

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

PALLOMA TELLES DOS SANTOS

**O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI COM
APLICAÇÕES NA ECONOMIA**

VIÇOSA-MINAS GERAIS
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS - CCE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI COM
APLICAÇÕES NA ECONOMIA

Palloma Telles dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à *Universidade Federal de Viçosa*, como parte das exigências da disciplina MAT 492 - Monografia B, sob a orientação do Prof. Walter Huaraca Vargas.

PALLOMA TELLES DOS SANTOS

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI COM APLICAÇÕES NA
ECONOMIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à *Universidade Federal de Viçosa*, como parte das exigências da disciplina MAT 492 - Monografia B, sob a orientação do Professor Walter Huaraca Vargas.

APROVADO: 27 de novembro de 2025

ASSENTIMENTO:

Palloma Telles Dos Santos
(Autora)

Walter Teófilo Huaraca Vargas
(Orientador)

PALLOMA TELLES DOS SANTOS

**O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI COM APLICAÇÕES NA
ECONOMIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à *Universidade Federal de Viçosa*, como parte das exigências da disciplina MAT 492 - Monografia B, sob a orientação do Professor Walter Huaraca Vargas.

APROVADO: 27 de novembro de 2025

BANCA AVALIADORA:

Caroline Mendes dos Passos

Cristiane Botelho Valadares

Walter Teófilo Huaraca Vargas
(Orientador)

Sumário

1	Introdução	7
2	Conceitos Preliminares da Matemática	10
2.1	Relações Binárias	10
2.1.1	Par Ordenado e Produto de Conjuntos	10
2.1.2	Relações binárias	12
2.1.3	Domínio e Imagem de uma Relação	13
2.1.4	Principais Relações	14
2.2	Funções e Números Reais	18
2.3	Topologia de \mathbf{R}^n e Continuidade de Funções Reais de Variável Vetorial . . .	21
2.3.1	Sequências em \mathbb{R}^n	21
2.3.2	Conjuntos abertos	22
2.3.3	Conjuntos Fechados	22
2.3.4	Compacidade	24
2.4	Correspondência	25
2.5	O Lema de Sperner e o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani	27
2.5.1	Resultados Preliminares	28
2.5.2	Teoremas do Ponto Fixo	38
3	Jogos Estratégicos e o Teorema do Equilíbrio de Nash	43
3.1	Equilíbrio de Nash em Jogos Estratégicos	45
4	Afeto e Ludicidade no ensino de Matemática: Explorando o Lema de Sperner	49
4.1	Atividade para o Ensino Fundamental II: Explorando o Lema de Sperner com cores	50
4.2	Atividade para o Ensino Médio: Explorando o Lema de Sperner com cores e o Princípio de Indução	51
5	Considerações Finais	56
	Referências Bibliográficas	57

Resumo

Este trabalho objetiva apresentar um material bibliográfico para graduandos em Matemática e Economia, focado na introdução dos conceitos básicos e essenciais para a Teoria Matemática de Jogos. A organização fundamenta em três perspectivas: (i) Conceitos Preliminares da Matemática; (ii) Jogos Estratégicos e o Teorema de Equilíbrio de Nash; e (iii) Afeto e Ludicidade no Ensino de Matemática: Explorando o Lema de Sperner. Alinhado aos princípios do Projeto Klein, que promove a ligação entre a pesquisa matemática e o ensino básico, e baseado na perspectiva de Chacón (2000) sobre a importância do aprendizado afetivo, o material propõe uma construção conceitual e coesa, preparando o aluno para a compreensão de tópicos mais avançados. O propósito principal é oferecer uma demonstração acessível do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, fundamental para a demonstração do Teorema do Equilíbrio de Nash.

Palavras-chave: Teorema do Ponto Fixo de Kakutani. Lema de Sperner. Equilíbrio de Nash em Jogos Estratégicos.

Capítulo 1

Introdução

A Teoria dos Jogos é uma área de estudo amplamente utilizada para analisar situações de tomada de decisão e interações estratégicas entre indivíduos ou grupos. Essa, por sua vez, fornece um conjunto de ferramentas analíticas que modelam interações nas quais o resultado de cada participante depende das escolhas de todos os agentes envolvidos. Sendo assim, este trabalho tem como foco o estudo do livro *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, [6], com ênfase no Equilíbrio de Nash, no qual o conceito central descreve uma situação onde nenhum jogador possui incentivo para alterar unilateralmente sua estratégia. Esse equilíbrio é garantido pelo Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, que estabelece sua existência sob determinadas condições matemáticas e que veremos adiante.

Apresentaremos ainda, os conceitos matemáticos fundamentais necessários para a compreensão das demonstrações e resultados mais avançados relacionados aos teoremas abordados, com o intuito de construir uma ponte entre os fundamentos matemáticos e suas aplicações na modelagem de decisões econômicas e estratégicas.

Alinhado ao espírito do Projeto Klein, que visa "proporcionar um estímulo aos professores de Matemática para fazer conexões entre o conteúdo que ensinam e o desenvolvimento da pesquisa em Matemática ao longo do último século e, desse modo, enriquecer suas aulas"[11], pretendemos com este trabalho, auxiliar na formação de estudantes de Matemática e de Economia. Para isso, oferecemos um material de apoio rigoroso, acessível e contextualizado sobre os pilares da Teoria dos Jogos, com ênfase na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Dessa forma, este trabalho está estruturado da seguinte maneira: o primeiro capítulo, apresenta a introdução ao tema, bem como as justificativas e os objetivos da pesquisa. O segundo capítulo é dedicado à apresentação dos conceitos matemáticos básicos e fundamentais que sustentam o desenvolvimento do trabalho, incluindo os teoremas de ponto fixo, com ênfase no Teorema do Ponto Fixo de Kakutani. No terceiro capítulo, são abordados os conceitos de Jogos Estratégicos necessários à compreensão do Teorema do Equilíbrio de Nash, estabelecendo a conexão entre os resultados matemáticos e suas aplicações na Economia. Por fim, o quarto capítulo apresenta duas atividades de caráter aplicado, que utilizam o Lema de Sperner como ferramenta para explorar, em um contexto educacional, associando aspectos de afeto e ludicidade ao ensino de Matemática. O trabalho é encerrado com as considerações finais, nas quais são retomados os principais resultados obtidos e as contribuições do estudo.

Assim, a partir dessa estruturação, buscamos provar os teoremas utilizados em Economia

de uma forma matemática clara e concisa, conforme os conhecimentos matemáticos explorados e adquiridos no capítulo 2. Portanto, ao final desses estudos, foi possível elaborar o artigo intitulado "*About Nash's Equilibrium in Strategic Games*" que está submetido à revista *Economic Theory Bulletin*.

Justificativas

A motivação do tema deste trabalho está relacionada à busca por áreas de aplicação da Matemática. Durante o desenvolvimento inicial dos estudos, observamos que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é amplamente conhecido e explorado na literatura matemática. Em contrapartida, o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, embora desempenhe papel importante na fundamentação matemática da Teoria dos Jogos, especialmente, na demonstração da existência de equilíbrios em Jogos Estratégicos. Este, por sua vez, é frequentemente apresentado apenas como uma generalização do teorema de Brouwer para correspondências, sem que suas hipóteses e estrutura matemática sejam exploradas de forma aprofundada.

Essa percepção é sustentada por dados obtidos a partir de pesquisas no Portal de Periódicos CAPES. Sem aplicação de filtros, o descritor "Kakutani fixed point theorem" retornou 966 registros, indicando ampla presença do tema na literatura matemática. No entanto, ao associar explicitamente o teorema à área econômica, por meio do descritor "Kakutani fixed point theorem and economics", o número de resultados reduz para 139 itens, evidenciando que apenas uma parcela relativamente pequena da produção científica aborda diretamente essa conexão. Em comparação, o descritor "Brouwer fixed point theorem" apresentou 700 registros, enquanto "Nash equilibrium" retornou 111 itens.

Além disso, observamos que, em muitos trabalhos da área econômica, o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani é utilizado como ferramenta técnica em demonstrações de existência, sem a apresentação detalhada dos conceitos matemáticos. Essa abordagem pressupõe um domínio prévio desses conceitos, o que pode dificultar a compreensão rigorosa do resultado por parte de estudantes e pesquisadores em formação.

Diante desse contexto, justificamos a realização deste trabalho pela necessidade de aprofundar o tratamento matemático do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, destacando suas hipóteses fundamentais e suas aplicações na Economia, contribuindo para uma compreensão mais rigorosa e articulada desse resultado essencial.

Objetivos

O objetivo central deste trabalho de conclusão de curso é desenvolver e apresentar um material bibliográfico que permita apresentar os conceitos matemáticos essenciais da Teoria dos Jogos, visando facilitar a compreensão de graduandos em Economia e Matemática ao tema. O foco será a explicação clara e objetiva de demonstrações dos teoremas cruciais, como o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani e o Equilíbrio de Nash.

A partir dessa premissa, buscamos com este material, preencher uma lacuna no ambiente educacional, oferecendo um recurso prático para a aplicação e o aprofundamento desses conceitos, fundamentais tanto na formação teórica de economistas quanto na introdução de matemáticos ao tema. Adicionalmente, visamos estabelecer uma base sólida e indutiva para

a compreensão e demonstração desses teoremas, investigando as condições para a existência do Equilíbrio de Nash em jogos estratégicos.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares da Matemática

Neste capítulo, apresentaremos alguns dos principais conceitos matemáticos necessários para o nosso estudo, visando auxiliar a compreensão dos objetos e resultados sobre Jogos Estratégicos que serão estudados no capítulo 3.

Para a construção deste capítulo foram utilizados os livros de *Fundamentos da Matemática Elementar* [4], *Álgebra Moderna* [5], *Análise Real* [7], *Topologia e Análise do Espaço \mathbb{R}^n* [8]. A maior parte dos conceitos não apresentaram suas provas detalhadas, pois elas são tipicamente abordadas em um curso de Licenciatura em Matemática ou nos livros citados.

2.1 Relações Binárias

2.1.1 Par Ordenado e Produto de Conjuntos

Definição 2.1. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Se $a \in A$ e $b \in B$, então o par ordenado de componentes a e b é o conjunto:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

A partir da definição anterior, deduzimos que se $a \neq b$, então os pares ordenados (a, b) e (b, a) são distintos, ou seja, apresentam ordenações diferentes. De fato, teremos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Se $a, c \in A$ e $b, d \in B$, então $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Demonstração: Suponhamos que $(a, b) = (c, d)$, como $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ e $(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, então temos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Logo, temos $\{a\} = \{c\}$ e $\{a, b\} = \{c, d\}$ e, assim concluímos, $a = c$ e $b = d$.

Reciprocamente, é fácil verificar que, se $a = c$ e $b = d$, então $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. O que claramente implica que $(a, b) = (c, d)$. ■

Definição 2.2. Sejam dois conjuntos A e B não vazios. Chamamos de produtos de A por B , o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$, isto é:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo 2.1. Considere os conjuntos $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então temos

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\},$$

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\},$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Se $A = B = \mathbb{R}$, onde \mathbb{R} representa o conjunto dos números reais, então o produto cartesiano $A \times B$ é subconjunto do produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e é chamado de Produto Cartesiano de A por B .

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o qual também é denotado por \mathbb{R}^{\neq} é chamado de Plano Cartesiano ou Espaço Euclidiano 2 – *dimensional*. Geometricamente, um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^{\neq}$ pode ser representado da seguinte maneira:

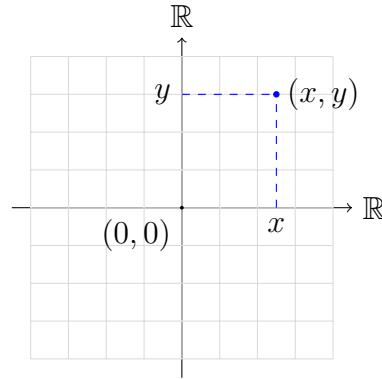


Figura 2.1: Exemplo de Plano Cartesiano elaborado pela autora.

O produto de conjuntos satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.1. Dados os conjuntos A, B e C , então vale:

- i) $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$;
- ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- iii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demonstração:

- i) Provemos que $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Primeiramente, suponhamos que $A \times B = \emptyset$ e queremos provar que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Caso contrário, teríamos que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Logo, existem $a \in A$ e $b \in B$, assim, $(a, b) \in A \times B$, o que contradiz a nossa hipótese.

Reciprocamente, se temos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, queremos provar que $A \times B = \emptyset$. Caso contrário, existiria $(a, b) \in A \times B$, em que $a \in A$ e $b \in B$, o que implica que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.

ii) Para provarmos que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, devemos mostrar que $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$ e $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$. Para isso, temos:

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
 &\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).
 \end{aligned}$$

iii) A prova deste item é análogo ao anterior e será deixado para o leitor. ■

2.1.2 Relações binárias

Na vida cotidiana existem diversas relações entre elementos de diferentes conjuntos. Por exemplo:

1. Se A é o conjunto de três estados do Brasil, com $A = \{\text{Alagoas, Paraná, Minas Gerais}\}$ e B é o conjunto de suas capitais, isto é, $B = \{\text{Maceió, Curitiba, Belo Horizonte}\}$, então existe uma relação entre cada país e sua respectiva capital.
2. Entre os elementos dos conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} podemos estabelecer as relações de "igualdade", "maior que" e "menor que".
3. Se A é o conjunto formado por três países e B é o conjunto formado pelos produtos exportados, tal que $A = \{\text{Brasil, China, Estados Unidos}\}$ e $B = \{\text{soja, eletrônicos, petróleo}\}$, então a relação que pode ser estabelecida entre país e produto exportado é

$$R = \{(\text{Brasil, soja}), (\text{China, eletrônicos}), (\text{Estados Unidos, petróleo})\}.$$

Definição 2.3. Sejam os conjuntos A e B chamaremos de relação binária de A em B a todo subconjunto R de $A \times B$.

Isto é, R é uma relação de A em B se, e somente se,

$$R \subseteq A \times B$$

ou

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid aRb\}.$$

Observação:

- i) Os elementos de uma relação são pares ordenados, pela própria definição.
- ii) A notação aRb indica que $(a, b) \in R$ ou, equivalentemente, que o elemento a de A está relacionado pela relação R com o elemento b de B , porém essa relação pode ser de diferente natureza, por exemplo:

(a) Se $A = B = \mathbb{R}$,

$$xRy \Leftrightarrow x < y.$$

(b) Se $A = B = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, o conjunto de todos os subconjunto de \mathbb{R} ,

$$XRY \Leftrightarrow X \subseteq Y.$$

(c) Se $A = B = \mathbb{Z}$,

$$aRb \Leftrightarrow 3 \text{ divide } x - y.$$

(d) Se $A = B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

(e) Seja $A = \{\text{caro}, \text{barato}\}$ e $B = \{\text{maçã}, \text{banana}, \text{manga}\}$,

$$bRa \Leftrightarrow \text{o bem } b \text{ está classificado como } a.$$

Nos exemplos anteriores fica evidente que os elementos x e y podem assumir valores numéricos, ser pares ordenados ou de outra natureza.

- iii) Observe que como $\emptyset \subset A \times B$ e $A \times B \subset A \times B$, essas definem duas relações de A em B chamadas de relação vazia e relação total, respectivamente.
- iv) Se R é uma relação de A em B e $B = A$, ou seja, $R \subset A \times A$, então ela é chamada relação binária em A ou, simplesmente, relação em A .

2.1.3 Domínio e Imagem de uma Relação

Definição 2.4. Seja R uma relação de A em B .

Chamaremos de domínio de R , o conjunto $Dom(R)$ de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R .

$$Dom(R) = \{x \in A \mid \exists y, y \in B; (x, y) \in R\} \subset A$$

Chamaremos de Imagem de R o conjunto $Im(R)$ de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R .

$$Im(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A; (x, y) \in R\} \subset B$$

Exemplo 2.2. Considere a relação em \mathbb{Z} definida por:

$$(x, y) \in R \text{ se, somente se, } x \text{ divide } y.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Dom}(R) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y, y \in \mathbb{Z}; (x, y) \in R\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y, y \in \mathbb{Z}; x \text{ divide } y\} \\ &= \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Note que $\text{Im}(R) = \mathbb{Z}$, pois todo número inteiro é dividido pelo menos pelo número 1.

2.1.4 Principais Relações

A seguir, descreveremos os principais tipos de relações numéricas relevantes para as áreas da Matemática e Economia.

Relação Reflexiva

Definição 2.5. Seja A um conjunto qualquer. Dizemos que uma relação R em A é reflexiva sobre A se, e somente se, todo elemento de A se relaciona consigo mesmo. Ou seja,

$$\forall x \in A \Rightarrow xRx$$

ou

$$\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R.$$

Exemplo 2.3. A relação $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$ sobre $A = \{a, b, c, d\}$ é reflexiva.

Exemplo 2.4. Seja $A = \{\text{R\$1,00}, \text{R\$0,50}, \text{R\$0,25}, \text{R\$0,10}\}$ o conjunto que representa as moedas de circulação no Brasil.

$$aRa \Leftrightarrow \text{moeda } a \text{ possui o mesmo valor monetário de } a$$

então, $R = \{(\text{R\$1,00}, \text{R\$1,00}), (\text{R\$0,50}, \text{R\$0,50}), (\text{R\$0,25}, \text{R\$0,25}), (\text{R\$0,10}, \text{R\$0,10})\}$.

Definição 2.6. Dizemos que R é uma relação simétrica sobre A se um elemento estiver relacionado com outro, então este segundo estará relacionado com o primeiro, isto é,

$$xRy \Rightarrow yRx$$

ou

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R.$$

É fácil verificar que o Exemplo 2.3 é uma relação Simétrica.

Exemplo 2.5. A relação S em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $S = \{(x, y) \in B \times B \mid x + y = 5\}$ é simétrica. Pois, $S = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Exemplo 2.6. Seja A o conjunto de empresas, $A = \{\text{Empresa A}, \text{Empresa B}, \text{Empresa C}\}$.

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ competem no mesmo mercado}$$

Relação Transitiva

Definição 2.7. Dizemos que uma relação R é transitiva sobre A se, e somente se,

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

ou

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$$

Novamente, podemos verificar que o Exemplo 2.3 é uma relação transitiva.

Exemplo 2.7. Seja A o conjunto de empresas $A = \{\text{Empresa A, Empresa B, Empresa C}\}$. Definimos a relação R em A tal que:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ tem maior poder de mercado que } y.$$

Então,

$$\begin{aligned} (\text{Empresa A, Empresa B}) \in R \wedge (\text{Empresa B, Empresa C}) \in R \\ \Rightarrow (\text{Empresa A, Empresa C}) \in R. \end{aligned}$$

Relação de Equivalência

Essa é uma relação de extrema importância, pois faz com que os elementos do conjunto sejam agrupados em subconjuntos disjuntos que tem comportamento de forma consistente com o comportamento dos seus elementos.

Definição 2.8. Uma relação R sobre um conjunto A não vazio é chamado de *relação de equivalência sobre A* se, e somente se, R for uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Perceba que o exemplo 2.3 é uma relação de equivalência, pois atende a definição. Agora, estudaremos ele com um pouco de atenção.

Exemplo 2.8. A relação $R = \{(a, a), (b, b), (a, c), (c, c), (d, d), (c, a), (b, d), (d, b)\}$ sobre $A = \{a, b, c, d\}$ é uma relação de equivalência. Note que já verificamos que é simétrica, reflexiva e transitiva.

Observemos ainda que, o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ pode ser decomposto em dois subconjuntos disjuntos. De fato:

$$A = \{a, b, c, d\} = \{a, c\} \cup \{b, d\} = A_1 \cup A_2.$$

Essa decomposição é especial pelo fato de que A_1 é formado pelos elementos de A relacionados com a e A_2 é formado pelos elementos de A relacionados com b .

No exemplo anterior, não fica muito evidente o poder das relações de equivalência (salvo que ela decompõe o conjunto original numa união disjunta de subconjuntos). Com o intuito de apresentar a força de uma relação de equivalência na sua real dimensão estudaremos em detalhe o seguinte exemplo:

Exemplo 2.9. Considere $A = \mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ e definamos a relação R em \mathbb{Z} da seguinte forma:

$$mRn \Leftrightarrow 3 \text{ divide } m - n,$$

R é **Reflexivo**. De fato, denotaremos com $m|n$ para dizer que m divide n . Como $3|0$, então $3|(m - m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Logo, mRm para todo $m \in \mathbb{Z}$. Assim, R é reflexivo.

R é **Simétrico**. Se mRn , então $3|(m - n)$. Como $3|(n - m)$ também é verdade, segue que nRm . Logo, R é uma relação simétrica.

R é **transitivo** Suponhamos que mRn e nRp , então temos que $3|(m - n)$ e $3|(n - p)$, a partir disso, temos que $3|[(m - n) + (n - p)]$ e isto quer dizer que $3|(m - p)$, de onde obtemos que mRp . Isto prova que a relação é transitiva.

Desde que a relação R é de equivalência, temos que ela divide o conjunto \mathbb{Z} numa união disjunta de subconjuntos dele, para achar estes subconjuntos observe que:

1. $0R3, 0R - 3, 0R6, 0R - 6, 0R9, 0R - 9, \dots$

Assim, podemos definir o subconjunto formado por estes elementos e chamemos ele de $[0]$, isto é:

$$[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\};$$

2. $1R4, 1R - 2, 1R7, 1R - 5, 1R10, 1R - 8, \dots$

Também podemos definir o subconjunto formado por estes elementos e chamemos ele de $[1]$, isto é:

$$[1] = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\};$$

3. $2R5, 2R - 1, 2R8, 2R - 4, 2R11, 2R - 7, \dots$

E, podemos definir o subconjunto formado por estes elementos e chamemos ele de $[2]$, isto é:

$$[2] = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\};$$

4. Observe que este processo termina aqui, pois se pretendermos fazer o mesmo com o número 3, obtemos:

$$[3] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = [0].$$

Dessa forma, podemos escrever o conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}) como uma união disjunta de subconjuntos, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} \cup \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} \\ &\cup \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} = [0] \cup [1] \cup [2]. \end{aligned}$$

Além disso, temos duas observações finais sobre a importância desta relação de equivalência. Como já sabemos, o conjunto \mathbb{Z} é infinito e estudar algumas relações sobre seus elementos pode ser também infinita. Logo, a partir dessa relação podemos "converter" um conjunto infinito em um conjunto finito de $\{[0], [1], [2]\}$.

Neste novo conjunto, podemos definir uma "soma" de forma natural da seguinte maneira:

$$[a] + [b] = [a + b]$$

Por exemplo, $[1] + [2] = [3] = [0]$, essa nova soma se apresenta consistente e poderosa para diferentes propósitos, como no estudo da Teoria dos Números. Cabe ressaltar que essa nova soma é consistente com todas as propriedades de soma familiares a todos.

Resumindo, podemos falar que todos os números dos conjuntos infinitos $[0]$, $[1]$ e $[2]$ comportam-se como os números familiares $0, 1, 2$. Ou seja, aprendemos, entre outras coisas, a somar conjuntos!

Para estudos mais profundos e elaborados sobre as relações de equivalência e sua importância na matemática sugerimos a leitura do livro *Álgebra Moderna*, [5].

Relação Anti-Simétrica

Definição 2.9. Dizemos que uma relação R é anti-simétrica em A , se

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

ou

$$\text{Se } (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y.$$

Exemplo 2.10. Dado um conjunto X não vazio, sobre o conjunto $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto de todos os subconjuntos de X ou conjunto das partes de X) podemos definir a relação: $(A, B) \in R$ se, e somente se, $A \subseteq B$. Essa relação é uma relação anti-simétrica, pois se temos dois conjuntos tais que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

Exemplo 2.11. A relação R de divisibilidade sobre o conjunto dos números naturais (\mathbb{N}): $xRy \Leftrightarrow x|y$ é anti-simétrica, visto que se $x|y$ e $y|x$, então $x = y$.

Agora, vamos definir novas relações de suma importância para a Teoria Matemática de Jogos.

Relação Completa

Definição 2.10. Dizemos que uma relação R é completa quando cada $a, b \in A$ estiverem relacionados. Ou seja, se

$$x, y \in A \Rightarrow (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$$

ou

$$x, y \in A \Rightarrow xRy \vee yRx.$$

Exemplo 2.12. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$ é completa.

Exemplo 2.13. Seja A o conjunto de empresas, $A = \{\text{Empresa A}, \text{Empresa B}, \text{Empresa C}\}$. Definimos a relação R em A tal que:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ é mais lucrativa que } y \text{ ou tem o mesmo lucro que } y$$

Relação Assimétrica

Definição 2.11. Dizemos que uma relação R é assimétrica quando :

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$$

ou

$$aRb \Rightarrow a \not R b$$

Exemplo 2.14. A relação $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$ é assimétrica.

Exemplo 2.15. Seja A o conjunto de agentes econômicos e seja R a relação sobre A dada por

$$aRb \Leftrightarrow a \text{ possui mais riqueza do que } b.$$

Note que essa relação é assimétrica, pois, se um agente a possui mais riqueza que b , o inverso não pode ocorrer, ou seja, não é possível que bRa .

Relação de Preferência Fraca

Definição 2.12. Uma relação R sobre um conjunto A é chamada de relação de preferência fraca quando ela é completa e transitiva.

Exemplo 2.16. Considere o conjunto $P = \{a, b, c\}$ de postos de gasolina disponíveis em uma cidade. Um motorista estabelece uma relação de preferência R sobre P definida por

$$xRy \Leftrightarrow \text{o motorista considera o posto } x \text{ pelo menos tão preferível quanto o posto } y.$$

2.2 Funções e Números Reais

Para a definição e compreensão do conceito de função entre os conjuntos A e B , estudemos inicialmente as seguintes relações.

Exemplo 2.17. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

e as relações de A em B apresentadas abaixo.

(a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$;

(b) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$;

(c) $T = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$;

(d) $V = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;

Analisando cada uma das relações, temos que:

(a) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Observe que para cada elemento $x \in A$, existe apenas um elemento em $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

- (b) Já a relação $S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, 2), (3, 3)\}$ é tal que para cada elemento $x \in A$, existe um único elemento em $y \in B$, com exceção do 1, tal que $(x, y) \in S$. Note que para o elemento $1 \in A$ tem-se dois elementos em B que satisfaz a relação, ou seja, $y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1}$. Assim, $y = 1$ ou $y = -1$. Logo, $(1, 1) \in S$ e $(1, -1) \in S$.
- (c) $T = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
Para todo elemento $x \in A$, sem exceções, existe só um elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in T$.
- (d) Como $V = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Para todo elemento $x \in A$, x diferente de 0, existe um único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in V$.

Observe que a relação R e T são as únicas relações que apresentam a propriedade de que para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

Definição 2.13. Sejam A e B dois conjuntos, ditos, respectivamente, o domínio e o contradomínio da função (que será denotada por f) é uma relação que associa a cada elemento x de A um único elemento $f(x)$ (lê-se " f de x ") de B .

Dizemos, então, que f é uma função definida em A e com valores em B e será representada por:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Um elemento $y = f(x) \in B$ é dito imagem de x pela função f e o subconjunto de B formado por todos os elementos que são imagem de algum elemento de A é chamado de conjunto-imagem de f e é denotado por $f(A)$, isto é:

$$f(A) = \{y \in B; y = f(x), x \in A\}$$

Definição 2.14. Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita:

i) **Injetiva:** Se

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'); x, x' \in A.$$

ii) **Sobrejetiva:** Se $f(A) = B$.

iii) **Bijetiva:** Se f é injetiva e sobrejetiva.

Definição 2.15. Dizemos que dois conjuntos A e B têm a mesma quantidade de elementos, ou seja, a mesma cardinalidade, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles. E, um conjunto é dito enumerável quando tiver a mesma cardinalidade dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Função Inversa e Composição de Funções

Definição 2.16. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função bijetiva. Assim, cada $y \in B$ está associado a um único $x \in A$ pela igualdade $y = f(x)$. Assim, podemos definir uma função $g : B \rightarrow A$, chamada de inversa de f em que $g(y) = x$. Logo, dizemos que a função f é inversível e denotemos sua inversa g , por f^{-1} .

Portanto, quando $f : A \rightarrow B$ é inversível, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$ temos:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ e } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Definição 2.17. Considere as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. Note que a função

$$g \circ f : A \rightarrow B \\ x \mapsto g(f(x)).$$

É dita composta de g com f .

Imagem e Imagem Inversa

Definição 2.18. Seja a função $f : A \rightarrow B$ e os subconjuntos $X \subseteq A$ e $Z \subseteq B$. Definiremos a imagem de X por f , $f(X)$ e a imagem inversa de Z por f , $f^{-1}(Z)$ por:

$$f(X) = \{y \in B; y = f(x), x \in X\} \text{ e } f^{-1}(Z) = \{x \in A; f(x) \in Z\}$$

Perceba que $f^{-1}(Z)$ está definida, mesmo que f não seja invertível.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades elementares, mas que apresentam grande relevância.

Teorema 2.2. Dada a função $f : A \rightarrow B$, $X, Y \subseteq A$ e $Z, W \subseteq B$, então:

- I) $f(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- II) $f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$ e se f é sobrejetiva $\Rightarrow f(f^{-1}(Z)) = Z$;
- III) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ e se f é injetiva $\Rightarrow X = f^{-1}(f(X))$;
- IV) $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$ e $Z \subseteq W \Rightarrow f^{-1}(Z) \subseteq f^{-1}(W)$;
- V) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ e $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$;
- VI) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ e se f é injetiva $\Rightarrow f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$;
- VII) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$;
- VIII) $f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \setminus Y)$ e se f é injetiva $\Rightarrow f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y)$;
- IX) $f^{-1}(Z \setminus W) = f^{-1}(Z) \setminus f^{-1}(W)$.

2.3 Topologia de \mathbb{R}^n e Continuidade de Funções Reais de Variável Vetorial

Nesta seção, serão apresentados os resultados cruciais relativos à topologia do espaço \mathbb{R}^n e às funções contínuas $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O ponto de partida será a introdução do conceito fundamental de sequência em \mathbb{R}^n .

Todos os resultados serão apresentados sem as respectivas demonstrações, uma vez que, estes são abordados nas disciplinas introdutórias da graduação em Matemática e podem ser encontradas facilmente em livros, como: *Topologia e Análise no Espaço \mathbb{R}^n* [8]; *Análise Real* [7]

2.3.1 Sequências em \mathbb{R}^n

Uma sequência num conjunto A é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow A$. A imagem de um natural $k \in \mathbb{N}$ pela função x é denotada por x_k e será chamado de k -ésimo termo da sequência. Fixando o conjunto A , uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow A$ será denotada por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (x_k) . Quando os termos x_k são definidos por uma expressão, este é chamada de termo geral da sequência (x_k) .

Uma subsequência de uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow A$ é uma restrição de x a um subconjunto infinito de \mathbb{N} , $\mathbb{N}_0 = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\}$, a qual denotaremos por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ou $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Perceba que toda subsequência é também uma sequência.

Definição 2.19. (Sequência limitada) Uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}^n é dita limitada, se existir um real $\mu > 0$, tal que $\|x_k\| \leq \mu$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.20. (Sequência Convergente) Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e seja uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}^n . Dizemos que tal sequência converge para a ou que a é limite da sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, se cumprir a seguinte condição:

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon.$$

No caso em que a sequência atende as condições acima será dita convergente. Caso contrário, a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é dita divergente.

Os seguintes resultados serão cruciais para os nossos objetivos e as provas podem ser encontrada em *Análise Real*, [7].

Proposição 2.2. Toda sequência convergente é limitada.

Teorema 2.3. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subsequência convergente.

Definição 2.21. Dado um número natural n , o espaço euclidiano n -dimensional, denotado por \mathbb{R}^n , é o produto de n -cópias de \mathbb{R} , isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n vezes).

2.3.2 Conjuntos abertos

Definição 2.22. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, utilizando o conceito de bola. Definamos bola aberta de centro a e raio r , em \mathbb{R}^n , como sendo o conjunto

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}.$$

E, definamos, bola fechada e esfera, de centro a e raio r , respectivamente, por

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

e

$$S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}.$$

Observação: Qualquer bola ou esfera em \mathbb{R}^n de raio $r = 1$ é dita unitária. E, tem-se que, a esfera unitária cujo centro é a origem será denotada por S^{n-1} .

Definição 2.23. Seja o conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado, se existir uma bola que o contém, ou seja, se existir $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, em que $X \subset B(a, r)$. E, seja um conjunto A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação dita limitada se o conjunto imagem for limitado.

Definição 2.24. Seja um ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto interior ao conjunto X quando existe uma bola aberta de \mathbb{R}^n com centro em a e contida em X . E, dizemos que X é uma vizinhança de a em \mathbb{R}^n .

O interior de X , denotado por $\text{int}X$, é o conjunto formado por todos os pontos que estão interiores a X . E, um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de aberto quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\text{int}A = A$.

Teorema 2.4. Os conjuntos abertos de \mathbb{R}^n seguem as seguintes propriedades fundamentais:

- i) O conjunto vazio e o espaço \mathbb{R}^n são abertos;
- ii) a interseção de uma família finita de abertos é um conjunto aberto;
- iii) a união de uma família qualquer de abertos é um conjunto aberto.

Definição 2.25. (Espaço Topológico) Seja o par (X, τ) um espaço topológico, tal que X é um conjunto e τ é a família de subconjuntos de X que satisfaz as propriedades dos conjuntos abertos, ou seja, são os chamados abertos, em que \mathbb{R}^n é substituído por X . A essa família τ é definido o espaço topológico em X .

2.3.3 Conjuntos Fechados

Definição 2.26. Seja um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ chamamos de conjunto fechado quando o seu complementar em \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^n - F$, é aberto.

Teorema 2.5. Os conjuntos chamados fechados de \mathbb{R}^n seguem as seguintes propriedades fundamentais:

- i) O conjunto vazio e o espaço \mathbb{R}^n são fechados;
- ii) a interseção de uma família qualquer de fechados é um conjunto fechado;
- iii) a união de uma família finita de fechados é um conjunto fechado.

A seguir, serão apresentados conceitos topológicos que permitem compreender os conjuntos fechados independentes dos conceitos dos conjuntos abertos.

Definição 2.27. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, chamamos de ponto de aderência um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se existir uma sequência de pontos de X que convergir para a .

Definição 2.28. O conjunto formado por todos os pontos de \mathbb{R}^n que são aderentes a X são chamados de fecho de X e denotado por \overline{X} .

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in X$. Tomando a sequência $x_k = a$, note que $a \in \overline{X}$. Então, $X \subset \overline{X}$, para todo $X \subset \mathbb{R}^n$. Logo, segue da definição de fecho que $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$.

Definição 2.29. Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, vale as seguintes propriedades:

- i) $a \in \overline{X}$ se, e somente se, $B(a, r) \cap X \neq \emptyset, \forall r > 0$;
- ii) $\overline{X} = \mathbb{R}^n - \text{int}(\mathbb{R}^n - X)$;
- iii) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Teorema 2.6. Um subconjunto de \mathbb{R}^n , é chamado de fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes, ou seja, $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Leftrightarrow \overline{F} = F$.

Definição 2.30. A fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$.

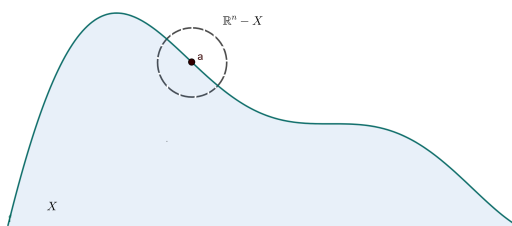


Figura 2.2: Gráfico gerado pela autora no GeoGebra: Fronteira.

Definição 2.31. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$ chamamos de ponto de acumulação de X se $a \in \overline{X} - \{a\}$, se existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}^n que satisfaz:

- i) $x_k \in X - \{a\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
- ii) $x_k \rightarrow a$.

Proposição 2.3. Um ponto de \mathbb{R}^n é ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, toda vizinhança deste ponto em \mathbb{R}^n contém uma infinidade de elementos de X .

Teorema 2.7. (Teorema de Weierstrass) Todo subconjunto infinito e limitado de \mathbb{R}^n possui um ponto de acumulação.

Topologia Relativa

Definição 2.32. Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n e $A \subset X$. Dizemos que A é aberto em X , ou aberto relativamente a X , quando existe um aberto U de \mathbb{R}^n em que $A = U \cap X$. E, temos que um conjunto $V \subset X$ é chamado de vizinhança de $a \in V$ em X se existir $A \subset V$ tal que $a \in A$ e A é aberto em X .

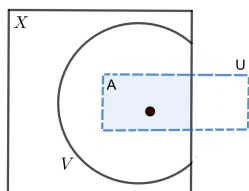


Figura 2.3: Gráfico gerado pela autora no GeoGebra: Vizinhança Relativa.

Proposição 2.4. Seja A um subconjunto de $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto em X se, e somente se, para todo $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap X \subset A$.

Corolário 2.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset X$ é uma vizinhança de $a \in V$ em X se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap X \subset V$.

A seguir, apresentaremos, os conjuntos fechados de subconjuntos de \mathbb{R}^n com relação a topologia relativa e, posteriormente, os caracterizaremos por meio dos seus respectivos fechos.

Definição 2.33. Seja um conjunto $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de fechado em X , ou fechado relativamente a X , se o seu complementar em X é aberto relativamente a X .

Proposição 2.5. Seja um subconjunto F de $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado em X se, e somente se, contém todos os seus pontos de aderência que estão em X , ou seja, F é fechado em $\Leftrightarrow F = \bar{F} \cap X$.

2.3.4 Compacidade

Definição 2.34. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando toda cobertura aberta $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X admite uma subcobertura finita, ou seja, quando existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i \in \Lambda$ tais que $X \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_i}$.

Observação: Note que qualquer subconjunto finito de \mathbb{R}^n é compacto.

Proposição 2.6. Todo conjunto compacto de \mathbb{R}^n é, necessariamente limitado.

Proposição 2.7. Todo conjunto compacto de \mathbb{R}^n é limitado. Todo paralelepípedo de \mathbb{R}^n é compacto. Todo subconjunto fechado de um compacto, é compacto.

Teorema 2.8. (Teorema de Heine-Borel) Um subconjunto de \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Por meio das consequências dos teoremas de Bolzano-Weierstrass e de Heine-Borel, os conjuntos compactos de \mathbb{R}^n podem ser caracterizados como sequências, por meio da definição e teorema abaixo.

Definição 2.35. Seja um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é dito sequencialmente compacto quando toda sequência em K possui uma subsequência que converge para um elemento de K .

Teorema 2.9. Um subconjunto de \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto.

2.4 Correspondência

Nesta seção, apresentaremos o conceito de correspondência, que pode ser o primeiro tópico menos familiar. Podemos afirmar que as correspondências são, em essência, uma generalização do conceito de função. Este conceito é fundamental tanto para a introdução e prova do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, quanto para a demonstração do Teorema de Equilíbrio de Nash em Jogos Estratégicos.

Definição 2.36. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Uma correspondência de X para Y é uma função $X \rightarrow 2^Y$.

Observação: Lembremos que se $Y \subset \mathbb{R}^m$, então $2^Y = \mathcal{P}(Y) = \{A \subset \mathbb{R}^m, A \subset Y\}$.

Exemplo 2.18. Sejam os conjuntos: $A = \{\text{Carlos, Maria, Joo}\}$, $B = \{\text{“O Pequeno Príncipe”, “Dom Quixote”, “1984”, “A Metamorfose”}\}$.

Definimos a correspondência $\Gamma \subseteq A \times B$, de modo que cada par $(a, b) \in$

Γ significa “o aluno a retirou o livro b ”. Explicitamente, adotamos: $\Gamma = \{(\text{Carlos, “O Pequeno Príncipe”}), (\text{Carlos, “1984”}), (\text{Maria, “Dom Quixote”})\}$. Observe que João não foi associado a nenhum livro, de modo que $\Gamma(\text{Joo}) = \emptyset$. Em notação de conjunto-

imagem, para cada $a \in A$ temos:

$$\Gamma(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in \Gamma\},$$

portanto:

$$\Gamma(\text{Carlos}) = \{\text{“O Pequeno Príncipe”, “1984”}\},$$

$$\Gamma(\text{Maria}) = \{\text{“Dom Quixote”}\},$$

$$\Gamma(\text{Joo}) = \emptyset.$$

Observações:

1. Note que $|\Gamma(\text{Carlos})| = 2$, ou seja, Carlos está associado a dois livros, e $\Gamma(\text{Joo}) = \emptyset$, indicando que João não retirou nenhum livro. Isso mostra que Γ *não* é uma função $A \rightarrow B$, mas sim uma correspondência.
2. Se Γ fosse uma função $f : A \rightarrow B$, então $|f(a)| = 1$ para todo $a \in A$. Aqui, tal condição não se verifica, pois alguns elementos de A podem estar associados a zero ou a mais de um elemento de B .

Logo, Γ é um exemplo típico de correspondência, ilustrando que cada aluno em A pode estar ligado a *zero, um* ou *vários* elementos de B .

Exemplo 2.19. Sejam os conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$. Definimos a correspondência Γ de A em B , como sendo: $\Gamma = \{(1, x), (1, y), (2, y), (3, z)\}$.

Aqui está o que a correspondência faz:

1. O elemento 1 de A está associado a x e a y em B ;
2. O elemento 2 de A está associado a y em B ;
3. O elemento 3 de A está associado ao z em B .

Exemplo 2.20. Sejam os conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$. Considere a relação: $\Gamma = \{(1, x), (2, y), (4, x)\}$.

Observamos que o elemento 4 não pertence a A . E, o par ordenado $(4, x)$ também não faz parte de $A \times B$. Assim, verificamos que Γ não é uma correspondência de A em B . Portanto, perceba que para que Γ seja uma correspondência de A em B , todos os pares ordenados devem ter o primeiro elemento em A e o segundo elemento em B .

Definição 2.37. Uma correspondência F é **não vazia-valorada, fechada-valorada ou convexa-valorada** se para cada $x \in X$, $F(x)$ é um subconjunto de Y , respectivamente, não vazio, fechado ou convexo.

Exemplo 2.21. Correspondência não-vazia Valorada. Seja $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$. Definimos a correspondência $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ por

$$F(x) = [x, x + 1], \text{ para todo } x \in X.$$

Note que, para cada $x \in [0, 1]$, temos $F(x) = [x, x + 1] \subset \mathbb{R}$, que é um intervalo fechado e, portanto, um conjunto não vazio. Logo, F é uma correspondência não-vazia valorada.

Exemplo 2.22. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por $F(x) = [0, \sin^2(x) + 1]$. Como $\sin^2(x) + 1 \geq 1$, temos que $F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, F é uma correspondência não-vazia valorada.

Exemplo 2.23. Correspondência fechada-Valorada Seja $X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$. Definimos a correspondência $G : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ por

$$G(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } x < 1 \\ [-1, 1], & \text{se } x = 1 \\ \{1\}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para todo $x \in X$, o conjunto $G(x) \subseteq \mathbb{R}$ é fechado. Portanto, G é uma correspondência fechada-valorada.

Exemplo 2.24. Seja $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por $H(x) = [-x^2, x^2]$. Como $[-x^2, x^2]$ é um intervalo fechado em \mathbb{R} , temos que $H(x)$ é fechado para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, H é uma correspondência fechada-valuada.

Exemplo 2.25. Correspondência convexa-Valuada Seja $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}^2$. Definimos a correspondência $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ por $F(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 \leq x + 1\}$. Para cada $x \in X$, o conjunto $F(x)$ é um disco fechado centrado na origem, que é convexo em \mathbb{R}^2 . Logo, F é uma correspondência convexa-valuada.

Exemplo 2.26. Seja $G : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$G(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 + y_2 \leq x, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}.$$

A região definida pelas desigualdades acima é convexa para todo $x \in [0, 1]$. Assim, G é uma correspondência convexa-valuada.

Observação: Lembremos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $x_0 \in X$, se para cada sequência (x_n) que converge para x_0 e cada conjunto aberto Y^* de Y tal que $f(x_0) \in Y^*$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, então $f(x_k) \in Y^*$.

Agora, apresentaremos duas generalizações para este conceito em relação as correspondências.

Definição 2.38. Uma correspondência F é hemicontínua superiormente em $x_0 \in X$ se, para cada sequência $(x_k) \subset X$ que converge para x_0 e cada aberto Y^* de Y tal que $F(x_0) \subset Y^*$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, $F(x_k) \subset Y^*$.

Definição 2.39. Uma correspondência F é hemicontínua inferiormente em $x_0 \in X$ se, para cada sequência $(x_k) \subset X$ que converge para x_0 e cada aberto Y^* de Y tal que $F(x_0) \cap Y^* \neq \emptyset$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, $F(x_k) \cap Y^* \neq \emptyset$.

Observação: Note que, se a correspondência F for uma função (ou seja, seleciona apenas singletons em 2^Y), então as propriedades de semicontinuidade superior e inferior se reduzem à continuidade usual das funções.

2.5 O Lema de Sperner e o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani

Nesta seção, apresentaremos uma prova elementar e elegante de um teorema do ponto fixo para correspondências. Este resultado é um dos principais ingredientes para apresentar uma prova do resultado do Teorema de Equilíbrio de Nash para jogos estratégicos.

Apesar de ser resultados estabelecidos, as provas conhecidas são complexas e pouco claras. A maneira como estes resultados são apresentados neste trabalho, no entanto, é inédita e fruto dos nossos estudos. Além disso, já submetemos artigo para publicação em uma revista especializada.

A seguir, estudaremos um dos principais elementos para nosso objetivo, isto é, o Lema de Sperner. Trata-se de um teorema topológico e começaremos apresentando os requisitos mínimos para enunciá-lo.

2.5.1 Resultados Preliminares

Definição 2.40. Um conjunto de pontos $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ é afim independente se, para cada família finita $\{r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}\} \subset [0, +\infty)$ tal que $\sum_{i=1}^{k+1} r_i X_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{k+1} r_i = 0$, então temos que $r_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, k, k+1$.

Observação:

1. Todo conjunto finito de pontos de \mathbb{R}^n linearmente independente é afim independente.
2. O conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ de $k+1$ é afim independente se, e somente se, o conjunto de k vetores $\{X_2 - X_1, X_3 - X_1, \dots, X_{k+1} - X_1\}$ for um conjunto linearmente independente. De fato:

Se $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ for afim independente e $\{X_2 - X_1, X_3 - X_1, \dots, X_k - X_1\}$ for linearmente dependente, então existe $r \in \{2, 3, \dots, k\}$, com $\alpha_r \neq 0$ tal que

$$\sum_{i=2}^{k+1} \alpha_i (X_i - X_1) = 0.$$

o que é equivalente à $(\alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_k)X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = 0$.

Como $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ é afim independente, então $\alpha_i = 0$, para todo $i = 2, 3, \dots, k$, o que é uma contradição.

Reciprocamente, se o conjunto de vetores $\{X_2 - X_1, X_3 - X_1, \dots, X_k - X_1\}$ de \mathbb{R}^n for linearmente independentes e tal que os vetores $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$ não são afim independentes, então existem $\{r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}\} \subset [0, +\infty)$ tal que $\sum_{i=1}^{k+1} r_i X_i \neq 0$,

$\sum_{i=1}^{k+1} r_i = 0$ e existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$, em que $r_{i_0} \neq 0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $i_0 = 1$, logo temos que

$$(-r_2 - \dots - r_k - r_{k+1})X_1 + r_2 X_2 + \dots + r_k X_k + r_{k+1} X_{k+1} = 0$$

assim, obtemos:

$$r_2(X_2 - X_1) + \dots + r_k(X_k - X_1) + r_{k+1}(X_{k+1} - X_1) = 0$$

Porém, por hipótese, temos que esses vetores são linearmente independentes. Portanto, $r_2 = \dots = r_k = r_{k+1} = 0$, em que obtemos $r_1 = 0$, o que é uma contradição.

3. No item anterior, o ponto X_1 não é essencial para a validade do resultado, isto é, ainda será verdadeira a afirmação: Todo conjunto de $k+1$ pontos de \mathbb{R}^n é afim independente se, e somente se, fixado um ponto dentre eles, os k vetores não nulos definidos como a diferença dos vetores com o vetor fixado definam um conjunto linearmente independente.

4. Em \mathbb{R} não podem existir 3 ou mais pontos afim independente, pois, caso contrário, usando o item anterior, obteríamos 2 ou mais vetores de \mathbb{R} linearmente independentes, o que é claramente uma contradição.
5. Em \mathbb{R}^2 não podem existir 4 ou mais pontos afim independente, pois, caso contrário, usando o item anterior, obteríamos 3 ou mais vetores de \mathbb{R}^2 linearmente independentes, o que novamente é uma contradição.
6. Em geral, em \mathbb{R}^n , com $n > 3$ não podem existir $n+2$ ou mais pontos afim independente, pois, caso contrário, usando o item anterior, obteríamos $n+1$ ou mais vetores de \mathbb{R}^n linearmente independentes, o que é uma contradição.

Consideremos E um espaço vetorial e $u, v \in E$. O segmento de reta de extremidades u e v é, por definição, o conjunto

$$[u, v] = \{(1-t)u + tv; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Um conjunto $C \subset E$ é chamado de convexo quando $x, y \in E \Rightarrow [x, y] \subset C$. A expressão $t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_kv_k$, onde $t_1, t_2, \dots, t_k > 0$ e $t_1 + t_2 + \dots + t_k = 1$ é chamado de combinação convexa dos vetores v_1, v_2, \dots, v_k . Podemos provar, por indução, que o conjunto $C \subset E$ é conexo se, e somente se, toda combinação convexa de elementos de C pertence a C .

Lembremos que se $A \subset \mathbb{R}^n$, então $\text{conv}(A)$ é o menor conjunto convexo que contém A .

Definição 2.41. Se $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ é afim independente, então o conjunto

$$S = \text{conv}(\{X_2 - X_1, \dots, X_k - X_1, X_{k+1} - X_1\})$$

é chamado de k -simplexo. Os pontos $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ são chamados de vértices do k -simplexo e será denotado por $\text{ext}(S)$. Se $\{X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_k}, X_{r_{k+1}}\} \subset \{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$, o simplexo $\text{conv}(\{X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_k}, x_{r_{k+1}}\})$ é chamado de r -face de S . Finalmente, lembremos que se $K \subset \mathbb{R}^n$, o diâmetro de K é definido por $\text{diam}(K) = \sup\{\|p - q\|; p, q \in K\}$.

Observação: Lembremos que em \mathbb{R}^n existem, no máximo, n vetores linearmente independentes, ou seja, existem no máximo $n+1$ vetores afim independentes. Portanto, temos:

1. Em \mathbb{R} , essencialmente, existem um 0-simplexo (um ponto) e um 1-simplexo (um intervalo fechado).

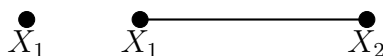


Figura 2.4: Representação de 0-simplexo e 1-simplexo.

2. Em \mathbb{R}^2 , essencialmente, existem um 0-simplexo, um 1-simplexo e um 2-simplexo (um triângulo).

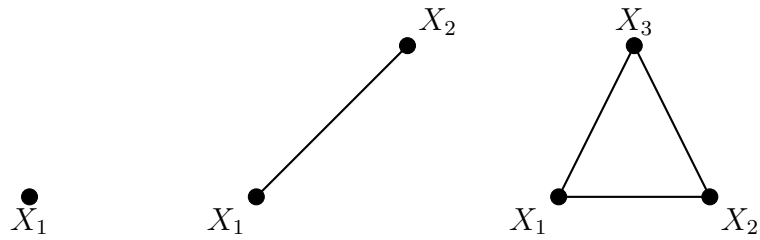


Figura 2.5: Representação de 0-simplexo, 1-simplexo e 2-simplexo.

3. Em \mathbb{R}^3 , essencialmente, existem um 0-simplexo, um 1-simplexo, um 2-simplexo e um 3-simplexo (um tetraedro).

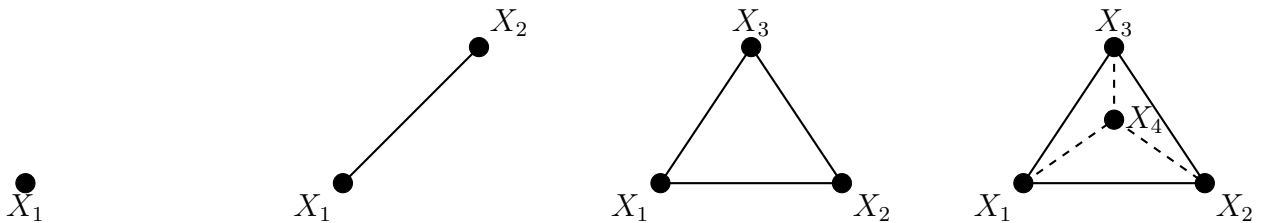


Figura 2.6: Representação de 0-simplexo, 1-simplexo, 2-simplexo e 3-simplexo.

A seguir, apresentaremos algumas definições que usaremos para estabelecer o Lema de Sperner.

Definição 2.42. Seja S um k -simplexo. Uma coleção finita \mathcal{T} de k -simplexos é uma dissecção de S se:

1. $S = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$;
2. Para cada par $T_i, T_j \in \mathcal{T}$ ou $T_i \cap T_j = \emptyset$ ou $T_i \cap T_j$ é uma face comum de T_i e T_j .

Observe que dado um k -simplexo existem 0-faces, 1-faces, até $(k-1)$ -faces.

Em outras palavras, podemos definir a dissecção \mathcal{T} como o conjunto das partições do simplexo original, em que as interseções dessas partições devem ser vazias ou uma face comum. Vejamos abaixo dois exemplos ilustrativos de 2-simplexos para a análise de dissecção.

Exemplo 2.27. Consideremos o 2-simplexo S definido pelos pontos afim independentes $\{X_1, X_2, X_3\}$ e as seguintes coleções de 2-simplexos.

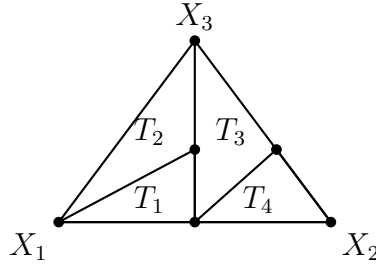


Figura 2.7: Não representa uma dissecção.

Observe que esta partição não é uma dissecção de S , pois, por exemplo, os 2-simplexos T_1 e T_3 tem interseção, porém esta interseção é face de T_1 , mas não é a face de T_3 .

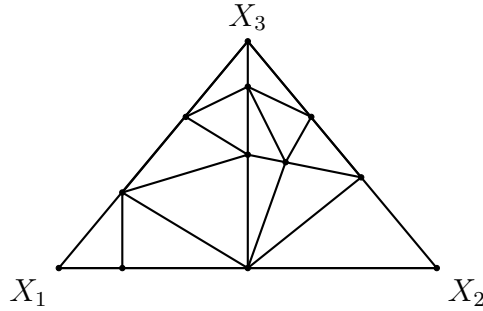


Figura 2.8: Representa uma dissecção.

Já essa partição é uma dissecção de S , pois todos seus elementos satisfazem a definição.

Definição 2.43. Para cada coleção de simplexos \mathcal{T} denotemos por $\mathcal{V}^{\mathcal{T}} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \text{ext}(T)$ e denote por $d_{\mathcal{T}}$ o máximo dos diâmetros dos simplexos de \mathcal{T} .

Se S é um simplexo definido pelos pontos afim independentes $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ e \mathcal{T} uma dissecção de S . Uma rotulagem de Sperner associado a S e \mathcal{T} é uma função

$$f : \mathcal{V}^{\mathcal{T}} \rightarrow \text{ext}(S)$$

tal que se $x \in \mathcal{V}^{\mathcal{T}}$, então

1. Se x é um ponto da fronteira de S .

- (a) Se existe algum $i \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$ tal que $x = X_i$, então

$$f(x) = f(X_i) = X_i.$$

- (b) Caso contrário, existirá um $(k-1)$ -simplexo definido por k pontos $\{X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_k}\} \subset \{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ com $x \in \text{conv}(X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_k})$, então

$$f(x) \in \{X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_k}\}.$$

2. Se x é um ponto interior de S então

$$f(x) \in \{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$$

Se $T \in \mathcal{T}$ é tal que $f(\text{ext}(T)) = \text{ext}(S)$, então T é chamado de simplexo completamente rotulado.

Exemplo 2.28. A seguir, apresentamos dois exemplos ilustrativos com base em rotulagem de Sperner num triângulo X_1, X_2 e X_3 .

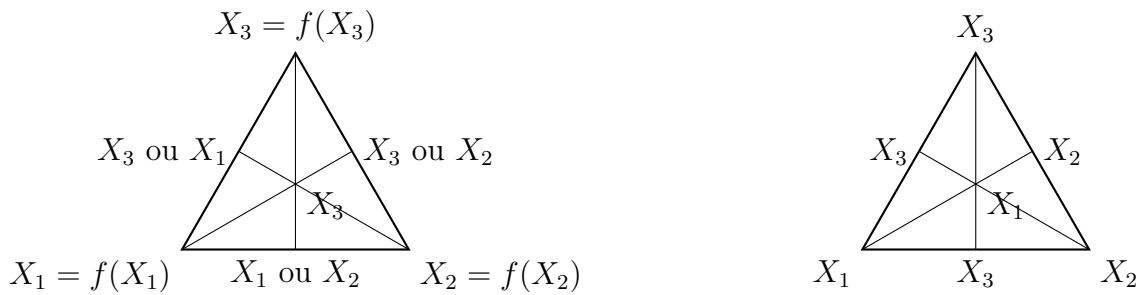


Figura 2.9: Rotulagem de Sperner válida à esquerda e Rotulagem de Sperner inválida à direita.

Abaixo serão apresentados exemplos ilustrativos com base em uma dissecção de um 2-simplexo de \mathbb{R}^3 com vértices X_1, X_2 e X_3 . Para isso faremos uma mudança pequena, porém didática; ao invés de usarmos X_1, X_2 e X_3 , usaremos as cores azul, vermelha e verde, respectivamente.

Exemplo 2.29. A seguinte dissecção é um rotulado de Sperner, pois satisfaz a definição. Observe que, neste exemplo, existem 5 elementos da dissecção completamente rotulados.

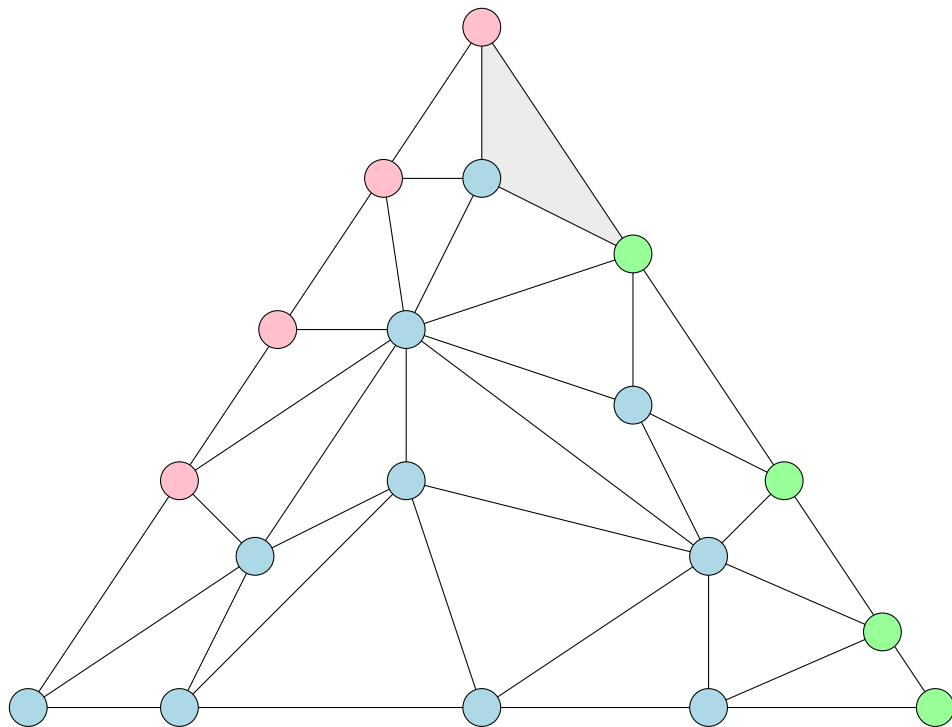


Figura 2.11: Dissecção Completamente Rotulada.

Exemplo 2.31. Observe que a seguinte dissecção não é um rotulado de Sperner.

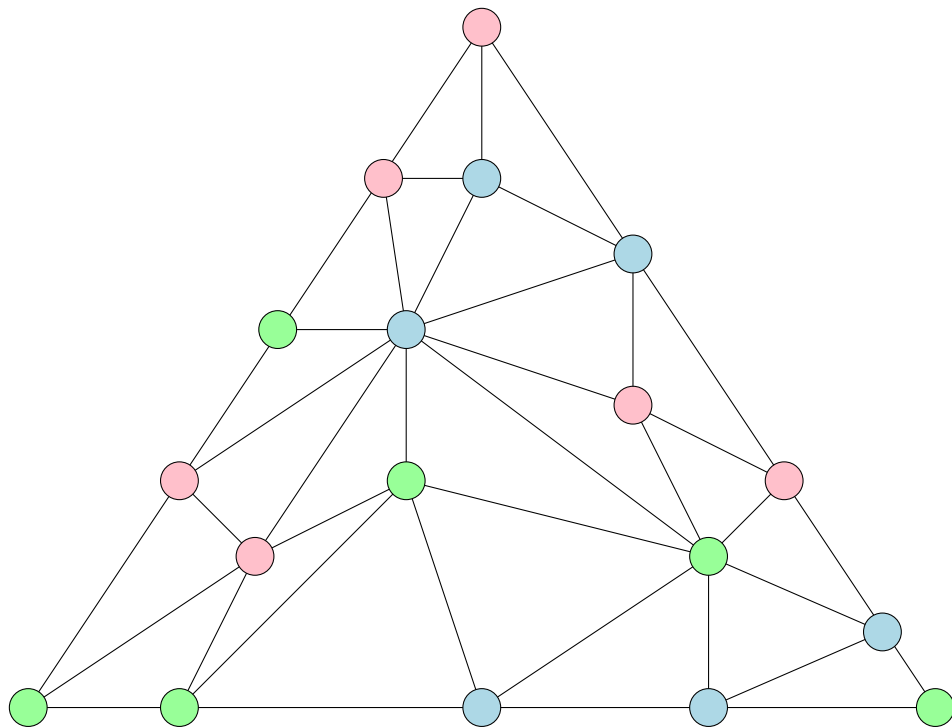


Figura 2.12: A dissecção não representa uma rotulagem de Sperner.

Exemplo 2.32. Perceba que este exemplo, também não é uma rotulagem de Sperner.

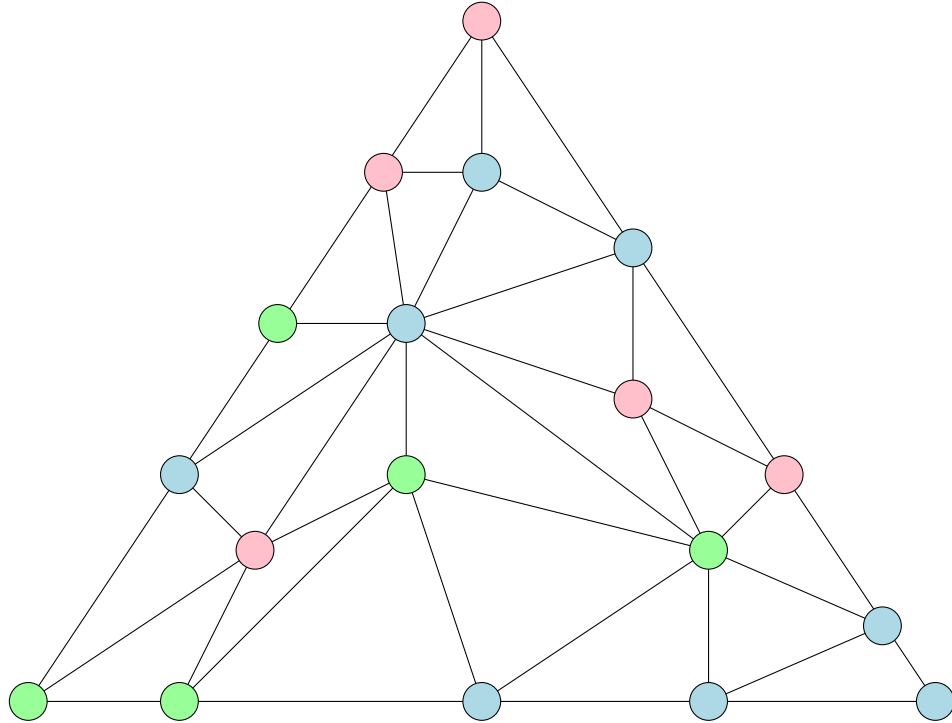


Figura 2.13: A disseção não representa uma rotulagem de Sperner.

O seguinte resultado, nos diz que a existência de um k -simplexo completamente rotulado no interior do simplexo S do exemplo anterior não é uma casualidade senão um fato.

Lema 2.1. (Lema de Sperner) Se S é um simplexo e \mathcal{T} uma disseção de S . Consideremos uma rotulagem de Sperner associado a S e $f : \mathcal{V}^{\mathcal{T}} \rightarrow \text{ext}(S)$. Então, existe $T \in \mathcal{T}$ completamente rotulado.

Demonstração: Apresentaremos uma prova, por indução, sobre a dimensão n do simplexo S . De fato, provaremos que o número de elementos da disseção \mathcal{T} completamente rotulado é ímpar, o que claramente implica a tese do lema.

Se $k = 1$. Neste caso, $S = \text{conv}(X_1, X_2) = [X_1, X_2]$. Uma disseção \mathcal{T} de S será uma subdivisão de S em intervalos menores. Se $f : \mathcal{V}^{\mathcal{T}} \rightarrow \text{ext}(S)$ é uma rotulagem de Sperner, então $f(X_1) \neq f(X_2)$. Assim, partindo de $X_1 = f(X_1)$ para $X_2 = f(X_2)$, devemos ter que $f(X)$ muda de valor (entre $f(X_1)$ e $f(X_2)$) um número ímpar de vezes, pois se o fizer um número par de vezes teríamos que $f(X_1) = f(X_1)$. Portanto, há um número ímpar de elementos da disseção completamente rotulados.

Se $k = 2$. Agora, temos que $S = \text{conv}(X_1, X_2, X_3)$ é um triângulo e uma disseção \mathcal{T} de S será uma subdivisão de S em 2-simplexos menores.

Consideremos os seguintes números:

Q denotará o número de triângulos da disseção de tal forma que os vértices sejam mapeados pela rotulagem f no conjunto de pontos $\{X_1, X_2, X_2\}$ ou $\{X_1, X_1, X_2\}$.

R denotará o número de triângulos da dissecção de tal forma que os vértices sejam mapeados pela rotulagem f no conjunto de pontos $\{X_1, X_2, X_3\}$.

A denotará o número de 1-simplexos da fronteira aos quais a função f associa a seus extremos X_1 e X_2 .

B denotará o número de 1-simplexos interiores a S associados por f aos valores X_1 e X_2 .

Agora, contemos os 1-simplexos rotulados por X_1 e X_2 de duas formas diferentes:

1. *Sobre os triângulos da dissecção:* Para cada triângulo do tipo Q temos 2 1-simplexos com extremos $\{X_1, X_2\}$ e para triângulos do tipo R temos exatamente um. Observe que desta forma contamos duas vezes as faces do tipo $[X_1, X_2]$, enquanto na fronteira é contada uma única vez. Logo, temos:

$$2Q + R = A + 2B \quad (2.1)$$

2. *Sobre a fronteira de S :* 1-simplexos da dissecção do tipo $[X_1, X_2]$ na fronteira só podem pertencer à face $[X_1, X_2]$ de S , pelo item anterior, nesta face existem um número ímpar deles. Logo, A é ímpar, pela equação (1.1), temos que R também é ímpar.

Caso geral. Suponhamos que, em todo $(k - 1)$ simplexo e em toda dissecção dela, existe um número ímpar de elementos completamente rotulados. Sejam $S = \text{conv}(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$ um k -simplexo, \mathcal{T} uma dissecção de S (uma subdivisão de S em k -simplexos) e f uma rotulagem de Sperner associado a S e \mathcal{T} . Provaremos que \mathcal{T} possui um número ímpar de elementos completamente rotulados.

Consideremos os seguintes números:

Q denotará o número de elementos da dissecção de tal forma que os vértices sejam mapeados pela rotulagem f no conjunto de pontos $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ (isto quer dizer que exatamente um destes vértices é usado duas vezes).

R denotará o número de triângulos da dissecção de tal maneira que os vértices sejam mapeados pela rotulagem f no conjunto de pontos $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$.

Consideremos as faces k -dimensionais que usam no rotulado exatamente os valores X_1, X_2, \dots, X_k , consideremos:

A o número destas que denota o número das faces na fronteira.

B o número destas faces interiores a S .

Agora, contemos estas faces de duas formas diferentes.

1. Cada simplexo do tipo R contribui com exatamente uma face do tipo $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$. Cada simplexo que contribui com Q o faz com exatamente duas faces do tipo $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$. Por outro lado, as faces interiores à S pertencem a exatamente dois simplexos e estas faces na fronteira de S pertencem a um único k -simplexo. Logo, temos:

$$2Q + R = A + 2B \quad (2.2)$$

2. Sobre a fronteira de S as faces do tipo $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ pertencem à única face de S do tipo $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$. Pela hipótese indutiva, este número é ímpar. Logo, A é ímpar e, pela equação (1.2), implica que R é ímpar o que conclui nossa demonstração. ■

Observação: Note que na prova anterior, o caso 2 não faz parte da prova, pois estamos usando indução matemática. Optamos por inserir esta etapa para evidenciar a construção do processo indutivo, como mostra a sequência dos seguintes gráficos num exemplo concreto.

Exemplo 2.33. Neste exemplo, apresentaremos uma prova ilustrando o Lema anterior para 2-simplexos. Este será o referencial teórico para a elaboração da atividade didática do capítulo 4.

Se $K=1$. Então, S é 1-simplexo com vértices coloridos de formas diferentes (suponhamos, vermelho e azul). Se, partindo do vermelho fazemos k mudanças destas cores, então k é ímpar. Caso contrário, terminaríamos na cor vermelha.

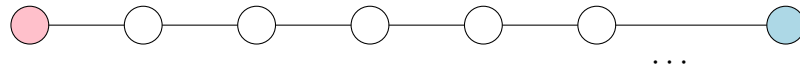


Figura 2.14: Representação de 1-simplexo com k mudanças de cores.

Agora, observemos que a cada mudança de cor contemos um 1-simplexo completamente rotulado. Logo, o número de 1-simplexos completamente rotulado é ímpar.

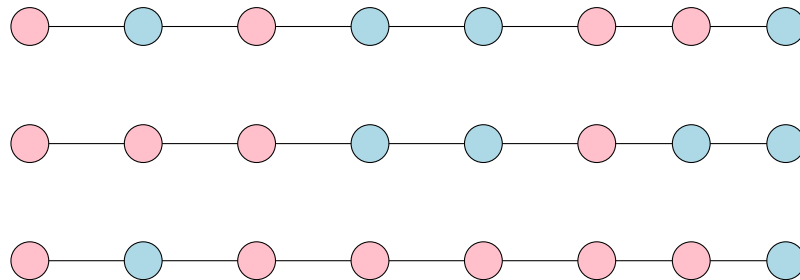


Figura 2.15: Exemplos da Representação de 1-simplexo Completamente Rotulado.

Se $K=2$. Consideremos um 2-simplexo com uma disseção e um rotulado, agora com as cores vermelho, azul e verde. Por exemplo,

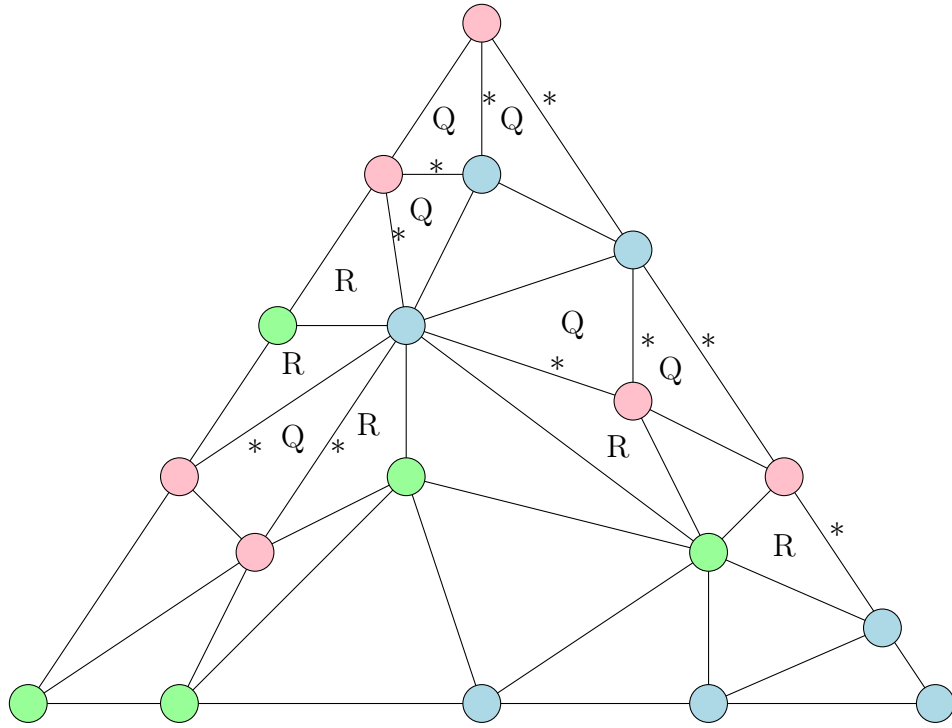


Figura 2.16: Representação de 2-simplexo com cores

E, consideremos todos os 1-simplexos rotulados com as cores vermelho e azul. Na figura essas podem ser identificadas pelas linhas com um *, o total deles será denotado por A . Sejam R , o número de 2-simplexos coloridos com Vermelho, Azul e Verde e Q número de 2-simplexos coloridos com as cores Vermelho, Vermelho, Azul ou Azul, Azul, Vermelho. Assim, podemos obter o número R de duas formas distintas. $2Q + R = A + 2B$, como A é ímpar, então R também é.

2.5.2 Teoremas do Ponto Fixo

A partir do Lema de Sperner, provaremos dois outros Teoremas de Ponto Fixo, o primeiro é o mais conhecido, Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, ele é muito estudado nas disciplinas dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. O segundo resultado que apresentaremos, é pouco conhecido entre os estudantes e é chamado Teorema de Ponto Fixo de Kakutani.

Inicialmente, apresentaremos um resultado belo e necessário para nosso estudo.

Lema 2.2. (Teorema de Knaster - Kuratowski - Mazurkiewicz) Se S é um k -simplexo de \mathbb{R}^n tal que $S = \text{conv}(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$ e:

1. para cada $i = 1, 2, \dots, k, k + 1$, A_i é um subconjunto fechado de S ;
2. Para todo subconjunto $C \subset \{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ $\text{conv}(C) \subset \bigcup_{i \in C} A_i$.

Então, $\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i \neq \emptyset$

Demonstração: Dado $m \in \mathbb{N}^*$. Considere D^m uma disseção tal que $\text{diam}(D^m) < \frac{1}{m}$, é fácil verificar que tal disseção existe. Consideremos o conjunto de vértices de D^m , \mathcal{V}^{D^m} , e definamos uma rotulagem de Sperner $f^m : \mathcal{V}^{D^m} \rightarrow \{X_1, x_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ da seguinte forma:

Considere $v \in \mathcal{V}^{D^m}$, então existe um único $C \subset \{X_1, x_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ que possui cardinalidade mínima tal que $v \in \text{conv}(C)$, escolhamos $f^m(v) \in C$.

Pelo Lema de Sperner, existe um elemento da disseção completamente rotulado, denotemos este simplexo de diâmetro menor que $\frac{1}{m}$. Como $\{X_1^m, x_2^m, \dots, X_k^m, X_{k+1}^m\}$, assim, obtemos $(k+1)$ -sequências de números reais:

$$(X_1^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset A_1, (X_2^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset A_2, \dots, (X_k^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset A_k \text{ e } (X_{k+1}^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset A_{k+1}.$$

Desde que os conjunto A_i são fechados dentro do compacto S , então estes conjuntos são compactos. Logo, podemos assumir, trabalhando com subsequências, se for necessário, que estas sequências são convergentes, assim temos:

$$X_1^m \rightarrow a_1 \in A_1, \text{ se } m \rightarrow +\infty$$

$$X_2^m \rightarrow a_2 \in A_2, \text{ se } m \rightarrow +\infty$$

...

$$X_k^m \rightarrow a_k \in A_k, \text{ se } m \rightarrow +\infty$$

$$X_{k+1}^m \rightarrow a_{k+1} \in A_{k+1}, \text{ se } m \rightarrow +\infty$$

Como $\text{diam}(D^m) < \frac{1}{m}$, então $|X_i^m - X_j^m| < \frac{1}{m}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$ e, usando a desigualdade triangular, podemos provar que $a_i = a_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$, o que implica que $\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i \neq \emptyset$. ■

Teorema 2.10. (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e compacto. Se $f : A \rightarrow A$ é uma função contínua, então existe $x_0 \in B$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demonstração:

Caso 1. Existe $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ um conjunto afim independente tal que $A = \text{conv}(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$, isto é, A é um k -simplexo. Dado $x \in A$ existe uma única forma de escrever ela como combinação convexa dos pontos $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$, isto é:

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i(x) X_i$$

tal que $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i(x) = 1$ e $\alpha_i(x) \geq 0$.

Para cada $i = 1, 2, \dots, k, k+1$, definamos $A_i = \{x \in A; \alpha_i(f(x)) \leq \alpha_i(x)\}$, como $X_i = 1X_i$ então $\alpha_i(X_i) = 1$, logo $X_i \in A_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, k, k+1$. Desde que f é uma função contínua, temos que A_i é um conjunto fechado de A .

Dado $C \subset \{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ não vazio, afirmamos que $\text{conv}(C) \subset \bigcup_{i \in C} A_i$.

De fato, seja $x \in \text{conv}(C)$ então $x = \sum_{i \in C} \alpha_i(x)X_i$ com $\sum_{i \in C} \alpha_i(x) = 1 \geq \sum_{i \in C} \alpha_i(f(x))$,

logo, existe $i_0 \in C$ tal que $\alpha_{i_0}(x) \geq \alpha_{i_0}(f(x))$ o que implica que $x \in A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in C} A_i$.

Pelo Teorema de Knaster - Kuratowski - Mazurkiewicz, existe $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{k+1} A_i$, logo $\alpha_i(f(x_0)) \leq \alpha_i(x_0)$ para todo $i = 1, 2, \dots, k, k+1$.

Observe que $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i(f(x_0)) = 1 = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i(x_0)$ e como $\alpha_i(f(x_0)) \leq \alpha_i(x_0)$, então temos que $\alpha_i(f(x_0)) = \alpha_i(x_0)$ para todo $i = 1, 2, \dots, k, k+1$. E, finalmente, obtemos

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i(f(x_0))X_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i(x_0)X_i = x_0$$

Caso 2. Seja A um conjunto não vazio, convexo e compacto, então existem $k \in \mathbb{N}^*$ mínimo e $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ pontos afim independentes tal que A é um subconjunto do simplexo $S = \text{conv}(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$. Fixemos \hat{x} ponto interior a A , definiremos uma extensão $\hat{f} : S \rightarrow S$ da função $f : A \rightarrow A$ da seguinte forma.

Dado $x \in S$ definamos

$$\lambda(x) = \max\{\lambda \in [0, 1]; (1 - \lambda)\hat{x} + \lambda x \in A\}$$

Logo, definamos

$$\hat{f}(x) = f((1 - \lambda(x))\hat{x} + \lambda(x)x)$$

Observe que se $x \in A$, então $\lambda(x) = 1$ e $\hat{f}(x) = f(x)$, então \hat{f} é uma extensão contínua de f e, além disso, pelo Caso 1 temos que \hat{f} tem um ponto fixo x_0 . Como $\text{Im}(\hat{f}) \subset A$, então $x_0 \in A$ e $f(x_0) = x_0$, o que finaliza a nossa prova. ■

Teorema 2.11. (Teorema do Ponto Fixo de Kakutani) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e compacto. Seja $F : A \rightarrow A$ uma correspondência, inferiormente contínua, não vazio-avaluada, fechada-avaluada e convexo-avaluada. Então, existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 \in F(x_0)$.

Demonstração:

Caso 1. Se existem $X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}$ pontos de \mathbb{R}^n afim independente tal que $A = S = \text{conv}(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$. Fixado $m \in \mathbb{N}$, consideremos \mathcal{T}^m a disseção de S tais que $d_{\mathcal{T}^m} \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow +\infty$.

Definamos $g^m : A \rightarrow A$ da seguinte forma.

Dado $x \in \mathcal{V}(\mathcal{T}^m)$, desde que F é não vazio-valorada seja $y \in F(x)$ e definamos $g^m(x) = y$.

Agora, para cada $x \in A$ existe um único $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ com $(l+1)$ mínimo tal que $x \in \text{conv}(\{X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_l}, X_{r_{l+1}}\})$, onde $\{X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_l}, X_{r_{l+1}}\} \subset \{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$. Logo, temos que $x = \sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i X_{r_i}$, onde $\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$ para

cada $i = 1, 2, \dots, l+1$. Logo, podemos definir $g^m(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i g^m(X_{r_i})$. É fácil verificar que esta função é contínua (por exemplo, podemos usar sequências e a caracterização de funções contínuas por sequências).

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $x^m \in A$ tal que $g^m(x^m) = x^m$. Então, para cada $m \in \mathbb{N}$ seja $\{X_1^m, X_2^m, \dots, X_k^m, X_{k+1}^m\}$ os vértices do k -simplexo de \mathcal{T}^m tal que $x \in \text{conv}(X_1^m, X_2^m, \dots, X_k^m, X_{k+1}^m)$. Logo, $x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i^m X_i^m$,

onde $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i^m = 1$ com $\alpha_i^m \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k, k+1$. Desde que estamos trabalhando sobre os conjuntos compactos $[0, 1]$ de \mathbb{R} e A de \mathbb{R}^n podemos assumir que, usando subsequências, se for necessário, para cada $i = 1, 2, \dots, k, k+1$, $\alpha_i^m \rightarrow \bar{\alpha}_i$ e que $g^m(X_i^m) \rightarrow Y_i$.

E, por continuidade, também temos que $\sum_{i=1}^{k+1} \bar{\alpha}_i = 1$ e para cada $i = 1, 2, \dots, k, k+1$ temos $\bar{\alpha}_i \geq 0$. Além disso, as sequências (X_i^m) e (x^m) também pode ser consideradas convergentes e, como $d(\mathcal{T}^m) \rightarrow 0$, todos esses limites coincidem, denotemos por X_0 esse limite comum.

Afirmção: Para todo $i = 1, 2, \dots, k, k+1$, $Y_i \in F(X_0)$.

Suponhamos que, existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$ tal que $Y_{i_0} \notin F(X_0)$. Como $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é fechado e F fechado-valorado, então $F(X_0)$ é um conjunto fechado de \mathbb{R}^n e como \mathbb{R}^n é um espaço regular existem conjuntos aberto B_1 e B_2 tais que $Y_{i_0} \in B_1$ e $F(X_0) \subset B_2$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Como $X_{i_0}^m \rightarrow X_0$ quando $m \rightarrow \infty$ e F é hemicontínua inferiormente, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ $g^k(X_{i_0}^k) \in B_2$. Por outro lado, como $g^m(X_{i_0}^m) \rightarrow Y_{i_0}$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_1$ temos que $g^m(X_{i_0}^m) \in B_1$, estas duas propriedades implicam que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Logo, $Y_i \in F(X_0)$ para todo i .

Finalmente, como para todo $m \in \mathbb{N}^*$, $x^m = g^m(x^m) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i^m g^m(X_i^m)$, tomando limite,

temos que

$$X_0 = \sum_{i=1}^{k+1} \bar{\alpha}_i Y_i \in \text{conv}(F(X_0)) = F(X_0)$$

A última igualdade é válida, pois F é convexo-valorada.

Caso 2. Seja A um conjunto não vazio, convexo e compacto, então existem $k \in \mathbb{N}^*$ mínimo e $\{X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}\}$ pontos afim independentes tal que A é um subconjunto do simplexo $S = \text{conv}(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$. Fixemos \hat{x} ponto interior a A , definiremos uma extensão $\hat{F} : S \rightarrow S$ da correspondência $F : A \rightarrow A$ da seguinte forma.

Dado $x \in S$, definamos

$$\lambda(x) = \max\{\lambda \in [0, 1]; (1 - \lambda)\hat{x} + \lambda x \in A\}$$

Logo,

$$\hat{F}(x) = F((1 - \lambda(x))\hat{x} + \lambda(x)x).$$

Observe que \hat{F} é não vazia-valorada, fechada-valorada e convexo-valorada e é composição de uma função contínua com uma função inferior hemicontínua. Logo, é hemicontínua inferior. E, pelo Caso 1, temos que \hat{F} tem um ponto fixo x_0 , como $\text{Im}(\hat{F}) \subset A$. Logo, $x_0 \in A$ e $X_0 \in F(X_0)$, o que finaliza a nossa prova. ■

Capítulo 3

Jogos Estratégicos e o Teorema do Equilíbrio de Nash

Neste capítulo estudaremos os jogos estratégicos, abordaremos as definições, exemplos e, especialmente, o Teorema do Equilíbrio de Nash, pois sua demonstração está diretamente ligada ao nosso tema de trabalho Teorema do ponto fixo de Kakutani. Para este estudo foi utilizado o livro *An Introductory Course on Mathematical Game Theory* [6].

Para que possamos definir o que é um Jogo estratégico, primeiramente, vamos identificar seus elementos:

1. **Conjuntos de Estratégias:** Para cada $i \in N$, o conjunto não-vazio A_i é o conjunto de estratégias do jogador i e

$$A := \prod_{i=1}^n A_i,$$

representa o conjunto de perfis de estratégias.

2. **Função Lucro:** Para cada $i \in N$, $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função lucro do jogador i e

$$u := \prod_{i=1}^n u_i,$$

representa o conjuntos das funções lucro de todos os jogadores.

Seja o conjunto de jogadores denotado por $N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Definição 3.1. Um jogo estratégico com n jogadores, tal que $n \in N$, é um par

$$G := (A, u),$$

em que A é o conjunto de perfis de estratégias e u é o conjunto das funções lucros de todos os jogadores.

Note que em um jogo estratégico G , cada jogador $i \in N$ escolhe, simultaneamente e independentemente, uma estratégia $a_i \in A_i$. Assim, cada jogador recebe uma função lucro $u_i(a)$. No caso em que os jogadores se comuniquem, antes de escolherem suas estratégias,

só poderão fazer acordos não vinculativos, ou seja, que não há mecanismos externos que os obriguem a cumprirem com seus acordos.

Apresentaremos, a seguir, exemplos de jogos estratégicos bastante estudados em economia, dando foco para o Dilema do Prisioneiro que é um clássico para o estudo da teoria de jogos.

Exemplo 3.1 (Dilema do Prisioneiro.). Dois suspeitos de um crime grave e um pequeno roubo são colocados em celas separadas. Sabemos que são culpados pelo roubo, mas a polícia não possui evidências do crime mais grave. Ambos têm a chance de confessar. Se ambos confessam o crime, cada um cumprirá 10 anos de prisão. Se apenas um confessar, ele atuará como testemunha contra o outro, que passará 15 anos na prisão e não receberá punição. Por fim, se ninguém confessar, eles serão julgados pelo pequeno roubo e cada um deles passará 1 ano na prisão. Seguindo a terminologia comum para este jogo, referimos à confissão como "Delatar"(D) e a não confissão como "Não delatar"(ND). Então, o dilema do prisioneiro é um jogo estratégico (A, u) em que

- $A_1 = A_2 = \{ND, D\}$.
- $u_1(ND, ND) = -1; u_1(ND, D) = -15; u_1(D, ND) = 0; u_1(D, D) = -10$.
- $u_2(ND, ND) = -1; u_2(ND, D) = 0; u_2(D, ND) = -15; u_2(D, D) = -10$.

Segue uma representação deste jogo que é a forma padrão de representar jogos estratégicos com conjuntos de estratégias finitos.

	ND	D
ND	(-1, -1)	(-15, 0)
D	(0, -15)	(-10, -10)

Tabela 3.1: O dilema do prisioneiro.

Exemplo 3.2. Oligopólio de Cournot (Cournot 1838): O conjunto N corresponde ao conjunto de produtores de uma certa mercadoria. Cada produtor $i \in N$ deve escolher uma estratégia $a_i \in [0, \infty)$ que denota o número de unidades da mercadoria produzida e levada ao mercado; $c_i(a_i)$ denota o custo total que o jogador i enfrenta ao escolher a estratégia a_i . O preço de uma unidade da mercadoria no mercado depende de $\sum_{i \in N} a_i$ e é denotado por $\pi(\sum_{i \in N} a_i)$. Essa situação pode ser modelada pelo jogo estratégico $G = (A, u)$, onde:

- $A_i = [0, \infty)$;
- para cada $i \in N$ e cada $a \in A$, $u_i(a) = \pi(\sum_{k \in N} a_k) a_i - c_i(a_i)$.

Seja um jogo $G = (A, u)$ e um perfil de estratégia $a \in A$, seja (a_{-i}, \hat{a}_i) que denota o perfil $(a_1, \dots, a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

3.1 Equilíbrio de Nash em Jogos Estratégicos

Dado um jogo $G = (A, u)$ e um perfil de estratégia $a \in A$, seja $(a_{-i}, \hat{a}^i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, \hat{a}^i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ o perfil em que apenas a estratégia do jogador i foi alterada para \hat{a}^i .

Definição 3.2 (Equilíbrio de Nash). Seja $G = (A, u)$ um jogo estratégico. Um equilíbrio de Nash de G é um perfil de estratégias $a^* \in A$ tal que, para cada $i \in N$ e cada $\hat{a}^i \in A_i$, temos que

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_{-i}^*, \hat{a}^i)$$

Determinaremos, a seguir, os equilíbrios de Nash que constam nos jogos estratégicos do Dilema do Prisioneiro e do Oligopólio de Cournot.

Exemplo 3.3 (Dilema do Prisioneiro). O único equilíbrio de Nash do dilema do prisioneiro é $a^* = (D, D)$.

Exemplo 3.4. Para os equilíbrios de Nash em um modelo de Cournot, faremos sob as seguintes suposições:

Considerando um duopólio, ou seja, $n = 2$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, o custo de produção é dado por $c_i(a_i) = ca_i$, onde $c > 0$. Seja d um número fixo, $d > c$. A função preço é dada por:

$$\pi(a_1 + a_2) = \begin{cases} d - (a_1 + a_2), & \text{se } a_1 + a_2 < d, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $i \in \{1, 2\}$ e cada $a \in A$, as funções lucro do jogo estratégico associado são

$$u_i(a) = \begin{cases} a_i(d - a_1 - a_2 - c), & \text{se } a_1 + a_2 < d, \\ -a_i c, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição, um equilíbrio de Nash, neste jogo, é frequentemente denominado equilíbrio de Cournot, sendo um par $(a_1^*, a_2^*) \in A_1 \times A_2$ tal que:

- i) Para cada $\hat{a}_1 \in A_1$, $u_1(a_1^*, a_2^*) \geq u_1(\hat{a}_1, a_2^*)$;
- ii) Para cada $\hat{a}_2 \in A_2$, $u_2(a_1^*, a_2^*) \geq u_2(a_1^*, \hat{a}_2)$.

A seguir, apresentaremos o cálculo de um equilíbrio de Nash deste jogo, em que para cada $i \in \{1, 2\}$ e cada $a \in A$, define a função

$$f_i(a) := a_i(d - a_1 - a_2 - c)$$

Então, temos que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1}(a) = -2a_1 + d - a_2 - c \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial a_2}(a) = -2a_2 + d - a_1 - c$$

E, portanto,

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1}(a) = 0 \iff a_1 = \frac{d - a_2 - c}{2} \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial a_2}(a) = 0 \iff a_2 = \frac{d - a_1 - c}{2}$$

Note que para cada $a \in A$,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1^2}(a) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_2^2}(a) = -2.$$

Agora, para cada $i \in N$ e cada $a_{-i} \in A_{-i}$, defina o conjunto

$$BR_i(a_{-i}) := \{\hat{a}_i : \text{para cada } \tilde{a}_i \in A_i, u_i(a_{-i}, \hat{a}_i) \geq u_i(a_{-i}, \tilde{a}_i)\},$$

onde BR representa a “melhor resposta”.

Por exemplo, se $a_2 \in A_2$, então $a_2 < d - c \implies BR_1(a_2) = \frac{d-c-a_2}{2}$ e $a_2 \geq d - c \implies BR_1(a_2) = 0$. Analogamente, para cada $a_1 \in A_1$, $a_1 < d - c \implies BR_2(a_1) = \frac{d-c-a_1}{2}$ e $a_1 \geq d - c \implies BR_2(a_1) = 0$, caso contrário. Portanto, como $a^* = (\frac{d-c}{3}, \frac{d-c}{3})$ é a solução única do sistema:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{d - a_2 - c}{2} \\ a_2 = \frac{d - a_1 - c}{2} \end{cases}$$

Então, a^* é o único equilíbrio de Nash deste jogo. Note que, para cada $i \in \{1, 2\}$, $u_i(a^*) = \frac{(d-c)^2}{9}$.

Note que, se ao invés de dois duopolistas, o mercado consistisse em um único monopolistas, sua função lucro seria dada por:

$$u(a) = \begin{cases} a(d - a - c), & a < d, \\ -ac, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $f(a) := a(d - a - c)$, temos que $f'(a) = 0$ se, e somente se, $a = \frac{d-c}{2}$. Como, para todo $a \in \mathbb{R}$, $f''(a) = -2$, então o nível ótimo de produção e o lucro para um monopolista são $\bar{a} = \frac{d-c}{2}$ e $u(\bar{a}) = \frac{(d-c)^2}{4}$. Portanto, o lucro do monopolista é maior que a soma dos lucros dos dois produtores no equilíbrio a^* . Além disso, como $\bar{a} < a_1^* + a_2^*$, o preço de mercado é menor no caso de duopólio.

Apresentaremos, a seguir, alguns conceitos fundamentais para enunciar e provar o Teorema de Nash. Para que possamos fazer a prova, devemos voltar ao 2 em que trabalhamos os conceitos de correspondência e ao teorema do Ponto Fixo de Kakutani que são nossas bases para demonstrar o Teorema de Nash.

Definição 3.3. Seja $G = (A, u)$ um jogo estratégico tal que, para cada $i \in N$,

- i) existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que A_i é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^{m_i} ;
- ii) u_i é contínua;

Então, para cada $i \in N$, sua correspondência de melhor resposta $BR_i : A_{-i} \rightarrow A_i$ é definida, para cada $a_{-i} \in A_{-i}$, por

$$BR_i(a_{-i}) := \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) = \max_{\tilde{a}_i \in A_i} u_i(\tilde{a}_i, a_{-i})\}.$$

Tome $BR : A \rightarrow A$ definido, para cada $a \in A$, como $BR(a) := \prod_{i \in N} BR_i(a_{-i})$.

Seja $m \in \mathbb{N}$ e $A \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo. Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é quase-côncava se, para cada $r \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{a \in A : f(a) \geq r\}$ for convexo ou, equivalentemente, se para cada $a, \tilde{a} \in A$ e cada $\alpha \in [0, 1]$, $f(\alpha a + (1 - \alpha)\tilde{a}) \geq \min\{f(a), f(\tilde{a})\}$. Note que a quase-concavidade implica concavidade, que requer $f(\alpha a + (1 - \alpha)\tilde{a}) \geq \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(\tilde{a})$, mas é substancialmente mais geral.

Por exemplo, a função convexa $f(x) = e^x$ é quase-côncava e, portanto, qualquer função monótona de \mathbb{R} para \mathbb{R} também é quase-côncava.

Proposição 3.1. Seja $G = (A, u)$ um jogo estratégico tal que para cada $i \in N$:

- i) A_i é um subconjunto não vazio e compacto de \mathbb{R}^{m_i} ;
- ii) u_i é contínua;
- iii) Para cada a_{-i} , $u_i(a_{-i}, \cdot)$ é quase-côncava em A_i .

Então, para cada $i \in N$, BR_i é uma correspondência hemicontínua superior, não-vazia valuada, fechada-valuada e convexa-valuada. Logo, BR satisfaz as propriedades anteriores.

Demonstração: Seja $i \in N$.

Não-vazia valuada: Note que toda função contínua definida em um conjunto compacto atinge um máximo. Logo, é direta;

Fechada-valuada: Também é direto, pois pela continuidade das funções lucro e pela compacidade dos conjuntos de estratégias;

Convexa-valuada: Seja $a_{-i} \in A_{-i}$ e $i \in BR_i(a_{-i})$. Seja $r := u_i(a_{-i}, i)$. Então, $BR_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i ; u_i(a_{-i}, a_i) \geq r\}$. A valoração convexa é implicada pela quase-concavidade de u_i ;

Hemicontínua superior: Suponha, por contradição, que BR_i não seja hemicontínua superior. Então, existe uma sequência $\{a^k\} \subset A_{-i}$ convergindo para $\bar{a} \in A_{-i}$ e um aberto $B^* \subset A_i$ com $BR_i(\bar{a}) \subset B^*$, que satisfaz, para cada $k_0 \in \mathbb{N}$, existe $k \geq k_0$ tal que $BR_i(a^k) \not\subset B^*$. Isto implica que existe uma sequência $\{m\} \subset \mathbb{N}$ tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \in BR_i(a^m) \setminus B^*$. Como A_i é compacto, $\{m\}$ tem uma subsequência convergente. Assuma, sem perda de generalidade, que $\{m\}$ converge e seja $\hat{a} \in A_i$ seu limite. Como B^* é um conjunto aberto, então $A_i \setminus B^*$ é fechado. Logo, $\hat{a} \in A_i \setminus B^*$ e, portanto, $\hat{a} \notin BR_i(\bar{a})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $a \in A_i$, temos $u_i(a^m, m) \geq u_i(a^m, a)$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ e usando a continuidade de u_i , obtemos que, para cada $a \in A_i$, $u_i(\bar{a}, \hat{a}) \geq u_i(\bar{a}, a)$. Portanto, $\hat{a} \in BR_i(\bar{a})$, o que é uma contradição.

Assim, o resultado para BR é imediato. ■

Aqui, apresentaremos a consequência da prova do Teorema de Kakutani e da proposição anterior que consiste no tema principal desta seção: o Teorema de Nash.

Teorema 3.1. Teorema de Nash: Seja $G = (A, u)$ um jogo estratégico tal que para cada $i \in N$, temos:

- i) A_i é um subconjunto não vazio, convexo e compacto de \mathbb{R}^{m_i} ;
- ii) u_i é contínua;
- iii) Para cada a_{-i} , $u_i(a_{-i}, \cdot)$ é quase-côncava em A_i .

Então, o jogo estratégico G possui, pelo menos um, equilíbrio de Nash.

Demonstração: Se a é um ponto fixo da correspondência $BR : A \rightarrow A$, então a é um equilíbrio de Nash de G . Assim, pela proposição anterior, BR satisfaz as condições do Teorema de Kakutani, como assumimos que os conjuntos A_i são convexos. Então, BR possui um ponto fixo. ■

Capítulo 4

Afeto e Ludicidade no ensino de Matemática: Explorando o Lema de Sperner

Para finalizar este trabalho, que se encontra enriquecido por conceitos matemáticos, teoremas e demonstrações, apresentaremos duas atividades que, de forma lúdica e criativa, possibilitam ao aluno perceber a matemática em uma prática simples, mas que tem, em sua essência, ideias mais complexas. O objetivo é proporcionar uma experiência distinta do ensino tradicional, permitindo sentir e apreciar a beleza da matemática sem depender, necessariamente, de fórmulas, cálculos ou ferramentas mais complexas. Ao final, pretendemos que o aluno reconheça que pode compreender a matemática e torná-la acessível, vivenciando-a de modo mais próximo e significativo. Essa abordagem segue o espírito do Projeto Klein, que conforme edital tem por objetivo central produzir um material para professores afim de "comunicar-lhes o fôlego e a vitalidade da pesquisa em matemática conectando-os ao conteúdo curricular da escola em nível secundário"(PROJETO KLEIN EM LÍNGUA PORTUGUESA, 2011, p.1) [10], ou seja, defende a aproximação entre a matemática escolar e a matemática avançada, utilizando atividades exploratórias para tornar conceitos sofisticados acessíveis e conectados à experiência do estudante.

Além disso, buscamos favorecer não apenas a dimensão cognitiva, mas também a dimensão afetiva da aprendizagem. A aprendizagem da matemática precisa não ser restrita à apenas a memorização de procedimentos ou ao raciocínio lógico, mas deve envolver igualmente aspectos emocionais e socioculturais que influenciam diretamente a relação do estudante com o saber matemático. Nessa perspectiva, Damásio (2016) afirma que não há separação entre mente e cérebro.

Emoções são programas de ações complexos e em grande medida automatizados, engendrados pela evolução. As ações são complementadas por um programa cognitivo que inclui certas ideias e modos de cognição (...) A tristeza desacelera o raciocínio e pode nos levar a ficar ruminando a situação que a desencadeou; a alegria pode acelerar o raciocínio e reduzir a atenção para eventos não relacionados (Damásio, 2016, p. 142-143).

Chacón (2003, apud Moreira, 2016) propõe, por sua vez, a distinção entre afeto local

e afeto global. O afeto local está ligado às experiências imediatas do aluno em situações específicas de aprendizagem matemática, como a ansiedade diante de uma prova ou a satisfação ao resolver um problema. Já o afeto global corresponde à integração dessas experiências ao longo do tempo, contribuindo para a formação de crenças e identidades em relação à matemática. Nesse sentido, “o afeto global é o resultado dos caminhos seguidos no afeto local, os quais contribuem continuamente para a construção de estruturas gerais do conceito de si mesmo e das crenças sobre a matemática e sua aprendizagem” (Chacón, 2000, apud Moreira, 2016, p. 52, tradução própria).

Assim, seguindo essa linha de pensamento, foram desenvolvidas duas atividades, uma para o ensino fundamental e outra para o ensino médio. A proposta com o Lema de Sperner 2.1 pode contribuir de maneira significativa para o fortalecimento do afeto local. A exploração começa de forma simples, com a construção de um 1-simplexo, no qual os alunos utilizam duas cores para pintar pontos em um segmento de reta e, em seguida, observam que sempre surge uma quantidade ímpar de intervalos mágicos (isto é, intervalos cujas extremidades possuem cores diferentes). Em continuidade, a mesma ideia é estendida para o 2-simplexo: os alunos utilizam três cores para subdividir um triângulo em simplexos menores e percebem que, em qualquer configuração, aparece sempre um número ímpar de triângulos mágicos (com os três vértices de cores distintas). Esse processo, além de estimular a percepção visual e a intuição matemática, desperta no estudante a curiosidade e a satisfação de reconhecer padrões emergindo de atividades lúdicas aparentemente simples, tornando conceitos sofisticados da matemática acessíveis de maneira concreta e experiencial.

Ao vivenciar essa experiência, o aluno tem a oportunidade de sentir a matemática como algo exploratório e criativo, sem recorrer a cálculos complexos ou demonstrações formais. Esse contato positivo constitui um afeto local, que, conforme destaca Chacón (2003, apud Moreira, 2016), pode ser integrado posteriormente ao afeto global, influenciando de forma duradoura as crenças e atitudes do estudante em relação à matemática. Assim, a atividade não apenas ilustra um importante resultado matemático, mas também favorece um aprendizado que une cognição e emoção.

A seguir será apresentado as atividades elaboradas com o Lema de Sperner para o Ensino Fundamental (Apêndice A) e para o Ensino Médio (Apêndice B), contendo um plano didático detalhado para o professor e com folha de atividade a ser disponibilizada para o aluno (Apêndice A e B).

4.1 Atividade para o Ensino Fundamental II: Explorando o Lema de Sperner com cores

Objetivo: Permitir que os alunos percebam, de forma lúdica e visual, um resultado matemático não trivial, conhecido como Lema de Sperner, vivenciando a beleza da matemática em uma atividade simples, lúdica e sem necessidade de cálculos complexos.

Materiais Necessários:

- Folha de atividade contendo um triângulo subdividido em triângulos menores, cujos vértices estão representados por círculos.
- Lápis de cor ou canetinhas (três cores diferentes).

Passo a Passo:

1. Preparação

- Cada aluno recebe uma folha de atividade e deve escolher três cores diferentes.
- Os vértices do triângulo grande devem ser coloridos com estas três cores.

2. Colorindo os vértices

Cada vértice dos triângulos pequenos deve receber uma cor seguindo as regras:

- Os vértices situado nos três lados da fronteira do triângulo maior devem receber uma dos cores dos vértices do lado ao qual pertencem.
- Os pontos internos ao triângulo maior podem ser coloridos livremente, utilizando qualquer uma das três cores disponíveis.

3. Identificando simplexes coloridos:

Os alunos devem observar os pequenos triângulos formados e identificar aqueles cujos vértices apresentam as três cores diferentes.

Observação: Os triângulos cujo os 3 vértices possuem suas cores diferentes serão chamados de "Triângulos mágicos"

4. Descoberta do padrão:

- Após a observação, questionar: “Quantos triângulos mágicos vocês encontraram?”
- Conduzir o aluno a perceber que sempre surge uma quantidade ímpar de triângulos mágicos.

5. Discussão Final:

- Explicar que esse resultado ilustra o Lema de Sperner, um teorema importante da matemática combinatória e da teoria dos jogos.
- Reforçar que, mesmo sem cálculos ou demonstrações formais, os alunos experimentaram uma propriedade matemática apenas explorando cores e padrões.

4.2 Atividade para o Ensino Médio: Explorando o Lema de Sperner com cores e o Princípio de Indução

Princípio de Indução Matemático

Para que possamos realizar a segunda atividade que será voltada para o ensino médio é necessário compreender o princípio de indução finita que nos permitirá fazer observações sobre a demonstração do Lema de Sperner utilizando cores e a existência do padrão gerado.

Agora, apresentaremos o método do Princípio de Indução finita em que busca mostrar que determinada afirmativa é verdadeira para todo $n \in N$, tal que $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Em outras palavras, a partir da indução é possível provar que a afirmativa é verdadeira para

$n = 1, n = 2, \dots, n = k, n = k + 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja, que é válido para qualquer n natural que tomar. O método do Princípio de indução finita é composto por 3 passos, como segue abaixo:

- i) [**Verificar**] Mostrar que a afirmativa é válida para o primeiro número natural n . ($n = 1$);
- ii) [**Hipótese de Indução**] Assumir que a afirmativa é válida para $n = k$, tal que k é um número natural qualquer;
- iii) [**Passo Indutivo**] Mostrar que, se a afirmativa é válida para algum k qualquer, então é válido para $k + 1$.

Portanto, se uma afirmativa satisfaz aos três passos acima, então, pelo princípio de indução, conclui-se que a afirmativa é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Um exemplo do princípio de indução foi feito neste trabalho para demonstrar a veracidade do lema de Sperner (Lema 1.1), outros exemplos de indução são a soma dos n primeiros números naturais, soma dos n primeiros números ímpares, produto de números consecutivos entre outros. Segue uma demonstração de um dos exemplos:

Exemplo 4.1 (Soma dos n primeiros números naturais). Provar que:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- i) [Passo 1:] Mostrar para $n = 1$: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Logo, é válido para $n = 1$.
- ii) [Passo 2:] Suponhamos, por hipótese de indução, que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é verdadeira para $n = k$, para algum k qualquer, ou seja, $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
- iii) [Passo 3:] Devemos mostrar que é válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, concluímos que é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Atividade 1: 1-simplexo

Objetivo: Permitir que os alunos percebam, de forma lúdica e visual, um resultado matemático não trivial, conhecido como Lema de Sperner, vivenciando a beleza da matemática no princípio de indução finita em uma atividade exploratória e sem necessidade de cálculos complexos.

Materiais Necessários:

- Folhas com segmentos de reta desenhados, com subdivisões em pontos (bolinhas).
- Lápis de cor ou canetinhas (duas cores diferentes).

Passo a Passo:

1. Preparação

- Cada aluno recebe uma folha de atividade com segmentos de reta com duas extremidades, A e B .
- O aluno define duas cores para a atividade.

2. Colorindo os pontos

- O aluno define uma cor específica para a extremidade A .
- Os pontos internos restantes podem ser coloridos livremente, alterando cada cor quantas vezes desejarem e em qualquer ordem.

3. Identificando intervalos mágicos

- Um intervalo é chamado de mágico quando suas extremidades possuem cores diferentes.
- Os alunos devem contar quantos intervalos mágicos aparecem em cada tentativa de colorir.

4. Descoberta do padrão

- Analisar o comportamento das cores nas extremidades (A e B) quando são realizadas alterações em número ímpar.
- Analisar o comportamento das cores nas extremidades (A e B) quando são realizadas alterações em número par.
- Investigar a relação entre a paridade da quantidade de alterações (ímpar ou par) e as cores presentes nas extremidades.

Observação: A intenção deste passo é conduzir o aluno a observar que, quando o número de alterações realizadas for ímpar, as cores das extremidades (A e B) se apresentarão diferentes; já quando o número de alterações for par, as extremidades permanecerão com a mesma cor.

5. Discussão Final

- Explicar que esse padrão mostra uma regularidade matemática.
- Essa será a base para entender o que acontece em figuras de dimensões maiores.

Atividade 2: 2-simplexo

Materiais Necessários:

- Folha de atividade contendo um triângulo subdividido em triângulos menores, cujos vértices estão representados por círculos.
- Lápis de cor ou canetinhas (duas cores da atividade anterior e outra cor diferente).

Passo a Passo:

1. Preparação

- Cada aluno recebe um triângulo grande subdividido em triângulos menores.
- Os três vértices do triângulo grande devem ser coloridos com três cores diferentes: duas cores da atividade anterior e outra cor de escolha do aluno.

2. Colorindo os vértices

- Cada vértice do triângulo grande deve apresentar uma cor distinta.
- Pontos da fronteira do triângulo grande: colorir utilizando as cores dos vértices no lado do triângulo maior onde o ponto se encontra.
- Os pontos internos podem ser pintados livremente, escolhendo qualquer uma das três cores.

3. Identificando intervalos mágicos

- Um intervalo é chamado de mágico quando suas extremidades possuem as duas cores diferentes da atividade 1. A quantidade dos intervalos mágicos na fronteira denotaremos por (A) e a quantidade dos intervalos mágicos no interior por (B) .
- Um triângulo pequeno é chamado de mágico quando seus vértices possuem três cores diferentes. E denotaremos a quantidade deles por (R) .
- Um triângulo é chamado de quase mágico quando possui dois intervalos mágicos. E denotaremos a sua quantidade por (Q) .
- O aluno deve identificar e registrar a quantidade de triângulos mágicos, quase mágicos e intervalos mágicos na fronteira e no interior.

4. Descoberta do padrão

- Identificar e registrar quantos são os triângulos mágicos e quase mágicos.
- Identificar e registrar os intervalos mágicos na fronteira e no interior.
- Guiar o aluno até perceber que sempre aparece uma quantidade ímpar de triângulos mágicos.

5. Discussão Final

- Explicar que esse resultado é uma ilustração do Lema de Sperner tal que

$$2Q + R = A + 2B, \tag{4.1}$$

Raciocínio Lógico: A partir da Atividade 1, os alunos devem identificar que, no caso de um 1-simplexo, independentemente do número de subdivisões, sempre haverá uma quantidade ímpar de intervalos mágicos na fronteira, ou seja, A é ímpar. A seguir, utilizando a equação (3.1), deve implicar que R também será sempre ímpar.

6. Reforçar que, da mesma forma que no segmento (1-simplexo), também aqui surge um padrão com quantidade ímpar de simplexos mágicos.
7. Este padrão pode ser generalizado para dimensões maiores utilizando o princípio da indução.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho, a partir da revisão dos estudos teóricos para a fundamentação matemática da Teoria dos Jogos, com foco nos teoremas de Kakutani e Nash, desenvolvemos um material didático capaz de aplicar esses conceitos no campo da Matemática e da Economia. Ao longo da construção, buscamos não apenas apresentar os conceitos formais e suas demonstrações, mas também propor uma abordagem didática que favorece a compreensão dos principais conteúdos.

A partir dessa perspectiva, o material produzido teve como objetivo contribuir para o preenchimento de lacunas existentes no ensino, oferecendo assim, explicações que possam promover o nível de formação dos estudantes e garantir uma aprendizagem cada vez mais efetiva. Sendo assim, ao integrar o rigor matemático e a dimensão pedagógica, sendo o afeto aliado ao aprendizado, buscamos, por meio deste, fomentar um ensino mais significativo, dinâmico e engajador.

Como resultado, e através do planejamento das atividades propostas no material, demonstramos que o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani e o Equilíbrio de Nash contribuem para aplicações tanto no campo da Economia quanto da Matemática. Esses, por sua vez, articulam o conteúdo da Teoria dos Jogos e os princípios didáticos do processo de ensino e aprendizagem estimulando o raciocínio lógico e a autonomia intelectual dos estudantes. Dessa forma, pretendemos que o material apresentado sirva de apoio para docentes e discentes apoiando-se em novas abordagens que possam agregar a formalização matemática e a ludicidade no processo de ensino.

Referências Bibliográficas

- [1] CHACÓN, I. M. G. Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 43, n. 2, p. 149–168, 2000.
- [2] CHACÓN, I. M. G. *Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática*. São Paulo: Cortez, 2003.
- [3] DAMÁSIO, António R. *E o cérebro criou o homem*. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
- [4] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos da Matemática Elementar: Vol. 1 — Conjuntos e Funções*. 3. ed. São Paulo: Atual, 1997.
- [5] IEZZI, Gelson; DOMINGUES, Hygino H. *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual, 1998.
- [6] GONZÁLEZ-DÍAZ, Julio; GARCÍA-JURADO, Ignacio; FIESTRAS-JANEIRO, M. Gloria. *An introductory course on mathematical game theory*. Providence: American Mathematical Society, 2010. (Graduate Studies in Mathematics, v. 115). ISBN 978-0-8218-5151-7.
- [7] LIMA, Elon Lages. *Análise Real: Volume 3 – Análise Vetorial*. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.
- [8] LIMA, Ronaldo Freire de. *Topologia e Análise do Espaço \mathbb{R}^n* . Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- [9] MOREIRA, M.D.D. *Matemática@XXI: Conexões Surpreendentes*. 2016. Tese (Doutorado). Faculdade de Ciências da Universidade de Porto, 2016.
- [10] PROJETO KLEIN EM LÍNGUA PORTUGUESA. *Chamada de contribuições para o Projeto Klein*. [S. l.]: Comissão Coordenadora do Projeto Klein, 2011. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/files/klein.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2025.
- [11] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa*. **Revista do Professor de Matemática**, n. 93, p. 26–27, 2017. Disponível em: <https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/Projeto%20Klein.pdf>. Acesso em: 7 nov. 2025.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Folha de Atividade Explorando o Lema de Sperner com cores	59
APÊNDICE B: Apêndice B: Folha de Atividade Explorando o Lema de Sperner com cores e Princípio de Indução.	61

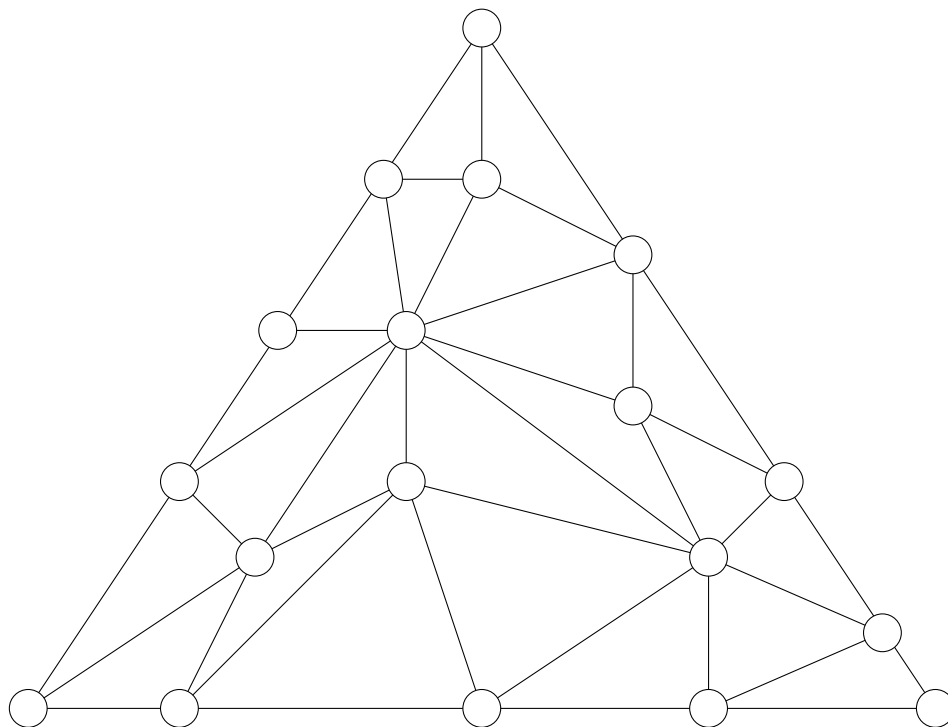
Apêndice A: Folha de Atividade

Explorando o Lema de Sperner com cores

Nome: _____ Data: _____
Escola Estadual _____ Disciplina: Matemática

Instruções para atividade

- Colorir os vértices do triângulo grande com três cores diferentes.
- Pontos da fronteira do triângulo grande: colorir utilizando as cores dos vértices no lado do triângulo maior onde o ponto se encontra.
- Pontos internos: colorir livremente, utilizando qualquer uma das três cores disponíveis.
- Identificar e destacar todos os triângulos menores cujos vértices apresentem as três cores distintas. Tais triângulos serão denominados **triângulos mágicos**.
- Ao final, observar e registrar quantos triângulos mágicos foram identificados.



Responda às perguntas abaixo:

1. Quantos triângulos mágicos você encontrou?
2. Você percebeu algum padrão na quantidade de triângulos?
3. Como você se sentiu realizando esta atividade? (Curioso, satisfeito, surpreso, etc.)

Apêndice B: Folha de Atividade

Explorando o Lema de Sperner com cores e Princípio de Indução

Nome: _____ Data: _____
Escola Estadual _____ Disciplina: Matemática

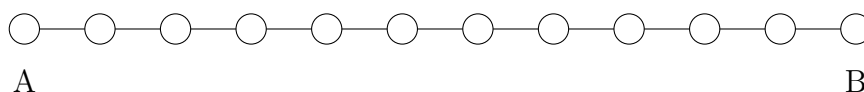
Atividade 1

Instruções para atividade 1.1

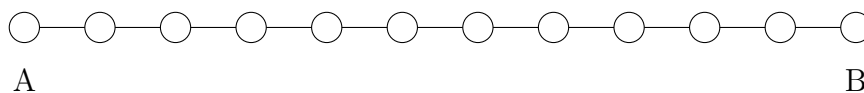
- Defina duas cores para utilizar.
- Defina a cor da extremidade A e pinte os pontos restantes livremente.
- Após colorir, identifique quantos intervalos mágicos surgiram e verifique se as cores das extremidades A e B coincidem.

Um intervalo é chamado de **intervalo mágico** quando suas extremidades possuem cores diferentes.

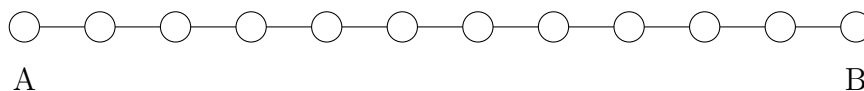
1)



2)



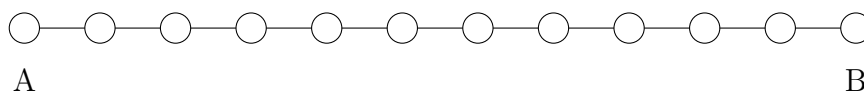
3)



Quantidade de intervalos Mágicos: (1) _____ (2) _____ (3) _____
 Cores das extremidades coincidem: (Sim ou Não) (1) _____ (2) _____ (3) _____

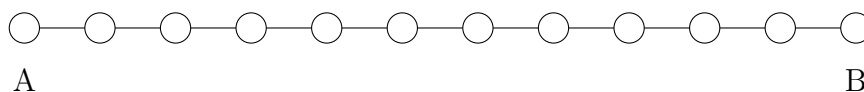
Instruções para atividade 1.2

- Defina a cor da extremidade A . Pinte os pontos restantes, variando as cores um número ímpar de vezes.



Quantidade de intervalos mágicos: _____
 Cores das extremidades coincidem: _____

- Defina a cor da extremidade A . Pinte os pontos restantes, variando as cores um número par de vezes.



Quantidade de intervalos mágicos: _____
 Cores das extremidades coincidem: _____

Responda às perguntas abaixo:

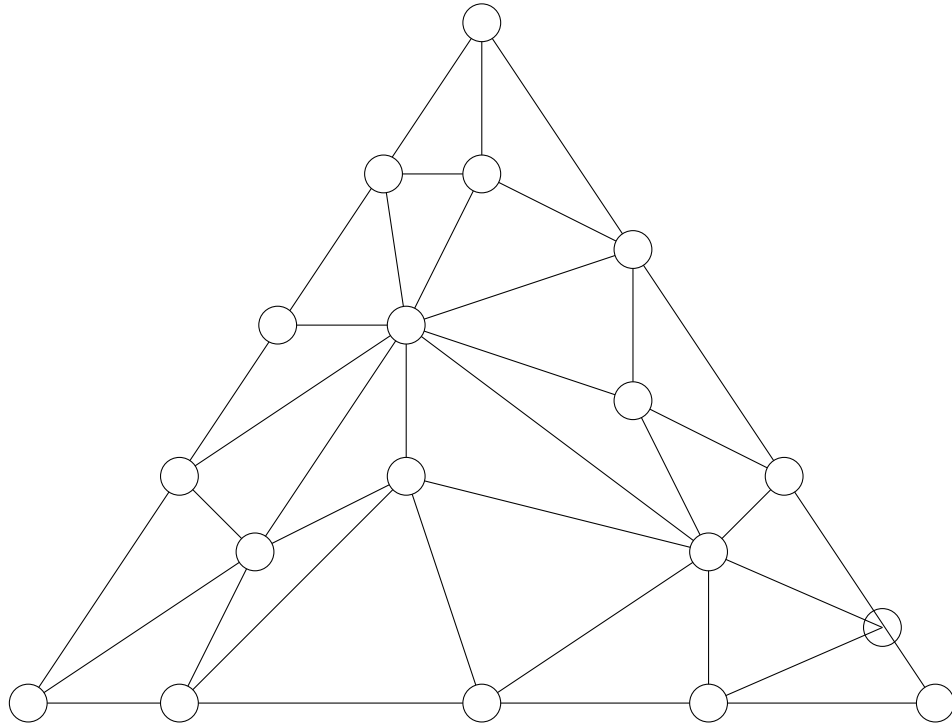
1. O que acontece com o números de intervalos mágicos quando A e B têm a mesma cor? E quando têm cores diferentes?
2. Você conseguiu identificar algum padrão na atividade desenvolvida? Se sim, qual?

Atividade 2

Instruções para atividade 2

- Colorir os vértices do triângulo com três cores diferentes, utilizando as duas cores da atividade 1 e uma outra cor diferente.
- Colorir os pontos da fronteira de acordo com as cores dos vértices nas extremidades de cada lado, podendo usar qualquer quantidade de cada cor e em qualquer ordem.
- Colorir os pontos internos livremente com qualquer uma das três cores escolhidas.
- Identificar e destacar todos os triângulos menores cujos vértices apresentem as três cores distintas. Tais triângulos serão denominados **triângulos mágicos** (R).
- Identificar e registrar todos os triângulos menores que contenham os intervalos mágicos da atividade anterior. Esses triângulos serão denominados **quase mágicos** (Q).

- Identificar e registrar todos os intervalos mágicos da fronteira (A) e todos os intervalos mágicos no interior (B).



Responda às perguntas:

1. Anote abaixo as quantidades de triângulos mágicos (R), quase-mágicos (Q), intervalos mágicos na fronteira (A) e no interior (B).

(Q) _____ (R) _____ (A) _____ (B) _____

2. **Equação do Lema de Sperner:** $2Q + R = 2B + A$

Com base nos resultados obtidos na Atividade 2, preencha a equação do Lema de Sperner com os valores correspondentes a Q , R , B e A , de modo a verificar se os valores satisfazem a igualdade do Lema de Sperner.

$$2(\text{_____}) + (\text{_____}) = 2(\text{_____}) + (\text{_____})$$

3. Você conseguiu identificar a relação entre os triângulos mágicos e intervalos mágicos?
4. Por fim, suponha que você conheça os valores de Q , B e A . O que pode-se dizer sobre o valor de R (triângulos mágicos)?

Dica: Experimente testar valores aleatórios para Q , B e A e observe o padrão dos valores de R .