

**LIDIANE MARIA FERRAZ ROSA**

**PROBABILIDADE DO ALARME FALSO NO GRÁFICO DE CONTROLE  
EWMA PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSO  
AUTOCORRELACIONADO**

**Dissertação apresentada à Universidade  
Federal de Viçosa, como parte das exigências  
do Programa de Pós-Graduação em  
Estatística Aplicada e Biometria, para  
obtenção do título de *Magister Scientiae*.**

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2012**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

R788p  
2012

Rosa, Lidiane Maria Ferraz, 1978-  
Probabilidade do alarme falso no gráfico de controle EWMA  
para o monitoramento de processo autocorrelacionado /  
Lidiane Maria Ferraz Rosa. – Viçosa, MG, 2012.  
viii, 48f. : il. ; 29cm.

Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 47-48

1. Controle de qualidade. 2. Probabilidades. 3. Simulação  
(Computadores). 4. Desempenho. I. Universidade Federal de  
Viçosa. II. Título.

CDD 22. ed. 519.86

**LIDIANE MARIA FERRAZ ROSA**

**PROBABILIDADE DO ALARME FALSO NO GRÁFICO DE CONTROLE EWMA  
PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSO AUTOCORRELACIONADO**

**Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.**

**APROVADA:** 24 de Julho de 2012

---

**Gérson Rodrigues dos Santos**

---

**Eric Batista Ferreira**

---

**José Ivo Ribeiro Júnior  
(Orientador)**

*Ao meu saudoso e amado pai, Francisco.  
À minha maior amiga e amada mãe, Fátima.  
Aos meus queridos irmãos, Leiliane e Luthiane.  
Ao meu esposo e companheiro, Carlos.*

***“Porque família é tudo.”***

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, por se fazer presente em minha história de vida.

Aos meus pais, por me darem a vida e me ensinarem a vivê-la com dignidade, obrigada; aos meus irmãos, que sempre estiveram próximos e pelo apoio; e ao meu esposo, pela dedicação e por sempre me reerguer nos momentos mais difíceis.

À Universidade Federal de Viçosa, que me acolheu como estudante.

Ao meu professor orientador e amigo, José Ivo Ribeiro Júnior, pela paciência, pelo apoio e pela disponibilidade no desenvolvimento deste trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Viçosa.

Aos meus amigos de mestrado, Renata, Camila e Wagner, pelos momentos de descontração e estudos que passamos juntos.

Aos funcionários do DET, Anita Paiva e Joel Teixeira, por facilitar as atividades burocráticas do PPESTBIO/UFV.

Aos professores membros da banca, Gérson Rodrigues dos Santos e Eric Batista Ferreira, pelas críticas e sugestões.

# SUMÁRIO

	<b>Página</b>
RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	3
2.1. Gráficos de controle.....	3
2.2. Gráfico de controle da Média Móvel Ponderada Exponencialmente.....	7
2.3. Desempenho do EWMA.....	12
2.3.1. Alarme falso.....	13
2.3.2. Alarme verdadeiro.....	14
2.4. Processo autocorrelacionado.....	18
3. MATERIAL E MÉTODOS.....	24
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	31
4.1. Probabilidade do alarme falso.....	31
4.2. Recomendações para a construção do EWMA.....	38
4.3. Descrição do Processo Autocorrelacionado.....	42
5. CONCLUSÕES.....	45
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	46

## RESUMO

ROSA, Lidiane Maria Ferraz Rosa, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2012. **Probabilidade do alarme falso no gráfico de controle EWMA para o monitoramento de processo autocorrelacionado.** Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior. Coorientadores: Fabyano Fonseca e Silva e Gérson Rodrigues dos Santos.

O presente trabalho teve por objetivo estimar a probabilidade do alarme falso provocada pelo gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA) em um processo autocorrelacionado ao longo dos subgrupos racionais, em função de diferentes combinações entre os valores dos termos: número de desvios-padrão ( $2 \leq k \leq 6$ ), peso do subgrupo racional ( $0,01 \leq \lambda \leq 1$ ) e autocorrelação de 1ª ordem ( $\rho$ ). Para estudá-los, foram simulados dados de uma variável aleatória  $Y$ , sob distribuição normal com média  $\mu_0 = 0$  e desvio-padrão  $\sigma_0 = 1$  para um processo sob controle estatístico para até 50 subgrupos racionais com observações individuais ( $n = 1$ ). Para a obtenção dos valores de  $Y$  ao longo dos 50 subgrupos racionais, foram realizadas dez situações diferentes de acordo com as seguintes autocorrelações de 1ª ordem ( $\rho = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ ). Foram realizadas 1.000 simulações para cada situação. A probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ) diminuiu com os respectivos aumentos de  $k$  e  $\lambda$ . Por outro lado, essa probabilidade aumentou de acordo com o aumento de  $\rho$ . Portanto, caso a variável resposta  $Y$  seja monitorada pelo gráfico de controle EWMA em um processo autocorrelacionado, torna-se necessário aumentar os valores de  $k$  e de  $\lambda$ , à medida que a autocorrelação aumentar de grau. Isso implica em alargar os limites de controle, em função da adoção de valores de  $k$  acima de três, para que as probabilidades dos alarmes falsos possam se situar em níveis baixos, como, por exemplo, para valores menores do que 0,01. Para conferir  $\alpha$  igual ou inferior a 0,1, 0,05 ou 0,01, de acordo com a autocorrelação de 1ª ordem, recomendaram-se diferentes combinações de  $k$  e  $\lambda$ . Para  $\rho \leq 0,6$ , recomendou-se  $\lambda = 0,01$  combinado com valores de  $k$  aproximadamente iguais a 2,5 ( $\rho = 0$ ), 2,7 ( $\rho = 0,1$ ), 3,0 ( $\rho = 0,2$ ), 3,3 ( $\rho = 0,3$ ), 3,7 ( $\rho = 0,4$ ), 4,4 ( $\rho = 0,5$ ) e 5,3 ( $\rho = 0,6$ ). Nessas situações, o efeito do  $\lambda$  sobre a diminuição do  $\alpha$  foi pequena. Portanto, poderia se trabalhar com quaisquer valores até a unidade, sem haver a necessidade de mudar muito a magnitude do  $k$ . Porém, apesar da diminuição do  $\lambda$  implicar no aumento do  $k$  para manter a mesma probabilidade do alarme falso, tal decisão de indicar  $\lambda = 0,01$  ocorreu pelo fato de buscar um maior distanciamento do

gráfico de controle de Shewhart, que é igual ao EWMA para  $\lambda = 1$ . No entanto, para  $0,7 \leq \rho \leq 0,9$ , foi necessário aumentar também o valor de  $\lambda$ , juntamente com o de  $k$ , para que a probabilidade do alarme falso fosse baixa. Nestes casos, foram estabelecidas as seguintes recomendações aproximadas de  $\lambda$ , para  $k = 6$ :  $0,5$  ( $\rho = 0,7$ ),  $0,6$  ( $\rho = 0,8$ ) e  $0,95$  ( $\rho = 0,9$ ). Tais conclusões vão de encontro às de Costa *et al.* (2004) que propuseram o alargamento dos limites de controle, dado que a autocorrelação propicia uma estimativa da variabilidade aleatória provocada pelo processo. Neste trabalho, o alargamento do limite de controle ocorreu devido à imposição de valores de  $k$  maiores do que três durante a construção do gráfico de controle EWMA.

## ABSTRACT

ROSA, Lidiane Maria Ferraz Rosa, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2012. **Probability of false alarm in the EWMA control graph for monitoring an autocorrelated process.** Adviser: José Ivo Ribeiro Júnior. Co-Adviser: Fabyano Fonseca e Silva and Gérson Rodrigues dos Santos.

This work aimed to estimate the probability of false alarm caused by the control graph of the exponentially weighted moving average (EWMA) in an autocorrelated process along rational subgroups, using different combinations of the values of the following terms: number of standard deviations ( $2 \leq k \leq 6$ ), weight of the rational subgroup ( $0.01 \leq \lambda \leq 1$ ) and first order correlation ( $\rho$ ). To study these values, data of a random variable  $Y$  were simulated, under normal distribution with average  $\mu_0 = 0$  and standard deviation  $\sigma_0 = 1$  for a statistically-controlled process of up to 50 rational subgroups, with individual observations ( $n = 1$ ). To obtain the values of  $Y$  along the 50 rational subgroups, 10 different situations were performed, according to the following first order autocorrelations ( $\rho = 0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9$ ). A total of 1.000 simulations were carried out for each situation. A probability of false alarm ( $\alpha$ ) decreased with the respective increase of  $k$  and  $\lambda$ . On the other hand, this probability increased with the increase of  $\rho$ . Thus, in case the response variable  $Y$  is monitored by the EWMA control graph under an autocorrelated process, it is necessary to increase the values of  $k$  and  $\lambda$ , as the autocorrelation increases in degree. This requires widening the control limits by adopting values of  $k$  above three, so that the false alarm probabilities may be found at low levels, such as values lower than 0.01. To confirm  $\alpha$  equal or lower than 0.1, 0.05, or 0.01, according to the first order autocorrelation, different combinations of  $k$  and  $\lambda$  are recommended. For  $\rho \leq 0.6$ ,  $\lambda = 0.01$  was recommended, combined with values of  $k$  approximately equal to 2.5 ( $\rho = 0$ ), 2.7 ( $\rho = 0.1$ ), 3.0 ( $\rho = 0.2$ ), 3.3 ( $\rho = 0.3$ ), 3.7 ( $\rho = 0.4$ ), 4.4 ( $\rho = 0.5$ ) and 5.3 ( $\rho = 0.6$ ). Under these situations, the effect of  $\lambda$  on the decrease of  $\alpha$  was small. Thus, one could use any value up to the unit, without the need to change the magnitude of  $k$  too much. However, despite the fact that the decrease of  $\lambda$  leads to the increase of  $k$  in order to maintain the same false alarm probability, such decision to indicate  $\lambda = 0.01$  was taken to search for a greater distancing from the Shewhart control graph, which is equal to EWMA for  $\lambda =$

1. On the other hand, for  $0.7 \leq \rho \leq 0.9$ , it was also necessary to increase the values of  $\lambda$ , together with that of  $k$ , to obtain a low false alarm probability. In such cases, the following recommendations approximate of  $\lambda$ , were established for  $k = 6$ :  $0.5$  ( $\rho = 0.7$ ),  $0.6$  ( $\rho = 0.8$ ) and  $0.95$  ( $\rho = 0.9$ ). Such conclusions agree with those by Costa *et al.* (2004), who proposed widening the control limits, since autocorrelation provides an estimate of the random variability caused by the process. In this work, widening the control limits occurred due to the imposition of  $k$  values higher than three during the design of the EWMA control graph.

# 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a melhoria e o monitoramento da qualidade têm-se tornado uma preocupação e uma necessidade para muitas organizações (MONTGOMERY; RUNGER, 2003). Dentro do contexto de qualidade total, o controle estatístico se refere a um conjunto de ferramentas usadas com o objetivo de possibilitar a intervenção racional num sistema de produção, a fim de conferir-lhe qualidade (WERKEMA, 1995; MUNIZ; OLIVEIRA, 2000). Entre as ferramentas que compõem o controle estatístico de qualidade, os gráficos de controle são simples e eficientes no monitoramento da média e variabilidade das características de qualidade.

Dentre as ferramentas do controle estatístico de processos, os gráficos de controle são as que merecem destaque pela sua simplicidade operacional e efetividade na detecção de problemas no processo. São utilizados para o monitoramento da média e variabilidade de processos. De acordo com Montgomery (2004), os gráficos de controle são métodos comprovados para a melhoria da produtividade, são efetivos na prevenção de defeitos, previnem ajustes desnecessários no processo, fornecem informações confiáveis para o diagnóstico do desempenho e para a capacidade de processos.

Existem diferentes tipos de gráficos de controle com o mesmo objetivo, porém é importante conhecer o desempenho e a rapidez com que cada um deles detecta alterações reais no processo. Segundo Costa *et al.* (2004), a análise da relação entre os custos de amostragem e as interferências no processo devem nortear a escolha do tamanho dos subgrupos racionais, do intervalo de tempo entre eles, do tipo e dos valores dos termos utilizados nas construções dos gráficos de controle, como também no posicionamento dos limites de controle. Avaliando a escolha dos valores desses termos no instante da construção de um gráfico de controle, outros fatores também devem ser considerados, como a minimização do número de alarmes falsos.

O gráfico de controle EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) possui a vantagem de poder ser sensível a pequenas mudanças no processo. Neste gráfico, a decisão sobre o processo é baseada na informação de cada subgrupo racional com um percentual de peso dos anteriores. Dessa forma, pode-se conseguir detectar menores desajustes que possam estar ocorrendo na média da variável resposta  $Y$ , em relação ao gráfico de controle de Shewhart. Os termos requeridos para a sua construção são: número de subgrupos racionais ( $m$ ), número de repetições por subgrupo racional ( $n$ ),

número de desvios-padrão da variável aleatória ( $k$ ) e  $\lambda$  (peso do subgrupo racional) dentro do intervalo  $0 < \lambda \leq I$ .

Para que o EWMA possa contribuir, de forma eficiente, para o monitoramento de uma característica de qualidade, torna-se necessário combinar adequadamente os valores dos termos citados anteriormente e que as pressuposições, de normalidade e de independência dos valores observados em um processo sob controle estatístico, sejam satisfeitas.

No entanto, a ausência da independência, além de ser a que mais compromete o desempenho dos gráficos de controle, é a que mais ocorre, principalmente nos dias de hoje, com as características de qualidade monitoradas. De acordo com Claro *et al.* (2007), essa ausência na prática é frequentemente violada, pois a maioria dos processos apresenta autocorrelação. Por isso, a necessidade de conduzir um trabalho, com o propósito de verificar o desempenho de um determinado tipo de gráfico de controle, como, por exemplo, o EWMA sobre monitoramento de uma variável resposta monitorada durante um processo autocorrelacionado, por meio da simulação de dados.

O presente trabalho tem por objetivo verificar o desempenho do gráfico de controle EWMA sobre monitoramento de uma variável resposta durante um processo com observações individuais por subgrupo racional ( $n = I$ ) em que apresente valores de uma variável resposta, independentes ou autocorrelacionados.

De forma específica, o presente trabalho tem os seguintes objetivos:

- determinar as probabilidades dos alarmes falsos proporcionadas pelo gráfico de controle EWMA construído com observações independentes e autocorrelacionadas, em função dos termos utilizados na sua construção;

- verificar as influências dos termos  $k$  (número de desvios-padrão da variável aleatória em relação à linha média que determina a variação aleatória) e  $\lambda$  (peso do subgrupo racional) e  $0 < \lambda \leq I$ , sobre as probabilidades dos alarmes falsos em processos com observações independentes e autocorrelacionadas; e

- recomendar valores de  $k$  e  $\lambda$  que proporcionem probabilidades baixas de alarmes falsos, de acordo com os valores da autocorrelação de 1ª ordem ( $\rho$ ).

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1. Gráficos de controle

Historicamente, o planejamento e o controle de processos começaram a ser estruturados como uma área de avaliação da qualidade com base na ampla utilização de seus instrumentos fundamentais, quais sejam, os bem conhecidos gráficos de controle.

Os gráficos de controle são esquemas visuais que foram desenvolvidos por Walter Shewhart, na década de 1920, que se preocupavam em estudar a variabilidade dos processos. O gráfico de controle representa um dos principais métodos do controle estatístico de processos (CEP), para o monitoramento da média e da variabilidade inerentes às características de qualidade avaliadas, pois raramente elas alcançarão uma variabilidade nula.

Segundo Gallus *et al.* (1986), *apud* WILLIAMS *et al.* (1992), o objetivo principal do uso do controle de qualidade consiste no monitoramento. Com isso vários métodos têm sido desenvolvidos a fim de detectar mudanças em situações raras, como, por exemplo, um produto mal acabado ou a detecção de um indício de epidemia. Quando se faz essa investigação, é possível que ações corretivas possam ser empreendidas antes que muitas unidades, que não estejam de acordo com as especificações, sejam fabricadas. Assim, o gráfico de controle permite distinguir dois tipos de causas de variação que possam ocorrer durante um processo.

Segundo Shewhart, em qualquer processo de produção, independentemente do quanto seja bem projetado, uma certa quantidade de variabilidade inerente ou natural, provocada por causas comuns ou aleatórias, sempre existirá. Neste caso, pode-se dizer que o processo está sob controle estatístico, apresentando assim um comportamento estável ou previsível (WERKEMA, 1995).

Porém, outras causas de variação, chamadas de especiais, poderão surgir esporadicamente ou permanentemente, devido a situações particulares que fazem com que o processo se comporte de um modo completamente diferente do usual, o que poderá resultar em um deslocamento do seu nível de qualidade. Quando um processo está operando sob a atuação de causas especiais de variação, diz-se que ele está fora de controle estatístico (WERKEMA, 1995).

Essa forma de monitoramento é comum na indústria, pois serve para distinguir causas comuns de causas especiais de variação, identificar o instante em que o processo foi alterado, entender a causa-raiz do desajuste e melhorar o processo, prevenindo reincidências.

Portanto, o principal objetivo do gráfico de controle é diferenciar a ocorrência de causas especiais, que provocam mudanças importantes no processo, daquelas provocadas por causas comuns ou aleatórias e quantificadas pelo desvio-padrão.

O gráfico de controle consiste na representação das flutuações das estimativas de um determinado parâmetro ( $\theta$ ) de uma característica de qualidade ao longo do tempo, fornecidas pelo seu estimador ( $\hat{\theta}$ ), de uma linha central ou média ( $LM$ ) e dos limites inferior ( $LIC$ ) e superior de controle ( $LSC$ ).

Essas flutuações serão associadas a causas aleatórias, quando as estimativas encontrarem-se aleatoriamente dispersas entre os dois limites de controle. Portanto, entende-se que o processo estará sob controle estatístico ou apresentará estabilidade, quando todos os pontos traçados no gráfico estiverem entre os dois limites de controle e com disposição aleatória em torno da linha média.

Como não se sabe, a priori, se o processo permanecerá ou não sob controle estatístico durante todo o tempo de funcionamento, são retiradas amostras menores, denominadas de subgrupos racionais, em intervalos de tempo pré-definidos. Devido a isso, as estimativas de  $\mu$  e  $\sigma$  serão obtidas por meio das médias das suas estimativas obtidas em cada subgrupo racional. Caso houvesse a possibilidade de inferir que o processo fosse permanecer sob controle ao longo de todo o tempo de operação, então esses parâmetros poderiam ser estimados diretamente a partir de todos os dados coletados.

Os subgrupos racionais, consistem de itens que foram produzidos em intervalos de tempo relativamente curtos, nos quais todos os itens foram produzidos sob condições onde somente causas comuns são responsáveis pela variação de um processo. Eles deverão ser determinados com o objetivo de buscar a maximização da variabilidade devida às causas aleatórias e a minimização da possibilidade da presença de variabilidade devida às causas especiais, dentro de cada subgrupo racional, em relação aos valores da característica de qualidade. Já as causas especiais não devem aparecer dentro dos subgrupos racionais e sim entre eles.

A partir daí, os limites de controle poderão ser calculados e tenderão a representar limites para a variação aleatória e não para a variação especial.

Quando o processo estiver sob controle estatístico para a média e para a variabilidade da característica de qualidade, então as  $m$  diferenças das estimativas de  $\mu$  e  $\sigma$  entre os subgrupos racionais e situadas entre os limites de controle, serão consideradas como aleatórias. Portanto, o processo se manterá estável para os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  de uma mesma distribuição de probabilidades, para  $i = 1, 2, \dots, m$  subgrupos racionais representados por um intervalo de tempo.

Caso contrário, se o processo estiver fora de controle estatístico, então pelo menos uma estimativa de  $\mu$  e, ou, de  $\sigma$  de pelo menos um subgrupo racional se encontrará fora dos limites de controle e, conseqüentemente, pelo menos uma diferença entre as estimativas será considerada como especial. Portanto, o processo não se manterá estável para os parâmetros  $\mu$  e, ou,  $\sigma$  e, conseqüentemente, haverá pelo menos uma distribuição de probabilidades diferente das demais.

Segundo Montgomery e Runger (2003), para determinar a linha central e os limites de controle, deve-se seguir um modelo geral, em que  $\hat{\theta}$  é a estatística amostral, que representa a característica de qualidade de interesse,  $\mu_{\hat{\theta}}$  é a média de  $\hat{\theta}$  e  $\sigma_{\hat{\theta}}$  é o desvio-padrão de  $\hat{\theta}$ . O limite superior de controle (*LSC*), a linha média (*LM*) e o limite inferior de controle (*LIC*) são dados por:

$$\begin{aligned}LIC &= \mu_{\hat{\theta}} - k\sigma_{\hat{\theta}} \\LM &= \mu_{\hat{\theta}} \\LSC &= \mu_{\hat{\theta}} + k\sigma_{\hat{\theta}}\end{aligned}$$

O valor de  $k$  refere-se ao número de desvios-padrão do limite de controle, utilizado para conter a variação aleatória e, usualmente, é estabelecido o valor igual a 3. No entanto, outros valores de  $k$  que sejam de interesse também podem ser utilizados. Para valores de  $k$  iguais a 3, 2 e 1 considera-se que 99,73%, 95,45% e 68,27%, respectivamente, dos valores observados estarão dentro do intervalo compreendido pelos *LIC* e *LSC*, sob causas aleatórias de variação e com base na distribuição normal. Além da normalidade, será necessário que as observações da característica de qualidade de interesse sejam independentes para a correta aplicação dos gráficos de controle. Já para a *LM* ( $\mu_{\hat{\theta}}$ ), é interessante coincidi-la com a média de controle ( $\mu_0$ ), cujo desvio-

padrão do estimador ( $\sigma_{\hat{\theta}}$ ) depende do desvio-padrão dos valores da característica de qualidade ( $\sigma$ ).

De acordo com Costa *et al.* (2004), a regra de decisão proposta por Shewhart era bastante simples: um ponto amostral dentro dos limites de controle de  $3\sigma$  significa que não se deve intervir no processo e, um ponto fora desses limites significa que deve-se intervir no processo em busca de causas especiais. No entanto, após a criação do gráfico de controle, surgiram novas regras de decisão (regras suplementares), todas com o propósito de acelerar a detecção de alterações no processo.

Uma regra de decisão suplementar é a periodicidade ou a tendência de quatro pontos consecutivos alternando-se para cima e para baixo ou de seis pontos consecutivos aumentando ou decrescendo. Uma sequência ou deslocamento apresenta uma configuração em que nove pontos consecutivos do gráfico de controle aparecem em apenas um dos lados da LM, que indica uma mudança de nível de deslocamento do processo. Outra regra suplementar acusa o processo como fora de controle no sistema  $3\sigma$ , quando há a ocorrência de dois de três pontos consecutivos entre os limites de  $\mu + 2\sigma$  e  $\mu + 3\sigma$  ou entre  $\mu - 2\sigma$  e  $\mu - 3\sigma$  e na ocorrência de quatro de cinco pontos consecutivos entre os limites de  $\mu + \sigma$  e  $\mu + 2\sigma$  ou entre  $\mu - \sigma$  e  $\mu - 2\sigma$ , apesar desses pontos ainda estarem dentro dos limites de controle  $\mu \pm 3\sigma$ . Também pode-se considerar o processo como fora de controle na ocorrência de cinco pontos consecutivos até os limites de  $\mu \pm 1\sigma$ , o que confere uma variabilidade menor do que a esperada (MONTGOMERY, 2004).

De acordo com Woodall e Montgomery (1999), o gráfico de controle é muito utilizado devido à simplicidade operacional, à efetividade na detecção de problemas no processo e ao sucesso no monitoramento do desempenho dos mais diversos processos industriais. Ainda, segundo Alwan e Roberts (1995) e Montgomery (2004), para a utilização dos gráficos de controle, é necessário assumir que os dados do processo sejam independentes e normalmente distribuídos. Porém, essas suposições nem sempre são manifestadas na prática, pois existem processos que produzem, naturalmente, dados autocorrelacionados e outros que produzem, aleatoriamente, dados que não se ajustam à distribuição normal de probabilidades.

Desse modo, se os valores aleatórios de uma característica de qualidade (variável resposta  $Y$ ) forem contínuos e seguirem uma distribuição normal de probabilidades,

com os parâmetros média ( $\mu$ ) e desvio-padrão ( $\sigma$ ), a função densidade de probabilidade será dada por:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ para } -\infty \leq y \leq \infty, -\infty \leq \mu \leq \infty \text{ e } \sigma > 0.$$

A distribuição normal é uma das mais importantes distribuições de probabilidades, uma vez que muitas das variáveis aleatórias estudadas são modeladas por ela. A representação gráfica é em forma de sino, sendo o posicionamento em relação à abscissa  $y$  determinada pela média  $\mu$  e o achatamento em relação à ordenada  $f(y)$ , pelo desvio-padrão  $\sigma$ . A distribuição normal apresenta as seguintes propriedades:  $f(y)$  possui um ponto de máximo para  $y = \mu$ , tem dois pontos de inflexões cujas abscissas valem  $\mu \pm \sigma$ , é simétrica em relação a  $y = \mu$  e tende a zero quando  $y$  tende a  $\pm \infty$ .

Além da normalidade, é necessário que os valores aleatórios sejam independentes, ou seja, que não haja dependência ou autocorrelação entre eles na defasagem  $p(\rho_p)$ . A autocorrelação é uma medida de correlação entre os valores de uma mesma variável aleatória defasados em  $k$  observações.

Portanto as regras de Shewhart e suplementares só devem ser utilizadas para a detecção de descontrole no processo quando o gráfico de controle for construído na presença de suas pressuposições satisfeitas, ou seja, com dados independentes e normalmente distribuídos.

## 2.2. Gráfico de controle da Média Móvel Ponderada Exponencialmente

O gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente (*Exponentially Weighted Moving Average – EWMA*) é escolhido quando se deseja detectar pequenos deslocamentos na média do processo. Ele tem como objetivo suprir a deficiência apresentada pela carta de Shewhart, ou seja, incorporar diretamente o comportamento passado no ponto presente. Esse gráfico é comumente utilizado em observações individuais ( $n = 1$ ), porém pode ser utilizado em subgrupos racionais que contêm duas ou mais repetições ( $n \geq 2$ ) de tamanhos constantes ( $n$ ) ou variáveis ( $n_i$ ), para o monitoramento da média.

No gráfico de controle EWMA, a decisão sobre o processo está baseada na informação de cada subgrupo racional com um percentual de peso dos anteriores. Dessa

forma, pode-se conseguir detectar menores desajustes que estejam ocorrendo na média da variável resposta  $Y$ , em relação ao gráfico de controle de Shewhart.

Na literatura, são apresentados alguns trabalhos e revisões que relatam a importância do gráfico de controle EWMA, dentre os quais são citados os seguintes: King (1995), Costa *et al.* (2004), Montgomery (2004), Hines *et al.* (2006) e Ribeiro Júnior *et al.* (2006).

Neste gráfico de controle, o estimador  $\hat{\theta}$  é representado pela estatística EWMA ( $W$ ), obtida através da seguinte expressão:

$$W_i = \lambda \bar{Y}_i + (1 - \lambda)W_{i-1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m,$$

em que

$\lambda$  = peso do subgrupo racional ( $0 < \lambda \leq 1$ ); e

$\bar{Y}_i$  = estimador da média de  $Y$  no subgrupo racional  $i$ .

A linha média e os limites de controle para cada subgrupo racional  $i$  determinados em função dos parâmetros  $\mu_W$  e  $\sigma_{W_i}$ , são dados por:

$$LIC_i = \mu_W - k\sigma_{W_i};$$

$$LM = \mu_W;$$

$$LSC_i = \mu_W + k\sigma_{W_i}$$

em que

$$\mu_W = \mu_Y;$$

$$\sigma_{W_i} = \sigma_{\bar{Y}} \sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}},$$

em que

$$\sigma_{\bar{Y}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}, \text{ para subgrupos racionais de tamanhos constantes;}$$

$$\sigma_{\bar{Y}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n_i}}, \text{ para subgrupos racionais de tamanhos variáveis;}$$

$\mu_Y$  = média paramétrica geral de  $Y$ ;

$\sigma_Y$  = desvio-padrão paramétrico de  $Y$ ; e

$n_i$  = número de repetições do subgrupo racional  $i$ .

Para construção do gráfico EWMA, o desvio-padrão ( $\sigma_y$ ) pode ser substituído por especificações técnicas ou de controles ( $\sigma_0$ ) ou ser estimado por meio dos dados amostrais. Quando são utilizadas observações individuais ( $n = 1$ ) por subgrupo racional, o estimador de  $\sigma_y$  é obtido por:

$$S_y = \frac{\overline{AM}}{d_2}$$

em que,

$\overline{AM}$  = média amostral da amplitude móvel.

$d_2$  = constante tabelada em função do tamanho  $n$  do subgrupo racional e é igual a 1,128 ( $n \geq 2$ ).

A forma de se estimar  $\sigma_y$  representada acima é utilizada quando  $n$  se refere aos valores do comprimento da amplitude móvel ( $c_{AM}$ ). Assim, utiliza-se  $n = 2$  quando  $c_{AM} = 2$ ,  $n = 3$  quando  $c_{AM} = 3$  e, assim sucessivamente, até  $n = m$  quando  $c_{AM} = m$ .

Para  $c_{AM} = 2$  e  $c_{AM} = 3$ , têm-se, respectivamente:

$$\overline{AM} = \frac{\sum_{i=2}^m AM_i}{m-1};$$

$$\overline{AM} = \frac{\sum_{i=3}^m AM_i}{m-2}.$$

Para  $m$  subgrupos racionais e considerando-se o comprimento da amplitude móvel ( $c_{AM}$ ) igual a dois, será possível obter  $m - 1$  valores da amplitude móvel dadas por:

$$AM_i = |y_i - y_{i-1}|$$

em que

$AM_i$  = amplitude móvel do subgrupo racional  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, m$ );

$y_i$  = valor  $y$  do subgrupo racional  $i$ ; e

$y_{i-1}$  = valor  $y$  do subgrupo racional  $i-1$ .

Segundo Souza *et al.* (2008), a média amostral da amplitude móvel em processos sob controle estatístico fornece uma boa estimativa de  $\sigma_y$ .

Outra forma de se estudar a variabilidade de um processo é através da amplitude total. Tem-se que, para  $m$  subgrupos racionais com repetições ( $n \geq 2$ ), obtém-se  $m$  valores dados por:

$$AT_i = y_{(1)} - y_{(i)}$$

em que

$AT_i$  = amplitude do subgrupo racional  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ );

$y_{(1)}$  = menor valor de  $y$  do subgrupo racional  $i$ ; e

$y_{(i)}$  = maior valor de  $y$  do subgrupo racional  $i$ .

Nesse caso, o parâmetro  $\sigma_Y$  é estimado por:

$$S_Y = \frac{\bar{R}}{d_2},$$

em que

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m} = \text{média amostral da amplitude.}$$

Além dessas formas, há outra maneira de se calcular o desvio-padrão ( $\bar{s}$ ), também quando se consideram subgrupos racionais com duas ou mais repetições, é a seguinte:

$$S_Y = \frac{\bar{s}}{c_4},$$

em que

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^m s_i}{m} = \text{média amostral do desvio-padrão; e}$$

$c_4$  = constante tabelada em função de  $n$ .

No caso de subgrupo racionais de tamanhos constantes,  $s_i$  é calculada através da seguinte fórmula:

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^n y_{ij}\right)^2}{n}}{n-1}} : \text{desvio-padrão do subgrupo racional } i \text{ (} i = 1, 2, \dots, m \text{)}$$

em que

$y_{ij}$  = valor  $y$  do subgrupo racional  $i$  e da repetição  $j$ ; e  
 $j = 1, 2, \dots, n$  repetições por subgrupo racional.

Um terceiro estimador de  $\sigma_Y$ , denominado de desvio-padrão combinado, é dado por:

$$S_Y = \sqrt{\bar{s}^2},$$

em que

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m s_i^2}{m};$$

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^n y_{ij}\right)^2}{n}}{n-1} = \text{variância do subgrupo racional } i \text{ (} i = 1, 2, \dots, m \text{)}.$$

A estimativa de  $\sigma_Y$  obtida por meio do desvio-padrão combinado também é similar às estimativas obtidas por meio das variáveis  $R$  e  $s$  para processos sob controle estatístico, independentemente do tamanho do subgrupo racional ( $n \geq 2$ ), conforme relatado por Souza *et al.* (2004).

Sendo  $W_i$  uma combinação linear de  $\bar{Y}_i$  e de  $W_{i-1}$ , dado que  $Y_i$  segue distribuição normal de probabilidades em cada subgrupo racional  $i$ , sua média será obtida, em um processo sob controle estatístico, por:

$$\mu_{W_i} = \lambda\mu_0 + (1-\lambda)\mu_0 = \mu_0,$$

em que

$$W_i \sim \text{Normal} (\mu_{W_i} = \mu_0; \sigma_{W_i}^2), \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

$$\sigma_{W_i} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}} \sqrt{\frac{\lambda[1 - (1-\lambda)^{2i}]}{2-\lambda}},$$

em que

$\sigma_{W_i}$  mudará de acordo com a ordem do subgrupo racional ( $i$ ) e o seu tamanho ( $n$ );

$$\sigma_{W_m} > \sigma_{W_{m-1}} > \dots > \sigma_{W_3} > \sigma_{W_2} > \sigma_{W_1} \text{ (Figura 1)}.$$

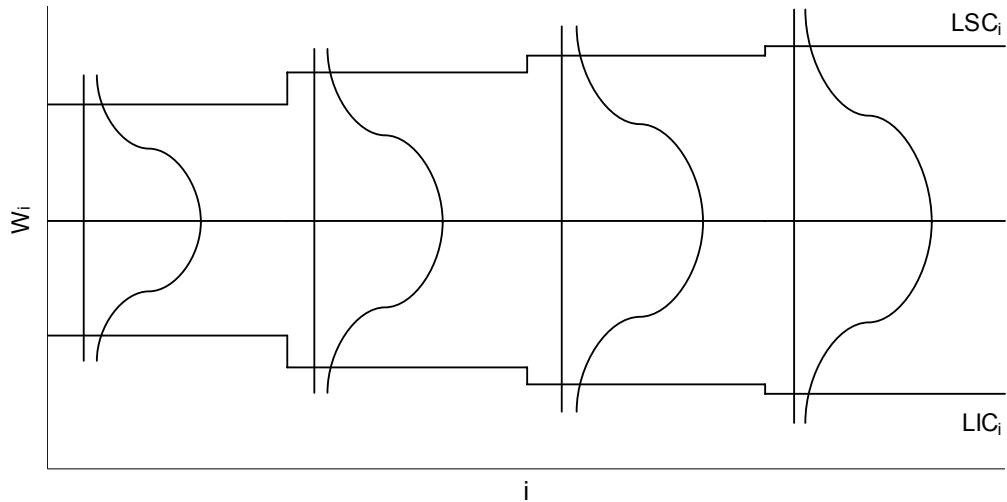


Figura 1 – Probabilidade do alarme falso [ $\alpha = P(W_i \leq LIC_i) + P(W_i \geq LSC_i)$ ] no subgrupo racional  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ).

Por outro lado, se o processo estiver fora de controle estatístico para a média desde o primeiro subgrupo racional, ou seja, se  $\mu_0$  mudar para  $\mu_1$  ( $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ ) a partir deste instante, mas mantendo o mesmo desvio-padrão  $\sigma_0$ , a média de  $W_i$  será obtida por:

$$\mu_{W_i} = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j \mu_1 + (1-\lambda)^i \mu_0, \text{ para } j = 1, 2, \dots, i.$$

Desse modo, tem-se:

$$W_i \sim \text{Normal}(\mu_{W_i}; \sigma_{W_i}^2), \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

### 2.3. Desempenho do EWMA

O desempenho de um gráfico de controle pode ser medido por meio das probabilidades dos alarmes falso e verdadeiro. O erro tipo I corresponde à ocorrência do alarme falso, isto é, quando o gráfico acusa que o processo está fora de controle, quando na verdade não está, sendo a sua probabilidade denominada de  $\alpha$ . Por outro lado, o erro tipo II corresponde à falta de detecção, isto é, quando o gráfico acusa que o processo não está fora de controle, quando na verdade está, sendo a sua probabilidade denominada de  $\beta$ . Portanto, a probabilidade do alarme verdadeiro ou poder ( $Pd$ ) do gráfico é determinada por  $1 - \beta$ .

### 2.3.1. Alarme falso

A probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ) se refere a um ponto localizado fora dos limites de controle ser devido a causas aleatórias. Ou seja, rejeita-se a hipótese nula  $H_0$ , quando ela é verdadeira em detrimento da hipótese alternativa  $H_1$ , dadas, respectivamente, por:

$$H_0: \mu_Y = \mu_0;$$

$$H_1: \mu_Y \neq \mu_0.$$

Em um processo sob controle estatístico, em que os valores aleatórios da característica de qualidade são normais e independentemente distribuídos com média  $\mu_0$  e desvio-padrão  $\sigma_0$ , a probabilidade do alarme falso em cada subgrupo racional  $i$  do gráfico de controle EWMA, tendo  $W_i$ , em cada subgrupo racional  $i$ , distribuição normal com a mesma média  $\mu_0$  e desvio-padrão  $\sigma_{W_i}$ , é obtida por:

$$\alpha_i = P(W_i \leq LIC_i) + P(W_i \geq LSC_i),$$

em que

$$W_i \sim Normal(\mu_{W_i} = \mu_0; \sigma_{W_i}^2), \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Como exemplo, considere os cálculos das probabilidades dos alarmes falsos nos subgrupos racionais 1 e 8, no caso do gráfico de controle EWMA, construído com observações individuais ( $n = 1$ ),  $k = 3$  e  $\lambda = 0,2$  cuja característica de qualidade, normalmente distribuída, encontra-se sob controle estatístico com  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ . Então, têm-se, respectivamente:

$$\alpha_1 = P(W_1 \leq LIC_1) + P(W_1 \geq LSC_1) / (\mu_{W_1} = 0 \text{ e } \sigma_{W_1} = 0,2) =$$

$$= P(W_1 \leq -0,6) + P(W_1 \geq 0,6) = 0,0027;$$

$$\alpha_8 = P(W_8 \leq LIC_8) + P(W_8 \geq LSC_8) / (\mu_{W_8} = 0 \text{ e } \sigma_{W_8} = 0,3286) =$$

$$= P(W_8 \leq -0,9858) + P(W_8 \geq 0,9858) = 0,0027.$$

De modo geral, a probabilidade do alarme falso diminui exponencialmente em função do aumento de  $k$ , conforme apresentado na Figura 2 (SOUZA *et al.*, 2004).

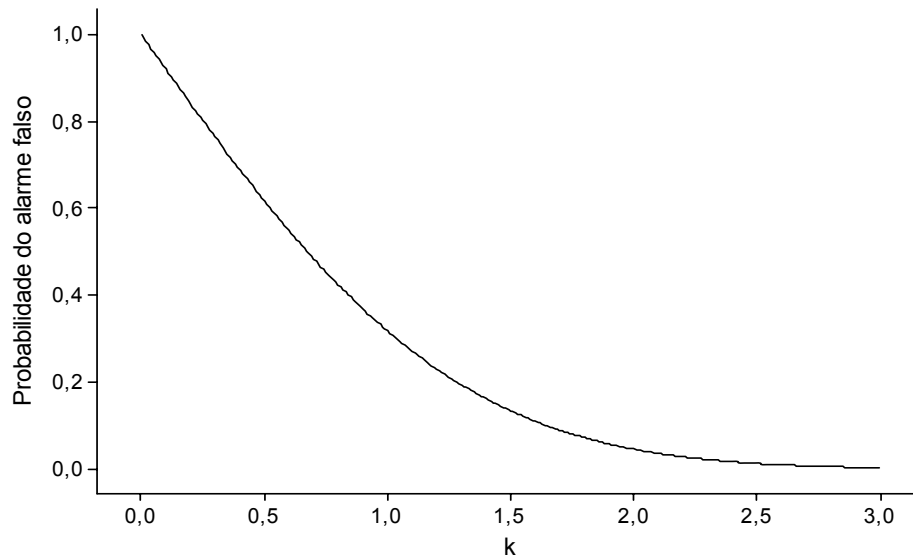


Figura 2 – Probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ) em função de  $k$ .

Quando o processo encontra-se sob controle estatístico, a média de  $W_i$  mantém-se constante, e o desvio-padrão de  $W_i$  aumenta em função da ordem  $i$  do subgrupo racional. No exemplo anterior, a média de  $W_1$  foi a mesma de  $W_8$ , mas o desvio-padrão aumentou de 0,2 para 0,3286. Apesar do intervalo entre os limites de controle aumentar em função da ordem  $i$  do subgrupo racional, a probabilidade do alarme falso se mantém constante, quando se consideram os mesmo valores de  $k$  e de  $\lambda$ .

Portanto, para se ter valores de  $\alpha \leq 0,10$ ,  $\alpha \leq 0,05$ ,  $\alpha \leq 0,01$  e  $\alpha \leq 0,0027$ , deve-se utilizar  $k \geq 1,65$ ,  $k \geq 1,96$ ,  $k \geq 2,58$  e  $k \geq 3$ , respectivamente. Assim, com o objetivo de minimizar a probabilidade do alarme falso ( $0,0027 \leq \alpha \leq 0,0124$ ), recomendam-se as construções dos gráficos de controle EWMA, para  $2,5 \leq k \leq 3$ , dado que a mesma decresce exponencialmente em função do aumento de  $k$  (Figura 2).

### 2.3.2. Alarme verdadeiro

O  $\beta$  é a probabilidade de um ponto localizado dentro dos limites de controle ser devido a causas especiais, ou seja, aceita-se a hipótese  $H_0$ , mas ela é falsa. Portanto, o poder do gráfico ( $Pd = 1 - \beta$ ) ou a probabilidade do alarme verdadeiro é a de um ponto localizado fora dos limites de controle ser devido a causas especiais, ou seja, rejeita-se a hipótese  $H_0$  falsa ( $RH_0/H_0$  é falso) ou aceita-se a hipótese alternativa  $H_1$  ( $\mu_Y \neq \mu_0$ ) verdadeira, isto é, aceita-se a hipótese de que ela pertence a uma distribuição com média fora de controle ( $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma_0$ ), quando na verdade sim. O valor de  $\delta$  se refere ao

deslocamento da média de controle ( $\mu_0$ ) que se quer detectar como variação especial em número de desvios-padrão ( $\sigma_0$ ) dos valores aleatórios da variável resposta  $Y$ .

Quando relaciona-se  $\beta$  e o  $Pd$ , é importante observar que estes, em um gráfico de controle se complementam, ou seja,

$$P(AH_0 / H_0 \text{ é falso}) + P(RH_0 / H_0 \text{ é falso}) = 1$$

em que o primeiro e segundo termos da equação acima correspondem, ao  $\beta$  e ao  $Pd$  respectivamente. Como ambas as probabilidades estão associadas à distribuição de  $H_1$  (Figura 3), então, torna-se necessário definir a sua média ( $\mu_1$ ) e o seu desvio-padrão ( $\sigma_0$ ), para que elas possam ser calculadas.

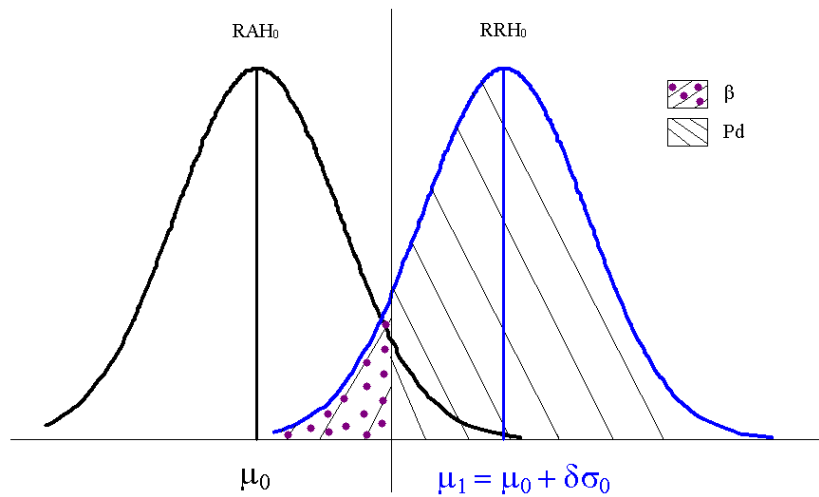


Figura 3 – Poder ( $Pd$ ) de um gráfico e probabilidade  $\beta$  quando o processo está fora de controle estatístico para a média ( $RAH_0$  = região de aceitação de  $H_0$ ;  $RRH_0$  = região de rejeição de  $H_0$ ).

A variação especial em número de desvios-padrão implica na menor diferença absoluta, ou seja, na menor média acima ( $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ ) ou na maior média abaixo ( $\mu_2 = \mu_0 - \delta\sigma_0$ ) da de controle ( $\mu_0$ ), que se quer sinalizar como fora de controle. Se  $\mu_1$  e  $\mu_2$  apresentarem a mesma diferença absoluta ( $\delta\sigma_0$ ) em relação à  $\mu_0$ , de acordo com a distribuição normal dos valores aleatórios de  $Y$ , então o deslocamento  $\delta$ , em módulo, será definido por:

$$|\delta| = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\sigma_0}.$$

Como a menor diferença especial, em módulo, a ser detectada como significativa entre as médias definidas como fora ( $\mu_1$  e  $\mu_2$ ) e sob controle ( $\mu_0$ ) é igual a  $\delta\sigma_0$ , então a sensibilidade dos gráficos de controle por variáveis para o monitoramento da média dependerá da variabilidade aleatória do processo ( $\sigma_0$ ). Se o desvio-padrão  $\sigma_0$  for baixo, então menores diferenças absolutas entre  $\mu_1$  e  $\mu_0$  e entre  $\mu_2$  e  $\mu_0$  poderão ser detectadas como causas especiais. Caso contrário, se ele for alto, a sensibilidade dos gráficos de controle ficará prejudicada e, conseqüentemente, eles só conseguirão sinalizar maiores diferenças absolutas, independentemente do valor de  $\delta$ .

Portanto, caso o processo se apresente fora de controle estatístico somente para a média ( $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma_0$ ), ou seja, se  $Y$  seguir distribuição normal com média  $\mu_1$  ( $\delta > 0$ ) e desvio-padrão  $\sigma_0$ , a média de  $W_i$  no subgrupo racional  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) após um único deslocamento em relação à média de controle ( $\mu_0$ ) sofrido no primeiro subgrupo racional ( $i = 1$ ), será obtida, respectivamente, por:

$$\mu_{W_i} = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_0$$

Assim, para  $i$  subgrupos racionais tem-se:

$$\mu_{W_i} = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \mu_1 + (1 - \lambda)^i \mu_0, \text{ para } j = 1, 2, \dots, i.$$

Desse modo, tem-se:

$$W_i \sim \text{Normal}(\mu_{W_i}; \sigma_{W_i}^2), \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Se o deslocamento especial mais importante de ser detectado for para  $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$  ( $\delta > 0$ ), a probabilidade do alarme verdadeiro no subgrupo racional  $i$  é obtida por:

$$Pd_i = P(W_i \leq LIC_i) + P(W_i \geq LSC_i).$$

No caso do gráfico de controle EWMA ser constante com  $k = 3$  e  $\lambda = 0,2$  cuja característica de qualidade encontra-se sob controle estatístico com  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ , então as probabilidades dos alarmes verdadeiros nos subgrupos racionais 1 e 8 com observações individuais são obtidas respectivamente por:

$$Pd_i = P(W_i \leq LIC_i) + P(W_i \geq LSC_i).$$

No primeiro subgrupo racional tem-se que:  $\mu_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $k = 3$  e  $\lambda = 0,2$ . Assim, calculando  $\mu_1$ ,  $W_1$ ,  $LIC_1$  e  $LSC_1$  tem-se:

$$\mu_{W_1} = 0,4$$

$$\sigma_{W_1} = 0,2$$

$$LIC_1 = - 0,6$$

$$LSC_1 = 0,6$$

Logo a  $P(W_1 \leq LIC_1) = 0,00000028$  e  $P(W_1 \geq LSC_1) = 0,158655$ ; portanto,  $Pd_1 = 0,158656$ .

Já no oitavo subgrupo racional, utilizando dos mesmos valores acima tem-se:

$$\mu_{W_8} = 1,6645$$

$$\sigma_{W_8} = 0,3286$$

$$LIC_8 = - 0,9858$$

$$LSC_8 = 0,9858$$

Logo a  $P(W_8 \leq LIC_8) = 3,65695 \cdot 10^{-16}$  e  $P(W_8 \geq LSC_8) = 0,980546$ ; portanto,  $Pd_8 = 0,980546$ .

Dado que a média aumenta em função do subgrupo racional ( $i$ ) e dado que o processo encontra-se fora de controle estatístico, mas também em função da diminuição do valor de  $\lambda$  por acumular maiores desvios das informações anteriores, verifica-se que o seu poder aumenta também em função destas mesmas tendências. Do mesmo modo, à medida que o limite de controle diminui pela diminuição do valor de  $k$ , o poder também aumenta (Figura 4).

Desse modo, são recomendados maiores valores de  $\lambda$  quando se tem objetivo de detectar maiores diferenças na média de controle. Caso contrário, se houver necessidade de detectar menores diferenças, deve-se usar menores valores de  $\lambda$ . Considerando-se  $\lambda = 0,2$  como um valor de referência, podem ser recomendados valores maiores do que 0,2 para se detectar grandes diferenças e, menores do que 0,2, para sinalizar diferenças na média de controle cada vez menores.

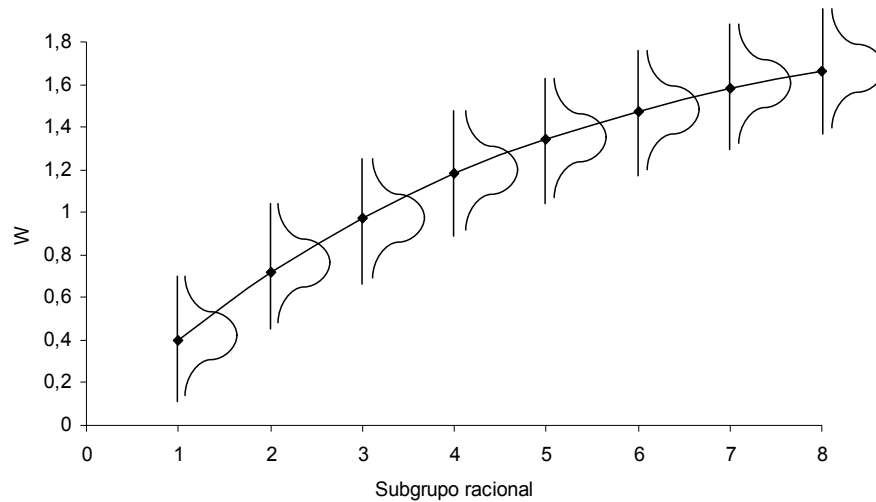


Figura 4 – Distribuições normais de  $W_i$  em oito subgrupos racionais de um processo fora de controle estatístico para a média.

## 2.4. Processo autocorrelacionado

Segundo Montgomery (2004), as suposições-padrão que são geralmente citadas na justificação do uso de gráficos de controle são que os dados gerados pelo processo, quando sob controle, são distribuídos normal e independentemente com média  $\mu_0$  e desvio-padrão  $\sigma_0$ . Porém se o processo estiver fora de controle, a mudança que ocorre é no deslocamento de  $\mu_0$  ou  $\sigma_0$  (ou ambos) para algum valor diferente. Portanto, quando essas suposições são satisfeitas podem-se aplicar gráficos de controle convencionais e tirar conclusões sobre o estado de controle estatístico do processo.

No caso da violação da normalidade dos dados, Montgomery (2004) ressalta que os gráficos de controle ainda apresentam um bom desempenho. Ainda, segundo o autor, a mais importante suposição com relação aos gráficos de controle é a de independência dos dados, pois os gráficos convencionais não funcionam bem se a característica de qualidade apresentar, mesmo que em baixos níveis, correlação ao longo do tempo, isto é, existir dependência entre a característica de qualidade e as variáveis de controle. Isso significa que os limites de controle que são calculados pelos estimadores podem conduzir a erros de interpretação na estabilidade do processo. Costa *et al.* (2004) destacam que, se existir correlação, mesmo que em pequeno grau, a probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ) aumenta, o que pode vir a comprometer a credibilidade desses gráficos de controle pelo elevado número de alarmes falsos. Logo, os gráficos de controle convencionais irão produzir um número muito elevado de alarmes falsos, indicando presença de

causas especiais, quando na verdade elas não existem. Portanto, pode-se dizer que a autocorrelação compromete a efetividade dos gráficos de controle, por proporcionar uma subestimativa da variabilidade aleatória do processo autocorrelacionado. Isso significa que os limites de controle se tornam mais estreitos do que o devido, em consequência dessa subestimação da variação do processo. Esse aspecto tem sido enfatizado por numerosos autores, incluindo Berthouexet *et al.* (1978), Alwan e Roberts (1988), Montgomery e Friedman (1989), Harris e Ross (1991), Montgomery e Mastrangelo (1991), Alwan (1992) e Maragah e Woodall (1992).

Souza e Camargo (2004) definem autocorrelação como a medida da dependência de uma certa observação tomada num instante  $p$  em relação àquela tomada no instante  $t - p$ , em que  $p$  é a defasagem ou *lag* considerado.

Para estudar a autocorrelação entre os efeitos aleatórios da característica de qualidade em um processo sob controle estatístico, representados pelos erros aleatórios, nos diferentes subgrupos racionais ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) com observações individuais ( $n = 1$ ), Vasconcelos e Alves (2000), Montgomery (2004) e Moretin e Tolo (2006) fazem várias recomendações como algumas a seguir.

Uma regra prática utilizada para determinar as defasagens mais importantes é dada por:

$$k \leq \frac{m}{4}.$$

Nesse caso, a estimativa do coeficiente de autocorrelação entre as estimativas dos erros aleatórios na defasagem  $k$  é obtida por:

$$r_p = \frac{\sum_{i=p+1}^m y_i y_{i-p}}{\sum_{i=1}^m y_i^2},$$

em que

$y_i$  = valor observado da característica de qualidade  $Y$  no subgrupo racional  $i$ ; e

$y_{i-p}$  = valor observado da característica de qualidade  $Y$  no subgrupo racional  $i - p$ .

Se as observações forem independentes,  $r_k$  será próxima de zero, o que poderá levar à conclusão de  $H_0$ ,  $\rho_p = 0$  ser verdadeira. Um valor crítico para testar a hipótese  $H_0$  é obtido por:

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

A expressão apresentada anteriormente é baseada na aproximação da distribuição normal padronizada de  $r_p$ , como segue:

$$r_p \sim \text{normal} (\mu_{r_k} = 0 \text{ e } \sigma_{r_p}^2 = 1/m).$$

Assim, o intervalo com, aproximadamente,  $100(1 - 0,05)\%$  de confiança para  $\rho_p$  é dado por:

$$IC (\rho_p)_{0,95} = r_p \pm \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Portanto, de forma aproximada, qualquer valor de  $r_p$ , em módulo, menor que o valor crítico ( $r_c$ ), não rejeita a hipótese  $H_0$ ,  $\rho_p = 0$ , ou seja, indica que não existe autocorrelação entre os erros aleatórios e, conseqüentemente, entre os valores aleatórios da variável resposta  $Y$ . De forma visual, pode-se observar se há ou não autocorrelação, por meio dos diagramas de dispersão das estimativas dos erros aleatórios em função das  $m$  observações, de acordo com a ordem de coleta, ou entre eles com uma, duas ou até  $p$  defasagens.

Se ocorrer autocorrelação ( $\rho_p \neq 0$ ), dado  $|r_p| \geq r_c$ , então haverá uma subestimação de  $\sigma_\varepsilon$  em função dos valores de  $Y$  ficarem mais próximos entre si, por apresentarem certo grau de dependência. Isso tornará o limite de controle mais estreito do que deveria ser, o que acarreta o aumento da probabilidade das causas aleatórias serem detectadas como especiais. Isso significará que os limites de controle deverão ser recalculados por meio de um modelo que elimine o efeito da autocorrelação, ou seja, que possibilite a obtenção de resíduos aproximadamente independentes entre si.

Para conhecer a defasagem  $p$  da autocorrelação, Tolo e Motetin (2000) sugerem uma alternativa simples, a utilização do correlograma, que consiste na construção dos gráficos para as funções de autocorrelação (FAC) e de autocorrelação parcial (FACP). Se os valores apresentam um comportamento aleatório dentro desses intervalos, então os dados podem ser considerados independentes, caso contrário, há indícios de autocorrelação.

Para se estudar a função de autocorrelação (FAC), deve-se verificar o coeficiente de autocorrelação ou correlação serial de ordem  $k$ , ou seja, a autocorrelação entre  $y_t$  e  $y_{t-k}$ . Este coeficiente é dado por:

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{V(y_t)}$$

A sequência de pares  $(k, \rho_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , é denominada função de autocorrelação (ALVES; VASCONCELOS, 2000).

Ainda de acordo com Alves e Vasconcelos (2000), o coeficiente de autocorrelação  $\rho_k$  envolve parâmetros geralmente desconhecidos. Portanto, na prática, é necessário trabalhar com o coeficiente de autocorrelação amostral  $r_k$ , expresso por:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

em que

$n$  = número de observações da série  $y_t$ .

Com relação à função de autocorrelação parcial (FACP) também deve-se calcular coeficiente de autocorrelação parcial de ordem  $k$ , usualmente representado por  $\square_{kk}$ . Este mede a correlação entre  $y_t$  e  $y_{t-k}$  depois que a influência de  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$  sobre  $y_t$  foi descontada (ALVES; VASCONCELOS, 2000).

Segundo Alves e Vasconcelos (2000), o coeficiente  $\square_{jj}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , é dado pelo último coeficiente,  $\beta_{jj}$ , de cada uma das autorregressões a seguir:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_{11}y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow \square_{11} = \beta_{11} \\ y_t &= \beta_{11}y_{t-1} + \beta_{22}y_{t-2} + \varepsilon_t \rightarrow \square_{22} = \beta_{22} \\ &\dots \\ y_t &= \beta_{k1}y_{t-1} + \beta_{k2}y_{t-2} + \beta_{kk}y_{t-k} + \varepsilon_t \rightarrow \square_{kk} = \beta_{kk} \end{aligned}$$

A sequência de pares  $(j, \square_{jj})$  constitui a função de autocorrelação parcial.

O modelo autorregressivo ( $y_i$ ) é descrito apenas por seus valores passados e pelo ruído branco  $\varepsilon_i$ . A versão mais simples de um modelo AR é aquela em que  $y_i$  depende somente de  $y_{i-1}$  e  $\varepsilon_i$ . Assim, esse modelo mais simples é dito como autorregressivo de ordem 1 e indicado por AR(1). Ele é apresentado por diversos autores para modelar a falta de independência entre observações da variável de monitoramento de itens

“vizinhos” (MONTGOMERY; MASTRANGELO, 1991; SUPERVILLE; ADAMS, 1994; RUNGER; WILLEMAIN, 1995/1996; ATIENZA *et al.*, 1998; TIMMER *et al.*, 2003; TESTIK, 2005; CLARO, 2008; DE MAGALHÃES *et al.*, 2008; COSTA; CLARO, 2009; CLARO *et al.*, 2009; COSTA; COSTA; CASTAGLIOLA, 2010). A representação desse modelo é a seguinte:

$$y_i = \phi y_{i-1} + \varepsilon_i$$

em que

$\phi$  = um parâmetro.

Já o modelo autorregressivo AR(2), tem a seguinte representação:

$$y_2 = \phi_1 y_{i-1} + \phi_2 y_{i-2} + \varepsilon_i$$

Generalizando este modelo tem-se:

$$y_i = \phi_1 y_{i-1} + \phi_2 y_{i-2} + \dots + \phi_p y_{i-p} + \varepsilon_i$$

em que

$\phi_1$  = coeficiente de regressão do valor passado  $y_{i-1}$ ;

$\phi_2$  = coeficiente de regressão do valor passado  $y_{i-2}$ ;

$\phi_p$  = coeficiente de regressão do valor passado  $y_{i-p}$ ; e

$p$  = número de defasagens.

Para o modelo AR ( $p$ ), todos os  $p$  parâmetros do modelo devem estar dentro do círculo unitário, ou seja,  $|\phi_p| < 1$  para toda a defasagem de ordem  $k$ . No caso do modelo AR (1) este declina exponencialmente à medida que  $k$  aumenta e  $\phi_{pp} \neq 0$  com  $p = 1$  ou  $\phi_{pp} = 0$  com  $p > 1$ . Já o modelo AR (2) declina exponencialmente à medida que  $k$  aumenta e  $\phi_{pp} \neq 0$  com  $p \leq 2$  ou  $\phi_{pp} = 0$  com  $p > 2$ .

Após determinado o valor de  $p$ , são estimados os  $p$  parâmetros  $\phi$ 's, os ruídos brancos ( $\varepsilon$ ) e a variância  $\sigma_\varepsilon^2$  associada ao modelo AR ( $p$ ).

Portanto, no processo autocorrelacionado, a prática usual, segundo Woodall e Montgomery (1999), é a abordagem baseada em modelos. Esta, nada mais é do que ajustar um modelo de séries temporais, podendo ser, por exemplo, um modelo AR( $p$ ), e monitorar os resíduos do modelo através de um gráfico de controle, como o gráfico para medidas individuais, somas cumulativas (CUSUM) e o gráfico para médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA).

Além da recomendação de construção do gráfico de controle EWMA aos resíduos aproximadamente independentes e gerados por meio de um modelo AR (p), Costa *et al.* (2004), por outro lado, recomenda-se construí-lo com os valores observados, mas com a condição de que sejam alargados os limites de controle. Isto porque os limites de controle se tornam mais estreitos do que o devido, em consequência dessa subestimação da variância do processo. Assim, os autores sugerem que sejam feitas modificações nos limites de controle. Tal recomendação é mais fácil de ser colocada em prática, porque evita a utilização dos modelos de séries temporais.

### 3. MATERIAL E MÉTODOS

Para um processo sob controle estatístico, foram simulados no software R dados de uma variável resposta  $Y$  padronizada, sob distribuição normal com média  $\mu_0 = 0$  e desvio-padrão  $\sigma_0 = 1$  para 50 subgrupos racionais com observações individuais, em que um determinado subgrupo racional foi especificado pelo índice  $i$  ( $1 \leq i \leq 50$ , para  $i \in \mathbb{N}$ ). Para tanto, foram realizadas 1000 simulações ( $1 \leq j \leq 1000$ , para  $j \in \mathbb{N}$ ) por subgrupo racional. Para a obtenção dos valores de  $Y$  ao longo dos 50 subgrupos racionais, foram realizadas 10 situações diferentes de acordo com as seguintes autocorrelações de 1ª ordem ( $\rho_1 = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$  e  $0,9$ ). Além disso, foram realizadas 1000 simulações para cada situação (Tabela 1).

Tabela 1 – Valores da variável resposta  $Y$  obtidos a partir da distribuição normal  $(0;1)$  para 50 subgrupos racionais em 1.000 simulações com diferentes autocorrelações

SR	Sim <sub>1</sub>	Sim <sub>2</sub>	...	Sim <sub>1000</sub>
1	$Y_{11}$	$Y_{12}$	...	$Y_{1\ 1000}$
2	$Y_{21}$	$Y_{22}$	...	$Y_{2\ 1000}$
...	...	...	...	...
50	$Y_{50\ 1}$	$Y_{50\ 2}$	...	$Y_{50\ 1000}$

$y_{ij}$  = valor observado da variável resposta  $y$  no subgrupo racional  $i$  e na simulação  $j$ ; SR = subgrupo racional; e Sim <sub>$j$</sub>  = simulação  $j$ .

Para esse procedimento foram estabelecidos 189 diferentes gráficos de controle EWMA de acordo com os valores de  $k$  e  $\lambda$ :

$$k = 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; \text{ e } 6;$$

$$\lambda = 0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5; 0,55; 0,6; 0,65; 0,7; 0,75; 0,8; 0,85; 0,9; 0,95 \text{ e } 1.$$

Como se tem 1.000 simulações, no total foram construídos 189.000 gráficos de controle.

Então, para cada combinação entre  $k$  e  $\lambda$ , foram obtidas frequências de pontos que ocorreram fora do limite de controle de acordo com os 1.000 pontos avaliados por subgrupo racional.

Esse estudo foi feito com 50 subgrupos racionais com observações individuais ( $n = 1$ ).

Para a obtenção dos valores de  $W$  (Tabela 2), utilizou-se a seguinte expressão:

$$w_i = \lambda \bar{y}_i + (1 - \lambda)w_{i-1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m, \text{ e o valor de } \lambda \text{ (peso do subgrupo}$$

racional) foi considerado e  $0 < \lambda \leq 1$ .

No caso desse estudo com observações são individuais, tem-se:

$$\bar{y}_i = y_i.$$

Tabela 2 – Valores da variável EWMA obtidos a partir dos valores de  $y$  para 50 subgrupos racionais em 1.000 simulações

SR	Sim <sub>1</sub>	Sim <sub>2</sub>	...	Sim <sub>1000</sub>
1	w <sub>11</sub>	w <sub>12</sub>	...	w <sub>1 1000</sub>
2	w <sub>21</sub>	w <sub>22</sub>	...	w <sub>2 1000</sub>
...	...	...	...	...
50	w <sub>50 1</sub>	w <sub>50 2</sub>	...	w <sub>50 1000</sub>

$w_{ij}$  = valor observado de EWMA no subgrupo racional  $i$  e na simulação  $j$ ; SR = subgrupo racional; e  $Sim_j$  = simulação  $j$ .

Logo após foram calculados os limites de controle do gráfico de controle EWMA (Tabela 3) da seguinte forma:

$$LIC_i = \bar{w} - ks_{w_i}$$

$$LM = \bar{w}$$

$$LSC_i = \bar{w} + ks_{w_i}$$

em que

$\bar{w}$  = média amostral dos valores da variável EWMA; e

$s_{w_i}$  = estimativa do desvio-padrão de cada subgrupo racional  $i$ .

Tabela 3 – Valores da variável resposta EWMA obtidos a partir dos valores de  $y$  para 50 subgrupos racionais em 1.000 simulações

SR	Sim <sub>1</sub>	Sim <sub>2</sub>	...	Sim <sub>1000</sub>
1	LIC <sub>11</sub> /LSC <sub>11</sub>	LIC <sub>12</sub> /LSC <sub>12</sub>	...	LIC <sub>11000</sub> /LSC <sub>11000</sub>
2	LIC <sub>21</sub> /LSC <sub>21</sub>	LIC <sub>22</sub> /LSC <sub>22</sub>	...	LIC <sub>21000</sub> /LSC <sub>21000</sub>
...	...	...	...	...
50	LIC <sub>150</sub> /LSC <sub>150</sub>	LIC <sub>250</sub> /LSC <sub>250</sub>	...	LIC <sub>501000</sub> /LSC <sub>501000</sub>

Se  $w_i \leq LIC_i$  ou  $w_i \geq LSC_i$ , o ponto estará fora de controle e receberá o valor 1. Caso contrário, o ponto plotado no gráfico receberá valor igual a zero (Tabela 4). Assim, para se obter a estimativa da probabilidade do alarme falso em cada subgrupo racional  $i$ , tem-se:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{i=1}^{1000} NPFC_i}{1000}$$

Tabela 4 – Números de pontos fora de controle por subgrupo racional

SR	Sim <sub>1</sub> (Pontos Plotados)	Sim <sub>2</sub> (Pontos Plotados)	...	Sim <sub>1000</sub> (Pontos Plotados)	NPFC <sub>i</sub>
1	0 ou 1	0 ou 1		0 ou 1	NPFC <sub>1</sub>
2	0 ou 1	0 ou 1		0 ou 1	NPFC <sub>2</sub>
...					
50	0 ou 1	0 ou 1		0 ou 1	NPFC <sub>50</sub>

$$NPFC_i = \sum_{j=1}^{1000} x_j,$$

em que

$$x_j = 0 \text{ ou } 1.$$

Posteriormente, para cada subgrupo racional  $i$ , foi estimada a probabilidade do alarme falso, dada por:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} NPFC_i}{1000}$$

Tabela 5 – Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos por subgrupo racional

SR	NPFC <sub>i</sub>	$\hat{\alpha}_i$
1	NPFC <sub>1</sub>	$\hat{\alpha}_1$
2	NPFC <sub>2</sub>	$\hat{\alpha}_2$
...	...	...
50	NPFC <sub>50</sub>	$\hat{\alpha}_{50}$

No presente trabalho, para o estudo da probabilidade do alarme falso, utilizou-se a média das estimativas dos primeiros 50 subgrupos racionais. Então,

$$\hat{\alpha}_m = \frac{\sum_{i=1}^{50} \hat{\alpha}_i}{50}$$

Lembrando que tudo isso foi feito dez vezes, pois tinham-se dez valores de autocorrelação de 1ª ordem ( $\rho = 0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$  e  $0,9$ ).

Para cada simulação foram calculados os desvios-padrão da seguinte forma:

Tabela 6 – Valores das amplitudes móveis para cada simulação obtidas a partir de 50 subgrupos racionais com observações individuais

SR	Sim <sub>1</sub>	Sim <sub>2</sub>	...	Sim <sub>1000</sub>
1			...	
2	AM <sub>21</sub> =  y <sub>21</sub> - y <sub>11</sub>	AM <sub>22</sub> =  y <sub>22</sub> - y <sub>12</sub>	...	AM <sub>21000</sub> =  y <sub>21000</sub> - y <sub>11000</sub>
...	...	...	...	...
50	AM <sub>501</sub> =  y <sub>501</sub> - y <sub>491</sub>	AM <sub>502</sub> =  y <sub>502</sub> - y <sub>492</sub>	...	AM <sub>501000</sub> =  y <sub>501000</sub> - y <sub>491000</sub>
	S <sub>Y<sub>1</sub></sub>	S <sub>Y<sub>2</sub></sub>	...	S <sub>Y<sub>1000</sub></sub>

Para obter a média do desvio-padrão S<sub>Y<sub>j</sub></sub> deve-se proceder da seguinte forma:

$$S_{Y_j} = \frac{\overline{AM_j}}{d_2}$$

em que:

$\overline{AM_j}$  = média da amplitude móvel da simulação  $j = 1, 2, \dots, 1.000$ ; e

$d_2 = 1,128$ .

Deve-se lembrar que a amplitude móvel em cada subgrupo racional  $i$  da simulação  $j$  (AM<sub>ij</sub>) é dada da seguinte forma:

$$AM_{ij} = |y_{ij} - y_{ij-1}|.$$

No entanto, o desvio-padrão utilizado para medir a variabilidade aleatória do processo foi obtido por:

$$s_y = \frac{\sum_{j=1}^{1000} s_{y_j}}{1000}$$

Outra maneira estimá-la é obter o desvio-padrão conforme a recomendação de Costa *et al.* (2004):

$$s_{y_i}^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{50 - 1}}$$

Portanto, a estimativa da variabilidade aleatória, neste caso, é dada por:

$$s_y^* = \frac{\sum_{j=1}^{1000} s_{y_i}}{1000}$$

Portanto, para cada combinação entre os valores dos termos  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$ , foi obtida uma estimativa da probabilidade média do alarme falso baseada nos 50 subgrupos racionais. A partir delas, foi verificado o efeito dos termos do gráfico de controle EWMA, ou seja, de  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$ , cujo maior modelo de regressão adotado foi do tipo:

$$\ln \alpha = \beta_0 + \beta_1 k_{cod} + \beta_2 \lambda_{cod} + \beta_3 \rho_{cod} + \beta_4 k_{cod} \lambda_{cod} + \beta_5 k_{cod} \rho_{cod} + \beta_6 \lambda_{cod} \rho_{cod} + \varepsilon$$

em que

$\beta_0$  = constante da equação de regressão;

$\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  = coeficientes dos termos lineares codificados da equação de regressão;

$\beta_4$ ,  $\beta_5$  e  $\beta_6$  = coeficientes dos termos das interações duplas lineares codificados da equação de regressão; e

$$\varepsilon \sim NID(0; \sigma_\varepsilon^2).$$

Como a probabilidade do alarme falso decresce exponencialmente em função do aumento de  $k$  para observações individuais ( $n = 1$ ), preferiu-se ajustar a equação de regressão linear múltipla para o logaritmo natural da probabilidade do alarme falso ( $\ln \alpha$ ). Também adotou-se a transformação dos intervalos estudados dos três fatores para o intervalo de  $-1$  a  $1$ , denominados de codificados, para inferir sobre a importância relativa de cada um deles.

Portanto, para comparar a importância relativa dos efeitos dos termos estudados ( $k$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ), sem a interferência da escala, os seus intervalos serão codificados para o intervalo de  $-1$  a  $1$ , cujos níveis intermediários foram obtidos por meio da seguinte fórmula:

$$x_{cod} = \frac{x_{real} - PC}{PC - LI}$$

em que

$PC$  = ponto central do termo estudado  $x$ ; e

$LI$  = limite inferior do mesmo termo  $x$  estudado. No caso de  $k$  o ponto central é 4, de  $\lambda$  é 0,505 e de  $\rho = 0,45$ .

Assim, são apresentados os valores reais e codificados na Tabela 7 para  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$ .

Tabela 7 – Valores reais e codificados de  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$

$k$	$k_{cod}$	$\lambda$	$\lambda_{cod}$	$\rho$	$\rho_{cod}$
2,0	-1	0,01	-1	0,0	-1
2,5	-0,75	0,05	-0,9191	0,1	-0,7777
3,0	-0,50	0,10	-0,8181	0,2	-0,5555
3,5	-0,25	0,15	-0,7171	0,3	-0,3333
4,0	0,00	0,20	-0,6161	0,4	-0,1111
4,5	0,25	0,25	-0,5151	0,5	0,1111
5,0	0,50	0,30	-0,4141	0,6	0,3333
5,5	0,75	0,35	-0,3131	0,7	0,5555
6,0	1	0,40	-0,2121	0,8	0,7777
		0,45	-0,1111	0,9	1
		0,50	-0,0101		
		0,55	0,0909		
		0,60	0,1919		
		0,65	0,2929		
		0,70	0,3939		
		0,75	0,4949		
		0,80	0,5959		
		0,85	0,6969		
		0,90	0,7979		
		0,95	0,8989		
		1	1		

Após a obtenção da equação de regressão ajustada, foram construídas dez superfícies de resposta do logaritmo natural de  $\alpha$  em função dos termos  $k$  e  $\lambda$  para os valores de  $\rho = 0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$  e  $0,9$ . Posteriormente, foram estimadas as combinações entre  $k$  e  $\lambda$  que proporcionassem estimativas de  $\alpha \leq 0,10$  para cada uma das mesmas autocorrelações.

Para selecionar a melhor equação de regressão ajustada para o logaritmo natural da probabilidade do alarme falso, foram retirados os coeficientes não significativos, um de cada vez e começando pelos mais complexos de interpretação (interações), de acordo com o teste t, de Student, a 5% de significância.

A equação de regressão que estimou o logaritmo natural de  $\alpha$ , juntamente com o teste t, de Student, que verificou a significância dos efeitos referentes aos fatores individuais e interações duplas, foram realizadas no *software* R.

Além disso, após a obtenção das estimativas de  $\sigma_y$  por meio da amplitude móvel para as dez autocorrelações estudadas, foi construído um gráfico de dispersão das mesmas em função das últimas.

Para constituir os arquivos de dados para a realização da análise de regressão, obteve-se o  $\hat{\alpha}_m$  para cada uma das combinações entre  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$ , no Microsoft Excel 2010.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1. Probabilidade do alarme falso

O logaritmo natural da probabilidade do alarme falso proporcionada pelo gráfico EWMA para o monitoramento da média, quando se considera observações individuais por subgrupo racional ( $n = 1$ ) e a média de todos os primeiros 50 subgrupos, depende ( $P < 0,05$ ) dos termos  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$ .

De acordo com os níveis codificados dos termos  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$ , a equação de regressão estimada para o logaritmo natural da probabilidade do alarme falso foi:

$$\begin{aligned} \ln \hat{\alpha} = & -4,9855 - 3,4824^* k_{cod} - 0,6214^* \lambda_{cod} + 4,2135^* \rho_{cod} + 3,0532^* k_{cod} \rho_{cod} - \\ & 0,5700^* \lambda_{cod} \rho_{cod} \end{aligned}$$

( $R^2 = 0,94$ )

\*Significativo pelo teste t, de Student ( $P < 0,05$ ).

$$\text{para } -1 \leq k_{cod} \leq 1, -1 \leq \lambda_{cod} \leq 1 \text{ e } -1 \leq \rho_{cod} \leq 1. \quad (4.1)$$

Vale lembrar que os termos  $k$ ,  $\lambda$  e  $\rho$  variam na escala real de  $2 \leq k \leq 6$ ,  $0,01 \leq \lambda \leq 1$  e  $0 \leq \rho \leq 0,9$ .

Pela análise da Equação 4.1, pode-se observar que os efeitos dos termos  $k$  e  $\lambda$  são negativos, ou seja, os aumentos dos seus valores codificados acarretam a diminuição do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso e, conseqüentemente, a probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ). Além disso, não há interação ( $P > 0,05$ ) entre os dois termos citados anteriormente, ou seja, os seus efeitos são constantes e lineares ao longo de todo o intervalo estudado, para cada um deles.

Como já esperado, o efeito do aumento do  $k$  contribui para a diminuição do  $\alpha$ , dado que quanto maior for o seu valor, maior será o intervalo de controle compreendido pelos limites superior e inferior de controle. Souza *et al.* (2008) também relataram a mesma conclusão em relação ao efeito do  $k$ . King (1995), Montgomery e Runger (2003) e Montgomery (2004) chegaram à mesma conclusão que Souza *et al.* Porém, neste trabalho, o  $\lambda$ , ao contrário dos resultados do presente trabalho, não se relacionou com o  $\alpha$ . Tal fato se deve à simulação realizada por Souza *et al.* (2008) ter sido somente com valores aleatórios independentes entre si.

Isso implica que, se os valores apresentarem alguma correlação entre si, o aumento do  $\lambda$  irá ajudar a diminuir o  $\alpha$ . Consequentemente, recomenda-se aumentá-lo à medida que o processo se apresentar com maior autocorrelação. No entanto, tal ajuda só terá validade se forem utilizados valores de  $k$  acima do valor comumente utilizado ( $k = 3$ ).

Por outro lado, como o efeito do termo  $\rho$  é positivo, o seu aumento favorece o aumento de  $\alpha$ . Tal resultado já é bastante conhecido e mostra que o aumento da autocorrelação está diretamente associado com o aumento da probabilidade do alarme falso. Ide *et al.* (2009) verificaram que  $\alpha$  aumenta linearmente ( $P < 0,05$ ) em função da autocorrelação de 1ª ordem até 0,8. Acima desse valor, ocorreu um aumento bem pronunciado, chegando a atingir 94% para autocorrelação de 1ª ordem igual a 0,99. Tais resultados também foram revisados e confirmados por Costa *et al.* (2004) e Montgomery (2004).

Porém, no gráfico de controle EWMA, o efeito da autocorrelação de 1ª ordem ( $\rho$ ), não é constante ao longo das combinações com os diferentes intervalos de  $k$  e  $\lambda$ . À medida que ocorre o aumento do valor de  $\rho$ , diminui-se, proporcionalmente, a exigência de aumentar o valor de  $k$  e aumenta-se, também, proporcionalmente, a exigência de aumentar o valor de  $\lambda$ . Portanto, quanto maior for o valor de  $\rho$ , maior será a necessidade de aumentar o valor de  $\lambda$  e, apesar da recomendação de valores altos de  $k$ , tais valores, além de serem mais altos, serão mais próximos aos recomendados para monitorar processos com menor autocorrelação.

Desse modo, mesmo com o efeito positivo da autocorrelação sobre o  $\alpha$ , pode-se recomendar a construção do gráfico de controle EWMA para monitorar um processo autocorrelacionado. Para isso, é necessário alargar o limite de controle, impondo valores de  $k$  acima de três e combinar corretamente com os valores de  $\lambda$ , de acordo com a autocorrelação de 1ª ordem ( $\rho$ ) estimada no processo.

Portanto, de acordo com a equação 4.1, são obtidas as seguintes relações entre o logaritmo natural da probabilidade do alarme falso com os termos  $k$  e  $\lambda$  de acordo com as autocorrelações apresentadas na Tabela 8.

À medida que a autocorrelação de 1ª ordem aumenta o efeito de  $k$  diminui, mas o efeito de  $\lambda$  aumenta em diminuir o de  $\ln \alpha$  e consequentemente o de  $\alpha$ . Tal afirmação pode ser verificada à medida que  $\rho_1$  aumenta (Tabela 8).

Tabela 8 – Estimativas da constante e dos coeficientes de regressão do  $\ln \alpha$  em função dos termos  $k_{cod}$  e  $\lambda_{cod}$ , para cada valor de autocorrelação

$\rho$	$\rho_{cod}$	Constante	$k_{cod}$	$\lambda_{cod}$
0	-1	-0,73581	-6,5356	-0,00786
0,1	-0,7777	-0,66118	-5,85711	-0,03040
0,2	-0,5555	-0,5670	-5,17862	-0,05884
0,3	-0,3333	-0,44442	-4,50013	-0,09856
0,4	-0,1111	-0,27831	-3,82164	-0,14603
0,5	0,1111	-0,04049	-3,14316	-0,21785
0,6	0,3333	0,328263	-2,46467	-0,32921
0,7	0,5555	0,977166	-1,78618	-0,52518
0,8	0,7777	1,247381	-1,10769	-0,96122
0,9	1	3,566135	-0,42920	-2,77586

Nos gráficos das superfícies de resposta, estão representadas as isolinhas correspondentes às estimativas de  $\ln \alpha = -5,9$ ,  $\ln \alpha = -4,4$  e  $\ln \alpha = -3,1$  que são equivalentes às estimativas de  $\alpha = 0,0027$ ,  $\alpha = 0,0124$  e  $\alpha = 0,0455$ , respectivamente.

Para  $\rho = 0$  (Figura 5), as isolinhas são paralelas ao eixo do termo  $\lambda$  e os seus valores diminuem à medida que o valor de  $k$  aumenta. Isto implica que, neste caso, apenas o  $k$  exerce efeito negativo sobre o  $\alpha$  e a variação dos efeitos de  $\lambda$  não causa alteração no mesmo. Tal afirmação é coerente com a de Souza *et al.* (2008) que relatou a ausência do efeito de  $\lambda$  sobre o  $\alpha$  na ausência de autocorrelação.

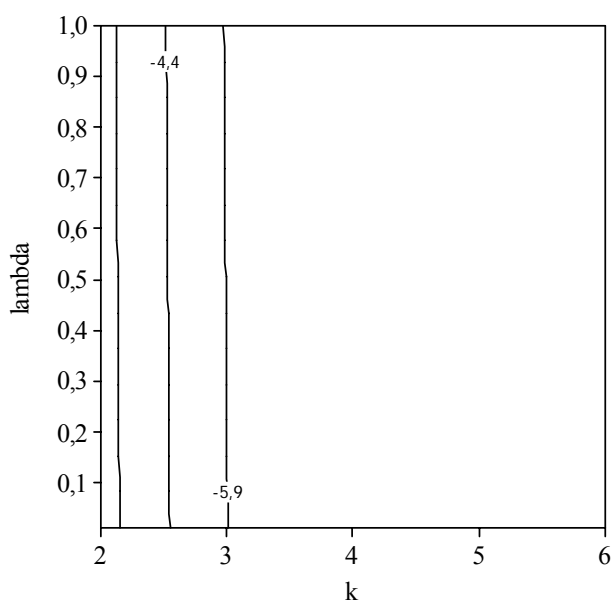


Figura 5 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0$ .

No entanto, o aumento de  $\rho$  (Figuras 6, 7 e 8) faz com que essas isolinhas apresentem-se cada vez mais inclinadas em direção ao eixo do termo  $\lambda$ . Essa inclinação indica que  $\lambda$  passa, agora na presença de autocorrelação influenciar cada vez mais na probabilidade do alarme falso. Porém, para processos com  $\rho \leq 0,3$ , deve-se priorizar a recomendação do  $k$  para o controle de  $\alpha$  sem a necessidade de preocupar-se com os valores de  $\lambda$ .

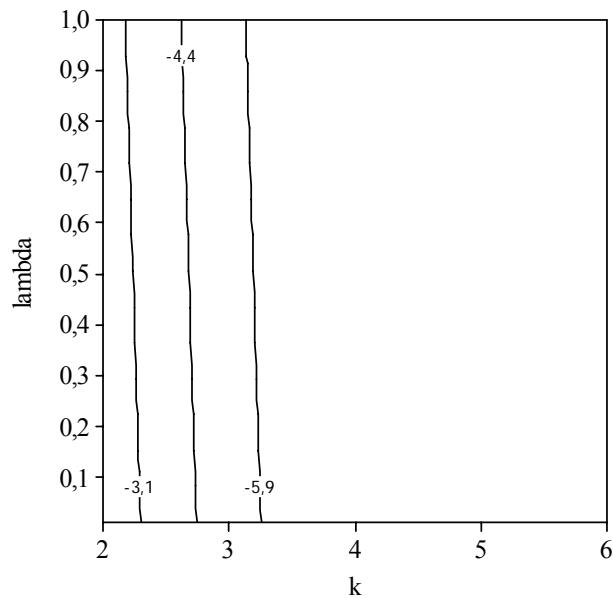


Figura 6 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e lambda ( $\lambda$ ) para  $\rho = 0,1$ .

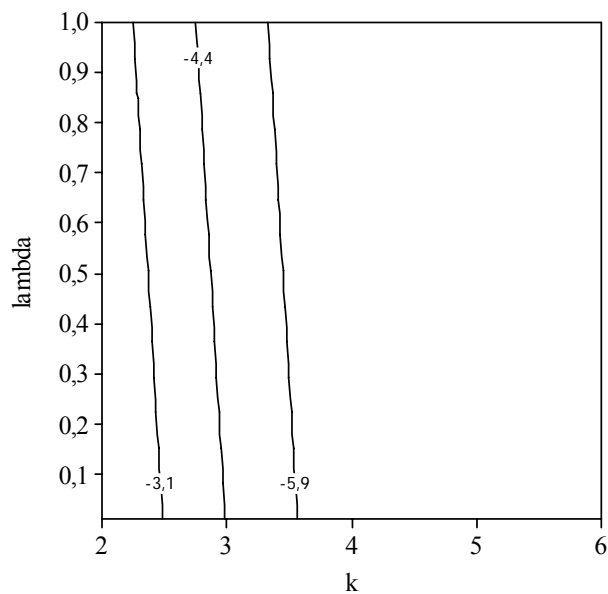


Figura 7 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e lambda ( $\lambda$ ) para  $\rho = 0,2$ .

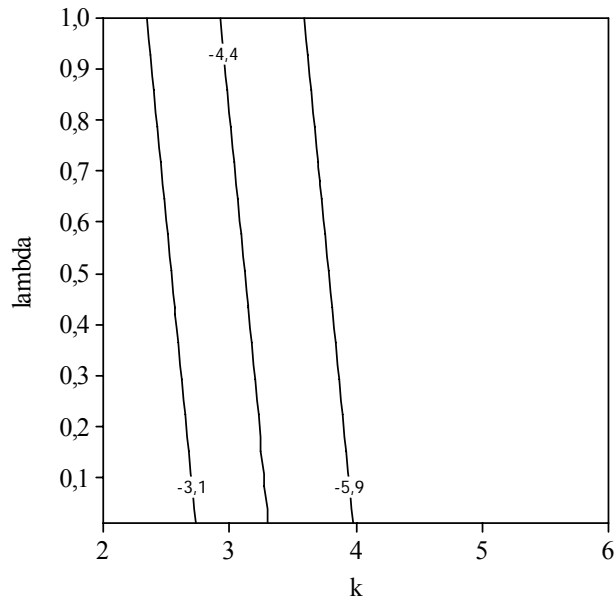


Figura 8 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0,3$ .

Já para valores  $\rho \geq 0,4$  as recomendações para construção do gráfico de controle EWMA devem ser baseadas não somente nos valores de  $k$ , mas também nos de  $\lambda$ . O que se observa é que o aumento de  $k$  pode ser compensado com a diminuição de  $\lambda$  e vice-versa (Figuras 9, 10, 11, 12, 13 e 14).

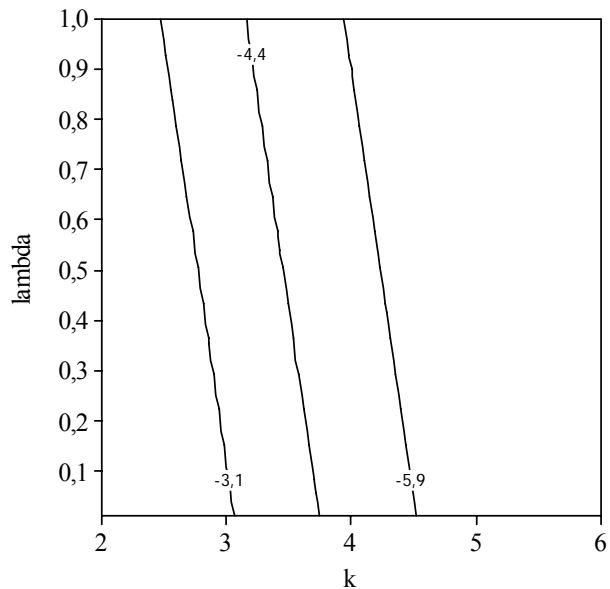


Figura 9 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0,4$ .

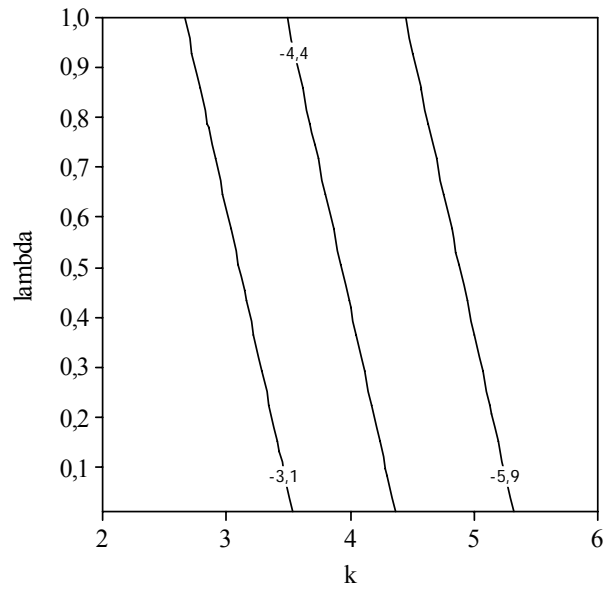


Figura 10 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0,5$ .

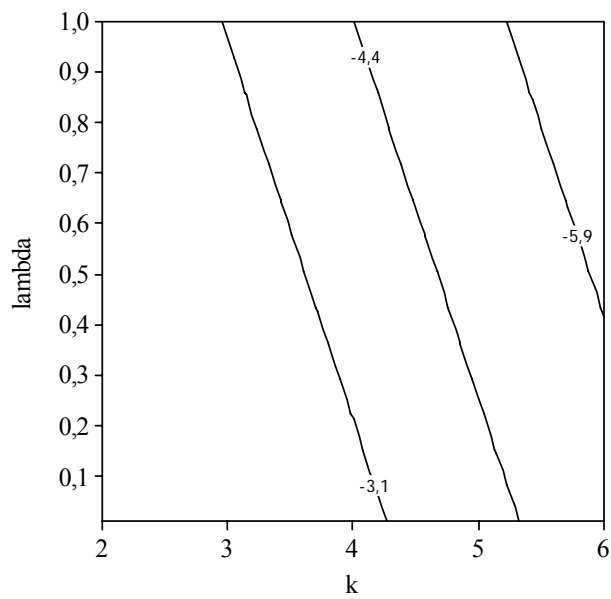


Figura 11 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0,6$ .

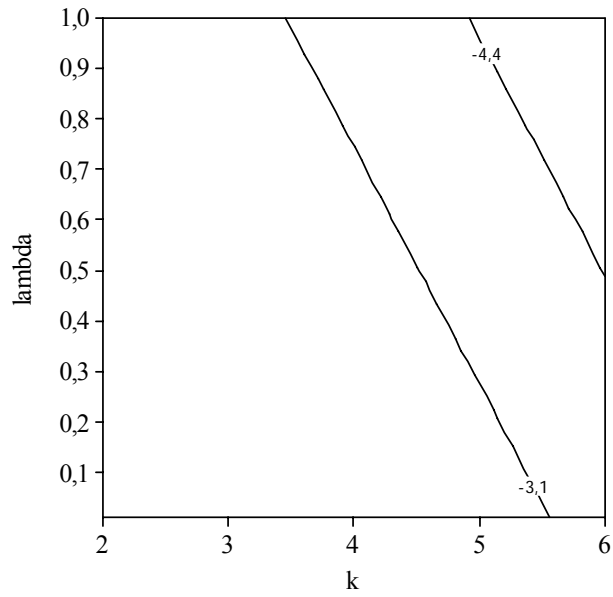


Figura 12 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0,7$ .

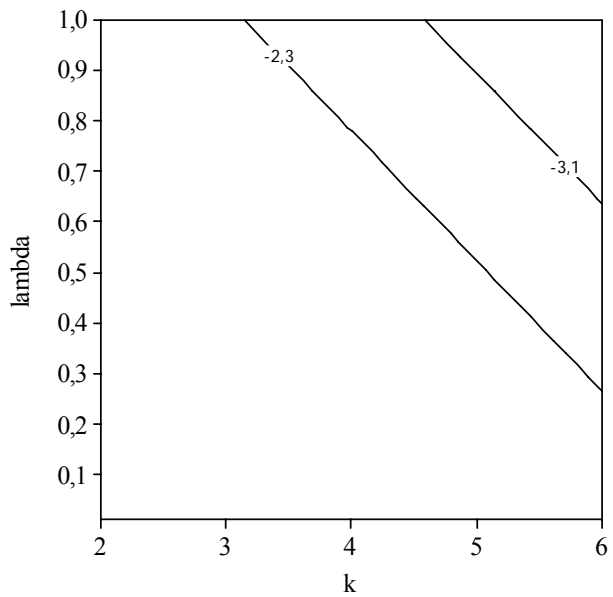


Figura 13 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0,8$ .

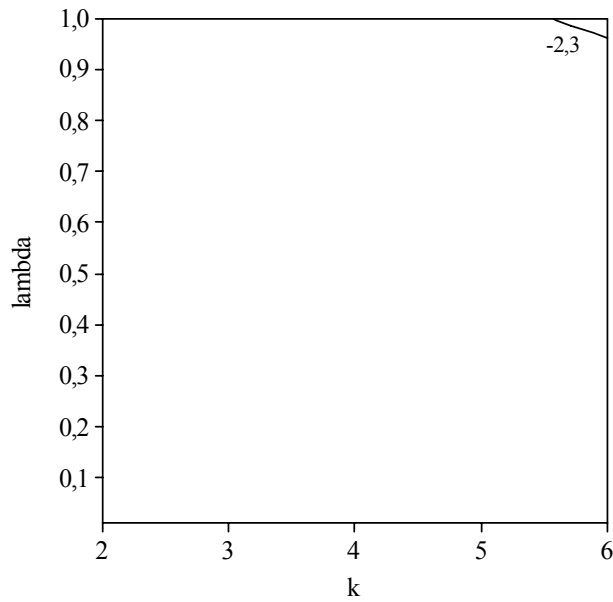


Figura 14 – Gráfico de contorno do logaritmo natural da probabilidade do alarme falso em função de  $k$  e  $\lambda$  para  $\rho = 0,9$ .

Com o monitoramento de processos autocorrelacionados por meio de gráficos de controle EWMA, é possível obter baixas probabilidades dos alarmes falsos, cujas magnitudes podem alcançar valores aproximadamente iguais a 0,05, 0,01 e 0,0027 para  $\rho \leq 0,6$  (Figuras 9, 10, 11, 12, 13 e 14). Tais isolinhas foram representadas pelos logaritmos naturais -3,1, -4,4 e -5,9 respectivamente.

Porém para  $\rho \geq 0,7$  (Figuras 12, 13 e 14) as probabilidades estimadas para os alarmes falsos são maiores que 0,0027 e podem chegar até 0,10 quando se utiliza no máximo  $k = 6$ .

Apesar de não estudados no presente trabalho e, principalmente, para  $\rho \geq 0,8$  (Figuras 12 e 13) deve-se construir tais gráficos de controle com  $k > 6$ , dado que seu aumento implica na redução do alarme falso.

#### 4.2. Recomendações para a construção do EWMA

De modo a recomendar a construção de um gráfico de controle EWMA que proporcione probabilidade de alarme falso baixa, ou seja,  $\alpha \leq 0,05$  pretende-se recomendar valores que proporcione esta probabilidade baixa, ou seja, combinações entre os valores de  $k$  e  $\lambda$  de acordo com os valores da autocorrelação de 1ª ordem.

De acordo com os resultados obtidos neste trabalho, foram estabelecidas as equações para  $k_{cod}$  em função de  $\lambda_{cod}$  para cada valor de  $\rho$  que estão representadas na

Tabela 9. Assim, para se obter determinado valor de  $k_{cod}$  substitui-se o valor de  $\lambda_{cod}$  na equação da respectiva autocorrelação de 1ª ordem, de acordo com o seu intervalo.

Tabela 9 – Valores de  $k_{cod}$  de acordo com o valor da autocorrelação de 1ª ordem

$\rho_l$	$k_{cod}$
0	-0,73581 - 0,0079 $\lambda_{cod}$ , para $-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,1	-0,66118 - 0,0304 $\lambda_{cod}$ , para $-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,2	-0,56700 - 0,0588 $\lambda_{cod}$ , para $-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,3	-0,44442 - 0,0959 $\lambda_{cod}$ , para $-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,4	-0,27831 - 0,1463 $\lambda_{cod}$ , para $-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,5	-0,04049 - 0,2178 $\lambda_{cod}$ , para $-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,6	0,32826 - 0,3292 $\lambda_{cod}$ , para $-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,7	0,9771 - 0,5252 $\lambda_{cod}$ , para $-0,04348 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,8	1,2473 - 0,9612 $\lambda_{cod}$ , para $0,257361 \leq \lambda_{cod} \leq 1$
0,9	3,5661 - 2,7789 $\lambda_{cod}$ , para $0,924446 \leq \lambda_{cod} \leq 1$

Na Tabela 10 temos os intervalos de  $k$  e  $\lambda$ . Assim, tem-se uma margem de variação desses termos. Portanto, existem diferentes combinações entre  $k$  e  $\lambda$  dentro dos intervalos citados que proporcionam  $\hat{\alpha} = 0,0124$ ,  $\hat{\alpha} = 0,0455$  e  $\hat{\alpha} = 0,0027$ . Porém não é qualquer combinação entre os valores de  $k$  e  $\lambda$  dentro desses intervalos que proporcionam tais estimativas. Para conhecer corretamente estas combinações, deve-se fazer uso das equações apresentadas na Tabela 4.2.

Para se ter  $\hat{\alpha} = 0,0124$ , a variação de  $\lambda_{cod}$  implica numa alteração no valor de  $k_{cod}$  de acordo com os valores apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Intervalos dos valores de  $k_{cod}$  e  $k$  e  $\lambda_{cod}$  e  $\lambda$  em função de  $\rho$

$\rho$	$\lambda_{cod}$	$k_{cod}$	$\lambda$	$k$
0	$-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$-0,74367 \leq k_{cod} \leq -0,72794$	$0,01 \leq \lambda \leq 1$	$2,51 \leq k \leq 2,54$
0,1	$-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$-0,69158 \leq k_{cod} \leq -0,63078$	$0,01 \leq \lambda \leq 1$	$2,61 \leq k \leq 2,73$
0,2	$-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$-0,62584 \leq k_{cod} \leq -0,50815$	$0,01 \leq \lambda \leq 1$	$2,74 \leq k \leq 2,98$
0,3	$-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$-0,54028 \leq k_{cod} \leq -0,34855$	$0,01 \leq \lambda \leq 1$	$2,91 \leq k \leq 3,30$
0,4	$-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$-0,42434 \leq k_{cod} \leq -0,13228$	$0,01 \leq \lambda \leq 1$	$3,15 \leq k \leq 3,73$
0,5	$-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$-0,25834 \leq k_{cod} \leq 0,177356$	$0,01 \leq \lambda \leq 1$	$3,48 \leq k \leq 4,35$
0,6	$-1 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$-0,00095 \leq k_{cod} \leq 0,656476$	$0,01 \leq \lambda \leq 1$	$2,99 \leq k \leq 5,31$
0,7	$-0,04348 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$0,451985 \leq k_{cod} \leq 1$	$0,483478 \leq \lambda \leq 1$	$4,9 \leq k \leq 6$
0,8	$0,257361 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$0,28616 \leq k_{cod} \leq 1$	$0,632394 \leq \lambda \leq 1$	$4,57 \leq k \leq 6$
0,9	$0,924446 \leq \lambda_{cod} \leq 1$	$0,790273 \leq k_{cod} \leq 1$	$0,962601 \leq \lambda \leq 1$	$5,58 \leq k \leq 6$

Desse modo e de forma resumida, são recomendadas as seguintes combinações entre  $k$  e  $\lambda$  (Tabela 11). Nessas combinações, preferiu-se adotar os menores valores de  $\lambda$  possíveis para que o gráfico EWMA pudesse apresentar diferenças mais distintas em relação ao de Shewhart.

Tabela 11 – Recomendações das combinações entre  $k$  e  $\lambda$  para diferentes autocorrelações

$\rho_I$	$\lambda_{cod}$	$k_{cod}$	$\lambda$	$k$
0	-1	-0,72794	0,01	2,54
0,1	-1	-0,63078	0,01	2,73
0,2	-1	-0,50815	0,01	2,98
0,3	-1	-0,34855	0,01	3,30
0,4	-1	-0,13228	0,01	3,73
0,5	-1	0,177356	0,01	4,35
0,6	-1	0,656476	0,01	5,31
0,7	-0,04348	1	0,48	6
0,8	0,257361	1	0,63	6
0,9	0,924446	1	0,96	6

A necessidade do alargamento do limite de controle pelo aumento do valor de  $k$  para construção do gráfico de controle EWMA em função da autocorrelação é devida à diminuição da variabilidade aleatória da variável resposta do processo à medida que a autocorrelação aumenta (Tabela 12). Ide et al. (2009) em seu trabalho verificou que no gráfico de controle EWMA, o alarme falso aumentou em função da autocorrelação.

Tabela 12 – Estimativa do desvio-padrão ( $\sigma_y$ ) para cada autocorrelação estudada e limites de controle para o primeiro subgrupo racional

$\rho$	$s_y = \frac{\overline{AM}}{d_2}$	LIC <sub>1</sub>	LSC <sub>1</sub>
0	0,9970	-0,0289	0,0216
0,1	0,9578	-0,0106	0,0416
0,2	0,9165	-0,0092	0,0454
0,3	0,8775	-0,0185	0,0393
0,4	0,8473	-0,0325	0,0306
0,5	0,8174	-0,0407	0,0303
0,6	0,7974	-0,0484	0,0362
0,7	0,7675	-2,1860	2,2347
0,8	0,7492	-2,8361	2,8278
0,9	0,7232	-4,1886	4,1426

Pela Tabela 12 observa-se que para cada aumento de 0,1 unidades na autocorrelação a variabilidade aleatória diminui em 3% em sua grandeza quando os dados são independentes.

Consequentemente, os limites de controle se tornam mais estreitos do que deveriam ser em consequência dessa subestimação da variância do processo. Isso comprova a necessidade de aumentar o valor de  $k$  à medida que  $\rho$  aumenta. Além disso, o aumento de  $\lambda$  que visa diminuir o peso da informação anterior também colabora no sentido de diminuir o efeito dos dados autocorrelacionados.

Costa *et al.* (2004) também já apresentaram métodos para alargamento dos limites de controle, que consistiu não no aumento do valor de  $k$ , mas na forma de estimar a variabilidade aleatória do processo. Em vez de estimá-la por meio da média da amplitude móvel, eles a estimaram por meio da fórmula tradicional do desvio-padrão que contempla todos os valores sem a consideração do subgrupo racional (Tabela 13).

Tabela 13 – Estimativa do desvio-padrão ( $\sigma_y$ ) para cada autocorrelação estudada e limites de controle para o primeiro subgrupo racional

$\rho_l$	$S_y^*$	$LIC_1$	$LSC_1$
0	0,9899	-0,0284	0,0210
0,1	0,9990	-0,0094	0,0404
0,2	1,0111	-0,0071	0,0433
0,3	1,0369	-0,0155	0,0363
0,4	1,0746	-0,0278	0,0258
0,5	1,1239	-0,0333	0,0228
0,6	1,2086	-0,0362	0,0241
0,7	1,3102	-1,5479	1,5965
0,8	1,5160	-2,3918	2,3835
0,9	1,9103	-4,6077	4,5617

Aplicando o método proposto por Costa *et al.* (2004) aos dados do presente trabalho, observou-se que, para todas as autocorrelações, todas as estimativas foram semelhantes às independentes. Isto explica que, ao contrário de aumentar o valor de  $k$ , pode-se trabalhar com o mesmo  $k$ , o que mostra que os limites de controle são os mesmos.

A variabilidade estimada para um processo autocorrelacionado diminui em função da dependência que ocorre entre os valores adjacentes. Nesse caso, como a amplitude móvel é a diferença entre os dois valores adjacentes, o aumento dessa dependência irá quebrar a independência da variação dos valores do próximo subgrupo

racional e conseqüentemente quando o valor seguinte for mais alto que o anterior, haverá uma tendência dos valores seguintes serem maiores que os anteriores. O mesmo ocorrerá se a tendência for de diminuição ao longo do tempo.

### 4.3. Descrição do Processo Autocorrelacionado

A seguir, é exemplificada a variação de uma variável resposta  $Y$  obtida de um processo com autocorrelação 0,9 (Figura 15).

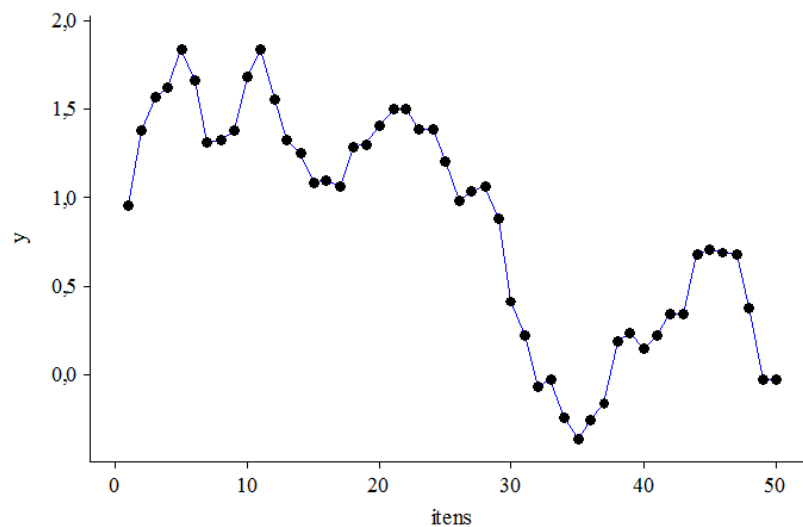


Figura 15 – Gráfico de dispersão dos itens  $x$  variável resposta  $Y$  para autocorrelação de 1ª ordem igual a 0,9.

A fim de visualizar a necessidade do alargamento dos limites de controle são apresentados os gráficos de controle EWMA para o monitoramento de uma variável resposta com  $\rho = 0,9$  e com as seguintes combinações ( $k = 3$  e  $\lambda = 0,2$  – Figura 15 e  $k = 6$  e  $\lambda = 1$  Figura 16), cujos limites de controle foram:  $LIC = 0,728$  e  $LSC = 0,990$  (Figura 15) e  $LIC = 0,073$  e  $LSC = 1,644$  (Figura 16).

De acordo com a Figura 16, percebe-se que quando os limites de controle eram mais estreitos o número de alarmes falsos era consideravelmente grande. O que mostra a necessidade de uma redução nesse número. Na Figura 17, utiliza-se do método de alargamento dos limites de controle, aumentando o valor de  $k$ . Com isso consegue-se diminuir o número de alarmes falsos no processo como se deseja.

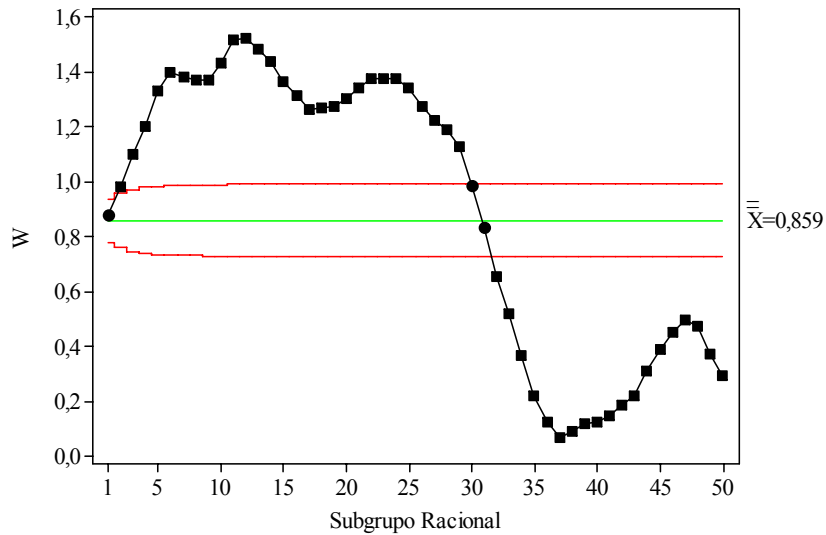


Figura 16 – Gráfico de controle EWMA para uma variável resposta com autocorrelação de 1ª ordem 0,9 em função de  $k = 3$  e  $\lambda = 0,2$ .

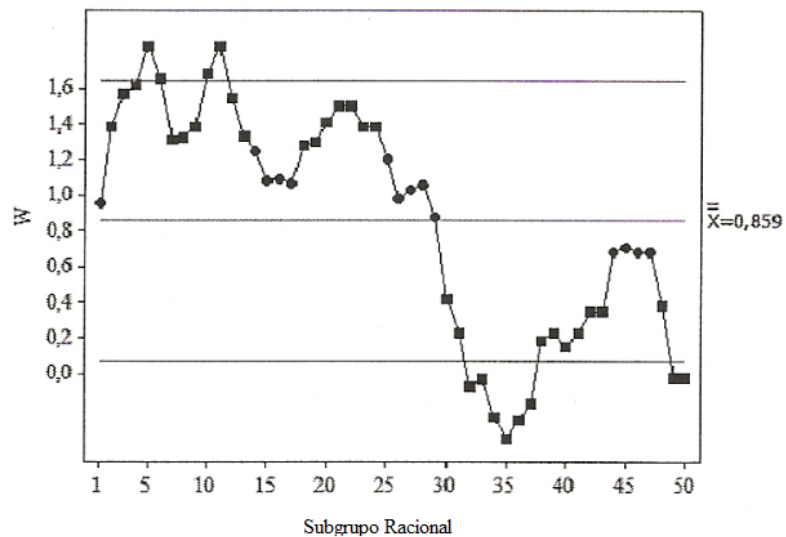


Figura 17 – Gráfico de controle EWMA para uma variável resposta com autocorrelação de 1ª ordem 0,9 em função de  $k = 6$  e  $\lambda = 1$ .

De acordo com as recomendações já mencionadas anteriormente, é possível construir uma Tabela 14, com os valores estimados da probabilidade do alarme falso e com os valores teóricos desta mesma probabilidade.

Tabela 14 – Estimativas e valores teóricos das probabilidades dos alarmes falsos para diferentes valores de  $k$  e na ausência de autocorrelação

$k$	$\hat{\alpha}$	$\alpha$
2	0,0662	0,0455
2,5	0,0129	0,0124
3	0,0025	0,0027
3,5	0,000492	0,000465
4	0,000096	0,0000633
4,5	0,0000187	0,00000679
5	0,00000366	0,000000573
5,5	0,000000714	3,79E-08
6	0,000000139	1,97E-09

## 5. CONCLUSÕES

Portanto, como as probabilidades estimadas e teóricas dos alarmes falsos foram semelhantes, conclui-se que, para condições mais complexas de serem deduzidas teoricamente, como no caso da autocorrelação, pode-se determiná-las por meio de simulação de dados.

Em processos com observações independentes, verificou-se que somente o termo  $k$  tem influência sobre a probabilidade do alarme falso. Já para processos em que se trabalha com observações autocorrelacionadas, os termos  $k$  e  $\lambda$  influenciam na probabilidade do alarme do alarme falso.

O que ocorre é que a probabilidade do alarme falso diminui em função dos aumentos dos valores do número de desvios-padrão da variável aleatória ( $k$ ) e  $\lambda$  (peso da amostra), e aumenta em função de  $\rho$  (autocorrelação de 1ª ordem).

Para que sejam alcançadas probabilidades dos alarmes falsos menores que 0,10, 0,05 e 0,01, foram recomendadas diferentes combinações entre valores de  $k$  (número de desvios-padrão da variável aleatória) e  $\lambda$  (peso da amostra) de acordo com o valor de  $\rho$ .

O método dos limites alargados foi indicado corretamente no trabalho, pois, com a diminuição da variabilidade aleatória, os limites de controle se tornaram mais estreitos do que deveriam ser. Isso foi devido à subestimação da variância do processo.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALWAN, L. C.; ROBERTS, H. V. Time-series modeling for statistical process control. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 6, n. 1, p. 87-95, 1988.

ATIENZA, O. O.; TANG, L. C.; ANG, B. W. A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology*, v. 30, p. 340-350, 1998.

CLARO, F. A. E.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de EWMA e de  $\bar{X}$  para monitoramento de processos autocorrelacionados. *Produção*, v. 17, n. 3, p. 536-546, Set./Dez. 2007.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. Atlas: São Paulo, 2004.

IDE, M.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I.; SOUZA, L. M. Gráficos de controle com uma abordagem de séries temporais. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*, v. 2, n. 1, p. 69-84, jan./jul. 2009.

HINES, W. W. *et al. Probabilidade e estatística na engenharia*. 4. ed. Tradução Vera Regina Lima de Farias e Flores. LTC: Rio de Janeiro, 2006.

KING, D. W. *Statistical quality control using the SAS<sup>®</sup> system*. SAS Institute Inc., Cary, North Carolina, 1995. 383 p.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 4. ed. Tradução Ana Maria Lima de Farias e Vera Regina Lima de Farias e Flores. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros*. 4. ed. Tradução Verônica Calado. LTC: Rio de Janeiro, 2009.

MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. Some statistical process control methods for autocorrelated data. *Journal of Quality Technology*, v. 23, p. 179-193, 1991.

MUNIZ, J. A.; OLIVEIRA, M. S. *Controle estatístico e gestão da qualidade*. Lavras: UFLA/FAEPE, 2000.

RIBEIRO JÚNIOR, J. I.; GONÇALVES, T. C. Métodos alternativos de controle estatístico de processos univariados. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*, v. 2, n. 1, p. 85-95, jan./jul. 2009.

RUNGER, C. G.; WILLEMAIN, T. R. Model based and model-free control of autocorrelated process. *Journal of Quality Technology*, v. 27, p. 283-292, 1995.

RUNGER, C. G.; WILLEMAIN, T. R. Batchmeans control charts for autocorrelated data. *IIE Transactions*, v. 28, p. 483-487, 1996.

SOUZA, R. C.; CAMARGO, M. E. *Análise e previsão de séries temporais – os modelos arima*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora: Regional, 2004. 187 p.

SOUZA, L. M.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I.; REIS, G. M.; IDE, M. S. Eficiência dos Gráficos de Controle XBARRA, EWMA e CUSUM. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*, v. 1, n. 1, p. 81-94, set./dez. 2008.

SUPERVILLE, C. R.; ADAMS, B. M. An evaluation of forecast-based quality control schemes. *Communications in Statistics-Simulation and computation*, v. 23, p. 645-661, 1994.

TESTIK, M. C. Model inadequacy and residual control charts for autocorrelated processes. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 21, p. 115-130, 2004.

TOLOI, C. M: C.; MORETTIN, P. A. *Previsão de séries temporais*. São Paulo: Atual Editora, 1985.

VASCONCELOS, M. A. S.; ALVES, D. *Manual de econometria*. São Paulo: Editora Atlas, 2000.

WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas para o gerenciamento de processos*. UFMG: Fundação Christiano Ottoni, Belo Horizonte, 1995.

WOODAL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Research issues and ideas in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, v. 31, n. 4, p. 376-386, 1999.