Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Ana Paula Rezende Calado da Silva

Cálculo de Áreas no Ensino Médio

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Ana Paula Rezende Calado da Silva

CÁLCULO DE ÁREAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae.*

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

S586c
2017

Silva, Ana Paula Rezende Calado da, 1974-

Cálculo de Áreas no Ensino Médio / Ana Paula Rezende Calado da Silva. – Florestal, MG, 2017.

x, 64f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.64.

1. Matemática - Ensino médio. 2. Matemática - Cálculo de áreas. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

CDD 22 ed. 510.1

Ana Paula Rezende Calado da Silva

CÁLCULO DE ÁREAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae.*

Aprovada: 30 de março de 2017.

Rodrigo Geraldo do Couto

Justino Muniz Júnior

Mehran Sabeti
(Coorientador)

Alexandre Alvarenga Rocha
(Orientador)

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu esposo Carlos e aos meus filhos Mariana, Rafael(in memorian) e Lucas.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela presença constante em minha vida, direcionando sempre meu caminho.

Agradeço a minha família, em especial meu esposo Carlos, pelo apoio e incentivo.

Agradeço aos meus filhos pela compreensão e por serem as razões da minha vida.

Agradeço aos amigos do PROFMAT pela solidariedade.

Agradeço ao meu orientador por seu apoio, dedicação e paciência.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α letra grega Alfa	ϵ letra grega Épsilon
β letra grega Beta	θ letra grega Teta
δ letra grega Delta	π letra grega Pi

Lista de Figuras

Resumo

SILVA, Ana Paula Rezende Calado da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2017. **Cálculo de Áreas no Ensino Médio**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha. Coorientador: Mehran Sabeti.

O assunto principal deste projeto é o cálculo de áreas sob gráficos de funções e de áreas de regiões delimitadas por uma curva plana simples. A proposta é apresentar estes cálculos sem o uso de técnicas do cálculo, ou seja, fazer o estudo do tema de uma maneira mais primitiva de modo que possa ser apresentada sem o conhecimento prévio de integral e do Teorema Fundamental do Cálculo. Propõe-se também buscar informações históricas e paralelamente entender como eram feitos os cálculos de áreas com o rigor matemático da época, além de analisar de que maneira as contribuições de vários grandes matemáticos conduziram ao Cálculo contemporâneo. Deve-se desenvolver o estudo sobre o cálculo de áreas e métodos de estudos para o Ensino Médio. Além disso, este projeto propõe uma introdução ao estudo de curvas planas com o objetivo de despertar nos alunos o aprendizado desse tema. Como parte complementar do trabalho, deve-se apresentar problemas de áreas utilizando técnicas atuais do Cálculo, como, por exemplo, a desigualdade isoperimétrica.

Abstract

SILVA, Ana Paula Rezende Calado da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2017. **Mathematical Study of Abstract Theory**. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha. Co-adviser: Mehran Sabeti.

The main subject of this project is the calculation of areas under graphs of functions and areas of regions delimited by a simple flat curve. One of the proposals is to present this study without use of techniques of Calculus, that is, present in a more primitive way that can be presented without prior knwledge of integral and the Fundamental theorem of Calculus. It is also proposed to seek historical information and in parallel to understand how calculations were made of areas with the mathematical rigor of his time, beside analyzing how the time led to the contemporary Calculus. The study on the calculation of areas and methods of study for High School showld be developed. In addition, this project proposes an introduction to the study of flat curves with the purpose of awakening in students the learning of this theme. As a complementary part of the work, area problems should be presented using current techniques of Calculus, such as isoperimetric inequality.

Sumário

1 Introdução

A motivação para a escolha do tema está relacionada ao cálculo de áreas que fascina matemáticos desde 400 anos a.C. Os gregos naquela época já faziam cálculos de áreas de figuras; entretanto, as áreas das figuras eram denominadas quadraturas. Este nome deve - se ao fato de que, através de sequências sucessivas de transformações, é possível reduzir qualquer figura poligonal a um triângulo de mesma área, esse triângulo a um paralelogramo, o paralelogramo a um retângulo e este, por sua vez, a um quadrado de área igual à área da figura poligonal. Desta forma, para qualquer figura poligonal plana, é possível encontrar um quadrado de mesma área. Dizia - se, nestes casos, que os polígonos eram quadráveis. Nos termos atuais, tinham áreas iguais à de um quadrado, em cada caso. Surge então o nome quadratura para o que chamamos hoje de área das figuras ou curvas.

Um dos grandes desafios para os matemáticos daquele período era o cálculo da quadratura de figuras curvas, haja vista a dificuldade de se reduzir a quadrados tais figuras. Regiões de forma circular deram origem aos primeiros estudos sobre as tentativas de se quadrar essas figuras. Hipócrates (430 a.C), parecia ter demonstrado um teorema sobre a quadratura do círculo.

O nosso interesse principal no ramo da matemática grega reside no trabalho de Arquimedes, a quem de acordo com a maioria dos historiadores, deve-se a antecipação (ou mesmo a invenção) do cálculo integral. Em relação às suas obras, destacaremos algumas, seu mais famoso método demonstração: o método de exaustão; além de seus efeitos, seus fundamentos e suas contribuições para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

No século XVII a matemática sofrera uma transformação importante, frequentemente associada à obra de René Descartes, em particular na geometria, com a intervenção de métodos algébricos e infinitesimais. E na segunda metade do mesmo século levaram a proposta de técnicas infinitesimais para tratar de problemas com sentido físico, como os que envolviam o cálculo de tangentes a curvas e de áreas definidas por elas. Estas técnicas começaram a ser sistematizadas nas últimas décadas do século XVII, por Gottfried Wilhelm von Leibniz e Isaac Newton, conhecidos como os fundadores do que chamamos hoje de ”cálculo infinitesimal”.

O Problema Isoperimétrico (isoperimétrico = mesmo perímetro) teve a sua origem na Grécia Antiga, cerca do século IX a.C., baseada numa lenda, a Lenda de Dido. E pode ser formulado da seguinte forma: Entre as curvas simples fechadas do plano, com um dado comprimento, qual é a que delimita a maior área possível?

Neste trabalho será mostrado que o círculo é a figura que delimita a maior área utilizando técnicas atuais do Cálculo.

Historicamente a disciplina Matemática tem suas minúcias pautadas nas dificuldades de aprendizagem.

Dados das avaliações institucionais como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), promovidos pelo Governo Federal, apontam que a fragilidade quanto ao rendimento dos alunos ao concluírem o Ensino Médio estão relacionados a dificuldades em conceitos e procedimentos fundamentais, tais como operar com números reais, interpretar gráficos e tabelas, dentre outras coisas.

Neste trabalho será defendido a História da Matemática como suporte para o professor em sala de aula. Ela oferece a importante possibilidade de uma maior compreensão de conceitos matemáticos, por meio de estudos da construção histórica deles. Além disso, o uso da história no processo de ensino-aprendizagem da matemática também possibilita a desmistificação dessa ciência e estimula a não alienação do seu ensino. Percorrer os passos do desenvolvimento histórico de um conceito pode auxiliar o trabalho investigativo em sala de aula, pois em muitos momentos o aluno pode ter dificuldades semelhantes àquelas por quais passaram os matemáticos no passado.

2

Método de Exaustão

Neste capítulo será apresentado a vida de Arquimedes e o método de exaustão; além de seus efeitos, seus fundamentos e suas contribuições para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

2.1 Arquimedes

Nesta seção será apresentada a vida de um dos maiores matemáticos da história, Arquimedes de Siracusa.

Figura 2.1: Arquimedes

Arquimedes nasceu em Siracusa, na Sicília em 287 a.C., estudou em Alexandria, no Egito, com os estudantes de Euclides. Nasceu mais ou menos no momento em que Euclides morreu, em torno da segunda década do século III a.C.. Consagrou-se à Matemática, mais especialmente à Geometria. Muito jovem ainda começou a distinguir-se por seus trabalhos científicos. De regresso à Siracusa dedicou-se ao estudo da Geometria e da Mecânica, conseguindo descobrir princípios e fazer aplicações que o imortalizaram. Seu pai era um astrônomo, e Arquimedes também adquiriu uma reputação em astronomia.

Durante a Segunda Guerra Púnica a cidade de Siracusa se envolveu na luta entre Roma e Cartago. Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para manter o inimigo à distância. Catapultas para lançar pedras, cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos, invenções para queimar os navios.

Arquimedes é um dos matemáticos mais conhecidos do período pós-euclidiano. Seus livros possuem uma estrutura bastante distinta daquela que caracteriza os Elementos de Euclides e seus métodos não reproduzem o padrão euclidiano. Não se percebe em seus trabalhos uma preocupação nem em usar, nem em defender um método de tipo axiomático, e a forma como expõe seus resultados não parece ter sofrido influência do estilo dos Elementos de Euclides. Algumas obras de Arquimedes foram pouco lidas. Uma das mais conhecidas é a "Quadratura da Parábola".

Das obras que foram preservadas, destacam-se as seguintes em ordem cronológica:

Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I;
A Quadratura da Parábola;
Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II;
Sobre a Esfera e o Cilindro;
Sobre as Espirais;
Sobre os Cones e os Esferóides;
Sobre os Corpos Flutuantes;
A Medida de um Círculo;
O Contador dos Grãos de Areia.

Segundo Howard Eves (2004)

"Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada e objetiva."

Em seu tratado *Sobre a Medida do Círculo*, obra composta por apenas três proposições, "calcular" a área do círculo era uma maneira de encontrar uma figura retilínea, um triângulo, no caso, cuja área seja igual à área do círculo. Esse foi um dos resultados mais populares de Arquimedes em sua época e venerado por vários matemáticos durante muitos séculos. Intuitivamente, naquele período, muitos já propunham a área do círculo como sendo:

O rolar de uma roda no chão e conseqüentemente o distender da circunferência no longo de sua reta sugerem a relação entre a área de um círculo e o comprimento de sua circunferência, isto é: Área $= \frac{1}{2}$*comprimento da circunferência* $\times$ *raio.*

Para determinar o valor aproximado de π, Arquimedes começou com um hexágono regular inscrito e um hexágono circunscrito e calculou os perímetros dos polígonos obtidos, dobrou progressivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados. Como resultado de seus cálculos, obteve uma aproximação para π no intervalo de $3{,}14084 < \pi < 3{,}142858$.

Mereceram destaque no trabalho de Arquimedes problemas que hoje estão no domínio do cálculo diferencial e integral. Em seu tratado Sobre Espirais, definiu a espiral como o lugar dos pontos que se movem uniformemente em uma semirreta, enquanto a semirreta tem um movimento de rotação uniforme em torno de sua origem. Ou seja, trata-se da curva dada em coordenadas polares por $r = a\theta$, onde $a > 0$ é uma constante. Essa curva, hoje conhecida como espiral de Arquimedes, foi proposta como um método para a quadratura do círculo e para a trisseção do ângulo, sem evidentemente fazer uso da régua e do compasso. A espiral é uma curva definida de forma dinâmica, o que contrasta com o caráter estático da geometria grega tradicional. Também por um método dinâmico, Arquimedes encontrou tangentes: decompôs o movimento de um ponto da espiral em uma componente radial e em outra circular, usando em seguida um paralelogramo de velocidades para determinar a direção da velocidade do movimento e, assim, a direção da tangente. Realizou ainda vários cálculos envolvendo comprimentos e áreas, empregando técnicas do método de exaustão.

Apesar da originalidade de Arquimedes, ele não teve discípulos gregos. Mas os matemáticos árabes interessaram pelo método de exaustão.

Conforme Boyer (1995):

"Para achar áreas e volumes, o versátil Arquimedes usou sua própria versão primitiva do cálculo integral, que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao cálculo atual. Numa carta a Eratóstenes, Arquimedes expôs seu "método da alavanca" para descobrir fórmulas de áreas e volumes. Mas, quando publicava provas para essas fórmulas, ele utilizava o método de exaustão para se ajustar aos padrões de rigor da época."

Deve-se notar que a frase "método de exaustão" não era usada pelos gregos antigos, sendo uma invenção moderna; mas está tão firmemente estabelecida na história da matemática que continuamos a fazer uso dela.

2.2 Método de Exaustão

O Método de Exaustão é um método creditado a Eudoxo (390-338 a.C) usado para calcular áreas ou volumes. Ele é rigoroso mas estéril, pois permite construir uma elegante prova se conhecida a fórmula mas não se usa para descobrir um resultado. Assemelha-se ao princípio de indução matemática.

Iniciamos o estudo do Método de Exaustão apresentando o Axioma de Eudoxo. Esse axioma foi enunciado explicitamente, pela primeira vez, por Arquimedes, por isso é às vezes chamado de Axioma de Arquimedes. Aqui preferimos chamá-lo de Axioma de Eudoxo, pois o próprio Arquimedes lhe dava o crédito.

2.2.1 Demonstração do Axioma de Eudoxo (Método de Exaustão)

Nessa seção vamos explicitar e demonstrar o método de Eudoxo.

Do axioma de Eudoxo (ou Arquimedes) é fácil, por uma redução ao absurdo, provar uma proposição que formava a base do método de exaustão dos gregos:

Axioma 2.1: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

Demonstração. Em linguagem matemática moderna, temos: seja M uma grandeza qualquer; ϵ uma grandeza prefixada e $\frac{1}{2} \leq r < 1$. Fazendo $M - Mr = M_1$, segue que $M_1 = M(1-r)$, mas $M_1 - M_1 r = M_2 \Rightarrow M_2 = M_1(1-r) \Rightarrow M_2 = M(1-r)(1-r) \Rightarrow M_2 = M(1-r)^2$, sabe-se que $M_2 - M_2 r = M_3 \Rightarrow M_3 = M_2(1-r) \Rightarrow M_3 = M(1-r)^2(1-r) \Rightarrow M_3 = M(1-r)^3 \ldots$ Repetindo sucessivamente chegamos a $M_n = M(1-r)^n$. Como $0 < 1 - r \leq \frac{1}{2}$, temos que $(1-r)^n$ tende a zero com o crescimento de n . Daí, encontra-se n , tal que $M_r = M(1-r)^n < \epsilon$, qualquer que seja o valor dado para ϵ . □

"Esta proposição que chamaremos de "propriedade de exaustão" equivale à seguinte formulação moderna: se M é uma grandeza dada, ϵ uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que: $M(1-r)^N < \epsilon$, para todo $n > N$. Isto é, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $lim_{n \to \infty} M(1-r)^n = 0$. Ainda mais, os gregos usaram essa propriedade para provar teoremas sobre as áreas e volumes de figuras curvilíneas." (Boyer, op cit).

Foi muito usado por Arquimedes (287-212 a.C) que aproximou a área de um figura plana pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência.

O método de exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. No entanto, enquanto no cálculo se soma um número infinito de parcelas, Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir uma soma de uma série infinita seria necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam. Não é, pois, correto falar do método de exaustão como um processo geométrico de passagem para ao limite. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluída da matemática grega, mesmo em Arquimedes. Mas, no entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior da ideia de limite e de infinito no século XIX. De fato, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Arquimedes, por exemplo, para calcular a área da parábola, inscreveu um número n de triângulos de modo que quanto maior fosse esse número, menor seria a diferença entre a área da parábola e a soma das áreas dos triângulos. Sendo assim, essa diferença pode ser tão pequena quanto se queira, logo, Arquimedes conseguiu calcular a área de uma parábola usando o cálculo da área de triângulos (veremos a Quadratura da Parábola por Arquimedes na seção 3.2).

Antífon, que viveu por volta de 400 a.C., disse que por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono a fim de exaurir-se-ia. E como se pode construir um quadrado de área igual a de qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual a do círculo. Antífon, então, já apresentou a ideia básica do método de exaustão, mas é a Eudoxo (viveu por volta de 370 a.C.) que é creditado esse método.

2.3 Quadratura da Parábola

O método de exaustão foi empregado em muitos problemas de quadraturas de figuras limitadas por linhas curvas. Trataremos aqui do exemplo da quadratura da parábola, como apresentado por Arquimedes.

Dos tratados onde houve aplicação do método de exaustão, o mais popular era a *Quadratura da Parábola*. Sabe-se que, na matemática grega, a determinação de áreas fazia-se por comparação com áreas conhecidas, como, por exemplo, a área do quadrado. Medir uma figura geométrica, para os geômetras gregos, não era encontrar um número, mas sim uma figura conhecida com o mesmo comprimento ou área da primeira. Nessa perspectiva, o que se coloca não é o problema de calcular a medida de uma área, mas o problema de determinar a relação entre duas áreas: a área que se quer conhecer e uma área já conhecida, comparando-as.

No caso da quadratura da parábola a comparação se dava entre a área limitada por uma parábola e por um segmento de reta (chamado segmento parabólico) com a área de um triângulo tendo este segmento de reta como base. Arquimedes provou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e a mesma altura do segmento parabólico.

Para Arquimedes, uma parábola era definida pela seção de um cone circular reto, obtido girando-se um triângulo retângulo isósceles em torno de um dos lados que formam o ângulo reto. Na figura, o triângulo retângulo CKB gira em torno do cateto CK, a parábola é obtida quando seccionamos este cone por um plano ($WTSR$) perpendicular à hipotenusa (CB) do triângulo que foi girado.

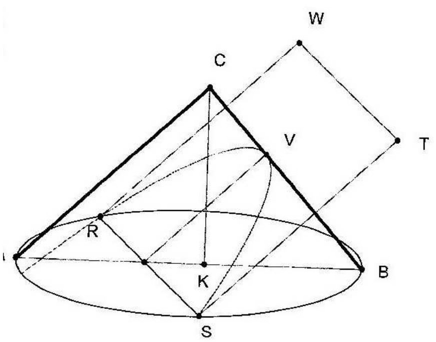


Figura 2.2: Definição da Parábola

Arquimedes define o que significa base, altura e vértice de um segmento parabólico: a base é a reta que interrompe a parábola, a altura é a perpendicular máxima que pode ser traçada da curva até a base e o vértice o ponto a partir do qual a altura é traçada. As outras alturas dos outros triângulos traçados são obtidas por interseções da curva (parábola) com retas paralelas à altura máxima da parábola. Essas retas são traçadas tendo como referência de partida, os respectivos pontos médios em que foi divida a base da parábola.

Esclarecido como formar o polígono inscrito na parábola, este polígono se aproxima da parábola, isto é, pode ser inscrito nesta um polígono de tal forma que os segmentos restantes sejam menores do que qualquer grandeza determinada.

Quadratura da Parábola

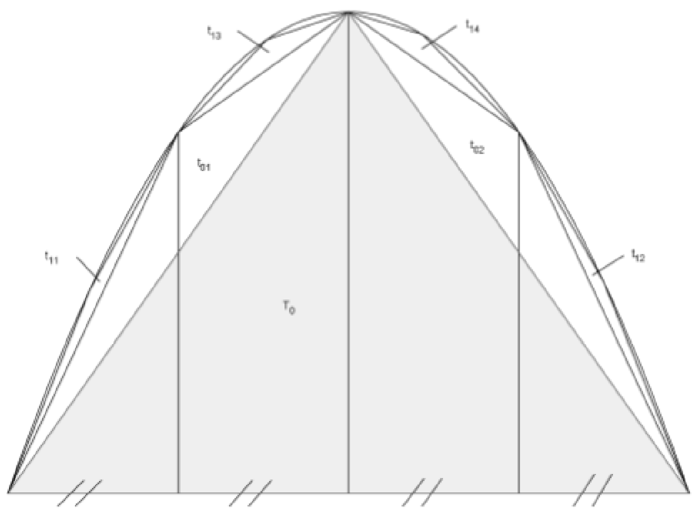


Figura 1
Fonte: Scientific American Brasil nº 7, 2005.

Figura 2.3: Quadratura da Parábola

Para mostrar como Arquimedes provou a quadratura da parábola usaremos algumas proposições abaixo:

Proposição 2.4: Se por um ponto P de uma parábola traçarmos uma reta PV que é o próprio eixo da parábola ou é paralela a esse eixo, e se Qq é uma corda paralela à tangente à parábola por P e que corta PV em V, então $QV = Vq$. Reciprocamente, se $QV = Vq$, a corda Qq será paralela à tangente por P.

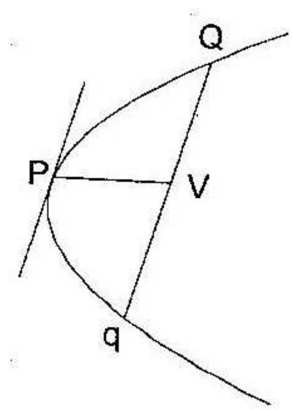


Figura 2.4: Proposição 2.4

Proposição 2.5: Se por um ponto da parábola traçarmos uma reta que é o eixo ou é paralela ao eixo da parábola, como PV, e se por dois outros pontos da parábola Q e R traçamos retas paralelas à tangente à parábola por P e que cortam PV, respectivamente em V e W, então $\frac{PV}{PW} = \frac{(QV)^2}{(RW)^2}$

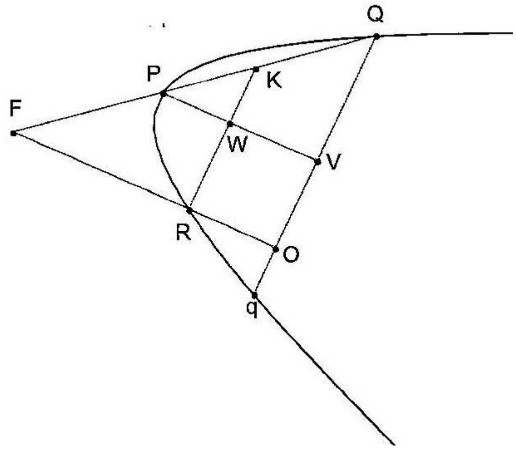


Figura 2.5: Proposição 2.5

Agora serão apresentadas as proposições essenciais para a quadratura da parábola enumeradas por Arquimedes.

Proposição 2.6: Sejam P o vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola e R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ. Seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta Qq, um segmento paralelo à tangente por P. Então, $PV = \frac{4}{3}RM$

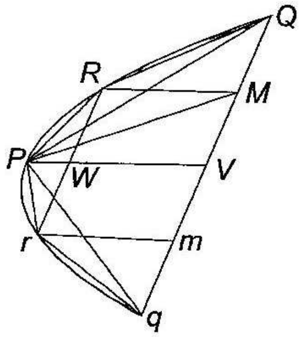


Figura 2.6: Proposição 2.6

Demonstração. Primeiro mostraremos que $QV = 2MV$. Seja Y o ponto de interseção de PQ e RM. Como RM é paralela ao eixo PV pela Proposição 2.4 Y é o ponto médio de PQ. Já que o triângulo PQV é semelhante ao triângulo YQM então M é ponto médio de QV logo $QV = 2MV$. A reta Rr, uma paralela a Qq por R, corta PV em W. Então, pela Proposição 2.5, temos que $\frac{PV}{PW} = \frac{(QV)^2}{(RW)^2}$.

Mas, por construção, $RW = MV$ e temos assim que:

$$\frac{PV}{PW} = \frac{(QV)^2}{(RW)^2} = \frac{(2MV)^2}{(MV)^2} = \frac{4}{1}.$$

Logo, $PW = \frac{1}{4}PV$. Assim, temos

$$PV = PW + WV$$

$$PV = \frac{1}{4}PV + RM$$

$$RM = PV - \frac{1}{4}PV$$

$$RM = \frac{3}{4}PV$$

logo temos que

$$PV = \frac{4}{3}RM$$

. □

Proposição 2.7: Sejam Qq a base e P o vértice de um segmento parabólico PQq. Seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ. Então: $\Delta PQq = 8\Delta PRQ$.

Demonstração. Seja PV a paralela ao eixo que corta Qq em seu ponto médio V (pela Proposição 2.4, pois Qq é paralela à tangente em P). A reta paralela ao eixo por R corta PQ em seu ponto médio Y (Proposição 2.4), logo, esta mesma corta QV em seu ponto médio M(considerando o triângulo PQV semelhante a YQM, como na Proposição 2.5). Em seguida, traçamos o segmento PM. Sabemos que $PV = \frac{4}{3}RM$ e temos que $PV = 2YM$, pois os triângulos PQV e YQM são semelhante e $QV = 2QM$. Logo, como

$$2YM = PV = \frac{4}{3}RM = \frac{4(RY + YM)}{3}$$

$$2YM = \frac{4RY}{3} + \frac{4YM}{3}$$

$$6YM = 4RY + 4YM$$

$$2YM = 4RY,$$

temos que

$$YM = 2RY.$$

Podemos mostrar, assim, que: $\Delta PQM = 2\Delta PRQ$ pois

$$\Delta PQM = \Delta YQM + \Delta PYM,$$

$$\Delta PRQ = \Delta RQY + \Delta PRY$$

e ΔYQM tem a mesma altura (até Q) que ΔYRQ e duas vezes a base ($YM = 2RY$), logo $\Delta YQM = 2\Delta YRQ$; de modo análogo, ΔPYM tem a mesma altura (até P) que ΔPRY e duas vezes a base, portanto, $\Delta PYM = 2\Delta PRY$.

Como $\Delta PQM = 2\Delta PRQ$, podemos mostrar que $\Delta PQV = 4\Delta PRQ$, pois $\Delta PQM = \Delta PMV$ uma vez que têm a mesma altura (até P) e bases iguais

$(QM = MV)$. Logo,

$$\Delta PQV = \Delta PQM + \Delta PMV = 2\Delta PQM = 4\Delta PRQ.$$

Mas, como V divide Qq em dois, segue-se que $\Delta PQq = 8\Delta PRQ$.

Mas, se o segmento RW é traçado de modo a encontrar a parábola novamente em r, temos que $RW = rW$, pois $RW = MV = Vm = rW$ e a mesma prova mostra que $\Delta PQq = 8\Delta Prq$. □

Mostraremos agora como Arquimedes efetua a quadratura da parábola, usando o método de exaustão.

Suponhamos que a área do triângulo ΔPQq é T. Como

$$T = \Delta PQq = 8\Delta PRQ$$

e

$$T = \Delta PQq = 8\Delta Prq,$$

decorre

$$\Delta PRQ + \Delta Prq = \frac{T}{4}.$$

Podemos continuar o mesmo processo e construir triângulos na diferença entre a parábola e o polígono obtido pela união dos triângulos ΔPQq, ΔPRQ e ΔPrq, o que fornecerá triângulo de áreas $\frac{T}{4^2}, \frac{T}{4^3}$, e assim por diante. A área do segmento parabólico seria a soma das áreas de todos estes triângulos. A próxima proposição permite a Arquimedes aproximar a área, sem usar a soma de uma série infinita.

Proposição 2.8: Dada uma sucessão finita de áreas, $A, B, C, D, ..., Y, Z$, das quais A é a maior, e cada uma é quatro vezes sua sucessora, então,

$$A + B + C + D + ... + Y + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

Demonstração. Sejam $b, c, d, ...$ áreas tais que

$$b = \frac{1}{3}B$$

$$c = \frac{1}{3}C$$

$$d = \frac{1}{3}D$$

$$...y = \frac{1}{3}Y$$

$$z = \frac{1}{3}Z$$

Segue-se então, facilmente, que:

$$B + b = \frac{1}{3}A$$

$$C + c = \frac{1}{3}B$$

$$...$$

$$Z + z = \frac{1}{3}Y$$

Então,

$$B + C + D + ... + Z + b + c + d + ... + z = \frac{1}{3}(A + B + C + ... + Y)$$

Por outro lado,

$$b + c + d + ... + y = \frac{1}{3}(B + C + D + ... + Y)$$

Então, por subtração

$$B + C + D + ... + Z + z = \frac{1}{3}A,$$

ou seja,

$$A + B + C + D + ... + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

Arquimedes aplica este resultado aos triângulos obtidos sucessivamente, usando o triângulo PQq e obtém

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + ... + \frac{1}{4^{n-1}}T + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}T = \frac{4}{3}T.$$

□

Agora temos todos os elementos para provar a quadratura da parábola:

Proposição 2.9: Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda Qq (considere como S) é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele.

Demonstração. Para provar que duas grandezas A e B são iguais, devemos mostrar que não se pode ter $A < B$ e $A > B$, o que força ser $A = B$.

Primeiramente suponhamos que $S > \frac{4}{3}T$.

Podemos dizer então que existe n triângulos tais que a soma das suas áreas

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + ... + \frac{1}{4^{n-1}}T = A$$

que seja inferior a S e superior a $\frac{4}{3}T$ (argumento geométrico). Mas como

$$A = \frac{4}{3}T - \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}T,$$

A seria inferior a $\frac{4}{3}T$, o que seria contraditório com a hipótese de que A é superior a $\frac{4}{3}T$, o que leva a uma contradição.

Agora suponhamos que $S < \frac{4}{3}T$ e consideremos a diferença $\frac{4}{3}T - S$. Pelo Lema de Euclides, deve haver um inteiro m tal que a área $T_m = \frac{1}{4^{m-1}}T$ seja inferior a esta diferença. Mas por outro lado,

$$T_m > \frac{1}{3}T_m = \frac{1}{3.4^{m-1}}T = \frac{4}{3}T - T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

e

$$\frac{4}{3}T - S > T_m > \frac{4}{3}T - T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right),$$

(pela desigualdade anterior). Logo,

$$S < T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right),$$

o que contradiz a evidência geométrica, uma vez que

$$T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

é a área de um polígono inscrito no segmento parabólico. Portanto a área da parábola limitada pela corda é igual a $\frac{4}{3}$ do triângulo inscrito. □

2.10 A Área do Círculo

Na posição de maior matemático de todos os tempos, Arquimedes não poderia ficar de fora da história da Quadratura do Círculo. "Estreitamente ligado ao problema de quadratura está o do cálculo de π, razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Porém, a primeira tentativa científica de calcular π parece ter sido a de Arquimedes". (EVES, 2008, p. 141).

Em *A Medida de um Círculo*, Arquimedes demonstra primeiro que a área A de um círculo de raio r é igual a de um triângulo cuja base é igual ao comprimento da circunferência C do círculo e a altura é r, ou seja, $A = \frac{rC}{2}$. Para encontrar a área do círculo Arquimedes calculou os limites entre os quais essa área se estende e depois estreitou pouco a pouco esses limites até mais ou menos a área real. Para isso usou um hexágono inscrito e um circunscrito ao círculo subdividindo os lados até chegar ao polígono com 96 lados. A área do polígono interno estabelecia o limite inferior e a área do polígono externo fixava o limite superior.

Arquimedes percebeu que com frequência bastava fazer duas aproximações comparativas fáceis de uma resposta que propusesse um limite superior e um outro superior - entre os quais residiria a resposta. Quanto maior a exatidão exigida, mais estreitos os limites. Para o exemplo da área os lados de um polígono podiam ser aumentados indefinidamente, reduzindo assim a diferença entre os limites superior e inferior até um resultado infinitamente pequeno. Assim teve o início do cálculo, embora outros 2000 anos ainda fossem necessários antes que alguém desenvolvesse essa ideia. Isso só aconteceu a partir de 1666, quando Newton formulou os elementos essenciais do cálculo diferencial.

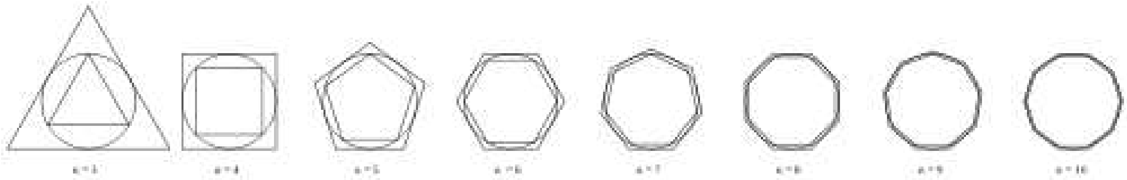


Figura 2.7: Método da exaustão que permite o cálculo de área do círculo.

Neste trabalho para calcular a área do círculo usaremos a área de um segmento circular. Depois multiplicaremos por $2n$ onde n é o número de triângulos formados pelos lados do polígono.

Antes de mostrarmos a área do círculo vamos provar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

Ou seja, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\frac{senx}{x}$ quando x tende a 0, é 1.

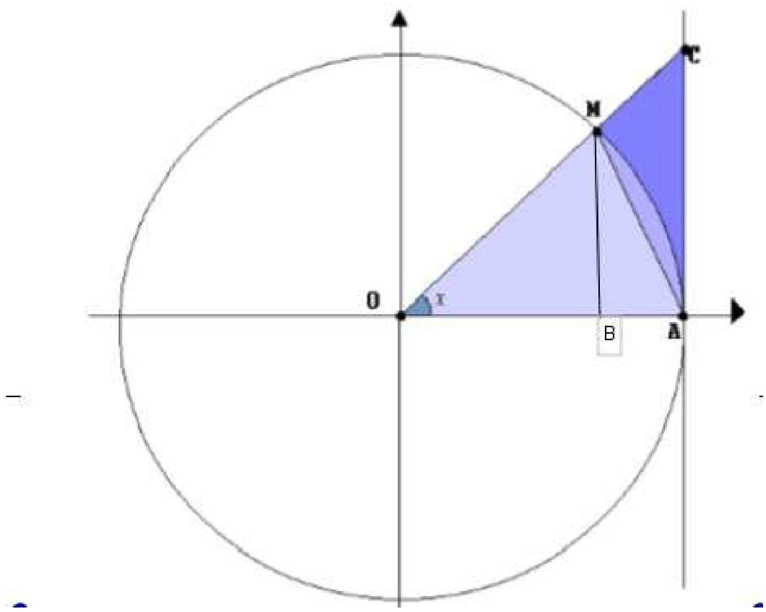


Figura 2.8: Limite Fundamental

Sabemos que:

Área do Δ MOA $\leq$ Área do setor correspondente do arco $x \leq$ Área do Δ COA

Área do Δ MOA $= \frac{OA.MB}{2} = \frac{1.senx}{2} = \frac{senx}{2}$

Área do setor correspondente ao arco x $= \frac{OA.x}{2} = \frac{1.x}{2} = \frac{x}{2}$

Área do ΔCOA $= \frac{OA.AC}{2} = \frac{1.tgx}{2} = \frac{tgx}{2}$

Substituindo esses valores na desigualdade obtemos:

$$\frac{senx}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{tgx}{2}$$

Multiplicando todas as partes da desigualdade por $\frac{2}{senx}$ temos:

$$1 \leq \frac{x}{senx} \leq \frac{1}{cosx}$$

Invertendo todas as partes, chegamos a:

$$1 \geq \frac{senx}{x} \geq cosx$$

Quando x tende a 0, $cosx$ tende a 1, então:

$$1 \geq \frac{senx}{x} \geq 1$$

Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

Assim continuando o cálculo da área do círculo podemos perceber que a área do segmento circular está entre as áreas dos triângulos inscritos e circunscritos à circunferência. Assim $A_i < A_{seg} \leq A_C$, onde:

A_i = área do triângulo inscrito e

A_C = área do triângulo circunscrito.

A_{seg} = área do segmento circular

Seja R o raio da circunferência.

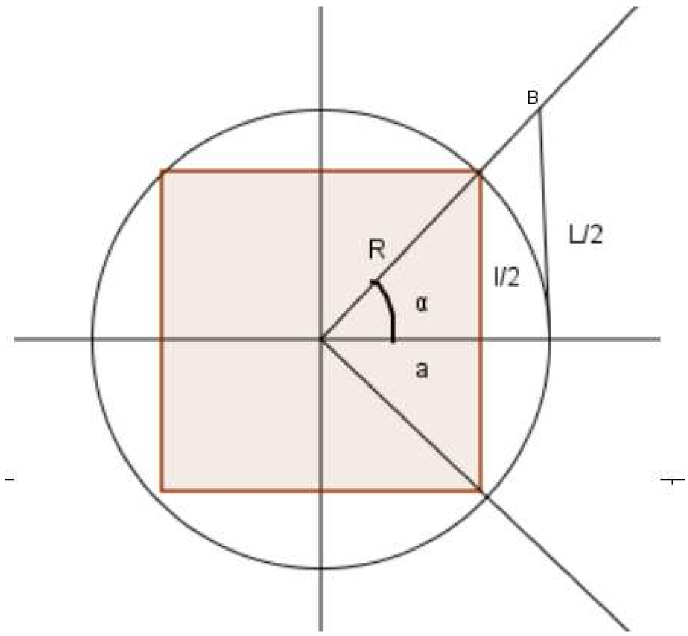


Figura 2.9: Segmento circular para o cálculo da área do círculo.

Área do Triângulo Inscrito no Polígono

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{b \times h}{2}\\
A_i &= \frac{a \times \frac{l}{2}}{2}\\
A_i &= \frac{Rcos(\alpha) \times Rsen(\alpha)}{2}\\
A_i &= \frac{R^2 sen(\alpha)cos(\alpha)}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto a área do polígono inscrito:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2nR^2 sen(\alpha)cos(\alpha)}{2}\\
A &= \frac{R^2 sen(\alpha)cos(\alpha)}{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

Como $\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ então

$$
A = \frac{R^2 sen\left(\frac{\pi}{n}\right)cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\pi}{\frac{\pi}{n}}.
$$

Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$, assim quando $\frac{\pi}{n}$ tende a zero, $\lim_{\frac{\pi}{n}\to 0} \frac{sen\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$ e $cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \to 1$, portanto sua área será:

$$
A = \pi R^2
$$

Área do Triângulo Circunscrito no Polígono

$$
\begin{aligned}
A_C &= \frac{b \times h}{2}\\
A_C &= \frac{R \times \frac{L}{2}}{2}\\
A_C &= \frac{ycos(\alpha) \times ysen(\alpha)}{2}
\end{aligned}
$$

onde $y = OB$

$$A_C = \frac{y^2 sen(\alpha) cos(\alpha)}{2}.$$

Portanto a área do polígono circunscrito:

$$\begin{aligned} A &= 2n\frac{y^2 sen(\alpha) cos(\alpha)}{2} \\ A &= \frac{y^2 sen(\alpha) cos(\alpha)}{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Como $\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ então

$$A = \frac{y^2 sen\left(\frac{\pi}{n}\right) cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\pi}{\frac{\pi}{n}}$$

quando $\frac{\pi}{n}$ tende a zero temos $\lim_{\frac{\pi}{n}\to 0} \frac{sen\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$ e $cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \to 1$, portanto sua área será:

$$A = \pi y^2$$

e $y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2$ quando n é grande L se torna muito pequeno logo $y^2 = R^2$ portanto $A = \pi R^2$.

3

Cálculo de Áreas

Neste capítulo vamos calcular as áreas sob gráficos de funções sem usar o Teorema Fundamental do Cálculo. Vamos inscrever na região R compreendida entre o gráfico de uma função f com valores positivos, o eixo x, em um intervalo fechado, n retângulos e quanto mais aumentarmos o número de retângulos, mais próximo da área real ficará nosso cálculo. Se fizermos o n tender ao infinito conseguiremos o valor exato da área que procuramos.

3.1 Função Afim

Para calcular a área abaixo da reta no intervalo $[0, b]$, devemos dividir esse intervalo em n partes iguais. Cada parte dessas deve ser a base de um retângulo que tenha altura igual a imagem do último ponto de cada base. Com isso concluimos que para calcular a área abaixo de uma reta basta calcular a área de n retângulos de base $\frac{b}{n}$ e altura igual imagem correspondente ao último ponto de cada base:

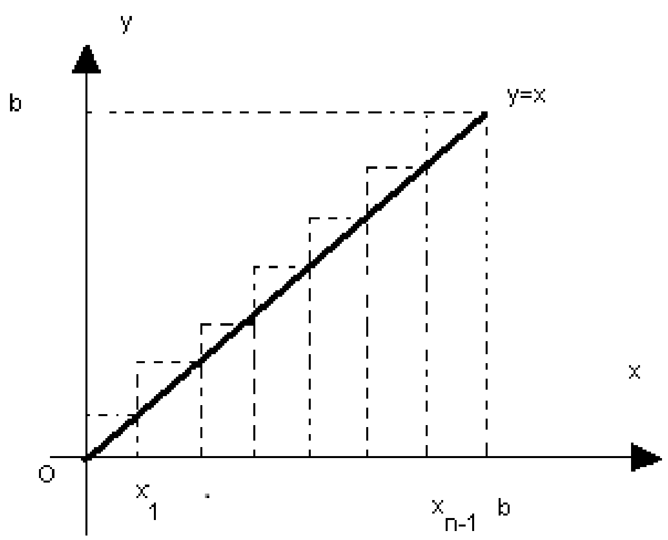


Figura 3.1: Função afim

$$f(x) = x$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right) + \frac{b}{n}\left(\frac{3b}{n}\right) + \ldots + \frac{b}{n}\left(\frac{nb}{n}\right) \\
A_n &= \frac{b^2}{n^2} + \frac{2b^2}{n^2} + \frac{3b^2}{n^2} + \ldots + \frac{nb^2}{n^2} \\
A_n &= \frac{b^2}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)
\end{aligned}$$

Cálculo do somatório:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

Devemos observar que se somarmos o primeiro com o último obtemos o mesmo valor que o segundo e o penúltimo, e assim sucessivamente.

$$\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\
S &= n + (n-1) + \ldots + 2 + 1
\end{aligned}$$

Somando as sentenças acima temos:

$$\begin{aligned}
2S &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \\
2S &= n(n+1) \\
S &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Assim a área será:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{b^2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
A_n &= \frac{b^2(n+1)}{2n} \\
A_n &= \frac{b^2 n(1 + 1/n)}{2n} \\
A_n &= \frac{b^2(1 + 1/n)}{2}.
\end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$

$$A_n \to \frac{b^2}{2}$$

Logo a área desejada é $\frac{b^2}{2}$.

3.2 Função Quadrática

Para calcular a área da parábola no intervalo [0, 1], devemos dividir esse intervalo em n partes iguais. Cada parte dessas deve ser a base de um retângulo que tenha altura igual a imagem do extremo direito de cada base. Com isso concluimos que para calcular a área abaixo de uma parábola basta calcular a área de n retângulos de base $\frac{1}{n}$ e altura igual a imagem correspondente ao extremo direito de cada base:

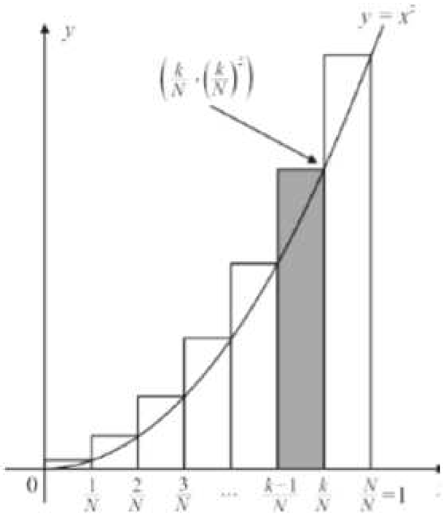


Figura 3.2: Função Quadrática no intervalo de [0,1]

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
A_n &= \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} \\
A_n &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)
\end{aligned}$$

Cálculo do somátorio:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

Desenvolvendo os binômios obtemos:

$$\begin{aligned}
(1+1)^3 &= 1+3.1+3.1^2+1^3\\
(1+2)^3 &= 1+3.2+3.2^2+2^3\\
(1+3)^3 &= 1+3.3+3.3^2+3^3\\
&.\\
&.\\
&.\\
(1+n)^3 &= 1+3n+3n^2+n^3
\end{aligned}$$

Somando as sentenças acima temos:
$2^3+3^3+4^3+\ldots+(1+n)^3 = n+3\frac{n(n+1)}{2}+3S+1^3+2^3+\ldots+n^3$

$$\begin{aligned}
3S &= (1+n)^3 - n - \frac{3n(n+1)}{2} - 1^3\\
S &= \frac{1}{3}\left[(1+n)^3 - n - \frac{3}{2}n(n+1) - 1\right]\\
S &= \frac{1}{3}\left[1+3n+3n^2+n^3-n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-1\right]\\
S &= \frac{1}{3}\left[n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right]\\
S &= \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}
\end{aligned}$$

Portanto a área será:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right]\\
A_n &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$

$$A_n \to \frac{1}{3}$$

Logo a área desejada é $\frac{1}{3}$.

3.3 Função Quadrática no intervalo [a, b]

Analogamente para calcular a área abaixo da parábola no intervalo [a, b], devemos dividir esse intervalo em n partes iguais. Cada parte dessas deve ser a base de um retângulo que tenha altura igual imagem do extremo direito de cada base. Com isso concluimos que para calcular a área abaixo de uma parábola basta calcular a área de n retângulos de base $\frac{b-a}{n}$ e altura igual imagem correspondente ao extremo direito de cada base:

Considere: $h = \frac{b-a}{n}$

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned}
A_n &= h(a+h)^2 + h(a+2h)^2 + \ldots + h(a+nh)^2 \\
A_n &= h\left[(a^2+2ah+h^2) + (a^2+4ah+4h^2) + \ldots + (a^2+2nah+n^2h^2)\right] \\
A_n &= h\left[na^2 + (2+4+\ldots+2n)ah + (1+4+\ldots+n^2)h^2\right] \\
A_n &= h\left[na^2 + \left[\frac{(2n+2)n}{2}\right]ah + \left[\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right]h^2\right] \\
A_n &= h\left[na^2 + (n+1)nah + \left[\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right]h^2\right]
\end{aligned}$$

Substituindo h

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{b-a}{n}\left[na^2 + (n+1)na\frac{b-a}{n} + \left[\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right] \\
A_n &= \frac{b-a}{n}\left[na^2 + (n+1)a(b-a) + \left[\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right]\frac{(b-a)^2}{n^2}\right] \\
A_n &= \frac{b-a}{n}\left[na^2 + (n+1)a(b-a) + \left[\frac{n}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\right](b-a)^2\right] \\
A_n &= (b-a)\left[a^2 + (1+\frac{1}{n})a(b-a) + \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right](b-a)^2\right].
\end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
A_n &\to (b-a)\left[a^2 + ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{3}\right] \\
A_n &\to (b-a)\left[\frac{3ab + b^2 - 2ab + a^2}{3}\right] \\
A_n &\to (b-a)\left[\frac{b^2+ab+a^2}{3}\right] \\
A_n &\to \frac{b^3+ab^2+a^2b-ab^2-a^2b-a^3}{3} \\
A_n &\to \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

Logo a área desejada é $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

3.4 Função Cúbica

Para calcularmos a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^3$ entre os pontos 0 e 1, vamos dividir essa região em n retângulos de bases iguais e alturas equivalentes imagem do extremo direito de cada base, como fizemos para calcular a área abaixo da parábola:

$$f(x) = x^3$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3 \\
A_n &= \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} \\
A_n &= \frac{1}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3\right)
\end{aligned}$$

Calculando o somatório acima temos:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

Desenvolvendo os binômios obtemos:

$$\begin{aligned}
(1+1)^4 &= 1^4 + 4.1 + 6.1 + 4.1 + 1^4 \\
(1+2)^4 &= 1^4 + 4.1^3.2 + 6.1^2.2^2 + 4.1.2^3 + 2^4 \\
(1+3)^4 &= 1^4 + 4.1^3.3 + 6.1^2.3^2 + 4.1.3^3 + 3^4 \\
&. \\
&. \\
&. \\
(1+n)^4 &= 1^4 + 4.1.n + 6.1.n^2 + 4.n^3 + n^4
\end{aligned}$$

Somando as sentenças acima temos:

$$\begin{aligned}
2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 + (1+n)^4 &= n + 4(1 + 2 + \ldots + n) + 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + \\
&\quad 4(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 \\
(1+n)^4 &= n + 4\frac{(1+n)n}{2} + 6\left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right] + 4S + 1 \\
4S &= (1+n)^4 - n - 2n(n+1) - 2n^3 - 3n^2 - n - 1 \\
4S &= (1+n)^4 - 2n^3 - 5n^2 - 4n - 1 \\
S &= \frac{(1+n)^4}{4} - \frac{n^3}{2} - \frac{5n^2}{4} - \frac{4n}{4} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Portanto a área será:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{n^4}\left[\frac{(1+n)^4}{4} - \frac{n^3}{2} - \frac{5n^2}{4} - n - \frac{1}{4}\right] \\
A &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+n}{n}\right)^4 - \frac{1}{2n} - \frac{5}{4n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4n^4} \\
A &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+1\right)^4 - \frac{1}{2n} - \frac{5}{4n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4n^4}.
\end{aligned}
$$

Quando $n \to \infty$

$$A \to \frac{1}{4}$$

Assim a área desejada é $\frac{1}{4}$.

3.5 Função Polinomial

Analogamente ao que foi feito até agora para calcularmos a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^{k-1}$ entre os pontos 0 e 1, vamos dividir essa região em n retângulos de bases iguais e alturas equivalentes imagem do último ponto de cada base, como fizemos para calcular a área abaixo da parábola:

$$f(x) = x^{k-1}$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} + \left(\frac{2}{n}\right)^{k-1} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + \left(\frac{n}{n}\right)^{k-1}\right] \\
A_n &= \frac{1}{n^k}\left(1^{k-1} + 2^{k-1} + \ldots + (n-1)^{k-1} + n^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

Calculando o somatório:

$$S = 1^{k-1} + 2^{k-1} + \ldots + (n-1)^{k-1} + n^{k-1}$$

Desenvolvendo os binômios obtemos:

$$
\begin{aligned}
(1+1)^k &= 1+\binom{k}{1}1+\binom{k}{2}1^2+\ldots+\binom{k}{k}1^k\\
(1+2)^k &= 1+\binom{k}{1}2^1+\binom{k}{2}2^2+\ldots+\binom{k}{k}2^k\\
(1+3)^k &= 1+\binom{k}{1}3^1+\binom{k}{2}3^2+\ldots+\binom{k}{k}3^k\\
&\;\;\vdots\\
(1+n)^k &= 1+\binom{k}{1}n^1+\binom{k}{2}n^2+\ldots+\binom{k}{k}n^k.
\end{aligned}
$$

Somando as sentenças acima temos:

$$
\begin{aligned}
2^k+3^k+\ldots+(1+n)^k &= n+\binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i+\binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\ldots+\\
&\binom{k}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+\binom{k}{k}\sum_{i=1}^{n} i^k\\
(1+n)^k &= n+\binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i+\binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\ldots+\\
&\binom{k}{k-1}S+1\\
KS &= (1+n)^k-n-\binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i-\binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2-\\
&\ldots-\binom{k}{k-2}\sum_{i=1}^{n} i^{k-2}-1\\
S &= \frac{1}{k}(1+n)^k-\frac{1}{k}n-\frac{1}{k}\binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{1}{k}\binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2-\\
&\ldots-\frac{1}{k}\binom{k}{k-2}\sum_{i=1}^{n} i^{k-2}-\frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

Assim a área será:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n^k}.\frac{1}{k}\left[(1+n)^k - n - \binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i - \ldots - \binom{k}{k-2}\sum_{i=1}^{n} i^{k-2} - 1\right] \\
A_n &= \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1+n}{n}\right)^k - \frac{1}{n^{k-1}} - \binom{k}{1}\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^{k-1}} - \ldots - \binom{k}{k-2}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^{k-2}}{n^{k-1}} - \frac{1}{n^{k-1}}\right] \\
A_n &= \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1}{n}+1\right)^k - \frac{1}{n^{k-1}} - \binom{k}{1}\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^{k-1}} - \ldots - \binom{k}{k-2}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^{k-2}}{n^{k-1}} - \frac{1}{n^{k-1}}\right].
\end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$

$$A_n \to \frac{1}{k}$$

Portanto a área desejada é $\frac{1}{k}$.

3.6 Função Seno

Usaremos no cálculo da área da senoide a identidade:

$$2sen(a)sen(b) = cos(a-b) - cos(a+b)$$

Assim para acharmos a área da senoide, dividiremos o intervalo desejado em n partes iguais, no caso nosso intervalo $[a;b]$. Cada parte dessas será a base de um retângulo de altura igual ao seno do último ponto de cada base. Então, quando fizermos a quantidade de retângulos n tender a infinito, poderemos considerar que a área da função seno no intervalo $[a;b]$ pode ser expressa pela soma das áreas dos n retângulos:

Considere $h = \frac{b-a}{n}$

$$f(x) = sen(x)$$

$$\begin{aligned}
A_n &= hsen(a+h) + hsen(a+2h) + \ldots + hsen(a+nh) \\
A_n &= h\left[sen(a+h) + sen(a+2h) + \ldots + sen(a+nh)\right]
\end{aligned}$$

Multiplicando a igualdade por $2sen\left(\frac{h}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
2sen\left(\frac{h}{2}\right)A_n &= 2hsen(a+h)sen\left(\frac{h}{2}\right)+2hsen(a+2h)sen\left(\frac{h}{2}\right)+ \\
&\quad \ldots+2hsen(a+(n-1)h)sen\left(\frac{h}{2}\right)+2hsen(a+nh)sen\left(\frac{h}{2}\right) \\
2sen\left(\frac{h}{2}\right)A_n &= hcos\left(a+\frac{h}{2}\right)-hcos\left(a+\frac{3h}{2}\right)+hcos\left(a+\frac{3h}{2}\right)- \\
&\quad hcos\left(a+\frac{5h}{2}\right)+\ldots+hcos\left(a+\frac{(2n-3)h}{2}\right)- \\
&\quad hcos\left(a+\frac{(2n-1)h}{2}\right)+hcos\left(a+\frac{(2n-1)h}{2}\right)- \\
&\quad hcos\left(a+\frac{(2n+1)h}{2}\right) \\
2sen\left(\frac{h}{2}\right)A_n &= h\left[cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right] \\
A_n &= h\left[\frac{cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)}{2sen\left(\frac{h}{2}\right)}\right] \\
A_n &= \left[\frac{cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)}{\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}\right] \\
A_n &= \left[\frac{cos\left(a+\frac{b-a}{2n}\right)-cos\left(b+\frac{b-a}{2n}\right)}{\frac{sen\frac{b-a}{2n}}{\frac{b-a}{2n}}}\right].
\end{aligned}
$$

Quando $n \to \infty$

$$A_n \quad \to \quad cosa - cosb$$

Logo a área desejada é $cosa - cosb$.

3.7 Função Cosseno

Para calcularmos a área da cossenoide usaremos a identidade

$$2sen(a)cos(b) = sen(b+a) - sen(b-a).$$

Assim para acharmos a área da cossenoide, dividiremos o intervalo desejado em n partes iguais, no caso nosso intervalo $[a;b]$. Cada parte dessas será a base de um retângulo de altura igual ao cosseno do último ponto de cada base. Então, quando fizermos a quantidade de retângulos n tender a infinito, poderemos considerar que a área da função cosseno no intervalo $[a;b]$ pode ser expressa pela soma das áreas dos n retângulos:

Considere $h = \frac{b-a}{n}$

$$f(x) = cos(s)$$

$$\begin{aligned} A_n &= hcos(a+h) + hcos(a+2h) + \ldots + hcos(a+nh) \\ A_n &= h\left[cos(a+h) + cos(a+2h) + \ldots + cos(a+nh)\right] \end{aligned}$$

Multiplicando a igualdade por $2sen\left(\frac{h}{2}\right)$

$$\begin{aligned} 2sen\left(\frac{h}{2}\right)A_n &= 2hcos(a+h)sen\left(\frac{h}{2}\right) + 2hcos(a+2h)sen\left(\frac{h}{2}\right) + \\ &\ldots + 2hcos(a+(n-1)h)sen\left(\frac{h}{2}\right) + 2hcos(a+nh)sen\left(\frac{h}{2}\right) \\ 2sen\left(\frac{h}{2}\right)A_n &= hsen\left(a+\frac{3h}{2}\right) - hsen\left(a+\frac{h}{2}\right) + hsen\left(a+\frac{5h}{2}\right) - \\ &hsen\left(a+\frac{3h}{2}\right) + \ldots + hsen\left(a+\frac{(2n-1)h}{2}\right) - \\ &hsen\left(a+\frac{(2n-3)h}{2}\right) + hsen\left(a+\frac{(2n+1)h}{2}\right) - \\ &hsen\left(a+\frac{(2n-1)}{2}\right) \\ 2sen\left(\frac{h}{2}\right)A_n &= h\left[-sen\left(a+\frac{h}{2}\right) + sen\left(a+\frac{(2n+1)h}{2}\right)\right] \\ A_n &= h\left[\frac{-sen\left(a+\frac{h}{2}\right) + sen\left(a+\frac{(2n+1)h}{2}\right)}{2sen\left(\frac{h}{2}\right)}\right] \\ A_n &= \left[\frac{-sen\left(a+\frac{h}{2}\right) + sen\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)}{\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}\right] \\ A_n &= \left[\frac{-sen\left(a+\frac{b-a}{2n}\right) + sen\left(b+\frac{b-a}{2n}\right)}{\frac{sen\frac{b-a}{2n}}{\frac{b-a}{2n}}}\right]. \end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$

$$A_n \to -sen(a) + sen(b) = sen(b) - sen(a).$$

Assim a área desejada é $sen(b) - sen(a)$.

3.8 Função Exponencial

Para calcularmos a área da função exponencial usaremos o seguinte resultado

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)$$

Por isso demonstraremos este limite. Para isto devemos saber que:

- O logaritmo natural de um número real positivo b é aquele que tem como base o número e (usamos a notação $ln(b)$, para esse tipo de logaritmo);
- Por definição do número e, $e = \lim_{x\to 0}(n+1)^{\frac{1}{n}}$.

Demonstração: Seja $t = a^x - 1$, e sendo $a > 0$, temos:

$$a^x - 1 = t$$

$$a^x = t + 1$$

Aplicamos agora o logaritmo natural aos dois membros:

$$ln(a^x) = ln(t+1)$$

$$x.ln(a) = ln(t+1)$$

$$x = \frac{ln(t+1)}{ln(a)}$$

Substituindo $a^x - 1$ por t e x por $\frac{ln(t+1)}{ln(a)}$, temos:

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{t}{\frac{ln(t+1)}{ln(a)}} = \frac{tln(a)}{ln(t+1)}$$

Dividindo por t, obtemos:

$$\frac{ln(a)}{\frac{1}{t}ln(t+1)} = \frac{ln(a)}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

Quando x tende a 0, t também tende a 0, como pode ser observado em $t = a^x - 1$. Temos que, por definição,$\lim_{x\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e$, e $ln(e) = 1$, logo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{lna}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \lim_{x\to 0} ln(a)$$

Aplicaremos também a soma de uma Progressão Geométrica

Demonstração da Fórmula da Progressão Geométrica

Demonstraremos aqui a fórmula que usaremos para achar a soma dos termos de uma progressão geométrica, aqui consideraremos uma progressão de razão a:

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Multiplicando os dois lados da equação por a, temos:

$$a\sum_{i=1}^{n} a_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$

Subtraindo da última equação, a primeira, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_n(a-1) = -a_1 + a_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{a^n a_1 - a_1}{a-1} = \frac{a_1(a^n-1)}{a-1}$$

Para acharmos a área da função exponencial $f(x) = a^x$, dividiremos o intervalo desejado em n partes iguais, no caso nosso intervalo [0;1]. Cada parte dessas será a base de um retângulo de altura igual a imagem da função do último ponto de cada base. Então, quando fizermos a quantidade de retângulos n tender a infinito, poderemos considerar que a área da função exponencial no intervalo [0;1] pode ser expressa pela soma das áreas dos n retângulos:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{h}a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{h}a^{\frac{2}{h}} + \frac{1}{h}a^{\frac{3}{h}} + \ldots + \frac{1}{h}a^{\frac{n}{h}} \\ A_n &= \frac{1}{h}\left[a^{\frac{1}{h}} + a^{\frac{2}{h}} + a^{\frac{3}{h}} + \ldots + a^{\frac{n}{h}}\right] \end{aligned}$$

Observe que a somatória entre colchetes é uma progressão geométrica de razão $a^{\frac{1}{h}}$ e o primeiro termo igual a $a^{\frac{1}{h}}$, assim

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{h}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}(a-1)}{a^{\frac{1}{n}}-1}\right] \\ A_n &= \left[\frac{a^{\frac{1}{n}}(a-1)}{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}\right]. \end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$, $a^{\frac{1}{n}}$ tende a 1 e $\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \to lna$ então

$$A_n \to \frac{a-1}{lna}.$$

Portanto a área desejada é $\frac{a-1}{lna}$.

3.9 Função Exponencial com base e

Para acharmos a área da função exponencial, dividiremos o intervalo desejado em n partes iguais, no caso nosso intervalo $[a;b]$. Cada parte dessas será a base de um retângulo de altura igual a imagem da função do último ponto de cada base. Então, quando fizermos a quantidade de retângulos n tender a infinito, poderemos considerar que a área da função exponencial no intervalo $[a;b]$ pode ser expressa pela soma das áreas dos n retângulos:

Considere $h = \frac{b-a}{n}$

$$f(x) = e^x$$

$$\begin{aligned}
A_n &= he^a + he^{a+h} + he^{a+2h} + \ldots + he^{a+nh} \\
A_n &= h\left[e^a + e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots + e^{a+nh}\right] \\
A_n &= h\left[e^a + e^a e^h + e^a e^{2h} + \ldots + e^a e^{nh}\right] \\
A_n &= he^a\left[1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{nh}\right]
\end{aligned}$$

Observe que a somatória entre colchetes é uma progressão geométrica de razão e^h e o primeiro termo igual a 1, assim

$$\begin{aligned}
A_n &= he^a\left[\frac{e^{hn} - 1}{e^h - 1}\right] \\
A_n &= e^a\left(e^{hn} - 1\right)\frac{h}{e^h - 1}.
\end{aligned}$$

Logo como $nh = b - a$ e $\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1} = 1$ então quando $n \to \infty$

$$A_n = e^a(e^{b-a} - 1) = e^b - e^a$$

4

Criação do Cálculo

Neste capítulo vai ser contado um pouco da história do Cálculo Diferencial e Integral tema do trabalho.

A invenção do cálculo se deu por muitos anos de estudos, existiu uma disputa para saber quem era o criador do cálculo: Newton ou Leibniz. Mas grandes cientistas surgiram como precursores do cálculo, alguns dos quais trataremos neste trabalho.

Arquimedes usou o método de exaustão e foi por volta de 1450 que seus trabalhos chegaram à Europa, vindos de Constantinopla, cidade onde fora encontrada uma tradução de uma cópia do século IX que continha a obra do matemático. Esta tradução foi revisada e impressa em 1540, mas foi no início do século XVII que as ideias do grego passaram por outros desdobramentos.

Depois de Arquimedes, com o método de exaustão, Johannes Kepler e Galileu Galilei utilizaram os indivisíveis. O método de Kepler consistia em pensar na superfície como a soma de linhas (quantidades infinitamente pequenas). Kepler desenvolveu suas ideias em cálculos de áreas e volumes, utilizando quantidades infinitas de retas e planos. Galileu, partindo de ideias semelhantes, desenvolveu seus trabalhos no princípio da cinemática, estudo dos movimentos.

Pierre de Fermat desenvolveu a ideia geral de estudos das parábolas de ordem superior a 2. Em sua obra mais conhecida, Geometria indivisibilibus continuorum nova, Cavalieri desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis". René Descartes, introduziu métodos algébricos à geometria, desenvolveu uma técnica que permitia a criação da normal a uma curva em um ponto dado, dispensando o uso de quantidades infinitamente pequenas e, ao mesmo tempo, permitindo a construção exata da tangente a uma curva cuja equação fosse conhecida. James Gregory, procurou em seus trabalhos generalizar o método de exaustão inserido entre sequências de polígonos inscritos e circunscritos, e esboçou o início de uma teoria sobre convergência. Isaac Barrow, não sendo contra o uso dos métodos que usava os indivisíveis, usou uma forma geométrica para suas demonstrações do que hoje também conhecemos como teorema fundamental do cálculo. Mas dois grandes nomes entraram para a história, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, por inventarem o Cálculo Infinitesimal ou Cálculo Diferencial e Integral como é conhecido hoje.

4.1 Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz

Isaac Newton (Woolsthorpe Manor, Inglaterra, 1643 – Kensington, 1727) foi um matemático, físico, astrônomo, filósofo, teólogo e cientista inglês e Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzip, 1646 – Hanôver, 1716) foi um matemático, filósofo, teólogo e cientista alemão.

Figura 4.1: Issac Newton

Figura 4.2: Gottfried Wilhelm Leibniz

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileu sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu o Cálculo aproximadamente dez anos antes de Leibniz. Ele desenvolveu os métodos das fluxions - derivação - e fluents - integração - e utilizou-os na construção da mecânica clássica.

Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri.

Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome Calculus Summatorius . O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

A união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas aconteceu com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise.

São vários precursores que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o desenvolvimento do cálculo.

4.2 Limites e o Cálculo Diferencial

Limite é o conceito mais fundamental do Cálculo. A sistematização lógica do Cálculo pressupõe o conceito de limite; de fato, limite é o que distingue, no nível mais básico, o cálculo de álgebra, geometria e o resto da matemática, uma vez que para definir derivada, continuidade, integral, convergência, divergência, utilizamos esse conceito. Porém, o registro histórico é justamente o oposto. A primeira vez em que a ideia de limite apareceu, foi por volta de 450 a.C., na discussão dos quatro paradoxos de Zeno. Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito - números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos - e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. A definição moderna tem menos de 150 anos.

Para provas rigorosas das fórmulas de determinadas áreas e volumes, Arquimedes encontrou diversas somas que contêm um número infinito de termos. Na ausência do conceito de limite, Arquimedes utilizava argumentos muito engenhosos chamados de redução ao absurdo duplo, que, na verdade, incorporam alguns detalhes técnicos do que agora chamamos de limites.

O aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos intimamente ligados à questão das tangentes.

Arquimedes e Apolônio utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes a parábolas, elipses e hipérboles.

Pierre de Fermat foi o primeiro a considerar a ideia de famílias de curvas. Elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e os pontos de mínimo de uma função. Ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo. Escreveu a Descartes explicando o seu método que é basicamente utilizado ainda hoje. Na realidade, devido a esse trabalho, que estava intimamente relacionado com as derivadas, Lagrange afirmou considerar Fermat o inventor do Cálculo.

Durante o século XVII, diversos geômetras planejaram esquemas algébricos complicados para encontrar retas tangentes a determinadas curvas. Descartes desenvolveu um processo que usava dobro-raízes de uma equação auxiliar; essa técnica foi melhorada pelo matemático Johan Hudde, que era, na época, o maior matemático de Amsterdã. René de Sluse, inventou um outro método mais sofisticado para obter retas tangentes a curvas. Em cada um desses métodos, o limite deve ter sido usado numa etapa crítica. Mas nenhum deles percebeu a necessidade da ideia de limite, e assim cada um encontrou uma maneira inteligente para conseguir os próprios resultados, que estavam corretos, embora sem o rigor possibilitado pelo limite.

Isaac Barrow considerou que para estudar as tangentes consistia no limite de uma corda com os pontos aproximando-se entre si.

Acredita-se que um dia, enquanto observava o movimento dos planetas, Newton tenha-se perguntado porque as órbitas dos planetas eram curvas, pois se fossem formadas por segmentos de retas seriam muito mais fáceis de serem estudadas. Por que não considerá-las como um conjunto de pequenas retas que, aproximadamente, representariam o movimento daquela curva? Este simples, porém genial insight significou para Newton o começo de uma longa e frutífera produção científica que englobou, entre outras coisas, as derivadas, as integrais e toda a base da mecânica clássica. Isaac Newton, em *Principia Mathematica*, seu maior trabalho em Matemática e Ciência, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite. Infelizmente, para a fundamentação rigorosa do Cálculo, durante muitas décadas, ninguém examinou as sugestões que Newton havia fornecido.

Com as ferramentas disponíveis na época, os problemas da chamada Geometria foram resolvidos, e surgiam novas aplicações do Cálculo à Ciência, principalmente à Física e à Astronomia. Novos campos da Matemática, em especial das equações diferenciais e do cálculo de variações, foram sendo criados.

Já no final do século XVIII, o matemático Joseph-Louis Lagrange tinha elaborado uma reformulação sobre a mecânica em termos do Cálculo. Lagrange focalizou sua atenção nos problemas da fundamentação do Cálculo. Sua solução tinha como destaque "toda a consideração de quantidades infinitamente pequenas, dos limites ou dos fluxos". Lagrange fez um esforço para fazer o Cálculo puramente algébrico eliminando inteiramente os limites.

Em 1812, Carl Friedrich Gauss compôs o primeiro tratamento rigoroso de convergência para seqüências e séries, embora não utilizasse a terminologia dos limites.

Já no século XIX, Augustin Louis Cauchy usou o limite como a base para a introdução precisa do conceito de continuidade e de convergência, de derivada, de integral. Niels Henrik Abel (1802 - 1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet estavam entre aqueles que procuravam por problemas delicados e não intuitivos.

Entre 1840 e 1850, Karl Weierstrass começou pela definição de limite de Cauchy em termos aritméticos estritos, usando-se somente valores absolutos e desigualdades.

O desenvolvimento do Cálculo continuou com muitos outros matemáticos, como, por exemplo, Jacques Bernoulli, Johann Bernoulli, MacLaurin, Agnesi, Euler, d'Alembert, Lagrange e Cauchy. Como exprime o título da principal obra de Lagrange: "Teoria das funções analíticas, contendo os princípios do cálculo diferencial, livres de qualquer consideração de infinitamente pequenos, evanescentes, limites e fluxões, e reduzidos à análise algébrica de quantidades finitas". O cálculo passa ser reduzido a análises algébricas.

4.3 Conceito de Integração

Neste capítulo será contado um pouco da história das Integrais.

Os primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais são os problemas de quadratura. Um dos problemas mais antigos enfrentados pelos gregos foi o da medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão.

A palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas.

Quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas. As lúnulas - regiões que se assemelham com a lua no seu quarto-crescente - foram estudadas por Hipócrates de Chios, 440 a.C., que realizou as primeiras quadraturas da História. Antifon, por volta de 430 a.C., procurou encontrar a quadratura do círculo através de uma seqüência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado, depois um octógono, em seguida um hexadecágono, e assim por diante. Havia, entretanto, um problema: essa seqüência nunca poderia ser concluída. Apesar disso, essa foi uma ideia genial que deu origem ao método de exaustão tratado no capítulo acima.

Nesse contexto, uma das questões mais importantes, e que se constituiu numa das maiores contribuições gregas para o Cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C. Trata-se de um teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola.

Em seus cálculos, Arquimedes encontrava somas com um número infinito de parcelas. O argumento utilizado era a dupla reductio ad absurdum para "escapar"da situação incômoda. Basicamente, se não podia ser nem maior, nem menor, tinha que ser igual.

A contribuição seguinte para o Cálculo Integral apareceu somente ao final do século XVI quando a Mecânica levou vários matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade. Em 1606, em Roma, Luca Valerio publicou De quadratura parábolas onde utilizou o mesmo método grego para resolver problemas de cálculo de áreas desse tipo.

Kepler, em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica. Para calcular volumes de sólidos, pensava na soma de fatias planas. Desse modo, calculou os volumes de muitos sólidos formados pela revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

Os próximos matemáticos que tiveram grande contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, Geometria indivisibilibus continuorum nova, Cavalieri desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis". Ele mostrou, usando os seus métodos, o que hoje em dia escrevemos:

Todo o processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi então aritmetizado por Wallis. Em 1655, em seu trabalho Arithmetica infinitorum, Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o levaram a encontrar diversos resultados importantes, entre eles, a antecipação de parte do trabalho de Euler dobre a função gamma.

O problema do movimento estava sendo estudado desde a época de Galileu. Tanto Torricelli como Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de operação inversa da derivada desenvolveu-se naturalmente e a ideia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow. Embora Barrow nunca tenha enunciado formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo, estava trabalhando em direção a esse resultado; foi Newton, entretanto, quem, continuando na mesma direção, formulou o teorema.

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileu sobre o estudo do movimento dos corpos. Ele desenvolveu os métodos das fluxions - derivação - e fluents - integração - e utilizou-os na construção da mecânica clássica. Para Newton, a integração consistia em achar fluents para um dado fluxion considerando, desta maneira, a integração como inversa da derivação. Com efeito, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade.

Newton representava as integrais por um acento grave acima da letra em questão, por exemplo, a integral de y era representada por y'.

Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo - um 's' longo - para representar summa . Segundo ele, "represento a área de uma figura pela soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas... ".

Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico.

Leibiniz acreditava que a notação era de fundamental importância e, de fato, a sua notação foi mais eficaz do que a de Newton e acabou por se consolidar, sendo utilizada até os dias de hoje, mantendo exatamente a mesma forma. Newton escrevia para si próprio e não foi feliz em encontrar uma notação consistente.

Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome Calculus Summatorius . O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

Principalmente como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas "reversas". Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise.

Hoje em dia o Cálculo Integral é largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química.

5

Teorema Fundamental do Cálculo

Neste capítulo demonstraremos o Teorema Fundamental do Cálculo e como sua utilização simplifica o processo para se chegar ao resultado das áreas.

Hoje o cálculo baseia-se no seguinte problema:

Dada uma função $f : [a; b] \to R$, limitada no intervalo $[a; b]$. Admitamos, por simplicidade, que f seja não-negativa, isto é, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a; b]$. Consideremos o conjunto $A = \{f(x; y) \to R^2; a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$, formado pelos pontos do plano compreendidos entre o eixo das abscissas, o gráfico de f, e as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Qual é a área deste conjunto?

Mas antes de solucionarmos esse problema, vamos entender alguns resultados.

5.1 Integral de Riemann

Para fazer a construção da Integral de Riemann precisamos de algumas definições.

Definição 1: Seja $f : I \subset R \to R$ uma função definida no intervalo I. Dizemos que f é contínua no ponto $a \in I$ se, para todo $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, existir um $\delta > 0$ de forma que para todo $x \in I$ com $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$, ou seja, uma função f é contínua em um ponto a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Dizemos que f é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Definição 2: Seja $f : I \subset R \to R$ uma função definida no intervalo aberto I. Dizemos que f é derivável no ponto $x_0 \in I$ se o seguinte limite existir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Neste caso, este limite é denominado derivada de f no ponto x_0 e denotado por $f'(x_0)$. Dizemos que f é derivável se ela for derivável em todos os pontos do seu domínio . Considere $x = x_0 + h$, então $h = x - x_0$ e h tende a zero quando x tende a

x_0, assim podemos escrever a derivada de f no ponto x_0 como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definição 3: Uma partição do intervalo $[a; b]$ é a escolha de um subconjunto finito de pontos $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ de $[a; b]$. O intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, de comprimento $x_i - x_{i-1}$, será chamado o i-ésimo intervalo da partição P. Evidentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = b - a$$

Definição 4: Seja $f : [a; b] \to R$ uma função limitada e $P = \{x_0 < x_1 < ... < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$.

$$m = inf\{f(x); x \in [a; b]\}$$

$$M = sup\{f(x); x \in [a; b]\}$$

Observe que os números m e M estão bem definidos, graças à limitação da função f e $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a; b]$.

Considerando cada intervalo $[x_{i-1}; x_i]$ como a base de um retângulo e o ínfimo ou o supremo de f em cada i-ésimo intervalo como a altura desse retângulo, obtemos uma aproximação para a área sob o gráfico de f somando as áreas de cada retângulo assim construído.

Definição 5: A soma inferior de f relativamente partição P é o número:

$$s(f; P) = m_1(x_1 - x_0) + ... + m_n(x_n - x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

A soma superior de f relativamente à partição P é o número:

$$S(f; P) = M_1(x_1 - x_0) + ... + M_n(x_n - x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

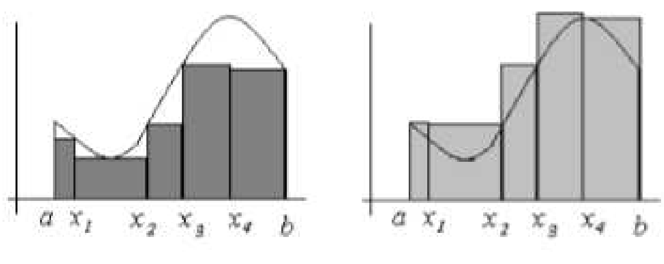


Figura 5.1: Soma Inferior e Soma Superior

Observação: A demonstração do teorema seguinte podem ser encontrada na referência [9].

Teorema 5.1.1: Toda função contínua $f : [a,b] \to R$ é integrável.

Se f assume valores negativos e positivos, podemos continuar a aproximar o cálculo da área sob a curva de f através da Soma de Riemann, considerando a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e o negativo das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x. Tomando o limite das somas de Riemann encontramos a área líquida pela diferença de áreas: $A_1 - A_2$, onde A_1 representa a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f e A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f. A figura abaixo ilustra esta situação.

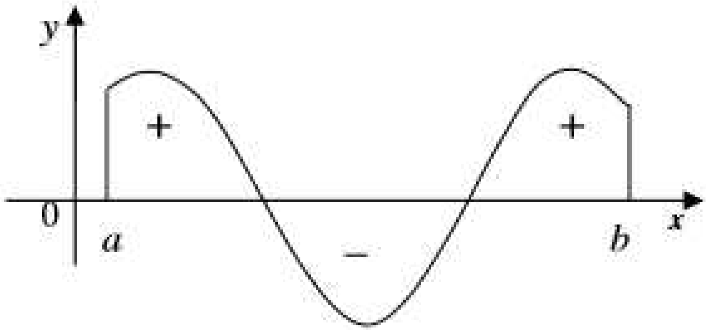


Figura 5.2: Representação da Área

Definição 6 (Integral de Riemann): Seja f uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a,b]$, então a Integral definida de f no sentido de Riemann de a até b é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{mx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i,$$

desde que o limite exista.

Definição 7: Dada uma função f. Se para todo elemento do domínio de f, existe outra função F, tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

se diz então que F é uma função primitiva, antiderivada de f e que f é uma função integrável. Utilizando a notação de Leibniz, se poderá escrever:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x)$$

Precisamos de uma notação mais conveniente para as antiderivadas que as tornem fáceis de serem trabalhadas. Devido à relação dada pelo Teorema Fundamental do

Cálculo entre antiderivadas e integrais, a notação

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

é tradicionalmente usada para uma antiderivada de f e é chamada de integral indefinida.

Por exemplo:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

pois a derivada de $\frac{x^3}{3} + C$ é igual a x^2

Portanto podemos olhar uma integral indefinida como uma família de funções (uma antiderivada para cada valor de constante C).

Então F e G são antiderivadas de f e sabemos que diferem por uma constante C. $G(x) = F(x) + C \Longrightarrow G'(x) = F'(x)$

Assim, conhecida a integral indefinida de uma função f, podemos calcular qualquer integral definida desta mesma função. Além disso, a partir das propriedades operatórias de derivação, podemos estabelecer algumas regras básicas para as integrais indefinidas. Por exemplo, a propriedade operatória para derivar somas de funções pode ser traduzida em termos de integrais indefinidas como

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Da mesma forma, se C é uma constante arbitrária,

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

Teorema 5.1.2 (Teorema do Confronto): Suponha que $g \leq f \leq h$ para qualquer x em um intervalo contendo a, exceto, possivelmente, em $x = a$. Suponha, também, que: $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$. Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$, tal que $|g(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Por outro lado, como $\lim_{x\to a} h(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$, tal que $|h(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$. Agora, considere $\delta = min[\delta_1, \delta_2]$. Então, se $0 < |x - a| < \delta$ temos que: $|g(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$, ou, de modo equivalente, $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$ e $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. Logo, pela hipótese, temos que, se $0 < |x - a| < \delta$, então: $L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon$ $\Longrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. Portanto, se $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|f(x) - L| < \epsilon$ e, desse modo, $\lim_{x\to a} f(x) = L$

$\square$

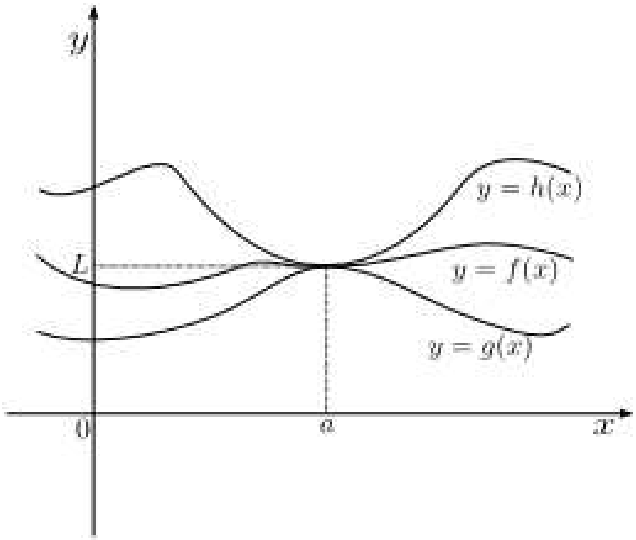


Figura 5.3: Teorema do Confronto

5.2 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 5.2.1: Se $f : [a, b] \to R$ é uma função contínua, então a função $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$ é contínua em [a,b], derivável em (a,b) e satisfaz $F'(x) = f(x)$. E se F é antiderivada para f, ou seja $F'(x) = f(x)$ então $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Demonstração. Por definição de derivada temos que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Como f é contínua em $[x, x + h]$ logo $f(x)$ tem pontos de máximo e mínimo locais no intervalo de $[x, x+h]$. Seja u e $v \in [x, x+h]$ tais que $f(u)$ seja o mínimo e $f(v)$ seja o máximo. Considere $s \in [x, x + h]$ tais que

$$f(u) \leq f(s) \leq f(v).$$

Se considerarmos as áreas dos retângulos com base h temos que

$$f(u)h \leq \int_{s}^{s+h} f(t)dt \leq f(v)h$$

dividindo por h temos:

$$f(u) \leq \frac{\int_{s}^{s+h} f(t)dt}{h} \leq f(v)$$

Como f é contínua então quando h tende a 0, u e v tende a x, assim

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{\int_{s}^{s+h} f(t)dt}{h} \leq f(x)$$

pelo teorema do confronto temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{s}^{s+h} f(t)dt}{h} = f(x) = F'(x)$$

Seja $g(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ sabemos que $g'(x) = f(x)$

Temos assim que

$$F'(x) = g'(x) = f(x)$$

Logo

$$F'(x) - g'(x) = 0$$

portanto $F(x) = g(x) + c$

Assim temos que

$$F(b) = g(b) + c$$

e

$$F(a) = g(a) + c$$

Subtraindo as expressões acima e sabendo que $g(a) = \int_{a}^{a} f(t)dt = 0$ temos

$$F(b) - F(a) = g(b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

□

TABELA DE INTEGRAIS INDEFINIDAS:

$\int kdx = kx + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int senxdx = -cosx + C$
$\int cosxdx = senx + C$
$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C \ a > 0$ e a

5.2.1 Resultados

Para verificarmos como simplificou o cálculo das áreas com as integrais vamos calcular abaixo os exemplos feito neste trabalho:

1) $\int\limits_0^b xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \frac{b^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{b^2}{2}$

2) $\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

3) $\int\limits_a^b x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

4) $\int\limits_0^1 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$

5) $\int\limits_0^1 x^{k-1}dx = \frac{x^k}{k}\Big|_0^1 = \frac{1^k}{k} - \frac{0^k}{k} = \frac{1}{k}$

6) $\int\limits_a^b senxdx = -cosx\Big|_a^b = -cosb + cosa = cosa - cosb$

7) $\int\limits_a^b cosxdx = senx\Big|_a^b = senb - sena$

8) $\int\limits_0^1 a^xdx = \frac{a^x}{lna}\Big|_0^1 = \frac{a^1}{lna} - \frac{a^0}{lna} = \frac{a-1}{lna}$

9) $\int\limits_a^b e^xdx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$

6

Desigualdade Isoperimétrica

Neste capítulo será mostrado que o círculo é a figura que delimita a maior área utilizando técnicas atuais do Cálculo.

O Problema da Desigualdade Isoperimétrica teve origem na Grécia Antiga baseada na Lenda do Dido. Foi reproduzida na Eneida de Virgílio, e conta a migração fenícia para o Ocidente mediterrâneo, mas ficou conhecida como o romance entre Dido e Eneias.

Conta a Lenda que Muto, o rei de Tiro (antiga cidade fenícia, hoje, Sur, no Líbano), quando morreu, passou seu reino para seus dois filhos, Pigmalião e Elissa (o nome tírio de Dido).

Apesar de Pigmalião ser um criança, foi ele que o povo escolheu como o novo rei. Elissa se casou com seu tio Sicarbas, sacerdote de Herácles. Pigmalião mandou matar Sicarbas na tentativa de roubar a enorme fortuna do seu cunhado. Dido, horrorizada com o crime, decidiu fugir. Carregou os barcos com os tesouros de Sicarbas e fugiu acompanhada por nobres tírios descontentes. Para iludir o irmão durante a fuga, conta a lenda que, durante a viagem, Dido jogou ao mar sacos cheios de areia que dizia estarem cheios de ouro e que oferecia pela alma do marido. Foram rumo à África, onde os indígenas os receberam de forma amistosa.

Dido pediu um pouco de terra para se estabelecer e, encontrando um lugar adequado ela negociou com o rei Jarbas a compra das terras. Na negociação ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar com a pele de um boi. O que ele achavam ser um golpe de gênio Dido conseguiu erguer a cidade de Cartago.

Ela mandou cortar o couro de um boi em tiras muito finas que depois de unidas formaram um longo fio com que delimitou um território bastante vasto. Os indígenas, obrigados a respeitar a promessa feita, concederam-lhe a terra assim delimitada.

Como a região a ser escolhida ficava à beira do mar eles decidiram que o formato do terreno seria um semicírculo a ser contornado pela corda.

Durante o reinado de Dido, a cidade de Cartago prosperou e adquiriu tal prestígio. Jarbas, rei indígena, vendo aquilo quis casar-se com Dido, ameaçando declarar guerra à cidade caso ela se recusasse. A rainha Dido, que não podia rejeitar a proposta mas abominava tal união pediu um prazo de três meses sob o pretexto de acalmar a

Figura 6.1: Fio para delimitar o Terreno

sombra do marido com sacrifícios. Quando o prazo terminou, subiu em uma pira fúnebre e suicidou-se.

Foi sobre este tema que Virgílio, sem se preocupar com a cronologia segundo a qual haveria pelo menos 300 anos entre a tomada de Tróia e a fundação de Cartago, fantasiou uma outra versão da estória fazendo intervir Eneias na lenda de Dido, na sua obra Eneida.

Virgílio conta que o herói Eneias é recolhido pelos habitantes de Cartago depois de ser empurrado por uma tempestade para a costa da África. Enquanto os companheiros reparavam os navios, Eneias usufruiu da hospitalidade da rainha, que pouco a pouco se apaixonou por ele e se tornou sua amante. Rapidamente o rei Jarbas soube do acontecido e indignado por se ver desprezado conseguiu afastar Eneias com a ajuda de Júpiter. Eneias partiu sem tornar a ver a rainha e esta, quando soube que fora abandonada, ergueu uma enorme pira e suicidou-se entre as chamas. Na Eneida de Virgílio, a lenda de Dido é descrita com ligeiras alterações sendo, no entanto, semelhante a forma como Dido obteve um território tão vasto. Na verdade, a rainha Dido deparou-se com o seguinte problema:

Dado um fio com um determinado comprimento, qual é a maior porção de terra que se consegue delimitar com esse fio? E de que forma se obtém a quantidade máxima de terra?

Segundo alguns autores, Dido escolheu um local com acesso ao mar, pelo que a sua ideia foi utilizar não só o fio mas também o mar para delimitar a maior porção de terra possível. Por esta razão é designado por problema de Dido.

6.1 A Desigualdade Isoperimétrica no caso Diferenciável

Nesta seção usaremos cálculo diferencial para provarmos a desigualdade isoperimétrica. Para nos auxiliar na demonstração, introduziremos alguns conceitos básicos como curvas planas, equações paramétricas e parametrização pelo comprimento de arco.

6.1.1 Curvas Diferenciáveis

O conceito de curva é mais geral que o de gráfico de uma função, pois, uma curva pode ser fechada (como é o caso de círculos e elipses), pode interceptar a si própria como um oito, ou desenvolver-se em espiral em torno de um ponto. Estudaremos as curvas que nesta seção estão situadas em um plano cartesiano xy e gozam da propriedade de que as coordenadas x e y de um ponto arbitrário P da curva podem expressar-se como funções de uma variável t, chamada parâmetro .

Definição 8: Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados $(f(t),g(t))$, em que f e g são funções contínuas em um intervalo I.

Seja $P : [a,b] \to R^2$ uma curva. Os pontos $P(a)$ e $P(b)$ são chamados extremos da curva. Por facilitar vamos referir a uma curva plana por curva. O gráfico de uma curva consiste em todos os pontos $P(t) = (f(t),g(t))$ do plano cartesiano xy, para t em I. Usaremos alternadamente os termos curva e gráfico de uma curva. Dizemos às vezes que o ponto $P(t)$ traça a curva C quando t varia em I.

Os gráficos abaixo representam curvas. Na primeira curva os extremos são distintos $(P(a) \neq P(b))$ e esta intercepta a si própria, isto é, dois valores distintos de t originam o mesmo ponto (ver figura 9.2a). Na segunda curva, como $P(a) = P(b)$, chamamos esta de curva fechada, porém ela se auto-intercepta num ponto diferente dos extremos (ver figura 9.2b). Quando uma curva é fechada e não possui auto-interceptações (além dos extremos) dizemos que a curva é simples (ver figura 9.2c).

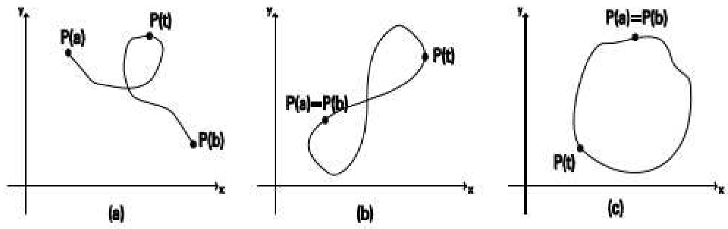


Figura 6.2: Gráfico de Curvas

As equações paramétricas da curva podem ser representadas por $x = x(t) = f(t), y = y(t) = g(t)$; $t \in I$. Representando na forma vetorial em $\alpha : I \to R^2$, temos que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$; α é chamada de parametrização da curva. Eliminando o parâmetro, obtemos uma equação só em termos de x e y; neste caso chamaremos esta de Equação Cartesiana da curva.

Uma parametrização $\alpha : I \to R^2$ tem que $\alpha(t) = (x(t),y(t))$ é diferenciável se as coordenadas $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são diferenciáveis, e o vetor $\alpha'(t) = (x'(t),y'(t))$ é chamado de vetor derivada ou também de vetor tangente à curva. Dizemos que a curva é suave se tiver parametrização diferenciável.

Observação: A demonstração do teorema seguinte podem ser encontrada na referências [3].

Teorema 6.1.1: Seja C uma curva suave e simples dada parametricamente por

$x = f(t)$, $y = g(t)$, com $a \leq t \leq b$, então o comprimento L de C é:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

.

Definição 9: Seja $\alpha : [a,b] \to R^2$, tal que $\alpha(t) = (x(t),y(t))$ uma parametrização da curva suave C. Dizemos que α é parametrizada pelo comprimento de arco se $\forall t \in [a,b]$ temos que o comprimento da curva α de $\alpha(a)$ até $\alpha(t)$ é igual a "$t - a$".

Em outras palavras, se α está parametrizada pelo comprimento de arco, então para todo $a \leq s \leq b$ temos que $\int_a^s \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = s - a$.

Pelo teorema fundamental do cálculo, derivando com relação a s na equação acima temos que: $\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} = 1$

Antes de iniciarmos a demonstração da desigualdade isoperimétrica com a utilização do cálculo diferencial, apresentaremos a seguinte aplicação do Teorema de Green que utilizaremos na prova. A demonstração deste resultado pode-se encontrar em [4].

Lema 6.1: Seja $\alpha : [a,b] \to R^2$ uma curva fechada, simples, orientada positivamente (sentido anti-horário) e definida por $\alpha(t) = (x(t),y(t))$. Então a área A da região limitada pela curva α é:

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t)) - y(t)x'(t)dt$$

6.1.2 Teorema Principal

Seja $\alpha(t) = (x(t),y(t))$ uma curva qualquer; posso dividir a região limitada pela curva em um número finito de regiões, pois sempre vai existir uma reta E no plano tal que a distância $p(t)$, que é a distância entre $\alpha(t)$ e a reta E, é uma função com número finitos de pontos críticos $p'(t) = 0$:

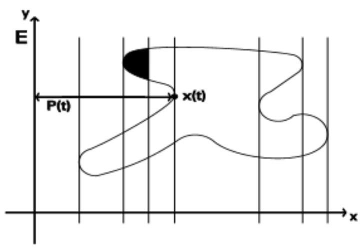


Figura 6.3: Gráfico de Curvas

Teorema 6.1.2: Seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento l, e seja A a área da região limitada por C, então $A \leq \frac{l^2}{4\pi}$ e verifica-se a igualdade se e somente se C é um círculo.

Demonstração. Sejam E e E' duas retas paralelas que não interceptam a curva fechada C, e considere o movimento dessas retas até que elas toquem C pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas, L e L', tangentes à curva C, de forma que C está totalmente contida na faixa limitada por L e L'.

Considere agora um círculo S^1 de raio r que seja tangente à L e L' e não intercepta C. Seja O o centro de S^1 e introduza o sistema coordenadas cartesianas com origem em O e o eixo Ox perpendicular a L e L' (ver figura 9.3).

Vamos parametrizar a curva C pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s),y(s))$, de modo que a curva C tenha orientação positiva e os pontos de tangência de C com L e L' sejam, respectivamente $s_0 = 0$ e s_1.

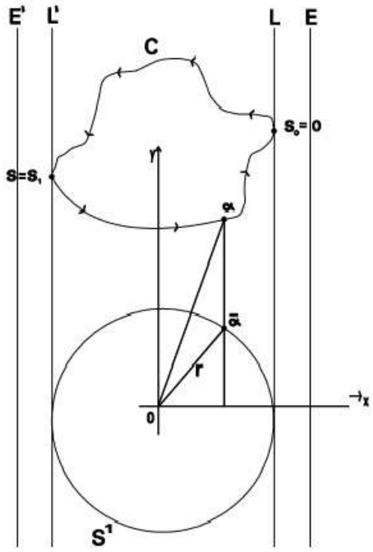


Figura 6.4: Curvas

Podemos supor que a parametrização de S^1 é $\overline{\alpha}(s) = (\overline{x}(s),\overline{y}(s))$ que também podemos escrever como $\overline{\alpha}(s) = (x(s),\overline{y}(s))$ com $s \in [0,l]$. Mas em S^1, pelo teorema de pitágoras temos que $x^2 + \overline{y}^2 = r^2$ que é o mesmo que $\overline{y} = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; então podemos dizer que $\overline{\alpha}(s) = (x(s), \pm\sqrt{r^2 - x^2})$.

Seja A a área da curva C. Pelo lema, temos que:

$$A = \int_0^l x(s)y'(s)ds$$

e seja $\overline{A}$ a área de S_1, onde

$$\overline{A} = \pi r^2 = -\int_0^l x'(s)\overline{y}(s)ds$$

Assim, somando as áreas A e $\overline{A}$, temos que:

$$A + \pi r^2 = \int_0^l x(s)y'(s) - \overline{y}(s)x'(s)ds$$

e como $\forall x \in R$ temos que $x \leq \sqrt{x^2}$, então:

$$\int_0^l x(s)y'(s) - \overline{y}(s)x'(s)ds \leq \int_0^l \sqrt{(x(s)y'(s) - \overline{y}(s)x'(s))^2}ds$$

Desenvolvendo o quadrado no segundo membro da última desigualdade:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \sqrt{(x^2y'^2 - 2xy'\overline{y}x' + \overline{y}^2x'^2)}ds$$

e como $\forall$ $a,b \in R$ temos $(a \pm b)^2 \geq 0$, denotemos a por (xx') e b por $\overline{y}y'$, e então verificamos que $-2xx'\overline{y}y' \leq (xx')^2 + (\overline{y}y')^2$.

Então, temos:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \sqrt{(xy')^2 + (xx')^2 + (\overline{y}y')^2 + (x'\overline{y})^2}ds$$

e colocando em evidência (x^2) e (y^2) no segundo membro da desigualdade,

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \sqrt{x^2(x'^2 + y'^2) + \overline{y}^2(x'^2 + y'^2)}ds$$

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \sqrt{(x'^2 + y'^2)(x^2 + \overline{y}^2)}ds$$

Como a curva C está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja $\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = 1$ então $(x'^2 + y'^2) = 1$ e portanto

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \sqrt{(x^2 + \overline{y}^2)}ds = \int_0^l \sqrt{(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)}ds$$

e como $r = \sqrt{(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)}$ então temos que:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l rds = rl.$$

Usando o fato de que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, ($\forall$ $a,b \in R$), então tomemos a ≥ 0 e $b \geq 0$ e denotando a por $\sqrt{A}$ e b por $\sqrt{\pi r^2}$ vemos que:

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{A+\pi r^2}{2} \leq \frac{lr}{2} \Rightarrow \sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{lr}{2}$$

pois $A + \pi r^2 \leq lr$ Elevando os membros da desigualdade ao quadrado temos:

$$A\pi r^2 \leq \frac{l^2 r^2}{4}$$

dividindo o membro das desigualdades por $\frac{r^2}{4}$ obtemos

$$4A\pi \leq l^2$$

concluimos pois que:

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

Supondo agora que seja válida a igualdade, ou seja, $A = \frac{l^2}{4\pi}$. Então, observamos que $A+\pi r^2 = lr$ e sendo assim verificamos também a igualdade, logo: $\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} = \frac{A+\pi r^2}{2} = \frac{lr}{2}$. Isolando l de $A + \pi r^2 = lr$, temos $l = \frac{A}{r} + \pi r$.

Então, como $A = \frac{l^2}{4\pi}$, substituindo l pelo valor acima:

$$A = \frac{(\frac{A}{r} + \pi r)^2}{4\pi},$$

$$A = \frac{\frac{A^2}{r^2} + 2\pi A + \pi^2 r^2}{4\pi}.$$

Simplificando temos:

$$A = \frac{A^2}{4\pi r^2} + \frac{A}{2} + \frac{\pi r^2}{4}.$$

Multiplicando por 4 teremos:

$$4A = \frac{A^2}{\pi r^2} + 2A + \pi r^2.$$

Assim

$$2A = \frac{A^2}{\pi r^2} + \pi r^2. \Rightarrow \frac{A^2}{\pi r^2} - 2A + \pi r^2 = 0.$$

Encontraremos as raízes desta equação para sabermos quais os comprimentos de l que nos fornecerá a igualdade $A = \frac{l^2}{4\pi}$.

Ao resolver o $\Delta = 4 - 4\frac{\pi r^2}{\pi r^2} = 0$ o que nos mostra que a equação tem uma raiz. Portanto

$$A = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2\frac{1}{\pi r^2}}$$

$$A = \pi r^2$$

Logo, com $A = \pi r^2$ e $l = \frac{A}{r} + \pi r$, então $l = 2\pi r$, que é o comprimento de uma circunferência de raio r. □

7

Cálculo de Áreas no Ensino Médio

Neste capítulo, estão apresentados os caminhos norteadores desta pesquisa, destacando-se a caracterização do grupo participante da pesquisa, os procedimentos metodológicos e os instrumentos de coleta de dados utilizados para a análise dos resultados obtidos na realização da investigação.

Nas últimas décadas, as pesquisas publicadas no campo da Educação Matemática tem aberto um leque de possibilidades para a mudança da prática docente. No bojo dessas pesquisas se consolidaram as Tendências da Educação Matemática (Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Etnomatemática, História da Matemática, Investigação Matemática, Jogos Matemáticos, etc) que propiciam a cada docente analisar, refletir e adotar em sua prática pedagógica a que melhor se adéqua ao processo ensino-aprendizagem de matemática.

Dentre as Tendências da Educação Matemática destacamos neste trabalho, o uso da História da Matemática para o cálculo de áreas, uma vez que vemos uma aliada no processo de construção do conhecimento matemático, sem perder de vista os aspectos formais desse conhecimento, ou seja, a formalização dos conceitos matemáticos envolvidos.

Considerando que a aprendizagem é constituída pelo processo interativo, para proporcionar uma melhor compreensão dos enunciados de problematizações matemáticas, bem como do meio social e do mundo, é importante que o professor esteja munido de estratégias que possibilitem o desenvolvimento de seus alunos enquanto sujeitos ativos, interativos e construtores de conhecimento.

Não se trata de mero uso de fatos históricos, mas de propor desafios reconstruindo o desenvolvimento da matemática, ao tempo em que se constrói o conceito matemático envolvido. Isso se insere em uma prática educativa que acredita que os discentes não aprendem por mera repetição, mas a partir do processo construtivo, percebendo os caminhos que levaram à construção as necessidades e processos que impulsionaram, sistematizaram e formalizaram os conteúdos estudados em sala de aula.

Sem dúvida, problemas de quadraturas, a delimitação de terrenos destinados ao plantio nas margens dos rios, o cálculo do volume de um silo, impulsionaram métodos para calcular áreas e volumes, respectivamente de regiões e sólidos regulares e irregulares, que culminou na formalização do Cálculo Integral.

A História da Matemática aparece em 1998, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), como algo importante a ser incorporado ao conteúdo, ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno frente ao conhecimento matemático. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se em veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (PCN, p. 42)

"Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber"

Dessa forma, a abordagem histórica pode colaborar para uma visão mais humana dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

Assim, com o intuito de investigar como a metodologia de aprendizagem por meio de História da Matemática pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas, definimos os objetivos deste trabalho.

7.1 Objetivo

- Fazer o uso da História da Matemática em atividades que favoreçam a aprendizagem de conceitos e do cálculo de áreas de regiões planas regulares e irregulares.

7.1.1 Objetivos específicos

- Conhecer as origens da necessidade do cálculo de áreas.
- Perceber a matemática como criação humana.
- Verificar a contribuição da metodologia pautada em uso da História da Matemática em atividades para a construção do conhecimento de cálculo de áreas.

Recriar situações vividas pelos povos e civilizações antigas fazendo os alunos sentir-se personagens da história, ajudará incorporar o conhecimento de calcular áreas dos povos antigos em nossas aulas de geometria e dará sentido muito mais real ao que se estuda em sala de aula.

Cada item, a seguir, referente a cálculo de áreas, é proposta para ser aplicada, via História da Matemática em sala de aula.

- Quadratura da Parábola
- Quadratura do Círculo
- Áreas sob Gráficos.

Sem dúvida, resgatar a história do conhecimento ajuda a ressignificá-lo, na medida em que se entende em que contexto surgiu, que tipo de problema veio resolver, etc. Mas, que motivações sustentam investigações que relacionam a História e a Educação Matemática?

1) A história aumenta a motivação para a aprendizagem da Matemática; 2) Humaniza a matemática; 3) Mostra seu desenvolvimento histórico por meio da ordenação e apresentação de tópicos no currículo; 4) Os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram; 5) Contribui para as mudanças de percepção dos alunos com relação à Matemática, e 6) suscita oportunidades para a investigação em Matemática.

7.2 Metodologia

7.2.1 Participantes e Cenário da Pesquisa

O desenvolvimento da atividade proposta para o cálculo de áreas via História da Matemática acerca do tema pesquisado ocorreu com a participação de 8 turmas de terceiro ano do ensino médio da Escola Estadual Professor Alisson Pereira Guimarães. Quatro turmas no período letivo de 2016 e quatro turmas no período letivo de 2017, no horário das aulas.

A Escola funciona nos turnos matutino e noturno, atende estudantes da região e muitos trabalham e estudam.

Antes de cada atividade foi apresentada aos alunos os temas: a História da Matemática sobre áreas, o Método de Exaustão e a Soma de Riemann, pois conhecer tais assuntos seria fundamental para ações e discussões na atividade a ser realizada.

Após a apresentação dos temas para todos os alunos foi explicado como se daria o desenvolvimento da atividade. A turma foi dividida em grupos com dois ou três alunos.

7.2.2 Desenvolvimento das Atividades

As atividades seguiram o roteiro descrito abaixo:

Aula 1: História do cálculo de áreas e como surgiu as fórmulas: nesta aula foi apresentado a história do cálculo das áreas as necessidades dos povos antigos e como se calcula a área hoje, onde foi apresentada também a Soma de Riemann.

Aula 2: Cálculo de áreas sob gráficos: Primeiro foi apresentada funções lineares traçadas em um sistema cartesiano, para que tivessem áreas conhecidas por eles.

Figura 7.1: Turma 301

Depois foi proposto um problema que envolvesse um função quadrática onde poderiam aplicar a Soma de Riemann.

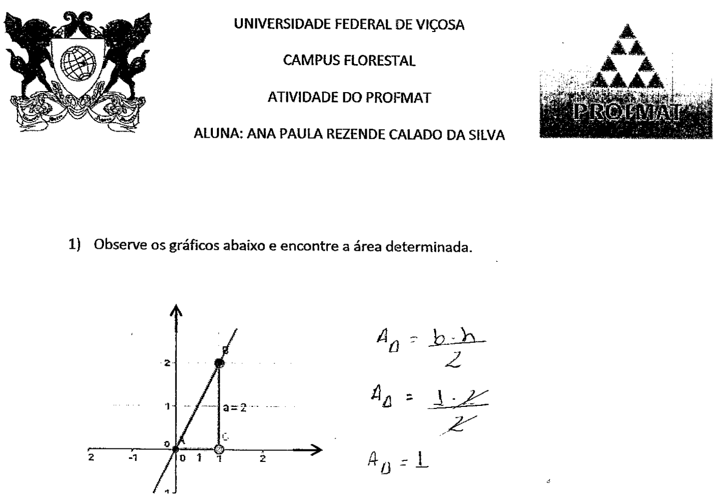
Aula 3: Método de Exaustão: nesta aula foi contada a vida de Arquimedes, o que era o método de exaustão e como ele mostrou alguns resultados usando este método.

Aula 4 e 5 : Área do círculo: Depois de exposto o método de exaustão foi calculada a área do quadrado inscrito e do quadrado circunscrito ao círculo mostrando os limites para a área do círculo, depois proposto que eles calculassem estes limites para o hexágono e o decágono inscrito e circunscrito.

Aula 6: Área da parábola: Exposto a vida de Arquimedes e seu resultado sobre a área da parábola foi pedido que comprovassem o resultado encontrado por Arquimedes.

Agora analisaremos as resoluções das atividades propostas e apresentadas nas aulas. Destacamos os acertos e também as diferentes maneiras de resolução.

A primeira questão das funções lineares não teve erros a figura triângulo já é conhecidas por eles.


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

CAMPUS FLORESTAL

ATIVIDADE DO PROFMAT

ALUNA: ANA PAULA REZENDE CALADO DA SILVA

1) Observe os gráficos abaixo e encontre a área determinada.

$A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$

$A_\Delta = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$

$A_\Delta = 1$

Figura 7.2: Primeira questão de áreas

Como já era esperado, os alunos passaram a fazer repartições da região em figuras geométricas regulares mais conhecidas como quadrados, retângulos e triângulos, das quais sabiam calcular a área por meio de formas convencionais. Os alunos calcularam a área das funções lineares, pois conhecem bem os triângulos, retângulos e trapézios houve apenas erros de contas em alguns grupos.

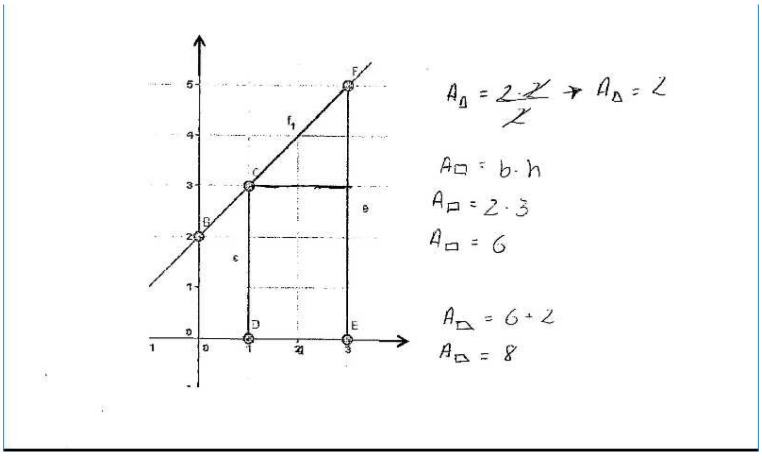


Figura 7.3: Continuação da primeira questão de áreas

A segunda questão foi proposta para mostrar aos alunos que existe aplicabilidade em outras áreas para o cálculo de áreas sob gráficos. Não houve erros pois se tratava de um triângulo semelhante a primeira questão.

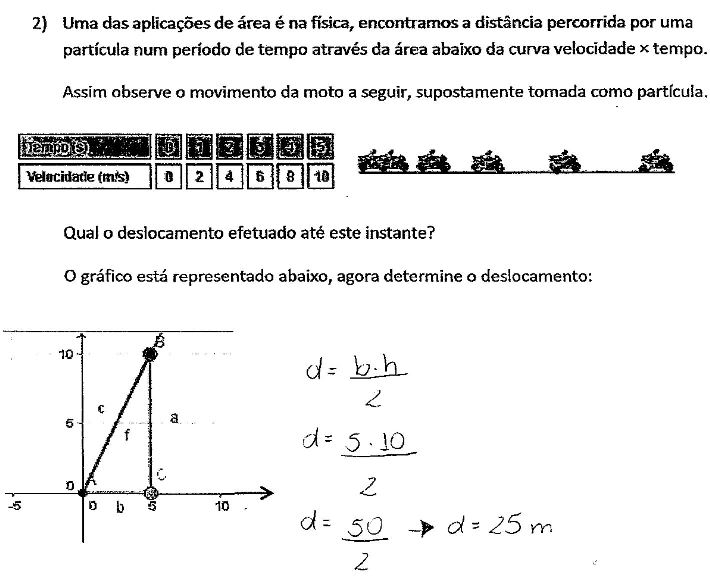


Figura 7.4: Segunda questão de áreas

No cálculo da área sob a função quadrática usaram a Soma de Riemann, primeiro determinaram a função do segundo grau para encontrar a altura do retângulo e fizeram a soma das áreas superiores. Muitos grupos não terminaram as contas e poucos responderam o que foi pedido.

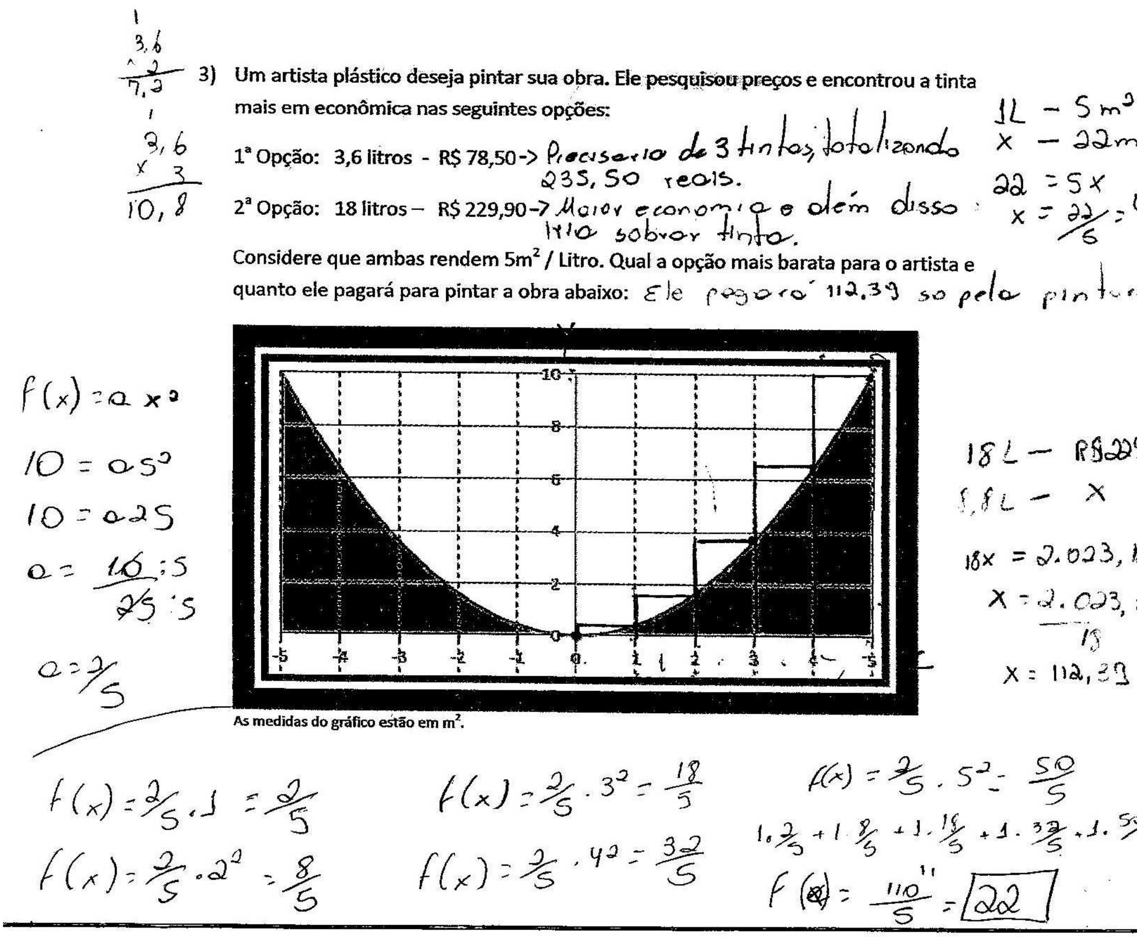


Figura 7.5: Questão sobre áreas não regulares

Na atividade do cálculo da área do círculo os alunos calcularam os limites para a área do círculo usando o hexágono inscrito e o circunscrito e o decágono inscrito e o circunscrito sugerido pela professora. Alguns perceberam que os limites foram se aproximando os outros foi preciso a intervenção do professor. Nesta atividade foi pedido que resolvessem usando o segmento circular como proposto no trabalho. A maioria usou somente as relações trigonométrica mas apareceram resoluções com o teorema de Pitágoras para se calcular os lados do triângulo.

Na atividade da quadratura da parábola foi usado a função quadrática onde comprovaram o resultado encontrado por Arquimedes. Não foi pedido que eles demonstrasse o resultado devido a complexidade do desenvolvimento da prova. Mas para a comprovação do resultado. Nesta atividade foi proposto que contassem a região através do gráfico e calculassem a área do triângulo. .

Victor Oliveira Silva / Vinicius Fonseca / Walace Breno / Igor Gomes / Victor Gabriel

Turma: 304

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

CAMPUS FLORESTAL

ATIVIDADE DO PROFMAT

ALUNA: ANA PAULA REZENDE CALADO DA SILVA

PROFMAT

Nesta atividade iremos calcular a área do círculo como Arquimedes calculou

Vamos considerar uma circunferência de raio 1 cm.

1) Qual a área do círculo usando a fórmula $A = \pi r^2$?

$A = \pi r^2$

$A = 3{,}14 \cdot 1^2$ $\boxed{A = 3{,}14}$

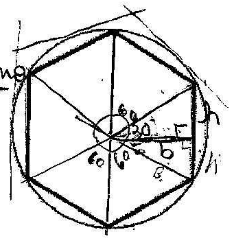
2) Calcule a área do polígono inscrito na circunferência de raio 1

Área do hexágono

$A = 0{,}2125 \times 12 =$

$\boxed{2{,}55}$

RESPOSTA



$\operatorname{sen} 30° = h$ $\boxed{h = \frac{1}{2}}$

$\cos 30° = b$ $\boxed{b = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$A = \frac{b \times h}{2}$

$A = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} = 0{,}2125$

Figura 7.6: Questão do Hexágono Inscrito

Hexágono Circunscrito:

360 |12
 60 |12
 30

R = 1

$tg\, 30° = \frac{h}{1}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = h$

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\frac{1{,}7}{3}}{2} = \boxed{0{,}28}$

$A = 12 \cdot 0{,}28 = \boxed{3{,}36}$

$2{,}55 <$ Área do círculo $< 3{,}36$

Figura 7.7: Cálculo do Hexágono Circunscrito

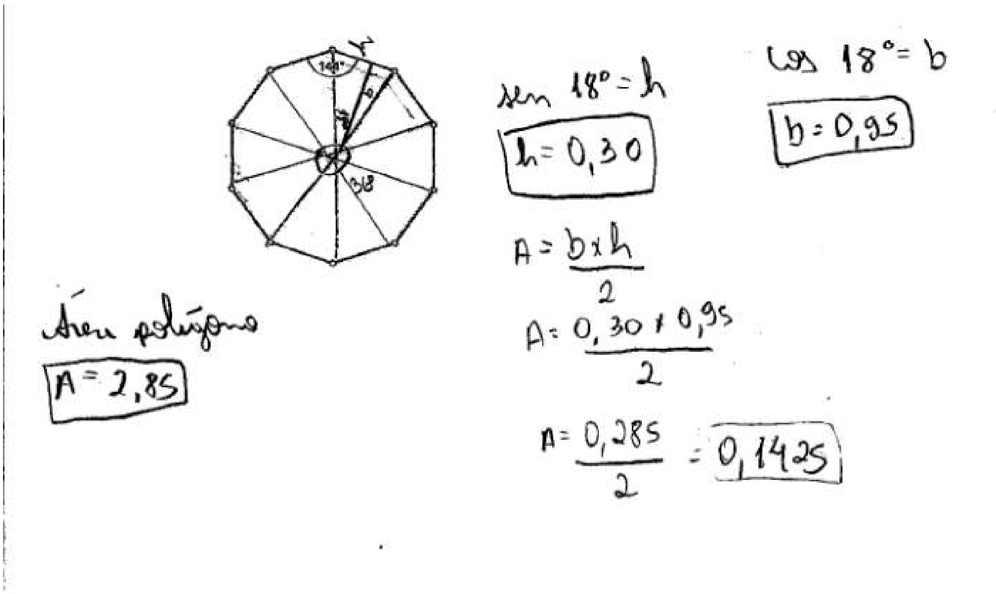


Figura 7.8: Cálculo do Decágono Inscrito

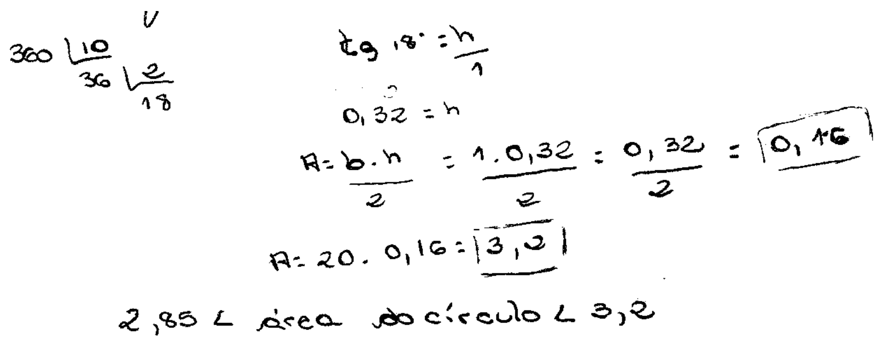


Figura 7.9: Resultado do Decágono Circunscrito

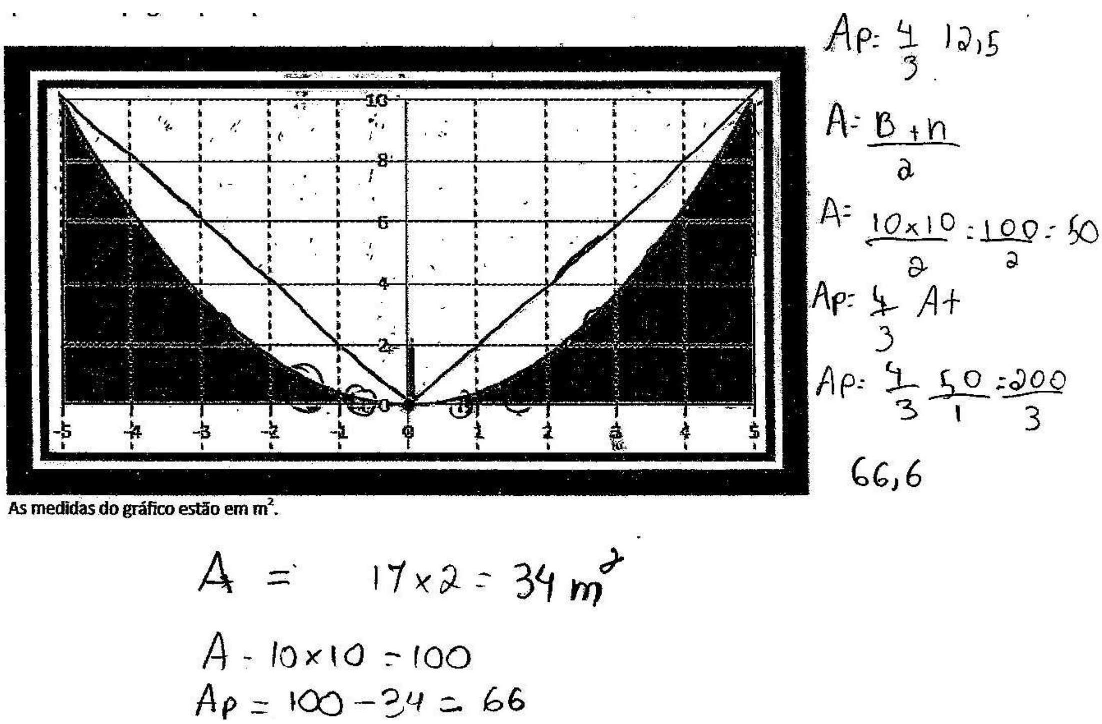


Figura 7.10: Cálculos da comprovação da Área da Parábola

8 Conclusão

Concluímos que não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicacão e de argumentação.

A tentativa de melhorar a qualidade do ensino na aprendizagem Matemática nas escolas de ensino médio de todo país é uma prática constante entre os educadores e a comunidade escolar. Porém todo o esforço nesse sentido entra em choque com o grande desinteresse dos alunos pela disciplina, colocada por eles como muito difícil, com pouca ou nenhuma utilidade prática, algo complexo, só para gênios. É comum nas salas de aula de Ensino Médio, alunos que não dominam os conceitos básicos de geometria, das operações, fazendo uso indiscriminado da calculadora para suprir a defasagem do cálculo mental em operações simples. A apresentação dos conteúdos de forma contextualizada, utilizando a interdisciplinaridade e o contexto histórico como ferramenta nas aulas de Matemática mostra-se eficaz, produzindo efeito desmistificador da disciplina, tornando-a mais humana, mais acessível a todos. Os conteúdos matemáticos apresentados dentro do contexto histórico promovem os saberes matemáticos como produto da humanidade, construídos ao longo de toda a trajetória humana, por todos os povos, cada qual contribuindo à sua maneira, com a sua cultura, gerando diversidade e conhecimento.

Nesse clima de total mudança dos padrões comuns à aula de matemática, a História da Matemática é introduzida, sem a pretensão de que o aluno aprenda a História e sim consiga entender o contexto de cada conteúdo apresentado. É comum o aluno não reconhecer a importância da disciplina e não ter noção do contexto social que envolve o surgimento de determinados conteúdos.

Concluímos então que dentre os resultados obtidos, foi considerado favorável o uso da História da Matemática em sala de aula, a apresentação da matemática como uma criação humana, construída pela humanidade e o maior interesse dos alunos nas aulas de matemática foram muito significativas e apresentadas durante as atividades aplicadas. Para a professora autora do trabalho, a oportunidade de aprofundar os estudos na área de História da Matemática contribuiu para seu crescimento profissional e para o melhor desempenho no seu trabalho como educadora matemática.

Bibliografia

[1] Aaboe, Asger: *Episódios da História Antiga da Matemática.* SBM, ISBN 9788585818951.

[2] Boyer, Carl: *História da Matemática.* Editora da Universidade de São Paulo, 1974, ISBN 9788583370369.

[3] Carmo, Manfredo Perdigão do: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* SBM, ISBN 97888585818265.

[4] Eves, Howard: *Introdução à História da Matemática.* Editora Unicamp, 2008, ISBN 8526806572.

[5] Fritz John, Richard Courant e: *Introuction to Calculus and Analysis.* Interscience Publication, 1974, ISBN 9783642571497.

[6] Lima, Elon Lages: *Números e Funções Reais.* SBM, ISBN 9788585818814.

[7] Neto, Antonio Caminha Muniz: *Fundamentos de Cálculo.* SBM, ISBN 9788583370369.

[8] Pitombeira, João Bosco e Tatiana Marins Roque: *Tópicos de História da Matemática.* SBM, ISBN 9788585818654.

[9] Stewart, James: *Cálculo, volume 1.* Thomson Learning, 2006, ISBN 8522104794.