

WILY SARMIENTO YUCRA

**DENSIDADE DE VARIEDADES ESTÁVEIS FORTES EM FLUXOS
ANOSOV**

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das exi-
gências do Programa de Pós-Graduação
em Matemática, para obtenção do título
de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

S246d Sarmiento Yucra, Wily, 19-
2017 Densidade de variedades estáveis fortes em fluxos Anosov /
Wily Sarmiento Yucra. – Viçosa, MG, 2017.
vii, 59f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.58-59.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Universidade Federal
de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 515.39

WILY SARMIENTO YUCRA

DENSIDADE DE VARIEDADES ESTÁVEIS FORTES EM FLUXOS
ANOSOV

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de julho de 2017.



Walter Teófilo Huaraca Vargas



Andrés Mauricio López Barragán



Enoch Humberto Apaza Calla
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Diomedes Sarmiento e Maria Yucra.*

Depois de escalar uma montanha muito alta, descobrimos que há muitas outras montanhas por escalar.

NÉLSON MANDELA

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelos dons que me foram dados. Dons que não trabalhei para obter, mas lutei para cultivar. E por ter me dado saúde e forças para alcançar meus objetivos, além de sua infinita bondade e amor.

Sou muitíssimo grato aos meus pais, Diomedes Sarmiento e Maria Yucra, que deram todo seus esforços para que agora esteja culminando esta etapa de minha vida. Pelo exemplo de superação, amor e motivação constante que me há permitido ser uma pessoa de bem, vocês são minha vida.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Enoch Humberto Apaza Calla e a meu coorientador Bernardo Melo de Carvalho pelas suas eficientes orientações, paciência, boa vontade, amizade e pelas correções e incentivo ao longo deste trabalho.

Agradeço aos meus irmãos: Marco, Froilan, Yoni, Raul, Juana e Maribel, que me deram coragem e incentivo para que pudesse encarar este desafio.

Agradeço ao professor Walter Huaraca e Bulmer Mejía por suas enumeráveis e valiosas contribuições durante o período de pesquisa.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Teoria básica da Geometria Riemanniana	4
1.2 Noções de Sistemas Dinâmicos	7
1.3 Fluxos Anosov	13
2 Resultado Principal	26
2.1 Proposições e Lemas Prévios	26
2.2 Folheações Conjuntamente Integráveis	46
2.3 Prova do Teorema Principal	54
Referências Bibliográficas	58

Resumo

YUCRA, Wily Sarmiento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2017.
Densidade de Variedades Estáveis Fortes em Fluxos Anosov. Orientador:
Enoch Humberto Apaza Calla. Coorientador: Bernardo Melo de Carvalho.

No presente trabalho, provaremos que para um fluxo Anosov $\phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ de classe C^r ($r \geq 1$), onde M é uma variedade Riemanniana compacta, conexa, suave e tal que o conjunto dos pontos não errantes seja igual a M , existem exatamente duas possibilidades: que cada variedade estável forte e instável forte é densa em M ou ϕ_t é a suspensão de um difeomorfismo de Anosov de uma subvariedade compacta C^1 de codimensão um em M .

Abstract

YUCRA, Wily Sarmiento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2017.
Density of Strong Stable Manifolds in Anosov Flows. Adviser: Enoch Humberto Apaza Calla. Co-adviser: Bernardo Melo de Carvalho.

In this paper, we will prove that for a flow $\phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ of classe C^r ($r \geq 1$), where M is a smooth compact connected Riemannian manifold and such that the set of nonwandering points is equal to M , there are exactly two possibilities: each strong stable and each strong unstable manifold is dense in M , or ϕ_t is the suspension of an Anosov diffeomorphism of a compact C^1 submanifold of codimension one in M .

Introdução

Para começar a estudar sistemas dinâmicos precisaremos de três ingredientes:

- (i) Um espaço de fase M arbitrário, que é o conjunto onde vamos a ter a dinâmica, como por exemplo um espaço de medida, espaço topológico, e uma das mais interessantes que dá propriedades fundamentais sobre sistemas dinâmicos a estrutura diferencial. Neste trabalho M vai ser uma variedade Riemanniana compacta, conexa e suave, cujos elementos ou pontos representam os possíveis estados do sistema.
- (ii) Um tempo, que pode ser discreto ou contínuo.
- (iii) A lei do movimento, esta lei é uma regra que permite determinar o estado de sistema em cada instante de tempo t a partir dos estados do sistema em todos os instantes de tempo anteriores. Dita lei para nos simplesmente vai ser dado por um fluxo ϕ .

O estudo moderno da dinâmica dos fluxos foi iniciada a finais do século XIX e inícios do XX, por Liapunov, Birkhoff e Poincaré que introduz a ideia de descrever qualitativamente as soluções das equações diferenciais que não podem ser resolvidas analiticamente.

Um dos precursores da teoria hiperbólica em sistemas dinâmicos é D. V. Anosov, que em 1967 estuda os U — *systems*, agora conhecidos como *Fluxos Anosov*, que por definição é quando existe uma descomposição contínua do fibrado tangente de M sobre toda a variedade em um subfibrado contrator, um subfibrado expensor e a direção do fluxo. O fluxo Anosov desempenhou um papel muito importante na compreensão e desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos diferenciáveis, sendo este estruturalmente estável e globalmente hiperbólico. Isto é um dos motivos que incentivam o estudo de fluxos Anosov.

Uns dos principais exemplos de fluxos Anosov são os fluxos geodésicos no fibrado tangente unitário de uma variedade Riemanniana compacta de curvatura negativa e as suspensões de difeomorfismos de Anosov (ver [22]). Estes fluxos serão transitivos, no primeiro caso se o fluxo geodésico é definido num fibrado tangente unitário numa superfície fechada de curvatura gaussiana constante e igual a -1 [3], no segundo caso se o difeomorfismo é de codimensão 1 [22].

A. Verjovsky conjecturou que todo fluxo Anosov de codimensão 1 numa variedade compacta de dimensão maior igual a 3 é transitivo, isto é, que $\Omega(\phi_t) =$

M . O que não é válido em dimensão 3 pois J. Frank e R. Williams construíram em 1980 o primeiro exemplo de fluxos de Anosov não transitivos conhecidos como Fluxos de Anosov Anômalos [7]. Em 1974, A. Verjovsky provou que todo fluxo Anosov de codimensão 1 numa variedade compacta de dimensão maior a 3 é transitivo, outra demonstração que é uma simplificação de A. Verjovsky é dada por T. Barbot [2], no qual explica por que conjectura falha em dimensão 3.

Se $\Omega(\phi_t) = M$ para um fluxo Anosov, então $W^u(x)$ e $W^s(x)$ são densos em M para cada $x \in M$ [17]. Mas, nem sempre é o caso de que cada uma das folhas de $\mathcal{F}^{uu}$ ou de $\mathcal{F}^{ss}$ é denso em M . Isto não ocorre, por exemplo, se ϕ_t é a suspensão de um homeomorfismo Anosov. Neste caso, cada folha de $\mathcal{F}^{uu}$ e cada folha de $\mathcal{F}^{ss}$ situam-se numa subvariedade compacta de codimensão 1 em M .

O objetivo principal desta dissertação é mostrar um resultado obtido por Joseph F. Plante em [17]. Cujo enunciado é o seguinte:

Teorema Principal. Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa, suave e $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ um fluxo Anosov de classe C^r ($r \geq 1$) tal que $\Omega(\phi_t) = M$. Então existem exatamente duas possibilidades:

- i) Cada variedade estável forte e instável forte é denso em M , ou
- ii) ϕ_t é a suspensão de um difeomorfismo de Anosov de uma subvariedade compacta C^1 de codimensão um em M .

Isto é, os fluxos Anosov transitivos que não são suspensões tem folheações estáveis e instáveis fortes densas em M . Agora, daqui surge uma pergunta natural, existem fluxos Anosov transitivos que não sejam suspensão? C. Bonatti e R. Langevin respondem esta pergunta em [3] de maneira positiva.

O presente trabalho esta organizado como segue:

No capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos como variedades diferenciáveis, variedade Riemanniana, folheações, e o objetivo principal fluxos Anosov junto com suas propriedades fundamentais e entre outros fatos necessários para o entendimento do trabalho.

No capítulo 2, apresentamos as principais proposições e lemas com a finalidade de mostrar o Teorema Principal. A estratégia para provar o Teorema Principal, a grosso modo. será a seguinte. Supor que não acontece o item (i), então existe um ponto $x \in M$ tal que $W^{uu}(x)$ ou $W^{ss}(x)$ não é densa em M . Logo, o Lema 2.4 garante a existe de um ponto periódico p de ϕ_t tal que $W^{uu}(p)$ não é densa em M . Daqui, da Proposição 2.1 segue que ϕ_t é a suspensão de um homeomorfismo $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$, onde r é o período de p .

Assim, para concluir basta mostrar que $\overline{W^{uu}(p)}$ seja uma subvariedade de M . Com esse propósito observemos que, como $W^{uu}(x)$ ou $W^{ss}(x)$ não é densa em M , segue da Proposição 2.3 que $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integrável, daqui da Proposição 2.2 segue que $E^u \oplus E^s$ é integrável. Logo, pela definição de subespaço integrável, existe uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^1 tangente a $E^u \oplus E^s$. Seja L uma

folha de $\mathcal{F}$. Se mostramos que $L = \overline{W^{uu}(p)}$ se concluiria a prova do Teorema, pois teríamos que $\overline{W^{uu}(p)}$ é uma subvariedade de classe C^1 , já que $L \in \mathcal{F}$ é uma subvariedade de classe C^1 de M . Além disso compacta, desde que M é compacta e $\overline{W^{uu}(p)} \subset M$ fechada. E de codimensão um em M desde que ϕ_t é a suspensão de $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$.

Para isto, basta observar que L é denso em $\overline{W^{uu}(p)}$ (isto é, $\overline{L} = \overline{W^{uu}(p)}$) e que L é fechado (isto é, $L = \overline{L}$), pois claramente daqui teríamos que $L = \overline{W^{uu}(p)}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento de nosso trabalho, dentre eles: a noção de variedade diferencial, variedade Riemanniana, folheações e fluxos Anosov junto com suas propriedades fundamentais. Além de isso fixaremos as notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. Tem-se como objetivo principal ajudar o leitor familiarizar com conceitos e resultados básicos que são fundamentais para nosso trabalho.

As principais referencias são: [5], [6], [11], [12], [13], [14], [17], [22] e outras referencias que serviram na complementação da teoria foram [4], [10], [16], [20], [21], [23] e [24]

1.1 Teoria básica da Geometria Riemanniana

Iniciaremos o trabalho fazendo uma breve revisão de variedades diferenciais e geometria Riemanniana, focando em alguns resultados que julgamos necessários para o entendimento da dissertação. Para isto seguimos o livro do professor Manfredo [6].

Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. *Seja M um espaço topológico. Um **sistema de coordenadas locais** ou **carta local** em M é o par (U, φ) onde $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um homeomorfismo de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.*

Definição 1.2. *Um **atlas** de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathcal{A}$ de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U cobrem M . Os domínios U dos sistemas coordenadas $\varphi \in \mathcal{A}$ são chamados as **vizinhanças coordenadas** de $\mathcal{A}$.*

Definição 1.3. *Dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$. O homeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é chamado **mudança de coordenada**.*

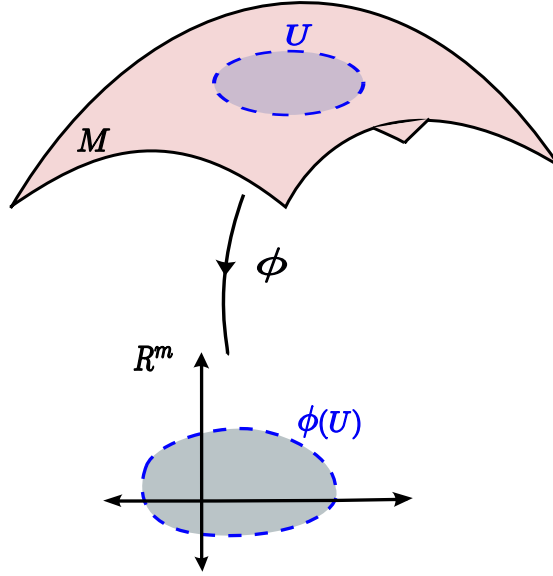


Figura 1.1: Carta Local.

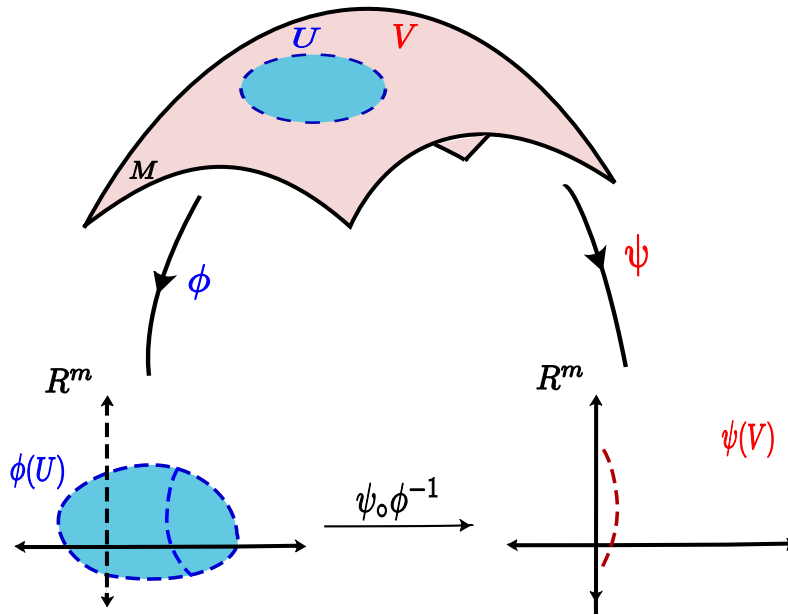


Figura 1.2: Mudança de Coordenada.

Um atlas $\mathcal{A}$ é dito de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, se todas as mudanças de coordenadas do atlas são de classe C^r .

Um sistemas de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M diz-se **admissível** relativamente a um atlas $\mathcal{A}$ de dimensão m e classe C^r , $r > 0$, de M se para cada $\psi \in \mathcal{A}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, onde $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem-se que as mudanças de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$ são de classe C^r . Em outras palavras, se $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ é ainda um atlas de classe C^r em M .

Definição 1.4. Um atlas $\mathcal{A}$ de dimensão m e classe C^r , $r > 0$, de M é chamado **máximo** se contém todos os sistemas coordenadas que são admissíveis em relação

a $\mathcal{A}$.

É importante ressaltar que todo atlas de dimensão m e de classe C^r , $r > 0$, de M , pode ser ampliado até se tornar um atlas máximo de classe C^r , para isso basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição 1.5. *Uma **variedade diferenciável** de dimensão m e classe C^r , $r > 0$, é um par $(M, \mathcal{A})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathcal{A}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^r .*

Exemplo 1.1. *Toda superfície de dimensão m e classe C^r , é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^r , com o atlas $\mathcal{A}$ formado pelos sistemas de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ que são inversas das parametrizações de classe C^r .*

Definição 1.6. *Sejam M e N variedades diferenciais de dimensão m e n respetivamente. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é um **difeomorfismo** se f é bijetora, diferenciável e com inversa diferenciável.*

Se existe um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis M e N dizemos que eles são difeomorfas.

Definição 1.7. *Sejam M e N variedades diferenciais de dimensão m e n respetivamente. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma **submersão** se $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é sobrejetora para todo $p \in M$, isto é, o posto da matriz jacobiana $(Jf)_p$ é igual a n para todo $p \in M$.*

Vale ressaltar que se $f : M \rightarrow N$ é uma submersão então $m \geq n$.

Teorema 1.1. (Forma Local das Submersões).

Sejam M e N variedades diferenciais de dimensão m e n respetivamente e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável de classe C^r , $r \geq 1$ que é uma submersão num ponto $p \in M$. Então existem cartas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p \in U$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $q = f(p) \in V$ e uma decomposição $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ tal que $f(U) \subset V$ e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x$. Em outras palavras, f é localmente equivalente a projeção $(x, y) \mapsto x$.

Definição 1.8. *Sejam M e N variedades diferenciais de dimensão m e n respetivamente. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetora para todo $p \in M$. Se além disso, f for um homeomorfismo sobre sua imagem $f(M) \subset N$ com a topologia induzida por N , dizemos que f é um **mergulho**. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho então M é chamada subvariedade de N .*

Observe que para $f : M \rightarrow N$ ser uma imersão é necessário que $m \leq n$, a diferença $n - m$ é chamada de **codimensão** da imersão f .

Definição 1.9. *Seja M uma variedade diferenciável. Definimos o **fibrado tangente** de M como o conjunto:*

$$TM = \{(x, v) : x \in M, v \in T_x M\}$$

Variedade Riemanniana

Definição 1.10. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana** (ou **estrutura Riemannina**) em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, que varia de forma diferenciável, isto é, se $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de um ponto p , com $X(x_1, \dots, x_n) = p \in X(U)$ e $\frac{\partial(p)}{\partial x_i} = dx_p(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial(p)}{\partial x_i}, \frac{\partial(p)}{\partial x_j} \rangle_p = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemannina chama-se **variedade Riemanniana**.

Definição 1.11. *Diz-se que uma métrica Riemanniana g numa variedade diferenciável M de dimensão m é de **classe** C^r , $r > 0$, se, para cada carta $x : U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ a função $g^x : x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r , ou equivalentemente, se as funções $g_{ij}^x : U \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^r .*

Como as mudanças de coordenadas são difeomorfismo, a definição acima não depende da carta x .

Proposição 1.1. *Toda variedade diferenciável M de classe C^r , $r > 0$, admite uma métrica Riemanniana de classe C^{r-1} .*

Demonstração: Ver em [12], página 210. ■

Definição 1.12. *Duas variedades M_1 e M_2 são **transversais** em M se para todo ponto $p \in M_1 \cap M_2$ temos que os espaços tangentes de $T_p M_1$ e $T_p M_2$ geram $T_p M$.*

1.2 Noções de Sistemas Dinâmicos

Neste seção serão dados os conceitos, notações e resultados essenciais sobre fluxos, folheações e fluxos Anosov. Daqui em diante M denota, salvo menção em contrário, uma variedade Riemanniana compacta, conexa e suave. As principais referências para esta seção foram [5], [6], [11], [12], [13], [14], [17] e [22].

Teoria de fluxos

Definição 1.13. *Um **fluxo** de classe C^r ($r \geq 1$) em M é uma aplicação $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ de classe C^r ($r \geq 1$) tal que:*

$$i) \quad \phi(x, 0) = x.$$

$$ii) \quad \phi(x, t + s) = \phi(\phi(x, t), s) \quad \text{para todo } s, t \in \mathbb{R}.$$

Podemos denotar $\phi_t(x)$ a $\phi(t, x)$, denominar ϕ_t ao fluxo e escrever $\phi_t : M \rightarrow M$.

Definição 1.14. A *órbita de um ponto* $x \in M$ com respeito ao fluxo ϕ_t é o conjunto

$$O(x) = \{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Uma **órbita fechada** de um ponto $x \in M$ é quando $O(x)$ é um conjunto fechado.

Definição 1.15. Um ponto $x \in M$ é chamado **ponto fixo** para um fluxo ϕ_t se $\phi_t(x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.16. Um ponto $p \in M$ é chamado **ponto periódico** para um fluxo ϕ_t se existe $T > 0$ tal que $\phi_T(p) = p$ e $\phi_t(p) \neq p$, para todo $t \in (0, T)$.

A órbita de um ponto periódico é chamada **órbita periódica**. Denotamos por $Per(\phi_t)$ ao conjunto de pontos periódicos.

Definição 1.17. Um ponto $p \in M$ é dito **não-errante** para o fluxo ϕ_t se, para qualquer vizinhança $U \subset M$ de p e qualquer numero real $T > 0$, existe $|t| > T$ tal que $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$. Caso contrario p é dito **ponto errante**.

O conjunto de pontos não errantes de um fluxo ϕ_t será denotado por $\Omega(\phi_t)$ ou simplesmente Ω . Ao longe deste trabalho assumimos que $\Omega = M$.

Exemplo 1.2. Se $x \in M$ é um ponto fixo de um fluxo ϕ_t , então x é um ponto não errante para ϕ_t , pois para toda vizinhança U de x e qualquer tempo $T > 0$ temos $x \in \phi_t(U) \cap U$.

Exemplo 1.3. Se $p \in M$ é um ponto periódico com período $r > 0$ para um fluxo ϕ_t , então p é um ponto não errante para ϕ_t , pois existe um numero natural n tal que $nr > 0$ e $\phi_{nr}(p) = p$, de onde temos que, para qualquer vizinhança U de p $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$.

Definição 1.18. Um subconjunto compacto $\Lambda \subset M$ é dito **invariante com respeito ao fluxo ϕ_t** , se $\phi_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4. Se ϕ_t é um fluxo sobre M , então $\emptyset$ e M são invariantes com respeito a ϕ_t .

Exemplo 1.5. O conjunto $\Omega(\phi_t) \subset M$ é invariante com respeito ao fluxo ϕ_t .

De fato: Provaremos que $\phi_t(\Omega(\phi_t)) = \Omega(\phi_t), \forall t \in \mathbb{R}$.

i) Mostremos que, $\phi_t(\Omega(\phi_t)) \subset \Omega(\phi_t)$.

Seja $y \in \phi_t(\Omega(\phi_t))$ com $t \in \mathbb{R}$, assim existe $x \in \Omega(\phi_t)$ tal que $y = \phi_t(x)$. Agora como $x \in \Omega(\phi_t)$ temos que para qualquer vizinhança V de x e qualquer numero real $T > 0$, existe $|t_0| > T$ tal que:

$$\phi_{t_0}(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Por outro lado, seja U uma vizinhança de $y = \phi_t(x)$, daqui segue que $x = \phi_{-t}(y) \in \phi_{-t}(U)$. Logo $\phi_{-t}(U)$ é uma vizinhança de x , então:

$$\phi_{t_0}(\phi_{-t}(U)) \cap \phi_{-t}(U) \neq \emptyset.$$

Assim,

$$\phi_t(\phi_{t_0}(\phi_{-t}(U)) \cap \phi_{-t}(U)) = \phi_t(\phi_{t_0}(\phi_{-t}(U))) \cap \phi_t(\phi_{-t}(U)) \neq \emptyset.$$

De onde,

$$\phi_{t_0}(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Portanto $y \in \Omega(\phi_t)$ e, assim $\phi_t(\Omega(\phi_t)) \subset \Omega(\phi_t), \forall t \in \mathbb{R}$.

ii) Agora, provemos que $\Omega(\phi_t) \subset \phi_t(\Omega(\phi_t))$.

Seja $x \in \Omega(\phi_t)$, logo $\phi_{-t}(x) \in \phi_{-t}(\Omega(\phi_t))$. Agora, como $\phi_t(\Omega(\phi_t)) \subset \Omega(\phi_t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que $\phi_{-t}(x) \in \Omega(\phi_t)$, de onde $x \in \phi_t(\Omega(\phi_t))$.

Isto é, $\Omega(\phi_t) \subset \phi_t(\Omega(\phi_t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, $\Omega(\phi_t) \subset M$ é invariante com respeito ao fluxo ϕ_t .

A seguinte proposição é de fácil verificação e sua prova pode ser achada, por exemplo, em [11] e [24].

Proposição 1.2. i) O complemento de um conjunto que é invariante com respeito a um fluxo é invariante com respeito ao fluxo.

ii) A interseção de qualquer coleção de conjuntos que são invariantes com respeito um fluxo é ainda invariante com respeito ao fluxo.

iii) A união de qualquer coleção de conjuntos que são invariantes com respeito a um fluxo é ainda invariante com respeito ao fluxo.

Folheações

Introduzimos nesta seção a noção de folheação e as propriedades mais elementares que serão utilizadas no restante do trabalho. Veremos também alguns exemplos que ilustram o conceito.

A descomposição de uma variedade M em subvariedades imersas, todas da mesma dimensão, dá origem a uma folheação da variedade M . Uma folheação de uma variedade M , a grosso modo, é a descomposição de M numa união de subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro.

Para maiores detalhes ver [5].

Definição 1.19. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^∞ . Uma **folheação** de classe C^r e dimensão n de M , é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r em M satisfazendo:

- i) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.
- ii) Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é de classe C^r e esta dada por $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$

Dizemos que M é **folheada** por $\mathcal{F}$, ou ainda que $\mathcal{F}$ é uma **estrutura folheada** de dimensão n de classe C^r sobre M .

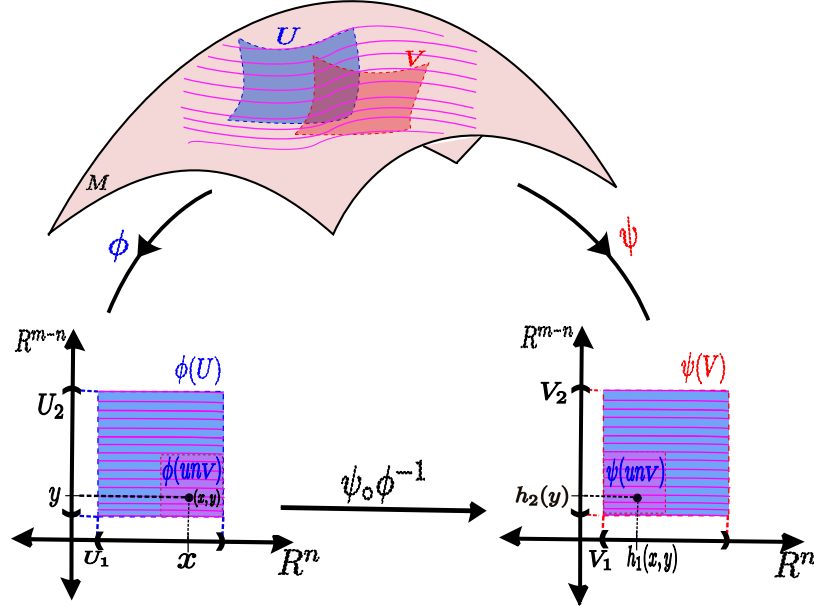


Figura 1.3: Folheadão de uma variedade m - dimensional.

As cartas de $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ são chamadas **cartas folheadas**.

Definição 1.20. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheadão de classe C^r de dimensão n , com $0 < n < m$, de M^m e (U, φ) uma carta local de $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times c)$, $c \in U_2$ são chamados **placas** de U , ou ainda **placas** de $\mathcal{F}$.

Fixando $c \in U_2$, a aplicação $g = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe C^r , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n de classe C^r de M . Além disso, se α e β são placas de U , então $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Definição 1.21. Um **caminho de placas** de $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Como M é recoberta pelas placas de $\mathcal{F}$, definimos em M a relação de equivalência: “ pRq se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$ ”. As classes de equivalência de relação R são chamados **folhas** de $\mathcal{F}$. Segue da definição que uma folha de $\mathcal{F}$ é um subconjunto de M conexo por caminhos.

Exemplo 1.6. *Seja $f : M^m \longrightarrow N^n$ uma submersão de classe C^r . Então as curvas de nível $f^{-1}(c)$, $c \in N$, são folhas de uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r de M .*

De fato, utilizando o Teorema da Forma Local das Submersões temos que dados, $x \in M$ e $q = f(x) \in N$, existem cartas locais (U, φ) em M , (V, ψ) em N tais que $x \in U$, $q \in V$ tem-se que:

- 1) $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$
- 2) $\psi(V) = V_2 \supset U_2$
- 3) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi_2$, onde π é a projeção tal que $(x, y) \mapsto y$

As cartas dadas pelo Teorema da Forma Local das Submersões de M definem uma folheação $\mathcal{F}$ de M . Com efeito, o item (i) da Definição 1.19, é satisfeito como podemos ver acima. Para mostrar o item (ii) da Definição 1.19 basta mostrar que a composição do item (ii) é independente de x . Sejam (U, φ) e $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ cartas de M fornecidos pelo Teorema da Forma Local das Submersões. Mostraremos que, $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ é independente de $x \in U_1$.

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} &= \bar{\psi} \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \pi_2 \end{aligned}$$

então,

$$\pi_2 \circ (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = (\bar{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \pi_2.$$

Daqui, a composição do item (ii) da Definição 1.19 não depende de $x \in U_1$. Isto prova que, $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^r de M . Por definição as placas de $\mathcal{F}$ estão contidas nas curvas de nível de f . Isto prova que, as folhas de $\mathcal{F}$ são precisamente os conjuntos de nível de f e segue o resultado.

Um exemplo mais específico é o seguinte.

Exemplo 1.7. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação definida por*

$$f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z,$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$, e

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação C^∞ tal que $\alpha(0) = 1$, $\alpha(1) = 0$ e $\alpha'(t) < 0$, para todo $t > 0$. Então f é uma submersão, onde as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$ onde $c \in \mathbb{R}$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que f não seja uma submersão. Então existe um ponto (x, y, z) tal que

$$\nabla f(x, y, z) = 0,$$

ou seja,

$$(2\alpha'(r^2)xe^z, 2\alpha'(r^2)ye^z, \alpha(r^2)e^z) = (0, 0, 0)$$

.

Daí, $x = y = 0$ e $\alpha(r^2) = 0$

Portanto, $x = y = 0$, além disso, de $\alpha(r^2) = 0$ temos que $x^2 + y^2 = 1$, o que é uma contradição.

Logo f é uma submersão e como visto no Exemplo 1.6 as curvas de nível são folhas de uma folheação de codimensão um e de classe C^∞ de M .

As folhas desta folheação são descritas por

$$f(x, y, z) = c,$$

ou seja,

$$\alpha(r^2)e^z = c.$$

- i) Se $c = 0$, então $\alpha(r^2) = 0$ e, por tanto, $x^2 + y^2 = 1$. Aqui as curvas de nível correspondem ao cilindro de radio 1 que é representado por $f^{-1}(0)$.
- ii) Se $c > 0$, então $\alpha(r^2)e^z = c > 0$. Assim $\alpha(r^2) > 0$. Mais precisamente,

$$z = \ln(c) - \ln(\alpha(r^2)).$$

Quando $c = 1$ temos,

$$z = -\ln(\alpha(r^2)).$$

O gráfico da curva acima no plano $y = 0$ é dado por

$$z = -\ln(\alpha(r^2)).$$

Daí,

$$z' = -\frac{2\alpha(x^2)}{\alpha(x^2)}.x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Então $x = 0$ é o único ponto crítico de z . Temos $z \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 1^+$ ou 1^- . O gráfico de z é uma parábola.

No caso $c < 0$ a análise é similar. O gráfico das folhas de $\mathcal{F}$ estão representados no gráfico 1.4.

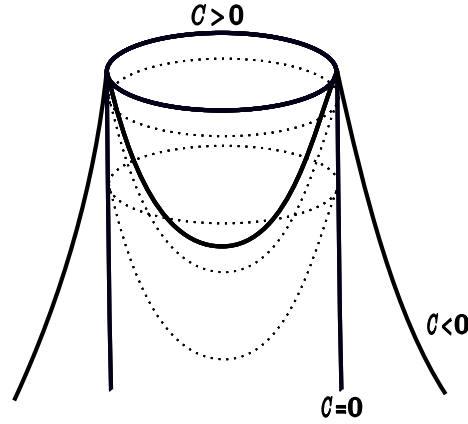


Figura 1.4: Exemplo de Folheação.

Exemplo 1.8. Um exemplo de uma folheação de dimensão 1 é a folheação de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{2-1}$ onde as folhas são retas da forma $\mathbb{R} \times \{c\}$ com $c \in \mathbb{R}^{2-1}$.

Na teoria de folheações é usual considerar também as folheações definidas:

- i) Por uma fibração (E, π, B, F) , onde as fibras, $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, definem uma folheação de E , cujas folhas são isomorfas às componentes conexas de F .
- ii) Por campos de vetores X sem singularidades, onde as folhas são as curvas solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = X(x)$.

1.3 Fluxos Anosov

Nesta seção definiremos um dos conceitos mais importantes nesta dissertação, fluxos Anosov e abordaremos algumas resultados importantes da teoria de fluxos Anosov. As principais referencias para este seção foram [11], [14], [17] e [22].

Definição 1.22. Um fluxo $\phi_t : M \rightarrow M$, $(t \in \mathbb{R})$ é um **fluxo de Anosov** de classe C^r , $(r \geq 1)$ se existe uma decomposição continua e ϕ_t -invariante do fibrado tangente de M em três subfibrados, isto é,

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^T \oplus E_x^u, \forall x \in M.$$

Onde E^T é o fibrado tangente de dimensão 1 para o fluxo ϕ_t não-singular e E^u e E^s satisfazem as seguintes condições:

- i) Existem constantes $A > 0$, $\mu > 1$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, $v \in E^u$ implica

$$\|D\phi_t(x).v\| \geq A\mu^t \|v\|.$$

ii) Existem constantes $B > 0$, $\lambda < 1$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $v \in E^s$ implica

$$\|D\phi_t(x) \cdot v\| \leq B\lambda^t \|v\|$$

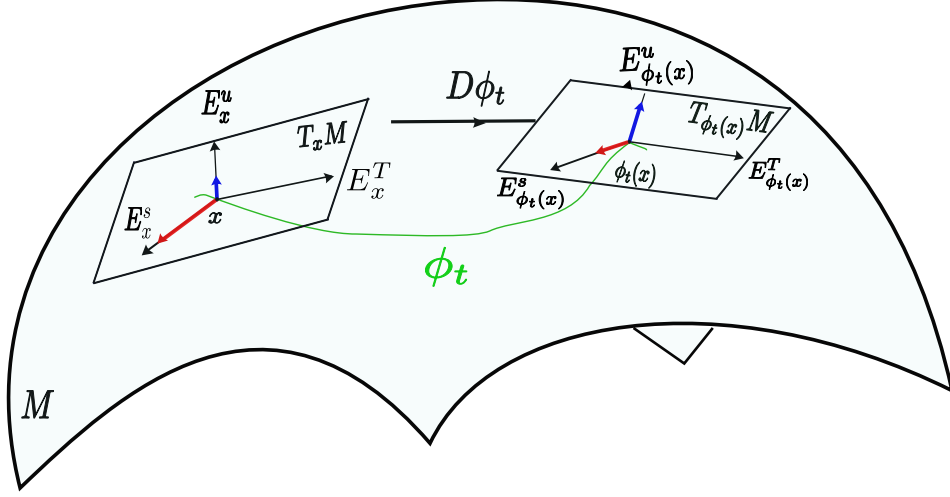


Figura 1.5: Fluxo Anosov: E^s contrae e E^u expande

Notemos, que desde que M é compacta, se escolhesse outra métrica Riemanniana que determine a norma $|\cdot|_1$, se teria que existe uma constante $k > 0$ tal que $k|v|_1 \leq |v| \leq k^{-1}|v|_1$, para todo $x \in T_x M$, e portanto (i) e (ii) se verifica (com constantes diferentes a A e B). Logo a definição é independente da métrica Riemanniana escolhida.

Os principais exemplos de fluxos Anosov são fluxos geodésicos no fibrado tangente unitário de uma variedade Riemanniana compacta de curvatura negativa (ver [22]), e suspensões de difeomorfismo Anosov. Este último exemplo é descrito como segue:

Seja $f : N \rightarrow N$ um difeomorfismo de Anosov de uma variedade compacta N (isto significa que existe uma f -invariante decomposição $TN = E^u \oplus E^s$, as quais satisfazem as condições análogas ao (i) e (ii) da definição 1.22). Considere o fluxo

$$\begin{aligned} \eta_t : N \times \mathbb{R} &\rightarrow N \times \mathbb{R} \\ (x, s) &\mapsto \eta(x, s) = (x, s + t) \end{aligned}$$

a suspensão de f é o fluxo induzido por η_t na variedade obtida de $N \times \mathbb{R}$ tornando as identificações $(x, s) \sim (f(x), s + 1)$.

Definição 1.23. Seja M uma variedade suave e $E \subset TM$ um subfibrado contínuo do fibrado tangente. E é chamado **integrável** se é o fibrado tangente de uma folheação C^1 (ou seja uma folheação determinada por uma carta coordenado de classe C^1 [9]).

Observação 1. a) E^u e E^s são chamados os sub-fibrados de expansão e contração de TM , respetivamente.

b) O subespaço $E^u \oplus E^s$ não necessariamente é integrável. Se $E^u \oplus E^s$ for integrável então, existe uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^1 tal que o subespaço $E^u \oplus E^s$ é tangente a $\mathcal{F}$. Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ então L é tangente a $E^u \oplus E^s$, além disso L é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado e $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado.

c) Os fibrados $E^u \oplus E^T$, $E^s \oplus E^T$, E^u , E^s são integráveis e as variedades integrais são de classe C^r . Estas variedades, de fato, determinam folheações contínuas de M que vamos denotar por $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^{uu}$, $\mathcal{F}^{ss}$, respetivamente.

d) Se $x \in M$, então as respetivas folhas destas soluções que contêm x são denotadas por $W^u(x)$, $W^s(x)$, $W^{uu}(x)$, $W^{ss}(x)$ e são chamadas as variedades instável, estável, instável forte, estável forte de x , respetivamente. De maneira mais precisa.

Maiores detalhes da Observação 1 podem ser encontrados em [11] e [22].

Definição 1.24. Os conjuntos:

$$W^{ss}(x) = \{y \in M : d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

e

$$W^{uu}(x) = \{y \in M : d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

São chamados respetivamente **variedade estável** e **variedade instável forte** do ponto x para o fluxo ϕ_t . Onde d denota a função distância correspondente a métrica Riemanniana M .

Definamos a **variedades estável e instável** de um ponto $x \in M$ para o fluxo ϕ_t como sendo respetivamente os conjuntos

$$W^u(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^{uu}(x))$$

$$W^s(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^{ss}(x)).$$

Podemos escolher a métrica em M , de modo que para a decomposição invariante temos $A = B = 1$. Este pressuposto na métrica implica as seguintes condições sobre a função distância d .

(a) Se x e y estiverem na mesma variedade estável então

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq d(x, y), \text{ para } t \geq 0$$

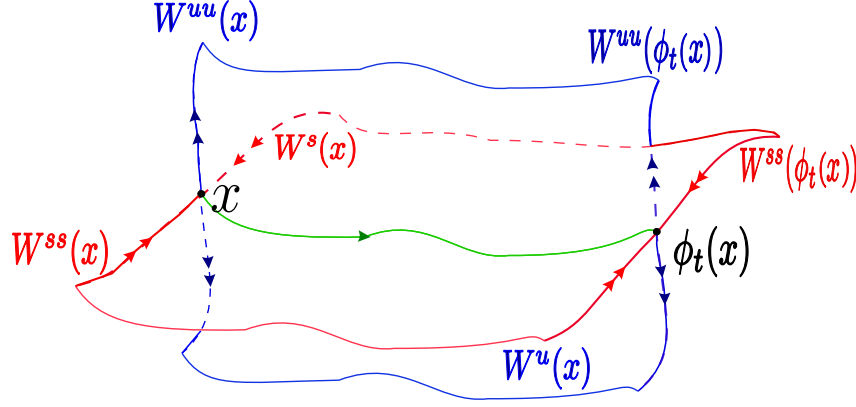


Figura 1.6: Variedades estável e instável

e se x e y estiverem na mesma variedade instável então

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \geq d(x, y), \text{ para } t \geq 0.$$

(b) Se x e y estiverem na mesma variedade estável forte então

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \lambda^t d(x, y), \text{ para } t \geq 0$$

e se x e y estiverem na mesma variedade instável forte então

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \geq \mu^t d(x, y), \text{ para } t \geq 0$$

onde $\lambda < 1$ e $\mu > 1$ são os dados para a decomposição hiperbólico com respeito a métrica.

Uma métrica satisfazendo estas condições é dita "adaptada" no resto desta dissertação, nos assumimos que a métrica satisfaz (a) e (b).

Agora, se d_u, d_s, d_{uu}, d_{ss} denota a métrica induzida por d sobre as folhas de folheações $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^{uu}, \mathcal{F}^{ss}$, respetivamente, define-se para cada $x \in M$, $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} B_\delta(x) &= \{y \in M : d(x, y) < \delta\} \\ B_\delta^u(x) &= \{y \in W^u(x) : d_u(x, y) < \delta\} \\ B_\delta^s(x) &= \{y \in W^s(x) : d_s(x, y) < \delta\} \\ B_\delta^{uu}(x) &= \{y \in W^{uu}(x) : d_{uu}(x, y) < \delta\} \\ B_\delta^{ss}(x) &= \{y \in W^{ss}(x) : d_{ss}(x, y) < \delta\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.2. (Teorema da Variedade Estável para Fluxos). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico invariante para um fluxo ϕ_t . Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada ponto $p \in \Lambda$ existem duas bolas mergulhadas $B_\delta^{ss}(p)$ e $B_\delta^{uu}(p)$ as quais são tangentes a E_p^s e E_p^u , respetivamente.*

Demonstração: Ver em [10] ou [19] ■

Teorema de Vizinhança Produto Local para Fluxos de Anosov

Teorema 1.3. *Seja $\Omega(\phi_t) = M$ para um fluxo Anosov ϕ_t então existe $\delta_0 > 0$ independente de $x \in M$ tal que para $0 < \delta \leq \delta_0$ as aplicações*

$$\begin{aligned} G : B_\delta^s(x) \times B_\delta^{uu}(x) &\longrightarrow M \\ (y, z) &\longmapsto G(y, z) = B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H : B_\delta^{ss}(x) \times B_\delta^u(x) &\longrightarrow M \\ (y, z) &\longmapsto H(y, z) = B_{2\delta}^{ss}(z) \cap B_{2\delta}^u(y) \end{aligned}$$

são definidas univocamente e são homeomorfismos sobre suas respectivas imagens.

Demonstração:

Primeiro mostraremos que, se $y, z \in \Omega$ e $d(y, z) < \delta_0$ para algum δ_0 então para todo $\delta \leq \delta_0$ tem-se que $B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y) \neq \emptyset$, isto é, existe $p \in B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y)$.

Este fato segue da transversalidade uniforme de $E^s \oplus E^T$ e E^u . Além disso, claramente $p \in \Omega$ desde que $B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y) \subset M = \Omega$.

agora, passamos a provar que p é único.

Afirmção 1.1. $p \in B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y)$ é único.

De fato, Suponhamos que exista outro ponto $p' \in B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y)$ mostraremos que $p' = p$.

Como $p \in B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y)$ temos que $p \in B_{2\delta}^s(z)$, então

$$d_s(p, z) < 2\delta. \quad (1.1)$$

Por outro lado, como $p' \in B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y)$ temos que $p' \in B_{2\delta}^s(z)$, de onde segue que

$$d_s(p', z) < 2\delta. \quad (1.2)$$

Agora, de (1.1), (1.2) e a desigualdade triangular temos que,

$$\begin{aligned} d_s(p', p) &< d_s(p', z) + d_s(z, p) \\ &< 2\delta + 2\delta = 4\delta \\ &\Rightarrow d_s(p', p) < 4\delta. \end{aligned}$$

De onde,

$$p' \in B_{4\delta}^s(p). \quad (1.3)$$

De maneira similar provemos que,

$$p' \in B_{4\delta}^{uu}(p). \quad (1.4)$$

Pois, desde que $p \in B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y)$ temos que $p \in B_{2\delta}^{uu}(y)$, então

$$d_{uu}(p, y) < 2\delta. \quad (1.5)$$

Por outro lado, como $p' \in B_{2\delta}^s(z) \cap B_{2\delta}^{uu}(y)$ temos que $p' \in B_{2\delta}^{uu}(y)$, de onde segue que,

$$d_{uu}(p', y) < 2\delta. \quad (1.6)$$

Daqui, de (1.5), (1.6) e a desigualdade triangular, temos que,

$$\begin{aligned} d_{uu}(p', p) &< d_{uu}(p', z) + d_{uu}(z, p) \\ &< 2\delta + 2\delta = 4\delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d_{uu}(p', p) < 4\delta.$$

De onde,

$$p' \in B_{4\delta}^{uu}(p).$$

Logo, de (1.3) e (1.4) temos que $p' \in B_{4\delta}^s(p) \cap B_{4\delta}^{uu}(p) = \{p\}$. Daqui, segue que $p' \in \{p\}$. E assim,

$$p' = p.$$

■

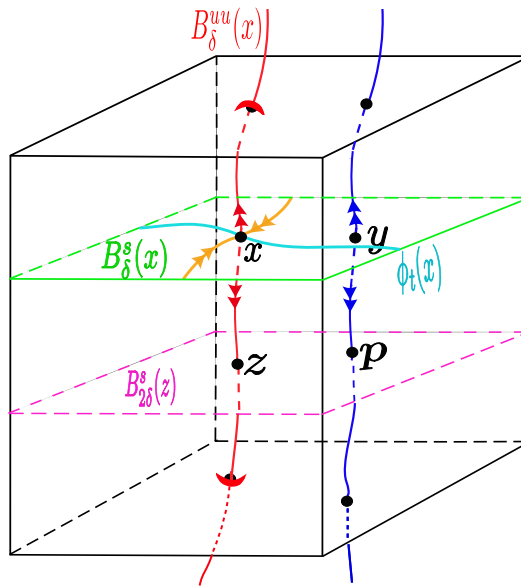


Figura 1.7: Vizinhança Produto Local

Teorema de Anosov

Definição 1.25. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $\phi_t : M \rightarrow M$ um fluxo, $\delta, T > 0$ a aplicação $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ é chamada uma δ -pseudo órbita se:*

$$d(\phi_t(c(\tau)), c(\tau + t)) \leq \delta$$

para todo $|t| \leq T$ e $\forall \tau \in \mathbb{R}$.

Definição 1.26. *Uma curva $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ é ϵ -sombreado pela órbita de $x \in M$ se existe uma função $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $|\frac{d}{dt}s - 1| < \epsilon$ tal que $d(c(s(t)), \phi_t(x)) < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Lema 1.1. *(Sombreamento para fluxos).*

Seja M uma variedade Riemanniana, ϕ_t um fluxo diferenciável e Λ um conjunto hiperbólico compacta para ϕ_t , então existe uma vizinhança $U(\Lambda) \supset \Lambda$ tais que para todo $\epsilon > 0$ existe, $\delta > 0$ tal que toda a δ -pseudo órbita é ϵ -sombreada por uma órbita de ϕ_t .

Corolário 1.4. *Seja M uma variedade Riemanniana, ϕ_t um fluxo diferenciável e Λ um conjunto hiperbólico compacta para ϕ_t , então existe uma vizinhança $U(\Lambda) \supset \Lambda$ tais que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que toda a δ -pseudo órbita é ϵ -sombreada por uma órbita periódica.*

Demonstração: Ver [11]. ■

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada também em ??

Teorema 1.5. (Teorema de Anosov). *Se $\Omega(\phi_t) = M$ para um fluxo Anosov então o conjunto de pontos periódicos de ϕ_t é denso em Ω .*

Demonstração:

Queremos mostrar que $\overline{Per(\phi_t)} = \Omega$.

De fato:

- i) $\overline{Per(\phi_t)} \subset M = \Omega$ então $\overline{Per(\phi_t)} \subset \Omega$ é imediato, assim, basta mostrar que,
- ii) $\Omega \subset \overline{Per(\phi_t)}$.

Isto é, dado $x \in \Omega$ mostraremos que $x \in \overline{Per(\phi_t)}$.

Lembremos que $x \in \overline{Per(\phi_t)}$ se, somente se, $\forall V_x, V_x \cap per(\phi_t) \neq \emptyset$ isto é, se $\forall V_x, \exists p \in V_x \cap per(\phi_t)$.

Dados $x \in \Omega$ e $\epsilon > 0$ arbitrário, seja V_x^ϵ uma vizinhança de x , Como ϕ_t é um fluxo Anosov, existe uma vizinhança produto $N_\delta(x)$ de x onde $\delta > 0$ com $N_\delta(x) \subset V_x^\epsilon$.

Logo, como $x \in \Omega$ então $\forall t > 0, \forall V_x = V, \exists T \geq t$ tal que $\phi_T(V) \cap V \neq \emptyset$. Como isto é válido para qualquer vizinhança de x , em particular para a vizinhança produto, assim podemos tomar $V = N_\delta(x)$.

De aqui, existe $q \in \phi_T(V) \cap V$.

Assim,

$$\phi_{-T}(q) \in V \cap \phi_{-T}(V).$$

Agora, denotemos $z = \phi_{-T}(q)$, daqui segue que existe $z \in V \cap \phi_{-T}(V)$ e além disso $\phi_T(z) \in \phi_T(V) \cap V$.

Isto é,

$$d(\phi_T(z), z) < \delta. \quad (1.7)$$

Afirmção 1.2. *Existe uma δ -pseudo órbita $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ de ϕ_t para $|t| \leq T$.*

De fato, seja $T > 0$ e,

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\rightarrow M \\ t &\mapsto c(t) = \phi_{t \bmod T}(z) \end{aligned}$$

para $|t| \leq T$.

- i) Para $|t| < T$, temos que existe $\delta > 0$ tal que $d(\phi_t(c(\tau)), c(t + \tau)) < \delta$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Pois, observe que

$$\begin{aligned} c(\tau + t) &= \phi_{(\tau+t) \bmod T}(z) \\ &= \phi_{\tau \bmod T}(\phi_{t \bmod T}(z)) \\ &= \phi_{\tau \bmod T}(\phi_t(z)) \\ &= \phi_t(\phi_{\tau \bmod T}(z)) \\ &= \phi_t(c(\tau)). \end{aligned}$$

De onde,

$$d(\phi_t(c(\tau)), c(t + \tau)) = 0 < \delta, \forall \tau \in \mathbb{R} \text{ e } |t| < T.$$

- ii) Para $|t| = T$, temos que $d(\phi_t(c(\tau)), c(t + \tau)) < \delta, \forall \tau \in \mathbb{R}$.

Observe inicialmente que, $c(T) = \phi_T(z), z \in W^s(z)$ e,

$$\begin{aligned} d(\phi_t(c(\tau)), c(t + \tau)) &= d(\phi_t(\phi_{\tau \bmod T}(z)), \phi_{(t+\tau) \bmod T}(z)) \\ &\stackrel{t=T}{=} d(\phi_T(\phi_{\tau \bmod T}(z)), \phi_{\tau \bmod T}(\phi_{T \bmod T}(z))) \\ &= d(\phi_{\tau \bmod T}(\phi_T(z)), \phi_{\tau \bmod T}(z)) \\ &< d(\phi_T(z), z) \stackrel{(1.7)}{<} \delta. \end{aligned}$$

Assim,

$$d(\phi_t(c(\tau), c(t + \tau)) < \delta, \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

De onde se conclui a prova da Afirmação 1.2.

Daí, pelo corolário 1.4 a δ -pseudo órbita é ϵ -sombreada por uma órbita periódica.

Pelo que existe,

$$p \in \text{per}(\phi_t) \cap V_x^\epsilon, \forall V_x^\epsilon$$

.

De onde,

$$x \in \overline{\text{per}(\phi_t)}.$$

Daí,

$$\Omega \subset \overline{\text{per}(\phi_t)}.$$

Assim, finalmente temos que $\overline{\text{per}(\phi_t)} = \Omega$. (Ver figura 1.8).

■

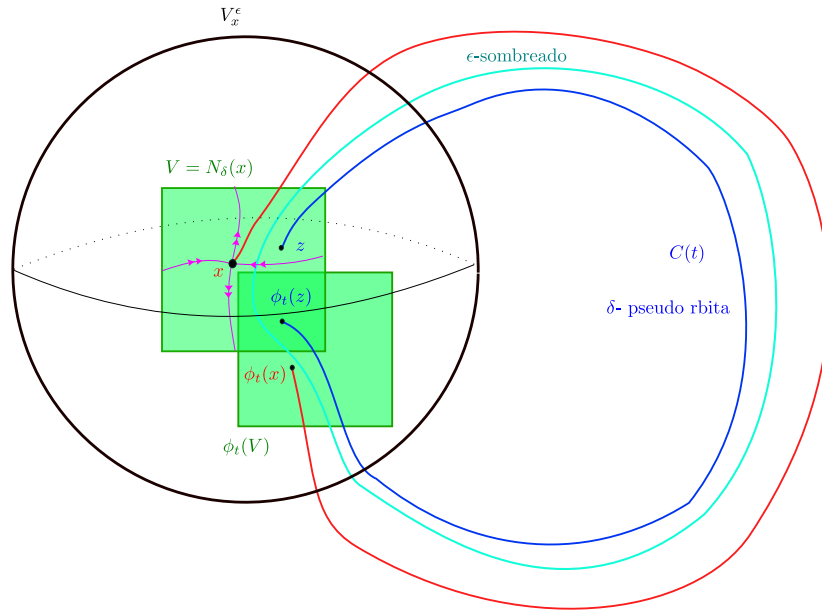


Figura 1.8: Teorema de Anosov

Conjuntos $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado ($\sigma = u, s, uu, ss$)

Definição 1.27. Seja $\mathcal{F}^\sigma$ uma folheação de uma variedade M . Então o conjunto $K \subset M$ é chamado **$\mathcal{F}^\sigma$ -saturado** se é uma união de folhas de $\mathcal{F}^\sigma$ onde ($\sigma = u, s, uu, ss$).

Lema 1.2. *Seja $\mathcal{F}^\sigma$ uma folheação de uma variedade M . Então o conjunto $K \subset M$ é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado se, somente, se para todo $x \in K$ tem-se que $W^\sigma(x) \subset K$, onde $(\sigma = u, s, uu, ss)$.*

Demonstração:

Suponhamos que $K \subset M$ é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado, então mostraremos que dado $x \in K$ arbitrário tem-se que $W^\sigma(x) \subset K$.

De fato:

Como $K \subset M$ é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado, temos pela definição que:

$$K = \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x).$$

Dado $x \in K$ queremos mostrar que $W^\sigma(x) \subset K$.

Seja $y \in W^\sigma(x)$, logo como $W^\sigma(x) \subset \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x)$

temos que,

$$y \in \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x) = K.$$

Isto é,

$$y \in K.$$

Agora, suponhamos que dado $x \in K$ arbitrário, se $W^\sigma(x) \subset K$ então K é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado. Isto é que,

$$K = \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x).$$

i) Provemos que, $\bigcup_{x \in K} W^\sigma(x) \subset K$.

Seja $y \in \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x)$ então $y \in W^\sigma(x)$ para algum $x \in K$.

Logo, como $W^\sigma(x) \subset K$ segue que $y \in K$.

ii) Provemos que, $K \subset \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x)$.

Seja $y \in K$, logo como $y \in W^\sigma(y) \subset \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x)$ temos que,

$$y \in \bigcup_{x \in K} W^\sigma(x).$$

■

Observação 2. a) Se $K \subset M$ é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado então $\overline{K}$ (o fecho de K) é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado, onde $(\sigma = u, s, uu, ss)$.

De fato:

Seja $x \in \overline{K}$ mostraremos que $W^\sigma(x) \subset \overline{K}$.

Como $x \in \overline{K}$, existe uma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, agora como K é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado tem-se que $W^\sigma(x_n) \subset K$.

Por outro lado, seja $y \in W^\sigma(x)$. Daí, pela continuidade das folhas W^σ e do fato que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, existe $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $B_{r_k}(y) \cap W^\sigma(x_{n_k}) \neq \emptyset$, onde, $B_{r_k}(y)$ é uma bola de y e radio $r_k > 0$. Isto é, existe $y_k \in B_{r_k}(y) \cap W^\sigma(x_{n_k})$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$. Logo como $B_{r_k}(y) \cap W^\sigma(x_{n_k}) \subset W^\sigma(x_{n_k}) \subset K$ temos que, $y_k \in K$. Assim, existe uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ daí, segue que $y \in \overline{K}$.

b) Se $K \subset M$ é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado, então K^c (o complemento de K) é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado, onde $(\sigma = u, s, uu, ss)$.

De fato:

Por contradição, suponhamos que dado $y \in K^c$ tem-se que $W^\sigma(y) \not\subset K^c$. Então dado $z \in W^\sigma(y)$ temos que $z \notin K^c$, logo $z \in K$ agora, como K é $\mathcal{F}^\sigma$ -saturado segue que $W^\sigma(z) \subset K$. Por outro lado, como $z \in W^\sigma(y)$ então $y \in W^\sigma(z)$ daí, $y \in K$ isto é, $y \notin K^c$ o que é uma contradição.

Agora demos um exemplo mais específico.

Exemplo 1.9. $W^u(x)$ é $\mathcal{F}^u$ -saturado.

De fato, dado $y \in W^u(x)$ queremos mostrar que $W^u(y) \subset W^u(x)$.

Seja $z \in W^u(y)$, como $y \in W^u(x)$ temos que $W^u(y) = W^u(x)$, de onde $z \in W^u(x)$.

Observação 3. $\overline{W^u(x)}$ é $\mathcal{F}^u$ -saturado. Este fato é uma consequência do Exemplo 1.9 e do item (a) da Observação 2.

Uma Consequência do Teorema de Anosov

Agora, mostramos uns dos principais resultados desta seção, que afirma que $W^u(x)$ e $W^s(x)$ são densos em M para cada $x \in M$. Mas posteriormente no capítulo 2 provaremos que nem sempre é o caso de que cada uma das folhas de $\mathcal{F}^{uu}$ ou de $\mathcal{F}^{ss}$ é denso em M .

Teorema 1.6. Se $\Omega(\phi_t) = M$ para um fluxo Anosov então $W^u(x)$ e $W^s(x)$ são densos em M para cada $x \in M$.

Demonstração: Queremos mostrar que $\overline{W^u(x)} = M$, para todo $x \in M$.

De fato:

Seja $x \in M$, como M é conexo não admite outra cisão além da trivial isto é:

Se $M = A \cup B$ onde A e B são conjuntos disjuntos e abertos então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Denotemos $A = \overline{W^u(x)}$ e $B = M - \overline{W^u(x)}$.

Como $M = \overline{W^u(x)} \cup (M - \overline{W^u(x)})$ e $A \neq \emptyset$, além disso B é aberto, supondo que A é aberto teríamos que $B = M - \overline{W^u(x)} = \emptyset$ e daí $\overline{W^u(x)} = M$ o que queríamos provar.

Assim, só faltaria mostrar que $\overline{W^u(x)}$ é aberto para todo $x \in M$.

Afirmção 1.3. $\overline{W^u(x)}$ é aberto para todo $x \in M$.

Dado $z \in \overline{W^u(x)}$, provaremos que existe uma vizinhança N tal que $z \in N \subset \overline{W^u(x)}$.

Seja $z \in \overline{W^u(x)}$, então pelo Teorema de vizinhança produto local, existe uma vizinhança produto $N = N_\delta(z)$ contendo z , onde $\delta > 0$.

Daqui, basta mostrar que $N \subset \overline{W^u(x)}$.

Ou seja, dado $q \in N$, arbitrário queremos mostrar que $q \in \overline{W^u(x)}$. Isto é, para todo V_q (vizinhança de q) existe $p' \in V_q \cap W^u(x)$.

Com esse fim, enunciamos o seguinte resultado cuja prova será feito depois de mostrar que $N \subset \overline{W^u(x)}$.

Resultado 1.1. $N \cap Per(\phi) \subset \overline{W^u(x)}$.

Agora, provemos que $N \subset \overline{W^u(x)}$.

De fato, seja $q \in N$, logo pelo Teorema 1.5 temos que $M = \overline{Per(\phi_t)}$ e como $N \subset M$, segue que, $q \in Per(\phi_t)$, isto é, para todo V_q existe $p \in V_q \cap per(\phi_t)$.

Por outro lado, observe-se que:

- i) Se $V_q \subset N$ temos que, $p \in N \cap per(\phi_t)$.
- ii) Se $V_q \not\subset N$, pela densidade de pontos periódicos existe um ponto periódico tal que $p \in per(\phi_t) \cap V_q \cap N$ isto é $p \in per(\phi_t) \cap N$.

Isto é, em qualquer caso temos que $p \in per(\phi_t) \cap N$.

Logo pelo Resultado 1.1 temos que $N \cap Per(\phi) \subset \overline{W^u(x)}$ de onde segue que $p \in \overline{W^u(x)}$, daí para toda vizinhança de p que denotamos por V_p existe $p' \in V_p \cap W^u(x)$.

Logo, como isto se cumpre para todo V_p , em particular se cumpre para $V_p \subset V_q$, de onde segue que $p' \in V_q \cap W^u(x)$ para todo V_q .

Logo

$$V_q \cap W^u(x) \neq \emptyset, \forall V_q.$$

Daí, segue que

$$q \in \overline{W^u(x)}.$$

Provando assim que,

$$N \subset \overline{W^u(x)}.$$

Demonstração: Do Resultado 1.1

Primeiro, observemos que pela observação 3, $\overline{W^u(x)}$ é $\mathcal{F}^u$ -saturado e como $z \in W^u(x)$ temos que,

$$W^u(z) \subset \overline{W^u(x)}. \quad (1.8)$$

Agora, desde que $per(\phi_t)$ é denso em M temos que é denso em N , existe $p \in N \cap Per(\phi)$, logo pelo teorema de vizinhança produto local existe $w \in W_{2\delta}^s(p) \cap W_{2\delta}^{uu}(z)$.

Logo, como $w \in W_{2\delta}^s(p) \subset W^s(p)$ temos,

$$\lim_{t_i \rightarrow \infty} \phi_{t_i}(w) = p. \quad (1.9)$$

Por outro lado, como $w \in W_{2\delta}^{uu}(z) \subset W^{uu}(z)$ temos que $\phi_{t_i}(w) \in \phi_{t_i}(W^{uu}(z)) \subset W^u(z)$ de onde,

$$\phi_{t_i}(w) \in W^u(z).$$

Logo, como $W^u(z) \subset \overline{W^u(x)}$ por (1.8), temos que

$$\phi_{t_i}(w) \in \overline{W^u(x)}$$

daqui, segue por (1.9) que, $p \in \overline{W^u(x)}$.

Assim, concluímos com a prova do Resultado 1.1 e a prova do teorema. ■

Capítulo 2

Resultado Principal

Neste capítulo nosso objetivo é apresentar a prova do teorema que motivou este estudo, cujo enunciado é dado a seguir.

Teorema Principal. Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa, suave e $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ um fluxo Anosov de classe C^r ($r \geq 1$) tal que $\Omega(\phi_t) = M$. Então existem exatamente duas possibilidades:

- i) Cada variedade estável forte e instável forte é denso em M , ou
- ii) ϕ_t é a suspensão de um difeomorfismo de Anosov de uma subvariedade compacta C^1 de codimensão um em M .

Para todos os resultados declarados neste capítulo os termos estável e instável podem ser trocadas entre si.

As principais referencias são: [11], [13], [14],[17], [22] e outras referencias que podem ser de complementação da teoria foram [3], [15] e [23].

2.1 Proposições e Lemas Prévios

Sabemos que, se $\Omega(\phi_t) = M$ para um fluxo Anosov então $W^u(x)$ e $W^s(x)$ são densos em M para cada $x \in M$ (ver Teorema 1.6). Mas nem sempre é o caso de que cada uma das folhas de $\mathcal{F}^{uu}$ ou de $\mathcal{F}^{ss}$ é denso em M . Isto não ocorre, por exemplo, se ϕ_t é a suspensão de um homeomorfismo Anosov. Neste caso, cada folha de $\mathcal{F}^{uu}$ e cada folha de $\mathcal{F}^{ss}$ situa-se numa subvariedade compacta de codimensão 1 em M . Este fato é um claro resultado da seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Se $p \in M$ é um ponto periódico para um fluxo Anosov ϕ tal que $W^{uu}(p)$ não é denso em M . Então*

- i) M é um fibrado sobre S^1 com fibra $\overline{W^{uu}(p)}$, e

ii) ϕ_t é a suspensão de um homeomorfismo $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$, onde r é o período de p .

A provar da Proposição 2.1 é uma consequência do seguinte Lema onde afirma que as fibras são disjuntas.

Lema 2.1. *Se $p \in M$ é um ponto periódico para um fluxo Anosov ϕ tal que $W^{uu}(p)$ não é denso em M . Então $\phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) \cap \overline{W^{uu}(p)} = \emptyset$ para todo $t \in (0, r)$, onde r é o período de p .*

A demonstração do Lema 2.1 será feita depois de concluir com a prova da Proposição 2.1.

Demonstração: Da Proposição 2.1

Começamos a prova mostrando que além das fibras serem disjuntas, elas formam de fato toda a variedade, isto é:

$$M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}).$$

Para concluir este fato, observemos que:

$$\bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) \supset \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^{uu}(p)) = W^u(p).$$

Agora, como pelo Teorema 1.6 $W^u(p)$ é denso em M e $\bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$ é fechado em M , segue que,

$$M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}).$$

Note que, uma vez que as fibras são disjuntas a união acima é disjunta.

Agora, observemos que a aplicação projeção $\pi : M \longrightarrow S^1$ dada por $\phi_t(x) \longmapsto t \pmod{r}$ onde $x \in \overline{W^{uu}(p)}$ está bem definida desde que $M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$ é disjunta.

Daí que M é um fibrado sobre S^1 com fibra $\overline{W^{uu}(p)}$.

Para finalizar a demonstração do teorema, só falta mostrar a parte (ii), isto é que ϕ_t é a suspensão de $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$.

Para isso observemos que, $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}} : \overline{W^{uu}(p)} \longrightarrow \overline{W^{uu}(p)}$ definido por $x \longmapsto \phi_r(x)$ é um homeomorfismo, desde que ϕ_r é um difeomorfismo fixando r .

Logo, desde que M pode ser escrito como união disjunta de $\phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right)$ onde $t \in [0, r)$, em $[0, r] \times \overline{W^{uu}(p)}$ podemos identificar $(r, x) \sim (0, \phi_r(x))$ mediante a seguinte aplicação:

$$H : \frac{[0, r] \times \overline{W^{uu}(p)}}{\sim} \longrightarrow M$$

$$(t, x) \longmapsto \phi_t(x).$$

Claramente H é um homeomorfismo e $H(r, x) = \phi_r(x) = H(0, \phi_r(x))$ de onde

$$\frac{[0, r] \times \overline{W^{uu}(p)}}{\sim} \simeq M.$$

Assim, concluímos que $\phi_t : M \longrightarrow M$ é o fluxo de suspensão. ■

Agora, mostremos o Lema 2.1, com esse fim enunciamos o seguinte resultado.

Lema 2.2. *Se $p \in M$ é um ponto periódico para um fluxo Anosov ϕ tal que $W^{uu}(p)$ não é denso em M e $\phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) \cap \overline{W^{uu}(p)} \neq \emptyset$ para todo $t \in (0, r)$, então $\phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}$, onde r é o período de p .*

A prova do Lema 2.2 será feita depois da demonstração do Lema 2.1.

Demonstração: Do Lema 2.1

Mostraremos que, se $p \in M$ é um ponto periódico para um fluxo Anosov ϕ tal que $W^{uu}(p)$ não é denso em M . Então $\phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) \cap \overline{W^{uu}(p)} = \emptyset$ para todo $t \in (0, r)$, onde r é o período de p .

De fato:

Suponhamos, por contradição, que, existe $t \in (0, r)$ tal que

$$\phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) \cap \overline{W^{uu}(p)} \neq \emptyset.$$

Afirmção 2.1. $A = \{t \in \mathbb{R} : \phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Queremos mostrar que, $\overline{A} = \mathbb{R}$.

i) claramente, $\overline{A} \subset \mathbb{R}$.

ii) Agora, provemos que $\mathbb{R} \subset \overline{A}$.

Dado $s \in \mathbb{R}$ provaremos que $s \in \overline{A}$. Isto é, para todo $\delta > 0$ existe $t_1 \in (s - \delta, s + \delta) \cap A$.

Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tomemos $t \in (0, \delta)$ tal que $\phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) \cap \overline{W^{uu}(p)} \neq \emptyset$. Então pelo Lema 2.2 tem-se que,

$$\phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}.$$

Daí, também tem-se que,

$$\phi_{2t} \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}$$

e assim sucessivamente

$$\phi_{nt} \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}.$$

De onde segue que, $nt \in A$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Logo, como $|nt - (n-1)t| = |nt - nt + t| = |t| < \delta$. Existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que,

$$nt \in (s - \delta, s + \delta).$$

Pelo que, $nt \in (s - \delta, s + \delta) \cap A$. Daí, segue que $(s - \delta, s + \delta) \cap A \neq \emptyset$.

Assim, $A = \{t \in \mathbb{R} : \phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

De onde se conclui a prova da Afirmação 2.1.

Agora, observemos que a Afirmação 2.1 implica que $\overline{W^{uu}(p)}$ seja denso em M . Pois,

Dados $x \in M$ e $\delta > 0$ como $M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t \left(\overline{W^{uu}(p)} \right)$ então $x \in \phi_T \left(\overline{W^{uu}(p)} \right)$

para algum $T \in [0, r]$, daí que $x = \phi_T(y)$ onde $y \in \overline{W^{uu}(p)}$.

Agora, observemos que pela continuidade do fluxo ϕ existe $\epsilon > 0$ tal que se $t \in [T - \epsilon, T + \epsilon]$ então,

$$\phi_t(y) \in B_\delta(x).$$

Por outro lado, como pela Afirmação 2.1, A é denso em $\mathbb{R}$ existe $t^* \in (T - \epsilon, T + \epsilon) \cap A$.

Daqui, como $t^* \in (T - \epsilon, T + \epsilon)$ então,

$$\phi_{t^*}(y) \in B_\delta(x).$$

Além disso, como $t^* \in A$ então $\phi_{t^*} \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}$.

Logo, como $y \in \overline{W^{uu}(p)}$ temos que $\phi_{t^*}(y) \in \phi_{t^*} \left(\overline{W^{uu}(p)} \right) = \overline{W^{uu}(p)}$.

Assim,

$$\phi_{t^*}(y) \in \overline{W^{uu}(p)}.$$

daí que,

$$\phi_{t^*}(y) \in \overline{W^{uu}(p)} \cap B_\delta(x)$$

logo,

$$\overline{W^{uu}(p)} \cap B_\delta(x) \neq \emptyset.$$

De onde $\overline{W^{uu}(p)}$ é denso em M , i.e $\left(\overline{\overline{W^{uu}(p)}} = M\right)$.

Mas como $\overline{W^{uu}(p)}$ é fechado então temos que $\overline{\overline{W^{uu}(p)}} = \overline{W^{uu}(p)}$, daí que $\overline{W^{uu}(p)} = M$, isto é que $W^{uu}(p)$ é denso em M , contradizendo a hipótese.

Isto conclui a prova do Lema 2.1. ■

Para finalizar só falta mostrar o Lema 2.2, que foi usado para provar o Lema 2.1. Com esse fim provaremos primeiro o seguinte resultado, logo usando esse fato concluiremos com a prova do Lema 2.2.

Lema 2.3. *Se $p \in M$ é um ponto periódico para um fluxo Anosov ϕ tal que $W^{uu}(p)$ não é denso em M . Então $\overline{W^{uu}(p)}$ satisfaz:*

- i) $\overline{W^{uu}(p)}$ é fechada em M .
- ii) $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.
- iii) $\phi_r\left(\overline{W^{uu}(p)}\right) = \overline{W^{uu}(p)}$.

Além disso, nenhum subconjunto próprio de $\overline{W^{uu}(p)}$ satisfaz (i), (ii) e (iii).

Para mostrar o Lema 2.3 precisaremos de três afirmações que serão enunciados em seguida e provadas depois de mostrar este lema.

Afirmção 2.2. *Se $p \in M$ é um ponto periódico para um fluxo Anosov ϕ tal que $W^{uu}(p)$ não é denso em M . Então existe um subconjunto $K \subset \overline{W^{uu}(p)}$ (não-vazio) tal que:*

- i) K é fechado em M .
- ii) K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.
- iii) $\phi_r(K) = K$.

E tal que, nenhum subconjunto próprio de K satisfaz (i), (ii) e (iii).

O seguinte resultado afirma que M é união de $\phi_t(K)$ onde $t \in [0, r]$, mas não afirma que é união disjunta, é importante destacar isso.

Afirmção 2.3. *Se $p \in M$ é um ponto periódico para um fluxo Anosov ϕ tal que $W^{uu}(p)$ não é denso em M e K é como na Afirmção 2.2, então*

$$M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K)$$

Por outro lado, o seguinte resultado afirma que o conjunto minimal K e $\phi_t(K)$ não se intersectam para todo $t \in (0, r)$, claramente quando $K \neq \phi_t(K)$. Sem mais preâmbulos enunciamos.

Afirmção 2.4. *Se $0 < t < r$ e $K \cap \phi_t(K) \neq \emptyset$ então $K = \phi_t(K)$.*

As afirmações 2.2, 2.3 e 2.4 é o que precisamos, para mostrar o Lema 2.3. A ideia é provar que $K = \overline{W^{uu}(p)}$ e daí usando a Afirmção 2.2 obter o resultado.

Demonstração: Do Lema 2.3

Queremos mostrar que, se $p \in M$ é um ponto periódico de período r de um fluxo Anosov ϕ então $\overline{W^{uu}(p)}$ satisfaz:

- i) $\overline{W^{uu}(p)}$ é fechada em M .
- ii) $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.
- iii) $\phi_r(\overline{W^{uu}(p)}) = \overline{W^{uu}(p)}$.

Além disso, nenhum subconjunto próprio de $\overline{W^{uu}(p)}$ satisfaz (i), (ii) e (iii).

De fato:

Pela Afirmção 2.3 temos que,

$$M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K).$$

Daí, dado $p \in M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K)$ tem-se que,

$$p \in \phi_T(K) \tag{2.1}$$

para algum $T \in [0, r]$.

Então, $\phi_{-T}(p) \in K$. Logo, pela Afirmção 2.2 como K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado temos que, $W^{uu}(\phi_{-T}(p)) \subset K$. Pelo que, $\phi_{-T}(W^{uu}(p)) \subset K$. De onde, segue que $\overline{\phi_{-T}(W^{uu}(p))} \subset \overline{K}$. Logo, pela Afirmção 2.2 como K é fechado temos que, $\overline{\phi_{-T}(W^{uu}(p))} \subset K$. Daqui, segue que $\phi_{-T}(\overline{W^{uu}(p)}) \subset K$. Assim,

$$\overline{W^{uu}(p)} \subset \phi_T(K).$$

Daqui e do fato que $K \subset \overline{W^{uu}(p)}$ pela Afirmação 2.2, temos que

$$K \subset \phi_T(K).$$

Então,

$$K \cap \phi_T(K) = K \neq \emptyset.$$

Logo, como $K \cap \phi_T(K) \neq \emptyset$, pela Afirmação 2.4 segue que,

$$K = \phi_T(K).$$

Por outro lado, de (2.1) temos que $p \in \phi_T(K)$ então $p \in K$. Agora, como K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado, temos que

$$W^{uu}(p) \subset K.$$

De onde, $\overline{W^{uu}(p)} \subset \overline{K}$. Logo, como K é fechado, tem-se que,

$$\overline{W^{uu}(p)} \subset K.$$

Assim,

$$K = \overline{W^{uu}(p)}.$$

Logo usando a Afirmação 2.2, o Lema 2.3 fica provada. ■

Agora passamos a mostrar as três afirmações que foram usados para provar o Lema 2.3.

Demonstração: Da Afirmação 2.2

Mostraremos que, se $p \in M$ é um ponto periódico de período r de um fluxo Anosov ϕ , então existe um subconjunto $K \subset \overline{W^{uu}(p)}$ (não-vazio) tal que:

- i) K é fechado em M .
- ii) K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.
- iii) $\phi_r(K) = K$.

E tal que, nenhum subconjunto próprio de K satisfaz (i), (ii) e (iii).

De fato:

Seja, $\mathfrak{S} = \{\mu \subset \overline{W^{uu}(p)} : \mu \neq \emptyset, \mu \text{ é fechado, } \mu \text{ é } \mathcal{F}^{uu}\text{-saturado e } \phi_r(\mu) = \mu\}$.

Consideremos em $\mathfrak{S}$ a ordem parcial induzida por inclusão de conjunto. Logo, dada uma sequência $\mu_1 \supset \mu_2 \supset \mu_3 \supset \dots \supset \dots$ de elementos de $\mathfrak{S}$ observemos que,

- i) $\mu^* = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \neq \emptyset$ desde que $\mu_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$.

ii) $\mu^* = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu_i$ é fechado.

Pois, μ_i é fechado para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, a intersecção arbitraria de fechados é fechada.

iii) $\mu^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mu_i$ é $\mathcal{F}^u$ -saturado.

Pois, dado $z \in \mu^* = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu_i$ temos que, $z \in \mu_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, como μ_i é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado, temos que,

$$W^{uu}(z) \subset \mu_i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Daí que,

$$W^{uu}(z) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu_i = \mu^*.$$

Assim,

$$W^{uu}(z) \subset \mu^*.$$

iv) $\phi_r(\mu^*) = \mu^*$.

Pois,

$$\phi_r(\mu^*) = \phi_r\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu_i\right) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \phi_r(\mu_i) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu_i = \mu^*.$$

Além disso, $\mu^* \subset \mu_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Então pelo lema de Zorn's, $\mathfrak{S}$ contém um elemento minimal, claramente satisfazendo as condições de acima. Isto conclui a prova da Afirmação 2.2.

■

Demonstração: Da Afirmação 2.3

Queremos mostrar que, $M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K)$.

Para provar esta afirmação precisamos de dois resultados que apresentamos em seguida, mas antes dele denotemos:

$$\bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K) = K^*.$$

Resultado 2.1. K^* é $\mathcal{F}^u$ -saturado.

De fato, seja $z \in K^* = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K)$, então existe $s \in [0, r]$ tal que $z \in \phi_s(K)$.

Daqui, existe $x \in K$ tal que $z = \phi_s(x)$.

Agora, note que, basta mostrar que $\phi_t(W^{uu}(z)) \subset K^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Já que daqui teríamos que,

$$W^u(z) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^{uu}(z)) \subset K^*.$$

Com esse fim, observemos que

$$\begin{aligned} \phi_t(W^{uu}(z)) &= W^{uu}(\phi_t(z)) \\ &= W^{uu}(\phi_t(\phi_s(x))) \\ &= W^{uu}(\phi_{t+s}(x)) \\ &= \phi_{t+s}(W^{uu}(x)). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\phi_t(W^{uu}(z)) = \phi_{t+s}(W^{uu}(x)).$$

Logo, tomando $t + s = nr + T$ onde $0 \leq T \leq r$ e $n \in \mathbb{Z}$. Temos que,

$$\phi_{t+s}(W^{uu}(x)) = \phi_{nr+T}(W^{uu}(x)) = \phi_T(\phi_{nr}(W^{uu}(x))).$$

De onde,

$$\phi_t(W^{uu}(z)) = \phi_T(\phi_{nr}(W^{uu}(x))). \quad (2.2)$$

Por outro lado, como K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado, para $x \in K$ tem-se que $W^{uu}(x) \subset K$. Então,

$$\phi_r(W^{uu}(x)) \subset \phi_r(K) = K$$

pelo que,

$$\phi_r(W^{uu}(x)) \subset K$$

daqui, também tem-se que $\phi_{2r}(W^{uu}(x)) \subset \phi_r(K) = K$ de onde,

$$\phi_{2r}(W^{uu}(x)) \subset K$$

assim sucessivamente temos que,

$$\phi_{nr}(W^{uu}(x)) \subset K.$$

Então,

$$\phi_T(\phi_{nr}(W^{uu}(x))) \subset \phi_T(K) \subset \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K) = K^*$$

Isto é,

$$\phi_T(\phi_{nr}(W^{uu}(x))) \subset K^*.$$

Agora, como por (2.2) temos que $\phi_T(\phi_{nr}(W^{uu}(x))) = \phi_t(W^{uu}(z))$.

Concluimos que,

$$\phi_t(W^{uu}(z)) \subset K^*.$$

de onde,

$$W^u(z) \subset K^*$$

Assim, concluindo a prova do Resultado 2.1.

Resultado 2.2. K^* é fechado em M .

De fato, temos que

$$\begin{aligned} K^* &= \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K) = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi(t, K) \\ &= \bigcup_{0 \leq t \leq r, x \in K} \phi(t, x) \\ &= \{\phi(t, x) : 0 \leq t \leq r, x \in K\} \\ &= \phi([0, r] \times K). \end{aligned}$$

Isto é,

$$K^* = \phi([0, r] \times K).$$

Agora, como $K \subset M$ é fechado e M compacto, temos que K é compacto. Daqui segue que,

$$[0, r] \times K \quad \text{é compacto.}$$

Logo, como ϕ é contínua, segue que $\phi([0, r] \times K)$ é compacto.

Assim, $K^* = \phi([0, r] \times K)$ é compacto. Daí que,

$$K^* \quad \text{é fechado.}$$

De onde se conclui a prova do Resultado 2.2.

Agora, já temos as ferramentas necessárias para mostrar a Afirmação 2.3.

Pois, como pelo Resultado 2.1 K^* é $\mathcal{F}^u$ -saturado, dado $z \in K^*$ temos que,

$$W^u(z) \subset K^*$$

então,

$$\overline{W^u(z)} \subset \overline{K^*}.$$

Logo, como $W^u(z)$ é denso em M pelo Teorema 1.6 temos que, $M = \overline{W^u(z)}$. De onde,

$$M = \overline{W^u(z)} \subset \overline{K^*}.$$

E por outro lado, como pelo Resultado 2.2 K^* é fechado i.e. $(\overline{K^*} = K^*)$ temos que, $M \subset K^*$.

Daí, como

$$K^* = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K) \subset M$$

temos que, $M = K^*$.

Isto é,

$$M = \bigcup_{0 \leq t \leq r} \phi_t(K).$$

Isto conclui a prova da Afirmação 2.3. ■

Demonstração: Da Afirmação 2.4

Mostraremos que, se $0 < t < r$ e $K \cap \phi_t(K) \neq \emptyset$ então $K = \phi_t(K)$.

De fato:

I) Provemos que, $K \subset \phi_t(K)$.

Observe que, $K \cap \phi_t(K)$ satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da afirmação 2.2 i.e:

i) Provemos que, $K \cap \phi_t(K)$ é fechado.

Pois, como K é fechado e ϕ_t é um difeomorfismo fixando t , temos que $\phi_t(K)$ é fechado. Logo, como interseção de fechados é fechada temos que $K \cap \phi_t(K)$ é fechado.

ii) Provemos que, $K \cap \phi_t(K)$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.

Dado $x \in K \cap \phi_t(K)$ queremos mostrar que, $W^{uu}(x) \subset K \cap \phi_t(K)$.

Como,

$$x \in K \cap \phi_t(K).$$

Temos que, $x \in K$. Logo, como K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado temos que:

$$W^{uu}(x) \subset K. \tag{2.3}$$

Além disso, temos que $x \in \phi_t(K)$ então, $\phi_{-t}(x) \in K$. Agora, como K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado temos que,

$$W^{uu}(\phi_{-t}(x)) \subset K$$

pelo que, $\phi_{-t}(W^{uu}(x)) \subset K$. Então,

$$W^{uu}(x) \subset \phi_t(K). \tag{2.4}$$

Logo, de (2.3) e (2.4) segue que,

$$W^{uu}(x) \subset K \cap \phi_t(K).$$

Assim, $K \cap \phi_t(K)$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.

- iii) Provemos que, $\phi_r(K \cap \phi_t(K)) = K \cap \phi_t(K)$.
pois,

$$\begin{aligned}\phi_r(K \cap \phi_t(K)) &= \phi_r(K) \cap \phi_r(\phi_t(K)) \\ &= \phi_r(K) \cap \phi_{r+t}(K) \\ &= \phi_r(K) \cap \phi_{t+r}(K) \\ &= \phi_r(K) \cap \phi_t(\phi_r(K)) \\ &\stackrel{\phi_r(K)=K}{=} K \cap \phi_t(K).\end{aligned}$$

De onde,

$$\phi_r(K \cap \phi_t(K)) = K \cap \phi_t(K).$$

Assim, $K \cap \phi_t(K)$ é um conjunto que satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da Afirmação 2.2

Por outro lado, pela Afirmação 2.2 como K é o conjunto minimal satisfazendo (i), (ii) e (iii) temos que,

$$K \subset K \cap \phi_t(K).$$

Daí, como $K \cap \phi_t(K) \subset K$ temos que, $K \cap \phi_t(K) = K$.

De onde,

$$K \subset \phi_t(K).$$

II) Agora, provemos que $\phi_t(K) \subset K$.

Note que, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\phi_s(K)$ satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da Afirmação 2.2 i.e:

- i) Provemos que, $\phi_s(K)$ é fechado.

Pois, como K é fechado e ϕ_t é um difeomorfismo fixando s , temos que $\phi_s(K)$ é fechado.

- ii) Provemos que, $\phi_s(K)$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.

Dado $x \in \phi_s(K)$ queremos mostrar que, $W^{uu}(x) \subset \phi_s(K)$.

De fato:

Como $x \in \phi_s(K)$ então, $\phi_{-s}(x) \in K$. Logo, como K é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado temos que,

$$W^{uu}(\phi_{-s}(x)) \subset K$$

pelo que,

$$\phi_{-s}(W^{uu}(x)) \subset K$$

de onde,

$$W^{uu}(x) \subset \phi_s(K).$$

iii) Provemos que, $\phi_r(\phi_s(K)) = \phi_s(K)$.

Pois,

$$\phi_r(\phi_s(K)) = \phi_{r+s}(K) = \phi_{s+r}(K) = \phi_s(\phi_r(K)) \stackrel{\phi_r(K)=K}{=} \phi_s(K)$$

de onde,

$$\phi_r(\phi_s(K)) = \phi_s(K).$$

Agora, como para todo $s \in \mathbb{R}$, $\phi_s(K)$ satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da afirmação 2.2 em particular satisfaz para $s = -t$. Logo, tem-se que $\phi_{-t}(K)$ também satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da afirmação 2.2.

Daí, pela afirmação 2.2 como K é um conjunto minimal satisfazendo (i), (ii) e (iii) temos que:

$$K \subset \phi_{-t}(K).$$

Dai, segue que

$$\phi_t(K) \subset K.$$

Assim,

$$K = \phi_t(K).$$

Isto concluí a prova da Afirmação 2.4. ■

Agora já temos as ferramentas necessárias para provar o Lema 2.2.

Demonstração: Do Lema 2.2

Isto é uma consequência imediata do Lema 2.3 e a Afirmação 2.4. Já que pelo Lema 2.3 temos que, $\overline{W^{uu}(p)} = K$. Logo da Afirmação 2.4 segue que $\phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) = \overline{W^{uu}(p)}$ para todo $t \in (0, r)$. ■

No seguinte lema damos uma condição necessária para que a variedade instável forte seja densa em M para todo ponto $x \in M$.

Lema 2.4. *Seja $\Omega(\phi_t) = M$ para um fluxo Anosov. Se $W^{uu}(p)$ é denso em M para todos os pontos periódicos p então $W^{uu}(x)$ é denso em M para todo $x \in M$.*

Demonstração:

Mostraremos que $\overline{W^{uu}(x)} = M$ para todo $x \in M$.

Como $\overline{W^{uu}(x)} \subset M$ só faltaria mostrar que $M \subset \overline{W^{uu}(x)}$.

De fato:

Seja $W \in \mathcal{F}^{uu}$ fixado arbitrariamente uma variedade instável forte, x um ponto arbitrário de M e $\epsilon > 0$ provaremos que $B_\epsilon(x) \cap W \neq \emptyset$.

Como $x \in M$ e ϕ_t é um fluxo Anosov então existe uma vizinhança produto $N_r(x)$ onde $r > 0$ definido por:

$$N_r(x) = \bigcup_{y \in B^{uu}(x)} B_r^s(y).$$

Logo como $N_r(x)$ é aberto, dado $r > 0$ existe $\delta = \delta(r)$ tal que $B_\delta(x) \subset N_r(x)$ para todo $x \in M$.

Por outro lado, como os pontos periódicos são densos em M , existe uma cobertura de bolas abertas $B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_i)$ de M , onde p_i é ponto periódico de período t_i respetivamente e $i \in \mathbb{N}$. Agora como M é compacto, temos que toda cubertura aberto admite um sub cobertura finito $B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_1), \dots, B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_k)$.

Isto é,

$$M \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_i) \quad (2.5)$$

Afirmção 2.5. *Existe $t > 0$ tal que $\phi_t(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, k$.*

Para provar esta afirmação precisamos os seguintes resultados.

Resultado 2.3. *Existe $T > 0$ tal que $B_T^{uu}(p_i) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, k$.*

De fato, pela hipótese como $W^{uu}(p_i)$ é denso em M para todo $p_i \in \text{per}(\phi_t)$, temos que $M \subset \overline{W^{uu}(p_i)}$. Daí, dado $x \in M$ tem-se que $x \in \overline{W^{uu}(p_i)}$, somente, se para toda vizinhança de x denotado por V_x , tem-se que $V_x \cap W^{uu}(p_i) \neq \emptyset$. Como isto ocorre para toda vizinhança de x , tomemos $V_x = B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$.

Daí que,

$$B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap W^{uu}(p_i) \neq \emptyset.$$

Agora, podemos escolher $r_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ com $B_{r_i}^{uu}(p_i) \subset W^{uu}(p_i)$

tal que,

$$B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap B_{r_i}^{uu}(p_i) \neq \emptyset.$$

Logo, tomando $T = \max_{1 \leq i \leq k} (r_i)$ temos que $B_T^{uu}(p_i) \subset B_{r_i}^{uu}(p_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$. De onde,

$$B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap B_T^{uu}(p_i) \neq \emptyset.$$

Assim se concluí a prova do Resultado 2.3, (ver figura 2.1).

Resultado 2.4. *Existe $c > 0$ tal que $\phi_t(B_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$ onde $|t| < c.t_i$ ($i = 1, \dots, k$).*

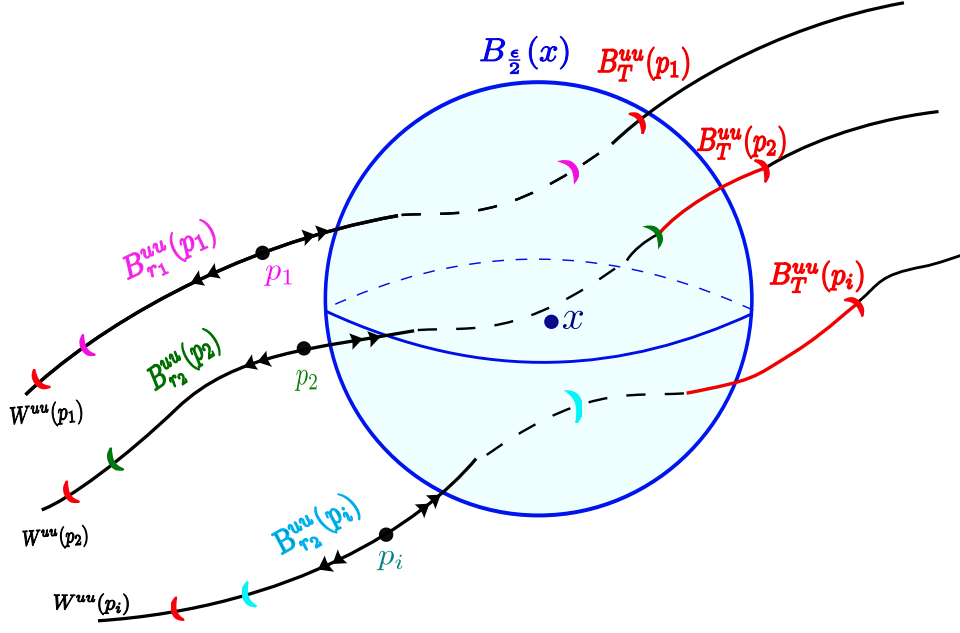


Figura 2.1: Resultado 2.3

De fato, desde que $B_T^{uu}(p_i) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$ pelo Resultado 2.3 e $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ é aberto, existem c_i tal que $\phi_t(B_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$ para $|t| < c_i \cdot t_i$ e $i = 1, \dots, k$.

Pois:

Seja $z_i \in B_T^{uu}(p_i) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. Como $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ é aberta existe $\delta_i > 0$ tal que $B_{\delta_i}(z_i) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. Logo pela continuidade das folhas instáveis fortes existe $B_{\delta'_i}(p_i)$ onde $\delta'_i > 0$.

Agora, tomemos $c_i > 0$, tal que $\phi_t(p_i) \in B_{\delta'_i}(p_i)$ para $|t| < c_i \cdot t_i$ e $i = 1, \dots, k$. logo como $\phi_t(p_i) \in B_T^{uu}(\phi_t(p_i))$ Temos que $B_T^{uu}(\phi_t(p_i)) \cap B_{\delta'_i}(p_i) \neq \emptyset$, novamente pela continuidade das folhas instáveis fortes, temos,

$$B_T^{uu}(\phi_t(p_i)) \cap B_{\delta_i}(z_i) \neq \emptyset.$$

Daqui, como $B_T^{uu}(\phi_t(p_i)) \subset \phi_t(B_T^{uu}(p_i))$, segue que $\phi_t(B_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\delta_i}(z_i) \neq \emptyset$.

Agora, como $B_{\delta_i}(z_i) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$, temos que

$$\phi_t(B_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$$

onde $|t| < c_i \cdot t_i$ ($i = 1, \dots, k$).

Isto é, existem $c_i > 0$ tal que $\phi_t(B_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$ onde $|t| < c_i \cdot t_i$ ($i = 1, \dots, k$).

Agora, tomando $c = \min_{1 \leq i \leq k} (c_i)$ tem-se que

$$\phi_t(B_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$$

para $|t| < c.t_i$ ($i = 1, \dots, k$).

Isto é, existe $c > 0$ tal que $\phi_t(B_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$ onde $|t| < c.t_i$ ($i = 1, \dots, k$).

De onde se conclui a prova do Resultado 2.4, (ver figura 2.2).

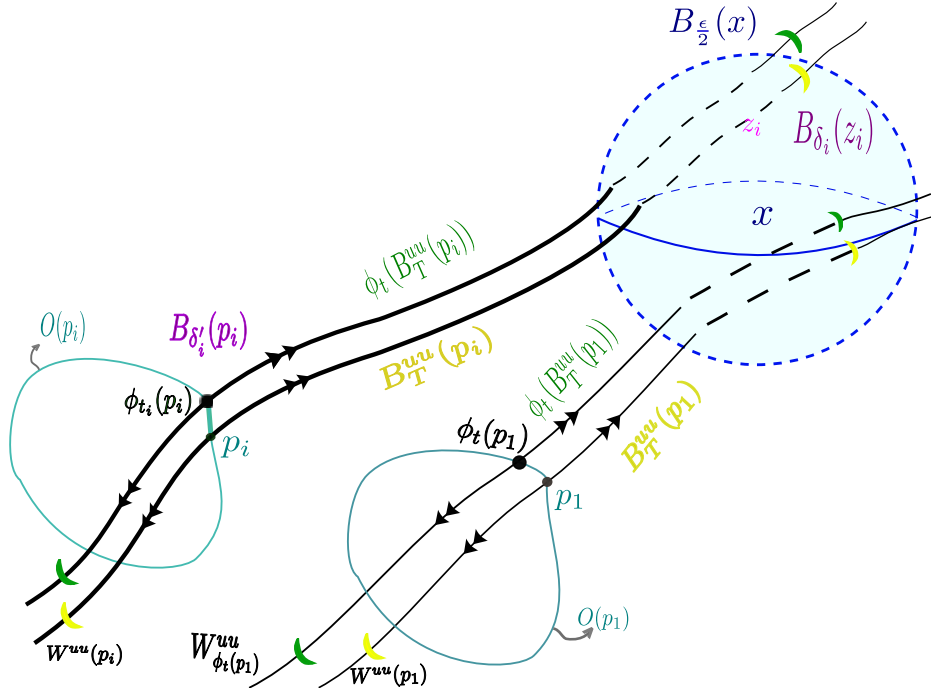


Figura 2.2: Resultado 2.4

Resultado 2.5. Se t é suficientemente grande então

$$B_T^{uu}(p_i) \subset \phi_{n_i t_i}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}^{uu}(p_i))$$

para n_i que depende de t e $n_i \in \mathbb{Z}$ onde ($i = 1, \dots, k$).

De fato, com a finalidade de mostrar este resultado observemos que:

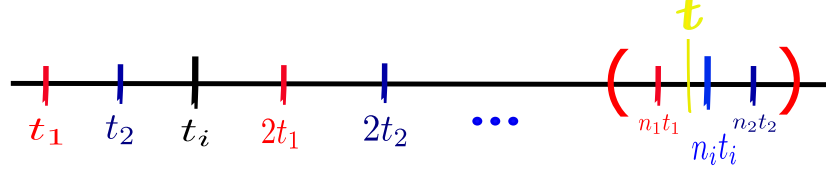
Observação 4. Dados $t_l, t_j \in \mathbb{R}$ existem $n_l, n_j \in \mathbb{Z}$ e $c > 0$, tal que

$$|n_l t_l - n_j t_j| < c.t_i \text{ onde } t_i = \min_{1 \leq l, j \leq k} (t_l, t_j).$$

Daí, existe $t > 0$ arbitrariamente grande tal que $|t - n_i t_i| < c t_i$ para algum $n_i \in \mathbb{Z}$ que depende de t e ($i = 1, \dots, k$).

Para maiores detalhes desta observação ver [15].

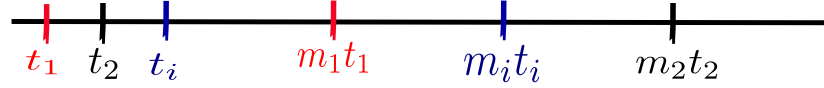
Agora, comecemos fazer a prova do Resultado 2.5.



Desde que p_i é ponto periódico e $B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i) \subset \phi_{t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)) \subset \phi_{2t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)) \subset \dots \subset \dots$ existe $m_i \in \mathbb{Z}^+$ tal que,

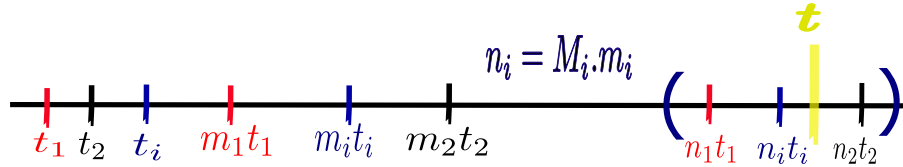
$$B_T^{uu}(p_i) \subset \phi_{m_i t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)).$$

Observemos que pode acontecer que existam $m_l, m_j \in \mathbb{Z}^+$ tais que $|m_l t_l - m_j t_j| > c t_i$ onde $t_i = \min_{1 \leq l, j \leq k} (t_l, t_j)$.



Para solucionar isto, usemos a Observação 4. Ou seja existe $M_i \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|M_i m_i t_i - M_l m_l t_l| < c t_i$

Logo, existe t suficientemente grande tal que $|t - n_i t_i| < c t_i$ onde $n_i = M_i m_i$ e $(i = 1, \dots, k)$.



Agora, como $\phi_{m_i t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)) \subset \phi_{n_i t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i))$ desde que $m_i < n_i$ e $B_T^{uu}(p_i) \subset \phi_{m_i t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i))$, temos que

$$B_T^{uu}(p_i) \subset \phi_{n_i t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i))$$

Assim, concluindo a prova do Resultado 2.5, (ver figura 2.3).

Agora, para concluir com a prova da Afirmação 2.5, basta tomar $t = \max_{1 \leq i \leq k} (n_i t_i)$.

Daqui,

$$\phi_{n_i t_i}(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)) \subset \phi_t(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i))$$

assim,

$$B_T^{uu}(p_i) \subset \phi_t(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)).$$

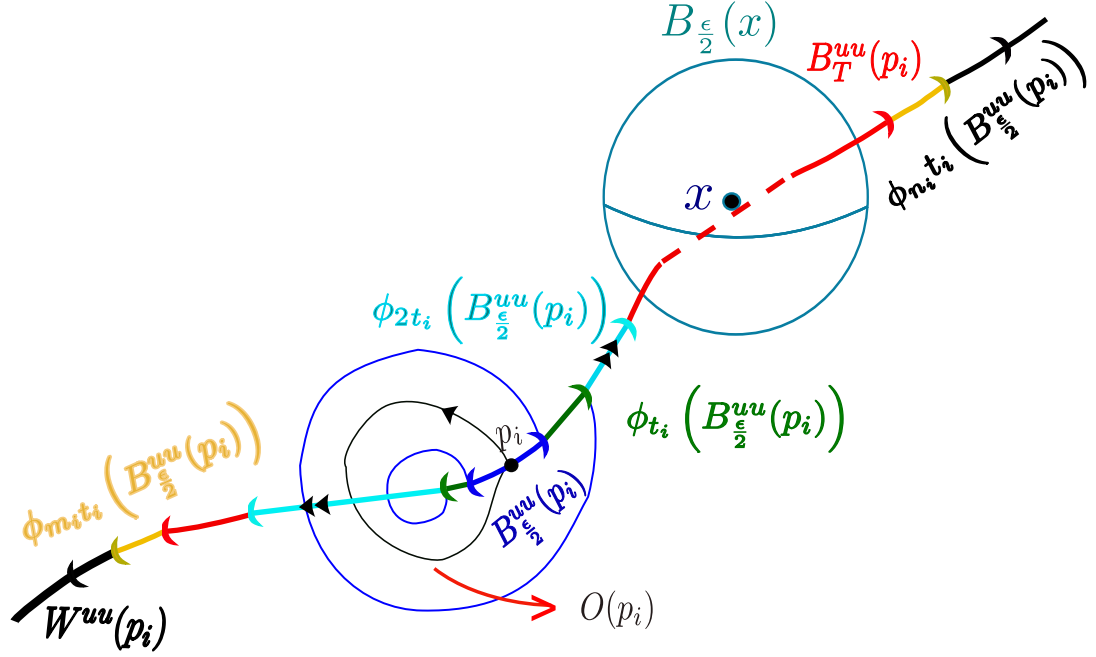


Figura 2.3: Resultado 2.5

Logo, como pelo Resultado 2.3 temos que $B_T^{uu}(p_i) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$

assim,

$$\phi_t(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset.$$

Isto conclui a prova da Afirmação 2.5.

Afirmação 2.6. Para algum j onde $1 \leq j \leq k$ temos que $\phi_{-t}(W) \cap B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_j) \neq \emptyset$

De fato, temos por (2.5) que,

$$M \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_i)$$

logo, como $\phi_{-t}(W) \subset M$ tem-se que

$$\phi_{-t}(W) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_i).$$

Isto é, se $x \in \phi_{-t}(W)$ então $x \in \bigcup_{i=1}^k B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_i)$.

Daqui, existe $j \in [1, k]$ tal que $x \in B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_j)$, de onde $x \in \phi_{-t}(W) \cap B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_j)$.

Assim, para algum $j \in [1, k]$ temos que

$$\phi_{-t}(W) \cap B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_j) \neq \emptyset.$$

De onde se conclui a prova da Afirmação 2.6, (ver figura 2.4).

Afirmação 2.7. *Existem $q \in W^{uu}(p_j) \cap \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x))$ e $y \in \phi_{-t}(W) \cap W^s(q)$ tal que $d(q, y) < \frac{\epsilon}{2}$.*

De fato, pela Afirmação 2.5 temos que existe $t > 0$ tal que para $i = 1, \dots, k$ tem-se que

$$\phi_t(B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \neq \emptyset$$

então,

$$B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i) \cap \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)) \neq \emptyset.$$

Logo, como $B_{\frac{\epsilon}{2}}^{uu}(p_i) \subset W^{uu}(p_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$ temos que,

$$W^{uu}(p_i) \cap \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)) \neq \emptyset$$

em particular, para $j \in [1, k]$ temos que $W^{uu}(p_j) \cap \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)) \neq \emptyset$.

De onde temos que existe

$$q \in W^{uu}(p_j) \cap \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)). \quad (2.6)$$

Agora, como pela Afirmação 2.6 temos que $\phi_{-t}(W) \cap B_{\delta(\frac{\epsilon}{2})}(p_j) \neq \emptyset$ para algum $j \in [1, k]$ e $q \in W^{uu}(p_j) \cap \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)) \neq \emptyset$, pelo teorema de vizinhança produto local temos que existe $y \in \phi_{-t}(W) \cap W^s(q)$ tal que $d(q, y) < \frac{\epsilon}{2}$.

De onde se conclui a prova da Afirmação 2.7, (ver figura 2.4).

Afirmação 2.8. $\phi_t(y) \in B_{\epsilon}(x)$.

De fato, desde que y e q estejam na mesma variedade estável e $d(q, y) < \frac{\epsilon}{2}$, pela Afirmação 2.7 temos que, $d(\phi_t(q), \phi_t(y)) < d(q, y) < \frac{\epsilon}{2}$.

Isto é,

$$d(\phi_t(q), \phi_t(y)) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.7)$$

Por outro lado, como $q \in W^{uu}(p_j) \cap \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x))$ por (2.6), segue que $q \in \phi_{-t}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x))$, de onde $\phi_t(q) \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$.

Assim,

$$d(x, \phi_t(q)) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.8)$$

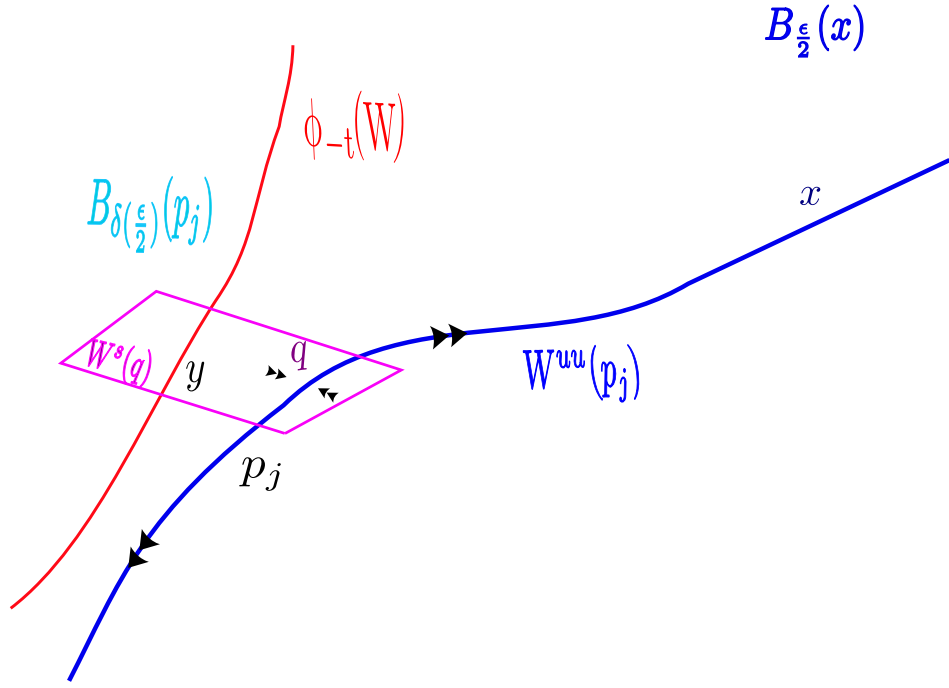


Figura 2.4: Afirmação 2.6 e 2.7

Logo usando (2.7), (2.8) e a desigualdade triangular temos que,

$$d(x, \phi_t(y)) \leq d(x, \phi_t(q)) + d(\phi_t(q), \phi_t(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

de onde,

$$d(x, \phi_t(y)) < \epsilon.$$

Finalmente daqui, segue que

$$\phi_t(y) \in B_\epsilon(x).$$

E por outro lado, como $\phi_t(y) \in W$ pela Afirmação (2.7).

Temos que

$$\phi_t(y) \in B_\epsilon(x) \cap W$$

de onde,

$$B_\epsilon(x) \cap W \neq \emptyset.$$

Assim,

$$x \in \overline{W}.$$

Isto é, dado $x \in M$ mostramos que $x \in \overline{W}$.

O que o mesmo dizer que $M \subset \overline{W}$ e como por outro lado temos que $\overline{W} \subset M$,

segue que

$$\overline{W} = M.$$

Logo, como $W \in \mathcal{F}^{uu}$ é arbitrário, tomemos $W = W^{uu}(x)$, assim

$$\overline{W^{uu}(x)} = M.$$

■

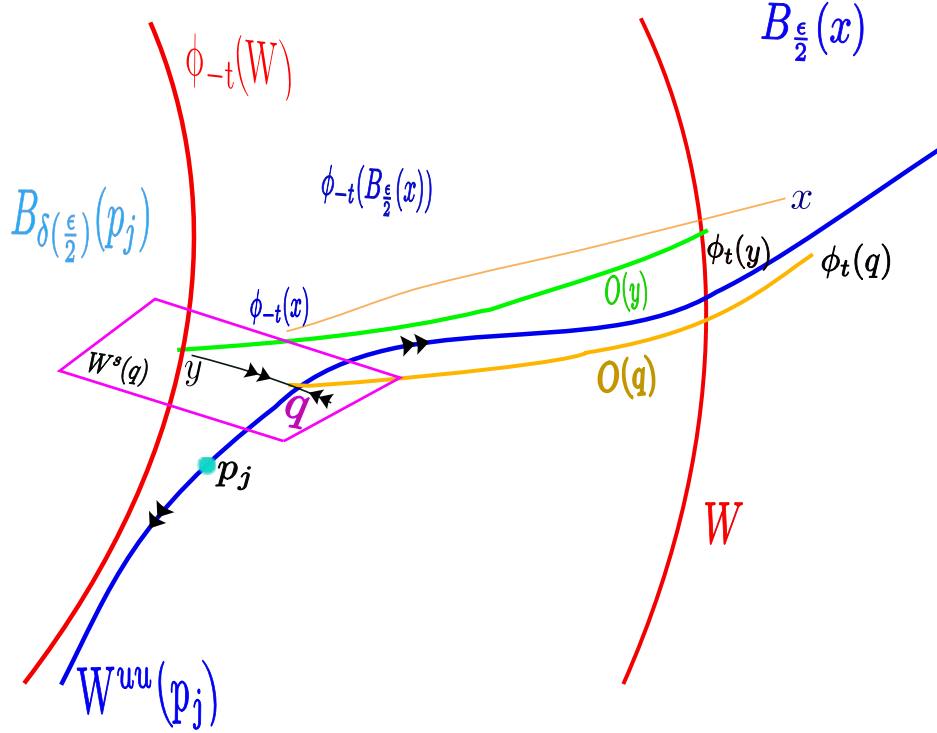


Figura 2.5: Afirmação 2.8

2.2 Folheações Conjuntamente Integráveis

Seja $N_\delta(x)$ uma vizinhança produto de x como no Teorema 1.3. Se y e z estão na mesma variedade instável forte em $N_\delta(x)$, então existe um $\delta' > 0$ tal que a aplicação $F_{y,z} : B_{\delta'}^s(y) \rightarrow B_\delta^s(z)$ dada pela projeção ao longo da variedade instável forte é bem definida.

Definição 2.1. As folheações $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são chamadas **conjuntamente integrável** em $N_\delta(x)$, se para y e z que estão na mesma variedade instável forte e $\delta' > 0$ temos que:

$$F_{y,z}(W^{ss}(u) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset W^{ss}(F_{y,z}(u)) \cap B_\delta^s(z), \quad \text{onde } u \in B_{\delta'}^s(y).$$

$\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integrável se todos os pontos de M estão contida em tal vizinhança $N_\delta(x)$. Também diremos que E^u e E^s são conjuntamente integrável.

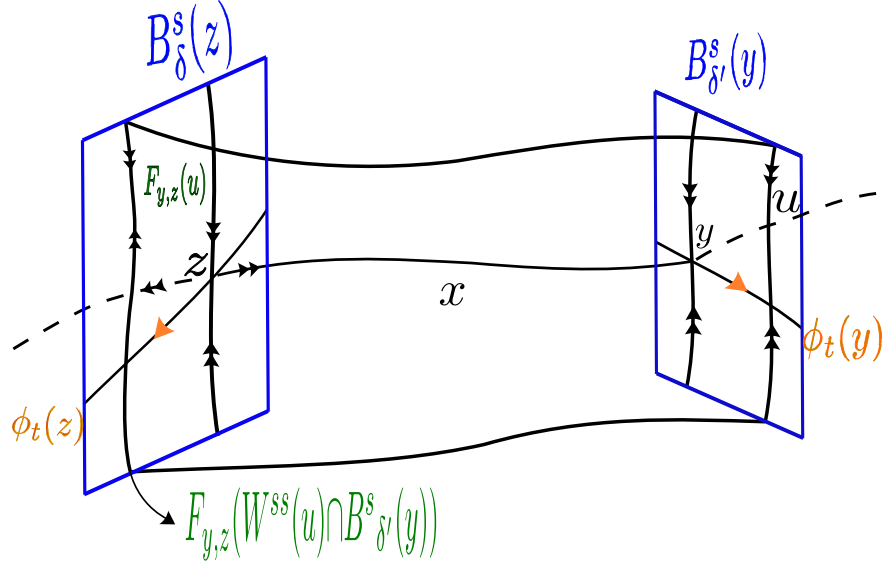


Figura 2.6: Folheações Conjuntamente Integráveis

Agora, passamos a enunciar um resultado que é a caracterização de folheações $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ conjuntamente integrável.

Proposição 2.2. $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integráveis se, e somente se, $E^u \oplus E^s$ é integrável.

Demonstração: Suponhamos que $E^u \oplus E^s$ é integrável então $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integráveis.

Pois, caso contrario $E^u \oplus E^s$ é tangente a duas sub variedades $F_{y,z}(W^{ss}(u))$ e $W^{ss}(F_{y,z}(u))$. O qual é uma contradição, já que $E^u \oplus E^s$ é tangente a uma única folheação (ver figura 2.7), de onde

$$F_{y,z}(W^{ss}(u) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset W^{ss}(F_{y,z}(u)) \cap B_\delta^s(z) \text{ e } u \in B_{\delta'}^s(y).$$

Agora, suponhamos que $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integráveis então, mostraremos que $E^u \oplus E^s$ é integrável.

De fato:

Se $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integráveis então há uma subvariedade C^1 única através de cada ponto x de M , cujo espaço tangente é $E_x^u \oplus E_x^s$. Temos assim uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um com fibrado tangente $E^u \oplus E^s$.

Afirmção 2.9. A folheação $\mathcal{F}$ é de classe C^1 .

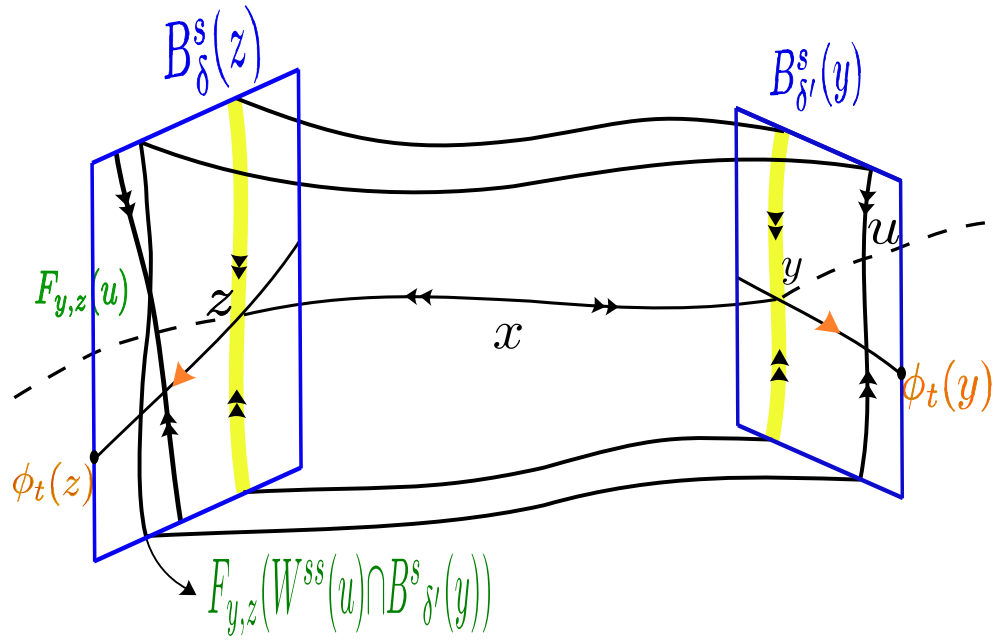


Figura 2.7:

De fato, para cada $p \in M$, sejam $L(p)$ uma folha de $\mathcal{F}$ que contém p , $B \subset L(p)$ uma bola aberta contendo p , e

$$\eta : B \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{um mergulho } C^1.$$

Agora, como ϕ_t leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{F}$ desde que $\phi_t : M \longrightarrow M$ é um homeomorfismo para cada t fixo.

Definamos,

$$U = \bigcup_{|t| < \delta} \phi_t(B)$$

onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno tal que a aplicação

$$\begin{aligned} h : B \times (-\delta, \delta) &\longrightarrow U \\ (x, t) &\longmapsto h(x, t) = \phi_t(x) \end{aligned}$$

seja um homeomorfismo.

Agora, defina

$$\begin{aligned} \psi : U &\longrightarrow R^n (= R^{n-1} \times R) \\ \phi_t(x) &\longmapsto \psi(\phi_t(x)) = (\eta(x), t). \end{aligned}$$

Claramente ψ é C^1 e a coleção de todas as cartas definidas deste modo determinam a solução de folheação $\mathcal{F}$, isto é, $\mathcal{F}$ é C^1 .

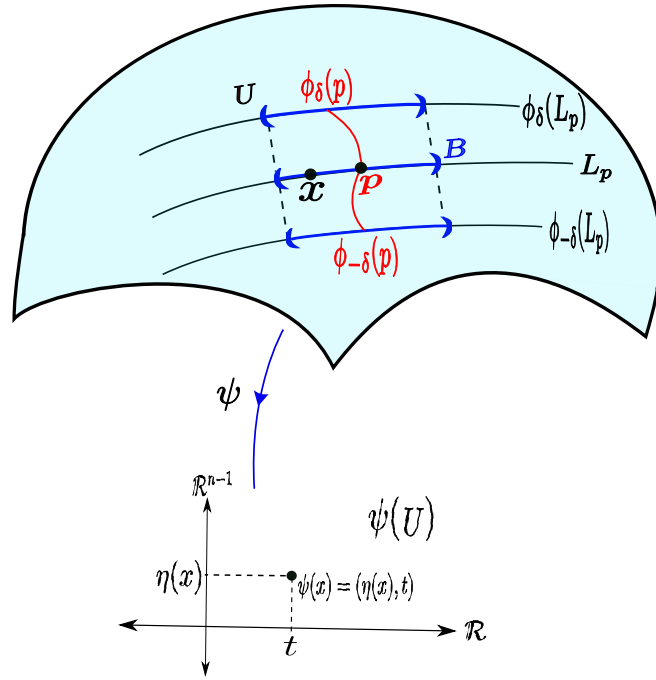


Figura 2.8: Afirmação 2.9

■

Observemos que da Proposição 2.2 se conclui que, se $E^u \oplus E^s$ não é integrável então $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ não são conjuntamente integráveis. A contra positiva da seguinte proposição afirma que, se $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ não são conjuntamente integráveis então $W^{uu}(x)$ e $W^{ss}(x)$ são densos em M para cada $x \in M$. Isto é, se $E^u \oplus E^s$ não é integrável então $W^{uu}(x)$ e $W^{ss}(x)$ são densos em M para cada $x \in M$.

Proposição 2.3. *Se algum variedade estável forte ou instável forte não é denso em M então $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integráveis.*

Demonstração:

Queremos mostrar que dado um $x \in M$ arbitrário existe uma vizinhança produto $N_\delta(x)$ de x onde $\delta > 0$ tal que dado y, z e $\delta' > 0$ como na Definição 2.1 tem-se que:

$$F_{y,z}(W^{ss}(u) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset W^{ss}(F_{y,z}(u)) \cap B_\delta^s(z)$$

onde $u \in B_{\delta'}^s(y)$.

De fato:

O teorema de vizinhança produto garante a existência de $N_\delta(x)$. Agora mostremos que,

$$F_{y,z}(W^{ss}(u) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset W^{ss}(F_{y,z}(u)) \cap B_{\delta}^s(z).$$

Por hipótese, como alguma variedade estável forte ou instável forte não é denso em M então existe $x' \in M$ tal que $W^{uu}(x')$ ou $W^{ss}(x')$ não é densa em M . Suponhamos que $W^{uu}(x')$ não é densa em M , então pelo Lema 2.4 existe um ponto periódico p de ϕ_t de período r tal que $W^{uu}(p)$ não é densa em M , logo pela Proposição 2.1 temos que,

- i) M é um fibrado sobre S^1 com fibra $\overline{W^{uu}(p)}$, e
- ii) ϕ_t é a suspensão de um homeomorfismo $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$, onde r é o período de p .

Por outro lado temos que:

- $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado desde que $W^{uu}(p)$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.
- $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado.

Pois, caso contrario se $\overline{W^{uu}(p)}$ não é $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado, existe $u \in \overline{W^{uu}(p)}$ tal que $W^{ss}(u) \not\subset \overline{W^{uu}(p)}$. Então, existe $v \in W^{ss}(u)$ tal que $v \notin \overline{W^{uu}(p)}$. Daqui, segue da Proposição 2.1 que $v \in \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$ para algum $t \in (0, r)$.

Agora, como $v \in W^{ss}(u)$ temos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\phi_{nr}(v), \phi_{nr}(u)) = 0. \quad (2.9)$$

Por outro lado, como $v \in \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$ segue que, $\phi_{nr}(v) \in \phi_{nr}(\phi_t(\overline{W^{uu}(p)})) = \phi_t(\phi_{nr}(\overline{W^{uu}(p)})) = \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$, pois $\phi_{nr}(\overline{W^{uu}(p)}) = \overline{W^{uu}(p)}$ desde que r é o período de p . Assim,

$$\phi_{nr}(v) \in \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}). \quad (2.10)$$

E, como $u \in \overline{W^{uu}(p)}$ então $\phi_{nr}(u) \in \phi_{nr}(\overline{W^{uu}(p)}) = \overline{W^{uu}(p)}$. Assim,

$$\phi_{nr}(u) \in \overline{W^{uu}(p)} \quad (2.11)$$

Logo, por (2.9), (2.10) e (2.11) segue que, $d(\phi_t(\overline{W^{uu}(p)}), \overline{W^{uu}(p)}) = 0$.

Daqui, como $\phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$ e $\overline{W^{uu}(p)}$ são compactos desde que M é compacto temos que, $\phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) \cap \overline{W^{uu}(p)} \neq \emptyset$, o que é uma contradição ao Lema 2.1.

- $\phi_{t_0}(\overline{W^{uu}(p)})$ é $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado onde $t_0 \in (0, r)$.

Pois, seja $y_1 = \phi_{t_0}(x_1) \in \phi_{t_0}(\overline{W^{uu}(p)})$ tal que $x_1 \in \overline{W^{uu}(p)}$, logo como $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado temos que $W^{ss}(x_1) \subset \overline{W^{uu}(p)}$ então $\phi_{t_0}(W^{ss}(x_1)) \subset \phi_{t_0}(\overline{W^{uu}(p)})$, logo como $\phi_{t_0}(W^{ss}(x_1)) = W^{ss}(\phi_{t_0}(x_1)) = W^{ss}(y_1)$ temos que, $W^{ss}(y_1) \subset \phi_{t_0}(\overline{W^{uu}(p)})$.

- $\phi_{t_0}(\overline{W^{uu}(p)})$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado onde $t_0 \in (0, r)$, desde que $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.

Note que, $\phi_{t_0}(\overline{W^{uu}(p)})$ é um fibrado, desde que $\overline{W^{uu}(p)}$ é um fibrado e $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$ deixa cada fibrado invariante. Além disso pelo Lema 2.1 as fibras são disjuntas.

Denotemos $K_u = \phi_{t_0}(\overline{W^{uu}(p)})$ a fibra que contem o ponto u para algum $0 < t_0 < r$.

Afirmção 2.10. *Se $u \in W^{ss}(y)$ então $W^{ss}(y) \subset K_u$.*

De fato, como $u \in K_u$ e K_u é $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado temos que $W^{ss}(u) \subset K_u$.

Daí como $u \in W^{ss}(y)$ temos que $W^{ss}(u) = W^{ss}(y)$.

Assim,

$$W^{ss}(y) \subset K_u.$$

De maneira análoga se prova que, se $u \in W^{uu}(y)$ então $W^{uu}(y) \subset K_u$.

Afirmção 2.11. *Se $u \in W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)$ então $F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y))$ esta na mesma fibra que $W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)$.*

De fato, Como $u \in W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)$ então pela Afirmção 2.10 $W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y) \subset K_u$.

Agora, mostremos que $F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset K_u$.

Isto é, se $q' \in F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y))$ então $q' \in K_u$.

Como $q' \in F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y))$ então existe $u' \in W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)$ tal que $q' = F_{y,z}(u')$.

Por outro lado, como $u' \in K_{u'}$ e $K_{u'}$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado temos que, $W^{uu}(u') \subset K_{u'}$. Logo, como u' e $q' = F_{y,z}(u')$ então na mesma variedade instável temos que $q' \in W^{uu}(u')$. De onde segue que,

$$q' \in K_{u'}. \quad (2.12)$$

Além disso, como $u' \in W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y) \subset K_u$ segue que, $u' \in K_u$.

Daqui, $u' \in K_u \cap K_{u'}$ isto é, $K_u \cap K_{u'} \neq \emptyset$ então, pelo Lema 2.2 temos que,

$$K_u = K_{u'}.$$

Agora, por (2.12) segue que,

$$q' \in K_u.$$

Assim, $F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y))$ esta na mesma fibra que $W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)$.

Afirmção 2.12. $F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset W^{ss}(F_{y,z}(y)) \cap B_{\delta}^s(z)$.

Por contradição, suponhamos que $F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)) \not\subset W^{ss}(F_{y,z}(y)) \cap B_{\delta}^s(z)$ então, existe $q = F_{y,z}(u) \in F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y))$ com $u \in W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)$ tal que $q \notin W^{ss}(F_{y,z}(y)) \cap B_{\delta}^s(z)$.

Logo, como $F_{y,z} : B_{\delta'}^s(y) \rightarrow B_{\delta}^s(z)$ e $u \in B_{\delta'}^s(y)$ temos que, $q = F_{y,z}(u) \in B_{\delta}^s(z) \subset W_{\delta}^s(z) = \bigcup_{t \in (-\delta, \delta)} W^{ss}(\phi_t(z))$.

Daqui, segue que

$$q \in W^{ss}(\phi_{t_0}(z))$$

para algum $-\delta < t_0 < \delta < r$. Note que $t_0 \neq 0$, caso contrario se $t_0 = 0$ então, $q \in W^{ss}(z)$ o que seria uma contradição, pois $q \notin W^{ss}(F_{y,z}(y)) = W^{ss}(z)$.

Agora, seja $K_z = \phi_{t_1}(\overline{W^{uu}(p)})$ para algum $t_1 \in (0, r)$. Então,

$$\phi_{-t_1}(K_z) = \overline{W^{uu}(p)}. \quad (2.13)$$

Por outro lado, observemos que

$$\phi_{t_0+t_1}(\overline{W^{uu}(p)}) = \phi_{t_0}(\phi_{t_1}(\overline{W^{uu}(p)})) = \phi_{t_0}(K_z) = K_{\phi_{t_0}(z)}$$

então,

$$\phi_{t_0+t_1}(\overline{W^{uu}(p)}) = K_{\phi_{t_0}(z)}. \quad (2.14)$$

Além disso, observemos que

i) $K_{\phi_{t_0}(z)} = K_q$.

Pois, como $q \in W^{ss}(\phi_{t_0}(z))$ então, pela Afirmção 2.10 temos que, $W^{ss}(\phi_{t_0}(z)) \subset K_q$, daqui, $\phi_{t_0}(z) \in K_q$ assim, pela Afirmção 2.11, $K_{\phi_{t_0}(z)} = K_q$.

ii) $K_q = K_u$.

Pois, como u e $q = F_{y,z}(u)$ estão na mesma variedade instável temos que $q \in W^{uu}(u)$ então, pela Afirmação 2.10 temos que, $W^{uu}(u) \subset K_q$, daqui, $u \in K_q$ assim, pela Afirmação 2.11, $K_u = K_q$.

iii) $K_u = K_y$.

Pois, como $u \in W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)$ então $u \in W^{ss}(y)$ logo, pela Afirmação 2.10 temos que, $W^{ss}(y) \subset K_u$, daqui, $y \in K_u$ assim, pela Afirmação 2.11, $K_y = K_u$.

iv) $K_y = K_z$.

Pois, como y e z estão na mesma variedade instável temos que $z \in W^{uu}(y)$ então, pela Afirmação 2.10 temos que, $W^{uu}(y) \subset K_z$, daqui, $y \in K_z$ assim, pela Afirmação 2.11, $K_y = K_z$.

Assim,

$$K_{\phi_{t_0}(z)} = K_q = K_u = K_y = K_z$$

de onde,

$$K_{\phi_{t_0}(z)} = K_z.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi_{-(t_0+t_1)}(K_{\phi_{t_0}(z)}) &= \phi_{-(t_0+t_1)}(K_z) \\ &= \phi_{-t_0}(\phi_{-t_1}(K_z)) \\ &\stackrel{(2.13)}{=} \phi_{-t_0}(\overline{W^{uu}(p)}). \end{aligned}$$

Daí, por outro lado como

$$\begin{aligned} \phi_{-(t_0+t_1)}(K_{\phi_{t_0}(z)}) &\stackrel{(2.14)}{=} \phi_{-(t_0+t_1)}\left(\phi_{t_0+t_1}\left(\overline{W^{uu}(p)}\right)\right) \\ &= \overline{W^{uu}(p)}. \end{aligned}$$

Temos que,

$$\overline{W^{uu}(p)} = \phi_{-t_0}\left(\overline{W^{uu}(p)}\right) \Rightarrow \phi_{t_0}\left(\overline{W^{uu}(p)}\right) = \overline{W^{uu}(p)}.$$

Logo,

$$\overline{W^{uu}(p)} \cap \phi_{t_0}\left(\overline{W^{uu}(p)}\right) = \overline{W^{uu}(p)} \neq \emptyset.$$

O que é um contradicção ao Lema 2.1

Assim, $F_{y,z}(W^{ss}(y) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset W^{ss}(F_{y,z}(y)) \cap B_{\delta}^s(z)$.

Isto conclui a prova da Afirmação 2.12.

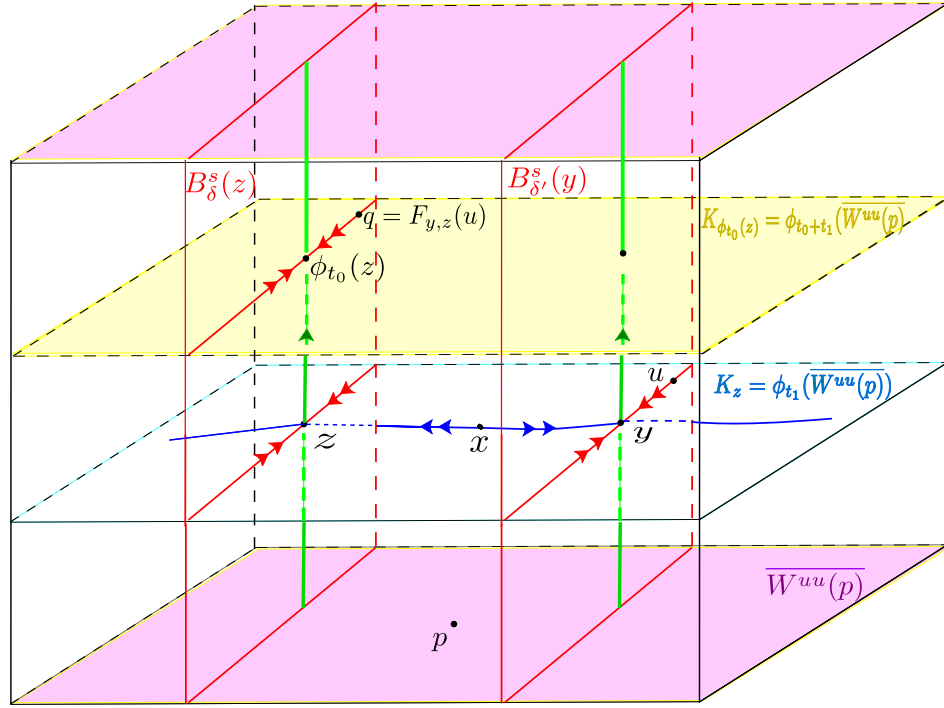


Figura 2.9: Afirmação 2.12

Daqui, de maneira similar para $u \in B_{\delta'}^s(y)$ temos que,

$$F_{y,z}(W^{ss}(u) \cap B_{\delta'}^s(y)) \subset W^{ss}(F_{y,z}(u)) \cap B_{\delta}^s(z).$$

Isto, prova a Proposição. ■

2.3 Prova do Teorema Principal

Nesta seção, nosso objetivo é provar o Teorema Principal, cujo enunciado é dado a seguir.

Teorema 2.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, conexa, suave e $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ um fluxo Anosov de classe C^r ($r \geq 1$) tal que $\Omega(\phi_t) = M$. Então existem exatamente duas possibilidades:*

- i) Cada variedade estável forte e instável forte é denso em M , ou*
- ii) ϕ_t é a suspensão de um difeomorfismo de Anosov de uma subvariedade compacta C^1 de codimensão 1 em M .*

Demonstração:

Suponhamos que não acontece o item (i), então mostraremos que acontece o item (ii), isto é, que ϕ_t é a suspensão de um difeomorfismo de Anosov de uma subvariedade compacta C^1 de codimensão um em M .

De fato:

Como não acontece o item (i), existe um ponto $x \in M$ tal que $W^{uu}(x)$ ou $W^{ss}(x)$ não é densa em M . Suponhamos que $W^{uu}(x)$ não é densa em M , então pelo Lema 2.4, existe um ponto periódico p de ϕ_t tal que $W^{uu}(p)$ não é densa em M . Daí segue, pela Proposição 2.1 que ϕ_t é a suspensão de um homeomorfismo $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$, onde r é o período de p .

Para concluir, basta mostrar que $\overline{W^{uu}(p)}$ seja uma subvariedade de M . Pois daí teríamos que ϕ_t é a suspensão de um difeomorfismo de Anosov de uma subvariedade. Além disso compacta, desde que M é compacta e $\overline{W^{uu}(p)} \subset M$ fechada. E de codimensão 1 em M desde que ϕ_t é a suspensão de $\phi_r|_{\overline{W^{uu}(p)}}$.

Com esse propósito observemos que, como $W^{uu}(x)$ ou $W^{ss}(x)$ não é densa em M , temos pela Proposição 2.3 que $\mathcal{F}^{uu}$ e $\mathcal{F}^{ss}$ são conjuntamente integrável, daí segue da Proposição 2.2 que $E^u \oplus E^s$ é integrável. Daqui existe uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^1 tal que o subespaço $E^u \oplus E^s$ é tangente a $\mathcal{F}$.

Afirmção 2.13. *Se $x \in \overline{W^{uu}(p)}$ e $L_x = L$ é uma folha de $\mathcal{F}$ contendo x então $L \subset \overline{W^{uu}(p)}$.*

De fato, como L é uma folha de $\mathcal{F}$ então L é tangente a $E^u \oplus E^s$ e tem a forma de $\bigcup_{y \in W^{uu}(x)} W^{ss}(y)$ desde que L é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado e $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado.

Logo, dado $z \in L = \bigcup_{y \in W^{uu}(x)} W^{ss}(y)$ temos que, $z \in W^{ss}(y)$ para algum $y \in W^{uu}(x)$.

Logo, como $x \in \overline{W^{uu}(p)}$ e $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado, desde que $W^{uu}(p)$ é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado, temos que $W^{uu}(x) \subset \overline{W^{uu}(p)}$. Daqui segue que,

$$y \in \overline{W^{uu}(p)}.$$

Além disso, como $\overline{W^{uu}(p)}$ é $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado (ver Proposição 2.3) temos que $W^{ss}(y) \subset \overline{W^{uu}(p)}$. De onde,

$$z \in \overline{W^{uu}(p)}.$$

Assim,

$$L \subset \overline{W^{uu}(p)}.$$

Isto conclui a prova da Afirmção 2.13.

Agora, se mostramos que $L = \overline{W^{uu}(p)}$ concluiríamos a prova do Teorema, pois teríamos que $\overline{W^{uu}(p)}$ é uma subvariedade de classe C^1 , já que $L \in \mathcal{F}$ é uma subvariedade de classe C^1 de M .

Para isto, basta mostrar que L é denso em $\overline{W^{uu}(p)}$ (isto é, $\overline{L} = \overline{W^{uu}(p)}$) e que L é fechado (isto é, $L = \overline{L}$), pois claramente daqui teríamos que $L = \overline{W^{uu}(p)}$.

Afirmção 2.14. $\bar{L} = \overline{W^{uu}(p)}$

i) Claramente, $\bar{L} \subset \overline{W^{uu}(p)}$.

Pois, pela Afirmção 2.13 temos que, $L \subset \overline{W^{uu}(p)}$ então $\bar{L} \subset \overline{\overline{W^{uu}(p)}} = \overline{W^{uu}(p)}$. Isto é, $\bar{L} \subset \overline{W^{uu}(p)}$.

ii) Agora, provemos que $\overline{W^{uu}(p)} \subset \bar{L}$.

Para isto, basta mostrar que $W^{uu}(p) \subset L$.

Suponhamos por absurdo que, $W^{uu}(p) \not\subset L$.

Então, existe $q_1 \in W^{uu}(p)$ tal que $q_1 \notin L$. Mais ainda, observemos que, para todo $q \in W^{uu}(p)$ temos que, $q \notin L$. Pois, como $q \in W^{uu}(p)$ então $W^{uu}(q) = W^{uu}(p)$ logo, $W^{uu}(q) \not\subset L$. Daqui, como L é $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado temos que, $q \notin L$.

Assim,

$$W^{uu}(p) \cap L = \emptyset \quad (2.15)$$

Mas, $x \in \overline{W^{uu}(p)}$ então, para toda V_x (vizinhança de x), temos que $V_x \cap W^{uu}(p) \neq \emptyset$, em particular para $V_x = \bigcup_{-\epsilon < t < \epsilon} \phi_t(L)$, que claramente contem x desde que $L = L_x$, onde $\epsilon < r$. Então,

$$\bigcup_{-\epsilon < t < \epsilon} \phi_t(L) \cap W^{uu}(p) \neq \emptyset.$$

Logo, existe $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $\phi_t(L) \cap W^{uu}(p) \neq \emptyset$. Agora note que por (2.15) $t \neq 0$.

Assim, existe $|t| < \epsilon$ e $t \neq 0$ tal que,

$$W^{uu}(p) \cap \phi_t(L) \neq \emptyset. \quad (2.16)$$

Logo, como pela Afirmção 2.13 $L \subset \overline{W^{uu}(p)}$ e $W^{uu}(p) \subset \overline{W^{uu}(p)}$ temos que, $W^{uu}(p) \cap \phi_t(L) \subset \overline{W^{uu}(p)} \cap \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$. Daqui, por (2.16) segue que, $\overline{W^{uu}(p)} \cap \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) \neq \emptyset$.

Isto é, existe $|t| < \epsilon$ e $t \neq 0$ tal que $\overline{W^{uu}(p)} \cap \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) \neq \emptyset$. O que é uma contradição ao Lema 2.1.

Daqui concluímos que $W^{uu}(p) \subset L$.

Assim, $\overline{W^{uu}(p)} \subset \bar{L}$.

Provemos a seguinte afirmação.

Afirmção 2.15. L é fechado.

Suponhamos por contradição que L não é fechado, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in L$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ e $z \notin L$.

Observemos que, como $x_n \in L$ e $L \subset \overline{W^{uu}(p)}$ então $x_n \in \overline{W^{uu}(p)}$. Logo, como $\overline{W^{uu}(p)}$ é fechado então $z \in \overline{W^{uu}(p)}$. Daqui segue da Afirmação 2.13 que $L_z \subset \overline{W^{uu}(p)}$ (L_z é a folha de $\mathcal{F}$ que contem z).

Seja V_z uma vizinhança de z e considere $\bigcup_{-\epsilon < t < \epsilon} \phi_t(L_z)$ com $0 < \epsilon < \frac{r}{2}$.

Agora, como existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in L$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se que $x_n \in V_z$. Além disso se $x_n \notin L_z$ então existe $x_N \in L$ para algum $N > n_0$ tal que,

$$x_N \in V_z \cap \bigcup_{0 < |t| < \epsilon} \phi_t(L_z).$$

(Note que, se $x_n \in L_z$ não temos nada que provar).

Daqui, como $L_z \subset \overline{W^{uu}(p)}$ temos que, $x_N \in V_z \cap \bigcup_{0 < |t| < \epsilon} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$ então, $x_N \in \bigcup_{0 < |t| < \epsilon} \phi_t(\overline{W^{uu}(p)})$. De onde, para algum $0 < |t| < \epsilon$

$$x_N \in \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}). \quad (2.17)$$

Além disso, desde que $x_N \in L$ e $L \subset \overline{W^{uu}(p)}$ temos que,

$$x_N \in \overline{W^{uu}(p)}. \quad (2.18)$$

Assim, de (2.17) e (2.18) temos que, $x_N \in \phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) \cap \overline{W^{uu}(p)}$.

Isto é, $\phi_t(\overline{W^{uu}(p)}) \cap \overline{W^{uu}(p)} \neq \emptyset$ para $0 < |t| < \epsilon < r$, o que é uma contradição ao Lema 2.1.

De onde, L é fechado. ■

Observação 5. Em 1992 C. Bonatti e R. Langevin, construíram um fluxo de Anosov transitivo numa variedade compacta de dimensão 3 que não é uma suspensão de um difeomorfismo de Anosov, para maiores detalhes ver [3].

Por outro lado E. Ghys provou em [8] que o fluxo geodésico no fibrado tangente unitário de uma variedade Riemanniana compacta de curvatura negativa é um fluxo de Anosov transitivo além disso não é uma suspensão.

Referências Bibliográficas

- [1] Anosov, D. V. *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, v. 90, (1967) (A. M. S. translation, 1969).
- [2] Barbot, T. *Geometrie transverse des flots d'Anosov*. These. Lyon decembre 1992.
- [3] Bonatti, C.; Langevin, R.; *Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse a un tore et not conjugue a une suspension*. Ergodic Theory e Dynamical Systems, 1994.
- [4] Brin, M.; Stock, G. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [5] Camacho, C.; Lins, N. *Geometric Theory of Foliations*. Birkhauser, Boston, 1st ed, 1985.
- [6] Docarmo, M. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [7] Franks, J.; Williams, B. *Anomalous Anosov flows*. Global Theory of Dynamical Systems. Springer Lecture Notes in Mathematics 819. Springer: Berlin. 1980, pp.158-174.
- [8] Ghys, E.; *The dynamics of vector fields in dimension 3*. Notes by Matthias and Siddhartha Bhattacharya. 2013.
- [9] Haefliger, A. *Varieties feuilletées*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, v. 3, (1962), pp. 367-397.
- [10] Hirsch, M.; Pugh, W.; Shub, M. *invariants manifolds*. Lectures notes in Mathematics, v. 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.
- [11] Katok, A.; Hasselblatt, B. *A moderna Teoria de Sistemas Dinamicos*. Cambridge University Press, 1999.
- [12] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1978.
- [13] Matsumoto, S.; *Codimension one Anosov Flow*. Notes of the Series of Lectures held at the Seoul National University, 1995.

- [14] Morales, C. A. *Lectures on sectional-Anosov flows*. Rio de Janeiro. Monatsh. Math, 159(03), 2010.
- [15] Niven, I. *Irrational numbers*, Carus Math. Monograph no; 11, 1956.
- [16] Palis, J.; Melo, W. *Introducao aos Sistemas Dinamicos*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1978.
- [17] Plante, J. F.; *Anosov flows*. American Journal of Mathematics, V. 94, No. 3 (Jul., 1972), pp. 729-754.
- [18] Plante, J. F.; *Solvable groups acting on the line*. Transactions of the American Mathematical Society, 278, 401-414, 1983.
- [19] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. Springer-Verlag, New York, 2011.
- [20] Pilyugin, S. *Shadowing in Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1999.
- [21] Smale, S. *Differentiable dynamical systems*. Bulletin of the American Mathematical Society, v. 73 (1967), pp. 747-817.
- [22] Verjovsky, A. *Sistemas de Anosov*. Universidad Nacional de Ingenieria, XII-ELAM, 1999.
- [23] Zehnder, E. *Lectures on Dynamical Systems*. European Mathematical Society, 2010.
- [24] Zhuzhoma, V.; Aranson, S.; Berlitsky R. *Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*. Springer Press, 1999.