes, retas paralelas e retas que não se intersectam.

os mesmos que estes segmentos formam com a reta n . Se $\beta < \alpha$, então, no triângulo PQ_1Q_2 , o ângulo α será um ângulo interno e β será um externo não adjacente. Contradição! No outro caso, apenas as posições dos dois ângulos se invertem. Isto prova a unicidade.

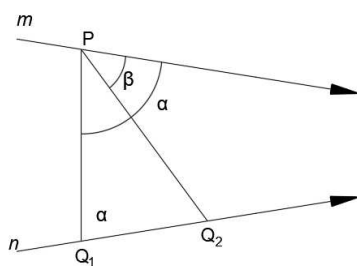


Figura 4.55: Apoio para a demonstração de que existe apenas um ponto Q de uma reta n correspondente a um ponto dado P em uma reta m paralela à n .

□

Para provar a existência do ponto correspondente, precisamos da definição de bissetriz generalizada, ilustrada na Figura 4.56. Para isso, vamos recordar que retas paralelas formam entre si um ângulo generalizado de medida nula e para esse ângulo definiremos a noção de bissetriz.

Definição 4.9 (Bissetriz Generalizada): Dadas duas retas m e n , considere uma terceira reta b , paralela a estas duas na mesma direção. Seja C um ponto qualquer de b e sejam E e D os pés das perpendiculares baixadas de C às retas m e n . Se

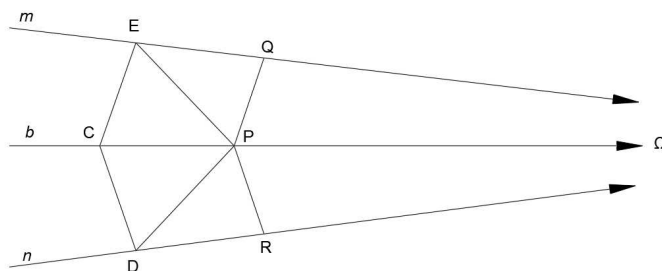


Figura 4.56: A reta b é a bissetriz generalizada do ângulo generalizado formado entre as retas m e n .

ocorrer que $CE = CD$ e que b seja a bissetriz do ângulo $E\hat{C}D$, então diremos que b é a bissetriz generalizada do ângulo generalizado formado entre m e n .

Podemos ver que esta propriedade é válida não só para o ponto C mas para qualquer ponto da reta b . Com este raciocínio, se P é outro ponto de b , temos de forma imediata que $PEC = PDC$. Sejam Q e R os pés das perpendiculares baixadas de P às retas m e n , respectivamente. É consequência direta do que obtivemos que $PEQ = PDR$. Logo, $PQ = PR$ e $Q\hat{P}C = R\hat{P}C$. Desta forma, b tem a propriedade de ser o conjunto dos pontos que são equidistantes das retas m e n . Vamos, agora, provar que tais bissetrizes sempre existem. Tome um ponto A sobre m e um ponto B em n . Trace as bissetrizes dos ângulos que o segmento AB forma com estas duas retas do mesmo lado da reta que passa por A e B .

Estas duas bissetrizes se intersectam em um ponto C , o qual, veremos, pertence à bissetriz generalizada b . Para construí-la é só baixar perpendiculares CE e CD às duas retas e traçar a reta bissetriz do ângulo $E\hat{C}D$.

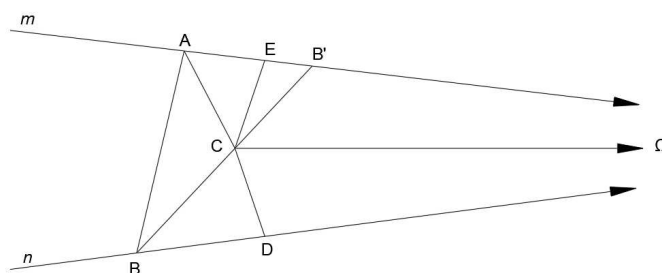


Figura 4.57: Apoio da demonstração que sempre existe uma bissetriz generalizada de um ângulo generalizado.

Veremos como o ponto C pertence à b . Para isso, seja $B' \in m$ um ponto tal que $AB' = AB$, escolhido como na Figura 4.57. Os triângulos BCA e $B'CA$ são congruentes. Logo, $CB = CB'$ e $C\hat{B}'A = C\hat{B}A$. Sejam D e E os pés das perpendiculares baixadas de C às retas n e m , respectivamente. Segue-se que $CDB = C\hat{E}B'$. Portanto $CE = CD$. Logo $C \in b$.

Posto isso, voltemos à continuação da prova da existência do Teorema 4.23.

Demonstração. Dadas m e n paralelas, considere a bissetriz generalizada b do ângulo que elas formam. Dado $P \in m$, seja $K \in b$ o pé da perpendicular baixada de P àquela reta, como indica a Figura 4.58.

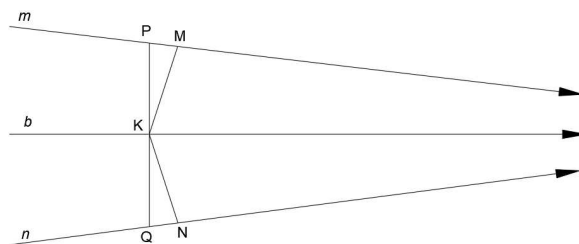


Figura 4.58: Apoio para a demonstração da existência de pontos correspondentes em retas paralelas.

Sejam agora M e N os pés das perpendiculares baixadas de K às retas m e n , respectivamente. Em n , na direção oposta ao paralelismo, marque um ponto Q tal que $QN = PM$ e trace QK . É imediato que os triângulos PMK e QNK são congruentes. Daí decorre que os pontos P , Q e K são colineares e que $K\hat{P}M = K\hat{Q}N$. Logo P e Q são pontos correspondentes. \square

Teorema 4.24: Se três pontos P , Q e R , estão em três retas paralelas, em um mesmo sentido e se P corresponde a Q e Q corresponde à R então, os três pontos não são colineares.

Demonstração. Observe na Figura 4.59 que o ângulo formado entre PQ e qualquer uma das retas é igual ao ângulo de paralelismo correspondente à metade do segmento PQ . Logo, é um ângulo agudo. Se os três pontos fossem colineares, teríamos a soma de dois ângulos agudos resultando em um ângulo raso. Essa contradição prova o teorema.

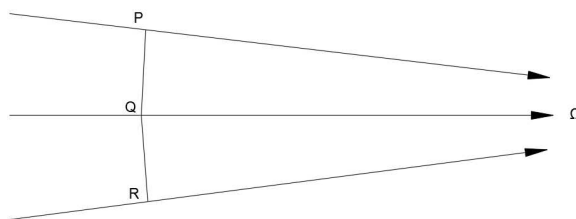


Figura 4.59: Apoio para a demonstração de que pontos correspondentes em três retas paralelas não são colineares.

\square

Teorema 4.25: Se três pontos P , Q e R , estão em três retas paralelas, em um mesmo sentido e se P corresponde a Q e Q corresponde à R então, P corresponde à R .

Demonstração. Como os três pontos, pelo Teorema 4.24, são não colineares, forma-se um triângulo PQR . Vimos na Seção 4.7, no Teorema 4.18 que as retas perpendiculares aos lados de um triângulo e passando pelos seus pontos médios são concorrentes em um ponto ordinário, ideal ou ultra-ideal. Duas de tais retas são exatamente as bissetrizes generalizadas do ângulos generalizados entre $P\Omega$ e

$Q\Omega$ e entre $Q\Omega$ e $R\Omega$. Logo, a terceira, que é perpendicular ao lado PR passando pelo seu ponto médio, será também paralela às duas primeiras. Então, tal reta coincide com a bissetriz generalizada de $P\Omega R$. Consequentemente, P e Q são correspondentes. \square

Vamos ver um pouco sobre o conceito de pontos correspondentes ao considerar famílias de semirretas de mesma origem, na teoria de tais pontos em retas que se intersectam. De acordo com [1], página 86, temos a seguinte definição.

Definição 4.10 (Horocírculo): Sejam a família de todas as retas paralelas em um mesmo sentido com um ponto ideal em comum e P um ponto ordinário em uma reta dessa família. Ao lugar geométrico de todos os pontos correspondentes a P nas demais retas dessa família chamamos de horocírculo (ou horociclo) de centro Ω e raio P .

Ao refletirmos sobre o que provamos a respeito dos pontos correspondentes, podemos afirmar que

- um horocírculo não é uma reta;
- se uma reta cruza um horocírculo em dois pontos P e Q , então, como P e Q são correspondentes, PQ formará com os raios $P\Omega$ e $Q\Omega$ ângulos iguais; e
- um horocírculo de centro Ω e passando por P é o limite da família de círculos passando por P e com centro em $P\Omega$.

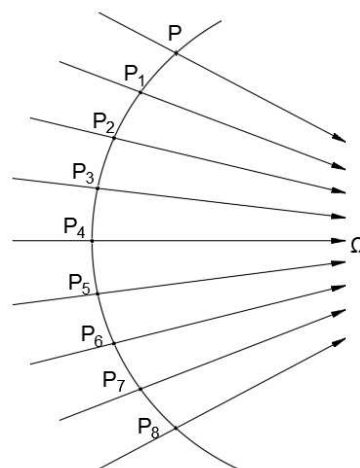


Figura 4.60: Ilustração de um horocírculo: lugar geométrico de todos os pontos correspondentes ao ponto P na família de retas paralelas em um mesmo sentido com o ponto ideal Ω em comum.

Devemos observar que um horocírculo fica determinado por dois elementos: um ponto ideal Ω (centro) e um ponto ordinário P , conforme ilustrado na Figura 4.60. Ao tomarmos um círculo com centro em A e raio AP e fizermos A “tender” à Ω , então o círculo de centro A e raio AP “tende” ao horocírculo Ω de raio $P\Omega$. Consideremos

dois horocírculos H e H' , de centros Ω e Ω' , respectivamente. poderemos dizer que eles são congruentes sempre que para quaisquer pontos A e B pertencentes à H existirem A' e B' pertencentes à H' de modo que $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

Veremos a seguir, dois teoremas e suas demonstrações, extraídos de Barbosa [2], página 104.

Teorema 4.26: Dois horocírculos quaisquer são congruentes.

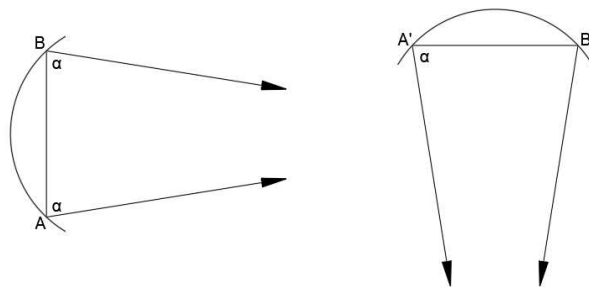


Figura 4.61: Apoio para a demonstração de que dois horocírculos quaisquer são congruentes.

Demonstração. Sejam H e H' dois horocírculos com centros nos pontos ideais Ω e Ω' , respectivamente. Sejam A e B pontos de H e A' um ponto de H' , como indicado na Figura 4.61. Seja α o ângulo $B\hat{A}\Omega$. Portanto, $A\hat{B}\Omega = A'B'\Omega'$ e, conseqüentemente, B' é correspondente à A' nas retas $A'\Omega'$ e $B'\Omega'$. Portanto $B' \in H'$. Isto conclui a prova. \square

Teorema 4.27: Uma reta é tangente a um horocírculo se e só se é normal a um dos seus raios em sua extremidade.

Demonstração. (\Rightarrow) Considere o ponto P tal que ele seja a intersecção entre o horocírculo H e a reta m tangente à H . Suponhamos que o ângulo entre $P\Omega$ e m seja agudo. Seja o comprimento h , $h > 0$, tal que o ângulo de paralelismo $\Theta(h) = \alpha$ seja agudo. Considere também os pontos Q e R pertencentes à reta m tal que $PQ = h$ e $PQ \equiv QR$. Logo, $PQ\Omega \equiv RQ\Omega$ (pelo caso lado-ângulo de triângulos generalizados). Assim os ângulos $P\hat{R}Q$ e $R\hat{P}\Omega$ são congruentes, isto é, P e R são correspondentes. Logo, $R \in H$. Mas isso é um absurdo pois contradiz a hipótese. Logo o ângulo α é reto.

(\Leftarrow) Suponha, por absurdo, que $P\Omega$ e m são perpendiculares e m corta o horocírculo H em outro ponto Q . Deste modo, P e Q são correspondentes e $PQ\Omega$ será um triângulo generalizado com dois ângulos retos. Mas isto é uma contradição! Logo, a intersecção entre H e m é apenas um ponto P e, portanto, m é tangente à H . \square

Vamos entender um outro conceito dentro da Geometria Hiperbólica. Em Arcari [1], página 89, encontramos a seguinte definição para curva equidistante:

Definição 4.11 (Curva Equidistante): Considere uma reta m e seja \mathring{P} o conjunto de todas as retas perpendiculares à m . Considere ainda um ponto P pertencente a uma dessas retas tal que $P \notin m$. O lugar geométrico C de todos os pontos correspondentes a P nas demais retas de \mathring{P} é chamado de curva equidistante da reta m . A distância de P a m é chamada de distância de C à m .

Desta forma, uma curva equidistante está associada a uma certa distância e terá como centro a reta m .

Nesse momento é importante ressaltar que:

I C não é uma reta hiperbólica.

II Se os pontos P e P' pertencem à C , os pés das perpendiculares baixadas desses pontos até a reta m são, respectivamente os pontos Q e Q' . Então $PQQ'P'$ é um quadrilátero de Saccheri.

Observe a Figura 4.62. Considerando C_1 e C_2 curvas equidistantes das retas m e n , respectivamente, dizemos que C_1 é congruente à C_2 se, dados os pontos A e B pertencentes à C_1 existem os pontos A' e B' pertencentes à C_2 tais que $ABCD \equiv A'B'C'D'$ sendo que os pontos C e D são os pés das perpendiculares baixadas de A e B à reta m , enquanto os pontos C' e D' correspondem aos pés das perpendiculares baixadas de A' e B' à reta n . Ou seja, deste modo os quadriláteros de Saccheri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes.

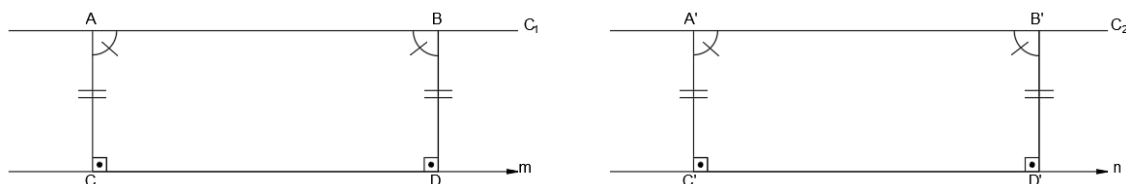


Figura 4.62: Apoio para a definição de curvas equidistantes congruentes.

Vejamos um teorema e sua demonstração extraídos de [1], página 89.

Teorema 4.28: Duas curvas equidistantes C_1 e C_2 de m e n , respectivamente, tais que a distância de C_1 a m é a mesma que a distância de C_2 a n são congruentes.

Demonstração. Considere os pontos A e B pertencentes à C_1 e C e D pertencentes à reta m de tal modo que AC e BD seja perpendiculares à m . Veja a Figura 4.63.

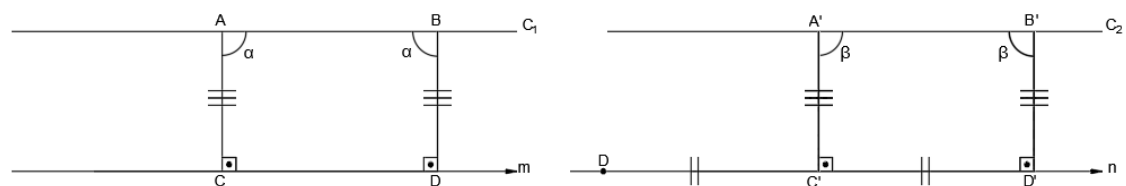
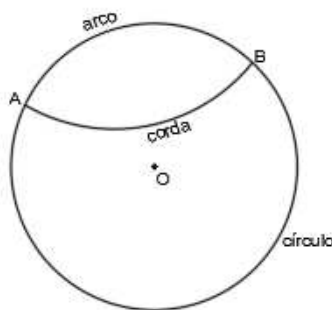


Figura 4.63: Apoio para a definição de condições de congruência entre curvas equidistantes.

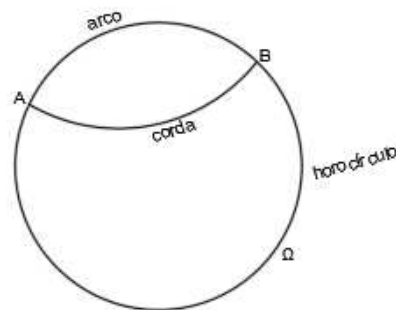
Considere ainda $A' \in C_2$ e $C' \in n$ tal que $A'C'$ seja perpendicular à n . Seja a circunferência de raio C' e raio CD . Esta circunferência intersecta n em dois pontos: D' e D'' . Por congruência de triângulos é fácil mostrar que $\alpha = \beta$ e, portanto, o quadrilátero de Saccheri $ABCD \equiv A'B'C'D'$, ou seja, C_1 e C_2 são curvas equidistantes e congruentes. \square

Definição 4.12: Sejam A e B pontos ordinários em um círculo, horocírculo ou curva equidistante. Chamamos o segmento AB de corda do círculo, horocírculo ou curva equidistante, a parte de comprimento finito compreendida entre A e B de arco de círculo, horocírculo ou curva equidistante.

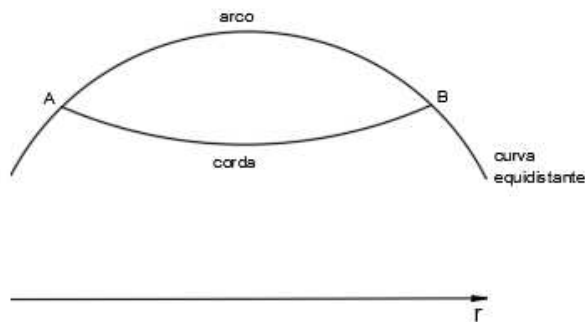
Veja as Figuras 4.64a, 4.64b, e 4.64c.



(a) Apoio para a definição de arcos e cordas de círculos.



(b) Apoio para a definição de cordas de horocírculos.



(c) Apoio para a definição de arcos e cordas de curvas equidistantes.

Figura 4.64: Apoio para a definição de arcos e cordas de círculos, horocírculos e curvas equidistantes.

Sejam AB e $A'B'$ dois arcos de círculos C_1 e C_2 de centros O e O' , respectivamente. Dizemos que os arcos AB e $A'B'$ são congruentes quando $ABO \equiv A'B'O'$.

Sejam AB e $A'B'$ dois arcos de horocírculos H e H' de centros Ω e Ω' , respectivamente. Dizemos que os arcos AB e $A'B'$ são congruentes quando $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

Sejam AB e $A'B'$ dois arcos de curvas equidistantes C_1 e C_2 à m e n , respectivamente. Dizemos que os arcos AB e $A'B'$ são congruentes quando os quadriláteros de Saccheri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sendo CD e $C'D'$ suas bases em m e n , respectivamente.

Vejam agora a proposição e sua demonstração extraídas de [1], página 90.

Proposição 4.5: Destacamos três situações que relacionam cordas e arcos congruentes:

- I Cordas congruentes em círculos de mesmo raio subentendem arcos congruentes.
- II Cordas congruentes em horocírculos subentendem arcos congruentes.
- III Cordas congruentes em curvas equidistantes C_1 e C_2 à mesma distância de m e n , respectivamente, subentendem arcos congruentes.

Demonstração. No caso I, basta aplicarmos o caso de congruência LLL. No caso II, basta utilizarmos congruência para triângulos isósceles generalizados, visto no Teorema 4.9. Para o caso III, devemos mostrar que $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes. Considere a Figura 4.65. Devemos mostrar que $\alpha = \beta$. Suponhamos que $\alpha < \beta$ e consideremos a Figura 4.66. Neste caso o triângulo $A'B'B''$ é isósceles. Portanto $\gamma - \alpha = \gamma + \beta \Rightarrow \beta = -\alpha$, mas isso é uma contradição e daí, $\alpha = \beta$

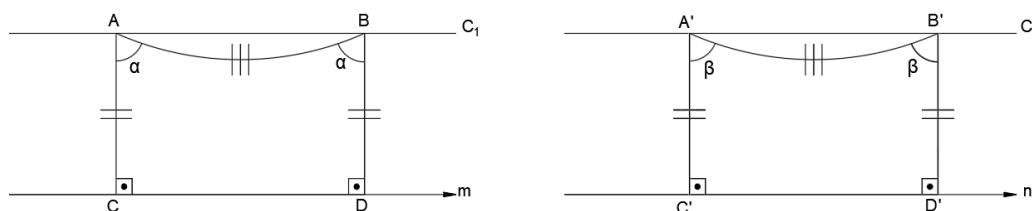


Figura 4.65: Apoio para a demonstração de condições de congruência de arcos em curvas equidistantes.

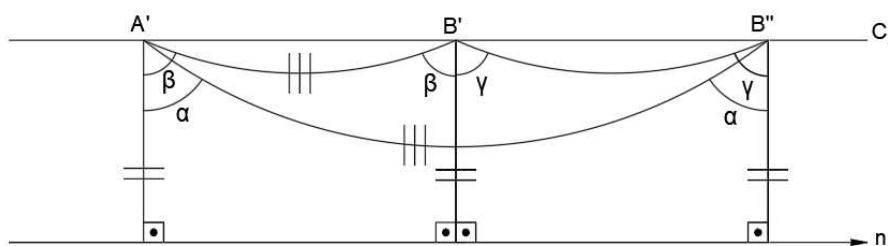


Figura 4.66: Apoio para a demonstração de condições de congruência de arcos em curvas equidistantes.

□

4.11 Área de triângulos e polígonos quaisquer

A noção de área na Geometria Hiperbólica está, a princípio, relacionada à associação de um número não negativo para a área de cada triângulo. Como consequência, triângulos congruentes devem possuir a mesma área. E, como um polígono pode ser subdividido em triângulos, a área de polígonos congruentes deve ser a mesma qualquer que seja a subdivisão do polígono em triângulos.

Definição 4.13 (Defeito de um triângulo): Chamamos de defeito de um triângulo a diferença entre a soma de seus ângulos internos na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. Isto é, a diferença entre π e a soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário ou generalizado, medida em radianos.

Esse termo também pode ser adaptado para um polígono qualquer. Assim, o defeito de um polígono refere-se à diferença entre o valor esperado para a sua soma dos ângulos internos na Geometria Euclidiana e o valor encontrado para essa soma na Geometria Hiperbólica.

Ao considerarmos um triângulo ABC , podemos associar a ele um quadrilátero de Saccheri $ABCD$ de modo que as áreas sejam iguais. essa construção é indicada na Figura 4.67. Traçamos a reta m sobre os pontos médios M e N dos lados AB e BC ,

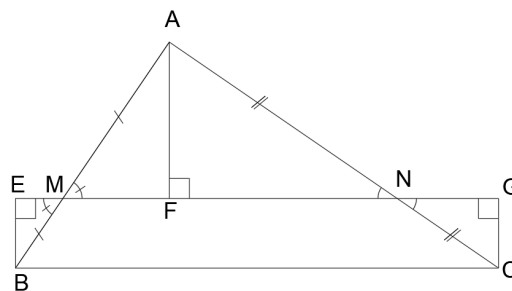


Figura 4.67: Apoio para a associação da área de um triângulo à área de um quadrilátero de Saccheri.

respectivamente. Em seguida, traçamos as perpendiculares à reta m pelos pontos B , A e C que intersectaram m nos pontos E , F e G , respectivamente. Deste modo, $BEM = AFM$ e $AFN = CGN$ (caso LAA_0). Assim, o quadrilátero $AEGC$ é um quadrilátero de Saccheri de base EG que possui a mesma área que o triângulo ABC . Além disso, podemos também associar a esses polígonos o mesmo defeito.

Vejamos a proposição extraída de Barbosa [2], pg 109.

Proposição 4.6: Dados dois triângulos, se eles têm o mesmo defeito e, se um lado de um é congruente a um lado de outro, então eles possuem a mesma área.

Demonstração. Consideramos dois triângulos com o mesmo defeito e com um lado congruente em ambos. Os quadriláteros de Saccheri associados a eles terão topos congruentes e também ângulos do topo com a mesma medida, sendo assim congruentes. Deste modo, os quadriláteros terão a mesma área. Ora, por consequência, os dois triângulos também terão áreas iguais. \square

E, agora, dois teoremas extraídos de Barbosa [2], páginas 110 e 111.

Teorema 4.29: Dois triângulos que têm o mesmo defeito têm a mesma área.

Demonstração. Consideremos dois triângulos ABC e $A'B'C'$ que possuem o mesmo defeito. Se eles possuírem um lado congruente, então, pela Proposição 4.6, eles terão a mesma área. Suponhamos que isso não ocorra e que $A'C' > AC$.

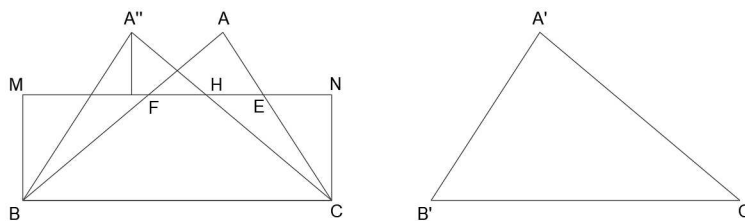


Figura 4.68: Apoio para a demonstração de que dois triângulos que possuem mesmo defeito possuem mesma área.

Construa, usando o lado BC , o quadrilátero de Saccheri associado a ABC , como mostra a Figura 4.68. Seja m a reta de sua base. Escolha nesta reta um ponto H tal que HC tenha comprimento igual à metade de $A'C'$. Na semirreta S_{CH} , marque um ponto A'' tal que $A''C = A'C'$. É possível verificar que o triângulo $A''BC$, tem sobre o lado BC , o mesmo quadrilátero de Saccheri que o triângulo ABC . Consequentemente possui o mesmo defeito. Agora podemos usar a Proposição 4.6 na comparação dos triângulos $A''BC$ e $A'B'C'$ para concluir que eles possuem mesma área. Consequentemente, o mesmo ocorre entre os triângulos ABC e $A'B'C'$. \square

Uma transversal de um triângulo é um segmento que une um dos vértices do triângulo ao lado oposto, subdividindo o triângulo em dois outros. Temos que se um triângulo for subdividido em um número finito de triângulos, a soma dos defeitos desses triângulos será equivalente ao defeito original no triângulo inicial. É o que veremos no seguinte teorema:

Teorema 4.30: Dois triângulos que possuem mesma área têm o mesmo defeito.

A prova desse teorema está além do objetivo desse trabalho. O que importa para nós é que a função área e a função defeito são múltiplas uma da outra.

Definição 4.14 (Área de um triângulo): Chamamos de área de um triângulo o produto entre uma constante c fixada a priori, cuja escolha é feita de modo que um dado triângulo com características especiais tenha área um, e o defeito do triângulo, ou seja,

$$\text{Área do triângulo } ABC = c^2(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}).$$

Comparativamente, encontramos e destacamos a relação para o cálculo da área de um polígono.

Definição 4.15 (Área de um polígono): Chamamos de área de um polígono o produto entre uma constante c fixada a priori, cuja escolha é feita de modo que um dado polígono com características especiais tenha área um, e o defeito do polígono, ou seja,

$$\text{Área do polígono} = c^2(\text{defeito do polígono}).$$

As duas próximas seções serão para destacarmos as versões hiperbólicas do

Teorema de Pitágoras, da Lei dos Cossenos e da Lei dos Senos.

4.12 Trigonometria Hiperbólica em triângulos retângulos

Iremos conhecer nesta secção as principais fórmulas da Trigonometria Hiperbólica, incluindo o Teorema de Pitágoras Hiperbólico. Os resultados descritos nessa secção poderão ser encontrados em Barbosa [2], nas páginas 134 e 135.

Inicialmente, para encontrarmos uma relação equivalente ao teorema de Pitágoras na Geometria Hiperbólica, é necessária a noção de números complementares e algumas de suas propriedades. Assim, dois números positivos z e z' são chamados complementares quando a soma dos ângulos de paralelismo a eles associados equivaler a um ângulo reto.

Corolário 4.3: Se z e z' são complementares, valem as seguintes relações

1. $\sinh(z) = \operatorname{cossech}(z')$
2. $\cosh(z) = \operatorname{coth}(z')$
3. $\tanh(z) = \operatorname{sech}(z')$

Demonstração. Prova do item 1)

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \operatorname{coth}\left(\frac{z'}{2}\right) - \tanh\left(\frac{z'}{2}\right) \\ &= \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)} \\ &= \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) + 1 - \cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sinh(z')} \\ &= \operatorname{cossech}(z') \end{aligned}$$

Lembramos que

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \sinh(x) &= 2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cosh(x) &= \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Prova do item 2)

$$\begin{aligned}
 \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\
 &= \coth\left(\frac{z'}{2}\right) + \tanh\left(\frac{z'}{2}\right) \\
 &= \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cosh(z')}{\sinh(z')} \\
 &= \coth(z')
 \end{aligned}$$

Prova do item 3)

$$\begin{aligned}
 \tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \\
 &= \frac{\cosh(z')}{\coth(z')} \\
 &= \frac{1}{\cosh(z')} \\
 &= \operatorname{sech}(z')
 \end{aligned}$$

□

Consideremos um triângulo ABC , como o descrito na Figura 4.69. Nele, o ângulo \hat{C} é reto, e as medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{B} e os comprimentos dos lados BC , AC e AB são representados, respectivamente, por λ , μ , a , b e c . Consideramos também o ponto P , sobre a semirreta S_{AB} , de modo que o comprimento de AP seja l .

A fim de deixar esse trabalho mais objetivo, omitimos aqui alguns procedimentos, destacando apenas alguns resultados importantes a respeito dos triângulos retângulos, a conhecer:

Proposição 4.7: Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ e μ , tem-se que

$$\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l) \quad \text{e} \quad \sinh(c) = \sinh(b) \cosh(m)$$

Ao reescrevermos as fórmulas acima, em função do \cosh , juntamente com o Corolário 4.3, encontra-se uma série de fórmulas que podem ser sintetizadas no corolário a seguir, cuja prova suprimimos.

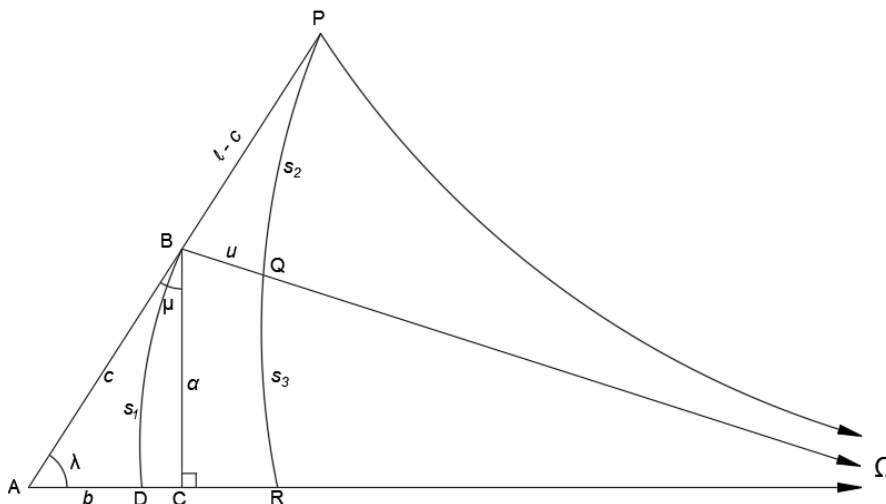


Figura 4.69: Apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos retângulos ordinários.

Corolário 4.4: Em um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ , tem-se que

$$\begin{aligned} \cosh(l) &= \sinh(c) \sinh(a') & , & & \cosh(m) &= \sinh(c) \cosh(b') \\ \cosh(c) &= \sinh(l) \sinh(m) & , & & \cosh(a') &= \sinh(l) \sinh(b') \\ & & & & \cosh(b') &= \sinh(m) \sinh(a') \end{aligned}$$

Sendo a e a' complementares, b e b' complementares, $\Theta(l) = \lambda$ e $\Theta(m) = \mu$

Teorema 4.31 (Teorema De Pitágoras Hiperbólico): Em um triângulo retângulo de hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b vale

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$$

Demonstração. Para a demonstração desse teorema, considere a Figura 4.70.

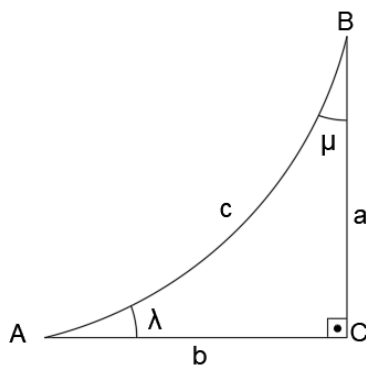


Figura 4.70: Apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras Hiperbólico.

Nela, $\Theta(l) = \lambda$ e $\Theta(m) = \mu$. Pelo corolário 4.4, temos

$$\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m) \quad \sinh(l) = \frac{\cosh(a')}{\sinh(b')} \quad \sinh(m) = \frac{\cosh(b')}{\sinh(a')}$$

Logo

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \frac{\cosh(a') \cosh(b')}{\sinh(b') \sinh(a')} \\ &= \frac{\cosh(a')}{\sinh(a')} \frac{\cosh(b')}{\sinh(b')} \\ &= \coth(a') \coth(b') \end{aligned}$$

pelo Corolário 4.3,

$$\coth(a') = \cosh(a) \quad \coth(b') = \cosh(b)$$

Deste modo, $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$ □

4.13 Trigonometria Hiperbólica em triângulos quaisquer

Nesta secção veremos as versões das leis do Seno e do Cosseno para Geometria Hiperbólica. Para isso, observe a Figura 4.71. Nela está representada um triângulo hiperbólico ordinário ABC cujos ângulos dos vértices A , B e C são, respectivamente, λ , μ e ν . Segundo Barbosa [2], página 136, os comprimentos dos lados opostos a esses ângulos, são a , b e c , enquanto os segmentos para os quais esses ângulos são de paralelismo serão chamados de l , m e n .

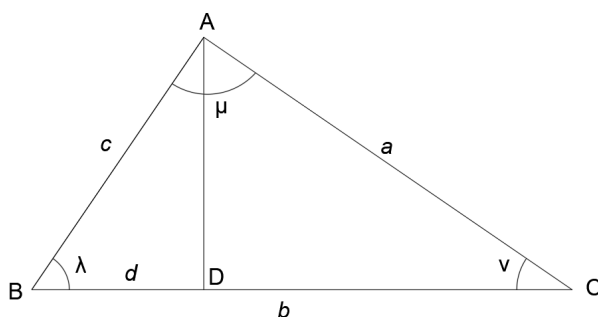


Figura 4.71: *Triângulo hiperbólico ordinário ABC . Os ângulos dos vértices A , B e C são, respectivamente, λ , μ e ν . Os comprimentos dos lados opostos a esses ângulos, são a , b e c , enquanto os segmentos para os quais esses ângulos são de paralelismo serão chamados de l , m e n .*

Teorema 4.32 (Lei Dos Senos Hiperbólica): Em um triângulo de lados a , b e

c , e ângulos opostos a esses lados λ , μ e ν tem-se

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}$$

Demonstração. Considere um triângulo ABC , como o da Figura 4.71. Trace a altura relativa ao lado AC , de comprimento h . Utilizando a proposição 4.7 ABD e CBD , obtemos

$$\sinh(a) = \sinh(h) \cosh(n)$$

$$\sinh(c) = \sinh(h) \cosh(l)$$

dividindo-se a primeira equação pela segunda, obtemos

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(c)} = \frac{\cosh(n)}{\cosh(l)} = \frac{1}{\cosh(l)} \frac{\cosh(n)}{1} = \frac{\operatorname{sech}(l)}{\operatorname{sech}(n)} \Rightarrow \frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}$$

De modo análogo, traçando-se a altura relativa ao vértice BC , podemos concluir

$$\frac{\sinh(b)}{\sinh(c)} = \frac{\operatorname{sech}(m)}{\operatorname{sech}(n)} \Rightarrow \frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}$$

Deste modo, unindo-se esses resultados, provamos o teorema. \square

De acordo com Arcari [1], página 111, temos duas versões sobre a Lei dos Cossenos Hiperbólica. Elas são apresentadas a seguir.

Teorema 4.33 (Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 1): Em um triângulo de lados a , b e c , e ângulos opostos a esses lados λ , μ e ν tem-se

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l)$$

Demonstração. Considere um triângulo ABC , como o da Figura 4.71. Trace a altura relativa ao lado AC , sendo o ponto D o pé dessa altura. Suponhamos o caso em que o ponto D pertença ao lado AC . Se d e b são os comprimentos de AD e AC , respectivamente, temos que DC terá comprimento $b - d$. Aplicando o Teorema de Pitágoras Hiperbólico 4.31 nos triângulos BDC e BDA , temos

$$\cosh(a) = \cosh(h) \cosh(b - d)$$

$$\cosh(c) = \cosh(h) \cosh(d)$$

dividindo-se a primeira pela segunda equação, obteremos

$$\frac{\cosh(a)}{\cosh(c)} = \frac{\cosh(b - d)}{\cosh(d)}$$

Manipulando-se essa equação, teremos

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(c) \frac{\cosh(b-d)}{\cosh(d)} \\ &= \cosh(c) \left(\frac{\cosh(b) \cosh(d) - \sinh(b) \sinh(d)}{\cosh(d)} \right) \\ &= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \cosh(c) \tanh(d) \end{aligned}$$

Mas,

$$\tanh(d) = \tanh(c) \tanh(l)$$

De fato,

$$\tanh(l) = \frac{\sinh(l)}{\cosh(l)}$$

Utilizando-se o Corolário 4.4 no numerador e a Proposição 4.7, no denominador, obteremos

$$\frac{\sinh(l)}{\cosh(l)} = \frac{\frac{\cosh(h')}{\sinh(c)}}{\frac{\sinh(h')}{\cosh(c) \sinh(h)}}$$

Utilizando-se o Corolário 4.3,

$$\frac{\frac{\cosh(h')}{\sinh(c)}}{\frac{\sinh(h')}{\cosh(c) \sinh(h)}} = \frac{\cosh(h) \sinh(d)}{\sinh(h)}$$

E, aplicando-se o Teorema de Pitágoras Hiperbólico 4.31

$$\frac{\frac{\cosh(h) \sinh(d)}{\sinh(h)}}{\frac{\sinh(c)}{\sinh(h)}} = \frac{\cosh(c) \sinh(d)}{\sinh(c)} = \frac{\tanh(d)}{\tanh(c)} \Rightarrow$$

$$\tanh(d) = \tanh(c) \tanh(l)$$

Logo,

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(c) - \cosh(b) \frac{\sinh(c)}{\cosh(c) \tanh(l)} \Rightarrow$$

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l)$$

□

Teorema 4.34 (Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 2): Considere um triângulo de lados medindo a , b e c e ângulos internos α , β e ν , conforme a

Figura 4.72. Então,

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\nu)}{\sen(\alpha) \sen(\beta)}$$

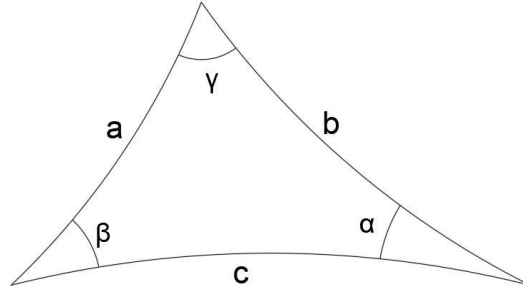


Figura 4.72: Apoio para a demonstração da Segunda versão da Lei dos cossenos Hiperbólica.

Demonstração. Consideremos inicialmente $A = \cosh(a)$, $B = \cosh(b)$ e $C = \cosh(c)$. Como $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$, teremos $\sinh^2(a) = \cosh^2(a) - 1$. Então, para valores de a positivos, $\sinh(a)$ também será positivo e, assim, $\sinh(a) = \sqrt{A^2 - 1}$. De maneira análoga, obteremos $\sinh(b) = \sqrt{B^2 - 1}$ e $\sinh(c) = \sqrt{C^2 - 1}$. Pela Lei dos Cossenos - versão 1, descrita no Teorema 4.33, teremos

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\nu) \Rightarrow \\ C &= AB - \sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1} \cos(\nu) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\cos(\nu) = \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1}} \quad (4.1)$$

De maneira totalmente análoga, obtemos

$$\cos(\alpha) = \frac{BC - A}{\sqrt{B^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}} \quad (4.2)$$

$$\cos(\beta) = \frac{AC - B}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}} \quad (4.3)$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^2(\nu) &= 1 - \cos^2(\nu) \\
 &= 1 - \left(\frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}} \right)^2 \\
 &= 1 - \left(\frac{(AB)^2 - 2ABC + C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} \right) \\
 &= \frac{(A^2 - 1)(B^2 - 1) - A^2B^2 + 2ABC - C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} \\
 &= \frac{A^2B^2 - A^2 - B^2 + 1 - AB^2 + 2ABC - C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} \\
 &= \frac{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

Vamos fazer a substituição

$$D = 1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2$$

E, assim teremos as equações

$$\operatorname{sen}(\nu) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{B^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}} \quad (4.6)$$

Utilizando-se as equações 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\nu)}{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)} &= \frac{BC - A}{\sqrt{B^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}} \frac{AC - B}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}} + \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1}} \\
 &= \frac{\frac{BC - A}{\sqrt{D}} \frac{AC - B}{\sqrt{D}} + \frac{AB - C}{\sqrt{D}}}{\frac{(B^2 - 1)(C^2 - 1)(A^2 - 1)(C^2 - 1)}{(BC - A)(AC - B) + (AB - C)}} \\
 &= \frac{\frac{(BC - A)(AC - B) + (AB - C)}{\sqrt{(B^2 - 1)\sqrt{A^2 - 1}(C^2 - 1)} + \sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}}}{D} \\
 &= \frac{(BC - A)(AC - B) + (AB - C)(C^2 - 1)}{D} \\
 &= \frac{ABC^2 - B^2C - A^2C + AB + ABC^2 - C^3 - AB + C}{D} \\
 &= C \frac{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}{D} \\
 &= C \frac{D}{D} \\
 &= C
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\nu)}{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}$$

□

4.14 A função ângulo de paralelismo revisitada

Na Seção 4.4 do Capítulo 4, a função ângulo de paralelismo Θ era definida para todos os números reais não negativos e assumia valores no intervalo de $(0, \pi/2]$. Nesta seção, vamos estender o domínio dessa função para todos os números reais, considerando $\Theta(-a) = \pi - \Theta(a)$, para todo a positivo. Deste modo, a imagem da função torna-se o intervalo $(0, \pi)$. Segundo Barbosa [2], páginas 140 e 145, temos a proposição e o corolário a seguir.

Proposição 4.8: Seja $\Theta(a) = \alpha$, a função ângulo de paralelismo estendida aos reais, então $\Theta(a) = \arccos(\tanh(a))$, isto é $\cos(\alpha) = \tanh(a)$.

É relevante informar que a função ângulo de paralelismo admite uma série de outras formulações equivalentes. Citamos a seguir algumas delas.

$$\coth(a) = \sec(\alpha) \tag{4.7}$$

$$\operatorname{sech}(a) = \operatorname{sen}(\alpha) \tag{4.8}$$

$$\cosh(a) = \operatorname{cossec}(\alpha) \tag{4.9}$$

$$\sinh(a) = \cot(\alpha) \quad (4.10)$$

$$\operatorname{cosech}(a) = \tan(a) \quad (4.11)$$

E, utilizando-se o fato de que $e^a = \sinh(a) + \cosh(a)$, podemos reescrevê-la ainda como indicado no corolário a seguir.

Corolário 4.5 (Bolay e Lobachewsky): Se $\Theta(a) = \alpha$, então $\tan(\alpha/2) = e^{-a}$.

Demonstração. Como $e^a = \sinh(a) + \cosh(a)$, pelas equações 4.9 e 4.10, temos

$$\begin{aligned} e^a &= \cot(a) + \operatorname{cosec}(a) \\ &= \frac{\cos(\alpha) + 1}{\sin(\alpha)} \\ &= \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

□

4.15 Comparação entre as Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana

Na dedução das fórmulas da Trigonometria Hiperbólica, tomamos como unidade de medida a distância entre dois arcos correspondentes de dois horocírculos concêntricos, cuja razão entre seus comprimentos é o número e .

Se e for trocado por um número a , positivo, tal que $a > 1$ as deduções do Teorema de Pitágoras, da Lei dos Senos e Lei dos Cossenos Hiperbólicos terão uma aparência distinta daquela que encontramos nas secções anteriores. Nesta seção veremos como se dá essa modificação e sua respectiva comparação com as fórmulas Euclidianas.

Pelo Teorema ??, se x é a distância entre os arcos AB e AC , então a equivalência entre os arcos é dada por $CD = AB e^{-x}$.

O que faremos agora é considerar $x = 1/k$, com k um número positivo. Consideraremos, portanto, $1/k$ como a nova unidade de medida. Assim, quando k assume valores muito grandes, a unidade de medida é pequena e os arcos AB e CD possuem quase o mesmo comprimento.

Segundo Arcari [1], página 121, considerando os triângulos indicados na Figura 4.73 e utilizando essa nova unidade de medida as fórmulas trigonométricas assumem as seguintes formas:

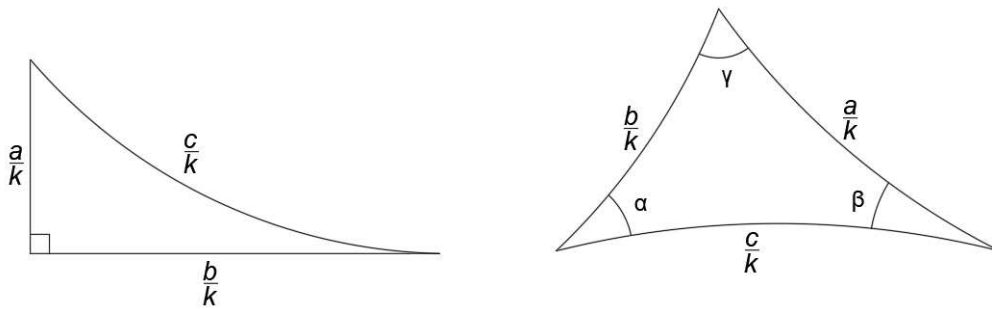


Figura 4.73: Medidas dos lados de triângulos hiperbólicos ordinários em termos da sub-unidades de medida.

Teorema de Pitágoras Hiperbólico

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \tag{4.12}$$

Lei dos Senos Hiperbólica

$$\frac{\sinh\left(\frac{a}{k}\right)}{\text{sen } \alpha} = \frac{\sinh\left(\frac{b}{k}\right)}{\text{sen } \beta} = \frac{\sinh\left(\frac{c}{k}\right)}{\text{sen } \nu} \tag{4.13}$$

Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 1

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos(\nu) \tag{4.14}$$

Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 2

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{\cos(\beta) \cos(\nu) + \cos(\alpha)}{\text{sen}(\beta) \text{sen}(\nu)} \tag{4.15}$$

Repare que quanto maior for o valor de k , menor será o tamanho do triângulo.

Desenvolveremos agora, essas fórmulas a fim de as compararmos com as fórmulas usuais na trigonometria Euclidiana. De acordo com a fórmula de Taylor para $\sinh(x/k)$, em torno do zero, para n variando de zero até infinito, temos:

$$\sinh\left(\frac{x}{k}\right) = \sum \frac{\sinh^n(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = \frac{x}{k} + \frac{x^3}{3!k^3} + \frac{x^5}{5!k^5} + \dots$$

E, analogamente

$$\cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \sum \frac{\cosh^n(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!k^2} + \frac{x^4}{4!k^4} + \dots$$

Assim, para valores muito grandes de k , podemos considerar as aproximações para

seno e cosseno hiperbólicos a seguir

$$\sinh \frac{x}{k} \simeq \frac{x}{k} \quad (4.16)$$

$$\cosh \frac{x}{k} \simeq 1 + \frac{x^2}{2k^2} \quad (4.17)$$

Deste modo, substituindo os valores encontrados nas equações 4.16 e 4.17 na equação 4.12, obtemos

Teorema de Pitágoras Hiperbólico

$$\begin{aligned} \cosh \left(\frac{c}{k} \right) &= \cosh \left(\frac{b}{k} \right) \cosh \left(\frac{a}{k} \right) \\ 1 + \frac{c^2}{2k^2} &\simeq \left(1 + \frac{b^2}{2k^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{2k^2} \right) \Rightarrow \\ 1 + \frac{c^2}{2k^2} &\simeq 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2b^2}{4k^4} \Rightarrow \\ c^2 &\simeq a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{2k^2} \end{aligned}$$

Donde, para valores de k muito grandes, teremos

$$c^2 \simeq a^2 + b^2$$

que é, aproximadamente o teorema de Pitágoras Euclidiano.

Lei dos Senos Hiperbólica

$$\begin{aligned} \frac{\sinh \left(\frac{a}{k} \right)}{\text{sen } \alpha} &= \frac{\sinh \left(\frac{b}{k} \right)}{\text{sen } \beta} = \frac{\sinh \left(\frac{c}{k} \right)}{\text{sen } \nu} \Rightarrow \\ \frac{\left(\frac{a}{k} \right)}{\text{sen } \alpha} &\simeq \frac{\left(\frac{b}{k} \right)}{\text{sen } \beta} \simeq \frac{\left(\frac{c}{k} \right)}{\text{sen } \nu} \Rightarrow \\ \frac{a}{\text{sen}(\alpha)} &\simeq \frac{b}{\text{sen}(\beta)} \simeq \frac{c}{\text{sen}(\nu)} \end{aligned}$$

que é, aproximadamente, a Lei dos Senos Euclidiana.

Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 1

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{c}{k}\right) &= \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos(\nu) \Rightarrow \\ 1 + \frac{c^2}{2k^2} &\simeq \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) - \frac{a}{k} \frac{b}{k} \cos(\nu) = 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2 b^2}{4k^2} - \frac{ab}{k^2} \cos(\nu) \simeq \\ c^2 &\simeq a^2 + b^2 - 2 \cos(\nu) + \frac{a^2 b^2}{2k^2} \Rightarrow \\ c^2 &\simeq a^2 + b^2 - 2 \cos(\nu) \end{aligned}$$

para k grande, que é, aproximadamente, a Lei dos Cossenos Euclidiana.

Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 2

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{a}{k}\right) &= \frac{\cos(\beta) \cos(\nu) + \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \sin(\nu)} \\ 1 + \frac{a^2}{2k^2} &\simeq \frac{\cos(\beta) \cos(\nu) + \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \sin(\nu)} \Rightarrow \\ 1 &\simeq \frac{\cos(\beta) \cos(\nu) + \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \sin(\nu)} \Rightarrow \\ \sin(\beta) \sin(\nu) &\simeq \cos(\beta) \cos(\nu) + \cos(\alpha) \Rightarrow \\ -\cos(\alpha) &\simeq \cos(\beta) \cos(\nu) + \sin(\beta) \sin(\nu) \Rightarrow \\ \cos(\pi - \alpha) &\simeq \cos(\beta + \nu) \Rightarrow \\ \pi - \alpha &\simeq \beta + \nu \Rightarrow \\ \pi &\simeq \alpha + \beta + \nu \end{aligned}$$

Portanto, quando assumimos unidades de medida muito pequenas, os triângulos hiperbólicos se assemelham muito aos euclidianos. Assim, para figuras suficientemente pequenas, as fórmulas da Geometria Euclidiana são válidas na Geometria Hiperbólica e vice e versa. Por tal razão, não é simples decidir se a Geometria que rege o mundo é ou não a comumente utilizada. Segundo Barbosa [2], página 148, no mundo físico, todas as medidas de ângulo e de segmentos estão sujeitas a erros, logo as diferenças entre as somas dos ângulos internos dos triângulos não devia justificar a escolha ou não da Geometria Euclidiana como modelo para a Física. Além disso, a interpretação de valores de k muito grandes ou pequenos torna-se relativa de acordo com o que estamos analisando. Se considerarmos um triângulo cujos vértices são estrelas muito distantes umas das outras, não temos como saber se o defeito encontrado nas medições se deve apenas aos erros de medida pois se comparados os lados desse triângulo com as dimensões do parâmetro k do universo, o triângulo ainda será muito pequeno e as Geometrias Euclidiana e Hiperbólica no mesmo terão características semelhantes.

Modelos na Geometria Hiperbólica

Na segunda metade do século XIX, a maior parte dos teoremas de Geometria Hiperbólica já havia se estabelecido. Porém, ainda não havia sido solucionado o problema da consistência dessa nova geometria. Pairava uma preocupação muito grande sobre a possibilidade de se encontrar no futuro uma contradição na lógica da teoria, ou seja, algum resultado verdadeiro cuja negação também pudesse ser provada verdadeira. Tal problema teve solução quando se introduziram modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica. Assim, uma contradição na Geometria Hiperbólica seria automaticamente transferida para a Geometria Euclidiana, que é considerada consistente.

Neste capítulo, veremos dois dos modelos que foram propostos para corroborar a consistência da Geometria Hiperbólica. De acordo com Arcari, página [1], página 42,

“[No século XIX, era preciso] Um modelo para um sistema axiomático de um ambiente no qual podemos representar (ou interpretar) os conceitos primitivos em relação aos quais os axiomas passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.”

5.1 Modelos de Poincaré



Figura 5.1: *Henry Poincaré.*

Henry Poincaré foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Era francês e viveu nos séculos XIX e XX, entre os anos de 1864 e 1912. Ele foi autor da famosa Conjectura de Poincaré, que hoje é um teorema demonstrado. Desenvolveu, entre os

anos de 1882 e 1887 dois modelos para a Geometria Hiperbólica: o modelo do disco e o modelo do semi-plano, os quais veremos a seguir.

5.1.1 Modelo do Disco de Poincaré

Nesta seção, ao nos referirmos a um disco estaremos nos referindo à uma circunferência e todo o círculo em seu interior. O bordo do disco corresponde à circunferência, e a área do disco ao seu interior. Posto isto, consideremos um disco euclidiano D de raio 1 e centro O e seja I seu interior. Segundo Arcari [1], página 42, baseado em axiomas e teoremas da Geometria Euclidiana, é possível provar que

I Dados os pontos não colineares A , B e O existe um único círculo euclidiano φ que passa pelos pontos A e B e intersecta o bordo de D ortogonalmente. Veja a Figura 5.2.

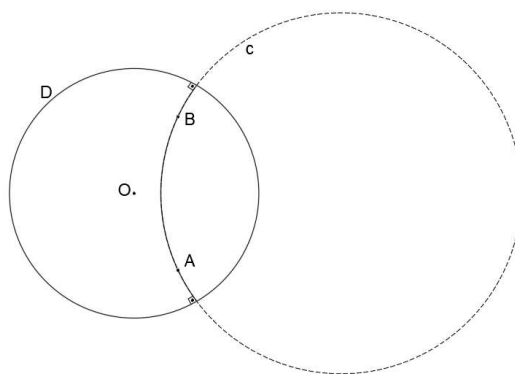


Figura 5.2: *Dados dois pontos no interior de um disco, existe apenas uma circunferência ortogonal ao bordo do disco passando pelo pelos pontos dados.*

II Dados os pontos A , B e O colineares, existe uma única reta euclidiana r que passa por eles e é ortogonal ao bordo de D . Veja a Figura 5.3.

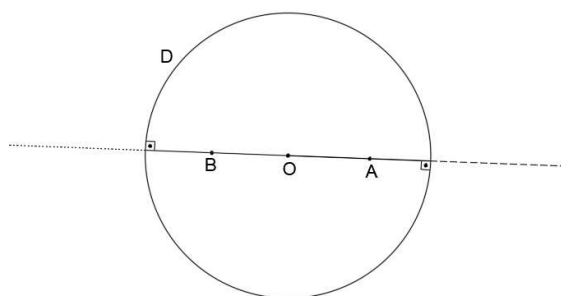
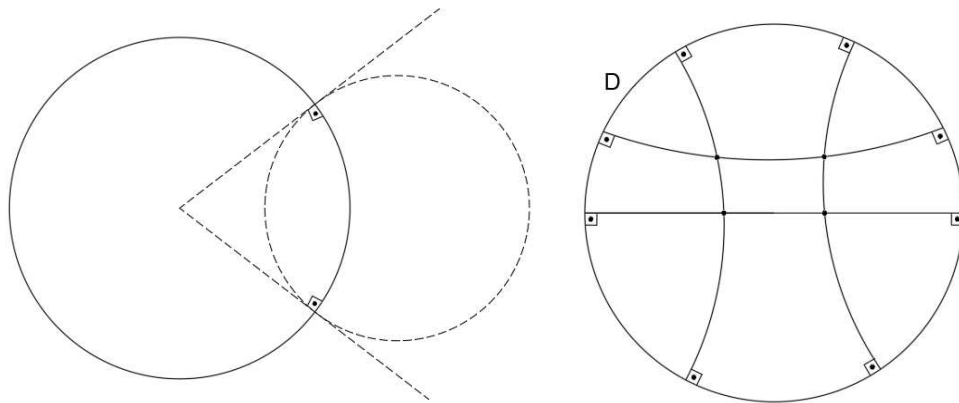


Figura 5.3: *Dados dois pontos no interior de um disco alinhados com seu centro, existe apenas uma reta ortogonal ao bordo do disco passando pelo seu centro.*

Vale ressaltar que no interior I do disco D

- Os pontos considerados são os pontos hiperbólicos da região I .



(a) Construção de uma reta hiperbólica no modelo do disco de Poincaré.

(b) Retas hiperbólicas no modelo do disco de Poincaré.

Figura 5.4: Exemplos de retas hiperbólicas no modelo do disco de Poincaré..

- As retas hiperbólicas são intersecções de I com um diâmetro de D ou intersecções de I com um círculo perpendicular ao bordo de D . Veja a figura 5.4b
- O plano hiperbólico é a região I .
- A noção de um ponto estar em uma reta hiperbólica coincide com a noção em retas euclidianas. O mesmo ocorre com a noção de estar entre dois pontos.

Nesse modelo, o ângulo hiperbólico entre duas semirretas hiperbólicas de mesma origem é definido como sendo o ângulo (euclidiano) entre suas tangentes (euclidianas) no ponto de intersecção. Veja a Figura 5.5.

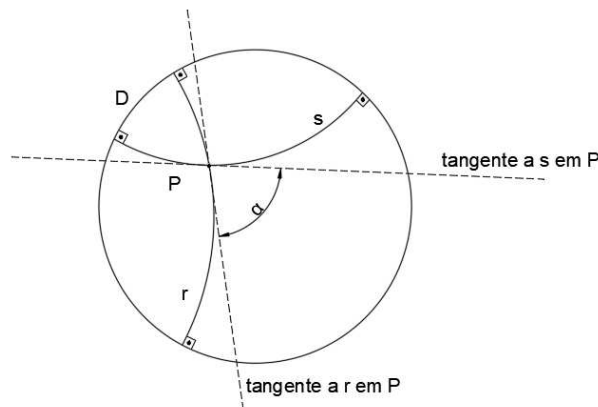


Figura 5.5: Ângulo hiperbólico no modelo do disco de Poincaré.

A medida de um ângulo é feita com o mesmo sentido que o euclidiano, obedecendo aos axiomas relativos a tais medições.

Considere um segmento hiperbólico TU , como representado na Figura 5.6. Sejam R e S os pontos que representam as “extremidades” da reta hiperbólica que contém

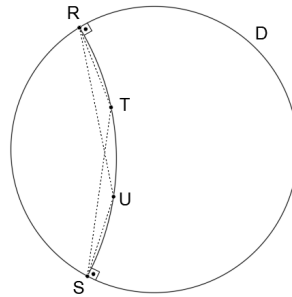


Figura 5.6: Medindo distâncias no modelo do disco de Poincaré.

TU . O comprimento hiperbólico $d(T,U)$ do segmento TU é definido pela relação

$$d(T,U) = \ln \frac{|UR \cdot TS|}{|TR \cdot US|},$$

na qual UR, TS, TR e US correspondem a comprimentos euclidianos. A razão acima é denominada razão cruzada.

A partir dessa redefinição de distância, de acordo com Arcari [1], página 43, o espaço passa a se comprimir à medida que nos aproximamos do seu limite. Desta forma, a área que antes era finita passa a ser infinita e a reta hiperbólica, ilimitada (ou seja, possui comprimento infinito). A curva de menor comprimento hiperbólico que liga os pontos T e U é o segmento hiperbólico.

O Disco de Poincaré é um modelo axiomático da Geometria Hiperbólica no qual vale o Axioma de Lobachewsky:

Axioma 5.1 (Axioma de Lobachewsky): Por um ponto P fora de uma reta r existem pelo menos duas retas distintas passando por P e paralelas à s .

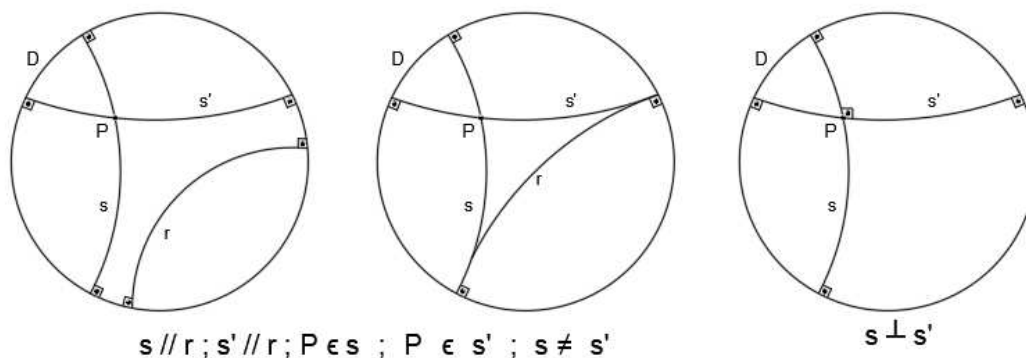


Figura 5.7: O Quinto Postulado de Euclides não é válido no modelo do disco de Poincaré.

O quinto postulado de Euclides não é válido no Disco de Poincaré,, como podemos ver na Figura 5.7, as retas s e s' , distintas entre si, passam por P e são paralelas à reta r .

5.1.2 Modelo do Semiplano de Poincaré

A seguinte secção foi inspirada em Braz [5], página 30, que apresenta o modelo do semiplano de Poincaré baseado num semiplano euclidiano, que inclui sua fronteira, no qual as retas hiperbólicas podem ser

- semicírculos, contidos no semiplano euclidiano, cujo centro situa-se na fronteira do mesmo (no eixo x); ou
- semirretas euclidianas contidas no semiplano e perpendiculares à fronteira do mesmo.

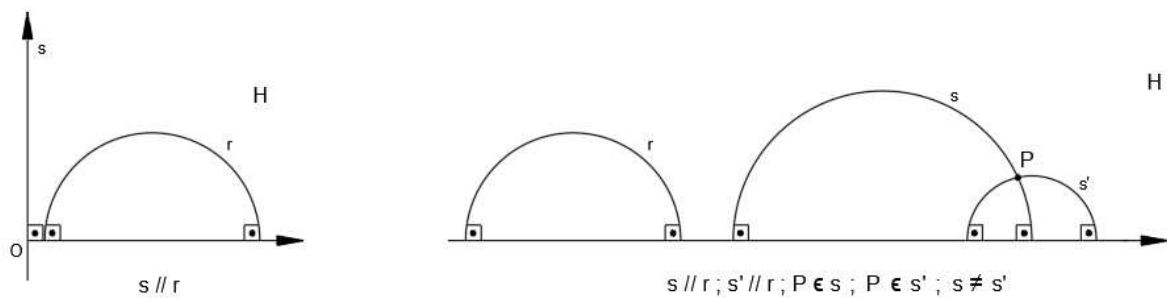


Figura 5.8: Retas hiperbólicas no modelo do semiplano de Poincaré.

Na Figura 5.8, apresentamos um exemplo de semiplano de Poincaré H , no qual as retas hiperbólicas são semicírculos r , s e s' são ortogonais ao eixo x .

- I o plano hiperbólico não contém a reta euclidiana que é fronteira do semiplano (eixo x ou eixo dos infinitos não está contido em H).
- II a noção de ângulo é a mesma da Geometria Euclidiana.
- III a noção de distância é diferente da utilizada no Disco de Poincaré.

Observamos que o suposto “ponto de encontro” das retas paralelas estará no eixo dos infinitos. Deste modo, a definição de retas paralelas continua sendo válida na Geometria Hiperbólica.

O ambiente criado facilitou a visualização dos resultados alcançados por muitos matemáticos, pois satisfaz todos os postulados da Geometria Hiperbólica.

Aplicações da Geometria Hiperbólica no Ensino Médio

As sugestões de atividades que são apresentadas neste capítulo têm o intuito de possibilitar um primeiro contato dos alunos do Ensino Médio com alguns dos principais conceitos de Geometria Hiperbólica. Alguns desses conceitos envolvem a noção distinta de elementos básicos exaustivamente trabalhados no ensino fundamental utilizando a Geometria Euclidiana como retas, ângulos e triângulos.

Para tais construções, será utilizado o Software livre Non-Euclid, versão 2007.04, disponível na página indicada pela referência [6]. Não é necessário nenhum tipo de licença ou conhecimento apurado para acessar a página indicada. Ela pode ser aberta em qualquer sala de informática das escolas com acesso à internet. Apesar do site estar em inglês, ele é bastante intuitivo e não requer nenhum conhecimento avançado desse idioma. Na página principal consta que uma nova versão JavaScript ainda está em desenvolvimento e, por esse motivo, utilizaremos nesse trabalho a versão anterior do Java que é disponibilizada como NonEuclid.jar. Para acessá-la, role a página inicial para baixo e faça o download, clicando duas vezes no local indicado na Figura 6.1.

Por intermédio do Software livre Non-Euclid os alunos poderão construir, visualizar e constatar esses importantes fundamentos hiperbólicos e, posteriormente, com o auxílio do professor, compará-los com os fundamentos euclidianos, ressaltando semelhanças e diferenças e, assim, contribuir para aumentar a criatividade e análise crítica do aluno.

6.1 Explorando retas na Geometria Hiperbólica

Nesta primeira aula, é interessante que seja feita a contextualização do porque ocorre a existência de um outro tipo de geometria, bem diferente daquela vista durante toda a vida estudantil dos alunos. Para isso, sugere-se um breve relato inicial que mencione a existência de afirmações matemáticas que não se podem provar mas que são aceitas como verdade, as quais damos o nome de postulados. Lembramos que a discussão axiomática dos postulados não deve ser abordada, pois o intuito dessa aula é o estímulo de um processo lógico-dedutivo que possibilite a

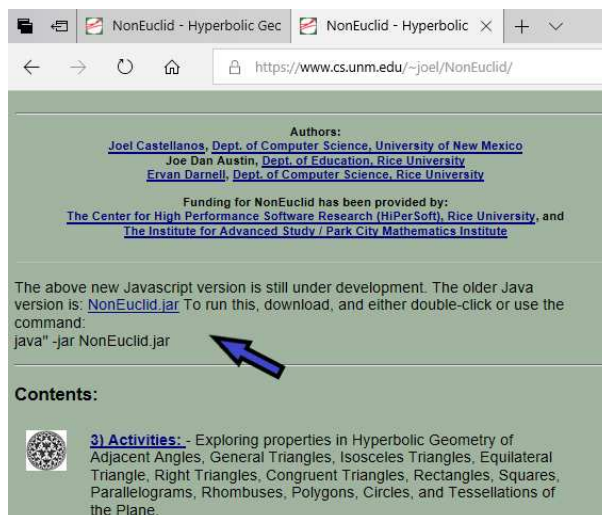


Figura 6.1: A seta indica o local na página inicial do site [6] para efetuar o download do Software livre Non-Euclid.

compreensão de forma global do contexto de elaboração das bases da Geometria. A seguir, apresentamos uma sugestão de apresentação do conteúdo.

Há cerca de trezentos anos antes da era cristã, um matemático chamado Euclides, escreveu um livro, *Os Elementos*, no qual enunciou e provou centenas de afirmações, que se tornaram a base da Geometria estudada hoje nas escolas: a Geometria Euclidiana. Tais afirmações eram baseadas em cinco postulados. Os postulados são afirmações matemáticas que não se podem provar mas que são aceitas como verdade. A conhecer:

Primeiro Postulado: Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos. **Segundo Postulado:** Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma linha reta. **Terceiro Postulado:** Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio. **Quarto Postulado:** Todos os ângulos retos são iguais. **Quinto Postulado:** Por um ponto fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela a r .

Entretanto, desde que foi publicado o livro de Euclides, o Quinto Postulado gerou muita polêmica, pois muitos matemáticos acreditavam que ele poderia ser provado. Inúmeras foram as tentativas de demonstrá-lo no decorrer dos séculos. E assim, aos poucos e com a contribuição de muitos antecessores, no século XIX, Lobachewsky, Gauss e Johann Bolyai perceberam independentemente que, com a negação desse Postulado, muitas outras afirmações poderiam ser feitas e provadas, provocando resultados estranhos e bem diferentes daqueles encontrados por Euclides.

Surge assim, a Geometria Hiperbólica, que é apenas uma das muitas Geometrias possíveis. E para atestar sua validade, o grande matemático Henry Poincaré criou dois modelos matemáticos que auxiliam na visualização e compreensão desses novos resultados. Utilizaremos nessas oficinas um desses modelos: o modelo do Disco de Poincaré.

Retas paralelas na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica

- No espaço euclidiano, duas retas paralelas distintas não possuem pontos em comum. Além disso, por um ponto P externo a uma reta r dada passa apenas uma reta s paralela à primeira. Veja a Figura 6.2 obtida utilizando o software livre Geogebra, muito comum no ensino de Geometria Euclidiana nas escolas.

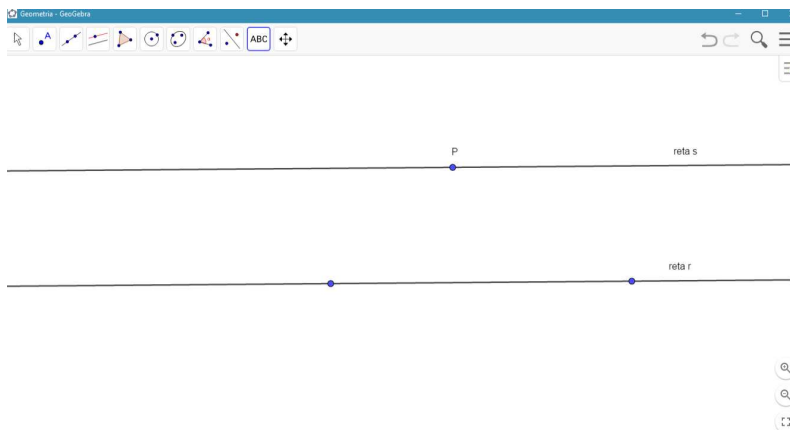


Figura 6.2: Retas paralelas na Geometria Euclidiana, utilizando o software GeoGebra.

- Já no espaço hiperbólico, duas retas paralelas possuem um ponto ideal em comum. E, por um ponto P externo a uma reta r dada passam infinitas retas paralela à ela.

Mas como será essa visualização?

Para prosseguir, vamos explorar o conceito e a construção de retas na Geometria Hiperbólica.

Utilizando o modelo do Disco de Poincaré, temos a seguinte definição:

Definição 6.1: A reta é todo arco de círculo que é ortogonal à circunferência do Disco.

Com o auxílio do Software Non-Euclid 2007.04 [6], faremos alguns roteiros para construções hiperbólicas que possibilitem a visualização dessa geometria tão instigante.

6.1.1 Construção de retas hiperbólicas

1. Inicie selecionando um novo projeto no menu “File” na opção “New”.
2. Selecione no menu “View” a opção “Hiperbolic Model” e clique em “Disk”. Conforme indicado na Figura 6.3.
3. Selecione “Constructions” e clique em “Plot Point”, para plotar pontos.
4. Clique no disco em dois lugares distintos para representar os pontos A e B . Como indicado na Figura 6.4.

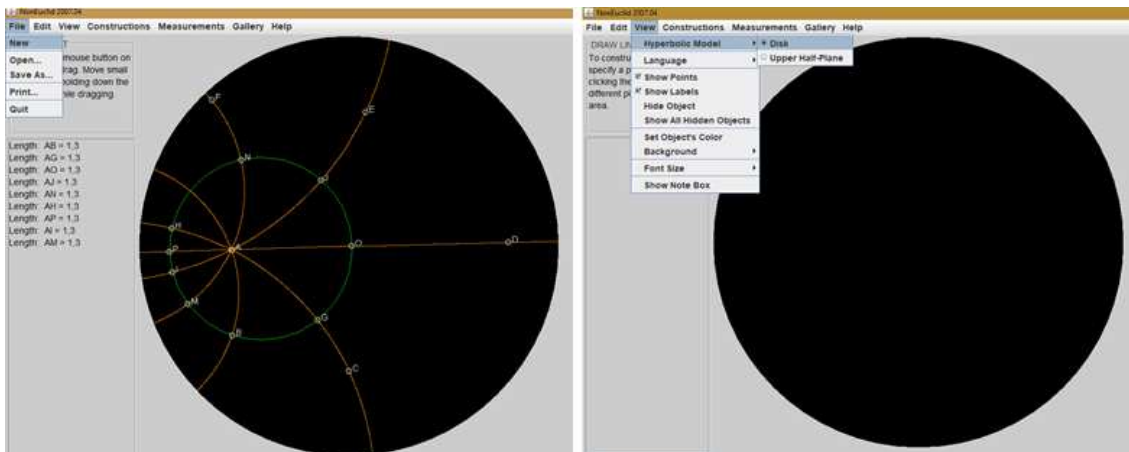


Figura 6.3: A imagem da esquerda indica a seleção do novo projeto na página inicial do Non-Euclid e a da direita, a seleção do modelo Hiperbólico.

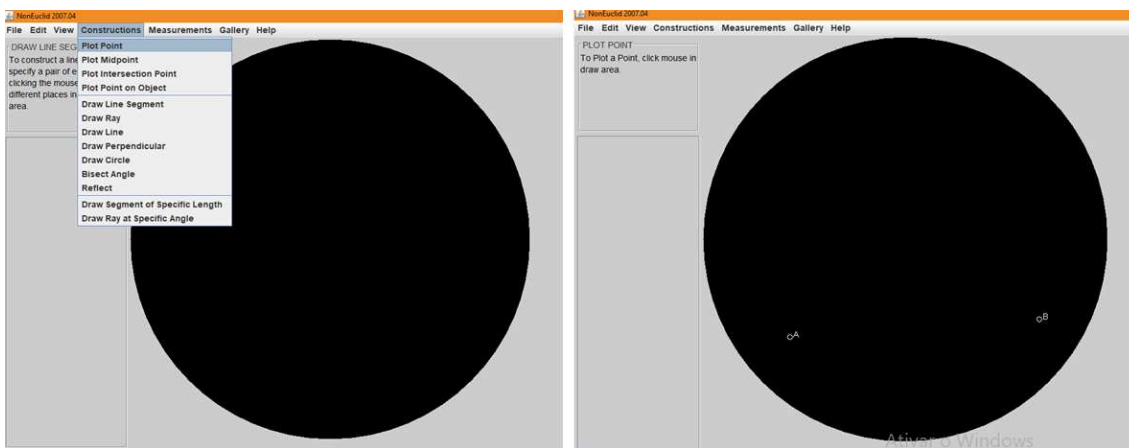


Figura 6.4: A imagem da esquerda indica o comando de seleção de pontos e a figura da direita, dois pontos no plano hiperbólico.

5. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Line”, para esboçar a reta.
6. Clique nos pontos A e B do Disco, como indicado na Figura 6.5.

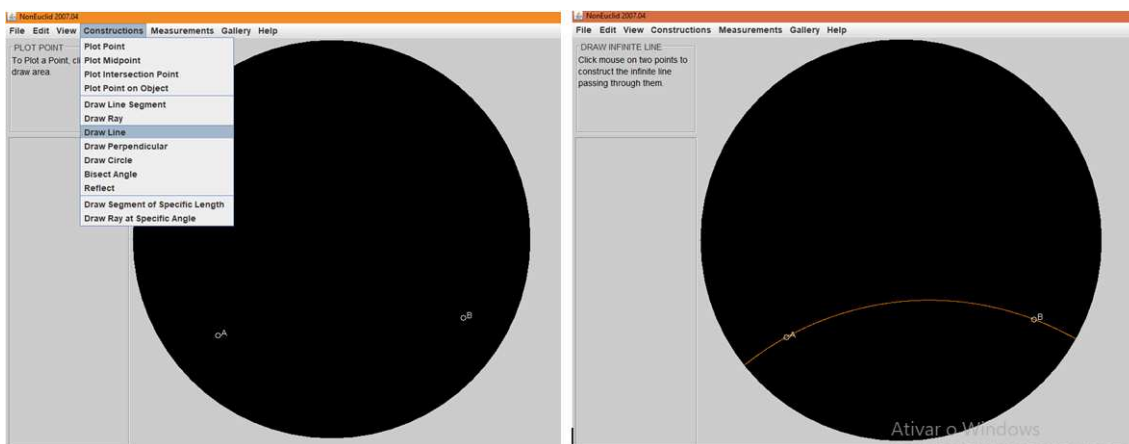


Figura 6.5: A imagem da esquerda indica o comando de construção de retas e a da direita, a reta que passa por dois pontos dados no plano hiperbólico.

7. Selecione “Edit” e clique em “Move Point”, para editar a reta movendo os pontos.

Mova, por exemplo, o ponto A e observe as modificações. Veja um exemplo na Figura 6.6.

- Descreva o que está acontecendo na intersecção da reta com a circunferência do Disco. Compare com a Definição 6.1 de reta hiperbólica.

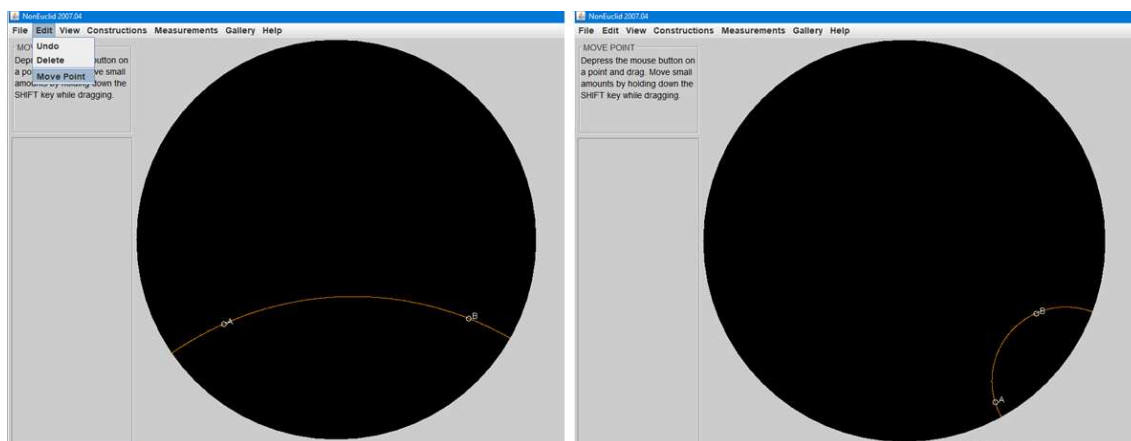


Figura 6.6: A imagem da esquerda indica o comando de mover pontos, e a da direita, um exemplo de reta obtida ao movermos o ponto A.

- Agora mova os pontos A e B de modo que a reta que passa por eles corresponda ao diâmetro do Disco. Deste modo o que podemos dizer sobre as retas nas Geometrias Euclidiana e Hiperbólica?

8. Selecione “Constructions” e clique em “Plot Point”.

9. Clique em outros três pontos no disco (C, D e E).

10. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Line” para formar as retas AC, CD e CE. Veja um exemplo na Figura 6.7.

Após a construção, responda:

- Em quantos pontos podem duas retas se interceptarem no Disco de Poincaré?
- Ao movermos a reta CD, é possível que ela não intercepte a reta AB? Exemplifique sua resposta com uma construção.
- Será possível movermos retas distintas de modo que duas delas tenham dois pontos de intersecção? E três pontos de intersecção? Quantas são as intersecções possíveis entre duas retas distintas na Geometria Hiperbólica?
- Comparando com a Geometria Euclidiana, o que podemos afirmar sobre o número de vezes que duas retas hiperbólicas se intersectam?

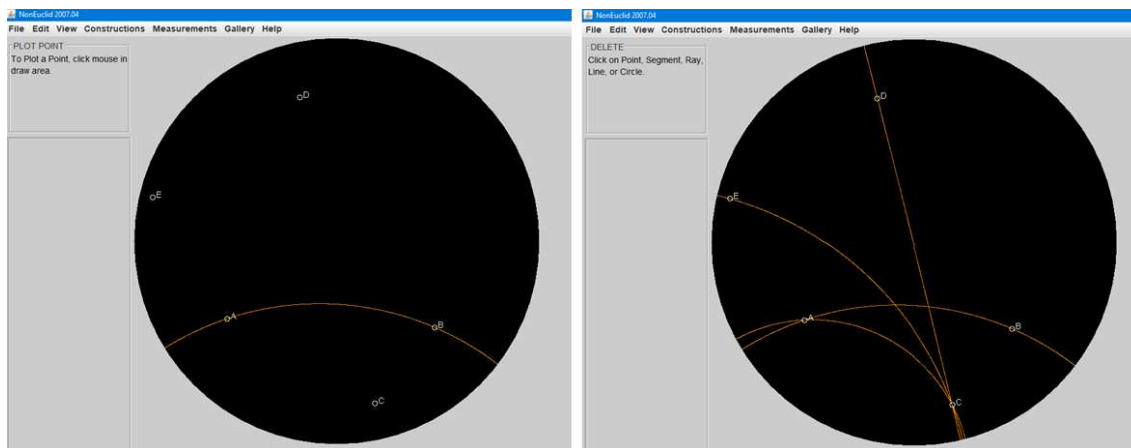


Figura 6.7: A figura à esquerda mostra a reta que passa por AB e três pontos quaisquer, C , D e E externos à ela. À direita, estão exemplificadas quatro retas na Geometria Hiperbólica.

Comentários No modelo do Disco de Poincaré temos que o plano hiperbólico é definido a partir da região limitada por uma circunferência. Denominamos essa região de Disco. Os pontos internos a essa circunferência são denominados pontos do plano hiperbólico, os pontos pertencentes à circunferência são os pontos ideais e a circunferência é dita horizonte hiperbólico. Os arcos de circunferência contidos no disco são ortogonais ao horizonte hiperbólico são as retas hiperbólicas.

Ao fazermos essa construção, fica claro que não importa para onde movamos os pontos, a reta sempre será perpendicular à circunferência do Disco de Poincaré. Quando uma reta hiperbólica passa pelo diâmetro do Disco de Poincaré ela se assemelha a uma reta no contexto Euclidiano. Percebemos deste modo, que dados quaisquer dois pontos, sempre poderemos traçar uma reta única que passe por eles no Disco, como proposto no Primeiro Postulado. Assim, na Geometria Hiperbólica, verificamos que duas retas distintas podem não se intersectar ou terem apenas um ponto em comum.

6.1.2 Construção de retas paralelas a uma reta dada

Vamos considerar inicialmente a noção de retas paralelas como retas que não possuem pontos ordinários em comum. Isso significa que uma reta que passa por um ponto dado e não intersecta a outra é paralela a essa reta.

1. Selecione a opção do modelo do Disco.
2. Selecione “Constructions” e clique em “Plot Point”. Marque dois pontos A e B distintos. Esses passos já estão representados nas Figuras 6.3 e 6.4.
3. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Line”. Construa a reta r que passa por A e B . Como indicado na Figura 6.5.

4. Selecione “Constructions” e clique em “Plot Point”. Marque um ponto C fora desta reta.
5. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Line”. Clique em dois pontos, C e D , de modo que a reta criada não intersecte a reta r . Observe a Figura 6.8.

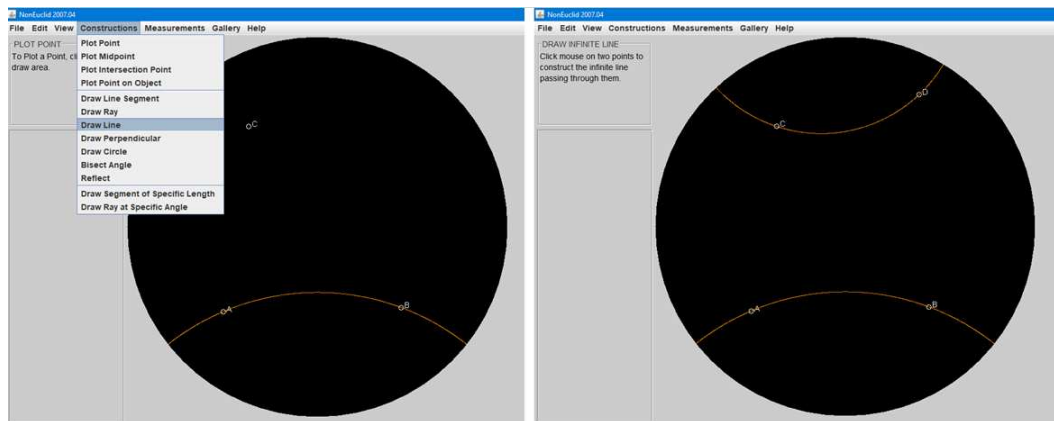


Figura 6.8: A Imagem da esquerda mostra o comando de construção de retas a partir de um ponto dado. Enquanto a imagem da direita, mostra duas retas que não possuem pontos ordinários em comum.

- O que podemos dizer sobre a posição dessas retas no Disco ao compararmos com a noção de retas paralelas vista no início dessa subsecção?
6. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Line”. Clique no ponto C e num outro ponto E do disco, distinto dos outros, de modo que a reta CE criada também não intersecte a reta que passa por A e B . Obtemos assim outra reta que não possui pontos em comum com a reta que passa por AB .
 - O que podemos afirmar sobre a relação entre as retas AB e CE ?
 - É possível construir uma segunda reta com mesma característica de CE , passando pelo ponto C ? Quantas retas terão essa mesma relação com a reta AB ? Exemplifique com uma construção.
 - Ao compararmos esse resultado com os conhecidos na Geometria Euclidiana, quais diferenças encontramos?
Agora divirta-se com as variações possíveis nesta construção, movendo o ponto C .

Comentários

Vimos com essa construção que a reta que passa por C e D , por não possuir pontos ordinários na intersecção, será paralela à reta dada. Observamos que, seguindo esse roteiro, podemos construir várias retas distintas e paralelas a uma mesma reta, passando por um ponto exterior à reta dada. Veja a Figura 6.9. Na Geometria Euclidiana, por um ponto exterior à uma reta dada só podemos construir uma única reta paralela, como mostramos na Figura 6.2.



Figura 6.9: A Imagem da esquerda mostra duas retas hiperbólicas, CD e CE , paralelas a reta AB , passando pelo ponto C , externo a essa. Enquanto a imagem da direita, mostra que é possível construir varias retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto externo a ela.

É relevante a intervenção do professor nesse momento para mencionar o Postulado que deu origem à Geometria Hiperbólica, descrito abaixo.

Postulado 6.1: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não intersectam a reta dada.

Percebemos com essa construção, que no espaço hiperbólico existem infinitas retas passando por um ponto e não intersectando uma reta dada.

É interessante que o professor questione sobre o comprimento das retas na geometria Hiperbólica, pois aparentemente, apresenta comprimento finito (pois é construída dentro de um disco). Sabemos que as retas na Geometria Euclidiana possuem comprimento infinito mas será que o mesmo pode ser dito das retas hiperbólicas?

Se pensarmos nas bordas do Disco de Poincaré como bordas que continuam infinitamente, as retas hiperbólicas também são infinitas!

6.2 Explorando ângulos e triângulos na Geometria Hiperbólica

Os triângulos hiperbólicos consistem na região determinada por três pontos não colineares conectados por três segmentos de reta hiperbólicos. Tais triângulos possuem a soma dos ângulos internos sempre menor que 180 graus. Vamos explorar nessa seção algumas construções a esse respeito.

6.2.1 Investigando os elementos dos triângulos hiperbólicos

1. Inicie selecionando um novo projeto no menu “File” na opção “New”.
2. Selecione no menu “View” a opção “Hiperbolic Model” e clique em “Disk”. Conforme indicado na Figura 6.10.

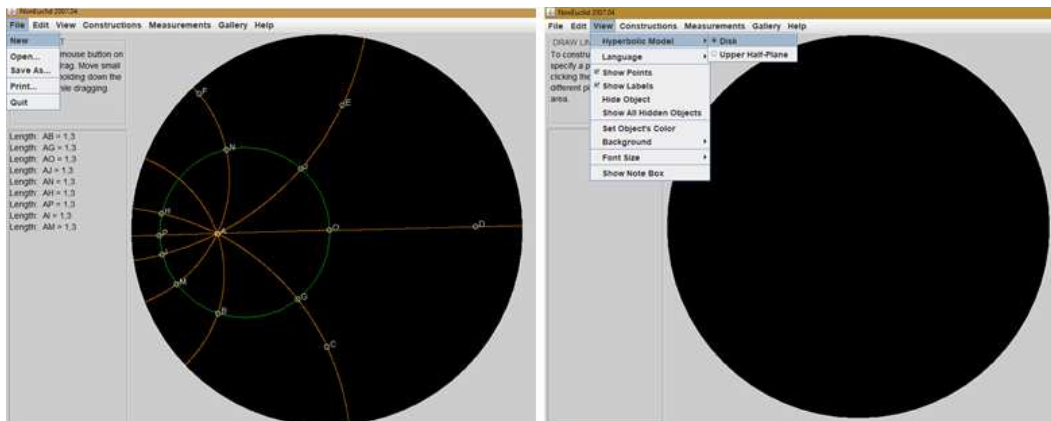


Figura 6.10: A imagem da esquerda indica a seleção do novo projeto na página inicial do Non-Euclid. E a da direita, a seleção do modelo Hiperbólico.

3. Selecione “Constructions” e clique em “Plot Point”, para plotar o ponto.
4. Clique no disco em três lugares distintos para representar os pontos A , B e C , conforme indicado na Figura 6.11.

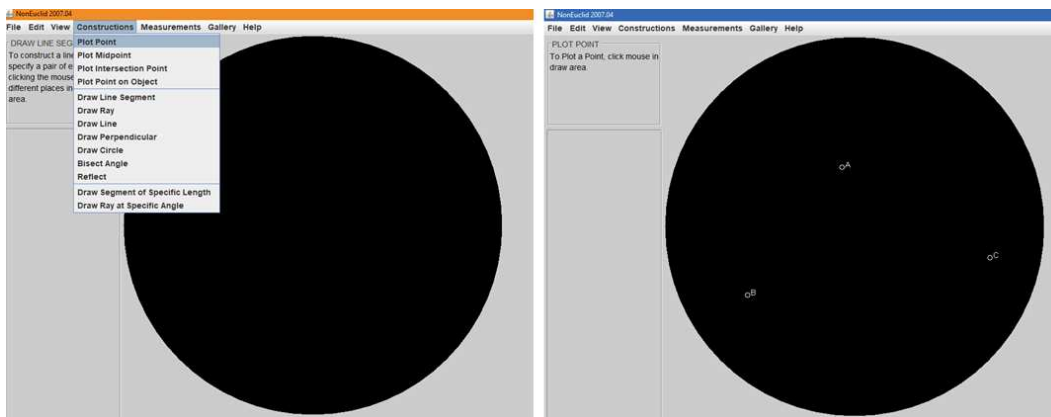


Figura 6.11: A imagem da esquerda indica o comando de plotagem de pontos e a figura da direita, três pontos no plano hiperbólico.

5. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Line Segment”.
 6. Clique nos pontos A e B do Disco para formar o lado AB . Posteriormente, forme os lados AC e BC do triângulo. Conforme indicado na Figura 6.12.
- Agora, vamos descobrir as medidas dos ângulos internos do triângulo.
7. No menu “Measurements” clique em “Measure Angle”, para medir ângulos.
 8. Agora clique nos três pontos que formam esse ângulo, de forma que o vértice desse ângulo seja o segundo ponto.

- Meça os ângulos \widehat{ABC} , \widehat{BCA} e \widehat{CAB} do triângulo ABC e anote os valores obtidos. As medidas dos ângulos aparecem no canto esquerdo da tela, como visto na Figura 6.13.

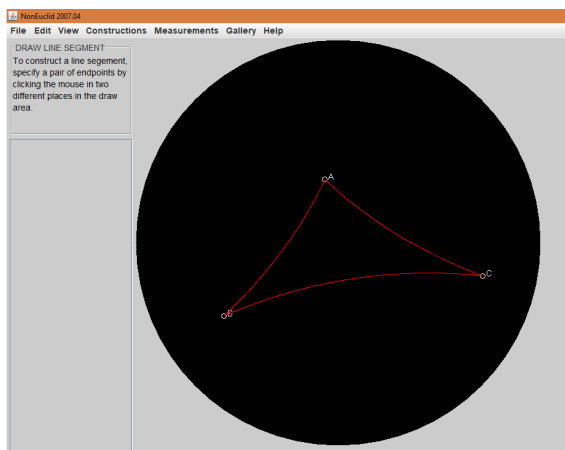


Figura 6.12: Exemplo de triângulo hiperbólico obtido pela união de três pontos ordinários A , B e C do Disco por segmentos de reta hiperbólicos.

- Qual o valor obtido para a soma dos ângulos internos desse triângulo?
- Compare o valor esperado para um triângulo euclidiano.

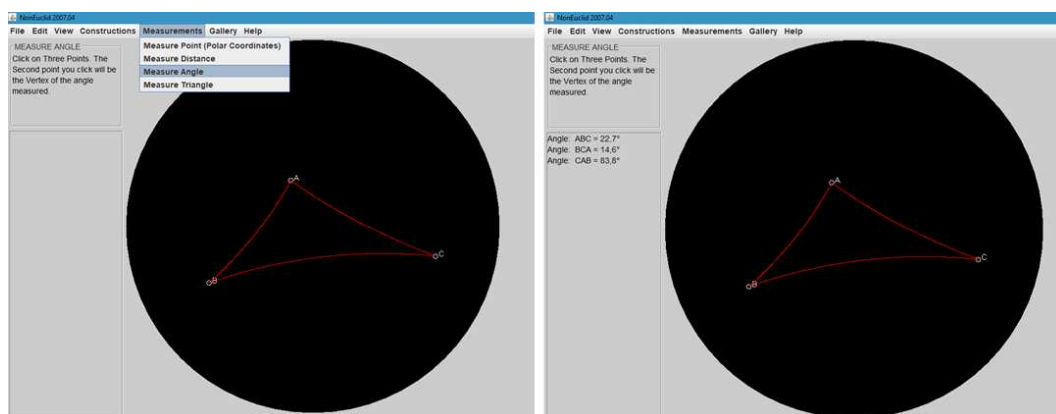


Figura 6.13: A imagem à esquerda mostra o comando necessário para medir ângulos hiperbólicos quaisquer no Non-Euclid. A figura à direita mostra os valores obtidos após a medição dos três ângulos num triângulo hiperbólico.

- No menu “Edit” clique em “Move Point”, para mover pontos.
- Mova os vértices desse triângulo. A cada alteração de posição dos vértices, anote os novos valores dos ângulos internos e a soma dos ângulos internos, através do comando abaixo.
- No Menu “Measurements” clique em “Measure Triangle”, para medir os ângulos do triângulo. Posteriormente clique nos três vértices do triângulo. Aparecerá, no lado esquerdo da tela, um quadro com todas as principais medidas dos ângulos e tamanhos dos lados do triângulo criado, conforme indicado na Figura 6.14. Esse comando também nos dá a soma desses ângulos automaticamente.
 - Anote as medidas dos ângulos desse triângulo.

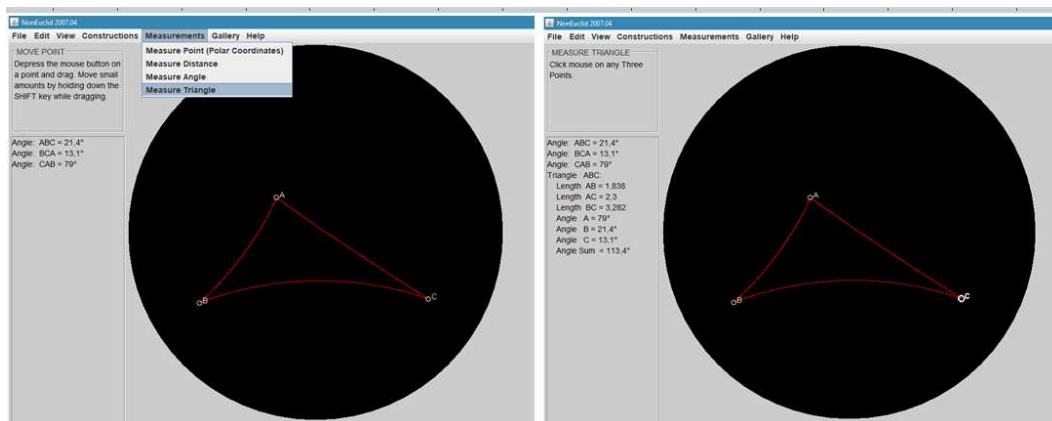


Figura 6.14: A imagem à esquerda mostra o comando necessário para medir ângulos, soma de ângulos e lados de triângulos hiperbólicos quaisquer no Non-Euclid. A figura à direita mostra os valores obtidos após a medição dos três ângulos num triângulo hiperbólico.

- Agora responda, o que acontece com as medidas dos ângulos do triângulo quando seus vértices se aproximam das bordas do Disco? E se os vértices estiverem próximos do centro do disco?

Comentários Com essa construção, os alunos irão perceber que os triângulos hiperbólicos podem assumir formas diferentes das comuns na Geometria Euclidiana, e quanto mais próximo das bordas do Disco os vértices estiverem, menor será o valor dos ângulos internos do triângulo e quanto mais próximo do centro os vértices estiverem mais próxima de 180 graus a soma estará.

O professor poderá aproveitar e definir a diferença entre triângulos ordinários e triângulos ideais para os alunos. Os triângulos ordinários são aqueles que possuem os vértices dentro do Disco de Poincaré enquanto os triângulos ideais possuem seus três vértices nas fronteiras do Disco.

Os triângulos ideais possuem todos os vértices estendendo-se ao infinito. Deste modo, os lados dos triângulos ideais nunca se encontram, seu perímetro tende ao infinito e seus ângulos, à zero.

6.2.2 Construindo um triângulo retângulo

Sugerimos a seguir duas construções para serem feitas em sequência com os estudantes. A primeira para reconhecimento de um triângulo retângulo hiperbólico e a seguinte para que eles comparem valores pré-definidos de catetos e descubram uma nova relação que os possibilitem prever o valor da hipotenusa de triângulos retângulos hiperbólicos.

1. Selecione o menu “Constructions” e clique em “Plot Point”. Marque dois pontos distintos A e B , como indicado na Figura 6.15.
2. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Line Segment”, clicando nos pontos A e B , para obter o segmento AB , conforme indicado na Figura 6.16.

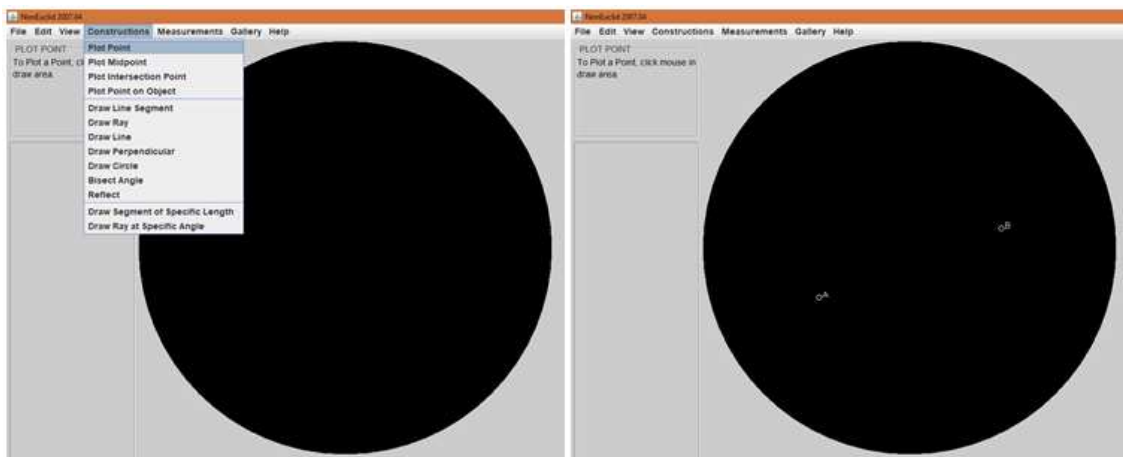


Figura 6.15: A imagem da esquerda indica o comando de seleção de pontos e a figura da direita, dois pontos no plano hiperbólico.

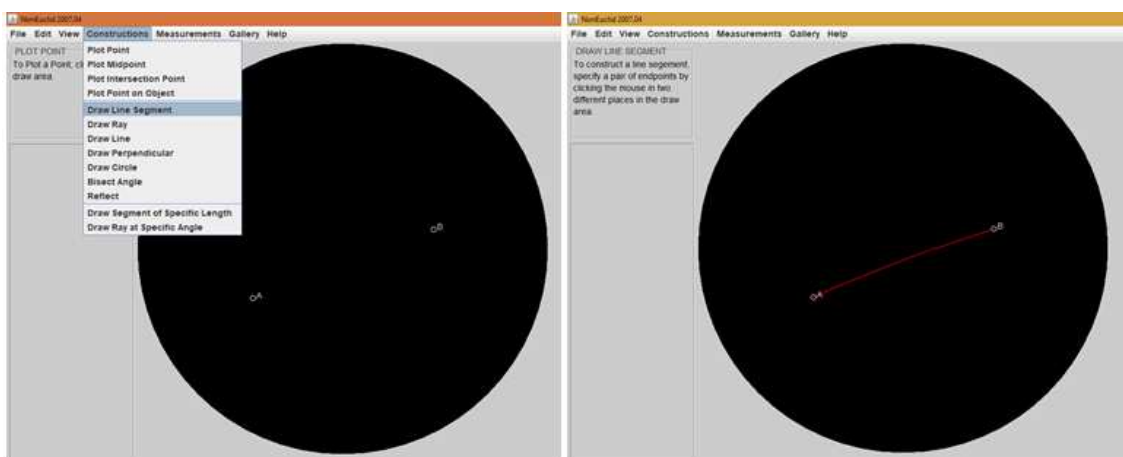


Figura 6.16: A imagem da esquerda indica o comando de construção de segmentos e a figura da direita, o segmento AB .

3. Selecione “Constructions” e clique em “Draw Perpendicular”.
4. Clique em um dos pontos A ou B e no segmento AB . Esse comando possibilitará a criação de uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto escolhido. Observe a Figura 6.17.
5. Posteriormente, selecione “Constructions” e clique em “Draw Line Segment”, clicando nos pontos B e C (caso a reta seja perpendicular à AB passe por A) ou nos pontos A e C (caso a reta seja perpendicular à AB passando por B). Veja a Figura 6.18.
6. Selecione o comando “Measurements” e clique em “Measure Triangle”.
7. Clique nos vértices do triângulo formado para medir os ângulos internos. Veja no quadro à esquerda da tela as informações do triângulo ABC , observe a Figura 6.19.
 - Anote os valores encontrados para os ângulos internos e para a soma deles.

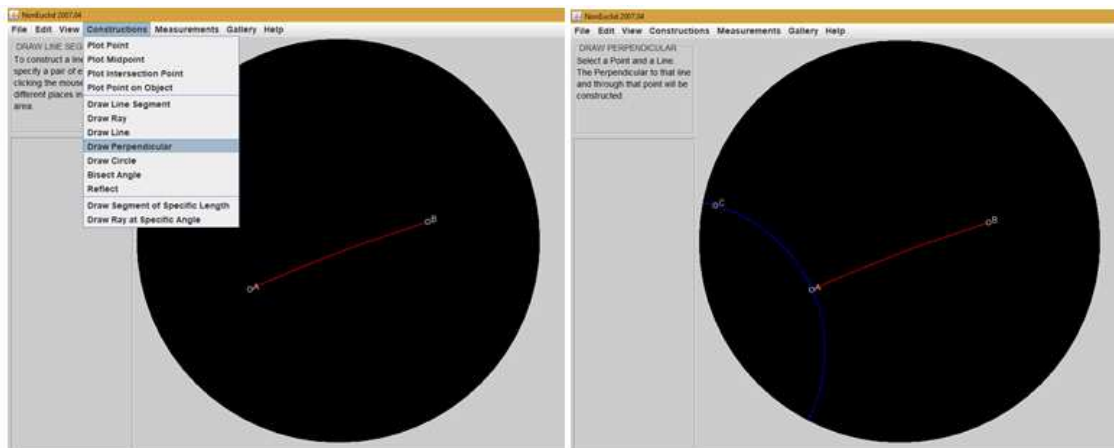


Figura 6.17: A imagem da esquerda indica o comando de construção de retas perpendiculares e a figura da direita, uma reta hiperbólica perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A .

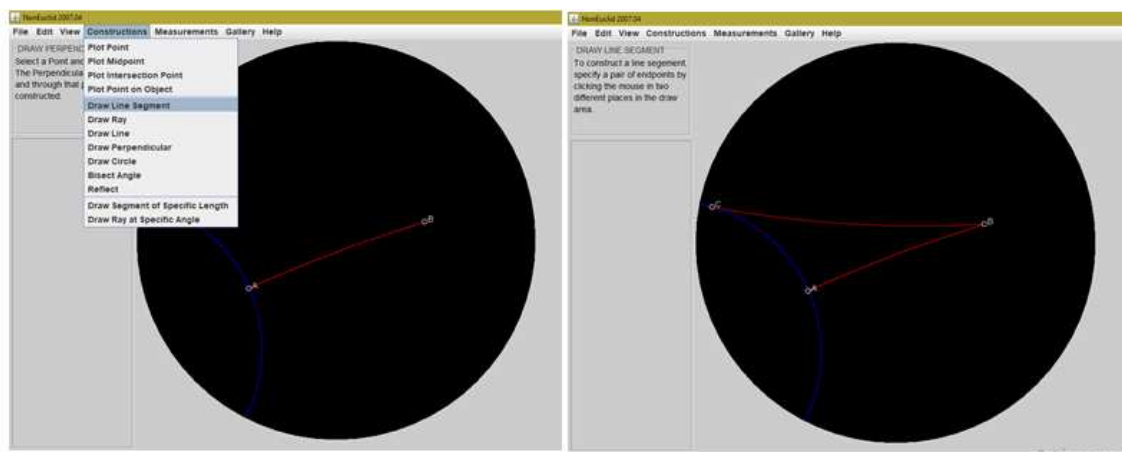


Figura 6.18: A imagem da esquerda indica o comando de construção de segmentos e a figura da direita, o triângulo ordinário ABC formado.

8. No menu “Edit” clique em “Move Point”.
9. Mova os vértices desse triângulo. Observe um exemplo na figura 6.20.
 - A cada alteração de posição dos vértices anote os novos valores dos ângulos internos e a soma dos ângulos internos. Faça esse procedimento para cinco modificações.
 - Agora responda, o que acontece com as medidas dos ângulos do triângulo e com o formato aparente do triângulo ao mover o ponto A ? E o ponto B ? E o ponto C ? E se os vértices se aproximam das bordas do Disco? E se os vértices estiverem próximos do centro do disco?

Comentários

Percebemos que na construção de um triângulo retângulo hiperbólico, os formatos obtidos podem ser muito variados. Além do formato, os valores das somas dos ângulos internos também pode variar bastante.

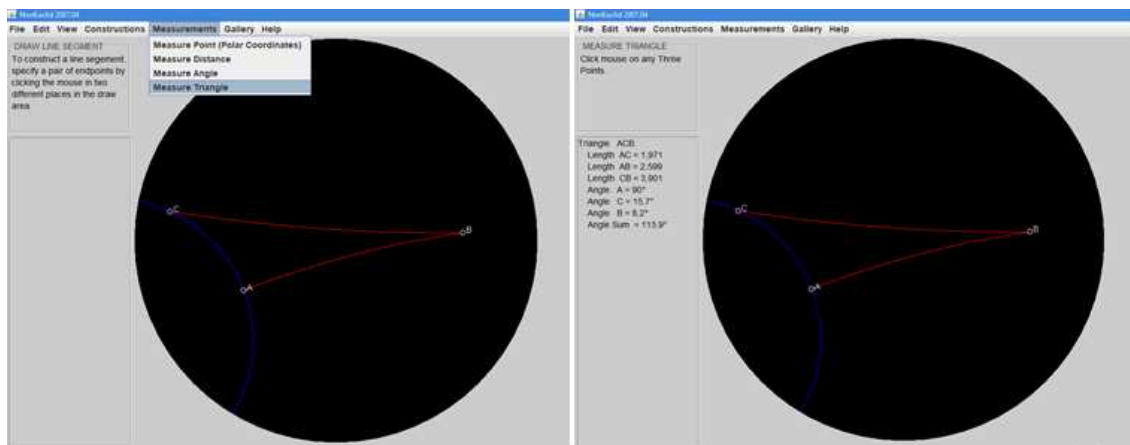


Figura 6.19: A imagem da esquerda indica o comando que possibilita visualizar todas as informações sobre as medidas dos ângulos internos, sua soma e as medidas dos lados do triângulo e a figura da direita, os valores obtidos para o triângulo ABC .

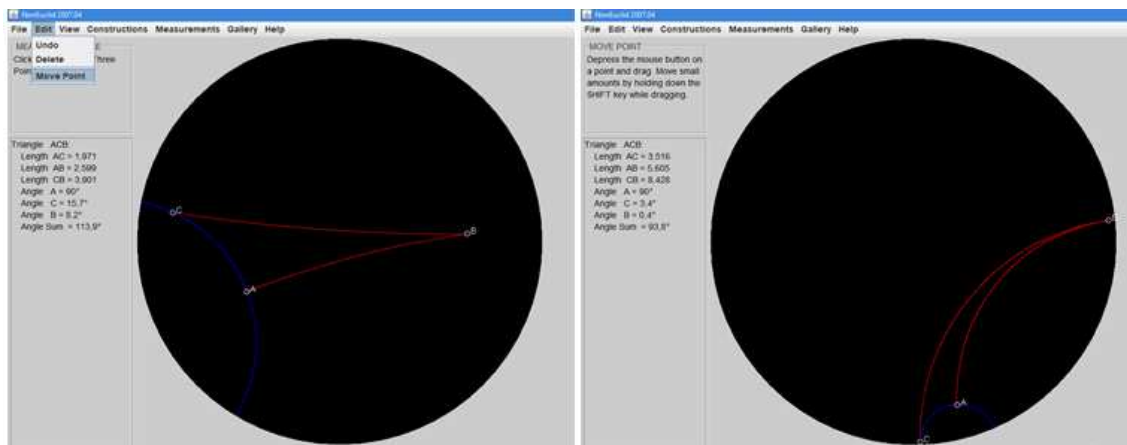


Figura 6.20: A imagem da esquerda indica o comando para mover pontos e a figura da direita, um triângulo retângulo hiperbólico.

Com relação a essas medidas, quanto mais próximo seus vértices estiverem do centro do Disco mais próximo estará da concepção de um triângulo retângulo euclidiano (quanto ao formato e à soma dos ângulos internos) e, quanto mais próximo da borda, maior a variedade de formatos e possibilidades distintas para a soma dos ângulos internos (compreendidas entre 90° e 180°).

Contudo, apesar de qualquer modificação que seja feita na posição dos vértices, o triângulo ABC dessa construção sempre terá um ângulo reto!

6.2.3 Construindo um triângulo retângulo de catetos fixos

Propomos aos alunos a construção de um triângulo retângulo de catetos medindo 3 e 4. Sendo assim, qual será o valor da hipotenusa desse triângulo? Descobriremos através da construção pelo software.

1. Selecione no Menu “Constructions” o item “Draw Segment of Specific Length”

2. Digite no quadro superior à esquerda o tamanho do segmento desejado 4.0 e observe a Figura 6.21.

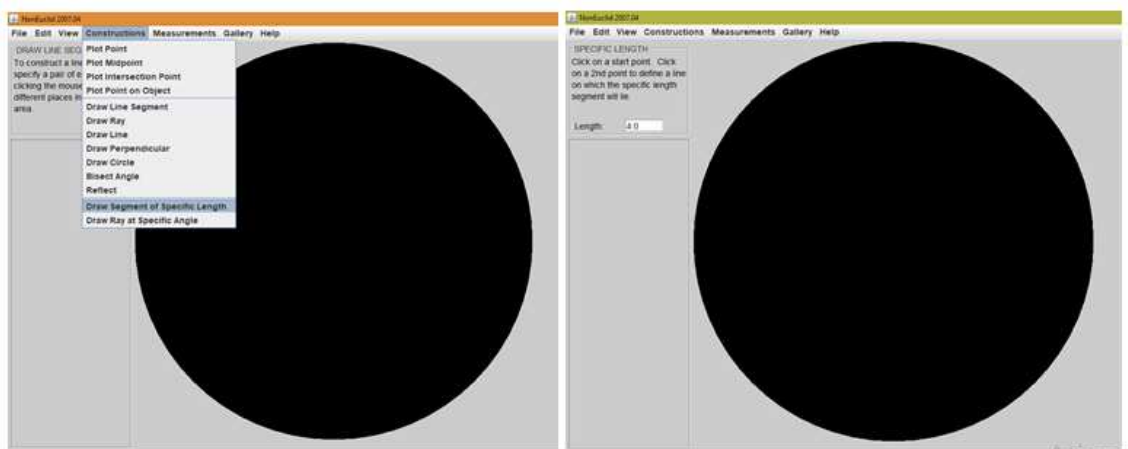


Figura 6.21: A imagem da esquerda indica o comando para a construção de segmentos de tamanho específico e a figura da direita, o local no canto superior, no qual inserimos o tamanho do segmento desejado.

3. Clique em dois pontos do Disco, pontos A e B .
4. Selecione “Constructions” o item “Draw Perpendicular”, veja a Figura 6.22.

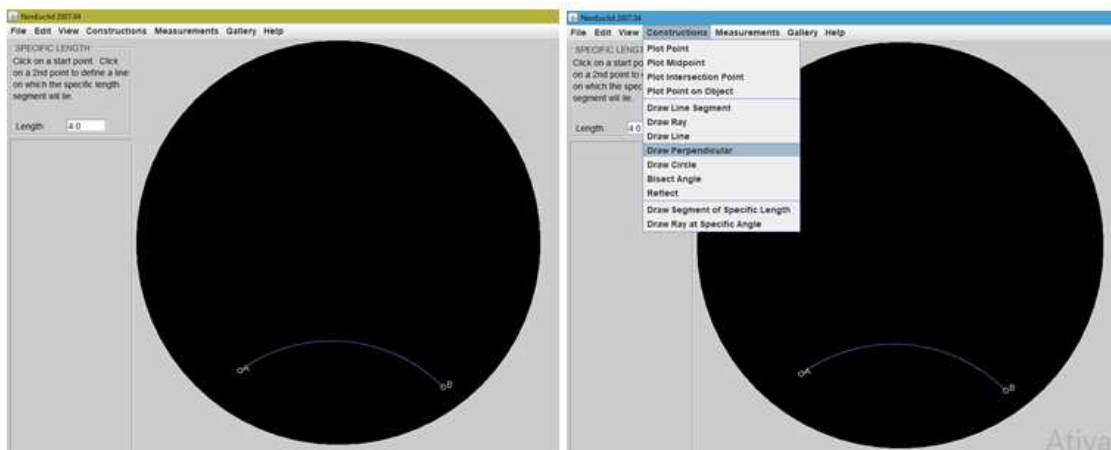


Figura 6.22: A imagem da esquerda mostra um segmento AB de tamanho 4 e a figura da direita, indica o comando para traçar retas perpendiculares à uma reta dada passando por um ponto.

5. Clique no ponto A e no segmento AB .
6. Selecione “Constructions”, o item “Draw Segment of Specific Length”, e digite no quadro superior à esquerda o tamanho do segmento desejado 3.0 e observe a Figura 6.23.
7. Clique no ponto A e em outro ponto qualquer D sobre à reta perpendicular a AB .

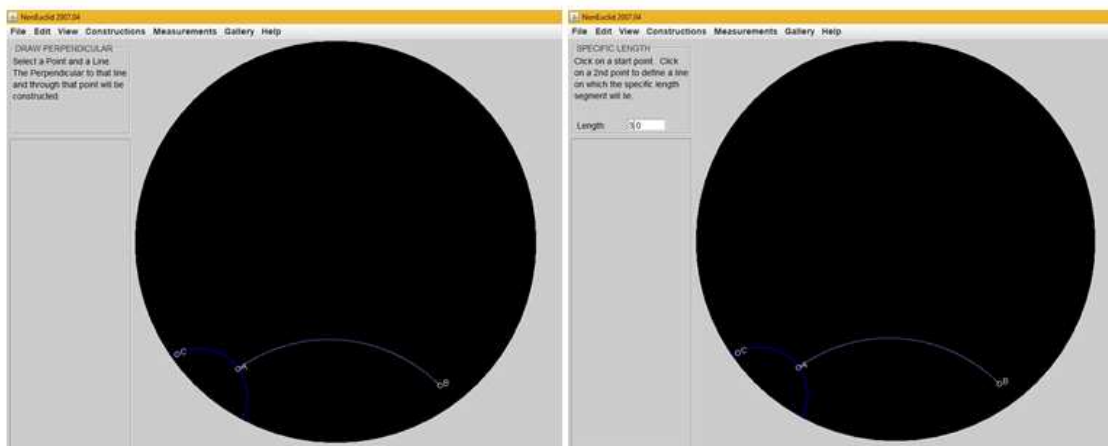


Figura 6.23: A imagem da esquerda mostra uma reta perpendicular ao segmento AB passando por A e a figura da direita, indica o local para inserir o tamanho do segmento desejado.

8. Selecione “Constructions” o item “Draw Line Segment” e clique nos pontos B e D , formando o triângulo ABD , como mostra a Figura 6.24.
9. No menu “Measurements” clique em “Measure Triangle”.
10. Clique nos vértices do triângulo ABC .

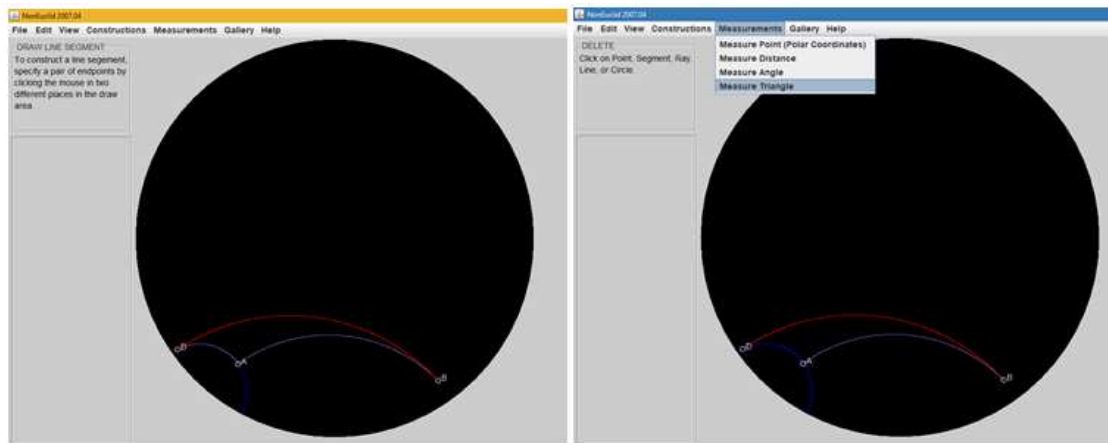


Figura 6.24: A imagem da esquerda mostra o triângulo retângulo ABC de catetos 3 e 4 e a figura da direita, indica o comando para medir ângulos internos e lados de um triângulo hiperbólico.

Observe o valor encontrado para a hipotenusa. Surpreso?

- Esse valor coincide com o valor esperado pela Geometria Euclidiana? Porquê?
- Já que os comprimentos dos lados do triângulo são fixos, é possível movimentar os vértices e alterar o valor dos ângulos internos do triângulo? E o formato do triângulo? Porquê isso acontece?

- Seria possível prever o resultado obtido para a medida da hipotenusa em triângulos retângulos hiperbólicos?

Comentários

Com essa construção, os alunos percebem que a hipotenusa de um triângulo retângulo hiperbólico é maior do que a prevista para a Geometria Euclidiana. Além disso, é possível movimentar dois dos três vértices do triângulo formado e obter formatos diferentes para triângulos com mesmos ângulos e medidas! Isso deve-se ao fato do disco de Poincaré ser um disco infinito em suas bordas e assim as distâncias se apresentam de maneiras distintas na superfície do Disco.

Um outro exercício que poderá auxiliar na compreensão do comportamento dos comprimentos no Disco pode ser feito separadamente. Utilizando, em um novo projeto, os comandos a seguir

- Selecione no Menu “Constructions” o item “Draw Segment of Specific Length”
- e digite no quadro superior à esquerda o tamanho do segmento desejado 4.0, por exemplo.
- Clique em dois pontos A e B quaisquer do Disco. Isso fará com que apareça um segmento de tamanho 4 no disco.
- Clique novamente em dois outros pontos do disco. Repita o processo várias vezes, faça os pontos próximo ao centro, depois próximo à borda e observe como os segmentos, de mesmo comprimento, aparecem no disco de Poincaré.

Voltando ao triângulo retângulo hiperbólico dessa construção, o resultado encontrado poderia ser previsto, pois dispomos de uma versão hiperbólica para o Teorema de Pitágoras que apresentamos a seguir:

Teorema 6.1: Em um triângulo retângulo, de catetos e hipotenusa medindo, respectivamente, a , b e c , vale a relação:

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$$

Pode-se pedir que os alunos utilizem a relação acima e uma calculadora científica para calcular o valor da hipotenusa do triângulo retângulo hiperbólico de catetos 3 e 4 e, posteriormente, comparem o valor obtido pela algebricamente calculada com o valor encontrado com a construção.

Algebricamente,

$$\cosh(c) = \cosh(3) \cosh(4) \cong 274,93 \Rightarrow c = 6,30966$$

coincide com o valor encontrado na construção. Pode-se repetir a construção para triângulos retângulos de catetos maiores, com o intuito de explorar outras medidas no Disco e o cálculo algébrico indicado no Teorema de Pitágoras Hiperbólico apresentado acima, para que os alunos se certifiquem que não foi uma coincidência.

6.2.4 Visualizando a congruência de triângulos

Dizemos que dois triângulos são congruentes se os três pares de lados correspondentes tiverem a mesmo comprimento e os três pares de ângulos correspondentes tiverem a mesma medida. Propomos abaixo uma atividade que possibilita a visualização de dois (ou mais) triângulos congruentes na Geometria Hiperbólica.

1. Inicialmente construa um triângulo. Para isso, no menu “Constructions” selecione “Draw line Segment” e clique no Disco de modo a formar os segmentos AB , BC e CA , como indicado na Figura 6.25.

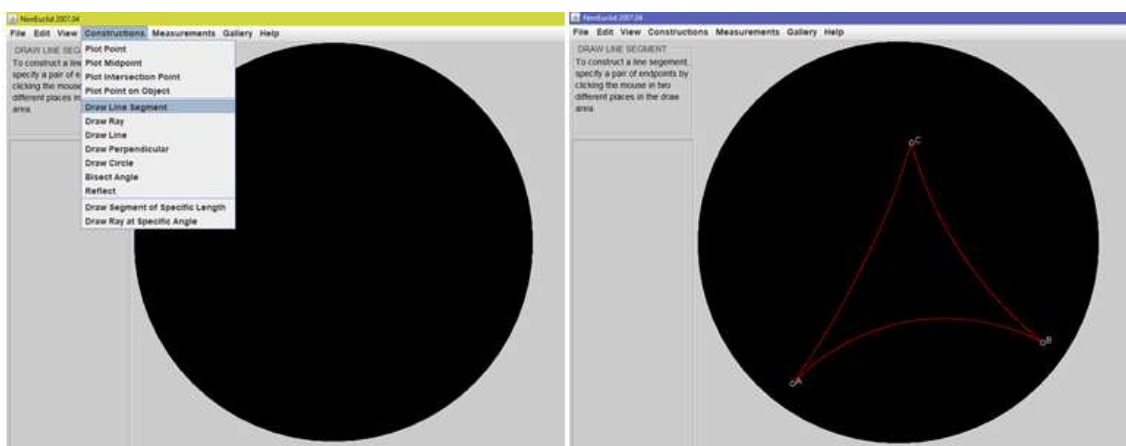


Figura 6.25: A imagem da esquerda mostra o comando para a construção de segmentos e a figura da direita, mostra o triângulo hiperbólico ABC formado pelos segmentos AB , BC e CA .

2. No menu “Constructions” selecione “Draw line”.
3. Construa uma reta DE . Sem perda de generalidade, suponha que DE não intersekte o triângulo ABC , como indicado na Figura 6.26.

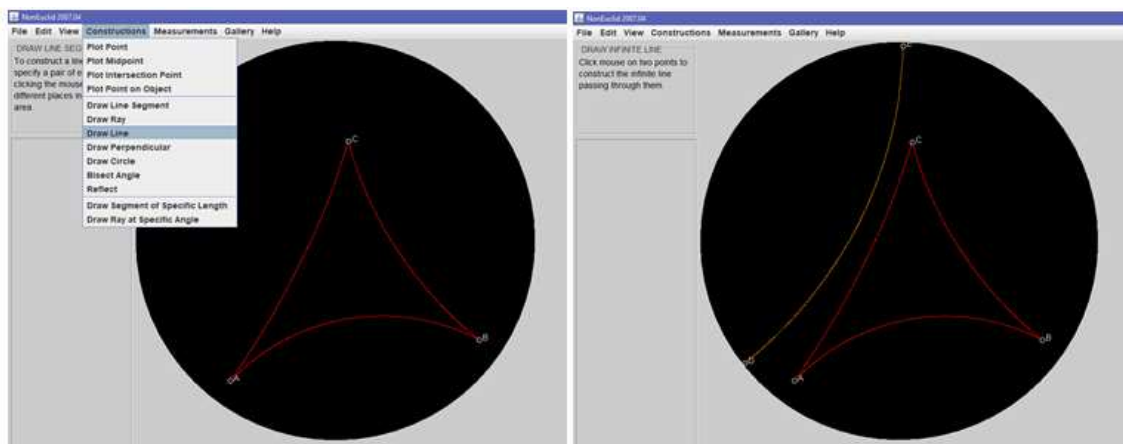


Figura 6.26: A imagem da esquerda mostra o comando para a construção de retas e a figura da direita, mostra o triângulo hiperbólico ABC e uma reta DE que não intersecta o triângulo.

4. No menu “Constructions” selecione “Reflect”.
5. Clique na reta DE e depois nos lados do triângulo original para refletí-lo em relação à reta que passa por DE . Observe a Figura 6.27.

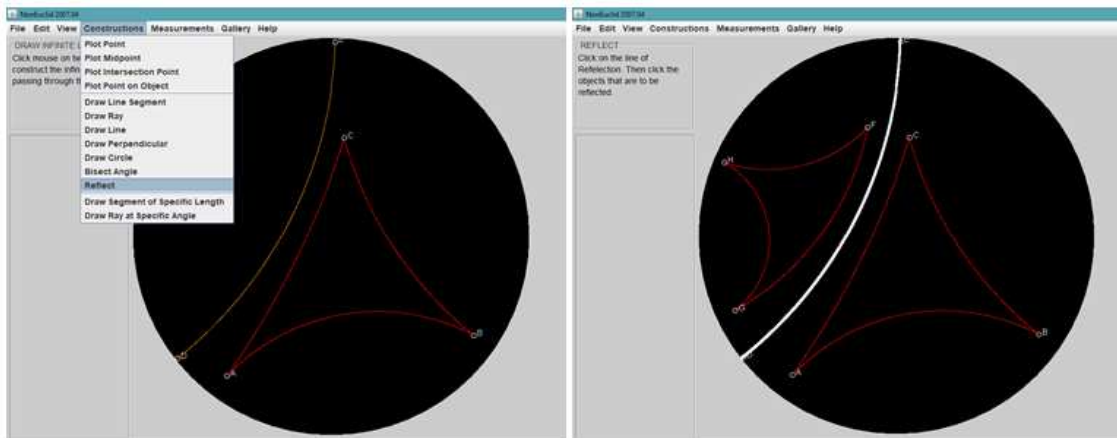


Figura 6.27: A imagem da esquerda mostra o comando para a reflexão de objetos e a figura a da direita, mostra dois triângulos hiperbólicos congruentes.

- Observe os triângulos. Eles são congruentes por construção. Porém, como estão em partes diferentes do plano hiperbólico, eles parecem ter curvaturas distintas.
- No menu “Measurements” clique em “Measure Triangle”. Clique nos vértices do triângulo ABC para descobrir as medidas desse triângulo. Agora, clique nos vértices do triângulo EFG para descobrir e comparar as medidas desses dois triângulos.
- No menu “Edit” use o comando “Move” para mover os vértices do triângulo ABC e descreva o que acontece ao triângulo FGH . Agora mova os vértices de FGH e descreva o que acontece com o triângulo ABC .

Comentários

Com essa construção, espera-se que o aluno visualize a congruência de triângulos no Disco de Poincaré. Ao comparar visualmente os triângulos construídos eles parecem diferentes. Porém, ao utilizar a ferramenta de medição de ângulos e lados, evidencia-se que os triângulos são congruentes, pois têm a mesma medida de lados e de respectivos ângulos!

Ao movermos os vértices de um triângulo, alteramos as medidas dele e também do outro triângulo, de modo que eles permanecem congruentes.

É interessante ainda que se incentive o aluno a fazer uma nova reflexão com a reflexão obtida. Basta seguir os mesmos passos anteriormente citados. Ao movermos os vértices de quaisquer um dos triângulos obtidos, teremos uma interessante relação de congruência entre esses triângulos de aspectos aparentemente diferentes.

Considerações Finais

Esperamos que esse trabalho possa ser uma fonte de referência para professores e curiosos que pretendem conhecer um pouco mais sobre a Geometria Hiperbólica. Apresentamos aqui um pouco sobre como ocorreu o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, baseado fundamentalmente nas inúmeras tentativas de se provar o Quinto Postulado de Euclides.

Muitos matemáticos se dedicaram para encontrar tal demonstração. Alguns deles, considerados neste trabalho como precursores, foram aos poucos contribuindo para uma análise mais criteriosa no decorrer dos séculos. Esse processo contribuiu para consolidar as bases utilizadas na matemática, cuja teoria tornou-se sólida ao ser fundamentada em teoremas e afirmações provadas pelo encadeamento lógico-dedutivo em detrimento à intuição empírica.

Esse processo de construção possibilitou que matemáticos brilhantes como Gauss, Johann Bolyai e Lobachewsky, desenvolvessem independentemente as bases da Geometria Hiperbólica, através da negação do Quinto Postulado de Euclides.

O temor da inconsistência da nova Geometria foi eliminado quando Poincaré propôs um modelo no qual os teoremas e postulados da Geometria Hiperbólica eram válidos, tornando assim a Geometria Hiperbólica tão consistente quanto a Euclidiana.

Explorar a geometria na Escola é ainda hoje um grande desafio. Por trabalhar a capacidade dedutiva e o pensamento crítico, alguns alunos apresentam grande dificuldade em compreender o conteúdo trabalhado.

Para auxiliar o professor nesse processo é necessário que ele saiba que não existe uma só geometria, nem uma geometria absoluta. Como também foi apresentada uma ideia de como a matemática é construída, um aluno mais interessado e curioso, pode passar a ser mais questionador e passe a buscar suas próprias respostas. Assim, esse trabalho teve como intuito oferecer aos professores um suporte não só teórico mas também prático em algumas de suas aulas para que possibilite aos seus alunos um contato com a Geometria Hiperbólica e dessa forma, instigue a curiosidade e promova o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo.

Bibliografia

- [1] Arcari, Inedio: *Um Texto de Geometria Hiperbólica*, 2008. http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-GeoNEuc/N_ArcariInedio.pdf.
- [2] Barbosa, João Lucas Marques: *Geometria Hiperbólica*. Editora da UFG, 2002.
- [3] Barbosa, João Lucas Marques: *Geometria Euclidiana Plana*. SBM, 10ª edição, 2006, ISBN 85-85818-02-6.
- [4] Boyer, Carl: *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher LTDA, 2ª edição, 1996, ISBN 978-85-212-0023-9.
- [5] Braz, Fernanda Martins: *História da Geometria Hiperbólica*. UFMG, 2009.
- [6] Castellanos, Joel, Joe Dan Austin e Ervan Darnell.: *NonEuclid: Interactive Javascript Software for Creating Straightedge and Collapsible Compass Constructions in the Poincaré Disk Model of Hyperbolic Geometry*. www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/, acessado em 01/06/2018.
- [7] Connor, John J. O' e Edmund F. Robertson: *MacTutor History of Mathematics archive*. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>, acessado em 15/06/2018.
- [8] Eves, Howard: *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*. 1993.