FRANCISCO ASDRUBAL HERNÁNDEZ RAMÍREZ

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS CRÍTICOS EM DOMÍNIOS LIMITADOS E ILIMITADOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

H557s
2018

Hernández Ramírez, Francisco Asdrubal, 1980-
Sobre uma classe de problemas elípticos críticos em domínios limitados e ilimitados / Francisco Asdrubal Hernández Ramírez. – Viçosa, MG, 2018.
viii, 78 f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndices.
Orientador: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 77-78.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Método variacional. 3. Sobolev, Espaço de. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós- Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.3533

FRANCISCO ASDRUBAL HERNÁNDEZ RAMÍREZ

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS CRÍTICOS EM DOMÍNIOS LIMITADOS E ILIMITADOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de março de 2018.

Olímpio Hiroshi Miyagaki

Edir Júnior Ferreira Leite

Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão
(Orientadora)

Dedico este trabalho a minha esposa Jacqueline, meu filho Caleb, minha mãe Mercedes e meu irmão Carlos.

Toda a educação científica que não se inicia com a Matemática é, naturalmente, imperfeita na sua base.

Auguste Conte

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me permitido continuar estudando e estar do meu lado, fornecendo o que preciso em todas as áreas da minha vida, até hoje.

A minha orientadora, Professora Dra. Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão, por toda a paciência para me ajudar a entender muitos dos tópicos estudados no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki e Dr. Edir Júnior Ferreira Leite por terem aceito o convite para revisar meu trabalho e formar parte da Banca Examinadora.

À Coordenação da Pós-Graduação e os professores do Programa, os quais são fundamentais para minha formação.

Às autoridades da Faculdade de Ciências Naturais e Matemática pelo apoio para continuar minha formação acadêmica. Em partircular ao Diretor da Escola de Matemática, Dr. Nerys Funes.

À Licda. Daysi Araujo, pelas muitas vezes que esteve pronta para me resolver processos na Universidade de El Salvador e também outros de natureza pessoal.

À CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^N$: o espaço euclidiano $N-$dimensional, com pontos $x = (x_1,\ x_2,\dots,\ x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$ e $|x| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2}$.
Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$, escrevemos $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_N)$.
Ω: um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, não necessariamente limitado; Ω é um domínio se também é conexo; med(Ω)= medida de Ω.
$\partial\Omega$: fronteira do conjunto Ω.
$\overline{\Omega}$: fecho de Ω.
$C^k(\Omega)$: o conjunto das funções $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas, até de ordem menor ou igual a k, são contínuas em Ω, k inteiro positivo ou $k = \infty$.
supp(u): o suporte de u é o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$.
$C_0^k(\Omega)$: o conjunto das funções em $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.
$\mathscr{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.
$B(x, r)$: bola aberta de centro x e raio r.
$\|u\|_p$: norma de u no espaço L^p
$2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, o expoente crítico de Sobolev.
$D^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^{2^*}(\Omega) : \forall i = 1, \dots, N \ \ \partial_i u \in L^2(\Omega)\}$, e a correspondente norma $\|u\|_{D^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |u|^{2^*}\, dx\right)^{1/2^*}$.
$D_0^{1,2}(\Omega) = D^{1,2}$: é o fecho de $\mathscr{D}(\Omega)$ em $D^{1,2}(\Omega)$ e
$\|u\|_{D_0^{1,2}(\Omega)} = \|u\| = \||\nabla u|\|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2}$.
$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \nabla u \in L^2(\Omega)\}$, com norma
$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{1/2}$.
$H_0^1(\Omega)$: é o fecho de $\mathscr{D}(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, com Ω limitado temos a norma equivalente $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2}$.
$S = \inf\limits_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\\ u \neq 0}} \dfrac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}$, a constante ótima de Sobolev.
$u^+ = \max(u, 0), \quad u^- = -\min(u, 0), \quad u = u^+ - u^-, \quad |u| = u^+ + u^-$.
λ_1: o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ no espaço $H_0^1(\Omega)$.
w_N: área da bola de raio 1 no espaço $\mathbb{R}^N$.

RESUMO

RAMIREZ, Francisco Asdrubal Hernández, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2018. **Sobre uma classe de problemas elípticos críticos em domínios limitados e ilimitados**. Orientadora: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.

Neste trabalho estudamos a existência de solução não trivial para dois problemas elípticos críticos:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

em que 2^* é o expoente crítico de Sobolev, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$ e Ω um domínio suave e limitado; e

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda f(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \geq 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx < \infty, \end{cases} \tag{PG_λ}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$ e f uma função que satisfaz condições apropriadas.

ABSTRACT

RAMIREZ, Francisco Asdrubal Hernández, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2018. **On a class of critical elliptical problems in bounded and unbounded domains**. Adviser: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.

In this work we study the existence of a nontrivial solution for two critical elliptic problems:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{in} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

where 2^* is the critical exponent of Sobolev, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$ and Ω is a smooth bounded domain; and

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda f(x,u) & \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \geq 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx < \infty, \end{cases} \tag{PG_λ}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$ and f is a function that satisfies appropriate conditions.

Sumário

Introdução **1**

1 Problema crítico em domínio limitado **5**

1.1 Caso 1: $N \geq 4$ 8

1.2 Caso 2: $N = 3$ 21

2 Problema crítico em domínio ilimitado **33**

2.1 Resultados técnicos 37

2.2 Geometria do passo da montanha 43

2.3 Estimativas 45

2.4 Existência de solução não trivial para (PG_λ) 49

A Resultados gerais **57**

B Constante de Sobolev **69**

B.1 Invariâcia sob escala 69

B.2 Minimizador para S 70

B.3 S em domínio limitado 71

C Primeiro autovalor de $-\Delta$ para $N = 3$ **72**

D Caso subcrítico **75**

Referências Bibliográficas **77**

Introdução

Neste trabalho estuda-se a existência de solução, não trivial, de dois problemas elípticos quase lineares com expoente crítico de Sobolev. Para isso, o trabalho foi divido em duas partes: na primeira parte estuda-se a existência de solução fraca em $H_0^1(\Omega)$, para

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

em que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado; na segunda parte, estuda-se a existência de solução fraca em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda f(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \geq 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx < \infty, \end{cases} \tag{PG_λ}$$

em que $N \geq 3$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

(f1) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f(x,s) \equiv 0$, quando $s \leq 0$.

(f2) Dado $R > 0$ existem $\theta_R \in [2, 2^*)$ e constantes positiva $a_R, b_R > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq a_R s^{\theta_R - 1} + b_R, \ \forall\, |x| \leq R, \ \forall s \geq 0.$$

(f3) Existem $r_1, r_2, q \in (1, 2^*)$, com $r_1 \leq q \leq r_2$, um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$, $c_i \in L^{2^*/(2^*-r_i)}(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$, e uma constante positiva a tais que

$$f(x,s) \leq c_1(x) s^{r_1-1} + c_2(x) s^{r_2-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, s \geq 0,$$

$$F(x,s) \geq a s^q, \ \forall x \in \Omega_0, \ s \geq 0,$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)\, dt$

(f4) Existem $\mu, \hat{\mu} \in (1, 2^*)$, $2 < \tau < 2^*$, $1 < \hat{\tau} < 2^*$, $c_3 \in L^{2^*/(2^*-\mu)(\mathbb{R}^N)}$, e $c_4 \in L^{2^*/(2^*-\hat{\mu})(\mathbb{R}^N)}$ tais que

$$\frac{1}{\tau} f(x,s)s - F(x,s) \geq -c_3(x) s^{\mu}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, s \geq 0,$$

$$\frac{1}{\hat{\tau}} f(x,s)s - F(x,s) \leq c_4(x) s^{\hat{\mu}}, \ \forall x \in \Omega_0, \ s \geq 0,$$

Em ambos os casos o estudo é baseado no método variacional, no entanto, em cada um deles é preciso fazer uso de estimativas para garantir as condições da existência de ponto crítico não trivial, $u \neq 0$, do problema variacional associado. O uso das estimativas surge como uma maneira de vencer a dificuldade da falta de compacidade das imersões contínuas $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

A primeira parte será vista no **Capítulo 1**, seguindo Brezis e Nirenberg [7]. A abordagem para fornecer os resultados, de existência de solução é procurar pontos críticos do funcional

$$\phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx$$

na esfera $\|u\|_{2^*} = 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Via os multiplicadores de Lagrange, é equivalente a mostrar que

$$\inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx \right\} \tag{1}$$

é atingido. O artifício para superar a falta de compacidade é estabelecer que para os valores de λ adequados temos

$$\inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx \right\} < \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx. \tag{2}$$

No estudo percebe-se que os casos $N \geq 4$ e $N = 3$ são diferentes , no que se refere a forma do domínio Ω e o conjunto dos λ.
Denotando por λ_1 o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ no espaço $H_0^1(\Omega)$ com condição de Dirichlet zero, para esta primeira parte temos dois resultados principais.

Teorema 1.7. *Suponha $N \geq 4$. Então para cada $\lambda \in (0, \lambda_1)$ existe solução de (P_λ).*

Teorema 1.10. *Suponha $N = 3$ e que Ω é uma bola. Então existe solução de (P_λ) se e somente se $\lambda \in \left(\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right)$.*

Em nenhum dos casos existe solução positiva quando $\lambda \geq \lambda_1$ ou $\lambda \leq 0$ e Ω é um domínio estrelado. A situação é diferente quando Ω não é estrelado. Este fato foi inicialmente identificado por Kazdan e Warner [11], onde se Ω é um anel, existe solução radial de (P_λ) para cada $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$.

O ponto principal para mostrar que o ínfimo em (1) é atingido está dado no Lema 1.5, para o caso $N \geq 4$, e no Lema 1.8 para o caso $N = 3$, e consiste em estimar a razão

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2}$$

para

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \ \varepsilon > 0,$$

e $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ é uma função de corte. A demonstração que o ínfimo (1) é atingido, é dada no Lema 1.6, da qual também obtemos $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$ tal que ku é solução fraca de (P_λ) para um valor $k > 0$ conveniente, mostrado no Teorema 1.7 para $N \geq 4$ e no Teorema 1.10 para $N = 3$. Nas condições para o caso $N = 3$, a não existência de solução de (P_λ) para $\lambda \leq \dfrac{1}{4}\lambda_1$ é dada no Lema 1.9.

A segunda parte foi baseada no trabalho de Silva e Soares [16], no caso particular em que $p = 2$, e será nosso **Capítulo 2**. A técnica usada permite mostrar que existe uma sequência limitada $(u_n) \in D^{1,2}$ a qual, a menos de subsequência, converge a uma solução fraca não trivial de (PG_λ). Isto é mostrado no Teorema 2.18 acrescentando que $q > 2^* - 2$, onde q é dado pela condição (f3) e no Teorema 2.20 acrescentando a condição de positividade

(f5) $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N, \; s \geq 0.$

Constituem os dois principais resultados deste capítulo.

Teorema 2.18. *Suponha que f satisfaz (f1) – (f4), com q, r_1 dado por (f3) e $q > 2^* - 2$. Então,*

1. *Se $1 < r_1 \leq 2$, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

2. *Se $2 < r_1 < 2^*$, então o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda > 0$.*

Teorema 2.20. *Suponha que f satisfaz (f1) – (f5), com r_1 dado pela condição (f3). Então,*

1. *Se $1 < r_1 \leq 2$, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

2. *Se $2 < r_1 < 2^*$, então o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda > 0$.*

No decorrer do capítulo os argumentos envolvem principalmente: argumentos de perturbação, o Princípio de Concentração-Compacidade do trabalho de P. L. Lions [12] e estimativas apropriadas para os níveis associados ao Teorema do Passo da Montanha.

Do problema (PG_λ), obtemos a sequência de problemas

$$(PG_\lambda)_n \begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda f_n(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0 \; u \in D^{1,2}, \end{cases}$$

onde $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi \equiv 1$ na bola $B(0,1)$, e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2)$ e para $n \in \mathbb{N}$ e $\phi_n(x) = \phi(x/n)$

$$f_n(x,s) = \phi_n(x) f(x,s), \tag{3}$$

pela hipótese (f2) e a construção, o funcional associado ao problema $(PG_\lambda)_n$, $I_{\lambda,n}$, está bem definido e pertence a $C^1(D^{1,2},\mathbb{R})$. Logo, vemos que a sequência de funcionais $I_{\lambda,n}$ satisfaz as codições do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz (Teorema 2.6). Assim, possui uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,n}}$, para cada n, da qual é possivel extrair uma subsequência diagonal limitada (Lema 2.17), que da Proposição 2.12, a menos de subsequência, converge fraco a uma solução, $u \in D^{1,2}$, de (PG_λ). A estimativa na Proposição 2.16 permite mostrar que $u \neq 0$, no Teorema 2.18, e a estimativa na Proposição 2.19, no Teorema 2.20. A Proposição 2.16 faz uso da hipótese $q > 2^* - 2$, onde q é dado pela condição (f3), e na Proposição 2.19 é assumida a positividade da primitiva $F(x,s)$.

Nos apêndices deste trabalho são apresentadas definições e os principais resultados da teoria que permitem acompanhar a dissertação.

No **Apêndice A** apresentamos definições e proposições referente a Análise em $\mathbb{R}^N$, Teoria da Medida, Analise Funcional, Teoria de Distribuições e Espaços de Sobolev.

O **Apêndice B** é dedicado a algumas das propriedades da constante de Sobolev, S, entre elas: invariância sob escala, é atingida quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ e as funções $w_\varepsilon(x) = \dfrac{\{N(N-2)\varepsilon\}^{(N-2)/4}}{(\varepsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$, onde S é atingido satisfazem $\|w_\varepsilon\|^2 = \|w_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = S^{N/2}$.

No **Apêndice C** encontramos o primeiro autovalor λ_1 do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, para o caso em que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$.

No **Apêndice D** vemos a vantagem da imersão compacta, para o problema no caso subcrítico.

Capítulo 1

Problema crítico em domínio limitado

Esta primeira parte consiste no estudo da existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

em que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado e no espaço $H_0^1(\Omega)$

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

é um produto interno e pelo Teorema A.26 temos a norma correspondente

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

e será a norma que usaremos em $H_0^1(\Omega)$. Nossa abordagem será via métodos variacionais, de modo que as soluções de (P_λ) correspondem a pontos críticos não triviais do funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2^*} \int |u|^{2^*} \, dx - \frac{1}{2} \lambda \int u^2 \, dx, \tag{1.1}$$

pois, quando u é ponto crítico de (1.1), temos

$$\phi'(u)v = \int \nabla u \nabla v \, dx - \int |u|^{2^*-2} uv \, dx - \lambda \int uv \, dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

o que implica que u é solução fraca de (P_λ).
No que segue λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ ou do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda = 0$ não é autovalor do Laplaciano, pois o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem como solução única $u = 0$. Por outro lado, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é autovalor de $-\Delta$, existe $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ verificando

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $v = u$, temos

$$0 < \|u\|^2 = \lambda \|u\|_2^2 \Rightarrow \lambda > 0.$$

Podemos também caraterizar o primeiro autovalor por

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \tag{1.2}$$

É sabido que toda autofunção $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ associado a λ_1 tem sinal definido, isto é,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &> 0, \forall x \in \Omega \text{ ou} \\ \varphi(x) &< 0, \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Veremos na Proposição 1.1 que para $N \geq 3$ e $\lambda \geq \lambda_1$, o problema (P_λ) não tem solução. No caso de Ω ser um domínio estrelado, da Proposição 1.2 e o Lema 1.9 temos, respectivamente, não existência de solução de (P_λ) quando $N \geq 4$ e $\lambda \leq 0$, $N = 3$ e $\lambda \leq \dfrac{1}{4}\lambda_1$.

Proposição 1.1. *Não existe solução de (P_λ) quando $\lambda \geq \lambda_1$.*

Demonstração. De fato, sejam φ autofunção de $-\Delta$ associada a λ_1, com $\varphi > 0$ em Ω, e u solução fraca de (P_λ), assim

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx + \int_\Omega u^{2*-1} v \, dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.3}$$

também
$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla v\,dx = \lambda_1\int_\Omega \varphi v\,dx,\ \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$
Em particular, fazendo $v=\varphi$ em (1.3) e $v=u$ em (1.4), tem-se :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\,dx &= \lambda\int_\Omega u\varphi\,dx + \int_\Omega u^{2^*-1}\varphi\,dx \quad (1.5)\\ \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u\,dx &= \lambda_1\int_\Omega \varphi u\,dx. \quad (1.6)\end{aligned}$$

Logo, de (1.5),

$$\lambda\int_\Omega u\varphi\,dx = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega u^{2^*-1}\varphi\,dx$$

substituindo em (1.6) e como $\displaystyle\int_\Omega u^{2^*-1}\varphi\,dx > 0$

$$\lambda\int_\Omega u\varphi\,dx < \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\,dx = \lambda_1\int_\Omega \varphi u\,dx,$$

portanto $\lambda<\lambda_1$. ■

Proposição 1.2. *Não existe solução de (P_λ) quando $\lambda\le 0$ e Ω é um domínio estrelado.*

Demonstração. A demonstração segue da identidade de Pohozaev (Teorema A.38), isto é, suponha u uma função suave satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{em} \quad \Omega,\\ u=0 & \text{em} \quad \partial\Omega,\end{cases} \tag{1.7}$$

onde g é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Então temos

$$\left(1-\frac{1}{2}N\right)\int_\Omega g(u)\cdot u\,dx + N\int_\Omega G(u)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\,\sigma\cdot\nu\,d\sigma, \tag{1.8}$$

onde
$$G(u)=\int_0^u g(t)\,dt$$
e ν denota o vetor normal exterior a $\partial\Omega$. Em nosso caso $g(u)=u^{2^*-1}+\lambda u$. Substituindo em (1.8)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\,\sigma\cdot\nu\,d\sigma &= \left(1-\frac{1}{2}N\right)\int_\Omega (u^{2^*-1}+\lambda u)\cdot u\,dx + N\int_\Omega\left(\frac{u^{2^*}}{2^*}+\frac{\lambda u^2}{2}\right)dx\\ &= \left(1-\frac{1}{2}N\right)\int_\Omega (u^{2^*}+\lambda u^2)\cdot u\,dx + N\int_\Omega\left(\frac{u^{2^*}}{2^*}+\frac{\lambda u^2}{2}\right)dx\\ &= \int_\Omega\left[(u^{2^*}\left(1-\frac{N}{2}+\frac{N}{2^*}\right)+\lambda u^2\right],\end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \, \sigma \cdot \nu \, d\sigma = \lambda \int_{\Omega} u^2 \, dx. \tag{1.9}$$

Se Ω é estrelado em relação a origem temos $(\sigma \cdot \nu) > 0$ quase em toda parte sobre $\partial\Omega$. Quando $\lambda < 0$ segue de (1.9) que $u \equiv 0$. Quando $\lambda = 0$ de (1.9) temos $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em $\partial\Omega$, da identidade de Green

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

e de (P_λ) temos

$$0 = -\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\Omega} u^{2^*-1} \, dx,$$

por conseguinte $u \equiv 0$. ∎

Sabemos que as soluções de (P_λ) são pontos críticos não triviais do funcional (1.1). A abordagem para fornecer os resultados é procurar pontos críticos do funcional

$$\phi(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 \, dx$$

na esfera $\|u\|_{2^*} = 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Tais pontos críticos u para λ apropriados satisfazem a equação

$$-\Delta u - \lambda u = \beta 2^* u^{2^*-1},$$

onde β é um multiplicador de Lagrange. O que é equivalente a mostrar que

$$\inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 \, dx \right\} \tag{1.10}$$

é atingido. Daí, para uma constante k apropriada, ku satisfaz (P_λ).
A maior dificuldade em provar (1.10) deriva do fato que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ não é compacta. O artifício para superar essa falta de compacidade é estabelecer para quais valores de λ adequados temos

$$\inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 \, dx \right\} < \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx. \tag{1.11}$$

Devido às diferenças mostradas, tanto na forma do domínio Ω como no conjunto dos valores λ onde existe solução de (P_λ), dividimos o estudo em dois casos: o caso $N \geq 4$ e o caso $N = 3$.

1.1 Caso 1: $N \geq 4$

Vamos estudar o problema da existência de uma função u satisfazendo o problema (P_λ) com $N \geq 4$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado.

Seja

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx \right\} \\ &= \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \right\} \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

de modo que

$$S_0 = S = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 \right\}. \tag{1.13}$$

S corresponde à melhor constante de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. De fato, da desigualdade de Poincaré (Teorema A.26), se $u \in H_0^1(\Omega)$, então, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{2^*} \leq C \|u\|$$

daí, se S é atingido

$$\sqrt{S} \leq \frac{1}{C} \leq \frac{\|u\|}{\|u\|_{2^*}} \Rightarrow \|u\|_{2^*} \leq \frac{1}{\sqrt{S}} \|u\|.$$

Lema 1.3. *Sejam $0 < \lambda < \lambda_1$, $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\|u\|_\lambda = \left(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2\right)^{1/2}$, então*

$$\|u\|_\lambda \leq \|u\| \leq C \|u\|_\lambda, \quad \textit{em que } \; C = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{-1/2} > 0.$$

Demonstração. Se $u = 0$ a desigualdade é válida. Seja $u \neq 0$, da definição de $\|u\|_\lambda$ e da norma em $H_0^1(\Omega)$ temos

$$\|u\|_\lambda = \left(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2\right)^{1/2} \leq \left(\|\nabla u\|_2^2\right)^{1/2} = \|u\|,$$

pois $\lambda > 0$. Como $\lambda_1 \leq \dfrac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}$ segue que $\lambda \|u\|_2^2 \leq \dfrac{\lambda}{\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2$ o que implica que

$$\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2,$$

logo $\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|\nabla u\|_2^2 \leq \|u\|_\lambda^2$. Portanto $\|u\| \leq \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{-1/2} \|u\|_\lambda$. ■

Lema 1.4. *Seja λ_1 o primeiro autovalor do $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, então*

1. $S_\lambda > 0$ *se* $0 < \lambda < \lambda_1$,

2. $S_\lambda \leq 0$ *se* $\lambda \geq \lambda_1$.

Demonstração. Seja $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ uma autofunção de $-\Delta$ associada ao autovalor λ_1, então $\overline{u}$ verifica

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} = \lambda_1\overline{u} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla v\,dx = \lambda_1 \int_\Omega \overline{u}v\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $v = \overline{u}$, temos $\|\nabla\overline{u}\|_2^2 = \lambda_1 \|\overline{u}\|_2^2$. Daí

$$\|\nabla\overline{u}\|_2^2 - \lambda\|\overline{u}\|_2^2 \;=\; \lambda_1\|\overline{u}\|_2^2 - \lambda\|\overline{u}\|_2^2 = (\lambda_1 - \lambda)\|\overline{u}\|_2^2 .$$

Logo, se $\lambda \geq \lambda_1$

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2\right\} \leq \|\nabla\overline{u}\|_2^2 - \lambda\|\overline{u}\|_2^2 \leq 0.$$

O que mostra *2*.

Ora, para todo $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$, segue de (1.2) que

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla\overline{u}\|_2^2}{\|\overline{u}\|_2^2} \leq \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \Rightarrow \|\nabla u\|_2^2 - \lambda_1\|u\|_2^2 \geq 0.$$

Logo, se $0 < \lambda < \lambda_1$, temos

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 > \|\nabla u\|_2^2 - \lambda_1\|u\|_2^2 \geq 0 \Rightarrow S_\lambda \geq 0.$$

Suponha $S_\lambda = 0$, então existe uma sequência (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_n\|_{2^*} = 1, \quad \|u_n\|_\lambda = \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 \to S_\lambda.$$

Do Lema 1.3 segue que

$$\|u_n\|_{2^*} = 1, \quad \|u\|^2 \to 0.$$

Implicando que $u_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ temos $u_n \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega)$, uma contradição. Portanto $S_\lambda > 0$. ∎

O ponto principal da prova do lema a seguir consiste em estimar a razão

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2}$$

para

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \ \varepsilon > 0,$$

onde $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ é uma função de corte e $U(x) = C(1+|x|^2)^{-(N-2)/2}$ é a função dada no Teorema B.2

Lema 1.5. *Temos* $S_\lambda < S$ *para todo* $\lambda > 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $0 \in \Omega$. Estimaremos a razão

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2}$$

onde

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},\ \varepsilon > 0,$$

e $\varphi \in \mathscr{D}_+(\Omega)$ é uma função fixa tal que $\varphi(x) = 1$ para x numa vizinhança de 0. Afirmamos que quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1), \tag{1.14}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1), \tag{1.15}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \dfrac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O(1) & \text{se } N \geq 5, \\ K_3 |\ln(\varepsilon)| + O(1) & \text{se } N = 4, \end{cases} \tag{1.16}$$

onde K_1, K_2 e K_3 denotam constantes positivas as quais dependem somente de N e tais que $\dfrac{K_1}{K_2} = S$.

Verificação de (1.14): Da definição de $u_\varepsilon(x)$ temos

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \frac{\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{(N-2)\varphi(x)x_i}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N}{2}}}. \tag{1.17}$$

Daí,

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{\nabla \varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{(N-2)\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N}{2}}}\, x.$$

Também de (1.17)

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\right)^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + \frac{(N-2)^2\varphi^2(x)x_i^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N} - \frac{2(N-2)\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\varphi(x)x_i}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-1}},$$

por conseguinte,

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 = \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + \frac{(N-2)^2\varphi^2(x)\,|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N} - \frac{2(N-2)\varphi(x)\nabla\varphi(x)\cdot x}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-1}}.$$

Assim

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx = \int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}\, dx + \int_\Omega \frac{(N-2)^2\varphi^2(x)\,|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx$$
$$- \int_\Omega \frac{2(N-2)\varphi(x)\nabla\varphi(x)\cdot x}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}}\, dx.$$

Seja $r > 0$ tal que $B_{2r}(0) \subset \Omega$. Da Proposição A.34, existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ definida da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{em} \quad B_r(0), \; r>0, \\ 0 & \text{em} \quad \Omega \setminus B_{2r}(0), \\ 0 \leq \varphi(x) \leq & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.18}$$

De modo que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx = \underbrace{\int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}\, dx}_{I_1} + \int_{B_r(0)} \frac{(N-2)^2\,|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx +$$
$$\underbrace{\int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{(N-2)^2\varphi^2(x)\,|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx}_{I_2} - \underbrace{\int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{2(N-2)\varphi(x)\nabla\varphi(x)\cdot x}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}}\, dx}_{I_3}.$$

Do fato que $\varphi \in \mathscr{D}_+(\Omega)$ temos $\nabla\varphi(x)$ limitado, logo

$$I_1 \leq C_1 \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}\, dx \leq C_1 \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{1}{|x|^{2N-4}}\, dx = O(1).$$
$$I_2 \leq C_2 \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx \leq C_2 \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{dx}{|x|^{2N-2}} = O(1).$$
$$I_3 \leq \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{2(N-2)\varphi(x)\,|\nabla\varphi(x)|\,|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}}\, dx \leq C_3 \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{|x|}{|x|^{2N-2}} =$$
$$C_3 \int_{\Omega\setminus B_r(0)} \frac{1}{|x|^{2N-3}} = O(1).$$

De modo que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx = (N-2)^2 \int_{B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx + O(1).$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx = \int_{B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\, dx$$

e

$$\int_{B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx \leq \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx \leq \infty,$$

assim

$$\int_{B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx - \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(0)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx.$$

Logo

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx + O(1).$$

Fazendo a mundança de variável $y = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, x$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx = \frac{(N-2)^2}{\varepsilon^{(N-2)/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{(\varepsilon + |y|^2)^N}\, dy + O(1).$$

Assim

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx = \frac{K_1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O(1)$$

onde

$$K_1 = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{(\varepsilon + |y|^2)^N}\, dy = \|\nabla U\|_2^2. \tag{1.19}$$

Verificação de (1.15): Da definição de norma em $L^{2^*}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^{2^*}\, dx = \int_\Omega \frac{\varphi^{2^*}(x)}{[(\varepsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}]^{2^*}}\, dx = \int_\Omega \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx.$$

De (1.18)

$$\int_\Omega \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx = \int_{B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + \underbrace{\int_{V \backslash B_r(0)} \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx}_{O(1)}.$$

Observando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} = \int_{B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} \tag{1.20}$$

e com a mudança de variável $y = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} x$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} = \frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N},$$

por conseguinte

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N}}_{O(1)>0} + \underbrace{\int_{V \setminus B_r(0)} \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^N}\, dx}_{O(1)>0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + O(1) = \frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} + O(1),\end{aligned}$$

de modo que

$$\|u_\varepsilon(x)\|_{2^*}^{2^*} = \int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^{2^*}\, dx = \frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} + O(1),$$

daí

$$\|u_\varepsilon(x)\|_{2^*} = \left(\frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} + O(1) \right)^{1/2^*}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a $f(t) = (a+t)^{1/p}$ para $0 \leq t \leq O(1)$, $a > 0$ e $p = 2^*$ ou $p = 2$ vemos que $a^{1/2^*} + O(1) = (a + O(1))^{1/2^*}$. Assim

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon(x)\|_{2^*} &= \left(\frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} \right)^{1/2^*} + O(1) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{(N-2)/4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} \right)^{1/2^*} + O(1).\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon(x)\|_{2^*}^2 &= \frac{1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} \right)^{2/2^*} + O(1) = \frac{1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} \|U\|_{2^*}^2 + O(1) \\ &= \frac{K_2}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O(1), \quad \text{onde } K_2 = \|U\|_{2^*}^2 . \end{aligned} \tag{1.21}$$

Verificação de (1.16): Da definicão de φ em (1.18), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^2\, dx = \int_\Omega \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}}\, dx &= \int_{B_r(0)} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}}\, dx + \\ &\underbrace{\int_{V \setminus B_r(0)} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}}\, dx}_{O(1)} = \int_{B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} + O(1)\end{aligned}$$

Do fato que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} = \int_{B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_2^2 = \int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(0)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}}}_{O(1)} + O(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + O(1). \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Logo da mudança $y = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} x$ e $N \geq 5$ em (1.22), temos

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{1}{\varepsilon^{(N-4)/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1 + |y|^2)^{N-2}} + O(1) = \frac{K_3}{\varepsilon^{(N-4)/2}} + O(1). \qquad (1.23)$$

Quando $N = 4$ de (1.22) temos

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} + O(1),$$

do Corolário A.40, da aditividade sobre domínios e por ser Ω limitado, existem constantes R_1 e R_2. Tais que $B_{R_1}(0) \subset \Omega \subset B_{R_2}(0)$, logo

$$\int_{|x| \leq R_1} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} \leq \int_\Omega \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} \leq \int_{|x| \leq R_2} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2}.$$

Por outro lado, temos

$$\int_{|x| \leq R} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} = \int_0^R \frac{1}{(\varepsilon + r^2)^2} \omega_4 r^{4-1} dr = \omega_4 \int_0^R \frac{1}{(\varepsilon + r^2)^2} r^{4-1} dr$$

onde ω_4 é a área da bola de raio 1 em $\mathbb{R}^4$. Fazendo a mudança $s = \varepsilon + r^2$ e integrando, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \leq R} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} &= \omega_4 \left(\frac{1}{2} \ln(\varepsilon + R^2) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + R^2} - \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \omega_4 |\ln(\varepsilon)| + O(1).
\end{aligned}$$

por conseguinte, com $K_3 = \dfrac{1}{2} \omega_4$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = K_3 |\ln(\varepsilon)| + O(1). \qquad (1.24)$$

Assim, de (1.23) e (1.24)

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \dfrac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O(1) & \text{se} \quad N \geq 5, \\ \\ K_3\,|\ln(\varepsilon)| + O(1) & \text{se} \quad N = 4, \end{cases}$$

Combinando (1.14), (1.15) e (1.16) para o caso $N \geq 5$

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\dfrac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1) - \lambda\left(\dfrac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O(1)\right)}{\dfrac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1)} = \frac{\dfrac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} - \lambda\left(\dfrac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}}\right) + O(1)}{\dfrac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1)}$$
$$= \frac{K_1 - \lambda\varepsilon K_3 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{\dfrac{K_1}{K_2} - \lambda\varepsilon\dfrac{K_3}{K_2} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}.$$

De (1.19) e (1.21) temos $S = \dfrac{K_1}{K_2}$, daí

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \frac{S - \lambda\varepsilon\dfrac{K_3}{K_2} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{S}{1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + \frac{-\lambda\varepsilon\dfrac{K_3}{K_2} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} \\ &= \frac{S}{1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} - \lambda\varepsilon\frac{K_3}{K_2} + \underbrace{\frac{\left(1 + \lambda\varepsilon\dfrac{K_3}{K_2}\right)O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}}_{O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}),\ \text{quando } \varepsilon\to 0} \\ &= \frac{S}{1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} - \lambda\varepsilon\frac{K_3}{K_2} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}). \end{aligned}$$

Usando o fato que

$$\frac{1}{1 + O(\phi(x))} = 1 + O(\phi(x)) \text{ quando } \phi(x) \to 0, \tag{1.25}$$

temos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \lambda\varepsilon\frac{K_3}{K_2} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) = S - \lambda\varepsilon\frac{K_3}{K_2} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Fazendo $\lambda\dfrac{K_3}{K_2} = \tilde{M}$ e dado que $O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) \leq M\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}$ para algum $M \geq 0$, daí

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S - \varepsilon\tilde{M} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) \leq S - \varepsilon\tilde{M} + M\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} = S - \varepsilon(\tilde{M} - M\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}).$$

de onde para ε suficientemente pequeno teremos $\tilde{M} - M\varepsilon^{\frac{N-4}{2}} > 0$ implicando que $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ logo $S_\lambda < S$, pois $S_\lambda \leq Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$.

Combinando (1.14), (1.15) e (1.16) para o caso $N = 4$

$$
\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \frac{\dfrac{K_1}{K_2} - \lambda \dfrac{K_3}{K_2} |\ln(\varepsilon)| \, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})}{1 + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})} \\
&= \frac{S}{1+O(\varepsilon)} - \frac{\lambda \dfrac{K_3}{K_2} |\ln(\varepsilon)| \, \varepsilon}{1+O(\varepsilon)} + \frac{O(\varepsilon)}{1+O(\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

usando (1.25), também que $\dfrac{O(\varepsilon)}{1+O(\varepsilon)} = O(\varepsilon)\dfrac{1}{1+O(\varepsilon)} = O(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \to 0$, e que $\dfrac{-\lambda\varepsilon\frac{K_3}{K_2}}{1+O(\varepsilon^{(N-2)/2})} < -\dfrac{1}{2}\lambda\varepsilon\dfrac{K_3}{K_2}$, pois $\dfrac{1}{1+O(\varepsilon)} \to 1$ quando $\varepsilon \to 0$. Obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) &\leq S + O(\varepsilon) - \frac{1}{2}\lambda \frac{K_3}{K_2} |\ln(\varepsilon)| \, \varepsilon + O(\varepsilon) = S - \frac{1}{2}\lambda \frac{K_3}{K_2} |\ln(\varepsilon)| \, \varepsilon + O(\varepsilon) \\
&\leq S - \frac{1}{2}\lambda \frac{K_3}{K_2} |\ln(\varepsilon)| \, \varepsilon + M\varepsilon,
\end{aligned}
$$

do fato que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |\ln(\varepsilon)| = \infty$. Dado $\dfrac{2K_2}{\lambda K_3} M$ existe $\delta > 0$ tal que para $\varepsilon < \delta$ temos $|\ln(\varepsilon)| > \dfrac{2K_2}{\lambda K_3} M$ implicando que $\dfrac{1}{2}\lambda \dfrac{K_3}{K_2} |\ln(\varepsilon)| \, \varepsilon > M\varepsilon$ para $\varepsilon < \delta$. Portanto

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) < S \Rightarrow S_\lambda < S.$$

■

Lema 1.6. *Se $S_\lambda < S$, então o ínfimo (1.12) é atingido.*

Demonstração. Seja $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para (1.12), isto é,

$$\|u_j\|_{2^*} = 1 \tag{1.26}$$

$$\|\nabla u_j\|_2^2 - \lambda \|u_j\|_2^2 = S_\lambda + o(1) \text{ quando } j \to \infty. \tag{1.27}$$

Afirmamos que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, da imersão $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e (1.26), obtemos$\|u_j\|_2^2 \leq C \|u_j\|_{2^*}^2 = C$. De (1.27)

$$\|u_j\|^2 = S_\lambda + \lambda \|u_j\|_{2^*}^2 + o(1) \leq S_\lambda + \lambda C + o(1).$$

Logo, podemos extrair uma subsequência, ainda denotada por u_j, tal que

$$
\begin{aligned}
u_j &\rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega), \\
u_j &\to u \text{ em } L^2(\Omega), \\
u_j &\to u \text{ q.t.p. em } \Omega,
\end{aligned}
$$

da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, temos $u_j \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(\Omega)$ e do Teorema A.48 temos $\|u\|_{2^*} \leq 1$. Também, como $S = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \|\nabla u\|_2^2$ e $\|u_j\|_{2^*} = 1$ temos $S \leq \|\nabla u_j\|_2^2$. Da hipótese, $S_\lambda < S$ e de (1.27) temos $0 < S - S_\lambda \leq \lambda \|u_j\|_2^2 + o(1)$, daí e da convergência em $L^2(\Omega)$ temos $0 < \lambda \|u\|_2^2$ implicando que $u \neq 0$.

Seja $v_j = u_j - u$, de modo que

$$v_j \rightharpoonup 0 \text{ em } H_0^1$$
$$v_j \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Usando (1.27) obtemos

$$\|\nabla(v_j + u)\|_2^2 - \lambda \|v_j + u\|_2^2 = S_\lambda + o(1),$$

daí

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v_j\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 + 2\langle v_j, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \lambda(\|v_j\|_2^2 + 2\langle v_j, u\rangle_{L^2(\Omega)}) = S_\lambda + o(1),$$

quando $j \to \infty$ da convergência q.t.p. em Ω, $\|v_j\|_2^2 \to 0$, e da convergência fraca de (v_j) temos

$$\langle v_j, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} \to 0, \quad \langle v_j, u\rangle_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Logo

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v_j\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda + o(1). \tag{1.28}$$

Por outro lado, do Lema A.49 temos

$$\|u_j\|_{2^*}^{2^*} - \|u_j - u\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + o(1)$$

de onde

$$\|u + v_j\|_{2^*}^{2^*} - \|v_j\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + o(1)$$

e de (1.26), $\|u + v_j\|_{2^*}^{2^*} = 1$ logo

$$1 = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|v_j\|_{2^*}^{2^*} + o(1) \Rightarrow \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|v_j\|_{2^*}^{2^*} = 1 + o(1).$$

Definindo $f(t) = t^{\frac{2}{2^*}}$, em $[0, \infty)$, temos $f'(t)$ decrescente e do Teorema do Valor Médio

$$\frac{f(a+b) - f(b)}{a} \leq \frac{f(a) - f(0)}{a} \Rightarrow f(a+b) \leq f(a) + f(b), \text{ para } a, b \in [0, \infty),$$

de modo que

$$(1 + o(1))^{\frac{2}{2^*}} = \left(\|u\|_{2^*}^{2^*} + \|v_j\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\|u\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + \left(\|v_j\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} = \|u\|_{2^*}^2 + \|v_j\|_{2^*}^2.$$

Do Teorema do Valor Médio aplicado à função $g(t) = (1+t)^{2/2^*}$ para $c \in (0, o(1))$, temos $(1+o(1))^{2/2^*} - 1 = g'(c)o(1) = o(1)$. Por conseguinte

$$1 \leq \|u\|_{2^*}^2 + \|v_j\|_{2^*}^2 + o(1)$$

e dado que $S \leq \dfrac{\|\nabla v_j\|_2^2}{\|v_j\|_{2^*}^2}$ obtemos,

$$1 \leq \|u\|_{2^*}^2 + \frac{1}{S}\|\nabla v_j\|_2^2 + o(1). \tag{1.29}$$

Distinguimos dois casos.

Caso 1. $S_\lambda > 0$ (i. e., $0 < \lambda < \lambda_1$, ver Lema 1.4).
Multiplicando (1.29) por S_λ temos

$$S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|_{2^*}^2 + \frac{S_\lambda}{S}\|\nabla v_j\|_2^2 + o(1). \tag{1.30}$$

Combinando (1.28) e (1.30) obtemos

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v_j\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 \leq S_\lambda \|u\|_{2^*}^2 + \frac{S_\lambda}{S}\|\nabla v_j\|_2^2 + o(1).$$

Usando que $v_j \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $j \to \infty$, deduzimos

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 \leq S_\lambda\|u\|_{2^*}^2 \Rightarrow \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} \leq S_\lambda. \tag{1.31}$$

Observando que $\left\|\dfrac{u}{\|u\|_{2^*}}\right\|_{2^*} = 1$ e de (1.31) temos $\left\|\nabla\dfrac{u}{\|u\|_{2^*}}\right\|_2^2 - \lambda\left\|\dfrac{u}{\|u\|_{2^*}}\right\|_2^2 \leq S_\lambda$.
Mas de (1.12) também $S_\lambda \leq \left\|\nabla\dfrac{u}{\|u\|_{2^*}}\right\|_2^2 - \lambda\left\|\dfrac{u}{\|u\|_{2^*}}\right\|_2^2$. Assim, S_λ é atingido.
Caso 2. $S_\lambda \leq 0$ (i. e., $\lambda \geq \lambda_1$, ver Lema 1.4).
Neste caso temos $S_\lambda \leq S_\lambda\|u\|_{2^*}$ pois $\|u\|_{2^*} \leq 1$, de (1.28) obtemos (1.31).
Portanto a prova do lema está completa. ■

Do Lema 1.6, obtemos $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$ onde (1.12) é atingido. Agora veremos que para um k apropriado, ku é solução fraca de (P_λ). Isto é o resultado principal desta seção.

Teorema 1.7. *Suponha $N \geq 4$. Então para cada $\lambda \in (0, \lambda_1)$ existe solução de (P_λ).*

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ dado pelo Lema 1.6, isto é,

$$\|u\|_{2^*} = 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 = S_\lambda.$$

Podemos assumir que $u \geq 0$ sobre Ω, caso contrário substituímos u por $|u|$. De fato, $\nabla|u| = \nabla u^+ + \nabla u^-$ e assim

$$\begin{aligned}\|\nabla|u|\|_2^2 &= \langle \nabla|u|, \nabla|u|\rangle = \langle \nabla u^+ + \nabla u^-, \nabla u^+ + \nabla u^-\rangle \\ &= \langle \nabla u^+, \nabla u^+\rangle + \langle \nabla u^-, \nabla u^-\rangle = \langle \nabla u^+ - \nabla u^-, \nabla u^+ - \nabla u^-\rangle \\ &= \langle \nabla u, \nabla u\rangle = \|\nabla u\|_2^2 .\end{aligned}$$

Também $\||u|\|_2^2 = \|u\|_2^2$ e $\||u|\|_{2^*}^2 = \|u\|_{2^*}^2$. Logo,

$$\|\nabla|u|\|_2^2 - \lambda\||u|\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 = S_\lambda.$$

Definindo

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\to J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2}\lambda\int_\Omega u^2\, dx, \\ F : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\to F(u) = \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx - 1, \end{aligned}$$

e $M = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : F(u) = 0\right\}$. Note que $F,\ J$ satisfazem

1. $F'(u)v = 2^*\int_\Omega |u|^{2^*-2} uv\, dx$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Por conseguinte, fazendo $v = u$ temos $F'(u)u = 2^*\int_\Omega |u|^{2^*-2} uu = 2^*\int_\Omega |u|^{2^*} = 2^*$, implicando que $F'(u) \neq 0, \quad \forall u \in M$,

2. Pelo Lema 1.6, existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \min\limits_{u\in M} J(u)$,

e J é limitado inferiormente em M. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.28), existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \beta F'(u_0).$$

Isto é

$$J'(u_0)v = \beta F'(u_0)v, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

ou

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v\, dx - \lambda\int_\Omega u_0 v\, dx = \beta\, 2^*\int_\Omega u_0^{2^*-1} v\, dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, quando $v = u_0$

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2\, dx - \lambda\int_\Omega u_0^2\, dx = \beta\, 2^*\int_\Omega u^{2^*}\, dx \Rightarrow \beta\, 2^* = S_\lambda$$

e $S_\lambda > 0$, pelo Lema 1.4, dado que $0 < \lambda < \lambda_1$. De modo que u_0 é solução de

$$-\Delta u - \lambda u = \beta\, 2^* u^{2^*-1}. \tag{1.32}$$

Segue que ku_0 é solução de (P_λ) para $k > 0$ escolhida de forma que $k^{2-2^*}2^*\beta = 1$.

De fato, quando u_0 é solução de (1.32) satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v\, dx - \lambda \int_\Omega u_0 v\, dx = S_\lambda \int_\Omega u_0^{2^*-1} v\, dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.33}$$

correspondentemente, se ku_0 é solução de (P_λ) temos

$$\int_\Omega \nabla(ku_0) \nabla v\, dx - \lambda \int_\Omega (ku_0) v\, dx = \int_\Omega (ku_0)^{2^*-1} v\, dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

de modo que

$$k\left(\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v\, dx - \lambda \int_\Omega u_0 v\, dx\right) = k^{2^*-1} \int_\Omega u^{2^*-1} v\, dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

de (1.33)

$$kS_\lambda \int_\Omega u_0^{2^*-1} v\, dx = k^{2^*-1} \int_\Omega u^{2^*-1} v\, dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, $k = S_\lambda^{\frac{1}{2^*-2}}$. Podemos supor $u_0 \geq 0$ em Ω (caso contrario, trocamos u_0 por $|u_0|$). Pela Teoria de Regularidade Clássica das Equações Diferenciaveis Parciais Elípticas, segue que $u = ku_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ e temos

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Pelo Teorema A.27 $u > 0$ em Ω, $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

■

1.2 Caso 2: $N = 3$

Vamos estudar o problema da existência de uma função u satisfazendo o problema (P_λ) em que $N = 3$, no caso particular em que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < 1\}$ e λ uma constante real. Neste caso (P_λ) tem a forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^5 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.34}$$

Ainda neste caso, o primeiro autovalor do $-\Delta$, em $H_0^1(\Omega)$, é $\lambda_1 = \pi^2$ e uma autofunção associada é $|x|^{-1} \sin(\pi |x|)$ (ver Apêndice C).

Como no caso anterior, temos

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_6 = 1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \right\} \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.35}$$

Lema 1.8. *Temos* $S_\lambda < S$ *para todo* $\lambda > \dfrac{1}{4}\lambda_1$.

Demonstração. Vamos estimar a razão

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_6^2}$$

onde

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(|x|)}{(\varepsilon + |x|^2)^{1/2}}.$$

no qual φ é uma função fixa e suave tal que $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi(1) = 0$.

Para simplificar as expressões, fazemos a mudança $r = |x|$ e definimos $u_\varepsilon(r)$ da seguinte maneira

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(r) = \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{1/2}}. \tag{1.36}$$

Afirmamos que, quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{1/2}} + \omega \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 \, dr + O(\varepsilon^{1/2}), \tag{1.37}$$

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{1/2}} + O(\varepsilon^{1/2}), \tag{1.38}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \varphi^2(r) \, dr + O(\varepsilon^{1/2}), \tag{1.39}$$

em que K_1 e K_2 são constantes positivas tais que $\dfrac{K_1}{K_2} = S$ e ω é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Verificação de (1.37): Derivando (1.36) temos

$$u_\varepsilon'(r) = \frac{\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^{1/2}} - \frac{\varphi(r) r}{(\varepsilon + r^2)^{3/2}}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{B_r(0)} |\nabla u|^2 \, dx = \int_0^1 (u_\varepsilon'(r))^2 \omega r^2 \, dr \\
&= \omega \int_0^1 \left(\frac{\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^{1/2}} - \frac{\varphi(r) r}{(\varepsilon + r^2)^{3/2}} \right)^2 r^2 \, dr \\
&= \omega \int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} \, dr - \omega \underbrace{\int_0^1 \frac{2\varphi'(r)\varphi(r) r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} \, dr}_{I} + \omega \int_0^1 \frac{\varphi^2(r) r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} \, dr.
\end{aligned}$$

Integrando por partes I e usando que $\varphi(1) = 0$ temos

$$
\begin{aligned}
I &= \left.\frac{(\varphi(r))^2 r^3}{(\varepsilon+r^2)^2}\right|_0^1 - \int_0^1 \varphi^2(r)\left[\frac{3r^2}{(\varepsilon+r^2)^2} - \frac{4r^4}{(\varepsilon+r^2)^3}\right] dr, \\
&= -\int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon+r^2)^2} dr + \int_0^1 \frac{4\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon+r^2)^3} dr
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= \omega\left[\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2 r^2}{(\varepsilon+r^2)}\, dr - \left(-\int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon+r^2)^2} dr + \int_0^1 \frac{4\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon+r^2)^3} dr\right) + \right. \\
&\qquad \left. \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon+r^2)^3}\, dr\right] \\
&= \omega\left[\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2 r^2}{(\varepsilon+r^2)}\, dr + \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon+r^2)^2} dr - \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon+r^2)^3} dr\right]
\end{aligned}
$$

e por conseguinte

$$
\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \underbrace{\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2 r^2}{(\varepsilon+r^2)}\, dr}_{I_1} + 3\omega\varepsilon \underbrace{\int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon+r^2)^3} dr}_{I_2}. \tag{1.40}
$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2 r^2}{(\varepsilon+r^2)}\, dr + \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr - \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr \\
&= \int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2 r^2 - (\varphi'(r))^2\varepsilon - (\varphi'(r))^2 r^2}{(\varepsilon+r^2)}\, dr + \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr \\
&= -\varepsilon \int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon+r^2)}\, dr + \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr.
\end{aligned}
$$

Usando que $\varphi'(r)$ é limitada e que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varepsilon dr}{\varepsilon+r^2} = \sqrt{\varepsilon}\arctan(1/\sqrt{\varepsilon})$, temos

$$
\left|\int_0^1 \frac{(\varphi'(r))^2}{(\varepsilon+r^2)}\, dr\right| \le M\varepsilon \int_0^1 \frac{dr}{\varepsilon+r^2} \le M\frac{\pi}{2}\sqrt{\varepsilon}.
$$

Assim

$$
I_1 = \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr + O(\varepsilon^{1/2}). \tag{1.41}
$$

Correspondentemente

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon+r^2)^3} dr + \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon+r^2)^3}\, dr - \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon+r^2)^3}\, dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon+r^2)^3}\, dr + \int_0^1 \frac{(\varphi^2(r)-1)r^2}{(\varepsilon+r^2)^3}\, dr.
\end{aligned}
$$

Definindo

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^2(r) - 1}{r^2} & \text{se} \quad r \in (0,1] \\ \varphi''(0) & \text{se} \quad r = 0 \end{cases}$$

e dado que $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$ e $\varphi(1) = 0$ temos $h(r)$ contínua em $[0,1]$. Logo, existe $c > 0$ tal que $|h(r)| \leq c$ implica $|\varphi^2(r) - 1| \leq cr^2$, daí

$$\left| \int_0^1 \frac{(\varphi^2(r) - 1)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr \right| \leq \int_0^1 \frac{cr^4}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr = \frac{c}{\varepsilon^3} \int_0^1 \frac{r^4}{\left(1 + (r/\sqrt{\varepsilon})^2\right)^3}\, dr.$$

Depois da mudança $s = r/\sqrt{\varepsilon}$, obtemos

$$\left| \int_0^1 \frac{(\varphi^2(r) - 1)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr \right| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^4}{(1 + s^2)^3}\, ds.$$

Como

$$\int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^4}{(1 + s^2)^3}\, ds = \frac{3}{8} \arctan(1/\sqrt{\varepsilon}) - \frac{5\varepsilon^{1/2} + 3\varepsilon^{3/2}}{8(1 + \varepsilon)^2} \tag{1.42}$$

segue

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{3}{8} \arctan(1/\sqrt{\varepsilon}) - \frac{5\varepsilon^{1/2} + 3\varepsilon^{3/2}}{8(1 + \varepsilon)^2} \right) = \frac{3\pi}{16} \tag{1.43}$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \left(\frac{3}{8} \arctan(1/\sqrt{\varepsilon}) - \frac{5\varepsilon^{1/2} + 3\varepsilon^{3/2}}{8(1 + \varepsilon)^2} \right) = 0,$$

do qual existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^4}{(1 + s^2)^3}\, ds \leq k$, de modo que

$$\left| \int_0^1 \frac{(\varphi^2(r) - 1)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr \right| \leq k \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = O(\varepsilon^{-1/2}).$$

Logo

$$I_2 = \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr + O(\varepsilon^{-1/2}).$$

Também

$$\int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds \leq \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^\infty \frac{1}{s^4}\, ds = \frac{1}{3}\varepsilon^{3/2} \Rightarrow \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds = O(\varepsilon^{3/2}),$$

e como

$$\int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds = \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds + \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds$$

tem-se

$$\int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds = \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds + O(\varepsilon^{3/2}),$$

pelo qual

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds \right) + O(1).$$

Assim

$$I_2 = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds \right) + O(1) + O(\varepsilon^{-1/2}). \tag{1.44}$$

Combinando (1.41), (1.44) e (1.40) temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \left(\int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr + O(\varepsilon^{1/2}) \right) + 3\omega\varepsilon \left(\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds \right) \right.$$
$$\left. + O(1) + O(\varepsilon^{-1/2}) \right).$$

Daí

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = 3\omega\varepsilon^{-1/2} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds + \omega \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr + \omega O(\varepsilon^{1/2}) + 3\omega\varepsilon O(1)$$
$$+ 3\omega\varepsilon O(\varepsilon^{-1/2}).$$

Fazendo $K_1 = 3\omega \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds$, temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{1/2}} + \omega \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr + (\omega + 3\omega\sqrt{\varepsilon} + 3\omega) O(\varepsilon^{1/2}).$$

e como $\varepsilon \to 0$, deduzimos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{1/2}} + \omega \int_0^1 (\varphi'(r))^2\, dr + O(\varepsilon^{1/2}). \tag{1.45}$$

Verificação de (1.38):

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_6^6 &= \int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^r\, 6\, dr = \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^6\, \omega r^2\, dr = \omega \int_0^1 \frac{\varphi^6 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr \\
&= \omega \int_0^1 \frac{\varphi^6 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr - \omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr + \omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr \\
&= \underbrace{\omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr}_{I_3} + \underbrace{\omega \int_0^1 \frac{(\varphi^6(r) - 1) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr}_{I_4}.
\end{aligned}$$

Usando que $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$ e definindo

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^6(r) - 1}{r^2} & \text{se} \quad r \in (0, 1] \\ 3\varphi''(0) & \text{se} \quad r = 0, \end{cases}$$

temos $h(r)$ contínua no intervalo $[0, 1]$, pelo qual existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|h(r)| \leq c$ para $r \in [0, 1]$, implicando que $|\varphi^6(r) - 1| \leq cr^2$. Assim

$$|I_4| \leq \int_0^1 \frac{cr^4}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr = \frac{c}{\varepsilon^3} \int_0^1 \frac{r^4}{(1 + (r/\sqrt{\varepsilon})^2)^3}\, dr$$

e depois da mudança $s = r/\sqrt{\varepsilon}$ temos

$$|I_4| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^4}{(1 + s^2)^3}\, ds$$

e dado que

$$\int \frac{s^4}{(1 + s^2)^3}\, ds = \frac{3}{8} \arctan(s) - \frac{3s}{8(1 + s^2)} \text{ então } \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^4}{(1 + s^2)^3}\, ds \leq \frac{3\pi}{16}. \tag{1.46}$$

Por conseguinte

$$|I_4| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^4}{(1 + s^2)^3}, \mathrm{d}s \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{3\pi}{16} = O(\varepsilon^{-1/2}) \text{ então } I_4 = O(\varepsilon^{-1/2}). \tag{1.47}$$

Correspondentemente, mediante a mudança de variaveis $s = r/\sqrt{\varepsilon}$, temos

$$I_3 = \varepsilon^{-3/2} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds = \varepsilon^{-3/2} \left(\int_0^{\infty} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds - \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds \right).$$

Por outro lado, para $0 < s \leq 1$, tem-se

$$1 + s^2 \geq s \Rightarrow (1 + s^2)^3 \geq s^3 \geq s^5 \Rightarrow \frac{1}{(1 + s^2)^3} \leq \frac{1}{s^5},$$

e para $s > 1$, tem-se

$$1 + s^2 \geq s^2 \Rightarrow (1 + s^2)^3 \geq s^6 \geq s^5 \Rightarrow \frac{1}{(1 + s^2)^3} \leq \frac{1}{s^5}.$$

Daí segue que

$$\int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds \leq \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{1}{s^3}\, ds = \frac{\varepsilon}{2} = O(\varepsilon).$$

Assim

$$I_3 = \varepsilon^{-3/2} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds = \varepsilon^{-3/2} \left(\int_0^{\infty} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3}\, ds + O(\varepsilon) \right). \tag{1.48}$$

Agora, de (1.47) e (1.48) temos

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_6^6 &= \omega\varepsilon^{-3/2}\left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\,ds + O(\varepsilon)\right) + \omega O(\varepsilon^{-1/2})\\
&= \varepsilon^{-3/2}\left(\omega\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\,ds + \omega O(\varepsilon)\right) + \omega\varepsilon^{-3/2}O(\varepsilon)\\
&= \varepsilon^{-3/2}\left(\omega\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\,ds + \omega O(\varepsilon) + \omega O(\varepsilon)\right)
\end{aligned}$$

do qual

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 \;=\; \varepsilon^{-1/2}\left(\omega\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\,ds + O(\varepsilon)\right)^{1/3}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, definindo $h(t) = (K+t)^{1/3}$ para $0 \le t < O(\varepsilon)$ e pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, O(\varepsilon))$ tal que

$$c = \frac{(K+O(\varepsilon))^{1/3} - K}{O(\varepsilon) - 0} \Rightarrow (K + O(\varepsilon))^{1/3} = K + O(\varepsilon),$$

implicando que

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 \;=\; \varepsilon^{-1/2}\left(\omega\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\,ds\right)^{1/3} + O(\varepsilon).$$

fazendo $K_2 = \left(\omega\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\,ds\right)^{1/3}$, temos

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 \;=\; \frac{K_2}{\varepsilon^{1/2}} + O(\varepsilon^{1/2}) \tag{1.49}$$

Verificação de (1.39): Da mudança de variáveis para integrar na bola do $\mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^2\,dx = \int_0^1 |u_\varepsilon(r)|^2\,\omega r^2\,dr = \omega\int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon+r^2)}\,dr\\
&= \omega\left(\int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon+r^2)}\,dr + \int_0^1 \varphi^2(r)\,dr - \int_0^1 \varphi^2(r)\,dr\right)\\
&= \omega\left(\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr - \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)\varepsilon}{\varepsilon+r^2}\,dr\right).
\end{aligned}$$

Como $\varphi^2(r)$ é limitada no intervalo $[0,1]$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi^2(r) \le c$, logo

$$\int_0^1 \frac{\varphi^2(r)\varepsilon}{\varepsilon+r^2}\,dr \le c\int_0^1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon+r^2}\,dr = c\int_0^1 \frac{1}{1+(r/\sqrt{\varepsilon})^2}\,dr.$$

Com a mudança de variáveis $s = r/\sqrt{\varepsilon}$ obtemos

$$c\int_0^1 \frac{1}{1+(r/\sqrt{\varepsilon})^2}\,dr = c\sqrt{\varepsilon}\int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{1+s^2}\,ds = c\sqrt{\varepsilon}\arctan(1/\sqrt{\varepsilon}) \le \frac{c\pi}{2}\sqrt{\varepsilon}.$$

Daí, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi^2(r)\varepsilon}{\varepsilon+r^2}\,dr = O(\varepsilon^{1/2})$, donde

$$\|u\|_2^2 = \omega\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr + O(\varepsilon^{1/2}). \tag{1.50}$$

Combinando agora (1.45), (1.49) e (1.50) obtemos

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \frac{\dfrac{K_1}{\varepsilon^{1/2}} + \omega\displaystyle\int_0^1 (\varphi'(r))^2\,dr + O(\varepsilon^{1/2}) - \lambda\left(\omega\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr + O(\varepsilon^{1/2})\right)}{\dfrac{K_2}{\varepsilon^{1/2}} + O(\varepsilon^{1/2})}\\
&= \frac{\dfrac{K_1}{\varepsilon^{1/2}} + \omega\left(\displaystyle\int_0^1 (\varphi'(r))^2\,dr - \lambda\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr\right) + O(\varepsilon^{1/2})}{\dfrac{K_2}{\varepsilon^{1/2}} + O(\varepsilon^{1/2})}\\
&= \frac{\dfrac{K_1}{K_2} + \dfrac{\varepsilon^{1/2}}{K_2}\omega\left(\displaystyle\int_0^1 (\varphi'(r))^2\,dr - \lambda\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr\right) + O(\varepsilon)}{1+O(\varepsilon)}\\
&= \frac{S}{1+O(\varepsilon)} + \frac{\dfrac{\varepsilon^{1/2}}{K_2}\omega\left(\displaystyle\int_0^1 (\varphi'(r))^2\,dr - \lambda\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr\right)}{1+O(\varepsilon)} + \frac{O(\varepsilon)}{1+O(\varepsilon)}\\
&= S + \frac{\varepsilon^{1/2}}{K_2}\omega\left(\int_0^1 (\varphi'(r))^2\,dr - \lambda\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr\right) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tomando $\varphi(r) = \cos(\pi r/2)$ tem-se

$$\int_0^1 (\varphi'(r))^2\,dr - \lambda\int_0^1 \varphi^2(r)\,dr = \frac{1}{2}(\pi^2/4 - \lambda).$$

Segue que

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + \frac{\varepsilon^{1/2}}{K_2}\omega\left(\pi^2/4-\lambda\right)\frac{1}{2} + O(\varepsilon) \le S + \frac{\varepsilon^{1/2}}{K_2}\omega\left(\pi^2/4-\lambda\right)\frac{1}{2} + c\varepsilon.$$

Dado que $\lambda_1 = \pi^2$ e $\lambda > \dfrac{1}{4}\lambda_1$, daí, que para ε suficientemente pequeno, $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ e como $S_\lambda \le Q_\lambda(u_\varepsilon)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Assim $S_\lambda < S$. ∎

Lema 1.9. *Não existe solução de (1.34) para $\lambda \le \frac{1}{4}\lambda_1$.*

Demonstração. Suponhamos que u é solução de (1.34); pelo Teorema A.1, sabemos que u deve ser radialmente simétrica. Escrevemos $u(x) = u(r)$, em que $r = |x|$ e como foi feito no Apêndice C, u satisfaz

$$-u'' - \frac{2}{r}u' = u^5 + \lambda u \text{ em } (0,1), \tag{1.51}$$

$$u'(0) = u(1) = 0. \tag{1.52}$$

Multiplicando (1.51) por $r^2\psi(r)u'(r)$, onde ψ é uma função suave tal que $\psi(0) = 0$, e integrando temos

$$-\int_0^1 r^2\psi u'' u'\, dr - 2\int_0^1 r\psi (u')^2\, dr = \int_0^1 r^2\psi u^5 u'\, dr + \lambda \int_0^1 r^2 \psi u u'\, dr; \tag{1.53}$$

usando integração por partes, as condições sobre ψ e (1.52) temos

$$\int_0^1 r^2\psi u'' u'\, dr = \frac{1}{2}u'(1)\psi(1) - \int_0^1 \frac{(u')^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')\, dr,$$

$$\int_0^1 r^2\psi u^5 u'\, dr = r^2\psi \frac{u^6}{6}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{u^6}{6}(2r\psi + r^2\psi')\, dr = -\int_0^1 \frac{u^6}{6}(2r\psi + r^2\psi')\, dr,$$

$$\int_0^1 r^2\psi u u'\, dr = r^2\psi \frac{u^2}{2}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')\, dr = -\int_0^1 \frac{u^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')\, dr.$$

Assim, o lado esquerdo e o lado direito de (1.53) são, respectivamente

$$\begin{aligned} -\int_0^1 r^2\psi u'' u'\, dr - 2\int_0^1 r\psi (u')^2\, dr &= \\ \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\, dr &- \frac{1}{2}u'(1)\psi(1), \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^2\psi u^5 u'\, dr + \lambda \int_0^1 r^2\psi u u'\, dr = -\int_0^1 \frac{u^6}{6}(2r\psi + r^2\psi')\, dr \\ - \lambda \int_0^1 \frac{u^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')\, dr. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Substituindo (1.54) e (1.55) em (1.53) temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\, dr - \frac{1}{2}u'(1)\psi(1) = -\int_0^1 \frac{u^6}{6}(2r\psi + r^2\psi')\, dr \\ - \lambda \int_0^1 \frac{u^2}{2}(2r\psi + r^2\psi')\, dr. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Ora, ao multiplicar (1.51) por $\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)u$ e integrando, obtemos

$$-\int_0^1 u''u\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) - \int_0^1 2u'u\left(\frac{1}{2}r\psi' - \psi\right) = \int_0^1 u^6\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr$$
$$+\lambda\int_0^1 u^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr. \quad (1.57)$$

Como feito anteriormente, integrando por partes e usando as condições sobre ψ e (1.52) temos

$$\int_0^1 u''u\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr = u'\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)u\Big|_0^1 - \int_0^1 (u')^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr$$
$$-\int_0^1 u'u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'' - \psi\right) dr,$$

daí

$$\int_0^1 u''u\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr = -\int_0^1 (u')^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr - \int_0^1 u'u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'' - \psi\right) dr.$$

Como

$$\int_0^1 u'u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'' - \psi\right) dr = -\int_0^1 \frac{u^2}{2}\left(r\psi'' + \frac{1}{2}r^2\psi''' - \psi'\right) dr,$$

segue que

$$\int_0^1 u''u\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr = \int_0^1 \frac{u^2}{2}\left(r\psi'' + \frac{1}{2}r^2\psi''' - \psi'\right) dr$$
$$-\int_0^1 (u')^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr. \quad (1.58)$$

Também

$$\begin{aligned}\int_0^1 2u'u\left(\frac{1}{2}r\psi' - \psi\right) dr &= u^2\left(\frac{1}{2}r\psi' - \psi\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 u^2\left(\frac{1}{2}r\psi'' - \frac{1}{2}\psi'\right) dr \\ &= -\int_0^1 u^2\left(\frac{1}{2}r\psi'' - \frac{1}{2}\psi'\right) dr. \quad (1.59)\end{aligned}$$

Substituindo (1.58) e (1.59) em (1.57) e simplificando, temos

$$\int_0^1 (u')^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr - \int_0^1 \frac{u^2r^2\psi'''}{4} dr = -\int_0^1 u^6\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr$$
$$+\lambda\int_0^1 u^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) dr. \quad (1.60)$$

Restando (1.60) de (1.56), simplificando e agrupando os termos com o fator u^2r^2, obtemos

$$\int_0^1 u^2 \left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right) r^2\, dr = \frac{2}{3}\int_0^1 u^6 (r\psi - r^2\psi')\, dr + \frac{u'(1)\psi(1)}{2}. \qquad (1.61)$$

Sabemos da Proposição 1.2 que para $\lambda \leq 0$ não existe solução de (1.34). Assim, assumindo que $0 < \lambda \leq \dfrac{1}{4}\pi^2$ e escolhendo $\psi(r) = \operatorname{sen}((4\lambda)^{1/2} r)$ de modo que $\psi(1) \geq 0$, temos

$$\lambda\psi'(r) + \frac{1}{4}\psi'''(r) \;=\; 2\lambda^{3/2}\cos((4\lambda)^{1/2}r) - 2\lambda^{3/2}\cos((4\lambda)^{1/2}r) = 0$$

e

$$r\psi - r^2\psi' \;=\; r\operatorname{sen}((4\lambda)^{1/2}r) - r^2(4\lambda)^{1/2}\cos((4\lambda)^{1/2}r) > 0 \text{ em } (0,1],$$

pois $f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta) - \theta\cos(\theta)$ é crescente em $(0,\pi)$ o que contradiz (1.61). ■

Nosso resultado principal, análogo ao Teorema 1.7 cuja demonstração é semelhante, é o seguinte

Teorema 1.10. *Assuma Ω é uma bola. Então existe solução de (1.34) se e somente se $\lambda \in \left(\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right)$.*

Demonstração. Seja $\dfrac{1}{4}\lambda_1 < \lambda < \lambda_1$, do Lema 1.8 sabemos que $S_\lambda < S$ e do Lema 1.6 o ínfimo em (1.35) é atingido. Análogo ao Teorema 1.7, seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que o ínfimo é atingido, pelo mesmo argumento, podemos assumir $u \geq 0$ em Ω. Definindo

$$\begin{aligned}
J : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
u &\rightarrow J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\lambda\int_\Omega u^2, \\
F : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
u &\rightarrow F(u) = \int_\Omega |u|^6 - 1,
\end{aligned}$$

e no conjunto $M = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : F(u) = 0\right\}$. Temos

1. $F'(u) \neq 0, \ \forall u \in M$,
2. pelo Lema (1.6) existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \min\limits_{u\in M} J(u)$.

Logo, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.28), existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \beta F'(u_0).$$

Isto é

$$J'(u_0)v = \beta F'(u_0)v, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

ou

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v - \lambda\int_\Omega u_0 v = \beta\, 6\int_\Omega u_0^5 v, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, quando $v = u_0$

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \lambda \int_\Omega u_0^2 = \beta\, 6 \int_\Omega u^6 \Rightarrow 6\beta = S_\lambda$$

e $S_\lambda > 0$ dado que $0 < \lambda < \lambda_1$. De modo que u_0 é solução de

$$-\Delta u - \lambda u = S_\lambda u^5. \tag{1.62}$$

Segue, usando o mesmo argumento dado na demostração do Teorema 1.7, que ku_0 é solução de (1.34), em que $k > 0$ é escolhido de tal forma que $6\beta k^{-4} = 1$.

Pela Proposição 1.1 e o Lema 1.9 se $\lambda \notin \left(\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right)$ então (1.34) não tem solução. ■

Capítulo 2

Problema crítico em domínio ilimitado

Neste capítulo usamos o método variacional para o estudo do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda f(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \geq 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx < \infty, \end{cases} \tag{PG_λ}$$

em que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, $N \geq 3$, $\lambda > 0$ é um parâmetro real e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(f1) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f(x,0) \equiv 0$.

(f2) Dado $R > 0$ existe $\theta_R \in [2, 2^*)$ e constantes positivas $a_R, b_R > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq a_R s^{\theta_R - 1} + b_R, \ \forall\, |x| \leq R, \ \forall s \geq 0.$$

(f3) Existem $r_1, r_2, q \in (1, 2^*)$, com $r_1 \leq q \leq r_2$, um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$, $c_i \in L^{2^*/(2^*-r_i)}(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$, e uma constante positiva a tais que

$$f(x,s) \leq c_1(x) s^{r_1 - 1} + c_2(x) s^{r_2 - 1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, s \geq 0,$$

$$F(x,s) \geq a s^q, \ \forall x \in \Omega_0, \ s \geq 0,$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)\, dt$.

(f4) Existem $\mu, \hat{\mu} \in (1, 2^*)$, $2 < \tau < 2^*$, $1 < \hat{\tau} < 2^*$, $c_3 \in L^{2^*/(2^*-\mu)(\mathbb{R}^N)}$, e $c_4 \in L^{2^*/(2^*-\hat{\mu})(\mathbb{R}^N)}$ tais que

$$\frac{1}{\tau} f(x,s)s - F(x,s) \geq -c_3(x) s^{\mu}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, s \geq 0,$$

$$\frac{1}{\hat{\tau}} f(x,s)s - F(x,s) \leq c_4(x) s^{\hat{\mu}}, \ \forall x \in \Omega_0, \ s \geq 0.$$

Observando que $u \equiv 0$ é uma solução de (PG_λ), vamos aplicar metodos minimax para estudar a existência de solução não trivial de (PG_λ).

Considerando $q \in \mathbb{R}$ dado pela condição (f3), no primeiro resultado de existência, vamos supor a seguinte condição técnica:

$$q \in (1, 2^*) \text{ satisfaz } \hat{p} = 2^* - 2 < q. \tag{2.1}$$

Note que $\hat{p} < 2,\ \hat{p} = 2$ e $\hat{p} > 2$ quando $N > 4,\ N = 4$, e $N = 3$, respectivamente.

No estudo usaremos os seguintes espaços de funções

Definição 2.1. *Motivado pela imersão de Sobolev, temos*

1. *O espaço* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \forall i = 1, \ldots, N\ \partial_i u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ *com a norma* $\|u\|_{D^{1,2}} := \|u\|_{2^*} + \|\nabla u\|_2$.
2. *O espaço* $D^{1,2} \equiv D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *é o fecho de* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *com relação à norma* $\|\cdot\|_{D^{1,2}}$.

Definição 2.2. *Seja* $N \geq 3$. *A ótima constante na desigualdadade de Sobolev é dada por*

$$S = \inf_{u \in D^{1,2} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\right)^{2/2^*}} \right\}. \tag{2.2}$$

Da desigualdade de Sobolev, $\|u\|_{2^*} \leq S^{-1} \|\nabla u\|_2$ em $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, extendida a $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ por densidade, temos $\|\nabla u\|_2$ uma norma em $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, equivalente à norma $\|\cdot\|_{D^{1,2}}$. Assim, $D^{1,2}$ é o fecho de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, com respeito à norma dada por

$$\|\phi\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

De acordo com o Teorema B.2, o ínfimo em (2.2) é atingido pelas funções

$$w_\varepsilon(x) = \frac{\{N(N-2)\varepsilon\}^{(N-2)/4}}{(\varepsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}},\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \varepsilon > 0, \tag{2.3}$$

que satisfazem

$$\|w_\varepsilon\|^2 = \|w_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = S^{N/2},\ \forall \varepsilon > 0.$$

Definição 2.3. *Diremos que uma função* $u \in D^{1,2}$, *tal que* $u \geq 0$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$, *é solução fraca do problema* (PG_λ) *quando*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \phi\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-1} \phi\, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)\phi\, dx = 0,$$

para cada $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

Para obter uma solução do problema (PG_λ), também assumimos que

$$f(x, s) = f(x, 0), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } s < 0. \tag{2.4}$$

Para modificar a não linearidade, escolhemos $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi \equiv 1$ na bola $B(0,1)$, e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\phi_n(x) = \phi(x/n)$. Definimos

$$f_n(x,s) = \phi_n(x) f(x,s), \tag{2.5}$$

e consideramos a sequência de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda f_n(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \ u \in D^{1,2}. \end{cases} \tag{PG$_n$}$$

Considerando $D^{1,2}$ dotado com a norma $\|u\| = \|\nabla u\|_2$, o funcional associado com o problema (PG$_n$) é dado por

$$I_{\lambda,n}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F_n(x,u) \, dx, \tag{2.6}$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $F_n(x,s) = \int_0^s f_n(x,t) \, dt$. Pela hipótese (f2) e a construção, o funcional $I_{\lambda,n}$ está bem definido e pertence a $C^1(D^{1,2}, \mathbb{R})$, ver [14]. Além disso,

$$I'_{\lambda,n}(u)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*-1}\phi \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x,u)\phi \, dx, \tag{2.7}$$

para cada u e $\phi \in D^{1,2}$.

Agora por causa da completude, damos um resultado básico de compacidade

Proposição 2.4. *Seja Ω um domínio, não necessariamente limitado, de $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, $1 \leq q < 2^*$, e $a \in L^{2^*/(2^*-q)}(\Omega)$. Então o funcional*

$$\begin{aligned} T \ &: \ D^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ &u \to T(u) = \int_\Omega a \, |u|^q \, dx \end{aligned}$$

está bem definido e é fracamente contínuo.

Demonstração. Como $u \in D^{1,2}(\Omega)$, então $\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx < \infty$ e $|u|^q \in L^{2^*/q}(\Omega)$. Logo, da desigualdade de Hölder

$$|T(u)| = \left| \int_\Omega a \, |u|^q \, dx \right| \leq \int_\Omega |a| \, |u|^q \, dx \leq$$

$$\left(\int_\Omega |a|^{2^*/(2^*-q)} \, dx \right)^{\frac{2^*-q}{2^*}} \left(\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{q}{2^*}} < \infty.$$

Seja $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\Omega)$. Provaremos que $|u_n|^q \rightharpoonup |u|^q$ em $L^{2^*/q}(\Omega)$. De fato, dado que $\| |u_n|^q \|_{2^*/q} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{q}{2^*}} = \|u_n\|_{2^*}^q < \infty$, da convergência fraca em $D^{1,2}(\Omega)$. Logo, a menos de subsequência, pela reflexivadade de $L^{2^*/q}(\Omega)$, temos

$$|u_n|^q \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^{2^*/q}(\Omega). \tag{2.8}$$

A prova estará completa se mostramos que $v = |u|^q$, porque desse modo o limite não depende da subsequência.
Escolha uma sequência $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos relativamente compactos de Ω, com fronteira regular tal que $\Omega = \bigcup_{j\geq 1} K_j$. Pela imersão compacta $D^{1,2}(K_n) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(K_j)$, a convergência fraca, $u_n \rightharpoonup u$, em $D^{1,2}(K_j)$, implica que

$$u_n \to u \text{ em } L^q(K_j)$$

e como $L^q(K_j) \subseteq L^1(K_j)$, segue que

$$|u_n|^q \to |u|^q \ \text{ em } L^1(K_j).$$

Como também $L^{2^*/q}(K_j) \subseteq L^1(K_j)$, a convergência fraca em (2.8) implica que

$$|u_n|^q \rightharpoonup v \text{ em } L^1(K_j).$$

Assim, $v = |u|^q$ q.t.p em cada K_j.
Agora, defina para cada $j \in \mathbb{N}$, $A_j = \{x \in K_j; v \neq |u|^q\}$, temos $\text{med}(A_j) = 0$. Seja $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, também $\text{med}(A) = 0$. Definindo $B = \{x \in \Omega; v \neq |u|^q\}$, temos que $B = A$. De fato,

- $x \in B \Rightarrow x \in \Omega \Rightarrow x \in K_{j_0}$, para algum j_0 e $v \neq |u|^q \Rightarrow x \in A_{j_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \Rightarrow x \in A$, logo $B \subseteq A$.

- $x \in A \Rightarrow x \in A_{j_0}$, para algum $j_0 \Rightarrow x \in K_{J_0}$ e $v \neq |u|^q \Rightarrow \Rightarrow x \in \Omega$ e $v \neq |u|^q \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$.

Como $\Omega = \bigcup_{j\geq 1} K_j$ e $v = |u|^q$ q.t.p em cada K_j, então $v = |u|^q$ q.t.p. em Ω. ∎

Definição 2.5. *Seja E um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$. Diremos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale $(PS)_c$, com $c \in \mathbb{R}$, associada com o funcional φ quando*

$$\varphi(u_n) \to c, \ \text{ e } \varphi'(u_n) \to 0, \ \text{ quando } n \to \infty.$$

O seguinte teorema é uma versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [2]. Pode-se ver também em [14].

Teorema 2.6. *Seja E um espaço de Banach real e supor $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, com $\Phi(0) = 0$, satisfaz*

($\Phi 1$) *Existem constantes positivas β, ρ tais que $\Phi(u) \geq \beta$, $\|u\| = \rho$.*

($\Phi 2$) *Existe $e \in E$, $\|e\| > \rho$, tal que $\Phi(e) \leq 0$.*

Então, para a constante

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{u\in\gamma} \Phi(u) \geq \beta,$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}$, *existe uma sequência* $(PS)_c$, (u_j), *em* E *associada com* Φ.

2.1 Resultados técnicos

Nesta seção estudamos a existência de solução fraca no sentido das distribuições para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}, \end{cases} \tag{P}$$

onde $g(x,u) \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz

(g1) Dado $R > 0$ existem constantes positivas a_R, b_R tal que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| \leq R$, e $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(x,s)| \leq a_R\, |s|^{2^*-1} + b_R.$$

O funcional I, associado ao problema (P) em $D^{1,2}$ é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\, dx, \tag{2.9}$$

onde $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\, dt$. É claro que, sob a condição (g1), I pode assumir os valores $\pm\infty$. No entanto, se assumimos a seguinte condição mais forte que (g1),

(g2) existe $a > 0$, $b \in C_0(\mathbb{R}^N)$, o espaço das funções contínuas com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$, tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(x,s)| \leq a\, |s|^{2^*-1} + b(x),$$

teremos $I \in C^1(D^{1,2}, \mathbb{R})$, e pontos críticos de I são soluções fracas da equação quaselinear associada em $\mathbb{R}^N$. Para estabelecer a existência de uma solução para a equação associada quando (g2) não é satisfeito, vamos supor a existência de uma sequência de funções $(g_n) \subset C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo (g2) e convergindo a g. Mais especificamente, assumimos

(g3) Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo (g2) e

$$g(x,s) = g_n(x,s),\ \forall\, |x| \leq n,\ s \in \mathbb{R}^N.$$

Para a sequência de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = g_n(x,u) & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}. \end{cases} \tag{P_n}$$

o funcional I_n associado em $D^{1,2}$ é definido por

$$I_n(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_n(x,u)\, dx, \tag{2.10}$$

onde $G_n(x,s) = \int_0^s g_n(x,t)\, dt$.

No que segue, vamos assumir que $(u_n) \subset D^{1,2}$, é uma sequência limitada e tal que $I_n'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Pela imersão de Sobolev e o Princípio da Concentração-Compacidade, Teorema A.32, podemos assumir que existe $u \in D^{1,2}$, $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^N)$, o espaço das medidas de Radon limitadas em $\mathbb{R}^N$, e sequências $(x_i) \in \mathbb{R}^N$, $\nu_i > 0$ e medidas de Dirac δ_{x_i} tal que

$$\begin{aligned}
&u_n \rightharpoonup u \text{ em } D^{1,2},\\
&u_n \to u \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N),\ 1 \le s < 2^*,\\
&u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,\\
&|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^*} + \textstyle\sum_i \nu_i \delta_{x_i} \text{ fraco * em } \mathscr{M}(\mathbb{R}^N),\\
&|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu \text{ fraco * em } \mathscr{M}(\mathbb{R}^N),\\
&\textstyle\sum_i \nu_i^{2/2^*} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Lema 2.7. *Existe no máximo uma quantidade finita de pontos x_i em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Será suficiente provar que existem no máximo uma quantidade finita de pontos x_i em $B(0,r)$ para cada $r > 0$. De (2.2) e do Lema I.1 em [12], obtemos

$$\mu(\{x_i\}) \ge S\nu_i^{2/2^*}. \tag{2.12}$$

Agora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos $\psi_\varepsilon(x) = \psi((x - x_i)/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^N$, onde $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \psi(x) \le 1$, $\psi(x) \equiv 1$ em $B(0,1)$, e $\psi(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2)$. Dado que $I_n'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, e $(\psi_\varepsilon u_n)$ é uma sequência limitada, também $I_n'(u_n)(\psi_\varepsilon u_n) \to 0$, equivalentemente

$$\begin{aligned}
I_n'(u_n)(\psi_\varepsilon u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla(\psi_\varepsilon u_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x,u_n)\psi_\varepsilon u_n \, dx = o(1)\\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla(\psi_\varepsilon u_n)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x,u_n)\psi_\varepsilon u_n \, dx + o(1).
\end{aligned}$$

Pela condição (g1), com $R > 2r$, e (g3), para n suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla(\psi_\varepsilon u_n)\, dx \le a_R \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \psi_\varepsilon \, dx + b_R \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|\, \psi_\varepsilon \, dx + o(1).$$

Agora de (2.11), tomando $n \to \infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla(\psi_\varepsilon u_n)\, dx \leq a_R \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon\, d\nu + b_R \int_{\mathbb{R}^N} |u|\, \psi_\varepsilon\, dx.$$

Novamente o Lema I.1 em [12] e fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\mu(\{x_i\}) \leq a_R \nu(\{x_i\}).$$

Assim, de (2.12) temos

$$a_R \nu(\{x_i\}) = a_R \nu_i \geq \mu(\{x_i\}) \geq S\nu_i^{2/2^*} = S\nu_i^{(N-2)/N} \Rightarrow \nu_i \geq \frac{S^{N/2}}{a_R^{N/2}}.$$

Logo,

$$\sum_i \nu_i^{2/2^*} \geq \sum_i \left(\frac{S^{N/2}}{a_R^{N/2}}\right)^{2/2^*} = \left(\frac{S^{N/2}}{a_R^{N/2}}\right)^{2/2^*} \sum_i 1$$

De (2.11) temos $\displaystyle\sum_i 1 < \infty$, isto é, $i \in A$ onde A é un subconjunto de índices finito. ■

Lema 2.8. *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $M = M(K) > 0$ tal que*

$$\int_K |g_n(x, u_n(x))|^{2^*/(2^*-1)}\, dx \leq M, \quad \forall n \geq n_0.$$

Demonstração. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B(0, n_0)$. De (g3), existe $g_n(x, u_n(x)) = g(x, u_n(x))$, para cada $x \in K$, e $n \geq n_0$. Agora pela condição (g1) com $R = n_0$, $|g_n(x, u_n)| \leq a_R |u_n|^{2^*-1} + b_R$, por conseguinte

$$\int_K |g_n(x, u_n(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx \leq \int_K \left(a_{n_0} |u_n|^{2^*-1} + b_{n_0}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx.$$

Da desigualdade de Minkowski

$$\left[\int_K \left(a_{n_0} |u_n|^{2^*-1} + b_{n_0}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx\right]^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leq a_{n_0} \left[\int_K |u_n(x)|^{2^*}\, dx\right]^{\frac{2^*-1}{2^*}} + b_{n_0} \left[\int_K 1\, dx\right]^{\frac{2^*-1}{2^*}}$$

logo

$$\left[\int_K |g_n(x, u_n(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx\right]^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leq a_{n_0} \left[\int_K |u_n(x)|^{2^*}\, dx\right]^{\frac{2^*-1}{2^*}} + b_{n_0} \left[\int_K 1\, dx\right]^{\frac{2^*-1}{2^*}},$$

do qual segue que

$$\int_K |g_n(x, u_n(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx \quad \leq \quad \left(2a_{n_0} \|u_n\|_{2^*}^{2^*-1} + 2b_{n_0} |K|^{\frac{2^*-1}{2^*}}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \qquad (2.13)$$

Definindo $\varphi(t) = t^{\frac{2^*}{2^*-1}}$ em $[0, \infty)$, temos φ convexa, e pela desigualdade de Jensen, considerando $t_1 = 2a_{n_0}\|u_n\|_{2^*}^{2^*-1}$ e $t_2 = 2b_{n_0}|K|^{\frac{2^*-1}{2^*}}$, temos

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(t_1+t_2)\right) = \varphi\left(\frac{\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right) \le \frac{\frac{1}{2}\varphi(t_1)+\frac{1}{2}\varphi(t_2)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \le \varphi(t_1)+\varphi(t_2)$$

do que segue

$$\begin{aligned}
\left(2a_{n_0}\|u_n\|_{2^*}^{2^*-1} + 2b_{n_0}|K|^{\frac{2^*-1}{2^*}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} &= \varphi\left(\frac{1}{2}\left[2a_{n_0}\|u_n\|_{2^*}^{2^*-1} + 2b_{n_0}|K|^{\frac{2^*-1}{2^*}}\right]\right) \\
&= \varphi\left(a_{n_0}\|u_n\|_{2^*}^{2^*-1} + b_{n_0}|K|^{\frac{2^*-1}{2^*}}\right) \\
&\le \varphi\left(2a_{n_0}\|u_n\|_{2^*}^{2^*-1}\right) + \varphi\left(2b_{n_0}|K|^{\frac{2^*-1}{2^*}}\right) \\
&= (2a_{n_0})^{\frac{2^*}{2^*-1}}\|u_n\|_{2^*}^{2^*} + (2b_{n_0})^{\frac{2^*}{2^*-1}}|K|.
\end{aligned}$$

Ora, de (2.13) temos

$$\int_K |g_n(x,u_n(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx \le (2a_{n_0})^{\frac{2^*}{2^*-1}}\|u_n\|_{2^*}^{2^*} + (2b_{n_0})^{\frac{2^*}{2^*-1}}|K|,\ \forall n \ge n_0.$$

Assim, da imersão contínua $D^{1,2}(K) \hookrightarrow L^{2^*}(K)$, por ser a sequência (u_n) limitada em $D^{1,2}$, também (u_n) é limitada em $L^{2^*}(K)$, e dado que a medida de K é finita, tomando $M = (2a_{n_0})^{\frac{2^*}{2^*-1}}\|u_n\|_{2^*}^{2^*} + (2b_{n_0})^{\frac{2^*}{2^*-1}}|K|$, temos $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_K |g_n(x,u_n(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx \le M,\ \forall n \ge n_0.$$

■

Lema 2.9. *Seja $K \subset (\mathbb{R}^N \setminus (x_i))$ um conjunto compacto. Então $u_n \to u$ em $L^{2^*}(K)$, quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $K \subset B(0,r)$. Pelo Lema 2.7, existe no máximo uma quantidade finita de pontos x_i em $B(0,r)$. Dado que K é compacto e $K \cap \{x_i\} = \emptyset$, $\delta = d(K,\{x_i\})$, a distância entre K e $\{x_i\}$, com $x_i \in B(0,r)$ é positiva. Seja $0 < \varepsilon < \delta$ e defina $A_\varepsilon = \{x \in B(0,r) | d(x,K) < \varepsilon\}$. Escolhendo $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ em $A_{\varepsilon/2}$, e $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus A_\varepsilon$, temos

$$\int_K |u_n|^{2^*}\,dx \le \int_{A_\varepsilon} \psi |u_n|^{2^*}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi |u_n|^{2^*}\,dx. \tag{2.14}$$

Dado que $\mathrm{supp}(\psi) \subset A_\varepsilon$ e $A_\varepsilon \cap \{x_i\} = \emptyset$, com $x_i \in B(0,r)$, de (2.14) e(2.11), temos

$$\lim_{n\to\infty}\sup \int_K |u_n|^{2^*}\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \psi\,d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} \psi |u|^{2^*}\,dx = \int_{A_\varepsilon} \psi |u|^{2^*}\,dx \le \int_{A_\varepsilon} |u|^{2^*}\,dx.$$

Agora, fazendo $\varepsilon \to 0$ e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de

Lebesgue (Teorema A.41), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_K |u_n|^{2^*} dx \leq \int_K |u|^{2^*} dx, \text{ isto é, } \lim_{n\to\infty} \sup \|u_n\|_{L^{2^*}(K)} \leq \|u\|_{L^{2^*}(K)} . \tag{2.15}$$

Por outro lado, da imersão contínua $D^{1,2}(K) \hookrightarrow L^{2^*}(K)$, temos $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(K)$, donde segue que

$$\|u\|_{L^{2^*}(K)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_{L^{2^*}(K)} \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16), $\|u_n\|_{L^{2^*}(K)} \to \|u\|_{L^{2^*}(K)}$. Assim, do Teorema A.51 e da Proposição A.52 temos

$$u_n \to u \text{ em } L^{2^*}(K).$$

■

Lema 2.10. *Seja $K \subset (\mathbb{R}^N \setminus (x_i))$ um conjunto compacto. Então $\nabla u_n \to \nabla u$ em $(L^2(K))^N$, quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{x_i\})$ tal que $\psi \equiv 1$ em K e $0 \leq \psi \leq 1$. Como

$$0 \leq (\nabla u_n - \nabla u) \cdot \nabla(u_n - u) = |\nabla u_n|^2 - \nabla u_n \cdot \nabla u - \nabla u \cdot \nabla(u_n - u)$$

e

$$0 \leq \int_K (\nabla u_n - \nabla u) \cdot \nabla(u_n - u)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n - \nabla u) \cdot \nabla(u_n - u)\psi\, dx$$

consequentemente

$$\int_K (\nabla u_n - \nabla u) \cdot \nabla(u_n - u) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^2 \psi - (\nabla u_n \cdot \nabla u)\psi - \{\nabla u \cdot \nabla(u_n - u)\}\psi\right] dx. \tag{2.17}$$

Por outro lado, dado que $I_n'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, também temos $I_n'(u_n)(u\psi) \to 0$. Daí,

$$I_n'(u_n)(u\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla u_n \cdot \nabla(u\psi) - g_n(x, u_n)u\psi\right] dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[(\nabla u_n \cdot \nabla u)\psi + (\nabla u_n \cdot \nabla\psi)u - g_n(x, u_n)u\psi\right] dx = o(1), \tag{2.18}$$

quando $n \to \infty$. Além disso, dado que $(u_n\psi)$ é uma sequência limitada em $D^{1,2}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^2 \psi + (\nabla u_n \cdot \nabla\psi)u_n - g_n(x, u_n)u_n\psi\right] dx = o(1), \tag{2.19}$$

quando $n \to \infty$. De (2.18) e (2.19) obtemos, respectivamente

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \cdot \nabla u)\psi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \cdot \nabla \psi) u\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x, u_n) u\psi\, dx + o(1), \quad (2.20)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \psi = -\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \cdot \nabla \psi) u_n\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x, u_n) u_n \psi\, dx + o(1). \quad (2.21)$$

Substituindo (2.20) e (2.21) em (2.17) temos

$$\int_K (\nabla u_n - \nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \psi g_n(x, u_n)(u_n - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla \psi \cdot (u - u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla(u - u_n) \cdot \psi\, dx + o(1).$$

Agora, aplicando o Lema 2.8, para o compacto $K = \operatorname{supp}(\psi)$, e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_K g_n(x, u_n)(u_n - u)\, dx &\leq \int_K |g_n(x, u_n)(u_n - u)|\, dx \\
&\leq \left(\int_k |g_n(x, u_n)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|u_n - u\|_{L^{2^*}(K)} \\
&\leq (M)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|u_n - u\|_{L^{2^*}(K)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_K |\nabla u_n \cdot \nabla \psi (u - u_n)|\, dx &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \int_k |\nabla u|\, |u - u_n|\, dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \|u\|\, \|u - u_n\|_{L^2(K)},
\end{aligned}$$

por conseguinte

$$0 \leq \int_K |\nabla u_n - \nabla u|^2\, dx \leq M^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|u_n - u\|_{L^{2^*}(K)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \|u\|\, \|u - u_n\|_{L^2(K)} + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot (\nabla u - \nabla u_n) \cdot \psi\, dx + o(1), \quad (2.22)$$

quando $n \to \infty$. Agora, do Lema 2.9, para o conjunto compacto $K = \operatorname{supp}(\psi) \subset (\mathbb{R}^N \setminus \{x_i\})$, $\|u_n - u\|_{L^{2^*}(K)} \to 0$, consequentemente $\|u - u_n\|_{L^2(K)} \to 0$, pois $2 < 2^*$. Definindo

$$\begin{aligned}
f : D^{1,2} &\to \mathbb{R} \\
v &\mapsto f(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi \nabla u \nabla v\, dx,
\end{aligned}$$

da convergência $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}$, segue que $f(u - u_n) \to 0$. Assim, de (2.22) temos

$$\int_K |\nabla u_n - \nabla u|^2\, dx \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

■

Do Lema 2.10, e com argumentos semelhantes do final da prova da Proposição 2.4 com $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{B(n,0)}$ e $K_n = \overline{B(n,0)} \setminus \{x_i\}$, temos o

Corolário 2.11. *A sequência $(u_n) \subset D^{1,2}$ possui uma subsequência (u_{n_j}) satisfazendo $\nabla u_{n_j}(x) \to \nabla u(x)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$*

Seja I_n a sequência de funcionais em (2.10). Podemos agora apresentar o resultado principal desta seção.

Proposição 2.12. *Suponha que $g(x,s) \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz (g1) e (g3). Então, qualquer sequência limitada $(u_n) \subset D^{1,2}$ tal que $I_n'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, possui uma subsequência convergindo fraco para uma solução de (P).*

Demonstração. Dado $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, tome $n_0 > 0$ tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset B(0, n_0)$. De (g3), temos

$$g_n(x,s) = g(x,s), \quad \forall x \in \operatorname{supp}(\phi), \text{ e } \; n \geq n_0 \tag{2.23}$$

A condição (g1), com $R > n_0$, e (2.23), fornecem

$$|g_n(x,s)\phi(x)| \leq (a_R s^{2^*-1} + b_R)\, |\phi(x)|\,, \quad \forall x \in \operatorname{supp}(\phi), \; s \in \mathbb{R}, \quad n \geq n_0. \tag{2.24}$$

Utilizando (2.11), (2.24) e o fato que $(u_n) \subset D^{1,2}$ é uma sequência limitada, segue que $(g_n(x,u_n)\phi)$ e $(\nabla u_n \nabla \phi)$ são famílias uniformemente integráveis em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, pelo Teorema de Vitali (Teorema A.45) e o Corolario 2.11, obtemos

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x, u_n(x))\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u(x))\phi(x)\, dx \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N), \\ &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \phi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi\, dx, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N), \end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim, como $I_n'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$ de (2.25), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u(x))\phi(x)\, dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N),$$

e u é solução fraca de (P). ■

2.2 Geometria do passo da montanha

Nos seguintes lemas prova-se que a família de funcionais $I_{\lambda,n}$, em (2.6) satisfazem as condições ($\Phi1$) e ($\Phi2$) do Teorema 2.6 numa maneira uniforme.

Lema 2.13. *Suponha que f satisfaz (f2) e (f3). Então,*

1. *Se $1 < r_1 \leq 2$, existe $\lambda^* > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, $I_{\lambda,n}$ satisfaz $(\Phi 1)$, com β e ρ independentes de n.*

2. *Se $2 < r_1 < 2^*$, então para cada $\lambda > 0$, $I_{\lambda,n}$ satisfaz $(\Phi 1)$, com β e ρ independentes de n.*

Demonstração. Sejam $u \in D^{1,2}$, $u \neq 0$. Da definição de f_n e (f3), segue

$$F_n(x,s) = \int_0^s f_n(x,t)dt \leq \frac{1}{r_1} c_1(x) s^{r_1} + \frac{1}{r_2} c_2(x) s^{r_2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ s \geq 0. \tag{2.26}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\dfrac{2^*}{2^* - r_i}$ e $\dfrac{2^*}{r_i}$ para $i = 1, 2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} c_i(x)(u^+)^{r_i}\, dx \leq \|c_i\|_{\frac{2^*}{2^*-r_i}} \left\|u^+\right\|_{2^*}^{r_i}. \tag{2.27}$$

Agora, da definição de $I_{\lambda,n}$, (2.26) e (2.27), temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,n}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F_n(x,u)\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*} - \lambda \left(\frac{1}{r_1}\|c_1\|_{\frac{2^*}{2^*-r_1}} \left\|u^+\right\|_{2^*}^{r_1} + \frac{1}{r_2}\|c_2\|_{\frac{2^*}{2^*-r_2}} \left\|u^+\right\|_{2^*}^{r_2} \right), \end{aligned}$$

de (2.2), $\dfrac{\|u\|^{2^*}}{S^{2^*/2}} \geq \|u\|_{2^*}^{2^*}$, logo

$$I_{\lambda,n}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|u\|^{2^*}}{2^* S^{2^*/2}} - \lambda \left(\frac{\|u\|^{r_1}}{r_1 S^{r_1/2}} \|c_1\|_{\frac{2^*}{2^*-r_1}} + \frac{\|u\|^{r_2}}{r_2 S^{r_2/2}} \|c_2\|_{\frac{2^*}{2^*-r_2}} \right)$$

Caso 1: $1 < r_1 \leq 2$.

$$I_{\lambda,n}(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\|u\|^{2^*-2}}{2^* S^{2^*/2}} \right) - \lambda \left(\frac{\|c_1\|_{2^*/(2^*-r_1)}}{r_1 S^{r_1/2}} \|u\|^{r_1} + \frac{\|c_2\|_{2^*/(2^*-r_2)}}{r_2 S^{r_2/2}} \|u\|^{r_2} \right).$$

Fazendo $Q(t) = \dfrac{1}{2^* S^{2^*/2}} t^{2^*-2}$ e $R(t) = \dfrac{\|c_1\|_{2^*/(2^*-r_1)}}{r_1 S^{r_1/2}} t^{r_1} + \dfrac{\|c_2\|_{2^*/(2^*-r_2)}}{r_2 S^{r_2/2}} t^{r_2}$. Dado que $Q(t) \to 0$, quando $t \to 0$, existe $\rho > 0$ tal que $\dfrac{1}{2} - Q(\rho) > 0$. Assim, escolhemos $\lambda^* > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} - Q(\rho) - \lambda^* R(\rho) > 0.$$

Consequentemente, existem ρ e $\beta > 0$, com ρ e β independentes de n, tal que

$$I_{\lambda,n}(u) \geq \beta, \quad \|u\| = \rho.$$

Caso 2: $2 < r_1 < 2^*$.

$$I_{\lambda,n}(u) \geq$$
$$\|u\|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\|u\|^{2^*-2}}{2^* S^{\frac{2^*}{2}}} - \frac{\lambda}{r_1 S^{\frac{r_1}{2}}} \|c_1\|_{\frac{2^*}{2^*-r_1}} \|u\|^{r_1-2} - \frac{\lambda}{r_2 S^{\frac{r_2}{2}}} \|c_2\|_{\frac{2^*}{2^*-r_2}} \|u\|^{r_2-2} \right).$$

Ora, fazendo

$$Q(t) = \frac{1}{2^* S^{\frac{2^*}{2}}} t^{2^*-2} - \frac{\lambda}{r_1 S^{\frac{r_1}{2}}} \|c_1\|_{\frac{2^*}{2^*-r_1}} t^{r_1-2} - \frac{\lambda}{r_2 S^{\frac{r_2}{2}}} \|c_2\|_{\frac{2^*}{2^*-r_2}} t^{r_2-2},$$

segue que $Q(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, dado que $2 < r_1 \leq 2$. Então, $\rho > 0$ tal que $\frac{1}{2} - Q(\rho) > 0$. Consequentemente, obtemos ρ e $\beta > 0$ independentes de n, tal que

$$I_{\lambda,n}(u) \geq \beta, \quad \|u\| = \rho.$$

■

Lema 2.14. *Suponha que f satisfaz (f2) e (f3). Então, para cada $\lambda > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $I_{\lambda,n}$ satisfaz $(\Phi 2)$.*

Demonstração. Considere Ω_0 dado por (f3) e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, uma função positiva com supp$\phi \subset \Omega_0$. Para cada $t > 0$, temos

$$I_{\lambda,n}(t\phi) = \frac{1}{2} \int_{R^N} |\nabla(t\phi)|^2 \, dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (t\phi)^{2^*} \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F_n(x, t\phi) \, dx.$$

De (f3), existe $a > 0$ tal que $F_n(x, s) \geq a s^q$, para todo $x \in \Omega_0$, $s \geq 0$ e $q \in (1, 2^*)$. Daí,

$$I_{\lambda,n}(t\phi) \leq \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{2^*} - \lambda a t^q \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^q \, dx.$$

Dado que $2^* > 2$, existe $t > 0$ suficientemente grande tal que $I_{\lambda,n}(t\phi) < 0$ e $\|t\phi\| > \rho$, com ρ dado pelo Lema 2.13. ■

2.3 Estimativas

Considerando Ω_0 dado por (f3), tomamos $x_0 \in \Omega_0$ e $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, 2r_0) \subset \Omega_0$. Agora, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x_0, 2r_0) \subset B(0, n_0)$. Escolhemos $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ na bola $B(x_0, r_0)$, e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, 2r_0)$. Dado $\varepsilon > 0$ e w_ε definido em (2.3), seja

$$v_\varepsilon = \frac{\phi w_\varepsilon}{\|\phi w_\varepsilon\|_{2^*}}.$$

Então, v_ε satisfaz

Lema 2.15.

$$X_\varepsilon \equiv \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\varepsilon|^2 \, dx \leq S + O(\varepsilon^{(N-2)/2}) \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0.$$

Demonstração. Ver [7] ou [13]. ■

Proposição 2.16. *Suponha que f satisfaz (f2) e (f3), com q satisfazendo a condição (2.1). Então, para cada $\lambda > 0$, existe $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $d_\lambda > 0$ tal que, para cada $n \geq n_0$,*

$$\max\{I_{\lambda,n}(tv_\varepsilon) : t \geq 0\} \leq d_\lambda < \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

Demonstração. Da definição de $I_{\lambda,n}$ e v_ε, temos

$$I_{\lambda,n}(tv_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(tv_\varepsilon)|^2 \, dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (tv_\varepsilon)^{2^*} \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F_n(x, tv_\varepsilon) \, dx,$$

e de (f3), $F_n(x, tv_\varepsilon) \geq a(tv_\varepsilon)^q$, $\forall x \in \Omega_0$, $\quad s \geq 0$. Segue que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,n}(tv_\varepsilon) &\leq \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_\varepsilon)|^2 \, dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon)^{2^*} \, dx - \lambda t^q \int_{\mathbb{R}^N} a \, |v_\varepsilon|^q \, dx \\ &= \frac{t^2}{2} X_\varepsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*} - \lambda t^q \int_{\mathbb{R}^N} a \, |v_\varepsilon|^q \, dx = J_\lambda(tv_\varepsilon). \end{aligned}$$

Assim, para provar a proposição, é suficiente obter $\varepsilon > 0$ e $d_\lambda > 0$ tais que

$$\max\{J_\lambda(tv_\varepsilon) | t \geq 0\} \leq d_\lambda < \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

Da definição de $J_\lambda(tv_\varepsilon)$, dado $\varepsilon > 0$, existe algum t_ε tal que

$$\max_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\varepsilon) = J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) \;\text{ e }\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_\lambda(tv_\varepsilon) = 0 \quad \text{em } t = t_\varepsilon.$$

Como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_\lambda(tv_\varepsilon) = tX_\epsilon - t^{2^*-1} - \lambda q t^{q-1} \int_{R^N} a \, |v_\varepsilon|^q \, dx,$$

o fato de que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_\lambda(tv_\varepsilon) = 0 \quad$ em $t = t_\varepsilon$, implica

$$t_\varepsilon X_\epsilon - t_\varepsilon^{2^*-1} - \lambda q t_\varepsilon^{q-1} \int_{R^N} a \, |v_\varepsilon|^q \, dx = 0 \Rightarrow X_\epsilon = t_\varepsilon^{2^*-2} + \lambda q t_\varepsilon^{q-2} \int_{R^N} a \, |v_\varepsilon|^q \, dx.$$

Daí, $0 < t_\varepsilon \leq X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}}$. De fato, do Lema 2.13

$$J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq I_{\lambda,n}(tv_\varepsilon) \geq \beta > 0, \quad \|tv_\varepsilon\| = \rho,$$

e de (2.15), temos

$$J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \frac{t_\varepsilon^2}{2}X_\varepsilon - \frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*} - \lambda t_\varepsilon^q \int_{\mathbb{R}^N} a\,|v_\varepsilon|^q\ dx \leq$$
$$\frac{t_\varepsilon^2}{2}\left(S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right) - \frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*} - \lambda t_\varepsilon^q \int_{\mathbb{R}^N} a\,|v_\varepsilon|^q\ dx \leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\left(S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right),$$

de modo que

$$0 < \beta \leq J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\left(S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right).$$

Consequentemente, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\alpha_0 \leq t_\varepsilon \leq X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ora, dado que a função $h(t) = \dfrac{t^2}{2}X_\varepsilon - \dfrac{t^{2^*}}{2^*}$ é crescente no intervalo $(0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}})$, temos $h(t) \leq \dfrac{X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*-2}}}{2}X_\varepsilon - \dfrac{X_\varepsilon^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{2^*} = \dfrac{1}{N}X_\varepsilon$. Logo,

$$J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}X_\varepsilon - \lambda t_\varepsilon^q \int_{\mathbb{R}^N} a\,|v_\varepsilon|^q\ dx \leq \frac{1}{N}X_\varepsilon - \lambda \alpha_0^q \int_{\mathbb{R}^N} a\,|v_\varepsilon|^q\ dx. \tag{2.28}$$

Definindo $h(y) = y^\alpha$ com $\alpha > 1$ e $y \leq 0$, temos, para todo $y > 0$, $h'(y) > 0$ e $h''(y) > 0$. Para $y_1 = b,\ y_2 = b+c,\ b, c \geq 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $y_0 \in (b, b+c)$ tal que

$$\frac{h(b+c) - h(b)}{c} = h'(y_0),$$

e como h' é crescente $h'(y_0) \leq h'(b+c)$, implicando

$$\frac{h(b+c) - h(b)}{c} \leq h'(b+c) \Rightarrow (b+c)^\alpha \leq \alpha(b+c)c + b^\alpha.$$

Usando a desigualdade de acima, com $b = S,\ c = O(\varepsilon^{(N-2)/2})$, e $\alpha = N/2$, obtemos

$$\left[S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right]^{N/2} \leq \frac{N}{2}\left[S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right]^{\frac{N}{2}-1} O(\varepsilon^{(N-2)/2}) + S^{N/2}.$$

De (2.15)

$$\frac{1}{N}X_\varepsilon^{N/2} \leq \frac{\left[S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right]^{N/2}}{N} \leq \frac{1}{N}S^{N/2} + \frac{1}{2}\left[S + O(\varepsilon^{(N-2)/2})\right]^{\frac{N}{2}-1} O(\varepsilon^{(N-2)/2})$$

e de (2.28)

$$J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}S^{N/2} + O(\varepsilon^{(N-2)/2}) - \lambda\alpha_0^q \int_{\mathbb{R}^N} a\,|v_\varepsilon|^q\ dx.$$

Assim, existe $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N}S^{N/2} + \varepsilon^{(N-2)/2}\left(M - \frac{\lambda\alpha_0^q}{\varepsilon^{(N-2)/2}}\int_{\mathbb{R}^N} a\,|v_\varepsilon|^q\,dx\right) \\ &\leq \frac{1}{N}S^{N/2} + \varepsilon^{(N-2)/2}\left(M - \frac{\lambda a\alpha_0^q}{\varepsilon^{(N-2)/2}}\int_{B(0,1)} \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{4}q}}{(\varepsilon+|x|^2)^{(N-2)q/2}}\,dx\right). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $r = |x|$ e denotando por w_N a área da bola de raio 1 em $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$\int_{B(0,1)} \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{4}q}}{(\varepsilon+|x|^2)^{(N-2)q/2}}\,dx = \int_0^1 w_N \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{4}q} r^{N-1}}{(\varepsilon+r^2)^{(N-2)q/2}}\,dr =$$

$$\frac{w_N}{\varepsilon^{\frac{N-2}{4}q}}\int_0^1 \frac{r^{N-1}}{\left[1+\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]^{\frac{N-2}{2}q}}\,dr.$$

Depois da mudança $s = \dfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}}$, segue

$$\frac{w_N}{\varepsilon^{\frac{N-2}{4}q}}\int_0^1 \frac{r^{N-1}}{\left[1+\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]^{\frac{N-2}{2}q}}\,rx = w_N\varepsilon^{\frac{N}{2}-\frac{N-2}{4}q}\int_0^{\varepsilon^{-1/2}} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^{(N-2)q/2}}\,ds,$$

implicando que

$$J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}S^{N/2} + \varepsilon^{(N-2)/2}\left(M - \lambda a\alpha_0^q w_N\varepsilon^{-\frac{N-2}{4}q+1}\int_0^{\varepsilon^{-1/2}} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^{(N-2)q/2}}\,ds\right).$$

Além disso, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_0^{\varepsilon^{-1/2}} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^{(N-2)q/2}}\,ds \geq \int_0^1 \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^{(N-2)q/2}}\,ds = \int_0^1 \left(\frac{s^{\frac{2(N-1)}{(N-2)q}}}{(1+s^2)}\right)^{\frac{N-2}{2}q} ds$$

Fazendo $g(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$, temos $g(s) \geq g(1) = \dfrac{1}{2}$ para $s \in [0,1]$. Por conseguinte,

$$\int_0^1 \left(\frac{s^{\frac{2(N-1)}{(N-2)q}}}{(1+s^2)}\right)^{\frac{N-2}{2}q} ds \geq \int_0^1 \left(\frac{s^{\frac{2(N-1)}{(N-2)q}}}{2}\right)^{\frac{N-2}{2}q} ds = \int_0^1 2^{\frac{2-N}{2}q} S^{N-1} ds = \frac{2^{\frac{2-N}{2}q}}{N},$$

de modo que

$$\int_0^{\varepsilon^{-1/2}} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^{(N-2)q/2}}\,ds \geq \frac{2^{\frac{2-N}{2}q}}{N}.$$

Assim, existe uma constante positiva C, tal que

$$J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}S^{N/2} + \varepsilon^{(N-2)/2}\left(M - \lambda C\varepsilon^{-\frac{N-2}{4}q+1}\right).$$

Quando q satisfaz a condição (2.1), temos

$$q > 2^* - 2 \Rightarrow q > \frac{4}{N-2} \Rightarrow -\frac{N-2}{4}q + 1 < 0$$

logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ para o qual $M - \lambda C \varepsilon_0^{-\frac{N-2}{4}q+1} < 0$. Portanto

$$J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) < d_\lambda = \frac{1}{N}S^{N/2} + \varepsilon_0^{(N-2)/2}\left(M - \lambda C \varepsilon_0^{-\frac{N-2}{4}q+1}\right) < \frac{1}{N}S^{N/2}.$$

■

2.4 Existência de solução não trivial para (PG_λ)

Em vista dos Lemas 2.13 e 2.14, podemos aplicar o Teorema 2.6 à sequência de funcionais $I_{\lambda,n}$, obtendo um nível positivo $c_{\lambda,n}$, e uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,n}}$, $(u_j^{(n)})_j$ em $D^{1,2}$, isto é,

$$I_{\lambda,n}(u_j^{(n)}) \to c_{\lambda,n} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,n}(u_j^{(n)}) \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Ademais, do Lema 2.13 e da Proposição 2.16, temos

$$0 < \beta \leq c_{\lambda,n} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma} I_{\lambda,n}(u) \leq d_\lambda < \frac{1}{N}S^{N/2}. \tag{2.29}$$

Tomando uma subsequência se necessário, encontramos $c_\lambda \in [\beta, d_\lambda]$ tal que

$$c_\lambda = \lim_{n\to\infty} c_{\lambda,n}.$$

Assim, dado $0 < \varepsilon < \min\{c_\lambda, (1/N)S^{N/2}\}$, existe $n_0 > 0$ tal que $c_{\lambda,n} \in (c_\lambda - \varepsilon, c_\lambda + \varepsilon)$ para cada $n \geq n_0$. Agora, para cada $n \geq n_0$, existe $u_n = u_{j_n}^{(n)}$ satisfazendo

$$c_\lambda - \varepsilon < I_{\lambda,n}(u_n) < c_\lambda + \varepsilon, \tag{2.30}$$

e

$$\left\| I'_{\lambda,n}(u_n) \right\| \leq \frac{1}{n}. \tag{2.31}$$

Assim, a subsequência, que ainda continuamos chamando (u_n) em $D^{1,2}$, satistaz (2.29), (2.30) e (2.31). Também é limitada, como é mostrado no lema seguinte.

Lema 2.17. *A sequência (u_n) é limitada em $D^{1,2}$.*

Demonstração. Da definição de $I_{\lambda,n}$, temos

$$I_{\lambda,n}(u_n) - \frac{1}{\tau}I'_{\lambda,n}(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\, dx + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^+\right|^{2^*} dx +$$
$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{\tau} f_n(x, u_n)u_n - F_n(x, u_n)\right) dx. \tag{2.32}$$

De (f4), existem $\tau \in (2, 2^*)$, $\mu \in (1, 2^*)$ e $c_3 \in L^{2^*/(2^*-\mu)}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\frac{1}{\tau} f_n(x, u_n)u_n - F_n(x, u_n) \geq -c_3(x)(u_n^+)^\mu,$$

e da desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^N} c_3(x) \left|u_n^+\right|^\mu dx \leq \|c_3\|_{2^*/(2^*-\mu)} \left\|u_n^+\right\|_{2^*}^\mu .$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,n}(u_n) - \frac{1}{\tau} I'_{\lambda,n}(u_n)u_n \geq \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right) \|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2^*}\right) \left\|u_n^+\right\|_{2^*}^{2^*} - \lambda \|c_3\|_{\frac{2^*}{2^*-\mu}} \left\|u_n^+\right\|_{2^*}^\mu . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Por outro lado, da desigualdade triangular

$$I_{\lambda,n}(u_n) - \frac{1}{\tau} I'_{\lambda,n}(u_n)u_n \leq |I_{\lambda,n}(u_n)| + \frac{1}{\tau} \left|I'_{\lambda,n}(u_n)u_n\right| ,$$

de (2.30), existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|I_{\lambda,n}(u_n)| \leq C$, e de (2.31), $\left\|I'_{\lambda,n}(u_n)\right\| \leq 1$. Assim,

$$|I_{\lambda,n}(u_n)| + \frac{1}{\tau} \left|I'_{\lambda,n}(u_n)u_n\right| \leq C + \frac{1}{\tau} \|u_n\| . \tag{2.34}$$

Definindo $h(t) = (1/\tau - 1/2^*)t^{2^*} - \lambda \|c_3\| t^\mu$, para $t \geq 0$. Como $1/\tau - 1/2^* > 0$, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $h(t) \geq m$, para todo $t \geq 0$. Segue de (2.33) e (2.34),

$$m + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right) \|u_n\|^2 \leq I_{\lambda,n}(u_n) - \frac{1}{\tau} I'_{\lambda,n}(u_n)u_n \leq C + \frac{1}{\tau} \|u_n\| ,$$

de modo que

$$m + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right) \|u_n\|^2 \leq C + \frac{1}{\tau} \|u_n\| \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right) \|u_n\|^2 - \frac{1}{\tau} \|u_n\| \leq C - m.$$

Como $\tau \in (2, 2^*)$, segue que a sequência (u_n) é limitada em $D^{1,2}$. ■

Enunciamos e demonstramos a seguir o primeiro resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.18. *Suponha que f satisfaz (f1) – (f4), com q, r_1 dado por (f3) e q satisfazendo a condição (2.1). Então,*

1. *Se $1 < r_1 \leq 2$, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

2. *Se $2 < r_1 < 2^*$, então o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda > 0$.*

Demonstração. Definindo

$$g(x,s) = |s|^{2^*-1} + \lambda f(x,s), \quad \text{e } g_n(x,s) = |s|^{2^*-1} + \lambda f_n(x,s)$$

em que $f_n(x,s)$ é definido em (2.5) e $f(x,s)$ satisfaz (f1) até (f4) e $f(x,s) = 0$ quando $s < 0$. As propriedades (g1) e (g3) são satisfeitas. De fato, da condição (f2) dado $R > 0$, existem $\theta_R \in [2, 2^*)$, $a_R, b_R > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq a_R |s|^{\theta_R - 1} + b_R, \quad \forall |x| \leq R, \ s \in \mathbb{R}.$$

Logo, $|g(x,s)| \leq |s|^{2^*-1} + \lambda a_R |s|^{\theta_R-1} + \lambda b_R$, se $|x| \leq R$ e dado que $1 \leq \theta_R - 1 < 2^* - 1$ tem-se

1. Se $s \geq 1$:

$$\begin{aligned} |g(x,s)| &\leq s^{2^*-1} + \lambda a_R s^{\theta_R-1} + \lambda b_R \leq s^{2^*-1} + \lambda a_R s^{2^*-1} + \lambda b_R \\ &\leq (1 + \lambda a_R) s^{2^*-1} + \lambda a_R + \lambda b_R. \end{aligned}$$

2. Se $0 \leq s < 1$:

$$\begin{aligned} |g(x,s)| &\leq s^{2^*-1} + \lambda a_R s^{\theta_R-1} + \lambda b_R \leq s^{2^*-1} + \lambda a_R + \lambda b_R \\ &\leq s^{2^*-1} + s^{2^*-1} \lambda a_R + \lambda a_R + \lambda b_R = (1 + \lambda a_R) s^{2^*-1} + \lambda a_R + \lambda b_R. \end{aligned}$$

3. Se $s \leq 0$, temos $f(x,s) = f(x,0) = 0$. Então,

$$g(x,s) = |s|^{2^*-1} \leq (1 + a_R) |s|^{2^*-1} + \lambda a_R + \lambda b_R.$$

Portanto, para $R > 0$, existem constantes postivas $A_R = (1 + \lambda a_R)$, $B_R = \lambda(a_R + b_R)$, tais que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| \leq R$ e $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(x,s)| \leq A_R |s|^{2^*-1} + B_R$$

e a condição (g1) é verificada.

Agora vamos ver que $g_n(x,s)$ satisfaz (g3) para cada n. De fato, fixando $n \in \mathbb{N}$, tome $R = 2n$ da condição (f2) temos

$$|f_n(x,s)| \leq (a_R |s|^{\theta_R-1} + b_R) \phi_n(x), \quad \forall |x| \leq R, \ s \in \mathbb{R}.$$

O qual implica que

$$|g_n(x,s)| \leq |s|^{2^*-1} + \lambda a_R |s|^{\theta_R-1} \phi_n(x) + b_R \phi_n(x), \quad \forall |x| \leq R, \ s \in \mathbb{R}.$$

De maneira análoga à demonstração que a condição (g1) é satisfeita, temos

1. Se $s \geq 1$: $s^{\theta_R-1} \leq s^{2^*-1}$ implicando que $\lambda a_R s^{\theta_R-1} \leq \lambda a_R s^{2^*-1}$. Logo

$$|g_n(x,s)| \leq (1 + a_R) s^{2^*-1} + b_R \phi_n(x) \leq (1 + a_R) s^{2^*-1} + (\lambda a_R + b_R) \phi_n(x).$$

2. Se $0 \leq s \leq 1$: $0 \leq s^{\theta_R - 1} \leq 1$, daí $\lambda a_R s^{\theta_R-1}\phi_n(x) \leq \lambda a_R \phi_n(x)$. Logo

$$|g_n(x,s)| \leq s^{2^*-1} + \lambda a_R \phi_n(x) + b_R\phi_n(x) \leq (1+a_R)s^{2^*-1} + (\lambda a_R + b_R)\phi_n(x).$$

3. Se $s \leq 0$, temos $f_n(x,s) = 0$ daí,

$$|g_n(x,s)| \leq (1+a_R)s^{2^*-1} + (\lambda a_R + b_R)\phi_n(x).$$

Por conseguinte, $|g_n(x,s)| \leq a_n s^{2^*-1} + b_n(x), \quad \forall\, |x| \leq 2n, \quad \forall s \in \mathbb{R}$, em que

$$a_n = (1+a_R) > 0, \quad b_n(x) = (\lambda a_R + b_R)\phi_n(x), \ \operatorname{supp}(b_n(x)) \subset \overline{B(0,2n)}.$$

No caso em que $|x| \geq 2n$, temos $f_n(x,s) = f(x,s)\phi_n(x) = 0$. Implicando que

$$|g_n(x,s)| \leq |s|^{2^*-1} \leq a_n\,|s|^{2^*-1} \leq a_n\,|s|^{2^*-1} + b_n(x), \ \text{ pois } b_n(x) \geq 0 \text{ e } a_n > 1.$$

Portanto,

$$|g_n(x,s)| \leq a_n\,|s|^{2^*-1} + b_n(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall s \in \mathbb{R}, a_n > 0, b_n(x) \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

e a condição (g3) é satisfeita.

Ora, aplicando a Proposição 2.12 com a sequência limitada (u_n), construída no principio desta seção, a qual também satisfaz que $I'_{\lambda,n}(u_n) \to 0$, obtemos uma solução fraca u para o problema (PG_λ). No que segue vamos verificar que u é positiva. Em primeiro lugar, observamos que $u^- = 0$. Efetivamente,

$$\left|\nabla u^-\right|^2 \leq \left|\nabla u^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u_n^-\right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx = \|u_n\|^2 .$$

Assim, a sequência (u_n^-) é limitada em $D^{1,2}$, e de (2.31)

$$\left|I'_{\lambda,n}(u_n)(u_n^-)\right| \leq \frac{\|u_n\|}{n} \Rightarrow I'_{\lambda,n}(u_n)(u_n^-) \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{2.35}$$

Dado que

$$I'_{\lambda,n}(u_n)(u_n^-) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u_n^- \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n^- \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x,u_n) u_n^- \, dx,$$

da definição de u_n^- e a condição (2.4) para f, temos

$$I'_{\lambda,n}(u_n)(u_n^-) = \left\|u_n^-\right\|^2$$

de (2.35) segue que $u_n^- \to 0$ em $D^{1,2}$, quando $n \to \infty$.

Ora, vamos assumir por contradição que $u \equiv 0$ é a única solução possível para

(PG_λ). Seja

$$l = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^+\right|^{2^*} dx.$$

Dado que

$$I'_{\lambda,n}(u_n)(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x,u_n)u_n \, dx,$$

de (f3) e (2.31) temos

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to\infty} I'_{\lambda,n}(u_n)(u_n) &\geq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 - |u_n|^{2^*} - \lambda c_1 |u_n|^{r_1} - \lambda c_2 |u_n|^{r_2}\right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx - \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx - \lim_{n\to\infty} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (c_1 |u_n|^{r_1} + c_2 |u_n|^{r_2}) \, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx - l - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (c_1 |u|^{r_1} + c_2 |u|^{r_2}) \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx - l.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.4 e (f3), definindo

$$\begin{aligned}
T \;&:\; D^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R} \\
&\quad u \to T(u) = \int_\Omega c_i |u|^{r_i} \, dx
\end{aligned}$$

pela hipótese de contradição temos $u_n \rightharpoonup u = 0$ em $D^{1,2}$, de modo que $T(u_n) \to T(u) = T(0)$. Por conseguinte

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx \leq l. \tag{2.36}$$

Afirmamos que $l > 0$. De fato, argumentando por contradição, supondo que $l = 0$ segue que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx = 0$, e de (f4)

$$\frac{1}{\hat{\tau}} f_n(x,u_n)u_n - c_4(x)(u_n)^{\hat{\mu}} \leq F_n(x,u_n) \leq \frac{1}{\tau} f(x,u_n)u_n + c_3(x)(u_n)^{\mu},$$

pela Proposição 2.4 e (f3), segue que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F_n(x,u_n) = 0$. Devido a isto e (2.36), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_{\lambda,n}(u_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F_n(x,u_n) \, dx\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o qual é impossível por (2.30).

De (2.2), temos

$$\|\nabla u_n\|_2^2 \geq \left\|\nabla(u_n^+)\right\|_2^2 \geq S \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^+\right|^{2^*}\right)^{2/2^*}. \tag{2.37}$$

Como uma consequência de (2.37) e de (2.36), obtemos

$$l \geq \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_2^2 \geq S\left(\lim_{n\to\infty} \left\|u_n^+\right\|_{2^*}^{2^*}\right)^{2/2^*} = Sl^{2/2^*} \Rightarrow S^{N/2} \leq l. \tag{2.38}$$

De (2.29), (2.30) e (2.31)

$$\frac{1}{N}S^{N/2} > d_\lambda \geq c_\lambda = \lim_{n\to\infty} I_{\lambda,n}(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left[I_{\lambda,n}(u_n) - \frac{1}{\tau}I'_{\lambda,n}(u_n)u_n\right].$$

Por (2.32), (f4) e a Proposição 2.4,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[I_{\lambda,n}(u_n) - \frac{1}{\tau}I'_{\lambda,n}(u_n)u_n\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 + \left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2^*}\right)\left\|u_n^+\right\|_{2^*}^{2^*} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} c_3(x)u_n^\mu\,dx\right] \\
&\quad \geq \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)S\,\|u_n\|_{2^*}^{2/2^*} + \left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2^*}\right)\left\|u_n^+\right\|_{2^*}^{2^*} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} c_3(x)u_n^\mu\,dx\right],
\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{1}{N}S^{N/2} > \lim_{n\to\infty}\left[I_{\lambda,n}(u_n) - \frac{1}{\tau}I'_{\lambda,n}(u_n)u_n\right] \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)Sl^{2/2^*} + \left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2^*}\right)l$$

por (2.38)

$$\frac{1}{N}S^{N/2} > \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)SS^{N/2^*} + \left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2^*}\right)S^{N/2} = \frac{1}{N}S^{N/2}, \text{ uma contradição.}$$

Portanto, $u = u^+ \neq 0$. ■

Agora, vamos verificar a conclusão da Proposição 2.16, assumindo a positividade da primitiva $F(x,s)$. Mais especificamente, supondo

(f5) $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ s \geq 0.$

Assim, não precisamos da condição (2.1), como mostrado a seguir.

Proposição 2.19. *Suponha que f satisfaz (f2), (f3), e (f5). Então, para cada $\lambda > 0$, existe $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $d_\lambda > 0$ tal que, para cada $n \geq n_0$,*

$$\max\{I_{\lambda,n}(tw_\varepsilon) : t \geq 0\} \leq d_\lambda < \frac{1}{N}S^{N/2}.$$

Demonstração. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{\Omega}_0 \equiv B(0,n_0)\cap\Omega_0 \neq \emptyset$. De (2.5), temos

$$F_n(x,s) = \int_0^s \phi_n(x)f(x,t)\,dt = \phi_n(x)\int_0^s f(x,t)\,dt = \phi_n(x)F(x,s).$$

Da definição de $I_{\lambda,n}$ e (f5), para cada $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,n}(tw_\varepsilon) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2 \, dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |w_\varepsilon|^{2^*} \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n F(x, tw_\varepsilon)\, dx \\
&= \frac{t^2}{2}\|w_\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|w_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n F(x, tw_\varepsilon)\, dx \\
&= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right) S^{N/2} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n F(x, tw_\varepsilon)\, dx \\
&\leq \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right) S^{N/2} - \lambda \int_{\hat{\Omega}_0} \phi_n F(x, tw_\varepsilon)\, dx,
\end{aligned}$$

por (f3)

$$I_{\lambda,n}(tw_\varepsilon) \leq \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right) S^{N/2} - \lambda a t^q \int_{\hat{\Omega}_0} |w_\varepsilon|^q \, dx \equiv J_\lambda(tw_\varepsilon).$$

Assim, basta obter $\varepsilon > 0$ e $d_\lambda > 0$ tais que

$$\max\{J_\lambda(tw_\varepsilon) | t \geq 0\} \leq d_\lambda < \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

Para provar esse resultado usamos os argumentos de [1]. Por (2.3), a sequência w_ε é limitada em $L^{2^*/q}(\mathbb{R}^N)$ e $w_\varepsilon \to 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, quando $\varepsilon \to 0$. Assim, $w_\varepsilon \rightharpoonup 0$ em $L^{2^*/q}(\mathbb{R}^N)$, quando $\varepsilon \to 0$. Por outro lado, a restrição $w_\varepsilon|_{\hat{\Omega}_0}$ pertence a $W^{1,2}(\hat{\Omega}_0)$. Daí, pelo teorema da imersão de Sobolev, $w_\varepsilon \to 0$ em $L^r(B(0, 2n))$, para cada $1 \leq r < 2^*$. Consequentemente,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\hat{\Omega}_0} |w_\varepsilon|^q \, dx = 0.$$

Dado que

$$J_\lambda(w_\varepsilon) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) S^{N/2} - \lambda a \int_{\hat{\Omega}_0} |w_\varepsilon|^q \, dx = \frac{1}{N} S^{N/2} - \lambda a \int_{\hat{\Omega}_0} |w_\varepsilon|^q \, dx,$$

existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$0 < J_\lambda(w_{\varepsilon_0}) < \frac{1}{N} S^{N/2}. \tag{2.39}$$

Temos $J_\lambda(tw_\varepsilon)$ contínua em t, $J_\lambda(0) = 0$, existe $t > 0$ tal que $0 < J_\lambda(tw_\varepsilon)$ e $J_\lambda(tw_\varepsilon) \to -\infty$, quando $t \to \infty$. Então, existe $t_{\varepsilon_0} > 0$ tal que

$$J_\lambda(t_{\varepsilon_0} w_{\varepsilon_0}) = \max\{J_\lambda(tw_{\varepsilon_0}) | t \geq 0\}.$$

Dado que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_\lambda(tw_{\varepsilon_0}) = 0$, para $t = t_{\varepsilon_0}$, temos

$$(t_{\varepsilon_0} - t_{\varepsilon_0}^{2^*-1}) S^{N/2} - \lambda a q t_{\varepsilon_0}^{q-1} \int_{\hat{\Omega}_0} |w_{\varepsilon_0}|^q \, \mathrm{d}x = 0. \tag{2.40}$$

Já que $\lambda a q t_{\varepsilon_0}^{q-1}\displaystyle\int_{\hat{\Omega}_0} |w_{\varepsilon_0}|^q \, dx > 0$, segue que $t_{\varepsilon_0} - t_{\varepsilon_0}^{2^*-1} > 0$ o que implica que $t_{\varepsilon_0} < 1$. Daí e de (2.39), temos

$$0 < t_{\varepsilon_0} < 1.$$

Considerando que a função $h(t) = t^2/2 - t^{2^*}/2^*$ atinge o maximo em $t = 1$, obtemos

$$J_\lambda(t_{\varepsilon_0} w_{\varepsilon_0}) \leq d_\lambda = \frac{1}{N} S^{N/2} - \lambda a t_{\varepsilon_0}^q \int_{\hat{\Omega}_0} |w_\varepsilon|^q \, dx < \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

Daí, para ε_0 e d_λ temos

$$\max\{J_\lambda(t w_\varepsilon) | t \geq 0\} \leq d_\lambda < \frac{1}{N} S^{N/2},$$

o que mostra a proposição. ■

O teorema seguinte é o segundo resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.20. *Suponha que f satisfaz (f1) − (f5), com r_1 dado pela condição (f3). Então,*

1. *Se $1 < r_1 \leq 2$, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*
2. *Se $2 < r_1 < 2^*$, então o problema (PG_λ) possui uma solução não trivial para cada $\lambda > 0$.*

A demonstração é análoga à prova do Teorema 2.18, trocando a Proposição 2.16 pela Proposição 2.19.

Apêndice A

Resultados gerais

Neste apêndice serão apresentados alguns resultados e definições da teoria, que permitem acompanhar a dissertação. Por Ω representa-se um subconjunto aberto não vazio do $\mathbb{R}^N$. Será fixada em Ω a medida de Lebesgue e para um conjunto mensurável E, dizemos que uma propriedade é mantida quase em todo ponto de E (abreviado q.t.p.), com tal que exista um subconjunto E_0 de E para o qual $\text{med}(E_0) = 0$ e a propriedade é mantida para todo $x \in E \setminus E_0$.

Definição A.1. *a) (Notação O grande de Landau) Escrevemos*

$$f = O(g) \quad \textit{quando} \quad x \to x_0,$$

se existe uma constante C tal que

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|$$

para todo x suficientemente próximo a x_0.

b) (Notação o pequena de Landau) Escrevemos

$$f = o(g) \quad \textit{quando} \quad x \to x_0,$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Definição A.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $k \in \{1,\ 2,\ \ldots\}$. Dizemos que a fronteira, $\partial\Omega$, é de classe C^k se para cada ponto $x^0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, de classe C^k, tal que, depois de renomear e reorientar se necessario, temos*

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r); x_n > \gamma(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\}.$$

Da mesma forma, $\partial\Omega$ é de classe C^∞ se $\partial\Omega$ é de classe C^k para $k = 1,\ 2, \ldots,$ e $\partial\Omega$ é analítica se a função γ é analítica.

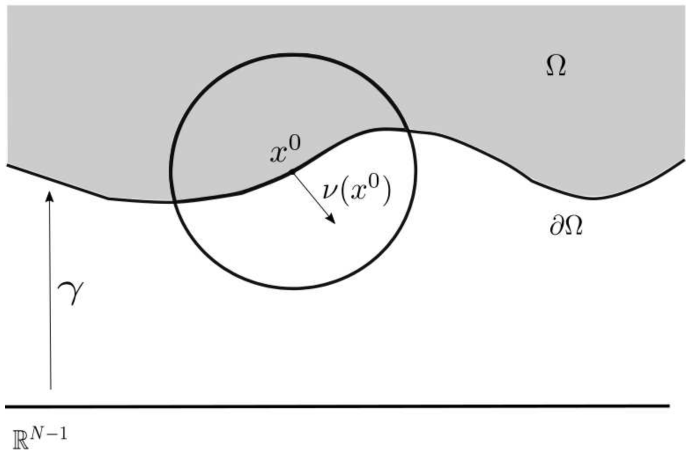

Figura A.1: Fronteira de Ω de classe C^k, $\nu(x^0)$ vetor normal exterior.

Definição A.3. *Sejam $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, u mensurável, e $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\mathscr{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$ quase toda parte em $\mathscr{O}_i$. Considere $\mathscr{O} = \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i$. O suporte de u, o qual é denotado por supp(u), é definido como*

$$supp(u) = \Omega \setminus \mathscr{O}.$$

Definição A.4. *Para $1 \leq p < \infty$*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{mensuráveis com } |u|^p \textit{ integrável em } \Omega\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Diz-se que uma função mensurável f é essencialmente limitada em Ω se existe uma constante finita M que satisfaz

$$\text{med}\{x \in \Omega : |f(x)| > M\} = 0.$$

Definição A.5.

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{mensuráveis com } \sup\text{ess}_{x\in\Omega} |u(x)| < M, M > 0\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\text{ess}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{M > 0 : |u(x)| \leq M \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}.$$

Definição A.6. *Para $1 \leq p < \infty$*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : |u|^p \textit{ integrável em cada } K \subset \Omega, K \textit{ compacto}\}.$$

Sejam (u_n) uma sequência em $L^p_{loc}(\Omega)$ e $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Diz-se que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p_{loc}(\Omega)$$

se, para cada compacto K de Ω, tem-se

$$p_K(u_n - u) = \left(\int_K |u_n(x) - u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.$$

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e tais que $\operatorname{supp}(\phi)$ é compacto. $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial com as operaccões:

$$(\phi_1 + \phi_2)(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x), \quad (\alpha\phi)(x) = \alpha\phi(x).$$

Os resultados A.7 ao A.9 podem ser encontrados em [8]

Proposição A.7. *O espaço $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Proposição A.8. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Lema A.9 (Du Bois Raymond)**.** *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x) \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

então $u = 0$ q.t.p. em Ω.

As funções $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ são chamadas de funções teste e denotamos por $\mathscr{D}(\Omega)$ ao conjunto de tais funções. Agora, sejam $u \in C^k(\Omega)$, onde $C^k(\Omega)$ é o conjunto das funções $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas, até de ordem menor o igual que k, são contínuas em Ω, k inteiro positivo ou $k = \infty$, e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ é um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = k$, então

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \phi.$$

Definição A.10. *Suponha que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α é um multiíndice. Dizemos que v é a $\alpha-$ésima derivada parcial fraca de u, $D^\alpha u = v$, se*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Definição A.11. *O espaço de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega)$$

é o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada fraca de u, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Dado $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos

$$
\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \le m} \operatorname{sup\,ess}_\Omega |D^\alpha u| & p = \infty. \end{cases}
$$

A seguinte proposição encontra-se na seção de Espaços de Sobolev em [9].

Proposição A.12. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Definição A.13. *$W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Quando $p = 2$, acostuma-se escrever

$$
H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \quad (m = 0, 1, \ldots).
$$

e

$$
H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega),
$$

devido à estrutura hilbertiana de tais espaços. No caso particular em que $m = 1$, a estrutura de produto interno em $H_0^1(\Omega)$, vem dada por

$$
\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx,
$$

e a norma correspondente

$$
\|u\| = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, dx
$$

Definição A.14. *Se $1 \le p < N$, o expoente de Sobolev de p é*

$$
p^* = \frac{Np}{N - p}.
$$

Observe que

$$
\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad p^* > p.
$$

Definição A.15. *Seja $N \ge 3$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Definimos*

$$
D^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^{2^*}(\Omega) : \forall i = 1, \ldots, N \quad \partial_i u \in L^2(\Omega)\}
$$

com a norma

$$
\|u\|_{D^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{2^*} + \||\nabla u|\|_2 .
$$

Como anteriormente, $D_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho de $\mathscr{D}(\Omega)$ em relação à norma $\|\cdot\|_{D^{1,2}(\Omega)}$. As Proposições A.16 e A.19 podem ser vistas em [4].

Proposição A.16. *Definindo*

$$
\|u\|_{D_0^{1,2}(\Omega)} = \||\nabla u|\|_2 ,
$$

então, em $D_0^{1,2}(\Omega)$ *as normas* $\|\cdot\|_{D^{1,2}(\Omega)}$ *e* $\|\cdot\|_{D_0^{1,2}(\Omega)}$ *são equivalentes.*

Definição A.17. *Diremos que* $(X, \|\cdot\|_X)$ *está imerso continuamente em* $(Y, \|\cdot\|_Y)$, *escrevemos* $(X, \|\cdot\|_X) \hookrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$, *quando:*

a) X *é subespaço vetorial de* Y*;*

b) A identidade $id; (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *é contínua.*

Definição A.18. *Diremos que* $(X, \|\cdot\|_X)$ *está imerso compactamente em* $(Y, \|\cdot\|_Y)$, *quando:*

a) X *é subespaço vetorial de* Y*;*

b) A identidade $id; (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *é um operador compacto.*

Da seguinte proposição temos uma relação entre os espaços $W^{1,2}$ e $D^{1,2}$.

Proposição A.19. $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subsetneq D_0^{1,2} = D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

A imersão é mantida para qualquer Ω: $W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq D_0^{1,2}(\Omega)$. Além disso, se Ω tem medida finita esta imersão torna-se uma igualdade e o espaço $D_0^{1,2}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1, 2^*]$ e compactamente se $q < 2^*$. No caso em que Ω tem fronteira medida finita, $D^{1,2}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1, 2^*]$ e esta imersão é compacta se $q < 2^*$.

Passamos a expor algumas desigualdades notáveis no estudo das imersões de espaços de Sobolev e os resultados de imersões que precisamos.

A demonstração do teorema a seguir encontra-se em [9].

Teorema A.20 (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg-Sobolev)**.** *Seja* $1 \leq p < N$, *então existe uma constante* $C > 0$, *dependendo somente de* p *e* N, *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para toda função $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$.

Os resultados A.21 ao A.24 podem ser vistos, no Capítulo 9, em [6].

Corolário A.21. *Seja* $1 \leq p < N$. *Então a imersão seguinte é contínua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*].$$

Corolário A.22. *Seja* $m \geq 1$ *um inteiro e* $1 \leq p < \infty$. *As imersões seguintes são contínuas*

a) $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$ *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$,

b) $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, \infty)$ *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$.

Teorema A.23. *Sejam Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$, então as imersões seguintes são contínuas*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \dfrac{Np}{N-p}$ *se* $p < N$.

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ *e* $p = N$.

Teorema A.24 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ de classe C^1 e $1 \leq p < N$. Então a seguinte imersão é compacta*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \dfrac{Np}{N-p}$.

Os Teoremas A.25 ao A.27 podem ser encontrados em [9].

Teorema A.25 (Estimativa para $W^{1,p}$, $1 \leq p < \infty$)**.** *Seja Ω subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, e suponha que $\partial\Omega$ é de classe C^1. Assuma que $1 \leq p < N$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in L^{p^*}(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde C só depende de p, N e Ω.

Teorema A.26 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Assuma que Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < N$. Então*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para cada $q \in [1, p^*]$, a constante C só depende de p, q, N e Ω.

Da desigualdade de Poincaré, se $\text{med}(\Omega) < \infty$, temos $H_0^1(\Omega) = D_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema A.27 (Princípio do máximo)**.** *Assuma que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, conexo e limitado.*

i) *Se $-\Delta u \leq 0$ em Ω e u atinge seu máximo em Ω, então u é constante.*

ii) *Analogamente, se $-\Delta u \geq 0$ em Ω e u atinge seu mínimo em Ω, então u é constante.*

Pode-se ver [10] para a demonstração do teorema seguinte.

Teorema A.28 (Teorema dos multiplicadores de Lagrange)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $J, F \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se J é limitado inferiormente no conjunto*

$$M = \{u \in E : F(u) = 0\}$$

e valem as propriedades

i) $F'(u) \neq 0$, $\forall u \in M$;

ii) $\exists u_0 \in M$ *tal que* $J(u_0) = \min_{u \in M} J(u)$.

Então, existe $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$J'(u_0) = \beta F'(u_0).$$

Seja E um espaço normado, quando uma sequência (x_n) em E converge para $x \in E$ na topologia fraca escrevemos $x_n \rightharpoonup x$.

A proposição a seguir encontra-se na seção 3.2, em [6].

Proposição A.29. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E*, então a sequência* $(\|x_n\|)$ *é limitada e* $\|x\| \leq \lim_n \inf \|x_n\|$.

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e definamos

$$\mathcal{K}(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \text{supp}(u) \text{ é um subconjunto compacto de } \Omega\},$$

$$\mathcal{BC}(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty\}$$

e $\mathcal{C}_0(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{K}(\Omega)$ em $\mathcal{BC}(\Omega)$, $\mathcal{C}_0(\Omega) = \overline{\mathcal{K}(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$. Uma medida finita em Ω é o funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(\Omega)$ dado por

$$\begin{aligned} \langle \mu, \cdot \rangle \quad : \quad & \mathcal{C}_0(\Omega) \to \mathbb{R} \\ & u \to \langle \mu, u \rangle = \int_\Omega u(x)\, d\mu. \end{aligned}$$

A norma da medida μ é definida como

$$\|\mu\| = \sup_{u \in \mathcal{C}_0(\Omega)} \frac{\langle \mu, u \rangle}{\|u\|_\infty}.$$

Seja $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço vetorial das medidas finitas sobre Ω.

Definição A.30 (Convergência fraca de medidas)**.** *A sequência* (μ_n) *de medidas em* $(M)(\Omega)$ *converge fracamente para a medida* $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ *quando*

$$\langle \mu_n, \mu \rangle \to \langle \mu, u \rangle,$$

para toda $u \in \mathcal{C}_0(\Omega)$*. O que denotamos por* $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

O teorema seguinte pode ser encontrado em [18].

Teorema A.31. .

a) Toda sequência limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$ *possui subsequência fracamente convergente em* $\mathcal{M}(\Omega)$.

b) Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$*, então* (μ_n) *é limitada e*

$$\|\mu\| \leq \liminf \|\mu_n\|.$$

Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Para μ uma medida em $(X, \mathcal{M})$ e f uma função não negativa em X que é mensurável em relação a $\mathcal{M}$, definindo a função de conjuntos

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Da linearidade da integração e da aditividade enumerável no domínio de integração, temos que ν é uma medida no espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$.

Considere uma sequência (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e defina

$$\nu_n(E) = \int_E |u_n|^{p^*}\, dx,$$

daí, $\nu_n = |u_n|^{p^*}\, dx$. Então

$$\|\nu_n\| = \sup_{u \in \mathcal{C}_0(\Omega)} \left\{ \frac{|\langle \nu_n, u \rangle|}{\|u\|_\infty} \right\} \leq \int_\Omega |u_n|^{p^*}\, dx = \|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} < M_1,$$

para alguma constante M_1. Analogamente, definindo $\mu_n = |\nabla u_n|^p$, teremos

$$\|\mu_n\| \leq \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} < M_2,$$

para alguma constante M_2. Logo, (ν_n) e (μ_n) são sequências limitadas de medidas em $\mathcal{M}(\Omega)$ e pelo teorema A.31, admitem subsequência fracamente convergente.

O seguinte lema é conhecido como Principio de Concentração de Compacidade. A demonstração pode ser vista em [12].

Lema A.32. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $D_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ convergindo fraco para alguma u e tal que as sequências de medidas $|\nabla u_n|^p$ e $|u_n|^{p^*}$ convergem fraco para μ e ν, respectivamente, onde μ, ν são medidas positivas em $\mathbb{R}^N$. Então, existe um conjunto no máximo enumerável J, uma famía de pontos $\{x_j; j \in J\} \subset \mathbb{R}^N$ e famílias de números positivos $\{\nu_j; j \in J\}$ e $\{\mu_j; j \in J\}$ tais que*

1. $\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$.
2. $\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$.
3. $\nu_j^{p/p^*} S \leq \mu_j$ *para todo* j*, consequentemente*
$$\sum_{j \in J} \nu_j^{p/p^*} < \infty.$$

S é a constante ótima de Sobolev e δ_{x_j} é a medida de Dirac definida por

$$\delta_{x_j}(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j \notin E; \\ 1, & \text{se } x_j \in E, \end{cases}$$

para todo $E \in (\mathbb{R}^N, \mathscr{M})$.

O próximo teorema pode ser encontrado em [15].

Teorema A.33. *Se $1 \leq p \leq \infty$ e se (f_n) é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$, tal que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$, então (f_n) possui uma subsequência que converge quase todo ponto a $f(x)$.*

A proposição seguinte, pode ser encontrada na seção de resultados básicos sobre distribuições em [8].

Proposição A.34. *Sejam K um compacto não vazio e F um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^N$, tais que $K \cap F = \emptyset$. Então existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi = 1$ em K, $\psi = 0$ em F e $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.*

Definição A.35. *Um conjunto aberto Ω é chamado estrelado com respeito a 0 sempre que para cada $x \in \overline{\Omega}$, o segmento de reta*

$$\{\lambda x; 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está em $\overline{\Omega}$.

Para um exemplo de domínio estrelado, ver Figura A.2.

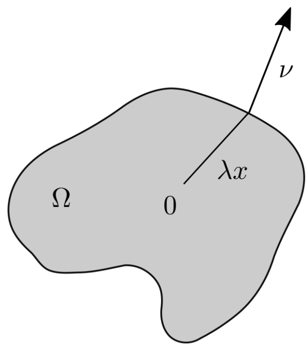

Figura A.2: Um domínio estrelado

O lema seguinte e o Teorema A.37, podem ser encontrados em [9] na seção de técnicas não variacionais.

Lema A.36. *Suponha que $\partial\Omega$ é C^1 e Ω é estrelado em relação a origem. Então*

$$x \cdot \nu(x) \geq 0 \quad \textit{para todo } x \in \partial\Omega,$$

onde ν denota o vetor normal unitario exterior.

Teorema A.37 (Simetria radial)**.** *Sejam $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < 1\}$, o problema semilinear de Poisson de valores na fronteira,*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \textit{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \textit{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \textit{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitz e contínuo, mas é arbitrario e seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solução de (A.1). Então u é radial, isto é,

$$u(x) = v(r) \textit{onde } r = |x|$$

para alguma função estritamente decrescente $v : [0, 1] \to [0, \infty)$.

O seguinte teorema pode ser encontrado no apêndice B, em [18].

Teorema A.38 (Identidade de Pohozaev)**.** *Seja $u \in H^2_{loc}(\overline{\Omega})$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \\ \quad u \in H^1_0(\Omega), \end{cases} \tag{A.2}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e Ω é um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Defina

$$F(u) = \int_0^u f(s)\, ds.$$

Se $F(u) \in L^1(\Omega)$, então u satisfaz

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \sigma \cdot \nu \, d\sigma = N \int_{\Omega} F(u)\, dx - \frac{N-2}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx,$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Os resultados a partir do Teorema A.39 ao Teorema A.45, podem ser vistos em [15].

Teorema A.39. *Seja E um subconjunto Lebesgue mensurável do $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(\mathscr{O}) | E \subseteq \mathscr{O}, \mathscr{O} \textit{ aberto }\}$$

e

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq E, K \textit{ compacto }\},$$

onde μ denota a medida de Lebesgue.

Diz-se que um conjunto G é G_δ desde que seja a interseção de uma coleção enumerável de conjuntos abertos e diz-se que um conjunto F é F_σ quando é a união de uma coleção enumerável de conjuntos fechados.

Corolário A.40. *Para um subconjunto E do $\mathbb{R}^N$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *E é mensurável em relação à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.*
2. *Existe um G_δ subconjunto G do $\mathbb{R}^N$ tal que $E \subseteq G$ e $\mu^*(G \setminus E) = 0$.*
3. *Existe um F_σ subconjunto F do $\mathbb{R}^N$ tal que $F \subseteq E$ e $\mu^*(E \setminus F) = 0$.*

onde μ^* denota a medida exterior de Lebesgue.

Teorema A.41 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X para o qual $f_n \to f$ pontualmente q.t.p. em X e a função f mensurável. Assuma que existe uma função não negativa g integrável em X e domina a sequência (f_n) no sentido de que*

$$|f_n| \leq g \text{ q.t.p. em } X \text{ para todo } n.$$

Então f é integrável em X e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Definição A.42. *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções em X, cada uma das quais é integrável sobre X. A sequência (f_n) é dita ser uniformemente integrável sobre X se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer número natural n e subconjunto mensurável E de X,*

$$\text{se } \mu(E) < \delta, \quad \text{então } \int_E |f_n| \, d\mu < \varepsilon.$$

Definição A.43. *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções em X, cada uma das quais é integrável sobre X. A sequência (f_n) é dita ser justa sobre X se para cada $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto X_0 de X que tem medida finita e, para qualquer número natural n,*

$$\int_{X \setminus X_0} |f_n| \, d\mu < \varepsilon.$$

Proposição A.44. *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e $1 < p \leq \infty$. Se (f_n) é uma sequência limitada de funções em $L^p(X, \mu)$, então (f_n) é uniformemente integrável em X.*

Teorema A.45 (Teorema da Convergência de Vitali). *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções em X que é uniformemente integrável e justa sobre X. Suponha que $f_n \to f$ q.t.p. em X e a função f é integravel sobre X. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu,$$

onde E é qualquer subconjunto mensurável de X.

Definição A.46. *Diremos que um funcional $J : E \to \mathbb{R}$ definido sobre um espaço normado E é semicontínua inferiormente se para toda sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergindo para u temos que*

$$\liminf_{j\to\infty} J(u_j) \geq J(u).$$

Como uma consequência do Teorema de Hahn-Banach, o seguinte lema pode ser encontrado na seção 3.6, em [5].

Lema A.47. *Seja E um espaço normado, para todo $x \in E$ existe $\varphi \in E'$ tal que*

$$\|\varphi\| = \|x\|\,, \quad \varphi(x) = \|x\|^2\,.$$

O teorema a seguir encontra-se na seção 3.2 em [6].

Teorema A.48. *Seja E um espaço normado, e seja (x_j) uma sequência de elementos em E convergindo fraco para x, então temos*

$$\liminf_{j\to\infty} \|x_j\| \geq \|x\|\,.$$

O lema seguinte pode ser visto na seção 1.7, em [18].

Lema A.49 (Lema de Brézis-Lieb). *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $(u_n) \subset L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Se*

1. *(u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$,*
2. *$u_n \to u$ q.t.p. em Ω, então*

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p)$$

Definição A.50. *Dizemos que um espaço normado E é uniformemente convexo ou, mais precisamente, que sua norma é uniformemente convexa se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta \quad \textit{sempre que } x, y \in B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \textit{ e } \|x - y\| \geq \varepsilon.$$

O teorema A.51 e a proposição A.52, podem ser encontrados, no capítulo 6, em [5].

Teorema A.51. *O espaço $L^p(X, \Sigma, \mu)$ é uniformemente covexo para todo $1 < p < \infty$.*

Proposição A.52. *Sejam E un espaço de Banach uniformemente convexo e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$, então $x_n \to x$.*

Apêndice B

Constante de Sobolev

Neste apêndice estudamos algumas propriedades da constante ótima de Sobolev, S, para $N \geq 3$ é dada por

$$S = \inf_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}. \tag{B.1}$$

B.1 Invariâcia sob escala

Sejam

$$\begin{aligned} u \ : \ & \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \to u(x) \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} h \ : \ & \mathbb{R}^N \to \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ & x \longrightarrow h(x) = kx, \ k \in \mathbb{R} \text{ e } k > 0 \end{aligned}$$

onde $u \in H_0^1(\Omega)$. Daí, temos

$$\begin{aligned} u \circ h \ : \ & \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \to u(h(x)) = u(kx) = u_k(x) \end{aligned}$$

Da norma usada em $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|\nabla u_k\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_k(x) \cdot \nabla u_k(x)\, dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(kx)|^2\, dx \\ &= k^{2-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(kx)|^2\, k^N\, dx. \end{aligned}$$

Aplicando a mudança de variáveis $y = kx$, temos

$$\|\nabla u_k\|_2^2 = K^{2-N} \|\nabla u\|_2^2.$$

Por outro lado,

$$\|\nabla u_k\|_{2^*} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_k(x)|^{2^*}\, dx \right)^{1/2^*} = k^{-N/2^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(kx)|^{2^*}\, k^N \right)^{1/2^*} dx.$$

Novamente, pela mudança de variáveis $y = kx$, temos

$$\|\nabla u_k\|_{2^*} = k^{(2-N)/2} \|u\|_{2^*}.$$

Assim,

$$\frac{\|\nabla u_k\|_2^2}{\|\nabla u_k\|_{2^*}^2} = \frac{K^{2-N} \|\nabla u\|_2^2}{k^{2-N} \|u\|_{2^*}^2} = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}.$$

B.2 Minimizador para S

O seguinte teorema garante que existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$S = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}.$$

Para a demonstração ver Teorema 1.41 em [18].

Teorema B.1. *O ínfimo (B.1) é atingido.*

O seguinte teorema dá o tipo de funções onde o ínfimo S é atingido. Pode-se ver [3] e [17].

Teorema B.2 (Aubin, Talenti, 1976)**.** *A função*

$$U(x) = \frac{[N(N-2)]^{(N-2)/4}}{[1 + |x|^2]^{(N-2)/2}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

é um minimizador para S.

Demonstração. Do Teorema B.1, existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que S é atingido, e como

$$S = \inf_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \|\nabla u\|_2^2,$$

se u é minimizador de S, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, Teorema A.28, segue que para algum $\lambda > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} \phi \, dx, \ \forall \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{B.2}$$

Assim, u é solução fraca de

$$-\Delta u = \lambda u^{2^*-1} \tag{B.3}$$

e $\lambda = S$. Usando regularidade, segue que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ donde u é positivo, pelo Principio do Máximo. Depois de escalar, podemos assumir

$$-\Delta w = w^{2^*-1}.$$

Também encontra-se em [18], Teorema 1.42, que w deve ser radialmente simétrico. Fazendo $w(x) = v(r)$, onde $r = |x|$, temos

$$-\Delta w = -\left[v''(r) + v'(r)\left(\frac{N-1}{r}\right)\right] = v^{2^*-1}, r > 0$$

daí

$$r^{N-1}\Delta w = r^{N-1}v''(r) + (N-1)r^{N-2}v'(r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial v}{\partial r}\right) = r^{N-1}v^{2^*-1}$$

segue que w satisfaz

$$\begin{cases} \partial_r(r^{N-1}\partial_r v) = r^{N-1}v^{2^*-1}, r > 0, \\ v(0) = w(0) \quad \partial_r v(0) = 0. \end{cases} \tag{B.4}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ temos

$$U(x/\varepsilon) = \varepsilon^{(N-2)/2}\frac{[N(N-2)]^{(N-2)/4}}{(\varepsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}} = \varepsilon^{(N-2)/2}U_\varepsilon(x).$$

Donde w e U_ε, são soluções da equação (B.4) e por invariância sob escala, U é minimizador para S. Além disso, de (B.2), $U_\varepsilon = S^{(N-2)/4}u$. Então,

$$\|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |U_\varepsilon|^{2^*}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left|S^{(N-2)/4}u\right|^{2^*} = S^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,dx = S^{N/2}.$$

■

B.3 S em domínio limitado

Da desigualdade de Poincaré, Teorema A.26, se med$(\Omega) < \infty$, temos $H_0^1(\Omega) = D_0^{1,2}(\Omega)$. Logo

$$S(\Omega) = \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}.$$

Mas S é atingido só quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, de acordo com o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [18], Proposição 1.43.

Teorema B.3. *Para todo subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$,*

$$S(\Omega) = \inf_{\substack{u \in D_O^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}}} \|\nabla u\|_2^2 = S$$

e $S(\Omega)$ nunca é atingido, exceto se $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Apêndice C

Primeiro autovalor de $-\Delta$ para $N = 3$

Seja u solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{C.1}$$

em que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$. Pelo Teorema A.37 sabemos que u deve ser radial, isto é,

$$u(x) = v(r) \;\text{ onde }\; r = |x|\,,$$

para alguma função estritamente decrescente $v : [0,1] \to [0,\infty)$. Logo, para $i = 1,\ 2, \ldots,\ N$, temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = x_i(x_1^2 + \cdots x_N^2)^{-1/2} = \frac{x_i}{r}, \quad (x \neq 0).$$

Daí,

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

de modo que

$$u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Assim,

$$\Delta u = v''(r) + v'(r)\left(\frac{N-1}{r}\right).$$

Supondo que $-\Delta u = \lambda_1 u$, obtemos

$$-\left(v''(r) + v'(r)\left(\frac{N-1}{r}\right)\right) = \lambda_1 v.$$

Quando $N = 3$, podemos reescrever o problema (C.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} v''(r) + \dfrac{2}{r}v'(r) + \lambda_1 v(r) = 0, r \in (0,1) \\ v(1) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{C.2}$$

Vamos resolver (C.2) via séries de potências. Vamos supor que $v_p(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i$, substituindo na equação diferencial (C.2), temos

$$\begin{aligned} &r v_p''(r) + 2v_p'(r) + \lambda_1 r v_p(r) = \\ &2a_1 + (a_0\lambda + 6a_2)r + (a_1\lambda + 12a_3)r^2 + \ldots + [a_{n-1}\lambda + (n+1)(n+2)a_{n+1}]r^n + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_1 = 0,\ a_0\lambda + 6a_2 = 0,\ a_1\lambda + 12a_3 = 0,\ \ldots, a_{n-1}\lambda + (n+1)(n+2)a_{n+1} = 0, \ldots$$

Da definição de v, temos

$$\begin{aligned} &a_0 = v(0) > 0, \\ &a_1 = 0, \\ &a_{n+1} = -\lambda \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, n \geq 1. \end{aligned}$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned} &n = 1:\ a_2 = (-1)\lambda \frac{a_0}{3!} \quad , \quad n = 2:\ a_3 = 0, \\ &n = 3:\ a_4 = (-1)^2\lambda^2 \frac{a_0}{5!} \quad , \quad n = 4:\ a_5 = 0 \\ &n = 5:\ a_6 = (-1)^3\lambda^3 \frac{a_0}{7!} \quad , \quad n = 6: a_7 = 0 \\ &n = 7:\ a_8 = (-1)^4\lambda^4 \frac{a_0}{9!} \quad , \quad \ldots \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &a_n = 0, \quad n \text{ ímpar} \\ &a_n = (-1)^{n/2}\lambda^{n/2} \frac{a_0}{(n+1)!}, \quad n \text{ par} \end{aligned}$$

desse modo,

$$v_p(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda^k \frac{a_0}{(2k+1)!} r^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{\lambda}\, r)^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, r)}{r}.$$

Da condição de fronteira:

$$v_p(1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda = m^2\pi^2,\ m \geq 1,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Consequentemente, $\lambda_1 = \pi^2$ e as autofunções associadas ao primeiro autovalor $\lambda_1 = \pi^2$, são $\dfrac{c\ \operatorname{sen}(\pi r)}{r}$, $c \neq 0$. Note que $\lim\limits_{r \to 0} v_p(r) = \pi$, portanto

$$v(r) = \begin{cases} \dfrac{c\ \operatorname{sen}(\pi r)}{r} & ,\ r \in (0,1] \\ c\pi & ,\ r = 0. \end{cases}$$

Apêndice D

Caso subcrítico

Neste apêndice vamos mostrar a existência de solução não trivial para o problema subcrítico

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{q-1} + \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_s}$$

onde $2 < q < 2^*$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, $N \geq 3$ e Ω é um domínio suave e limitado. O funcional associado a (P_s) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx - \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega u(x)^2 \, dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |u(x)|^q \, dx.$$

Do Lema 1.4, temos

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 > 0.$$

Seja

$$\mu_q = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_q = 1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \right\}, \tag{D.1}$$

vamos mostrar que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} &\|u\|_q = 1 \quad \text{e} \\ &\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 = \mu_q. \end{aligned}$$

De fato, da definição de ínfimo, existe $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} &\|u_n\|_q = 1 \quad \text{e} \\ &\|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \|u_n\|_2^2 \to \mu_q. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Afirmação 1: (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^q(\Omega)$.
Efetivamente, como $\text{med}(\Omega) < \infty$ e $2 < q$ então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e daí, (u_n) é limitada em $L^2(\Omega)$, ou seja, $(\|u_n\|_2^2)$ é limitada em $\mathbb{R}$. De (D.2), $(\|\nabla u_n\|_2^2)$ é limitada em $\mathbb{R}$, implicando que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Da afirmação 1 e por ser $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H_0^1(\Omega), \tag{D.3}$$

e da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, temos

$$u_n \to u \quad \text{em } L^q(\Omega). \tag{D.4}$$

Afirmação 2: $\|u\|_q = 1$.
Do Teorema A.33, (u_n), a menos de subsequência, converge q.t.p. para u em Ω, logo pelo Lema A.49, temos

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|_q^q - \|u_n - u\|_q^q) = 1 = \|u\|_q^q .$$

Afirmação 3: $\mu_q = \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \|u_n\|_2^2$.
Vamos demonstrar esta afirmação, mediante duas afirmações subsequentes:

Afirmação 3.1: $\|u_n\|_2^2 \to \|u\|_2^2$.
Temos $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ e da imersão contínua $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Por conseguinte, $\|u_n\|_2^2 \to \|u\|_2^2$ em $\mathbb{R}$, pois

$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leq \|u_n - u\|_2 \to 0.$$

Afirmação 3.2: $\mu_q \geq \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \|u_n\|_2^2$
De (D.3), $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e da Proposição A.29 temos

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_n \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \Rightarrow \|\nabla u\|_2 \leq \liminf_n \|\nabla u_n\|_2 .$$

De (D.2) e afirmação 3.1: $\lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_2^2 = \mu_q + \lambda \|u\|_2^2$. Logo,

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \liminf_n \|\nabla u_n\|_2^2 = \mu_q + \lambda \|u\|_2^2 \Rightarrow \mu_q \geq \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 .$$

Como $\mu_q \leq \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2$, segue a afirmação 3. Portanto temos $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$ e satisfazendo (D.1). Agora, de forma análoga à demostração do Teorema 1.7, temos que u é solução não trivial de (P_s).

Observação D.1. Note que, diferente do caso crítico, não são necessárias estimativas sob o ínfimo em (D.1) para mostrar que o mesmo é atingido, o que simplifica a obtenção de solução fraca para o problema (P_s).

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, C. O., GONÇALVES, J.V., *Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *involving critical Sobolev exponents,* Nonlinear Anal. **32** (1998), 53-70.

[2] AMBROSETTI, A., RABINOWITZ, P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications,* Journal of Functional Analysis. **88** (1973), 349-381.

[3] AUBIN, TH., *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev,* J. Diff. Geom. 11, 1976, pp. 573-598. **88** (1973), 349-381.

[4] BEN-NAOUM, A.K., TROESTLER, C., WILLEM, M., *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains,* Nonlinear Anal. **26** (1996), 823-833.

[5] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional.* 2ª edição, SBM, Coleção de Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2015.

[6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer N. Y.: Universitex, 2010.

[7] BREZIS H., NIRENBERG L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[8] DOMINGOS, V. N., CALVALCANTI, M. M., *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.* 1 ed. Maringá: Editora da Universidade Estadual de Maringá (EDUEM), 2009.

[9] EVANS,L. C., *Partial differential equations.* Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1998. (Graduate studies in mathematics, v. 19)

[10] KAVIAN, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques.* Springer, Heidelberg, 1993.

[11] KAZDAN, J., WARNER, F., *Remarks on some quasilinear elliptic equations,* Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 567-597.

[12] LIONS P. L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1,* Rev. Mat. Iberoamericana 1. **1** (1985), 145-201.

[13] MIYAGAKI, O., *On a class of semilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth,* Nonlinear Anal. **29** (7) (1997), 773-781.

[14] RABINOWITZ, P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol 65, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[15] ROYDEN, H.L., PATRICK M. F., *Real Analysis.* 4th ed. Boston, Pearson Education, Inc., 2010.

[16] SILVA, E.A.B., SOARES, S.H.M., *Quasilinear dirichlet problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth* Nonlinear Functional Analysis. **43** (2001), no. 1, 1-20.

[17] TALENTI, G, *Best constants in sobolev inequality,* Annali di Mat. **110** (1976), 353-372.

[18] WILLEM M., *Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications.* Vol 24,Birkhäuser, 1996.