

JAKSON MIRANDA FONSECA

ALGUMAS PECULIARIDADES DA RADIAÇÃO ASSOCIADA A
UMA ELETRODINÂMICA QUE VIOLA A SIMETRIA DE LORENTZ

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física Aplicada,
para obtenção do título de *Magister
Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2009

JACKSON MIRANDA FONSECA

**ALGUMAS PECULIARIDADES DA RADIAÇÃO ASSOCIADA A UMA
ELETRODINÂMICA QUE VIOLA A SIMETRIA DE LORENTZ**

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física Aplicada, para
obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 10 de Julho de 2009.

Prof. Daniel Heber Theodoro Franco
(Co-Orientador)

Prof. Afrânio Rodrigues Pereira
(Co-Orientador)

Prof. Renato Klippert Barcellos

Prof. Oswaldo Monteiro Del Cima

Prof. Winder Alexander de Moura Melo
(Orientadora)

*O teste de todo conhecimento é o experimento.
O experimento é o único juiz da “verdade científica”
Richard Feynman.*

*A todos aqueles que tornaram possível a realização deste trabalho;
aos que me incentivaram por achar que eu fosse capaz;
e àqueles que me incentivaram, ainda mais, por achar que eu não fosse capaz;
em especial à minha família, a qual eu dedico este trabalho.*

Agradecimentos

Talvez a etapa mais fácil de todas aquelas pelas quais devemos passar para concluir uma dissertação sejam os agradecimentos. Para mim esta foi uma das etapas mais difíceis, pois muitos são os que merecem ser agradecidos e escolher uma pequena lista de nomes não é trivial. Por isso, para não ser injusto, vou ser breve e mencionar os que tiveram uma ligação direta com este trabalho, seja do ponto de vista científico ou pessoal.

Sendo assim agradeço a todos que contribuíram para que eu pudesse realizar este trabalho.

À Minha família, meu pai Joaquim, minha mãe Sílvia e meu irmão Edimon. Com certeza todos vocês foram de fundamental importância para que este trabalho se concretizasse. Também por me darem a oportunidade de educação em uma universidade.

À minha namorada Gisele, por ser meu braço direito e por me dar estabilidade emocional, pelo apoio, carinho, amor, compreensão e incentivo e por me escutar e por compreender porque eu passo tanto tempo estudando. Agradeço também a sua mãe Conceição por tudo. Gisele é um mulher especial ...

Ao meu orientador, Winder por tudo, por acreditar que sou capaz, pelo incentivo, pela paciência, pela orientação e pelas oportunidades. Por me ensinar não só física, mas valores que um homem deve carregar por toda sua vida, por mostrar a Natureza de uma forma diferente e pelas discussões e trocas de idéias excepcionais.

Aos professores Winder A. Moura-Melo, Afrânio P. Rodrigues e Daniel H.T. Franco, pelos excelentes cursos ministrados na pós graduação que me forneceram

as bases para a concretização desta dissertação e pelas conversas, trocas de idéias, oportunidades e trabalhos propostos.

Ao departamento de física da UFV e todos os professores e funcionários.

A todos amigos que, para não ser injusto, prefiro não citar nomes.

Aos colegas de pós-graduação pelas discussões e almoços, pelas perguntas sempre pertinentes e pela ajuda para entendermos a física.

A todos aqueles que fizeram da ciência a sua vida e transmitiram suas descobertas para que outros pudessem compartilhar do conhecimento científico.

A Brett Altschull, José A. Helayël-Neto, Rodolfo Casana e Manoel M. Ferreira pelas discussões e sugestões no trabalho que deu origem a esta dissertação.

Por fim, mas não de menor grado agradeço ao povo brasileiro por me dar a oportunidade de estudar em uma universidade pública e em especial ao povo das Minas Gerais, pelo apoio financeiro concedido através da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais (Fapemig).

Sumário

Notações e Convenções	viii
Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução e Motivação	1
1 A QED estendida e algumas de suas propriedades clássicas e quânticas	17
1.1 A Eletrodinâmica Clássica do Modelo Padrão Estendido	18
1.2 Equações de movimento e assuntos correlatos	23
1.3 O tensor de Energia-momento e Leis de Conservação	32
1.4 Quantização Canônica	36
2 Interação da radiação com a matéria	41
2.1 Emissão e absorção de fótons por átomos	42
2.2 Espectro de corpo negro	44
2.2.1 O Caso CPT -ímpar	49
2.2.2 O Caso CPT -par	53
2.3 Princípio do “balanço detalhado” e o espectro de corpo-negro	54
3 Sobre as correções radiativas no setor de matéria e o termo de Chern-Simons	57
3.1 A QED estendida no setor de matéria	58
3.2 Simetrias do modelo e identidades de Ward	60

3.3 Quantização, contra-termos e o termo de Chern-Simons	64
Conclusões e perspectivas futuras	68
A O Teorema \mathcal{CPT} e a simetria de Lorentz	71
B A QED Estendida: Uma breve discussão	80
C Análise de Unitariedade e Causalidade na aproximação clássica	86
Referências Bibliográficas	94
Anexo: Trabalho Publicado	104

Notações e Convenções

- Unidades naturais são utilizadas, assim, por exemplo, $\hbar = c = 1$; exceto em pontos onde a presença de \hbar e c são necessários para um melhor entendimento.
- Índices gregos μ, ν, α, \dots assumem os valores 0, 1, 2, 3; índices latinos i, j, k, \dots assumem os valores 1, 2, 3; utilizamos a convenção de soma: índices repetidos são automaticamente somados.
- A métrica do espaço-tempo $\eta_{\mu\nu}$ é diagonal com elementos, $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$, sendo seus elementos iguais aos da sua inversa.
- A componente zero de todo 4-vetor denota sua “componente temporal” e a parte espacial é sempre denotada em negrito.
- x é padrão para as coordenadas espaço-temporais $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ e os operadores diferenciais são $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$, $\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla)$ e $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$.
- O produto escalar entre dois 4-vetores a_μ e b_μ é denotado por $a \cdot b$ ou por $a_\mu b^\mu$ que significa $a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
- O símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é definido como uma quantidade totalmente antisimétrica, sendo $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$.
- A transformada de Fourier é definida de modo que ∂_μ corresponde a ik_μ .
- δ_{ij} denota a delta de Kronecker que assume os valores: 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.
- γ^μ especifica as matrizes de Dirac, que satisfazem a $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ e $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Resumo

FONSECA, Jakson Miranda, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, Julho de 2009.
Algumas peculiaridades da radiação associada a uma eletrodinâmica que viola a simetria de Lorentz. Orientador: Winder Alexander de Moura Melo. Co-Orientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Daniel Heber T. Franco.

Nós discutimos uma teoria de campos efetiva em (3+1) dimensões incorporando violações da simetria de Lorentz. O modelo considerado é o Modelo Padrão Estendido (MPE), que incorpora violações da simetria de Lorentz independentes do observador mais geral possível. Uma breve revisão sobre este modelo é apresentada com particular ênfase no setor de calibre da “eletrodinâmica quântica” obtida do MPE, onde assuntos relacionados com a emissão e absorção de radiação por elétrons não-relativísticos, em (3+1) dimensões, é considerado. Entre outros resultados obtivemos que uma lei tipo-Planck adquire termos extras proporcionais aos parâmetros da violação: para o modelo \mathcal{CPT} -ímpar, os termos extras dominantes aparecem lineares ou quadráticos nestes parâmetros, dada a orientação do vetor de fundo ser paralela ou perpendicular ao vetor de onda do fóton. Nota-se também que o espectro de radiação apresenta uma distribuição angular anisotrópica. No caso \mathcal{CPT} -par uma correção linear aparece. Entre outras possíveis maneiras para se testar estas violações, por meio dos presentes resultados, podemos mencionar a observação direta de contribuições extras para o espectro de radiação ou a diferença no número de ocupação médio de fótons para os dois modos distintos. Embora muito pequeno, tais efeitos podem ser apreciáveis em temperaturas e frequências muito baixas. Nós argumentamos, baseados no método de renormalização algébrica, que correções ra-

diativas surgindo do acoplamento de férmions com um vetor constante b_μ não induz um termo tipo-Chern-Simons que viola Lorentz e \mathcal{CPT} na ação da QED.

Abstract

FONSECA, Jakson Miranda, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2009.

Peculiarities in the radiation from a Lorentz-violating electrodynamics. Adviser: Winder Alexander de Moura Melo. Co-Advisers: Afrânio Rodrigues Pereira and Daniel Heber T. Franco.

We discuss an effective field theory in (3+1) dimensions incorporating Lorentz violations. The model considered is the Standard Model Extension (SME), the most general observer independent field theoretical framework for investigations of Lorentz violation symmetry. A brief review on this framework is given with particular emphasis on the gauge sector of the “quantum electrodynamics” coming about from the SME, where a number of issues related to the emission and absorption of radiation by non-relativistic electrons in (3+1) dimensions taken into account. Among other results, we have realized that Planck-type law acquires extra terms proportional to the violating parameters: for the CPT -odd model, the leading extra terms appear to be linear or quadratic in these violating parameters according to the background vector is parallel or perpendicular to the photon wave-vector. Also, the radiation spectrum presents an anisotropic angular distribution. In the CPT -even case a linear “correction” shows up. Among other possible ways to probe for these violations, by means of the present results, we may quote the direct observation of the extra contributions for the radiation spectrum or a difference in the photon mean occupation number for the two distinct modes. Although very small, such effects may be enhanced at very low temperatures and frequencies. We argue, based on the algebraic method of renormalization, that radiative corrections arising from

the coupling of fermions to a constant vector b_μ do not induce a Lorentz and CPT violating Chern-Simons-like term in the QED action.

Introdução e Motivação

Princípios de simetria estabelecem que as leis da Natureza, que descrevem a dinâmica de um dado sistema físico, são independentes das condições iniciais do sistema, ou equivalentemente, não dependem de onde ou quando estas condições são implementadas. Na linguagem de “Princípios de Simetria”, isto quer dizer que as leis da Natureza são independentes da posição do observador, ou seja, são covariantes com respeito a deslocamentos no espaço e no tempo. Dito de outra forma, o espaço e o tempo são homogêneos. Outro fato corroborado experimentalmente é a isotropia do espaço, a orientação espacial de um dado sistema físico é uma condição inicial irrelevante, e isto é estabelecido, em princípios de simetria, com as leis de movimento sendo invariantes sob rotações espaciais. As leis de movimento de Newton também indicam que o estado de movimento de um sistema, se estabelecido de forma retilínea e uniforme, também é uma condição inicial irrelevante, digo, é fisicamente indistinguível da condição de repouso. Este é o princípio de invariância de Galileu, o qual estabelece que as leis da Natureza são independentes da velocidade do observador (suposta constante), ou seja as leis da mecânica clássica são invariantes sob transformações de Galileu.

Os princípios de simetria (ou invariância) mencionados acima foram estabelecidos experimentalmente e, apesar de possuírem um amplo alcance de aplicabilidade, são limitados. A invariância de Lorentz substituiu o princípio de invariância Galileana quando Einstein, em 1905, formulou a Teoria da Relatividade Restrita, ou Especial (TRR) [1], o qual estabelece que as Leis Físicas e a velocidade da luz no vácuo são as mesmas em qualquer sistema de referência inercial, porém quando

as energias envolvidas são pequenas, ou analogamente quando as velocidades são baixas comparadas à velocidade da luz no vácuo, $c = 2.99 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, o princípio de invariância galileana se aplica extremamente bem. Por isso, um princípio de simetria, bem como suas consequências, devem ser verificados experimentalmente, como foi enfatizado, por exemplo, pela descoberta da não-conservação da paridade em interações fracas, por Lee e Yang em 1956 [2], e confirmado por C.S. Wu e colaboradores um ano depois [3]. Como outras simetrias, o princípio de invariância de Lorentz vem sendo verificado experimentalmente desde que Einstein estabeleceu sua importância para as Leis Físicas, principalmente no que concerne à Física de Altas Energias. Testes experimentais cada vez mais precisos e refinados estabelecem limites experimentais para o Princípio de Invariância de Lorentz e até o presente momento, ainda não existe qualquer evidência conclusiva da violação deste princípio fundamental da Natureza [4, 5, 6].

As simetrias exibidas por um dado sistema físico são importantes pois são guias na busca por possíveis teorias que descrevam a sua dinâmica bem como na busca por novos modelos teóricos para se descrever a Natureza. Por exemplo, as simetrias do espaço-tempo, como translações espaço-temporais e transformações de Lorentz, junto com outros requerimentos como hermiticidade e localidade determinam as possíveis formas de lagrangeanas de interação entre campos. Outras simetrias, como as simetrias de calibre, que são simetrias internas e não se processam no espaço-tempo, também desempenham um papel fundamental nesse sentido [7]. Um ponto fundamental de nossa descrição da Natureza são as leis de conservação, as quais são uma consequência natural das propriedades de simetria do sistema em consideração, sejam elas simetrias do espaço-tempo ou simetrias internas. Dizemos que uma transformação, contínua ou discreta, das coordenadas e ou dos campos sob as quais a ação do sistema permanece invariante é uma simetria do modelo em consideração. Se tais transformações preservam a ação e são contínuas, então pode ser deduzida a existência de uma quantidade conservada associada a tal invariância. Esta conexão entre simetrias e leis de conservação é estabelecida pelo Teorema de

Noether. Por exemplo, a conservação de energia, momento e momento angular são leis fundamentais que qualquer teoria tem que garantir se ela pretende determinar uma descrição válida da Natureza, e são uma consequência direta da invariância das leis físicas sob translações temporais, espaciais e rotações espaciais respectivamente [7, 8, 9, 10].

A simetria de Lorentz é a simetria do espaço-tempo da Relatividade Especial. Sendo exata, ela demanda a mesma forma para a métrica do espaço-tempo de Minkowski em diferentes sistemas de coordenadas adaptados a referenciais inerciais. Tal simetria constitui-se de “boosts”, que são interpretados como mudanças de velocidades entre dois observadores inerciais, e rotações espaciais¹. Quando a simetria de Lorentz e a Mecânica Quântica são combinadas para constituir uma teoria “relativamente consistente” surge a Teoria Quântica de Campos, (TQC) que descreve as partículas elementares como excitações localizadas de um campo que está imerso no espaço-tempo de Minkowski. O desenvolvimento da TQC levou à formulação do Modelo Padrão (MP) da Física de Partículas, que descreve de maneira unificada as interações que regem as partículas elementares, a saber, a interação *eletromagnética*, a *nuclear fraca* e a *nuclear forte*, mas não incorpora a interação gravitacional.

O modelo padrão das partículas elementares é uma teoria de campos relativística, invariante sob transformações de Lorentz, e fenomenologicamente fornece uma descrição da Natureza em excelente acordo com os resultados experimentais [6]. Já um modelo que descreve com excelência a Natureza das interações gravitacionais é a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, que quando combinada com a descrição quântica de campos entra em sérios conflitos e conduz a várias questões fundamentais sem respostas e inconsistências matemáticas. Um grande esforço teórico na busca por uma teoria fundamental que conduza a uma descrição quântica satisfatória da gravitação tem sido realizado nas últimas décadas. Contudo um grande obstáculo

¹As translações espaço-temporais fazem parte do grupo de Lorentz não-homogêneo ou grupo de Poincaré, que é o grupo de simetria fundamental do espaço-tempo para se classificar estados de partículas e campos no espaço de Hilbert [8, 10], porém, como ficará evidente posteriormente, estamos interessados particularmente na simetria de Lorentz do espaço-tempo.

experimental surge pois muitas predições de uma descrição quântica da gravidade são extremamente pequenas devido a pequenez da escala de Planck², a qual acredita-se ser a escala de energia onde fenômenos de gravitação quântica possam desempenhar um papel fundamental. Na escala de energia atingível atualmente, a energia de Planck suprime os resultados experimentais associados a uma teoria quântica da gravitação de forma que é necessário uma precisão de uma parte em 10^{17} para se obter algum resultado mensurável [11, 12].

Da tentativa de se incorporar a Relatividade Geral no cenário estabelecido pelo Modelo Padrão das partículas elementares, obtendo uma descrição unificada das quatro interações fundamentais da Natureza, surge de forma natural a quebra (ou violação) da simetria de Lorentz. Esta violação espontânea da simetria de Lorentz pode ocorrer em uma enorme variedade de modelos propostos. A idéia básica destes modelos é que a simetria de Lorentz é exata em altíssimas energias, sendo tais modelos baseados em lagrangeanas invariantes de Lorentz e a quebra de simetria ocorre porque o estado fundamental da solução das equações de movimento não exhibe invariância de Lorentz³. Desse modo o vácuo contém uma estrutura que age como um campo tensorial de fundo selecionando uma direção privilegiada no espaço-tempo, quebrando sua isotropia.

Do ponto de vista teórico, este mecanismo de violação da simetria de Lorentz é muito atrativo, pois a simetria é quebrada por uma solução não-trivial do estado fundamental das equações de movimento. Interações envolvendo campos vetoriais, similares àquelas do campo de Higgs no Modelo Padrão, requerem um valor do campo vetorial no vácuo, diferente de zero, no estado fundamental. O vácuo da teoria não permanece “vazio”, mas ele possui uma estrutura que privilegia uma

²A massa ou energia de Planck é dada por $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19}$ GeV e o comprimento de Planck é $L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-33}$ cm.

³Semelhante ao mecanismo de quebra espontânea de simetria de calibre do Modelo Padrão (mecanismo de Higgs), porém as escalas de energia envolvidas e as simetrias são completamente distintas.

direção, violando a invariância rotacional e assim a própria simetria de Lorentz⁴.

Potenciais de interação levando a quebra espontânea da simetria de Lorentz⁵, como descrito anteriormente, podem ocorrer, por exemplo, em teorias de cordas, onde o estado fundamental das soluções das equações de movimento não é o estado com campo nulo, mas estados com valores esperados não-nulos de campos tensoriais no vácuo. Configurações que são mais favoráveis energeticamente, como foi mostrado em [13, 14, 15, 16]. Outro ambiente onde a quebra da simetria de Lorentz tem chamado a atenção dos físicos teóricos é em teorias de campos não comutativas, onde as coordenadas do espaço-tempo, x^μ , são promovidos a operadores no espaço de Hilbert satisfazendo a relações de comutação do tipo

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu},$$

sendo $\theta^{\mu\nu}$ um parâmetro tensorial anti-simétrico constante. A presença de $\theta^{\mu\nu}$ conduz, por exemplo, a anisotropias do vácuo e, portanto, viola a simetria de Lorentz. Porém aqui o mecanismo que conduz à violação da simetria de Lorentz é diferente daquele onde ocorre quebra espontânea de Lorentz, embora os efeitos sejam similares [17, 18].

Acoplamentos entre campos, variando em escalas de tempo cosmológicas, constituem-se outra possível fonte para violação da simetria de Lorentz. Constantes de acoplamento dependentes do espaço-tempo quebram a simetria translacional e um tensor de energia-momento conservado não pode ser construído, o que leva a geradores de simetria de Lorentz, que dependem do tensor de energia-momento, exibindo uma dependência temporal não-trivial. Outra forma de visualizar isso é olhando para as equações de movimento que irão conter o gradiente do acoplamento, pois este é uma função lentamente variável do espaço-tempo, sendo que este gradiente, variando muito lentamente seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo

⁴O campo de Higgs é um campo escalar e aqui estamos falando de uma interação entre campos tensoriais de rank maior ou a igual a 1, que não existe dentro do modelo padrão.

⁵Tal ponto ficará quando apresentarmos o modelo em questão.

[12, 19, 20].

Outros contextos, como alguns modelos para gravitação quântica [21], topologia não-trivial do espaço-tempo [22], espaço-tempo “espumante” ou “borbulhante” [23] dentre outros, também levam à violação da simetria de Lorentz [24]. Apesar de descreverem violação da simetria de Lorentz, tais modelos trazem várias consequências gerais e imediatas. Todos eles surgem de diferentes enfoques para uma teoria quântica da gravitação. O espaço-tempo da Relatividade Especial destes modelos é o mesmo espaço-tempo de Minkowski, diferentes sistemas de coordenadas inerciais são conectados por transformações de Lorentz, (transformações de coordenadas entre diferentes observadores, mais especificamente) e tensores e espinores representam quantidades físicas como usual. Contudo, o vácuo desses modelos contém uma estrutura que age como campos tensoriais de fundo selecionando uma direção privilegiada, como discutido anteriormente [24]. Uma ilustração razoável disso é dada pela Figura 1, onde as setas em vermelho representariam um campo vetorial de fundo, permeando todo o espaço; (inclusive o nosso sistema solar).

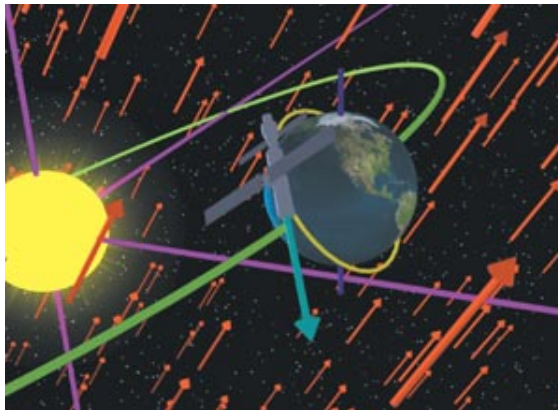


Figura 1: Representação da quebra de isotropia do espaço.

Quando se ouve a expressão *violação da simetria de Lorentz* e, dado que tal simetria é corroborada em todos os testes experimentais até o momento, surge uma questão interessante: *para que se estudar violação da simetria de Lorentz?* A resposta a esta pergunta é de fundamental importância, pois justifica, em parte, o

grande esforço teórico que se tem dedicado a essa vertente nas últimas duas décadas. Várias teorias que tentam explicar a gravitação quântica envolvem violação de simetria de Lorentz, como discutido acima, e alguma consequente observação de tais violações poderia dizer algo sobre tais teorias ou dar alguma pista sobre caminhos a se seguir. Outra razão é o fato da simetria de Lorentz ser um pilar da Relatividade Especial e Geral⁶, bem como, da TQC. Se tal simetria não for exata, tem-se sérios problemas com tais modelos, por isso limites da precisão da validade da simetria de Lorentz são essenciais para se saber os limites de tais teorias. Outro fator importante é que de um ponto de vista experimental, é necessário um guia para se buscar em experimentos a violação de simetria de Lorentz, portanto sendo necessária uma pista teórica do caminho a se seguir experimentalmente.

Apesar de existirem inúmeras propostas para se tratar da violação da simetria de Lorentz, não se sabe de onde deveria surgir tal violação de simetria em um modelo realístico, daí, especulações nesse ambiente são comuns. Uma detecção dessa violação possivelmente seria uma indicação de “Nova Física”, provavelmente, emergindo da escala de Planck. Também, a possibilidade de que violações conjuntas das simetrias de Lorentz CPT ⁷, adivindas de alguma teoria mais fundamental da Natureza, possam ser detectadas em escalas de energias já atingíveis, levou ao desenvolvimento do Modelo Padrão Estendido, (SME, “Standart Model Extension”), por Colladay e Kostelecký na década de 90. Motivados por um mecanismo de violação das simetrias de Lorentz e CPT em Teoria de Cordas [13, 14, 15, 16] eles desenvolveram um modelo que incorpora as possíveis violações dessas simetrias no

⁶Do ponto de vista da Relatividade Geral, a simetria de Lorentz vale localmente, em cada ponto do espaço-tempo, e em torno de sua pequena vizinhança. Contudo é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas em que isto acontece para todo ponto do espaço-tempo, ou seja um sistema de coordenadas em que a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ seja aquela do espaço-tempo de Minkowski, por isso a simetria de Lorentz vale apenas em torno daquele ponto. Já em Relatividade Especial, a simetria de Lorentz é global, sendo igualmente válida em todo o espaço-tempo de Minkowski [25].

⁷ CPT corresponde a ação combinada das simetrias discretas de Conjugação de Carga (C), Paridade (P) e Reversão Temporal (T), veja o apêndice A para mais detalhes.

Modelo Padrão das partículas elementares.

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma teoria de campos efetiva⁸ obtida do Modelo Padrão pela adição de termos que incorporam as violações das simetrias de Lorentz e \mathcal{CPT} . Os termos acrescentados são construídos pela contração de operadores de campos do Modelo Padrão com constantes de acoplamentos tensoriais, isto é, que carregam um ou mais índices de Lorentz, e que induzem tais quebras, uma vez que eles são campos tensoriais constantes que permeiam o espaço-tempo (fornecendo, por exemplo, uma estrutura para o vácuo da teoria, como discutido anteriormente). Tais coeficientes tensoriais (ou constantes de acoplamento) tem sua origem em teorias mais fundamentais, onde ocorre a quebra espontânea da simetria de Lorentz, sendo as constantes de acoplamento utilizadas para se construir o MPE, o valor esperado no vácuo de tais campos tensoriais. Existe uma infinidade de termos que podem ser construídos desta forma, inclusive termos não-renormalizáveis, de dimensão arbitrariamente alta. Porém, para investigar experimentos em escalas de baixas energias, como a escala do Modelo Padrão, é vantajoso trabalhar com um subconjunto, incluindo um número finito de termos. Um subconjunto de muito interesse, e denominado Mínimo Modelo Padrão Estendido (MMPE), é obtido do anterior por restringir-se àqueles termos renormalizáveis por contagem de potências⁹ e que preservam a invariância de calibre, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, do Modelo Padrão usual.

O MMPE foi desenvolvido por Colladay e Kostelecký primeiramente para incorporar apenas violação da simetria discreta de \mathcal{CPT} [26]; mas isso implica, necessariamente em violação da simetria de Lorentz, se a teoria for interagente, como mostrou Greenberg [27, 28] (no entanto, a recíproca é falsa, ou seja, violação da simetria de Lorentz não implica necessariamente em violação de \mathcal{CPT} ; veja o apêndice A para uma breve discussão sobre este assunto). Posteriormente, os autores, es-

⁸Efetiva no sentido de ser uma aproximação para baixas energias de uma teoria mais fundamental.

⁹Isto restringe a dimensão canônica, ou dimensão de massa, dos termos adicionados a serem menores ou igual a quatro.

tenderam seu modelo afim de incorporar não só a quebra de CPT , mas também a violação da simetria de Lorentz [29]. Desse modo, o MMPE é o modelo mais geral que incorpora as violações das simetrias de Lorentz e CPT na escala de energias do Modelo Padrão, contendo o último como caso particular. Porém, ele não incorpora a gravitação em sua descrição; em 2004, Kosteleký [30], estendeu ainda mais este modelo para incluir a gravitação e consequentemente a violação da simetria de Lorentz nesse cenário. Aí, tanto o Modelo Padrão quanto a Relatividade Geral estão contidos como casos limites. Bons artigos de revisão sobre esse assunto podem ser encontrados nas Refs. [12, 31]. Aqui vamos nos limitar a uma breve discussão do MMPE sem incluir efeitos gravitacionais e a partir deste ponto nós referiremos a ele simplesmente como Modelo Padrão Estendido. Na sequência, discutiremos um pouco de suas propriedades mais gerais. Outras virão nos capítulos que seguem.

Um princípio fundamental em física é a independência do sistema de coordenadas, ou seja qualquer sistema de coordenadas é igualmente bom para se descrever um fenômeno físico, sendo a física independente deste sistema escolhido. Este princípio é uma das bases para a construção do Modelo Padrão Estendido¹⁰. Este princípio de independência de coordenadas assegura que a física permanece independente do observador, isto também é chamado de invariância de observador. É possível violar a simetria de Lorentz sem perder esta independência de coordenadas, esta é a principal filosofia do MPE. Para ilustrar como este fato pode acontecer, considere uma partícula clássica, de carga q e massa m , se movendo na presença de um campo eletromagnético externo, $F_{\mu\nu}$. A equação de movimento da partícula é dada pela força de Lorentz, que em forma manifestamente covariante, lê-se:

$$m \frac{dv^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} v_\nu,$$

onde τ é o tempo próprio da partícula e v^μ a sua 4-velocidade. Esta equação

¹⁰Algumas investigações de violação de Lorentz e CPT podem levar a uma física emergente, dependente do sistema de coordenadas e, consequentemente, à quebra de simetria de Lorentz é identificada com a perda de independência de coordenadas [31].

permanece válida em todos os sistemas de coordenadas, pois ela é uma equação tensorial, descrevendo o movimento da partícula na presença do campo externo, $F_{\mu\nu}$, para qualquer observador inercial. Desta forma a simetria de Lorentz de observador é mantida, ou seja qualquer observador inercial dará a mesma descrição física para o problema. Contudo, o campo externo $F^{\mu\nu}$ viola, por exemplo, a simetria sob rotações arbitrárias da trajetória da carga. Uma das consequências dessa não-invariância é a não-conservação do momento angular da partícula. Observe a diferença entre mudança de coordenadas (transformações de observador) que deixa a física inalterada e a transformação de partícula, que gira apenas a trajetória da partícula, mantendo o campo externo $F^{\mu\nu}$ inalterado, de forma que a orientação entre a trajetória da partícula e o campo externo pode mudar. Diz-se, então, que a simetria de Lorentz de partícula é violada, apesar da simetria de observador, ou independência de coordenadas ser mantida. Um ponto importante é que o campo externo $F^{\mu\nu}$ é o campo eletromagnético causado por alguma 4-corrente que pode, a princípio, ser controlada, e no vácuo este campo se anula. Esse exemplo ilustra bem como um campo tensorial de fundo pode causar a quebra da simetria de Lorentz, fornecendo uma estrutura para o vácuo.

Quando o vácuo possui uma estrutura, digo, possui campos tensoriais que privilegiam uma direção, quebrando sua invariância rotacional, como as discutidas anteriormente, partículas e campos interagem com estes campos tensoriais de fundo que permeiam o vácuo, semelhante à interação entre partículas carregadas e um campo eletromagnético. Consequentemente, as direções e velocidades não são mais equivalentes. Dois bastões por exemplo, duas réguas, diferentes em sua estrutura, mas com o mesmo comprimento em uma determinada orientação com o campo do vácuo (veja o lado esquerdo da Figura 2 acima) podem encolher ou se expandir de forma diferente quando esta orientação muda (veja Figura 2 ilustração central). Similarmente dois relógios sincronizados em uma dada orientação, podem andar mais devagar ou mais rápido na segunda orientação. Além de tudo isto, réguas e relógios podem passar por diferentes contrações de comprimento e dilatação de

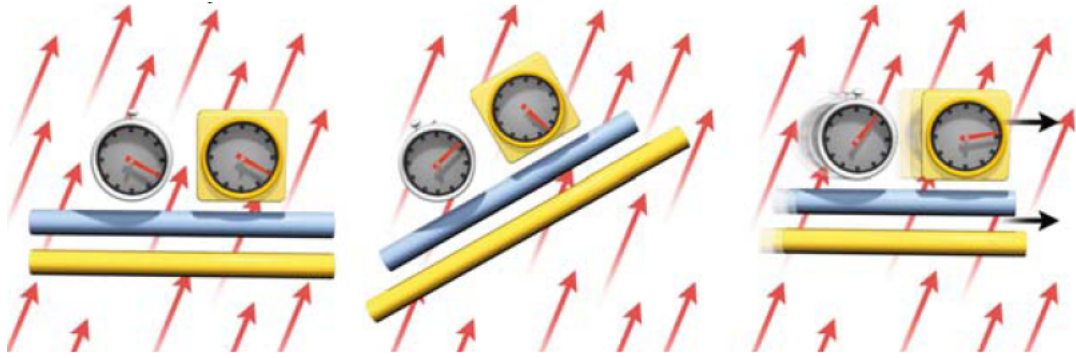


Figura 2: Ilustração da quebra da simetria de Lorentz.

tempo, dependendo do material do qual foram feitos e da direção e da magnitude da velocidade relativa entre dois observadores inerciais (veja o lado direito da Figura 2 acima) [32, 33].

Os termos adicionados às Lagrangeanas do Modelo Padrão, devem ser escalares de Lorentz, independentes de qualquer sistema de coordenadas, para assegurar a independência de coordenadas do modelo. Construído assim, o MPE determina a teoria mais geral possível descrevendo quebra da simetria de Lorentz, mas invariante sob transformações de Lorentz de observador¹¹[29]. Observe que esta característica do MPE quebra o Princípio da Relatividade, que é central na Teoria da Relatividade. Este princípio pode ser estabelecido como a equivalência de transformações de Lorentz passivas (observador) e ativas (partícula), sendo uma a inversa da outra[31]. Para se ter uma idéia da generalidade do MPE construído com as características mencionadas acima, todas as lagrangeanas dos modelos discutidos anteriormente, onde ocorre a quebra da simetria de Lorentz estão contidos no MPE, ou de uma forma mais geral, qualquer que seja a lagrangeana construída, envolvendo campos fundamentais do Modelo Padrão e campos tensoriais de fundo, satisfazendo à estrutura de calibre $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, de dimensão canônica menor ou igual a

¹¹ Para partículas livres as transformações de observador e de partícula, estão relacionados sendo uma a inversa da outra, porém na presença de um campo de fundo violando a simetria de Lorentz esta relação entre elas é quebrada, sendo importante ao se falar em transformações de Lorentz, especificar qual o tipo considerado.

quatro, o resultado deverá estar contido no MPE [31].

Teorias mais gerais, com uma quebra explícita da simetria de Lorentz, podem ser consideradas. Por exemplo a Lagrangeana de tais teorias pode se transformar de uma modo não-trivial sob o grupo de transformações de Lorentz de observador, ou talvez, tal lagrangeana pode se transformar como um escalar segundo algum grupo de transformação de coordenadas diferente do grupo de Lorentz. Contudo, essas possibilidades representam modificações muito radicais da Física convencional, e no momento parecem carecer de motivações reais.

O MPE possui a vantagem de permitir a implementação de muitas características além da independência de coordenadas. Por exemplo a violação da simetria de Lorentz se restringe apenas ao grupo de Lorentz homogêneo, ao invés de todo o grupo de Poincaré. Isso têm como consequência mais imediata a invariância translacional da teoria, o que acarreta em conservação da energia e do momento [8, 10]. Outras características igualmente importantes são a já comentada invariância de calibre, a renormalizabilidade por contagem de potências (“power-counting”), hermiticidade das lagrangeanas e interações locais, como no caso usual. Como já comentamos, tais propriedades são importantes pois limitam a um número razoável a quantidade de termos extras incorporados ao Modelo Padrão; se, por exemplo, outras características importantes são consideradas, como por exemplo, causalidade e unitariedade, tal restrição é ainda mais severa. Com todos estes requerimentos, métodos padrões de quantização não são afetados, podendo ser utilizados [29]. Outras suposições mais simplificadoras poderiam ser adotadas, como invariância rotacional e translacional, sendo esta a versão mais simplificada do MPE, desenvolvida por Coleman e Glashow [34].

Várias análises têm sido realizadas para estudar como estes termos extras do MPE modificam os resultados convencionais do Modelo Padrão e a consequente comparação destes resultados com experimentos colocam limites nos parâmetros que quebram a simetria de Lorentz. Dentre as investigações realizadas, citamos aquelas que envolvem mésons [12, 35, 36], o setor de Higgs [37] e neutrinos [34, 38, 39].

Especial atenção e ênfase é dada ao setor eletrodinâmico, pois a alta precisão em testes experimentais e a riqueza de novos fenômenos que surgem devido á violação da simetria de Lorentz tornam este setor muito atrativo. Investigações envolvendo muons [40], elétrons [41, 42, 43, 44] e fótons [45] têm mostrado que um número de novos fenômenos, proibidos no Modelo Padrão usual, podem surgir, como o decaimento (splitting) do fóton em dois ou mais outros (on-shell) [46, 47, 48]. Questões não-triviais e novos fenômenos surgem nos mais diversos contextos nesse cenário, como violação da simetria de Lorentz no setor de ghosts da QED escalar, que é um setor não-físico, induz violação de Lorentz em outros setores da teoria por meio de correções radiativas [49]. Extensões supersimétricas do MPE também têm atraído bastante atenção [50, 51, 52, 53].

Dentre as análises realizadas no setor da QED estendida, diversos resultados usuais da radiação eletromagnética, são “corrigidas” por pequenas contribuições que, ora são lineares, ora quadráticas nos parâmetros de violação. Entre tais efeitos estão as radiações Cherenkov [48, 54, 55, 56, 57, 58, 59] e síncroton [60, 61, 62]. Efeitos em Mecânica Quântica podem também ser explorados por meio de sistemas de dois níveis [63] e propriedades do átomo de hidrogênio [64, 65, 66]. Dados da radiação cósmica de fundo (RCF) têm também sido investigados na busca por possíveis traços dessas violações de simetria em tempos remotos do Universo [67, 68, 69, 70]. Muitos outros aspectos têm sido extensivamente investigados, como redução dimensional [71, 72, 73], causalidade, unitariedade e estabilidade [74, 75, 76, 77, 78, 79]. Contudo, apesar de todas essas análises, acreditamos que resultados adicionais são importantes, por exemplo, para aumentar a possibilidade de maneiras experimentais para se procurar por tais quebras de simetrias.

Em um trabalho anterior [80] analisamos a possibilidade e consistência de se introduzir monopolos magnéticos do tipo Dirac [81, 82] via quebra da identidade de Bianchi, no setor eletromagnético da QED estendida com quebra de \mathcal{CPT} . A presença de tais objetos neste modelo mostrou-se possível desde que a sua presença seja acompanhada por uma corrente elétrica induzida proporcional ao 4-vetor de fundo

que controla a quebra da simetria de Lorentz e \mathcal{CPT} . O aparecimento desta corrente induzida, a princípio, mensurável, é uma consequência da quebra da simetria de Lorentz e ela aparece para recuperar a conservação da carga elétrica no modelo. Mesmo na presença de fontes magnéticas, (além de elétricas) a dualidade é perdida nesse ambiente e a força eletromagnética sentida pelos monopolos possui um termo extra proporcional ao parâmetro que quebra a simetria de Lorentz, mostrando resultados peculiares (mais detalhes podem ser encontrados em [80, 83]). A possibilidade da presença de monopolos de 't Hooft-Polyakov na extensão não-Abeliana deste modelo foi estudada na Ref.[84].

Neste trabalho, procura-se por possíveis efeitos destas violações de simetria em mecanismos de emissão e absorção de radiação por átomos. Observamos que a lei de Planck é sensível à presença dos parâmetros que controlam a quebra da simetria no setor de radiação eletromagnética do MPE. Embora sejam pequenos, estes desvios, lineares ou quadráticos nos parâmetros que controlam a quebra de simetria podem ser importantes pois nossos resultados dependem de mecanismos abundantemente observados na Natureza. Já a busca por quebra da simetria de Lorentz, baseada na presente análise (e talvez combinada com outras) inclui um alcance muito grande de sistemas físicos, desde um número relativamente pequeno de átomos e fótons à radiação cósmica de fundo, que permeia todo o universo. Por exemplo, a observação de uma pequena predominância de um dado tipo de polarização sobre o outro em um banho térmico pode ser considerado como um bom indicativo de tais violações, como alguns de nossos resultados indicam. Tais resultados foram publicados na Physics Letters **B** [85] e serão discutidos em detalhes no Capítulo 2.

Dentre todas as investigações realizadas no contexto de violação da simetria de Lorentz e \mathcal{CPT} , uma das mais interessantes e controversa questão que surgiu até o momento é a possível origem dinâmica do termo tipo-Chern-Simons, $\frac{\alpha}{2} b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu$, no setor de calibre da QED quando o termo $\bar{\psi} b_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ é adicionado no setor de matéria, sendo essa origem computada em correções radiativas. Muitas têm sido as respostas

sobre esta questão, uma lista parcial são as Refs. [34, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93]. Alguns autores afirmam que o termo tipo-Chern-Simons é induzido via correções radiativas, sendo a constante de proporcionalidade, α , dependente do esquema de regularização utilizado; daí diversos valores possíveis têm sido obtidos. Outros autores afirmam que o termo de Chern-Simons é induzido, mas a constante de proporcionalidade é indeterminada. Por fim, há aqueles autores que afirmam não ser possível tal mecanismo de geração de quebra de simetria dinâmica no setor de calibre da QED estendida através de correções radiativas. Baseados em tantas discussões preparamos um trabalho sobre este assunto, onde utilizando o método de Renormalização Algébrica, [94] que não faz menção a nenhum esquema de regularização, e definindo a teoria pelas suas simetrias e condições de renormalização, as quais determinam os parâmetros da teoria (massa, carga, função de onda ...), mostramos não ser possível a geração do termo tipo-Chern-Simons através de correções radiativas em nenhuma ordem [95]. Estes resultados serão discutidos no capítulo 3.

A presente dissertação é organizada da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos uma breve discussão do setor eletromagnético da QED estendida pois este é o modelo de interesse aqui. Discute-se algumas das consequências mais imediatas deste modelo como a birrefringência da luz no vácuo e alguns limites experimentais dos parâmetros que controlam a quebra de simetria. Uma rápida discussão da possível quantização do modelo, e escolhas apropriadas dos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz são feitas de forma a respeitar tanto a causalidade quanto a unitariedade. Discute-se então, a quantização canônica do modelo. Já o Capítulo 2 é dedicado à apresentação e discussão dos resultados originais deste trabalho e algumas de suas consequências. O formalismo da mecânica quântica relativística é utilizado para obter as amplitudes de emissão e absorção de radiação pela matéria e, posteriormente, obter a lei da radiação de Planck nesse ambiente (Espectro de Corpo Negro). Algumas das consequências dos resultados obtidos são discutidas e o capítulo é finalizado com uma discussão sobre o tratamento semi-clássico do campo de radiação para obter a lei de Planck, no caso em que a quantização canônica do

modelo é proibida devido à instabilidade da teoria. No capítulo 3, continuando a apresentação dos resultados originais da presente dissertação, é feita uma discussão sobre a possível origem dinâmica do termo tipo-Chern-Simons, onde, definindo a teoria quântica pelas suas simetrias clássicas e condições de renormalização, concluímos não ser possível a geração do termo tipo-Chern-Simons quando se introduz um controle para a quebra da simetria de Lorentz. Posteriormente são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras de trabalho. Para uma maior completeza desta dissertação, foram acrescentados três Apêndices. No primeiro, é discutido o teorema CPT e sua conexão com a simetria de Lorentz. No segundo, é apresentada uma rápida discussão sobre toda a QED obtida do MPE, para complementar a discussão feita no Capítulo 1 restrita ao setor de calibre desta QED e no Capítulo 3 onde é apresentado apenas um termo que viola a simetria de Lorentz no setor de matéria. No último apêndice é feita uma análise dos propagadores do modelo para inferir-se sobre a possível quantização canônica, pois isto será importante nos Capítulos 1 e 2.

Capítulo 1

A QED estendida e algumas de suas propriedades clássicas e quânticas

Um modelo de Eletrodinâmica Quântica estendida¹ pode ser obtida do MPE da mesma forma que a QED usual é obtida do Modelo Padrão das partículas elementares. Esta eletrodinâmica estendida é de muito interesse tanto teórico quanto experimental, pois pode colocar limites muito restritos nos parâmetros que violam a simetria de Lorentz, devido a extrema precisão entre teoria e experimento da QED usual [6]. A eletrodinâmica estendida é esperada satisfazer todas as propriedades do MPE mencionadas na introdução, como invariância sob o grupo de calibre $U(1)$, conservação de energia e momento, microcausalidade, renormalizabilidade por contagem de potências, dentre outras. Neste capítulo, é feita uma breve revisão do setor de calibre, isto é, da parte associada à radiação eletromagnética da eletrodinâmica estendida, e algumas de suas propriedades são discutidas em âmbito *clássico*. Isto será importante pois todos os resultados originais deste trabalho [85] e discussões feitas a partir deste ponto nesta dissertação se referem especificamente a este modelo,

¹Quando nos referimos à QED estamos nos limitando à teoria quântica de fótons e elétrons apenas, deixando de lado as outras famílias de léptons, pois não são importantes aqui.

exceto quando dito o contrário. Na última seção uma breve discussão da sua versão quântica e alguns assuntos correlatos é feita. Para fins de completeza e consulta, apresentamos no apêndice B uma breve revisão da eletrodinâmica estendida com todos os termos possíveis, tanto no setor de matéria quanto no setor eletromagnético.

1.1 A Eletrodinâmica Clássica do Modelo Padrão Estendido

A eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz, obtida do MPE na presença de fontes externas, j^μ , é descrita em (3+1) dimensões pela densidade de lagrangeana [29]:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}d_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - A_\mu J^\mu, \quad (1.1)$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor do campo eletromagnético construído a partir do quadri-potencial, $A_\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ de forma usual; $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ é o dual de $F^{\mu\nu}$.

A eletrodinâmica acima, com o termo $d^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, foi primeiramente estudada no início da década de 90 por Carroll, Field e Jackiw [45, 96]. Eles se basearam em uma analogia com a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons em (2+1) dimensões [97, 98, 99] e realizaram uma extensão natural do termo para (3+1) dimensões, porém em (2+1) este termo não viola a simetria de Lorentz².

As violações de Lorentz aqui consideradas são as mais gerais que podem advir do setor de radiação do MPE. Elas são parametrizadas pelos campos tensoriais de fundo b_μ e $d_{\mu\nu\alpha\beta}$. Classicamente, estes termos podem assumir qualquer valor, porém como esperado da experiência com a eletrodinâmica de Maxwell, tais termos devem

²Em (2+1) dimensões temos $\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\epsilon^{\alpha\beta\mu}F_{\alpha\beta}A_\mu$, ($\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$). Devido a dimensionalidade do espaço-tempo, o símbolo de Levi-Civita só possui três índices, já em (3+1) dimensões é necessário o acoplamento com um vetor externo para se construir o termo de Chern-Simons, levando a quebra de Lorentz (se tal vetor de fundo for constante) que é o caso de b^μ acima. Mais detalhes a seguir.

ser muito pequenos, ou até mesmo, se não-nulos, incomensuráveis, pois as violações de simetrias parametrizadas por eles nunca foram detectadas na Natureza. O campo de fundo b^μ possui dimensão de massa, sendo responsável por um “gap” tipo-massa para a radiação do modelo, como veremos a seguir. Já $d_{\mu\nu\alpha\beta}$ é adimensional e com as propriedades de simetria do tensor de Riemann, e a restrição adicional de possuir um duplo traço³ $d^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$ nulo, contendo apenas 19 componentes independentes. Estes tensores são ditos campos de fundo pois permeariam todo o espaço-tempo e não temos acesso a suas fontes, ou seja, são campos tensoriais fixos que selecionam uma direção privilegiada no espaço-tempo, quebrando sua isotropia.

Sob transformações de Lorentz estes campos de fundo não são covariantes, ou seja, não se comportam como quantidades genuinamente tensoriais. Para ser mais preciso, considere uma transformação de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ que conecta dois observadores inercias diferentes, também chamada de transformação de observador ou passiva⁴. Neste caso, o campo de fundo b^μ se transforma como um 4-vetor, no sentido que os dois observadores descrevem a mesma física, cada um em seu respectivo referencial inercial, sendo ambos conectados por uma transformação de Lorentz de coordenadas ou de observador. Considere agora o outro tipo de transformação realizada nas coordenadas da partícula (e não do observador como anteriormente) também chamada de transformação ativa. Neste caso, o campo de fundo b^μ se transforma como um conjunto de quatro escalares independentes e a descrição física de um fenômeno não é mais a mesma para um observador que olha para a partícula em diferentes sistemas: em um sistema, a partícula pode mover-se paralelamente a \mathbf{b} e em outro girado de $\frac{\pi}{2}$ ele pode mover-se perpendicularmente a \mathbf{b} , mudando drasticamente a descrição física, como veremos posteriormente [26]. É dito, então, que o modelo descrito por (1.1) é invariante de Lorentz sob transformações de observador, pois

³Se $d^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \neq 0$, estas componentes apenas redefiniriam o termo cinético $-\frac{1}{4}F^2$ do lagrangeano (1.1) não sendo portanto mensurável experimentalmente, não acrescentando nada de novo ao modelo. Portanto, podemos, sem perda de generalidade e conteúdo físico, tomar $d^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$.

⁴Esta transformação pode ser a mais geral possível, envolvendo “boost” ao longo de todas as direções, bem como, rotações espaciais.

diferentes observadores dão a mesma descrição física, mas a simetria de Lorentz sob transformação de partícula é quebrada, logo o modelo viola a simetria de Lorentz. Discussão análoga vale para o tensor $d_{\mu\nu\alpha\beta}$. O que acontece aqui é completamente análogo ao exemplo discutido na Introdução, e os campos de fundo b^μ e $d^{\mu\nu\alpha\beta}$ fazem aqui o papel do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ no exemplo discutido lá.

Para ver como esta violação de Lorentz ocorre mais concretamente, considere a ação $S(x) = \int d^4x \mathcal{L}(x)$, obtida de (1.1). Em teorias de campo invariantes de Lorentz a ação é uma quantidade escalar sob tais transformações. Porém, o termo $A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}$, que aparece na ação, pertence à representação vetorial do grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ e o campo de fundo b_μ não pertence a nenhuma representação deste grupo, pois não possui uma lei de transformação bem definida. Logo, o termo $b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}$, que aparenta ser um escalar, só possui uma lei de transformação bem definida para transformações de coordenadas ou de observador:

$$b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} \longrightarrow \Lambda^\alpha{}_\mu b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\mu\beta} = b'_\mu A_\beta \tilde{F}^{\mu\beta}, \quad (1.2)$$

de forma que a ação não é mais uma quantidade genuinamente escalar de Lorentz [26]. Poder-se-ia pensar no termo $\Lambda^\alpha{}_\mu b_\alpha = b'_\mu$ como um novo vetor de fundo, no novo sistema de referência, porém, isto só é correto para transformações de observador e b'_μ é especificado pelo vetor b_α no sistemas de coordenadas inicial mais os parâmetros da transformação.

Termos que violam a simetria de Lorentz se dividem em dois grupos. Um grupo sendo parametrizado por termos que também violam a simetria discreta de CPT e outro grupo que preserva esta simetria. Como estabelecido por Greenberg: qualquer teoria de campos local interagente que viole a simetria CPT também violará Lorentz; porém, violação de Lorentz não necessariamente implica em violação de CPT [27, 28]. Este teorema, às vezes, é chamado teorema “anti- CPT ”. Veja o apêndice A para mais detalhes. Os campos tensoriais de fundo, com um número ímpar de índices de Lorentz, são quantidades que não sentem as transformações discretas de CPT , como b^μ , o que acarreta em violação da simetria discreta de CPT

devido às propriedades de transformações dos campos acoplados a ele na ação do modelo. Já $d^{\mu\nu\alpha\beta}$ pode ser decomposto em 4 setores distintos da seguinte forma [26]:

$$-\frac{1}{4}d_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\alpha(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2}\beta_{\mathbf{E}}^{jk}E^jE^k + \frac{1}{2}\beta_{\mathbf{B}}^{jk}B^jB^k + \frac{1}{2}\beta_{\mathbf{EB}}^{jk}E^jB^k,$$

sendo os coeficientes α , $\beta_{\mathbf{E}}^{jk}$, $\beta_{\mathbf{B}}^{jk}$ e $\beta_{\mathbf{EB}}^{jk}$ várias combinações do acoplamento $d^{\mu\nu\alpha\beta}$, e os 3 últimos termos possuem traço-nulo. Observe que todas as combinações possíveis envolvendo os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} aparecem. Relembremos as propriedades de transformação dos campos e potenciais [100]:

	\mathcal{C}	\mathcal{P}	\mathcal{T}	\mathcal{CPT}
\mathbf{A}	–	–	–	–
\mathbf{E}	–	–	+	+
\mathbf{B}	–	+	–	+

Tabela 2.1: Propriedades de transformação sob transformações discretas: o símbolo – significa que a grandeza muda de sinal, e +, que não muda.

Dessa forma, devido às propriedades de transformação dos campos, as componentes de $d_{\mu\nu\alpha\beta}$ que acoplam o campo elétrico \mathbf{E} com o campo magnético \mathbf{B} , $\beta_{\mathbf{EB}}^{jk}$ são ímpares sob paridade e reversão temporal separadamente, ou seja, mudam de sinal. As demais componentes deste campo de fundo, acoplando \mathbf{E} com \mathbf{E} , e \mathbf{B} com \mathbf{B} (isto é, α , $\beta_{\mathbf{E}}^{jk}$ e $\beta_{\mathbf{B}}^{jk}$) são invariantes sob paridade e reversão temporal. Este tensor de fundo também é invariante sob Conjugação de Carga, de forma que ele preserva cada uma das simetrias discretas separadamente, bem como o produto \mathcal{CPT} .

Já o termo $b_{\alpha}A_{\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ leva à violação de \mathcal{CPT} pois:

$$A_{\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \xrightarrow{\mathcal{C}} A_{\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

$$A_{\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \xrightarrow{\mathcal{P}} \begin{cases} -A_{\beta}\tilde{F}^{0\beta}, \\ A_{\beta}\tilde{F}^{i\beta}, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} \xrightarrow{\tau} \begin{cases} A_\beta \tilde{F}^{0\beta}, \\ -A_\beta \tilde{F}^{i\beta}, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} \xrightarrow{\mathcal{CPT}} -A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} \quad (1.6)$$

sendo b^μ invariante sob todas estas simetrias discretas. Logo, sob a transformação de \mathcal{CPT} o termo tipo-chern-Simons $b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}$ muda de sinal, levando à violação desta simetria. Classicamente, esta violação de \mathcal{CPT} leva a uma quebra da simetria de paridade e reversão temporal das equações de movimento (equações tipo-Maxwell) do modelo [45]. Já quanticamente, isto pode levar a um acoplamento entre partícula e anti-partícula aos campos de fundo de forma diferente ou, até mesmo, a possuírem diferentes tempos de vida, seções de choque, dentre outras possibilidades [6, 26].

Observe que a lagrangeana (1.1) não é invariante sob o grupo de transformações de calibre Abelianas locais, $U(1)$:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (1.7)$$

pois, apesar de $F_{\mu\nu}$ ser invariante, a lagrangeana depende explicitamente do campo de calibre A_μ , tanto no segundo termo $b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}$ como no termo de fonte. O termo de fonte leva à ação invariante de calibre, desde que as fontes j^μ sejam localmente conservadas, $\partial_\mu j^\mu = 0$, e localizadas em uma região finita do espaço-tempo, ou seja se anulem no infinito [100]. Vamos analisar sob que condições o termo tipo-Chern-Simons leva a uma ação invariante de calibre. Sob (1.7) a ação muda por:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^4x b_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} \partial_\beta \Lambda = \frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\alpha b_\beta - \partial_\beta b_\alpha) \tilde{F}^{\alpha\beta} \Lambda, \quad (1.8)$$

onde realizamos uma integração por partes e utilizamos as equações de Maxwell homogêneas $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ e anti-simetrizamos o tensor $\partial_\beta b_\alpha$. Logo, a invariância de calibre da ação do modelo requer que o termo acima se anule para uma função $\Lambda(x)$ qualquer, o que implica em $\partial_\beta b_\alpha = 0$, ou seja, o vetor b_μ deve ser constante. Esta é a condição que estamos considerando no MPE, de modo a garantir a conservação

da carga elétrica microscopicamente, via teorema de Noether [8, 9, 10]. Deve-se salientar que se b_α fosse um campo dinâmico, $b_\alpha = b_\alpha(x)$, então este termo não violaria a simetria de Lorentz; porém, seu 4-rotacional deveria se anular para que (1.8) se anulasse e a invariância de calibre fosse mantida. Nesse caso (4-rotacional nulo) poderíamos escrever $b^\alpha(x) = \partial^\alpha\theta(x)$, θ sendo um campo dinâmico, por exemplo, o campo de axion [45] (não estudaremos tal possibilidade aqui).

1.2 Equações de movimento e assuntos correlatos

As equações de movimento dinâmicas, obtidas via equações de Euler-Lagrange, da lagrangeana (1.1) são:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + d^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta} + b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.9)$$

Estas equações são as estensões das equações de Maxwell não-homogêneas por termos que violam a simetria de Lorentz. As equações homogêneas, ou geométricas, que expressam a relação campo-potencial, permanecem inalteradas pois $F_{\mu\nu}$ é definido da maneira usual:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.10)$$

A identidade de Bianchi acima estabelece a ausência de fontes para o campo magnético análogas a j^μ , ou seja, a ausência de monopolos magnéticos. Porém, tais objetos exóticos podem ser introduzidos neste modelo de forma consistente, via quebra, à mão da identidade de Bianchi, levando ao aparecimento de uma corrente elétrica induzida, como discutido na Introdução, e mostrado na Ref.[80]. As equações de Maxwell modificadas (1.9), apesar de conterem termos que violam a simetria de Lorentz, mantêm sua linearidade, tanto nos campos $F_{\mu\nu}$ (1.9) como em A_μ , como pode ser visto escrevendo-se a equação (1.9) em função de A_μ :

$$(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu - 2d^{\mu\alpha\beta\nu}\partial_\alpha\partial_\beta - b_\alpha\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta)A_\nu(x) = j^\nu(x). \quad (1.11)$$

As equações de movimento (1.9) e (1.10) claramente são invariantes de calibre pois só dependem do campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, bem como (1.11), como pode ser facilmente verificado. Esta invariância de calibre, como no caso da eletrodinâmica de Maxwell, pode ser utilizada para eliminar os graus de liberdade espúrios do modelo. Considerando o campo $A_\mu(x)$ como a entidade fundamental, a equação (1.11) corresponde a quatro equações para as quatro componentes de A_μ , porém como na eletrodinâmica de Maxwell o momento canônico conjugado a A^0 se anula, não sendo esta componente um campo dinâmico, levando assim a uma restrição nas componentes do campo A_μ [101]. Sobram, então, três equações de movimento para as três componentes espaciais de A_μ .

Ao se utilizar a invariância de calibre para remover os graus de liberdade espúrios, aqui é necessário um pouco de cuidado devido ao fato de não termos mais a simetria de Lorentz do modelo. Por exemplo, no caso usual, na ausência de fontes ($j^\mu = 0$) há uma equivalência entre o calibre de Coulomb (ou de Radiação), $\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0$, o calibre temporal, $A^0(x) = 0$, e o calibre de Lorentz $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$, porém quando há quebra da simetria de Lorentz, esta equivalência é perdida. Por exemplo, se o calibre de Coulomb é imposto, $\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0$, (como faremos no capítulo 2), então A^0 é não-nulo e não pode ser escolhido como nulo, possuindo esta componente a única propriedade de se manifestar como uma condição inicial, devido ao vínculo existente entre ela e as outras componentes, dito de outra forma, as equações de movimento não permitem fazer a escolha $A^0 = 0$, como no caso usual apesar desta componente não ser dinâmica [29].

Mais propriedades das equações de movimento (1.9) e (1.10) podem ser obtidas, por exemplo, se assumirmos soluções de ondas planas para $F_{\mu\nu}(x)$:

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(k) \exp(-ik \cdot x), \quad (1.12)$$

sendo que $k^\mu = (k^0 = \omega; \mathbf{k})$ pode ser considerado como a frequência e o vetor de onda da onda em questão, ou como a energia e o momento da onda se propagando. A solução (1.12) acima deve satisfazer às 8 equações de movimento (1.9) e (1.10).

Um método alternativo seria resolver para $A_\mu(x)$, em (1.11) e, posteriormente, obter os campos (mas, para as discussões que se seguem, a solução (1.12) é suficiente).

As equações de movimento homogêneas (1.10), que incluem a lei de Faraday e a lei de Gauss magnética, não são alteradas pela presença dos termos que quebram a simetria de Lorentz. Em forma tri-vetorial, elas são:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.13)$$

com o ansatz (1.12), estas equações se escrevem:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} - k^0 \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.14)$$

A primeira delas pode ser pensada como uma definição do campo magnético, desde que o campo elétrico seja conhecido, e a segunda, que é uma consequência da primeira, mostra que o campo magnético permanece transverso a direção de propagação, \mathbf{k} , e ao campo elétrico, apesar da violação da simetria de Lorentz.

Agora, da equação (1.9) na ausência de fontes, $j^\mu = 0$, uma relação de dispersão entre energia e momento pode ser obtida, como explicado por exemplo em [26]. Contudo, tratar cada caso de quebra de Lorentz, separadamente, é mais conveniente e simples. Vamos começar com o caso \mathcal{CPT} -par, ou seja sem violação da simetria discreta de \mathcal{CPT} . Então, com $b_\mu = 0$, encontramos para a relação de dispersão (considerando apenas termos lineares no tensor $d_{\mu\nu\alpha\beta}$ [29, 102]):

$$\omega_\pm = (1 + \rho \pm \sigma)|\mathbf{k}|, \quad (1.15)$$

onde

$$\rho = -\frac{1}{2}\tilde{d}_\mu{}^\mu, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\tilde{d}_{\alpha\beta}\tilde{d}^{\alpha\beta} - \rho^2, \quad (1.16)$$

sendo

$$\tilde{d}_{\mu\alpha} = d_{\mu\nu\alpha\beta}\hat{k}^\nu\hat{k}^\beta, \quad \hat{k}_\mu = k_\mu/|\mathbf{k}|. \quad (1.17)$$

A relação de dispersão (1.15) possui duas soluções, o que corresponde a dois campos elétricos distintos, \mathbf{E}_{\pm} , cada um propagando-se com uma relação de dispersão diferente. A solução geral é uma onda, viajando no vácuo, como superposição dos dois modos⁵, o que é muito distinto do caso convencional da eletrodinâmica com relação de dispersão $\omega = |\mathbf{k}|$, onde a propagação da onda é independente do estado de polarização e há uma degenerescência em energia dos dois estados. A solução (1.12), para o campo elétrico, fica:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{E}_+ e^{-i\omega_+ t} + \mathbf{E}_- e^{-i\omega_- t}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.18)$$

com os campos \mathbf{E}_{\pm} especificam a direção de polarização da onda e são ortogonais um ao outro e à direção de propagação (desde que se considere a relação de dispersão (1.15), ou seja, considerando-se apenas o termo dominante nos parâmetros que controlam a quebra de simetria [103]). Esta separação dos modos de polarização é uma forte evidência da ausência da simetria de Lorentz, e a sua principal característica é causar birrefringência da luz, mesmo no vácuo⁶. O fenômeno de birrefringência pode ser entendido como a rotação do plano de polarização (plano definido pelos vetores \mathbf{k} e \mathbf{E}) da luz viajando no meio; geralmente, isto é causado pela rotação do campo elétrico e, às vezes, é denominado de efeito Faraday [104].

As velocidades de fase, $v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$, e de grupo, $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$, são iguais para a relação de dispersão (1.15), $v = (1 + \rho \pm \sigma)$, portanto, qualquer que seja a forma como se defina a velocidade de propagação da radiação eletromagnética, elas coincidem. Uma terceira forma de velocidade é a velocidade de transporte de energia, $v_E = \frac{\Theta^{i0}}{\Theta^{00}}$ onde $\Theta^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da onda eletromagnética. Esta velocidade também é idêntica às de fase e de grupo, definidas acima, desde que se considere apenas os termos dominantes, como em (1.15) [102]. A diferença de velocidade entre

⁵Estamos considerando aqui uma única onda definida por um dado vetor de onda ou momento \mathbf{k} . No caso de termos um pacote de ondas policromático, a solução geral é dada pela superposição de Fourier de todas as ondas, sendo que cada onda possui dois modos distintos de polarização.

⁶Em eletrodinâmica convencional, o fenômeno de birrefringência da luz ocorre em meios ditos opticamente ativos.

os dois estados de polarização

$$\Delta v \equiv v_+ - v_- = 2\sigma \quad (1.19)$$

mostra que *apenas os termos contidos em σ causam birrefringência da luz*. Isto se limita a apenas 10 das 19 componentes independentes de $d^{\mu\nu\alpha\beta}$. Então para os dois modos \mathbf{E}_\pm , propagando-se através de uma distância L , a diferença de velocidade acima se reflete em uma diferença de tempo $\Delta t = L/\Delta v$ entre as duas ondas. Medidas astrofísicas podem ser usadas para por limites nos parâmetros que causam birrefringência, sendo que restrições advindas da mudança do estado de polarização da luz emitida por fontes cosmológicas restringe ainda mais estes 10 parâmetros para $|\sigma| < 2 \times 10^{-32}$ [102, 103]. Medidas da polarização linear de raios gama restringem estes parâmetros birrefringentes ainda mais, $|\sigma| < 3 \times 10^{-37}$ [105] (limite mais restrito para os parâmetros birrefringentes advindos de $d^{\mu\nu\alpha\beta}$). Limites para os nove parâmetros não-birrefringentes podem ser obtidos da ausência de radiação de Cherenkov no vácuo, para raios cósmicos de energia ultra-alta. Limites para os parâmetros não-birrefringentes, ρ , medidos desta forma indicam que $|\rho| < 10^{-18}$ [106].

Este último método possui a vantagem de se poder utilizar luz propagada por distâncias cosmológicas e longos períodos de tempo, o que possibilita efeitos cumulativos para quebras de Lorentz muito sensíveis. A radiação cósmica de fundo, que é a radiação eletromagnética mais antiga entendida por nós, se propagando atualmente, oferece uma oportunidade única para a busca por violações da simetria de Lorentz, pelo menos com os mecanismos de quebra tratados aqui. Estudos da polarização da radiação cósmica de fundo oferecem uma ampla sensibilidade para possíveis efeitos de todos os coeficientes na eletrodinâmica descrita pela lagrangiana (1.1). No caso dos termos que são \mathcal{CPT} -par, tal análise impõe os limites $|d^{\mu\nu\alpha\beta}| < 10^{-32}$ [67]. Segundo os autores, apesar de existirem limites mais restritivos que este, como aquele discutido acima, tais limites não são tão confiáveis quanto estes.

Vamos, agora, discutir o caso \mathcal{CPT} -ímpar, ou seja, vamos considerar $d^{\mu\nu\alpha\beta} =$

0 em (1.9). Este modelo é, provavelmente, o mais estudado teoricamente dentre todos os modelos de campos que se pode obter do MPE. Na Ref. [45] este modelo é estudado antes mesmo do desenvolvimento do MPE em 1997. O efeito de b_μ nas equações de Maxwell é simplesmente o de acrescentar um termo às fontes externas j^μ :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu + b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.20)$$

sendo que, em notação tri-vetorial, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - \mathbf{b} \cdot \mathbf{B},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{j} - b_0 \mathbf{B} + \mathbf{b} \times \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

o que mostra claramente que os campos são fontes para si-mesmos, devido ao acoplamento com o vetor de fundo. Estas equações, juntamente às homogêneas (1.13) são equações acopladas para os campos, e procedendo-se como usual: tomando-se o rotacional da primeira em (1.13) e, usando-se as demais, obtêm-se a equação de onda para o campo elétrico (no vácuo $\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$) desacoplada do campo magnético:

$$\square \mathbf{E} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - b_0 \nabla \times \mathbf{E} - \partial_t(\mathbf{b} \times \mathbf{E}). \quad (1.22)$$

A equação de onda para o campo magnético não se desacopla do campo elétrico, como no caso usual, porém, podemos utilizar a equação (1.22) para obter o campo elétrico e, como explicado no texto abaixo de (1.14), as equações homogêneas definem o campo magnético a partir do elétrico. Uma peculiaridade das equações (1.21) é que, apesar do campo magnético permanecer transversal à direção de propagação e ao campo elétrico, o campo elétrico perde o seu caráter transversal, possuindo uma componente longitudinal, pois $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$, mesmo no vácuo. Isto surge como consequência do vetor de fundo gerar um “gap” tipo-massa para a radiação, mas

permanecendo com apenas dois estados de polarização⁷. A relação de dispersão para este caso pode ser obtida da equação de onda (1.22) e da solução (1.12) acima. A relação de dispersão assim obtida pode ser escrita como [45]:

$$(k_\mu k^\mu)^2 + (k_\mu k^\mu)(b_\nu b^\nu) - (k_\mu b^\mu)^2 = 0 \quad (1.23)$$

que é válida para um vetor de onda, $k^\mu = (k^0, \mathbf{k}) = (\omega, \mathbf{k})$, e b_μ arbitrários. O acoplamento entre o vetor de fundo e o vetor de onda leva a uma separação dos modos de polarização, com as ondas viajando a distintas velocidades de fase e grupo. Isto causa birrefringência do vácuo⁸. A solução geral para a equação de onda (1.22) é obtida pela superposição das duas soluções para o campo elétrico \mathbf{E}_\pm , como no caso \mathcal{CPT} -par explicado acima⁹, sendo a solução dada pela equação (1.18) com ω_\pm obtidos de (1.23).

Para ver esta separação dos modos de polarização mais claramente, considere o caso em que b^μ é um vetor do tipo-tempo. Como a simetria de Lorentz “está perdida” existirá uma classe de referenciais inerciais privilegiados, neste caso, um referencial privilegiado é um onde $b^\mu = (b^0 = m, \mathbf{b} = \mathbf{0})$. Observe que esta componente temporal do vetor de fundo destrói a invariância sob “boosts”, mas preserva a simetria rotacional do modelo, enquanto uma componente espacial diferente de zero destrói a simetria rotacional. Neste caso a relação de dispersão (1.22) assume a forma:

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|(|\mathbf{k}| \pm m), \quad (1.24)$$

mostrando que cada modo de polarização possui uma relação de dispersão distinta

⁷Esta “massa” algumas vezes é denominada massa topológica, pois este “gap” não se acopla a campos gravitacionais, digo, não sente a ação de campos gravitacionais e só existe devido à uma mudança na topologia do espaço-tempo, devido a presença do campo de fundo b_μ .

⁸Para k^μ pequeno, nos podemos resolver a relação de dispersão (1.23) para ω em primeira ordem em k^α e encontrar $|\mathbf{k}| = \omega \mp \frac{1}{2}(b^0 - \mathbf{b} \cdot \hat{k})$; então a mudança na polarização, Δ , depois que a onda viaja uma distância L é $\Delta = -\frac{1}{2}(b^0 - \mathbf{b} \cdot \hat{k})L$ [45, 96].

⁹O comentário 5 se aplica aqui também.

viajando então a velocidades diferentes. Para este caso, b^μ tipo-tempo, a frequência da radiação torna-se imaginária quando $|\mathbf{k}| < m$: isto significa que há soluções instáveis, que crescem indefinidamente, levando à instabilidade da teoria [45, 96]. Quanticamente, tal instabilidade reflete-se na instabilidade do vácuo da teoria [77, 78, 79].

Utilizando-se dados geomagnéticos e o fato de b^μ ser responsável por gerar um “gap” de massa para a radiação, obtem-se um limite na componente temporal do vetor de fundo como sendo da ordem de $m < 6 \times 10^{-26} \text{GeV}$. Limites mais severos surgem de dados astrofísicos, medindo-se a rotação do plano de polarização da radiação, $m < 1 \times 10^{-42} \text{GeV}$ [45]. Como esperado, estes parâmetros que quebram a simetria de Lorentz são muito pequenos. Após a publicação destes resultados [45], houve uma grande repercussão na comunidade científica sobre a questão do universo ser ou não birrefringente. Os autores Carroll, Field e Jackiw impuseram limites apenas para a componente temporal de b^μ , pois eles não acreditam em uma quebra da simetria rotacional do espaço, causada por uma componente espacial deste vetor de fundo [96]. Contudo Nodland e Ralston [107] alegaram que este tipo de quebra de simetria rotacional do espaço poderia existir, afirmando que encontraram uma anisotropia na propagação de ondas eletromagnéticas viajando por distâncias cosmológicas. Posteriormente, Carroll e Field re-analisaram os dados de Nodland e Ralston [108] e identificaram um erro cometido por estes autores, não encontrando qualquer evidência de um espaço anisotrópico, (veja também a referência [109]).

Como no caso CPT -par, estudos da polarização da radiação cósmica de fundo oferecem os melhores limites para b_μ . Tal análise revela que $|b^\mu| < 3 \times 10^{-42} \text{GeV}$ [67]. Note que, no caso da radiação cósmica de fundo o limite é para todas as componentes do vetor de fundo, enquanto na análise da Ref. [45], os limites são apenas para a componente temporal.

Como era de se esperar, tanto experimentos terrestres quanto observações astrofísicas restringem severamente todos os parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz. É importante lembrar que nenhum experimento ou observação

astrofísica já feita, até o presente momento, fixou algum valor para tais parâmetros: o que sempre se obteve são limites superiores (quão grande eles podem ser) para a magnitude das componentes destes campos de fundo. O fato de tais estimativas serem muito pequenas, como discutido anteriormente, tanto para o caso \mathcal{CPT} -par quanto para \mathcal{CPT} -ímpar, somente corrobora um fato amplamente verificado: de que não há quebra da simetria de Lorentz na escala de energias do Modelo Padrão. Tais violações de simetria podem ocorrer, por exemplo, em teorias de cordas, em escalas de energia muito além das usuais. O modelo tratado aqui, descreveria uma física além do Modelo Padrão, que segundo Kostelecký e colaboradores, ao desenvolverem o MPE, poderia se obter algum rastro de tal quebra de simetria na escala de energia do Modelo Padrão (mas este não parece ser o caso no setor eletrodinâmico, pelo menos até o presente momento).

As complicações sobre estabilidade, mencionadas anteriormente, podem ser evitadas se tomarmos b^μ tipo-espaço, sendo que neste caso uma classe de sistemas de coordenadas privilegiado é tal que $b^\mu = (0, m\hat{b})$. Nesta situação, a relação de dispersão (1.23) assume a forma [74]:

$$(\omega_\pm)^2 = |\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{2}m^2 \pm \frac{1}{2}m\sqrt{m^2 + 4(\mathbf{k} \cdot \hat{b})^2}. \quad (1.25)$$

Em geral, cada modo carrega um “gap” de massa distinto, proporcional a m . Para $\mathbf{k} \cdot \hat{b} = 0$, um dos modos possui massa nula, enquanto o outro carrega um “gap” igual a m . Note também que, neste caso, há birrefringência da luz no vácuo, pois as velocidades de cada modo de polarização são diferentes. Como veremos no Capítulo 3, vários resultados sobre emissão e absorção de radiação pela matéria dependem fortemente da forma como o vetor de onda \mathbf{k} se acopla ao vetor de fundo e a outros parâmetros, de forma que as relações de dispersão (1.15) e (1.25) serão muito importantes no presente trabalho [85].

Antes de finalizarmos esta seção, gostaríamos de dizer que as equações dinâmicas (1.9) têm a interessante propriedade de que os termos que violam a simetria de Lorentz envolvem ambos os campos, elétrico e magnético, e o acoplamento en-

tre eles com os campos tensoriais de fundo implica que, mesmo no caso estático, a presença de campo elétrico gera campo magnético, e vice-versa. Já as equações (1.9), para o caso \mathcal{CPT} -par, também lembram as equações de Maxwell usuais em meios materiais lineares em movimento relativo ao observador. Essa analogia permite definir vetores análogos ao deslocamento elétrico, \mathbf{D} , e ao campo auxiliar, \mathbf{H} , de forma que as equações com quebra de simetria de Lorentz se tornem idênticas às de Maxwell em meios materiais. Esta analogia permite simplificar algumas análises e, mais detalhes a respeito pode ser encontrado nas Refs. [29, 102]. Neste Capítulo, apenas alguns aspectos dinâmicos do modelo (1.1) foram discutidos, porém, ambientes eletrostáticos e magnetostáticos são interessantes para se estudar violação da simetria de Lorentz e impor limites para os parâmetros que controlam a quebra. Mais detalhes podem ser encontrados em [110].

1.3 O tensor de Energia-momento e Leis de Conservação

O tensor de energia-momento canônico para os campos pode ser construído a partir da lagrangeana (1.1), seguindo-se o procedimento padrão [8, 9, 100]. Este tensor pode ser parcialmente simetrizado, mas uma simetrização completa, como no caso usual da eletrodinâmica clássica, sem afetar a energia e o momento do campo não é possível. Isso se deve à componente anti-simétrica deste tensor, a qual não pode ser escrita como uma derivada total. Uma expressão um pouco mais elegante para o tensor de energia-momento canônico do campo pode ser obtida pela adição de termos que são derivadas totais [29]. A expressão final fica:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\beta} F^\nu{}_\beta + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + d^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}) - d^{\alpha\beta\mu\gamma} F^\nu{}_\gamma F_{\alpha\beta} + b^\nu A_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu}. \quad (1.26)$$

Na ausência de fontes externas, $j^\mu = 0$, $\Theta^{\mu\nu}$ é conservado, como no caso usual, como pode ser checado utilizando-se as equações de movimento (1.9) e (1.10):

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (1.27)$$

Fontes produzem a modificação convencional

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = j_\mu F^{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Note, no entanto que $\Theta^{\mu\nu} \neq \Theta^{\nu\mu}$: um reflexo da ausência da simetria de Lorentz. A parte anti-simétrica, $\Theta^{[\mu\nu]} = \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}$, é dada por:

$$\Theta^{[\mu\nu]} = A_\alpha (b^\mu \tilde{F}^{\nu\alpha} - b^\nu \tilde{F}^{\mu\alpha}) - F_{\alpha\beta} (d^{\alpha\beta\mu\gamma} F^\nu{}_\gamma - d^{\alpha\beta\nu\gamma} F^\mu{}_\gamma), \quad (1.29)$$

não pode ser escrita como uma derivada total, isto é, simetrização não é possível, a menos que energia e momento sejam redefinidos. A conservação de energia e momento,

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int d^3x \Theta^{0\nu} = 0, \quad (1.30)$$

assegura que a energia e o momento dos campos totais (cargas de Noether) são conservados para um observador em repouso em relação ao sistema de referência em que os campos são especificados [100], ou seja, a conservação da energia e do momento se dá em um sistema de coordenadas privilegiado. Isto não implica em um comportamento convencional segundo transformações de Lorentz, pois as cargas de Noether (energia e momento) dependem de acoplamentos entre campos eletromagnéticos e os campos de fundo [26]. Em outras palavras, apesar de energia e momento serem conservados para um observador particular, tais quantidades podem não ser conservadas para um segundo observador, conectado ao primeiro por uma transformação de Lorentz.

O tensor de energia-momento (1.25) depende explicitamente do campo A_μ , logo, sob as transformações de calibre (1.7) ele muda por um termo adicional $-b^\nu \tilde{F}^{\alpha\mu} \partial_\alpha \Lambda = -\partial_\alpha (b^\nu \tilde{F}^{\alpha\mu} \Lambda)$, que é uma divergência total e que não afeta a energia e o momento conservados, $P^\mu = \int d^3x \Theta^{0\mu}$, os quais são invariantes de calibre [45], como no caso usual [100].

É preciso um pouco de cuidado para se interpretar as componentes de $\Theta^{\mu\nu}$. Primeiro, o fato de energia e momento serem conservados é um reflexo da invariância da ação, obtida de (1.1) sob translações espaço-temporais, logo, via teorema de Noether [8, 9, 10], esta

simetria contínua do modelo nos dá as cargas de Noether conservadas temporalmente, que são a energia e o momento linear do campo eletromagnético. Segundo, a presença de termos não-simétricos em $\Theta^{\mu\nu}$ implica que a interpretação física das componentes deste tensor de energia-momento não é tão imediata. Embora as componentes Θ^{i0} possam ser consideradas como as componentes de um vetor de Poynting generalizado, sua integral de volume não é uma quantidade conservada e não pode ser identificada com a integral volumétrica das componentes Θ^{0i} , que são as quantidades conservadas e possuem uma interpretação física clara. Tais características surgem como uma consequência do acoplamento entre os campos de fundo e o campo eletromagnético [29].

A densidade de energia dos campos pode ser escrita como:

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - d^{0j0k} E_j E_k + \frac{1}{4} d^{jklm} \epsilon^{jkq} \epsilon^{lmq} B_q B_p - b^0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.31)$$

Observe que $d^{\mu\nu\alpha\beta}$ não leva a uma energia total do campo negativa, desde que suas componentes sejam pequenas, $d^{\mu\nu\alpha\beta} \ll 1$, como experimentos sugerem. Esse é um fato satisfatório, pois estamos tratando do campo eletromagnético livre, sem interação. Logo, para que o teoria seja estável, mesmo classicamente, é necessário que sua energia livre seja limitada inferiormente, possua um mínimo. Já a componente temporal de b^μ resulta em uma contribuição para a energia que não é positiva-definida e não possuindo um limite inferior. Para ver isso mais claramente, façamos momentaneamente $d^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, de modo que tenhamos [45]:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + (\mathbf{B} - b^0 \mathbf{A})^2) - \frac{1}{2} b_0^2 \int d^3x \mathbf{A}^2. \quad (1.32)$$

Como já mencionado, isto é uma forte evidência de instabilidade da teoria clássica, que possui uma função de Green com crescimento exponencial e é não causal. Tais dificuldades podem ser resolvidas em âmbito clássico simplesmente tomando-se b^μ do tipo-espaço e escolhendo-se um sistema de referência privilegiado, onde $b^\mu = (0, \mathbf{b})$. Porém, transformações de Lorentz para outros sistemas de referência podem reintroduzir esta instabilidade.

A presença dos campos tensoriais de fundo, b^μ e $d^{\mu\nu\alpha\beta}$, são responsáveis por violar várias simetrias do espaço-tempo como temos discutido. A simetria translacional do espaço-tempo é preservada pelo MPE, o que resulta em conservação de energia e mo-

mento. Já o momento angular não é mais conservado pois os campos de fundo selecionam direções privilegiadas no espaço-tempo quebrando a sua isotropia (o fato do tensor de energia-momento (1.25) não ser simetrizável é forte evidência dessa anisotropia). Uma consequência imediata disto, e talvez a mais drástica, é que a densidade de momento angular do campo,

$$\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} = \Theta^{\mu\rho}x^\sigma - \Theta^{\mu\sigma}x^\rho, \quad (1.33)$$

não possui divergência nula, $\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\alpha} \neq 0$, levando à uma não conservação do momento angular como adiantado acima. Outra consequência que se pode extrair da equação (1.33) é que os geradores do grupo de Lorentz,

$$J^{\mu\nu} = \int d^3x \mathcal{M}^{0\mu\nu} = \int d^3x (\Theta^{0\mu}x^\nu - \Theta^{0\nu}x^\mu), \quad (1.34)$$

não são conservados temporalmente [12]. Para $d^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, é possível classificar os subgrupos do grupo de Lorentz $SO(1,3)$, que permanecem como simetrias do espaço-tempo [111]. Tal classificação é importante, por exemplo, para se classificar os estados de uma partícula presentes no espectro da teoria [10].

Das dez cargas de Noether, associadas às dez transformações de simetrias do grupo de Poincaré (quatro translações, três rotações e três boosts) a inclusão do termo de Chern-Simons $b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}$ mantém pelo menos invariância translacional. Contudo, a simetria de dilatação que a teoria de Maxwell possui é quebrada pois b^μ possui dimensão de massa, introduzindo uma certa escala no modelo. O grupo de Lorentz é quebrado em grupos menores associados com b^μ . Para b^μ tipo-tempo, a simetria máxima do grupo de Lorentz é a invariância rotacional $SO(3)$. No sistema em que b_μ é puro tipo-tempo, $(b^0, \mathbf{0})$, o momento angular é conservado. Então, 7 das 10 cargas de Noether permanecem constantes. Já para b^μ tipo-espaço, a simetria mais ampla que se pode obter é $SO(1,2)$: invariância de Lorentz em duas dimensões espaciais e uma temporal. Este grupo é tridimensional e leva à conservação de 7 cargas de Noether, como anteriormente. Finalmente, para o caso em que b^μ é tipo-luz, a simetria remanescente é $ISO(2)$ que corresponde a rotações e translações em duas dimensões. Este grupo também é tridimensional, e leva à conservação de 7 cargas de Noether [111]. Uma classificação deste tipo pode ser feita também na presença de $d^{\mu\nu\alpha\beta}$

porém, como este é um campo de fundo com quatro índices tensoriais a análise fica bem mais complicada.

1.4 Quantização Canônica

Nesta seção vamos discutir a quantização canônica do campo de radiação livre. Isto será importante pois, no próximo capítulo, trataremos da interação da radiação com a matéria, considerando o campo eletromagnético quantizado e os elétrons, descritos pela Mecânica Quântica não-relativística. Aqui, encontramos as mesmas dificuldades para quantizar A^μ como no caso usual. O campo vetorial possui somente duas componentes independentes, como discutido anteriormente (veja também o Apêndice C), mas é descrito por um 4-vetor que possui quatro componentes. Devemos escolher apenas duas destas quatro componentes para serem físicas. Usa-se o calibre de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0$, pois não há razão para se considerar uma escolha de calibre covariante de Lorentz, já que a covariância de Lorentz não é manifesta no modelo [47].

A escolha $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ não é covariante de Lorentz, porém como o modelo considerado é covariante sob transformações de observador, é possível realizar cálculos e obter resultados que sejam covariantes de observador, desde que simultaneamente a uma transformação de Lorentz de observador, façamos uma transformação de calibre para obter um novo potencial \mathbf{A} que satisfaça a condição de transversalidade acima. A escolha de um calibre não covariante sob transformações de observador se justifica, pois no calibre de Coulomb a descrição de vários processos físicos é simples e transparente, por exemplo, a absorção e a emissão de fótons. Em outras palavras, com esta escolha a Natureza física do campo eletromagnético é mais evidente [8, 112].

Uma teoria quântica consistente para o caso \mathcal{CPT} -ímpar é possível apenas no caso em que o vetor de fundo b^μ é puramente tipo-espaço, caso contrário o modelo viola causalidade ou unitariedade, e conseqüentemente, uma possível quantização do modelo não é possível [74, 76, 77, 84]. Tal fato confirma as dificuldades apresentadas com um b^μ tipo-tempo já no tratamento clássico discutido anteriormente. Já no caso \mathcal{CPT} -par, a análise realizada no Apêndice C mostra que uma teoria quântica consistente pode sempre ser obtida, desde que os parâmetros que controlam a quebra $d^{\mu\nu\alpha\beta}$ sejam pequenos. Isto

já era de se esperar pois mesmo classicamente, este campo de fundo leva a uma teoria estável, causal e consistente. Um ponto sutil que merece um pouco de atenção é o fato que apesar de introduzir um “gap” de massa para a radiação, no caso \mathcal{CPT} -ímpar, a quebra de Lorentz mantém o número de graus de liberdade físicos propagados pelo modelo, que são 2 (mais detalhes veja o Apêndice C).

Procedemos, então, como no caso usual [112, 113]: começamos expandindo $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ em série de Fourier (ondas planas) no interior de uma região de volume $V = L^3$. Utilizando-se condições de contorno periódicas:

$$k_x, k_y, k_z = \frac{2n\pi}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (1.35)$$

e promovendo os coeficientes da expansão de Fourier do campo a operadores de aniquilação e criação que atuam no espaço de Fock da teoria, obtem-se o operador do campo [47]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_+}} \left[a_+(\mathbf{k}) \vec{\varepsilon}_+(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_+ t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2\omega_-}} \left[a_-(\mathbf{k}) \vec{\varepsilon}_-(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_- t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] + \text{H.C.} \right), \end{aligned} \quad (1.36)$$

onde H.C. significa conjugado hermitiano do termo anterior. Os operadores $a_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{k})$ e $a_{\pm}(\mathbf{k})$ são os operadores de criação e aniquilação, tempo independentes, respectivamente, satisfazendo:

$$[a_{\pm}(\mathbf{k}), a_{\pm}(\mathbf{l})] = [a_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{k}), a_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{l})] = 0, \quad [a_{\pm}(\mathbf{k}), a_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{l})] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \quad (1.37)$$

onde o símbolo δ_{AB} é o Delta de Kronecker (obviamente, no limite $V \rightarrow \infty$, nós obtemos $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \rightarrow \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{l})$). Utilizando-se tais relações de comutação, o espaço de Fock dos estados pode ser contruído de forma usual impondo-se $a_+(\mathbf{k})|0\rangle = a_-(\mathbf{k})|0\rangle \equiv 0$. Portanto, quando esses operadores atuam em um estado de fótons geral, tem-se:

$$a_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k},\pm}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\pm} + 1}|n_{\mathbf{k},\pm} + 1\rangle \quad \text{e} \quad a_{\pm}(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k},\pm}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\pm}}|n_{\mathbf{k},\pm} - 1\rangle. \quad (1.38)$$

Por exemplo, $a_{+}^{\dagger}(\mathbf{k})$ cria um fóton com momento \mathbf{k} e frequência ω_+ , enquanto $a_+(\mathbf{k})$ o aniquila. Similarmente para $a_{-}^{\dagger}(\mathbf{k})$ e $a_-(\mathbf{k})$. Recordando que as relações entre momento e

frequência são dadas pelas equações (1.15) e (1.25), nos casos \mathcal{CPT} -par e \mathcal{CPT} -ímpar (com $b^0 = 0$ e $\mathbf{b} = m\hat{\mathbf{b}}$), estados de fótons mais gerais, incluindo distintos estados de polarização, podem ser construídos a partir do vácuo, e são dados pelo produto direto de autovetores, digão, $|n_{\mathbf{k}_1,+}; m_{\mathbf{k}_2,-}; \dots\rangle = |n_{\mathbf{k}_1,+}\rangle \otimes |m_{\mathbf{k}_2,-}\rangle \otimes \dots$. O operador número, atuando nos estados, conta o número de fótons com um dado momento e uma dada polarização, $N_{\mathbf{k},\pm} = a_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{k})a_{\pm}(\mathbf{k})$, e suas propriedades básicas e relações de incerteza podem ser obtidas. Por exemplo, a relação de incerteza entre os operadores número e fase é $\Delta N \Delta\phi > 1$, como usual, o que expressa um fenômeno eminentemente quântico da radiação eletromagnética: se o número de fótons é fixo, então a fase do campo eletromagnético observável não possui um valor preciso, flutuando em torno de um valor médio.

Os estados de uma partícula, construídos a partir do vácuo, carregam 4-momento $k^{\mu} = (\omega, \mathbf{k})$, discutidos anteriormente, (eqs. (1.15) e (1.25)). Com as escolhas apropriadas dos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz, podemos escolher 4-momentos com componentes temporais positivas definidas, isto é, para qualquer valor de $d^{\mu\nu\alpha\beta}$ aproximado em primeira ordem e para b^{μ} puramente tipo-espaço. Este requerimento da componente temporal do 4-momento carregado pelos estados de uma partícula ser positiva definida valida a quantização canônica (1.36) e (1.37) do modelo.

No caso usual da QED, as transformações de Lorentz são implementadas unitariamente no espaço de Hilbert da teoria [10], e a covariância da teoria segue daí diretamente. Contudo, no presente caso os campos tensoriais de fundo que controlam a quebra da simetria de Lorentz carregam índices do espaço-tempo (índices de Lorentz) e seus valores dependem do observador, como discutido na Introdução e anteriormente neste Capítulo. Isto implica que os espaços de Fock, construídos por diferentes observadores, são inequivalentes. Contudo, a invariância sob transformações de observador garante uma correspondência dos espaços de Fock entre todos os observadores [79].

A expansão (1.36) para o campo de radiação é válida em qualquer um dos casos, \mathcal{CPT} -par ou ímpar separadamente, e mesmo no caso geral, com ambas as quebras, como na lagrangeana (1.1), desde que as contribuições dos dois casos sejam consideradas na expansão acima ou, alternativamente, escrevendo-se ω_{\pm} levando-se em conta ambas as violações. No entanto, um entendimento mais claro do conteúdo físico e das consequências daqueles termos, para processos radiativos, é obtida estudando-os separadamente. Por

exemplo, a energia total e o momento transportados pelo campo de radiação no caso \mathcal{CPT} -ímpar, com $b^\mu = (0; m\hat{b})$, são [47]:

$$: E := \sum_{\mathbf{k}} \left(\omega_+(\mathbf{k}) a_+^\dagger(\mathbf{k}) a_+(\mathbf{k}) + \omega_-(\mathbf{k}) a_-^\dagger(\mathbf{k}) a_-(\mathbf{k}) \right) \quad (1.39)$$

$$: \mathbf{P} := \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{k} a_+^\dagger(\mathbf{k}) a_+(\mathbf{k}) + \mathbf{k} a_-^\dagger(\mathbf{k}) a_-(\mathbf{k}) \right), \quad (1.40)$$

onde $:$ denota ordenamento normal (“normal ordering”) e corresponde a se escrever todos os operadores de aniquilação a direita dos operadores de criação. Note que os autovalores da energia são sempre positivos para as funções ω_\pm dadas por (1.25), e o campo de radiação pode ser visto como uma coleção de osciladores harmônicos desacoplados (não interagentes). Expressões análogas para o caso \mathcal{CPT} -par podem ser igualmente trabalhadas.

As expressões explícitas para os vetores de polarização, que dependem da relação entre ω e \mathbf{k} , para o caso \mathcal{CPT} -ímpar, assumem a forma [47]:

$$\vec{\epsilon}_\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma(\Gamma \pm m)}} [2\omega_\pm \cos \theta \hat{\xi}_1 \mp i(\Gamma \pm m) \hat{\xi}_2], \quad (1.41)$$

sendo que os vetores $(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{k})$ formam uma base dextrógira ortonormal, e $\Gamma = \Gamma(\mathbf{k}) \equiv \sqrt{m^2 + 4(\mathbf{k} \cdot \hat{b})^2}$. Para o caso \mathcal{CPT} -par obtém-se [102]:

$$\vec{\epsilon}_\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{1 \mp 2 \cos \theta}} \left[\sin \theta \hat{\xi}_1 \pm (1 - \cos \theta) \hat{\xi}_2 \right], \quad (1.42)$$

com $\tan \theta = 2\tilde{d}^{12}/(\tilde{d}^{11} - \tilde{d}^{22})$. Note que $\vec{\epsilon}_\pm \cdot \hat{k} = 0$ e $\vec{\epsilon}_\pm \cdot \vec{\epsilon}_\pm = \delta_{+-}$.

Os operadores campo elétrico e magnético podem ser expressos para o caso \mathcal{CPT} -ímpar na mesma forma que em (1.36), simplesmente trocando-se os vetores de polarização $\vec{\epsilon}_\pm$ por [47]:

$$\vec{f}_\pm \equiv i\omega_\pm \vec{\epsilon}_\pm + m(\vec{\epsilon}_\pm \cdot (\hat{k} \times \hat{b})) \hat{k} \quad (1.43)$$

para se obter o operador campo elétrico, \mathbf{E} , e por

$$\vec{g}_\pm \equiv i\mathbf{k} \times \vec{\epsilon}_\pm \quad (1.44)$$

para se obter o operador campo magnético, \mathbf{B} . Note que o campo elétrico não é mais transversal como no caso usual possuindo uma componente longitudinal, que é muito pequena devido a pequena magnitude do parâmetro m .

As relações de comutação entre as componentes do campo de radiação, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, bem como, entre os observáveis \mathbf{E} e \mathbf{B} , podem ser calculadas, por exemplo, como realizado na Ref. [74], onde os autores mostraram que quando os observáveis estão separados por um intervalo do tipo-espaço eles comutam, evidenciando que tais operadores de campo respeitam a microcausalidade. As funções comutadores entre os campos apresentam uma estrutura um pouco mais complexa que na QED usual, mas no limite em que o parâmetro $m \rightarrow 0$, elas se igualam as funções de Pauli-Jordan da QED (mais detalhes podem ser encontrados na Ref.[74]).

Capítulo 2

Interação da radiação com a matéria

No fim do século XIX, Lord Rayleigh e J. H. Jeans escreveram uma expressão matemática para a distribuição de energia do campo de radiação, como uma função da frequência das ondas eletromagnéticas, para uma situação idealizada onde esse campo estaria confinado a uma região limitada por paredes perfeitamente absorventes. Eles associaram uma energia média de $K_B T$ (K_B é a constante de Boltzmann, $1.381 \times 10^{-23} J/K$ em unidades do sistema internacional ou $8.617 \times 10^{-5} eV/K$ e T a temperatura absoluta) a cada oscilador no interior da cavidade, obtendo um resultado em excelente acordo com os experimentos, no regime de baixas frequências e altas temperaturas. Porém, para altas frequências da radiação, havia um desacordo muito grande entre teoria e experimento [112]. Tais desacordos motivaram Max Planck, em uma reunião da Sociedade Alemã de Física, em 14 de Dezembro de 1900, a apresentar o artigo “*Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal*” onde uma das mais revolucionárias idéias da história da Física foi apresentada. Analisando o comportamento de elétrons nas paredes de corpo negro e sua interação com a radiação eletromagnética dentro da cavidade, Planck associou a energia de uma dada frequência da radiação a energia de um elétron na parede, oscilando senoidalmente com a mesma frequência, e postulou que a energia da partícula oscilante é quantizada, obtendo assim uma explicação teórica para o espectro de radiação de corpo negro. Somente mais tarde, em 1901 o próprio Planck, veio a aceitar a idéia de que a

energia das próprias ondas eletromagnéticas eram quantizadas em múltiplos inteiros de $\hbar\omega$ [114].

Planck chamou seu postulado de “um ato de desespero” pois ele disse: “eu sabia que o problema do equilíbrio entre matéria e radiação é de fundamental significado para a física, e eu sabia a fórmula que reproduz a distribuição de energia e uma interpretação teórica tinha que ser encontrada a qualquer custo, não importando quão alto” [114]. As idéias de Max Planck então marcaram o nascimento da Teoria Quântica, hoje chamada de Velha Teoria Quântica e possibilitou posteriormente, uma compreensão profunda (e clara) dos fenômenos quânticos da Natureza. Hoje, com novos desenvolvimentos, tanto teóricos quanto experimentais, temos vários métodos de calcular o espectro de corpo negro e a importância de tal fenômeno é remetida as próprias palavras de Planck, mencionadas acima. Vamos, neste capítulo estudar como o modelo de campos (1.1) modifica a interação da radiação com a matéria e, posteriormente, obteremos um espectro de corpo negro nesse ambiente com quebra de simetria de Lorentz. Os resultados aqui apresentados constituem as contribuições originais deste trabalho, publicadas recentemente [85].

2.1 Emissão e absorção de fótons por átomos

Para analisar algumas características da radiação eletromagnética emergindo desse modelo, com quebra da simetria de Lorentz, vamos considerar o caso de emissão e absorção de fótons por elétrons atômicos não-relativísticos, isto quer dizer que a dinâmica dos estados quânticos que descrevem os elétrons é ditada pela equação (não relativística) de Schrödinger¹. Explicitamente, vamos considerar o caso onde o átomo está inicialmente em um estado quântico A , interage com um fóton, caracterizado por (ω_+, \mathbf{k}) , e termina em um estado B (a transição envolvendo um modo com frequência ω_- é análogo). Em primeira ordem, como sabemos de teoria de perturbação tempo-depedente, o processo de absorção de um fóton pela matéria, tendo-se $|n_{\mathbf{k},+}\rangle$ fótons no estado inicial e $|n_{\mathbf{k},+} - 1\rangle$ fótons no estado final, é descrito pela seguinte matriz de elementos [112]:

¹Esta é uma aproximação bastante razoável, pois vamos considerar a interação da radiação com elétrons ligados, sendo que neste caso a Mecânica Quântica não-relativística descreve com excelente precisão o comportamento de tais partículas.

$$\langle B; n_{\mathbf{k},+} - 1 | H_I | A; n_{\mathbf{k},+} \rangle. \quad (2.1)$$

Sendo H_I a hamiltoniana de interação, a qual, atua nos estados atômicos A e B , bem como, nos estados do fóton, sendo o estado $|A; n_{\mathbf{k},+}\rangle$ o produto direto do estado atômico e do fóton, $|A; n_{\mathbf{k},+}\rangle = |A\rangle \otimes |n_{\mathbf{k},+}\rangle$. A interação é obtida da hamiltoniana da partícula livre através do acoplamento mínimo $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, e é escrita como²:

$$H_I = -\frac{e}{m_e} \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \mathbf{p}_i, \quad (2.2)$$

onde e and m_e são a carga e a massa do elétron, enquanto $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t)$ é o potencial vetor, na posição \mathbf{x}_i , no instante de tempo t , atuando em um elétron com momento não-relativístico \mathbf{p}_i , localizado em \mathbf{x}_i . A soma é feita sobre os vários elétrons que participam da interação. Considerando a eq. (1.36) obtem-se, a amplitude de transição, (lembrando que apenas o termo que contem o operador $a_+(\mathbf{k})$ contribui para uma matriz de elementos não nula):

$$\langle B; n_{\mathbf{k},+} - 1 | H_I | A; n_{\mathbf{k},+} \rangle = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{n_{\mathbf{k},+}}{2V\omega_+}} \sum_i \langle B | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \mathbf{p}_i \cdot \vec{\epsilon}_+ | A \rangle e^{-i\omega_+ t}. \quad (2.3)$$

Note que esta expressão é idêntica ao caso usual [112] exceto pela frequência da radiação ω_+ e pelo vetor de polarização $\vec{\epsilon}_+$, que carregam a informação sobre a quebra de simetria de Lorentz.

Como acontece na QED, a absorção de um fóton com estado de polarização distinto daquele liberado pelo campo eletromagnético é um evento impossível, sendo este resultado da ortogonalidade dos estados de fótons com diferentes polarizações, expresso pelas relações de comutação entre a e a^\dagger , eq. (1.37). Em geral, um processo em que um estado inicial sofre uma transição para um estado final, com estado de polarização diferente, é um processo proibido.

Analogamente ao caso de absorção de um fóton pela matéria, o processo de emissão, em que o número de fótons muda de $|n_{\mathbf{k},+}\rangle$, no estado inicial, para $|n_{\mathbf{k},+} + 1\rangle$, no estado

²Como estamos considerando o processo em primeira ordem não explicitamos o termo quadrático no campo \mathbf{A} que é de segunda ordem, pois ele muda o número total de fótons por 0 ou ± 2 , não contribuindo para o processo em primeira ordem. Também, estamos desconsiderando a interação do spin eletrônico com o campo magnético.

final, devido à emissão de um fóton pelo átomo pode ser computado. Neste caso, apenas o termo que contém o operador $a_+^\dagger(\mathbf{k})$ contribui para a amplitude de transição, de modo que:

$$\langle B; n_{\mathbf{k},+} + 1 | H_I | A; n_{\mathbf{k},+} \rangle = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{(n_{\mathbf{k},+} + 1)}{2V\omega_+}} \sum_i \langle B | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \mathbf{p}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_+^* | A \rangle e^{i\omega_+ t}. \quad (2.4)$$

Como no caso de absorção, a expressão acima é formalmente idêntica à usual. As amplitudes de transição obtidas em (2.3) e (2.4) são de validade geral, no sentido que não se fez nenhuma referência ao tipo de quebra da simetria de Lorentz, ou seja, elas são igualmente válidas tanto no caso com quebra de \mathcal{CPT} , como no caso onde isto não ocorre. As únicas modificações necessárias são nos vetores de polarização e nas relações de dispersão. Note que, neste tratamento, baseado em teoria quântica de campos para a emissão e absorção de radiação pela matéria, a emissão espontânea e estimulada de radiação são discutidas analogamente, sendo que a expressão (2.4) acima dá conta dos dois fenômenos, mesmo neste ambiente com quebra da simetria de Lorentz.

O fato das relações de dispersão presentes em (2.3) e (2.4) serem diferentes do caso padrão, $\omega = |\mathbf{k}|$, revelará alguns fatos interessantes, distintos do usual e característicos da quebra da simetria de Lorentz, como veremos nas próximas seções, ao analisarmos o espectro de corpo negro desta radiação.

2.2 Espectro de corpo negro

Nesta seção, vamos investigar como fica o espectro de radiação de corpo negro neste ambiente com quebra da simetria de Lorentz. Um corpo negro possui um espectro de radiação térmica universal, isto é, todo corpo negro a mesma temperatura emite e absorve radiação com o mesmo espectro característico (Figura 2.1, para duas temperaturas distintas).

As propriedades universais da radiação de corpos negros fazem com que eles sejam de interesse tanto teórico quanto experimental em Física e outras ciências, sendo utilizados em uma ampla gama de sistemas, desde uma simples estufa para o cultivo de hortaliças a termômetros conhecidos como pirômetros óticos, utilizados na indústria siderúrgica para se medir temperaturas acima do ponto de fusão do ouro. Um fenômeno físico curioso, e

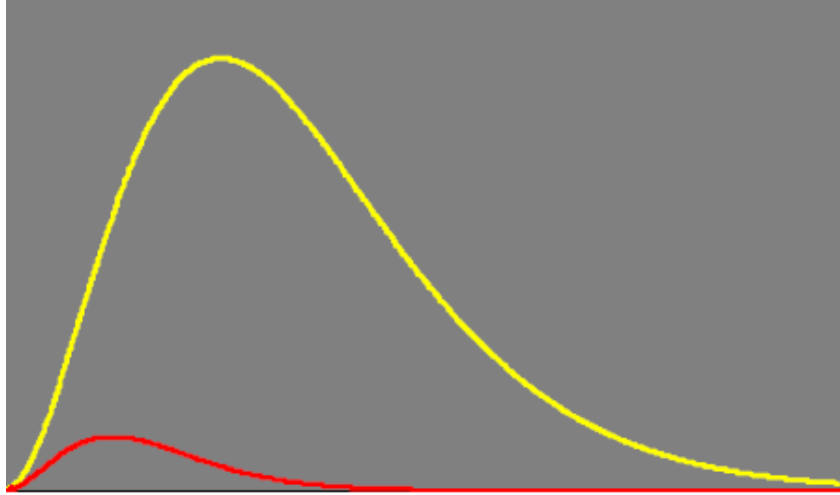


Figura 2.1: Esboço do espectro de densidade de energia de um corpo negro (eixo vertical) em função da frequência da radiação emitida para duas temperaturas diferentes: T em amarelo e $T/2$ em vermelho.

particularmente interessante, foi descoberto utilizando-se a termometria baseada na radiação de corpo negro por Dicke, Penzias e Wilson na década de 50. Eles descobriram que um espectro de corpo negro da radiação eletromagnética, com uma temperatura característica de aproximadamente $3K$ atinge a Terra em todas as direções [114]. Esta radiação, hoje conhecida como Radiação Cósmica de Fundo (RCF), é uma forte evidência do *Big Bang* e oferece uma oportunidade única para se testar efeitos de violação da simetria de Lorentz, como discutido anteriormente.

Como discutido no Capítulo 1, a propagação da luz é afetada pela violação da simetria de Lorentz, por exemplo, causando birrefringência. Então, é provável que as propriedades termodinâmicas, bem como, a distribuição espectral sejam alteradas também. Analisaremos tais questões do ponto de vista de TQC, utilizando os resultados da seção anterior, e veremos que ocorrem contribuições para a lei de Planck da radiação adivindas dos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz, e particularmente, para o caso \mathcal{CPT} -ímpar veremos que o espectro de radiação é anisotrópico. Para isso, suponha que o campo de radiação está enclausurado em um certo volume, V , interagindo com os átomos que compõem o recipiente de forma que eles podem trocar energia livremente por meio de processos reversíveis,

$$A \rightleftharpoons B + \gamma, \quad (2.5)$$

de modo que o equilíbrio térmico seja estabelecido. Aqui, A e B são estados atômicos e γ representa um fóton, ou uma coleção destes, emitidos ou absorvidos pelos átomos. Assim, se a população atômica no estado inicial é caracterizada por $N(A)$ e a do estado final por $N(B)$, temos, que, em equilíbrio térmico, a razão entre estas duas populações é dada pelo fator de Boltzmann [114, 115]:

$$\frac{N(B)}{N(A)} = \frac{e^{-E_B/k_B T}}{e^{-E_A/k_B T}} = e^{\hbar\omega/k_B T}, \quad (2.6)$$

onde E_A e E_B representam a energia total dos átomos nos estados A e B , respectivamente. A quantidade $\omega = (E_A - E_B)/\hbar$ é a separação, em frequência, entre os dois níveis de energia atômicos. A expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$N(B)\mathcal{P}_{\text{abs}} = N(A)\mathcal{P}_{\text{emis}}, \quad (2.7)$$

onde \mathcal{P}_{abs} , é a probabilidade de transição associada ao processo de absorção de um fóton pelo átomo, $B + \gamma \rightarrow A$, e $\mathcal{P}_{\text{emis}}$ é a probabilidade de transição associada ao processo de emissão, $A \rightarrow \gamma + B$. Em casos como o considerado aqui, onde o potencial de interação (ou hamiltoniana de interação) pode ser escrita na forma $H_I(t) = H'_I e^{\mp i\omega t}$, (veja a eq. (2.2)), a teoria de perturbação tempo-dependente aplicada a processos de emissão e absorção de fótons por átomos, determina a probabilidade de transição por unidade de tempo, em primeira ordem [112, 116]:

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | H_I | l \rangle|^2 \delta(E_m - E_l \pm \hbar\omega) \quad (2.8)$$

com a transição $l \rightarrow m$ sendo o processo de emitir (+) ou absorver (-) um fóton de frequência ω . Note que estamos considerando teoria de perturbação baseada em Mecânica Quântica não relativística, isso porque estamos considerando os elétrons que participam da interação apresentando baixas velocidades. Isso poderia levantar questões como a falta de covariância dos resultados obtidos, pois não estamos considerando uma série perturbativa covariante de Lorentz. Porém, como o modelo já não exhibe tal simetria, não precisamos nos preocupar com isso, apenas devemos ter em mente que os cálculos e resultados obtidos

são válidos para um observador em particular: específico, privilegiado, como aquele no sistema do laboratório, onde as medidas são realizadas.

Agora, utilizando-se as eqs. (2.3) e (2.4), para as amplitudes de absorção e emissão respectivamente, e a eq. (2.8) obtem-se:

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{emis}}}{\mathcal{P}_{\text{abs}}} = \frac{(n_{\mathbf{k},+} + 1) \sum_i |\langle B | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \mathbf{p}_i \cdot \vec{\varepsilon}_+^* | A \rangle|^2}{n_{\mathbf{k},+} \sum_i |\langle A | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \mathbf{p}_i \cdot \vec{\varepsilon}_+ | B \rangle|^2}. \quad (2.9)$$

Fazendo-se uso da relação:

$$\frac{\sum_i |\langle B | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \mathbf{p}_i \cdot \vec{\varepsilon}_+^* | A \rangle|^2}{\sum_i |\langle A | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \mathbf{p}_i \cdot \vec{\varepsilon}_+ | B \rangle|^2} = 1,$$

que pode ser facilmente verificada, utilizando-se a hermiticidade do momento \mathbf{p}_i e as propriedades de “bras”, “kets” e conjugação complexa, chegamos a:

$$n_{\mathbf{k},+} N(B) = (n_{\mathbf{k},+} + 1) N(A). \quad (2.10)$$

Expressão análoga segue-se para o estado de polarização ω_- . Tais expressões são de validade geral, digo, são igualmente válidas para o caso \mathcal{CPT} -par ou \mathcal{CPT} -ímpar, diferindo em cada caso apenas pela relação de dispersão (sendo válida também no caso usual onde, $\omega = |\mathbf{k}|$). Agora, considerando-se este resultado, concomitantemente a equação (2.6) obtêm-se facilmente (resultados análogos para ω_-):

$$n_{\mathbf{k},\pm} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1}, \quad (2.11)$$

a qual determina o número médio de fótons, por unidade de volume, em cada estado caracterizado por $(\omega_+; \mathbf{k})$ ou $(\omega_-; \mathbf{k})$. Assim, a energia média por fóton, por estado de polarização, lê-se $\bar{E}_{\pm} = \hbar\omega_{\pm} n_{\mathbf{k},\pm}$. A equação (2.11) acima caracteriza completamente a natureza do campo de radiação no interior do volume V . Tal resultado, juntamente com as relações de dispersão (1.15) e (1.25), mostram que o campo de radiação é homogêneo, desde que as quantidades acima não dependam da posição em que estão localizadas. Dito de outra forma, as propriedades do campo de radiação são as mesmas para quaisquer observadores conectados por uma translação espacial, refletindo o fato que a quebra de Lorentz que estamos considerando preserva a simetria de translação espaço-temporal.

Apesar de ser homogêneo, tal campo de radiação é anisotrópico no caso \mathcal{CPT} -ímpar, dependendo da orientação relativa dos vetores de onda \mathbf{k} e do campo de fundo, \mathbf{b} , como expresso pela equação (1.25). Além do mais, cada estado de polarização sente a anisotropia de uma forma diferente, digo, em uma dada temperatura, T , e momento, \mathbf{k} , geralmente temos $n_{\mathbf{k},+} \neq n_{\mathbf{k},-}$. No caso \mathcal{CPT} -par a radiação no interior do volume é isotrópica em primeira ordem, (1.15). Porém, se realizarmos um tratamento sem esta aproximação, resultam anisotropias proporcionais ao quadrado de $d^{\mu\nu\alpha\beta}$, sendo assim extremamente diminutos.

Como no caso usual, a equação (2.11) não depende dos detalhes geométricos do sistema, nem de suas propriedades internas, de modo que mesmo nessa situação de violação da simetria de Lorentz ainda pode-se falar de um espectro universal de emissão e absorção de radiação. Portanto, dois diferentes sistemas podem atingir o equilíbrio térmico através de sucessivas trocas de fótons. Logo, a equivalência usual entre radiação de cavidade e radiação de corpo negro é mantida, como usualmente.

Agora, assumindo condições de contorno periódicas para o campo de radiação, os únicos valores permitidos para o momento, em um volume cúbico $V = L^3$, são dados por $k_i = 2\pi n_i/L$, onde $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ especifica as três direções espaciais, e $n_x, n_y, n_z = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Então, o número total de osciladores quânticos de radiação (fótons) com estado de polarização ω_+ , energia entre $\hbar\omega_+$ e $\hbar(\omega_+ + d\omega_+)$, e propagando-se em uma direção determinada por um ângulo sólido $d\Omega$ é igual ao elemento de volume no n -espaço tridimensional $n^2 dn d\Omega = \rho_{\omega, d\Omega} dE$ [112, 113]. Na última igualdade, temos que $\rho_{\omega, d\Omega} = \mathcal{N} \Pi_i dk_i$ é a densidade de estados permitidos por unidade de frequência, ω (2.11), enquanto \mathcal{N} é o número de polarizações. Portanto, a densidade de energia por unidade de frequência (e por polarização) é dada pela energia total no interior do volume multiplicada pela densidade de estados, $\int_V \rho_{\omega, d\Omega} dE$. Avaliando-se esta expressão obtém-se o mesmo resultado que no caso usual (explicitando c e \hbar) [113, 112]:

$$u(\omega_{\pm}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_{\pm}}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1} \frac{k^2 dk}{d\omega_{\pm}}. \quad (2.12)$$

A densidade de energia total por frequência, $u(\omega)$, em um dado banho térmico de radiação é obtida somando-se sobre as respectivas contribuições de cada estado de polarização da radiação. Embora a expressão acima tenha a forma usual, deve ser enfatizado que

diferenças aparecem na valoração do termo $\omega_{\pm}k^2dk/d\omega_{\pm}$, o qual é fortemente dependente das relações de dispersão (como veremos nas próximas seções, para cada um dos casos, separadamente). Antes, porém vamos considerar o caso usual como uma ilustração, onde temos a relação de dispersão $\omega = c|\mathbf{k}|$. Neste caso a quantidade $\omega_{\pm}k^2dk/d\omega_{\pm}$ torna-se simplesmente ω^3/c^3 e somando-se sobre os dois estados de polarização a densidade de energia (2.12) torna-se:

$$E(\omega, T) = \frac{8\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (2.13)$$

que é a famosa lei de Planck para a radiação de corpo negro. Um esboço desta distribuição de energia é mostrada na figura 2.1, para duas temperaturas. Vamos agora analisar os casos com quebra da simetria de Lorentz.

2.2.1 O Caso \mathcal{CPT} -ímpar

Utilizando-se a relação de dispersão (1.25), é fácil mostrar que para $\omega \gg \omega_0$, têm-se:

$$\frac{\omega_{\pm}k^2dk}{d\omega_{\pm}} = \frac{\omega^3}{c^3} \left(1 \pm \frac{\omega_0 \cos \theta}{2\omega} + \frac{\omega_0^2}{4\omega^2} (2 - \cos^2 \theta) \right) + \mathcal{O}(\omega_0^3), \quad (2.14)$$

onde $\omega = \omega(k) = c|\mathbf{k}|$ e $\omega_0 \equiv mc^2/\hbar$ são as frequências dinâmicas e tipo-repouso (k -independente) da radiação eletromagnética. O fato de considerarmos $\omega \gg \omega_0$ não é restritivo, pois tendo em vista os baixíssimos valores de m , discutidos no Capítulo 1, os resultados a seguir, alcançam todo o intervalo do espectro eletromagnético onde medidas da radiação de corpo negro podem ser realizadas com os limites experimentais atuais. O não anulamento de ω_0 é associado ao “gap” tipo-massa, discutido anteriormente, implicando em uma energia de repouso para o campo de radiação. θ é o ângulo entre os vetores de onda \mathbf{k} e o vetor de fundo \mathbf{b} . Agora, calculando-se a densidade de energia por frequência (2.12), mantendo termos até a ordem ω_0^2 , obtem-se:

$$u^{\text{ímpar}}(\omega_{\pm}, T)|_{\omega \gg \omega_0} = \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left(1 \pm \frac{\omega_0 \cos \theta}{2\omega} + \frac{\omega_0^2}{4\omega^2} (2 - \cos^2 \theta) \right). \quad (2.15)$$

Observe que o principal desvio aparece linearmente nos parâmetros de violação de Lorentz, aumentando a densidade de energia por frequência se sua polarização é positiva (ω_+), ou

diminuindo para ω_- . Embora muito pequena, a correção acima implica em um desbalançamento entre as diferentes polarizações, em equilíbrio térmico, como já indicado pela equação (2.11). Da expressão (2.15) podemos obter a densidade de energia por estado de polarização (daí, o pré-fator 1/2 na expressão abaixo), também chamada de lei de Stefan-Boltzmann, $U_{\pm} = \int_0^{\infty} u(\omega_{\pm}, T) d\omega_{\pm}$:

$$U_{\pm}(T) = \frac{1}{2} \sigma_0 T^4 \left[1 \pm \sigma_1 \frac{\omega_0}{T} \cos \theta + \sigma_2 \frac{\omega_0^2}{T^2} (2 - \cos^2 \theta) \right], \quad (2.16)$$

onde,

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3} \approx 7.56 \times 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{K}^4}$$

é a constante de Stefan-Boltzmann, enquanto

$$\sigma_1 \equiv \frac{15\hbar\zeta(3)}{\pi^4 k_B} \approx 1.41 \times 10^{-12} \text{K.s},$$

com $\zeta(3) \approx 1.2$, e $\zeta(x)$ sendo a função ζ de Riemann e,

$$\sigma_2 \equiv \frac{5\hbar^2}{\pi^2 k_B^2} \approx 3.69 \times 10^{-41} \text{K}^2 \cdot \text{s}^2.$$

Recordando que $m \lesssim 10^{-42} \frac{\text{Gev}}{c^2}$ [67], o que determina $\omega_0 \lesssim 10^{-17} \text{Hz}$, então $\sigma_1 \omega_0 \approx 10^{-30} \text{K}$ que é negligenciável comparado com a unidade, na equação acima. Contudo considerável compensação pode vir de uma temperatura muito baixa, digo, $T \sim 10^{-9} \text{K}$ (valor atingível em laboratórios, atualmente) de forma que a “correção” principal para a lei de Stefan-Boltzmann, associada à violação de Lorentz e \mathcal{CPT} fica em torno de 10^{-21} (resultados similares a estes também foram obtidos no trabalho da referência [101]). A radiação de Corpo Negro também têm sido estudadas em sistemas de teorias de campo com geometrias não-comutativas. Em tais ambientes, “contribuições” adicionais aparecem proporcionais a altas potencias da temperatura T , a ordem dominante T^8 . Lá, ao contrário de nosso caso, investigações por um comprimento fundamental na estrutura do espaço-tempo deveria focar em altíssimas temperaturas [117, 118].

Para avaliar a densidade de energia total por frequência dinâmica, $E(\omega)$, a partir da equação (2.15) temos duas possibilidades, cada uma delas levando a diferentes maneiras para se buscar por estas violações. Primeiro, se assumimos que a energia é igualmente

particionada entre os dois modos, digo $E(\omega) = u(\omega_+) + u(\omega_-)$, com $u(\omega_+) = u(\omega_-)$ então as contribuições lineares nos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz (ω_0) para $E(\omega)$, cancelam-se identicamente, e as correções aparecem unicamente em ω_0^2 :

$$E(\omega, \omega_0, T)|_{\omega > \omega_0} = \frac{8\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{4\omega^2} (2 - \cos^2 \theta) \right). \quad (2.17)$$

Este é o caso que deveríamos esperar para ser mais plausível fisicamente, devido ao teorema da equipartição de energia, pelo menos quando Lorentz e \mathcal{CPT} , entre outras simetrias, são respeitadas³.

Neste caso, onde a energia é igualmente particionada entre os estados de polarização, a lei de Stefan-Boltzmann (2.16) assume a forma:

$$U(T) = \sigma_0 T^4 \left[1 + \sigma_2 \frac{\omega_0^2}{T^2} (2 - \cos^2 \theta) \right]. \quad (2.18)$$

Pode-se reescrever este resultado como [101]:

$$U(T) = \sigma(T) T^4, \quad \text{com} \quad \sigma(T) = \sigma_0 \left[1 + \sigma_2 \frac{\omega_0^2}{T^2} (2 - \cos^2 \theta) \right]. \quad (2.19)$$

Escrita dessa forma, a constante $\sigma(T)$ é considerada como um coeficiente efetivo que depende da temperatura e do parâmetro que controla a violação da simetria de Lorentz. Utilizando os dados experimentais para a constante de Stefan-Boltzmann $\sigma_0 = (5.67040 \pm 0.00004) \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ e o valor da temperatura de corpo negro da radiação cósmica de fundo, $T = 2.73 K$, os autores da referência [101] estimaram um valor para $m \leq 3 \times 10^{-15} \frac{GeV}{c^2}$, sendo este valor muito maior que os obtidos através de dados astrofísicos discutidos no Capítulo 1. Portanto, dados atuais sobre RCF não são suficientes, quando combinados com resultados de espectro de corpo negro, para impor limites mais severos a tal violação. A diferença entre o número médio de fótons de cada estado de polarização seria da ordem:

$$n_{\mathbf{k},-} - n_{\mathbf{k},+} \sim \frac{\omega_0}{2\omega} \quad (2.20)$$

³O teorema da equipartição da energia não pressupõe simetria de Lorentz nem \mathcal{CPT} do sistema, apenas isotropia do espaço e do tempo [115] que neste caso é violada.

mostrando um desbalanceamento do número médio de fótons em cada estado de polarização linear, em ω_0 .

Agora, se assumirmos que o número de fótons é igual para ambos os estados de polarização, em uma dada frequência dinâmica $\omega = c|\mathbf{k}|$, então, a energia total por frequência deveria ser $E(\omega) = \alpha u(\omega_+) + \beta u(\omega_-)$, com $\alpha + \beta = 1$. Daí, uma correção linear em ω_0 deveria ser obtida para $E(\omega)$, pois deveríamos ter $\alpha \lesssim \beta$, pois para um dado momento, $|\mathbf{k}|$, os fótons com estado de polarização ω_+ são mais energéticos que aqueles com polarização ω_- , como pode ser visto da equação (1.15).

As análises e discussões acima são estritamente válidas para “frequências usuais” digo, $\omega \gtrsim$ algumas potencias de Hz ($\omega \gg \omega_0$). Mas se pudermos sondar radiações com frequências muito pequenas, idealmente comparadas a ω_0 , então as coisas deveriam mudar e um traço de violação das simetrias de Lorentz e \mathcal{CPT} poderia ser claramente avaliada neste ambiente.

Note que o espectro de energia (2.15) ou (2.17) é anisotrópico devido à presença do termo $\cos^2 \theta$. Esta anisotropia mostra que a violação de simetria de Lorentz, como descrita por este modelo, pode ser um importante fator para explicar as anisotropias da radiação cósmica de fundo. Contudo, se considerarmos os limites astrofísicos para a frequência ω_0 , a violação da simetria de Lorentz, como proposta aqui, não pode ser usada para explicar tais anisotropias [101].

Para clareza e melhor entendimento, é interessante considerar a lei tipo-Planck, (2.15), para os dois casos especiais de orientação relativa entre o momento do fóton e o vetor de fundo. Primeiro, se $\hat{k} \cdot \hat{b} = 1$, isto é, fótons se propagando em uma direção paralela ao vetor de fundo, temos (novamente mantendo apenas termos até a ordem ω_0^2):

$$u_{\parallel}^{\text{ímpar}}(\omega_{\pm}, T)|_{\omega \gg \omega_0} = \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right). \quad (2.21)$$

Este caso é muito similar ao caso geral, discutido anteriormente, e a aparente isotropia desta densidade de energia acontece porque fixamos um ângulo entre o vetor de fundo e a direção de propagação da radiação. Para $\omega_0 \approx \omega$, nós obtemos o análogo do resultado clássico de Rayleigh-Jeans:

$$u_{\parallel}^{\text{ímpar}}(\omega_{\pm}, T)_{\omega \approx \omega_0} \simeq \frac{4\pi}{(2\pi c)^3} \frac{2k_B T \omega^2}{(\sqrt{5} \pm 1)}, \quad (2.22)$$

que claramente indica que, em tais regimes, diferenças de energia entre os modos não podem ser negligenciadas. Contudo, devemos acentuar que, quando $\mathbf{k} \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$), $u(\omega)$ se anula identicamente, estabelecendo que, mesmo neste caso onde os modos assumem frequências tipo-repouso não nula, o equilíbrio térmico é atingido por meio de radiação dinâmica, interagindo com elétrons não-relativísticos.

Agora, se $\hat{k} \cdot \hat{b} = 0$, obtemos:

$$u_{\perp}^{\text{ímpar}}(\omega_{\pm}, T) = \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad (2.23)$$

cuja correção aparece apenas em segunda ordem, ω_0^2 , para qualquer valor finito de ω , anulando-se quando $\mathbf{k} \rightarrow 0$. Neste caso, a densidade de energia é isotrópica em planos perpendiculares ao vetor de fundo. Assim, se buscamos por violações de Lorentz e \mathcal{CPT} , por meio de um banho térmico de fótons, isto deveria ser mais pronunciado para banhos térmicos onde a radiação viajasse paralelamente à direção do vetor de fundo, pois nesta situação os desvios aparecem linearmente em ω_0 .

2.2.2 O Caso \mathcal{CPT} -par

Agora, vamos considerar o caso \mathcal{CPT} -par, onde os modos de vibração são dados em ordem dominante, por $\omega_{\pm} = c|\mathbf{k}|(1 + \rho \pm \sigma) = \omega(1 + \rho \pm \sigma)$. Depois de alguma álgebra a lei tipo-Planck (2.12) obtida é:

$$\begin{aligned} u^{\text{par}}(\omega_{\pm}, T) &= \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1} \\ &\approx \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{k_B T} (\rho \pm \sigma) + \mathcal{O}((\rho \pm \sigma)^2) \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

O que claramente mostra que as contribuições extras associadas aparecem linearmente e são isotrópicas. Isto pode tornar-se mais interessante se somarmos sobre os dois modos com a suposição da energia ser igualmente particionada entre ambos, $E(\omega) = u(\omega_+) + u(\omega_-)$, com $u(\omega_+) = u(\omega_-)$:

$$E^{\text{par}}(\omega, \rho, T) = \frac{8\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{k_B T} \rho \right). \quad (2.25)$$

Apesar da diferença no número de ocupação dos modos, linear em ρ , obtem-se que a densidade de energia por frequência possui um termo extra, linear nos parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz, $-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\rho$ (note que esta situação é similar, ao caso \mathcal{CPT} -ímpar, com $\omega \gg \omega_0$, onde o desvio é proporcional a $+\omega_0^2$ (2.17)). Por exemplo, para a radiação cósmica de fundo temos $T \sim 3\text{K}$ e $\omega \sim 10^{11}\text{ Hz}$, obtendo $\frac{\hbar\omega}{k_B T}\rho \sim \rho$. Portanto, se utilizarmos $\rho \approx 10^{-18}$ [106], a última expressão prediz um pequeno desvio no espectro da radiação cósmica de fundo em torno deste valor. Infelizmente, dados correntes, (fornecidos pelo COBE) restringem possíveis anisotropias na radiação cósmica de fundo, devido a efeitos térmicos, para algo em torno de $\lesssim 0,5\%$. É claro, que tal limite não pode ser atribuído àquelas anisotropias estudadas aqui, as quais são muito menores. Contudo, a equação (2.25) sugere que seus desvios podem ser mais pronunciados a temperaturas muito baixas. Por exemplo, um sistema a $T \sim 10^{-9}\text{ K}$ deveria exibir um desvio em torno de $10^{-10}\%$, em $\omega \sim 10^2\text{ MHz}$ (radiação de microondas). A detecção desta mudança no espectro de radiação causada pela quebra de simetria de Lorentz está na capacidade de medida do espectro deste sistema com tal precisão, principalmente em frequências de microondas (ou ainda menores) e em temperaturas ainda mais baixas, onde estes efeitos podem tornar-se mais apreciáveis. Contudo, se considerarmos os limites mais severos para ρ discutidos no Capítulo 1, as modificações no espectro de corpo negro discutidas aqui são insignificantes em qualquer temperatura e frequência da radiação atingíveis e mensuráveis em laboratórios terrestres.

2.3 Princípio do “balanço detalhado” e o espectro de corpo-negro

Antes de encerrar este capítulo vamos recordar que uma análise semi-clássica⁴ para emissão e absorção de radiação pela matéria é sempre possível de ser realizada, desde que o número de fótons seja suficientemente grande (radiação intensa o suficiente para se negligenciar as flutuações quânticas). Considere, novamente, uma certa região do espaço de volume V onde existe um certo número de átomos em interação com um campo eletromagnético.

⁴Isto quer dizer que o campo de radiação é tratado classicamente, enquanto a matéria (os elétrons) são tratados quânticamente, descritos pela equação de Schrödinger.

Restringemos estes átomos a ocuparem apenas dois estados quânticos A e B , e o fato de que os átomos podem sofrer transições entre os estados, estimuladas por este campo de radiação, bem como, podem emitir radiação espontaneamente. Utilizando-se estes fatos, podemos calcular as amplitudes de transição para emissão e absorção de radiação pela matéria tratando o campo eletromagnético classicamente e utilizando-se teoria de perturbação. Com esta descrição semi-clássica, os resultados obtidos conectam-se aos obtidos via tratamento quântico, de uma forma muito simples. Por exemplo as amplitudes de absorção e emissão de radiação (2.3) e (2.4), se calculadas tratando-se o campo eletromagnético classicamente, são idênticas aos resultados obtidos aqui se fizermos a seguinte identificação para a amplitude clássica \mathbf{A}_0 do campo de radiação em termos do número de fótons:

$$\mathbf{A}^{(\text{abs})} = \mathbf{A}_0^{(\text{abs})} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_+ t}, \quad \mathbf{A}_0^{(\text{abs})} = \sqrt{\frac{n_{\mathbf{k},+}}{2V\omega_+}} \vec{\epsilon}_+, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{A}^{(\text{emis})} = \mathbf{A}_0^{(\text{emis})} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_+ t}, \quad \mathbf{A}_0^{(\text{emis})} = \sqrt{\frac{(n_{\mathbf{k},+} + 1)}{2V\omega_+}} \vec{\epsilon}_+. \quad (2.27)$$

De acordo com a tratamento semiclássico, a probabilidade de absorção de radiação pela matéria é proporcional à intensidade $|\mathbf{A}_0^{(\text{abs})}|^2$, enquanto no tratamento quântico ela é proporcional a $n_{\mathbf{k},+}$, com um resultado análogo para emissão [112]. Temos, então que, um tratamento semiclássico conduz as mesmas amplitudes de transição que o tratamento quântico se fizermos as identificações acima. Porém, caso não soubéssemos dos resultados baseados na teoria quântica da radiação, seríamos conduzidos ao número de ocupação médio (2.11) e à lei de Planck (2.12) [114].

A principal vantagem deste método semiclássico é que ele é válido para qualquer escolha de b_μ , inclusive para o vetor de fundo puramente tipo-tempo (o que antes era proibido pois neste caso não podíamos realizar uma quantização canônica de A^μ satisfatória). Agora, se assumimos que o princípio do balanço detalhado permanece válido: *“no equilíbrio térmico cada emissão de fóton, seja ela estimulada ou espontânea, deve ser contrabalaneada por um equivalente processo de absorção, $N(B)\mathcal{P}_{\text{abs}} = N(A)\mathcal{P}_{\text{emis}}$,”* então aqueles resultados fundamentais obtidos na seção 4.2 para b^μ estritamente tipo-espaço seguem igualmente aqui para b^μ qualquer, como as equações (2.11) e (2.12), e as discussões seguintes.

Para ilustrar isto, vamos computar a espectro de corpo negro com b^μ puramente tipo-tempo, $b^\mu = (b^0 \neq 0, \mathbf{0})$. Neste caso, obtemos para a relação de dispersão geral (1.23) a forma $\omega_\pm^2 = c^2|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}| \pm m)$, com $m = |b_0|$. Daí, para a situação em que o vetor de fundo é puramente tipo-tempo o campo de radiação no interior do volume V é homogêneo e isotrópico, diferentemente do caso onde b^μ é tipo-espaço, considerado anteriormente. Avaliando-se então a lei de Planck (2.12) para este caso encontramos:

$$u_{\text{tipo-tempo}}^{\text{ímpar}}(\omega_\pm, T)|_{\omega \gg \omega_0} = \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left[1 \pm \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \mp \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \mathcal{O}(\omega_0^3) \right]. \quad (2.28)$$

que implica em correções similares ao caso onde $\hat{k} \cdot \hat{b} = 1$, discutido anteriormente (sendo a principal diferença aqui a isotropia do campo de radiação). Isto encerra nossas discussões sobre o espectro de corpo negro em um ambiente com quebra da simetria de Lorentz (como mencionado, os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados na Ref. [85]).

Capítulo 3

Sobre as correções radiativas no setor de matéria e o termo de Chern-Simons

A possível origem dinâmica do termo tipo-Chern-Simons, induzido por meio de correções radiativas surgindo de um termo que viola as simetrias de Lorentz e CPT no setor fermiônico da QED estendida, têm sido discutida extensivamente nos últimos anos, uma lista parcial sobre este assunto são as Refs. [34, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93]. Como discutido na introdução várias respostas têm sido dadas a esta questão. O foco principal da discussão têm sido a possível dependência dos métodos de regularização do termo gerado. Para clarificar um pouco mais, a situação é a seguinte: partindo-se da ação da QED estendida por um termo que viola as simetrias de Lorentz e CPT no setor de matéria, quando correções radiativas são consideradas, mais precisamente, quando se computa o tensor de polarização do vácuo surge uma contribuição para a ação do campo eletromagnético. Esta contribuição, sendo o termo de Chern-Simons discutido nos capítulos anteriores. O tensor de polarização do vácuo, sendo uma quantidade divergente, necessita de algum método de regularização para ser avaliado. Mo presente modelo que incorpora a quebra da simetria de Lorentz cada método de regularização conduz a um resultado diferente. Por isso, uma análise da quantização deste modelo realizada por meio de um método que não faz menção à nenhum esquema de regularização pode ajudar a esclarecer um pouco mais esta questão

tão controvertida.

A discussão que se segue é baseada no método da Renormalização Algébrica, sendo que definimos a Teoria Quântica por meio de suas simetrias clássicas. Mostramos não ser possível a geração do termo tipo-Chern-Simons no setor de calibre da QED desde que se introduza um controle para a quebra da simetria de Lorentz. Este é o ponto chave onde a presente análise [95] difere das demais encontradas na literatura, pois as demais análises feitas se preocuparam apenas com a simetria de calibre do modelo ao quantizarem a teoria, ou seja ao realizarem cálculos perturbativos, veja por exemplo a Ref. [89].

3.1 A QED estendida no setor de matéria

Vamos iniciar considerando a ação da QED estendida com apenas um termo que viola as simetrias de Lorentz e \mathcal{CPT} no setor de matéria. No nível clássico, isto é, sem realizarmos cálculos perturbativos, a ação pode ser escrita como:

$$S = S_0 + S_b \quad (3.1)$$

onde S_0 é a ação da QED usual, com um termo de massa para o fóton introduzido aqui como um regulador para controlar as divergências do infravermelho¹ e um termo de fixação de calibre, esta ação lê-se como:

$$S_0 = \int d^4x \left\{ i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{\alpha}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right\}. \quad (3.2)$$

Aqui ψ denota o espinor de Dirac com quatro componentes e $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ o seu adjunto. $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante e A_μ e $F_{\mu\nu}$ denotam, como antes o quadri-potencial e o tensor do campo eletromagnético, respectivamente. As quantidades γ^μ são as matrizes de Dirac usuais. A parte da ação, S_b , que viola as simetrias de Lorentz e \mathcal{CPT}

¹Divergências do infravermelho são características de Teorias Quânticas de Campos que possuem partículas de massa nula em seu espectro, sendo tal divergência caracterizada por amplitudes de transição infinitas quando o momento de tais partículas tende a zero. Não estamos preocupados com este tipo de divergência e manteremos o regulador apenas para uma maior clareza dos resultados.

é dada pelo acoplamento de um vetor de fundo constante com a corrente quiral fermiônica $j_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)$, sendo $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:

$$S_b = - \int d^4x b_\mu \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi, \quad (3.3)$$

sendo que o vetor de fundo b_μ^2 possui as mesmas propriedades discutidas anteriormente para o vetor acoplado ao campo eletromagnético no termo tipo-Chern-Smons³. (Mais detalhes sob esta QED estendida podem ser encontrados no apêndice B, a discussão aqui será limitada aos pontos essenciais para a discussão que se segue).

Um dos atrativos do termo $b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ é que além de violar a simetria de Lorentz ele também viola a simetria discreta de \mathcal{CPT} do modelo, como dito anteriormente. Isso porque a constante de acoplamento b^μ é invariante sob as simetrias discretas de \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} separadamente bem como sob a ação combinada de \mathcal{CPT} . Devido as propriedades de ψ sob tais simetrias discretas (veja o apêndice A para uma breve discussão), o modelo permanece invariante sob Conjugação de Carga

$$b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi \xrightarrow{\mathcal{C}} b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi, \quad (3.4)$$

e viola a simetria de \mathcal{CPT} pois sob Paridade e Reversão Temporal tem-se:

$$b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \begin{cases} -b_0\bar{\psi}\gamma_5\gamma^0\psi \\ b_i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi \end{cases}, \quad (3.5)$$

$$b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi \xrightarrow{\mathcal{T}} \begin{cases} \bar{\psi}b_0\gamma_5\gamma^0\psi \\ -\bar{\psi}b_i\gamma_5\gamma^i\psi \end{cases}. \quad (3.6)$$

Consequêntemente sob \mathcal{CPT} a ação (3.3) é ímpar (veja a equação (A.18)):

$$\bar{\psi}b_\mu\gamma_5\gamma^\mu\psi \xrightarrow{\mathcal{CPT}} -\bar{\psi}b_\mu\gamma_5\gamma^\mu\psi. \quad (3.7)$$

²O fato de se denotar o vetor de fundo acoplado ao campo fermiônico por b_μ não significa que ele seja o mesmo campo tensorial de fundo discutido nos capítulos anteriores, justificamos a escolha da mesma notação simplesmente porque os dois possuem as mesmas propriedades e não há risco de ambiguidade pois neste capítulo este campo de fundo aparecerá apenas no setor de matéria da QED. Esta notação adotada aqui é a mais comum na literatura (veja o apêndice B).

³Veja a eq. (1.1) e discussão logo abaixo.

Uma discussão completa da ação (3.3) pode ser encontrada na Ref. [26] onde assuntos como equações de movimento, quantização e uma análise completa do propagador fermiônico são discutidos.

3.2 Simetrias do modelo e identidades de Ward

Uma simetria de um modelo de campos é uma transformação contínua ou discreta, das coordenadas e ou dos campos sob as quais a ação do modelo permanece invariante. Em um processo de quantização uma questão natural que surge é se a simetria clássica é preservada ao nível quântico. Quando uma simetria clássica é violada no processo de quantização, diz-se que a teoria é anômala e não se pode fazer muita coisa, pois a teoria perde a sua preditibilidade. Por outro lado o processo de renormalização pode ser entendido como o estabelecimento das simetrias clássicas do modelo no nível quântico, ordem a ordem no processo de quantização [94], e para isso a primeira etapa é escrever a simetria clássica como uma identidade de Ward funcional. Tais identidades são relações entre as funções de Green da teoria.

Vamos estabelecer as identidades de Ward do modelo considerado aqui. Este é um ponto fundamental em que a nossa análise difere das demais encontradas na literatura, pois como veremos vamos estabelecer duas identidades de Ward para o modelo, uma devida a simetria de calibre $U(1)$ do modelo e outra devido a simetria de Lorentz, onde esta última identidade será de fundamental importância para fixar completamente todas as simetrias do modelo e também para estabelecer um controle para a quebra da simetria de Lorentz.

Considere primeiro a invariância de calibre da teoria. Com exceção do termo de massa para o fóton, $\frac{\lambda^2}{2} A_\mu A^\mu$, e do termo de fixação de calibre $-\frac{\alpha}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$, que são não físicos, a ação é invariante sob as transformações infinitesimais⁴ (veja o apêndice B, sendo que lá adotou-se $\omega = e\Lambda$):

$$\begin{aligned}\delta_c A_\mu(x) &= \frac{1}{e} \partial_\mu \omega(x) \\ \delta_c \psi(x) &= -i\omega(x)\psi(x) \\ \delta_c \bar{\psi}(x) &= i\omega(x)\bar{\psi}(x).\end{aligned}\tag{3.8}$$

⁴A notação δ_c denota a variação funcional do campo em relação a transformação de calibre.

A invariância da ação com relação a estas transformações pode ser expressa por meio de uma identidade funcional [94]:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_c S &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{e} \partial_\mu \omega(x) \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} + i\omega(x) \left(\bar{\psi}(x) \frac{\overrightarrow{\delta} S}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\overleftarrow{S} \delta}{\delta \psi(x)} \psi(x) \right) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{\alpha}{e} \partial_\mu A^\mu(x) \square \omega(x) + \frac{\lambda^2}{e} A^\mu(x) \partial_\mu \omega(x) \right\}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Este operador de Ward funcional gera as transformações de calibre (3.8) e para se convencer disso observe que se trocarmos a ação S na equação acima por qualquer um dos campos $A_\mu(x)$, $\psi(x)$ ou $\bar{\psi}(x)$ obtêm-se as transformações (3.8). Após uma integração por partes esta identidade funcional global pode ser escrita localmente da seguinte forma:

$$\mathcal{W}_c S = -\frac{\alpha}{e} \left(\square + \frac{e\lambda^2}{\alpha} \right) \partial_\mu A^\mu \quad (3.10)$$

com o operador de Ward local dado por:

$$\mathcal{W}_c = -\frac{1}{e} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} + i \bar{\psi}(x) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} - i \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \psi(x). \quad (3.11)$$

Isto é o estabelecimento no nível quântico da simetria de calibre da teoria clássica, ou seja é o análogo quântico da corrente de Noether clássica que estabelece a conservação da carga elétrica. O fato do lado direito da equação (3.10) acima ser linear no campo de calibre $A_\mu(x)$, ou seja a identidade de Ward é quebrada por um termo linear, significa que os termos da ação que originaram aquela quebra, o termo de massa e o de fixação de calibre, não necessitam ser renormalizados.

Para completar a discussão das simetrias clássicas do modelo considere o problema da quebra da simetria de Lorentz. Cada campo aparecendo na ação (3.1) se transforma como uma representação do grupo de Lorentz $SO(1,3)$. Sob transformações de Lorentz infinitesimais eles se transformam como [8, 9, 10]:

$$\begin{aligned}\delta_L A^\mu(x) &= \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu A_\nu(x) \\ \delta_L \psi(x) &= -\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \psi(x) \\ \delta_L \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (3.12)$$

sendo $\omega^{\mu\nu}$ os parâmetros que caracterizam uma transformação infinitesimal, $(\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu}{}^{\nu}$ denota os geradores infinitesimais para a representação vetorial do grupo de Lorentz:

$$(\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu}{}^{\nu} = \delta^{\nu}{}_{\alpha} \eta_{\beta\mu} - \delta^{\nu}{}_{\beta} \eta_{\alpha\mu} , \quad (3.13)$$

e $\sigma_{\mu\nu}$ são os geradores da representação espinorial [9]:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] . \quad (3.14)$$

Como foi feito com a simetria de calibre, vamos escrever as transformações de Lorentz infinitesimais (3.12) como uma identidade de Ward funcional [94], assim a quebra da simetria de Lorentz pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_L S &= \int d^4x \left\{ \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}(x) \frac{\delta S}{\delta A_{\mu}} + \omega^{\alpha\beta} \left(\bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\overrightarrow{\delta} S}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\overleftarrow{S} \delta}{\delta \psi(x)} \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \psi(x) \right) \right\} \\ &= - \int d^4x \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu}{}^{\nu} b_{\nu} \Delta^{\mu}(x) , \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $\Delta^{\mu}(x) = \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^{\mu} \psi$. Observe que como o operador de Ward para a simetria de calibre, este operador para a simetria de Lorentz gera as transformações de Lorentz (2.12) quando atuando sobre os campos e o fato mais importante aqui é que a identidade de Ward para as transformações de Lorentz é quebrada, como a de calibre, porém aqui a quebra não é linear e isto traz algumas consequências como veremos abaixo. Esta quebra é devido ao fato do campo de fundo b^{μ} , não pertencer a uma representação bem definida do grupo de Lorentz, pois apesar de se transformar sob transformações de observador ele não é covariante sob transformações de partícula. Localmente a identidade de Ward acima pode ser escrita como:

$$\mathcal{W}_L S = -(\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu}{}^{\nu} b_{\nu} \Delta^{\mu}(x) , \quad (3.16)$$

onde

$$\mathcal{W}_L = (\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{\mu}(x)} + \bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \psi(x) . \quad (3.17)$$

Agora que caracterizamos funcionalmente a quebra da simetria de Lorentz, vamos introduzirmos um campo vetorial externo $\beta_{\mu}(x)$ pertencendo a representação vetorial do grupo de

Lorentz, na ação (3.1). Este campo clássico é introduzido como um campo auxiliar para fornecer um controle para a quebra de Lorentz induzida por b_μ . Caso este controle não seja introduzido na ação do modelo, muitos termos de quebra podem surgir no processo de quantização. Note que o termo que caracteriza a quebra $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ possui dimensão canônica 3, logo ele é caracterizado como uma quebra de simetria suave, (“soft”) pois sua dimensão é menor que 4, e sendo suave ele não destroi a renormalizabilidade da teoria.

A nova ação do modelo incluindo o campo externo $\beta_\mu(x)$, é definida como:

$$\tilde{S} = S + S_{\text{ext}} , \quad (3.18)$$

onde

$$S_{\text{ext}} = - \int d^4x \beta_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi . \quad (3.19)$$

O caso com quebra da simetria de Lorentz, caracterizada por (3.16) é recoberto impondo-se $\beta_\mu(x) = 0$. Com este novo termo, a ação \tilde{S} é invariante sob (3.12) e

$$\delta_L \beta^\mu(x) = \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu (\beta_\nu(x) + b_\nu) . \quad (3.20)$$

A invariância da ação \tilde{S} sob (3.12) e (3.20) é agora expressa em termos do novo operador de Ward

$$\widetilde{\mathcal{W}}_L \tilde{S} = 0 , \quad (3.21)$$

definido localmente como sendo:

$$\widetilde{\mathcal{W}}_L = \mathcal{W}_L - (\Sigma_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu (\beta_\nu(x) + b_\nu) \frac{\delta}{\delta \beta_\mu(x)} . \quad (3.22)$$

Devido à presença do campo externo $\beta(x)$, e para se preservar a invariância de calibre, é imposto que

$$\delta_c \beta_\mu(x) = 0 .$$

Esta imposição é para se garantir que a nova ação (3.18) seja invariante de calibre, como anteriormente e disto segue que a identidade de Ward para a nova ação é a mesma que para o caso sem o campo externo $\beta_\mu(x)$:

$$\mathcal{W}_c \tilde{S} = -\frac{\alpha}{e} \left(\square + \frac{e\lambda^2}{\alpha} \right) \partial_\mu A^\mu . \quad (3.23)$$

3.3 Quantização, contra-termos e o termo de Chern-Simons

Para o modelo clássico descrito na seção anterior, o programa de Renormalização Algébrica consiste em preservar todas as simetrias da teoria clássica na construção perturbativa da teoria quântica [94]. Para se implementar este programa no presente modelo deve-se provar a possibilidade de se estender a identidade de Ward para a simetria de calibre⁵ (3.23) e a correspondente identidade de Ward para a simetria de Lorentz (3.21) para todas as ordens na série perturbativa.

A teoria renormalizada é determinada pelo funcional de vértice, ou gerador funcional das funções de Green irreduzíveis de 1-partícula ou funções de Green amputadas [8, 9]

$$\Gamma(A, \psi, \beta) = \Gamma^{(0)}(A, \psi, \beta) + \mathcal{O}(\hbar) ,$$

que, no limite em que $\hbar = 0$, Γ coincide com a ação clássica (3.18) e corresponde a aproximação de árvore da teoria⁶. O funcional de vértice obedece todas as identidades funcionais discutidas na seção anterior para a ação clássica do modelo.

Como assumimos a ausência de anomalia a atenção agora é fixada no estudo da estabilidade⁷ da ação clássica. Para a teoria quântica a estabilidade corresponde ao fato que as correções radiativas podem ser reabsorvidas na teoria por uma redefinição dos

⁵Estamos supondo que um possível impedimento a isto devido a uma anomalia de calibre de Adler-Bardeen-Jackiw seja ausente, isto é, estamos supondo uma teoria não anômala. Este parece ser o caso pois nos cálculos em primeira ordem encontrados na literatura esta anomalia não aparece, logo devido ao teorema de Adler-Bardeen-Jackiw ela deverá ser ausente em todas as ordens.

⁶Teoria de perturbação como usual é ordenada de acordo com o número de loops nos diagramas de Feynman, ou, equivalentemente, em potências de \hbar [8, 9, 112].

⁷O termo estabilidade empregado aqui não é no mesmo sentido empregado nos outros capítulos desta dissertação. Aqui estabilidade é uma condição que a teoria deve satisfazer para ser renormalizável como ficará claro na sequência.

parâmetros iniciais, como massa, carga, função de onda, dentre outras. Esta redefinição é feita por meio das condições de normalização. Para estudar a estabilidade da ação (3.18) uma perturbação infinitesimal é introduzida na ação \tilde{S} sendo que esta perturbação \hat{S} deve satisfazer a restrição de ser uma correção quântica para a ação clássica

$$\tilde{S} \rightarrow \tilde{S} + \epsilon \hat{S} , \quad (3.24)$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal.

A ação perturbada deve satisfazer, em primeira ordem em ϵ , as mesmas identidades funcionais que \tilde{S} :

$$\mathcal{W}_c(\tilde{S} + \epsilon \hat{S}) = \mathcal{W}_c \tilde{S} + \epsilon \mathcal{W}_c \hat{S} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = -\frac{\alpha}{e} \left(\square + \frac{e\lambda^2}{\alpha} \right) \partial_\mu A^\mu , \quad (3.25)$$

e

$$\tilde{\mathcal{W}}_L(\tilde{S} + \epsilon \hat{S}) = \tilde{\mathcal{W}}_L \tilde{S} + \epsilon \tilde{\mathcal{W}}_L \hat{S} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 . \quad (3.26)$$

Em primeira ordem em ϵ , obtêm-se:

$$\mathcal{W}_c \hat{S} = 0 , \quad \tilde{\mathcal{W}}_L \hat{S} = 0 , \quad (3.27)$$

consequentemente todos os contratermos requeridos pela renormalização da teoria, os quais compõem a perturbação \hat{S} devem ser simétricos, isto é, invariantes, sob as simetrias de calibre e Lorentz. Além disto, \hat{S} deve ser invariante sob a operação de Conjugação de Carga também, pois esta é uma simetria da ação \tilde{S} .

Agora deve-se buscar todos os possíveis contra-termos, construídos a partir dos campos na ação inicial (3.18) e limitados pela renormalização por contagem de potência, isto é, deve-se procurar por termos de dimensão canônica menor ou igual a 4. Lembrando que a dimensão canônica dos campos e constantes de acoplamento do modelo são [8]: $[A_\mu] = [b_\mu] = [\beta_\mu] = [m] = [\partial_\mu] = 1$ e $[\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{3}{2}$, a Lagrangeana mais geral que pode-se construir, com as limitações impostas anteriormente neste parágrafo e adicionalmente invariante sob conjugação de carga, é uma combinação linear dos 13 monômios abaixo:

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}\psi , \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi , \bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi , \bar{\psi}(\beta_\mu(x) + b_\mu)\gamma_5\gamma^\mu\psi , \partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu , \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu , \\
& A_\mu A^\mu , A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu , \partial_\nu A^\nu\partial_\mu A^\mu , A_\mu(\beta_\mu(x) + b_\mu)\partial_\nu A^\nu , ((\beta_\mu(x) + b_\mu)A^\mu)^2 , \\
& A^\mu\partial_\mu A^\nu(\beta_\mu(x) + b_\mu) , \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\mu A^\nu\partial^\alpha A^\beta .
\end{aligned}$$

qualquer outro monômio que se possa construir certamente levará a violação de alguns dos requerimentos acima. Todos estes monômios são candidatos para compor a perturbação introduzida na ação \widehat{S} , porém estes monômios ou combinações lineares deles, devem satisfazer as identidades funcionais (3.27). A invariância de calibre, representada pela condição $\mathcal{W}_c\widehat{S} = 0$ seleciona, dos 13 termos listados acima, apenas 7:

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu , \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu , \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi , \bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi , \\
& \bar{\psi}\psi , \bar{\psi}(\beta_\mu(x) + b_\mu)\gamma_5\gamma^\mu\psi , \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\mu A^\nu\partial^\alpha A^\beta .
\end{aligned}$$

Aqui aparece um ponto interessante. Observe que o último termo listado acima é o termo tipo-Chern-Simons, ou seja, se estivermos preocupados em manter apenas a invariância de calibre da teoria ao quantizá-la, sem se preocupar com a simetria de Lorentz, o termo de Chern-Simons $\propto b^\mu A^\nu \widetilde{F}_{\mu\nu}$ é um possível contra-termo e pode ser gerado por meio de correções radiativas. Neste caso, nem todos os contra-termos obtidos acima, podem ser absorvidos na ação inicial \widetilde{S} , a teoria é dita ser instável [94] e o modelo não pode ser renormalizado de uma forma consistente, a menos que o termo tipo-Chern-Simons esteja presente desde o início na aproximação clássica do modelo.

Contudo, a análise feita até este ponto pode ser encontrada na literatura, veja por exemplo a Ref. [89] e ninguém até o presente momento, se preocupou em introduzir um controle para a quebra de Lorentz. Com este controle para a quebra, a perturbação deve satisfazer a condição $\widetilde{\mathcal{W}}_L\widehat{S} = 0$ que requer que o coeficiente associado com o termo tipo-Chern-Simons seja identicamente zero. Como resultado final a perturbação \widehat{S} mais geral, que satisfaz as restrições de correções quânticas para a teoria clássica pode ser escrito como:

$$\widehat{S} = \int d^4x \sum_{i=1}^4 a_i \mathcal{P}_i(x) , \tag{3.28}$$

onde os termos aparecendo em $\mathcal{P}_i(x)$ são combinações dos monômios acima, permitidos pelas simetrias

$$\mathcal{P}_1 = \bar{\psi} i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi, \quad \mathcal{P}_2 = \bar{\psi}\psi, \quad \mathcal{P}_3 = (\beta_\mu(x) + b_\mu)\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi, \quad \mathcal{P}_4 = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

com a_1, \dots, a_4 coeficientes arbitrários que podem ser fixados pelas condições de normalização, de uma forma que isto é válido ordem a ordem em teoria de perturbação. Portanto a ação obtida da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}(\beta_\mu(x) + b_\mu)\gamma_5\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

é estável, pois todos os contra-termos (3.28) acima podem ser reabsorvidos, e o termo tipo-Chern-Simons não pode ser gerado por meio de correções radiativas, quando se introduz um controle para a quebra da simetria de Lorentz. Então, se o termo de Chern-Simons é ausente na ação clássica, ele permanecerá ausente a todas as ordens na teoria quântica [95].

Conclusões e perspectivas futuras

Desde o advento da Teoria da Relatividade Especial, em 1905 que ela tem passado por inúmeros testes de validade e precisão, sendo ainda hoje interessantes e relevantes. Relatividade Especial, ou simetria de Lorentz, pode ser testada também por meio da simetria discreta de CPT , pois a violação desta em Teorias Quânticas de Campos interagentes implica em violação da simetria de Lorentz [27]. Um bom ambiente para se estudar violação de ambas é o Modelo Padrão Estendido [26, 29], que é uma Teoria Quântica de Campos Efetiva mais geral em (3+1) dimensões incorporando violação da simetria de Lorentz.

Neste trabalho estudou-se a emissão e a absorção de fótons por elétrons atômicos não-relativísticos, em um ambiente incorporando a violação das simetrias de Lorentz e CPT no setor de calibre da eletrodinâmica. Nossos resultados principais estão relacionados a como a Lei de Planck é modificada quando estas violações de simetria são incorporadas ao Eletromagnetismo de Maxwell.

Obtivemos uma distribuição do número médio de fótons do campo de radiação no interior de uma cavidade, sendo esta distribuição homogênea (como era de se esperar pois a teoria considerada é invariante sob translações espaço-temporais). Porém, tal distribuição é anisotrópica no caso CPT -ímpar, dado que ela depende da orientação relativa dos vetores de onda \mathbf{k} e o campo de fundo, \mathbf{b} . Além do mais, cada estado de polarização sente a anisotropia de uma forma diferente, digo, em uma dada temperatura, T , e momento \mathbf{k} , geralmente temos $n_{\mathbf{k},+} \neq n_{\mathbf{k},-}$. Mesmo com a quebra da simetria de Lorentz, pode-se falar de um espectro de corpo negro universal, independente da forma geométrica do corpo ou de seus detalhes internos.

No que concerne a modificações da Lei de Planck, obtemos que, para o caso CPT -ímpar o espectro de corpo negro exhibe uma distribuição angular anisotrópica e os desvios aparecem lineares ou quadráticos na frequência de repouso da radiação eletromagnética,

$\omega_0 = \frac{mc^2}{\hbar}$, dependendo da orientação relativa entre o vetor de onda do fóton e o campo de fundo. Estas correções aparecem na expressão para a distribuição da densidade de energia por frequência (e por polarização). Se a energia do banho térmico é igualmente particionada entre cada modo de polarização então as correções para a lei de Planck aparecem quadráticas em ω_0 . Porém um número maior de fótons com polarização ω_- deve estar presente, sendo tal proporcional a ω_0 .

Na situação onde a simetria de \mathcal{CPT} é mantida, os desvios dominantes aparecem, lineares nos parâmetros que violam a simetria de Lorentz. Este caso apresenta a melhor possibilidade, baseado em nossas análises, para se buscar por possíveis violações da simetria de Lorentz, já que os parâmetros \mathcal{CPT} -par são relativamente altos (comparados com aqueles que são \mathcal{CPT} -ímpar). Por exemplo, em um sistema com $T \sim 10^{-9}$ K desvios são esperados em torno de $10^{-10}\%$, para frequências da radiação na faixa de microondas, $\sim 10^2$ MHz. Nos limites em que $T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, e $\omega = |\mathbf{k}|c \rightarrow \infty$ todos os termos extras, adivindos das violações em cada caso, não contribuem e os resultados padrões são identicamente recuperados. Testes dos limites de validade da simetria de Lorentz, baseados em experimentos terrestres como os propostos aqui, utilizando o espectro de radiação de corpo negro são muito menos insensíveis a tais quebras que aqueles utilizando Astrofísica. Tal diferença emerge, principalmente, devido a efeitos cumulativos que tais parâmetros podem acarretar devido à propagação da radiação eletromagnética por escalas de tempo cosmológicas.

Apesar de muitos coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz serem fortemente restritos por experimentos terrestres e testes astrofísicos, teorias envolvendo a violação da simetria de Lorentz (e \mathcal{CPT}) permanecem como fortes candidatos para uma teoria fundamental da Natureza, descrevendo de forma unificada todas as quatro interações.

Outro aspecto abordado nesta dissertação foi a possível origem dinâmica de um termo tipo-Chern-Simons no setor de calibre da QED, quando um termo que viola a simetria de Lorentz é introduzido no setor de matéria da teoria. Foi mostrado que correções radiativas não induzem o termo de Chern-Simons desde que se defina a teoria quântica por meio de suas simetrias clássicas e introduza-se um controle para a quebra da simetria de Lorentz presente no setor de matéria da QED. A ação do modelo considerado é estável

pois todos os contra-termos permitidos pelas simetrias do modelo podem ser reabsorvidos na ação inicial como redefinições dos parâmetros físicos da teoria, e o termo tipo-Chern-Simons não pode ser gerado por meio de correções radiativas. Então, se o termo de Chern-Simons é ausente na ação clássica, ele permanecerá ausente a todas as ordens na teoria quântica

Como perspectivas para investigações futuras, estamos buscando por possíveis efeitos da quebra da simetria de Lorentz em sistemas onde a radiação eletromagnética é confinada, pois os efeitos da violação de simetria associados com o tamanho e a geometria do meio podem ser realçados [119, 120]. Como as dimensões de guias de onda, podem ser nanométricas (guias construídos a partir de nanotubos de carbono) as pequenas correções associadas à violação da simetria de Lorentz podem ser, em princípio, largamente realçadas nestes meios [121]. Recentemente, um aparato similar a este foi proposto como uma forma de se testar desvios não-lineares da Eletrodinâmica de Maxwell do tipo Born-Infeld [122]. Resultados preliminares indicam que em um ambiente de guias de onda retangulares, a presença do vetor de fundo b^μ , nas equações de Maxwell, aparenta atuar como uma espécie de “filtro” para certas componentes da onda eletromagnética neste ambiente, gerando resultados notáveis, macroscópicos como, por exemplo, o surgimento de uma possível frequência de propagação extra e também uma drástica alteração da força de Lorentz, que tem sua componente paralela à direção do vetor de fundo anulada [121].

Apêndice A

O Teorema \mathcal{CPT} e a simetria de Lorentz

Simetrias podem ser contínuas ou discretas. Simetrias contínuas são aquelas que podem ser implementadas infinitesimalmente a partir da identidade como uma rotação ou uma translação e estão relacionadas com cargas conservadas via o teorema de Noether. Há uma classe de simetrias diferente destas chamadas de simetrias discretas, as quais não podem ser implementadas de forma contínua através de sucessivas transformações infinitesimais. As simetrias discretas têm que ser tratadas de forma diferente das contínuas e podem ser utilizadas para relacionar o comportamento de diferentes sistemas físicos, por exemplo, aqueles que diferem por uma troca entre partícula e anti-partícula. Outro ponto importante das simetrias discretas é que elas podem gerar regras de seleção entre as possíveis transições que um sistema físico pode realizar [10].

Aqui iremos discutir muito brevemente três tipos de transformações discretas que são de fundamental importância para teorias de campos: a inversão espacial ou paridade \mathcal{P} , a conjugação de carga \mathcal{C} e a reversão temporal \mathcal{T} . Toda teoria de campos livre, isto é, não-interagente é invariante sob estas transformações, porém interações podem quebrar estas simetrias e, hoje é sabido que todas as três simetrias discretas de \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} são quebradas na Natureza, porém a combinação destas três simetrias discretas leva a um dos resultados mais gerais e fundamentais da Teoria Quântica de Campos (TQC). Este resultado é o teorema \mathcal{CPT} que estabelece que qualquer TQC que satisfaça a algumas condições gerais

têm que ser invariante sob esta simetria [28]. O objetivo deste Apêndice é discutir um pouco deste teorema e sua conexão com a simetria de Lorentz.

As leis da física clássica são invariantes segundo estas transformações discretas, por exemplo, a equação de Newton do movimento e as equações de Maxwell permanecem invariantes [100]. Vamos discutir um pouco de cada uma destas simetrias discretas e sua ação em teorias de campos escalares vetoriais e espinoriais.

Paridade: A operação de paridade ou reflexão espacial quando aplicada a um sistema de coordenadas muda um sistema que possui orientação dextrogira para um com orientação levogira. As coordenadas do espaço-tempo x^μ e o operador diferencial ∂_μ sob paridade mudam como:

$$(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{P}} (t, -\mathbf{x}), \quad (\text{A.1})$$

$$\partial_\mu = (\partial_t, \nabla) \xrightarrow{\mathcal{P}} (\partial_t, -\nabla) = \partial^\mu. \quad (\text{A.2})$$

Do ponto de vista dos campos nos olhamos para o operador unitário \mathcal{P} que transforma os campos e seus argumentos. O campo escalar por exemplo, sob a ação da paridade se transforma como [9]:

$$\mathcal{P}\varphi(t, \mathbf{x})\mathcal{P}^{-1} = \varphi(t, -\mathbf{x}) \quad (\text{A.3})$$

Para inferir como A^μ muda sob paridade é mais fácil olhar para as equações de Maxwell e as propriedades de transformação delas. Uma simples análise destas equações revela que:

$$\mathcal{P}A^\mu(t, \mathbf{x})\mathcal{P}^{-1} = A_\mu(t, -\mathbf{x}). \quad (\text{A.4})$$

E finalmente para o campo fermiônico $\psi(x)$ pode-se demonstrar que ele se transforma como⁸:

$$\mathcal{P}\psi(t, \mathbf{x})\mathcal{P}^{-1} = \gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}). \quad (\text{A.5})$$

⁸Não é nossa intenção deduzir estas propriedades de transformação aqui, o objetivo é apenas ilustrar a forma como diferentes quantidades se transformam sob tal operação para posteriormente se obter um melhor entendimento do teorema \mathcal{CPT} .

a menos de uma fase arbitrária que pode ser fixada a unidade [9]. A operação de paridade pode ser utilizada para se distinguir entre tensores e pseudotensores. Para um tensor de rank N , se as suas componentes espaciais se transformam sob paridade com um fator $(-1)^N$, então dizemos que ele é um tensor verdadeiro ou simplesmente um tensor e se o fator de transformação for $(-1)^{N+1}$ dizemos que ele é um pseudotensor de rank N . Por exemplo, um escalar verdadeiro, tensor de rank 0, é uma quantidade que não muda de sinal sob a ação da paridade, como a carga elétrica, e um pseudo escalar seria uma quantidade, que sob a operação de paridade mudasse de sinal como a carga magnética, caso ela existisse na Natureza. Já para vetores, tensores de rank 1, a situação é diferente. Um vetor verdadeiro, também chamado de vetor polar é uma quantidade que muda de sinal sob paridade, como o campo elétrico e um pseudovetor ou vetor axial não muda de sinal sob tal operação como o campo magnético.

Conjugação de Carga: Esta transformação discreta não têm relação nenhuma com as coordenadas espaço-temporais, ela relaciona as partículas com as suas anti-partículas, ou seja relaciona as partículas com carga oposta da teoria, sendo que tais partículas de carga oposta possuem a mesma massa e spin. A correspondente carga pode ser elétrica, bariônica, leptônica dentre outras, dependendo do contexto físico. A invariância sob conjugação de carga implica em:

1. Existência de anti-partículas
2. Comportamento simétrico entre partículas e anti-partículas.

A ação da conjugação de carga não têm efeito sobre as coordenadas espaço-temporais e sobre os campos escalar e vetorial ela age como:

$$\mathcal{C}\varphi(t, \mathbf{x})\mathcal{C}^{-1} = \varphi^\dagger(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{C}A^\mu(t, \mathbf{x})\mathcal{C}^{-1} = -A^\mu(t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.7})$$

A correspondente ação no espinor de Dirac é dada por:

$$\mathcal{C}\psi(t, \mathbf{x})\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^T(t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.8})$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o espinor adjunto e C é a matriz de conjugação de carga. Na representação padrão das matrizes de Dirac dada por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

sendo que cada entrada é uma matriz 2×2 , I a identidade e $\vec{\sigma}$ as matrizes de spin de Pauli⁹, a matriz de conjugação de carga assume a forma:

$$C = i\gamma^0\gamma^2, \quad C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}, \quad C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C. \quad (\text{A.9})$$

Onde T denota a matriz transposta. Uma importante característica da matriz de conjugação de carga C é que ela permite identificar a estrutura de partícula-anti-partícula do campo de Dirac.

Reversão-Temporal: A reversão temporal mantém fixa as coordenadas espaciais e reverte o sinal do tempo. Seu efeito nas coordenadas espaço-temporais é:

$$(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{T}} (-t, \mathbf{x}), \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_\mu = (\partial_t, \nabla) \xrightarrow{\mathcal{T}} (-\partial_t, \nabla) = -\partial^\mu. \quad (\text{A.11})$$

O significado da reversão temporal em física clássica é claro, ela corresponde a mudança de velocidade de todas as partículas, isto é, todas as partículas seguem suas trajetórias em direções opostas. O momento linear e o momento angular de todas as partículas apontam na direção oposta a que teriam caso o tempo não fosse revertido e as posições iniciais e finais são intercambiadas no sistema revertido no tempo. Em mecânica quântica o operador que descreve a reversão temporal do sistema físico é anti-unitário [10].

O campo escalar e o campo eletromagnético A_μ , quando submetidos a inversão temporal se comportam como:

$$\mathcal{T}\varphi(t, \mathbf{x})\mathcal{T}^{-1} = \varphi(-t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.12})$$

$${}^9\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{T} A^\mu(t, \mathbf{x}) \mathcal{T}^{-1} = A_\mu(-t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.13})$$

E o campo fermionico ψ transforma-se, a menos de uma fase arbitrária que escolhermos como sendo a unidade como [9]:

$$\mathcal{T} \psi(t, \mathbf{x}) \mathcal{T}^{-1} = T \psi(-t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.14})$$

sendo que na representação padrão para as matrizes de Dirac:

$$T = i\gamma^1\gamma^3, \quad T\gamma^\mu T^{-1} = \gamma_\mu^T = \gamma^{\mu*}, \quad T = T^\dagger = T^{-1} = -T^*. \quad (\text{A.15})$$

Agora podemos discutir o teorema \mathcal{CPT} e sua conexão com a simetria de Lorentz.

O Teorema \mathcal{CPT} : As três simetrias discretas discutidas acima são simetrias exatas para teorias de campos livres, porém elas podem ser violadas na presença de interações. Por exemplo, paridade é violada nas interações fracas [2, 123] e a combinação de paridade e conjugação de carga \mathcal{CP} é violada em decaimentos de mésons K [6, 123]. Contudo pode-se esperar que as simetrias discretas sejam tão fundamentais para teorias de campo quanto a invariância de Lorentz dentre outras simetrias e portanto elas devem valer em toda teoria física. Há uma simetria discreta que é profundamente entrelaçada no formalismo da teoria de campos e satisfaz este critério. Ela consiste em uma transformação que combina as três simetrias discretas discutidas anteriormente. Esta simetria é denotada por $\Theta = \mathcal{CPT}$ que é o produto das simetrias de Conjugação de Carga, Paridade e Reversão Temporal.

O teorema \mathcal{CPT} estabelece que qualquer TQC é invariante sob a simetria discreta Θ desde que algumas condições gerais sejam satisfeitas pela teoria. Este teorema estabelece que o hamiltoniano $H(x)$ é invariante sob \mathcal{CPT} :

$$\Theta H(x) \Theta^{-1} = H(-x) \quad (\text{A.16})$$

se as seguintes condições são satisfeitas:

(I) A teoria deve ser local, possuir um lagrangeano hermitiano e ser invariante sob transformações de Lorentz próprias.

(II) A teoria deve respeitar a relação spin-estatística, isto é, campos com spin inteiro devem ser quantizados com comutadores e campos com spin semi-inteiro devem ser quantizados com anti-comutadores.

O teorema \mathcal{CPT} então estabelece que embora teorias quânticas de campos possam violar as simetrias \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} separadamente, qualquer teoria quântica de campos satisfazendo as duas condições acima deve ser invariante sob \mathcal{CPT} [9, 10, 28]. Uma demonstração rigorosa da validade deste teorema é dada em teoria de campo axiomática [28], aqui discutiremos apenas alguns pontos de uma demonstração não rigorosa [9].

O teorema \mathcal{CPT} assume que a lagrangeana descrevendo a teoria é local de forma que os campos aparecendo na lagrangeana ocorrem no mesmo ponto do espaço-tempo com apenas um número finito de derivadas.

Agora com as propriedades de transformação dos campos e coordenadas discutidas anteriormente pode-se sumarizar a ação de Θ da seguinte forma:

1. As coordenadas do espaço-tempo mudam de sinal $x_\mu \longrightarrow -x_\mu$.
2. Consequentemente derivadas mudam de sinal também $\partial_\mu \longrightarrow -\partial_\mu$.
3. O campo vetorial $A_\mu(x)$ comporta-se como o gradiente de um campo escalar mudando de sinal:

$$\Theta A_\mu(x) \Theta^{-1} = -A_\mu(-x) \quad (\text{A.17})$$

4. Qualquer forma bilinear envolvendo campos fermiônicos se transforma como:

$$\Theta \bar{\psi}(x) \mathcal{O} \psi(x) \Theta^{-1} = (-1)^k \bar{\psi}(-x) \mathcal{O} \psi(-x) \quad (\text{A.18})$$

onde k denota o número de índices de Lorentz aparecendo no operador $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\gamma^\mu, \partial^\nu)$.

5. Finalmente constantes são levadas em seus complexos conjugados.

Agora nós podemos discutir a prova do teorema \mathcal{CPT} em uma maneira não rigorosa [9, 10]. Para a teoria ser invariante sob Θ o lagrangeano deve se transformamr como um campo escalar

$$\Theta \mathcal{L}(x) \Theta^{-1} = \mathcal{L}(-x), \quad (\text{A.19})$$

pois, desde que $\mathcal{L}(x)$ é um escalar de Lorentz como estabelecido no item **(I)**, anteriormente, ela deve ser construída como a contração de vários índices de Lorentz, sendo o número total de índices em cada termo do lagrangeano um número par de índices. Dessa forma os possíveis sinais negativos vindo de derivadas, campos vetoriais ou das formas bilineares $\bar{\psi} \mathcal{O} \psi$ são cancelados. O efeito da transformação Θ é então mudar o lagrangeano $\mathcal{L}(x)$ em seu conjugado hermitiano, mas pela consideração **(I)** a lagrangeana é hermitiana sendo, portanto invariante sob \mathcal{CPT} qualquer que seja a sua forma, desde que satisfaça as considerações gerais **(I)** e **(II)** estabelecidas anteriormente [9]. Para uma demonstração baseada em teoria de campo axiomática, mas em uma linguagem acessível veja a referência [28].

O Modelo Padrão Estendido: Como vemos da discussão acima a invariância de Lorentz da teoria é uma suposição fundamental para a validade do teorema \mathcal{CPT} . As lagrangeanas do modelo padrão estendido satisfazem a todos os critérios para a validade do teorema, exceto um, o de invariância sob transformações de Lorentz próprias. As transformações de Lorentz por sua vez se dividem em duas classes como discutido na introdução. Uma classe chamada de transformação de observador que têm sua origem nas transformações de coordenadas entre dois sistemas inerciais diferentes, e transformações de partículas, que constituem transformações nas coordenadas da partícula mantendo o sistema inercial de referência fixo [124].

A covariância de Lorentz de uma teoria quântica de campos pode ser especificada em termos de covariância das funções de Wightman da teoria. As funções de Wightman por sua vez são matrizes de elemento do produto de campos no vácuo [28] e tais funções compartilham das mesmas simetrias que a teoria. Greenberg, mostrou [27] que a violação da simetria de \mathcal{CPT} de qualquer função de Wightman implica na violação da simetria de Lorentz da teoria. Isto ocorre porque se uma função de Wightman da teoria viola a simetria de \mathcal{CPT} então ela não obedece uma condição chamada de comutatividade local fraca, o que acarreta em uma violação da simetria de Lorentz da teoria. Mais detalhes sobre estes pontos podem ser encontrados em [27, 28]. Este argumento de Greenberg não se aplica a teorias livres, assim nós podemos enunciar o teorema de Greenberg da seguinte

forma: *Se a invariância sob a simetria discreta \mathcal{CPT} é violada em uma Teoria Quântica de Campos interagente, então aquela teoria também viola a simetria de Lorentz.*

Por outro lado apenas a covariância de Lorentz de uma teoria não é suficiente para a invariância sob \mathcal{CPT} . Por exemplo uma teoria pode ser covariante de Lorentz e não ser invariante sob \mathcal{CPT} se as massas da partícula e anti-partícula são diferentes, ou até mesmo pode-se ter igualdade das massas das partículas e anti-partículas, sendo esta igualdade estabelecida pela invariância sob \mathcal{CPT} da função de Wightman de dois pontos da teoria, mas qualquer outra função de Wightman de ordem mais alta pode violar \mathcal{CPT} e assim um processo de espalhamento, por exemplo, pode violar a simetria de \mathcal{CPT} , mesmo as massas das partículas e antipartículas sendo iguais [27]. Para a validade da simetria de \mathcal{CPT} é necessário mais que a simetria de Lorentz da teoria, porém a teoria pode ser invariante sob \mathcal{CPT} e violar a simetria de Lorentz.

Estes resultados são relevantes para teorias de campos efetivas, onde a teoria 4-dimensional surge de uma em altas dimensões, como o modelo padrão estendido discutido aqui. Se a teoria efetiva em quatro dimensões viola a simetria \mathcal{CPT} ela também viola a simetria de Lorentz, sendo a recíproca falsa. Vamos ilustrar estas considerações com três exemplos de termos da QED estendida obtida do modelo padrão estendido:

$$\bar{\psi}b_{\mu}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi, \quad k_{AF}^{\mu}A^{\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad d_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.20})$$

os dois últimos termos foram discutidos no Capítulo 1, sendo que aqui mudamos a notação do termo tipo-chern-simons de b^{μ} para k_{AF}^{μ} e deixamos b^{μ} para descrever uma violação de Lorentz no setor de matéria como aparece no primeiro termo acima e discutido no Capítulo 3. Esta é a notação mais utilizada na literatura como veremos no próximo apêndice. Da equação (A.18) vemos que a forma bilinear $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$ muda de sinal sob a ação da simetria de \mathcal{CPT} , sendo portanto ímpar sob tal transformação e como [26]

$$\Theta b_{\mu}\Theta^{-1} = b_{\mu} \quad (\text{A.21})$$

vemos que aquele termo viola a simetria de \mathcal{CPT} e conseqüentemente viola também a simetria de Lorentz. Conclusão análoga vale para o segundo termo como vimos no Capítulo 1. Já o terceiro termo em (A.20) é \mathcal{CPT} -par, ou seja não muda de sinal sob tal operação, mas viola a simetria de Lorentz devido ao campo tensorial de fundo $d_{\mu\nu\alpha\beta}$ selecionar

direções preferenciais no espaço-tempo, como dito no Capítulo 1. Isto completa a nossa breve discussão sobre a conexão entre as simetrias de Lorentz e CPT .

Apêndice B

A QED Estendida: uma breve discussão

Neste Apêndice vamos discutir um pouco da eletrodinâmica quântica obtida do Modelo Padrão Estendido (MOE). A parte eletromagnética deste modelo foi considerada no capítulo 2 desta dissertação e, naquela oportunidade, dissemos que uma eletrodinâmica quântica incorporando a violação da simetria de Lorentz, a qual descreve a interação entre elétrons, pósitrons e fótons, pode ser obtida do MPE como no caso usual [29]. Vamos considerar apenas o setor renormalizável por contagem de potências desta teoria. Esta QED estendida é de muito interesse teórico e experimental, pois a QED usual têm sido testada com um alto grau de precisão em uma enorme variedade de sistemas físicos [6], e este fato pode ser utilizado para impor altas restrições nos campos de fundo que controlam a quebra da simetria de Lorentz desta QED estendida.

Vamos começar lembrando a lagrangeana da QED usual. Denotando o campo fermiônico pelo espinor de Dirac $\psi(x)$ que possui quatro componentes e sua massa por m temos [8, 9, 10, 112]:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

sendo $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ o espinor adjunto e $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ a derivada covariante. O último termo na lagrangeana acima é o termo cinético para o campo eletromagnético, sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

A lagrangeana da QED estendida, por termos que violam a simetria de Lorentz e \mathcal{CPT} , pode ser escrita em uma forma bem similar a QED usual, sendo que como acima o setor de matéria é descrito pelo espinor ψ e os elétrons possuem massa m :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\mu A^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

onde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$ e $M = m + M_1$ e os termos que violam a simetria de Lorentz no setor fermiônico são:

$$\Gamma_1^\mu \equiv c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} \quad (\text{B.3})$$

$$M_1 \equiv a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \quad (\text{B.4})$$

Nas equações acima, as matrizes γ^μ , γ_5 , e $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, possuem as propriedades usuais [9]. A derivada covariante é definida como anteriormente, pois a estrutura da simetria de calibre $U(1)$ do modelo não é afetada. No contexto do MPE os parâmetros k_F^μ , $k_{AF}^{\mu\nu\alpha\beta}$, a_μ , b_μ , e_μ , f_μ , $H_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ e $g_{\lambda\nu\mu}$ são determinados pelo valor esperado no vácuo de campos tensoriais de uma teoria mais fundamental, levando a quebra da simetria de Lorentz [13, 14, 15, 16].

Nota: A notação utilizada aqui no setor eletromagnético é um pouco diferente daquela utilizada nos Capítulos 1 e 2. Lá utilizamos d e b para os termos que controlam a quebra de simetria. Aqui os correspondentes são k_F e k_{AF} respectivamente. Esta notação utilizada aqui é a mais comum encontrada na literatura e no Capítulo 1 fizemos uma escolha diferente para evitar possíveis confusões com o vetor de onda k_μ . Outro ponto importante é que o vetor de fundo b^μ , que aqui aparece acoplado a férmions, não tem nada a ver com o b^μ utilizado nos capítulos 1 e 2 mas, é o mesmo utilizado no Capítulo 1, sendo o mesmo que aparece no Capítulo 3.

Como mencionado no Capítulo 1, é de se esperar que esta QED estendida satisfaça a várias características fundamentais, como a invariância de calibre $U(1)$ já mencionada, conservação de energia e momento, independência de coordenadas (que implica em covariância de observador), hermiticidade, microcausalidade, positividade da energia para

campos livres e renormalizabilidade por contagem de potências. Algumas destas características possuem consequências imediatas. Por exemplo, a ação obtida do modelo (B.2) é invariante sob transformações de calibre $U(1)$:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ie\Lambda(x)}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x), \quad (\text{B.5})$$

que, via teorema de Noether, estão associadas a conservação da carga elétrica do modelo, como no caso usual [9]. Hermiticidade da Lagrangeana (B.2) implica que todos os coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz são reais e $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$ possuem traço nulo, $g_{\lambda\mu}$ é anti-simétrico nos dois primeiros índices e $H_{\mu\nu}$ é anti-simétrico. As propriedades dos parâmetros k_{AF}^μ e $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ já foram discutidas no Capítulo 1.

Dos dez parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz, seis, k_F^μ , a_μ , b_μ , e_μ , f_μ , e $g_{\lambda\nu\mu}$ também violam a simetria discreta de \mathcal{CPT} . Estes termos violam tal simetria pois nenhum deles sente as transformações discretas de \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} , e assim, com as propriedades de transformações para os campos ψ , $\bar{\psi}$ e A_μ discutidas no apêndice A, os termos da ação obtida de (B.2) que contêm estas constantes de acoplamento são ímpares sob \mathcal{CPT} e violam esta simetria [26]. Para uma maior clareza colocamos na tabela B1 abaixo a propriedade de transformação sob \mathcal{C} , \mathcal{P} , \mathcal{T} , e \mathcal{CPT} de todos os termos da lagrangeana (B.2) [125]. Para sermos breves, abreviamos os termos pela sua constante de acoplamento, por exemplo, as transformações associadas com b_0 representam todo o termo $\bar{\psi}b_0\gamma_5\gamma^0\psi$ e assim sucessivamente para os demais.

	\mathcal{C}	\mathcal{P}	\mathcal{T}	\mathcal{CPT}
$c_{00}, (k_F)_{0j0k}, c_{jk}, (k_F)_{jklmn}$	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, (k_{AF})_j$	+	+	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	+
a_0, e_0, f_j	-	+	+	-
H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}	-	+	-	+
H_{0j}, d_{00}, d_{jk}	-	-	+	+
a_j, e_j, f_0	-	-	-	-

Tabela B1: Propriedade de transformações dos termos da ação da QED estendida, + ou par significa que o termo não muda de sinal sob a operação em questão e – ou ímpar significa que ele muda de sinal.

Todos os termos que aparecem na equação (B.3) são adimensionais enquanto aqueles aparecendo em (B.4) possuem dimensão canônica de massa. A independência de coordenadas da ação obtida de (B.2) leva a invariância sob transformações de observador da teoria e a uma ação invariante sob translações espaço-temporais acarretando em conservação de energia e momento, como usual. A simetria sob transformações de Lorentz de observador implica que observações feitas por quaisquer dois observadores inerciais podem ser conectadas por transformações de coordenadas. Contudo na ação obtida de (B.2) transformações de coordenadas ou de observador diferem profundamente de “boosts” ou rotações de partículas mantendo o sistema inercial fixo. As transformações, de Lorentz de partículas levam todos os coeficientes que controlam a quebra da simetria de Lorentz invariantes, e, assim, podem modificar a descrição física do modelo [26].

Todos os coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz em (B.2) carregam índices tensoriais e variam quando se realiza uma transformação de Lorentz de observador. Como o grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ é um grupo não compacto, tais coeficientes podem se tornar apreciáveis para algum observador. Assim é usual introduzir uma classe especial de sistemas inerciais em que os coeficientes que violam a simetria de Lorentz representam apenas uma pequena perturbação em relação a QED usual. Chamamos os membros desta classe de sistemas inerciais, de sistemas concordantes. Qualquer sistema inercial em que a terra se move não relativisticamente pode ser considerado como um sistema concordante já que a quebra de Lorentz e \mathcal{CPT} não foi observada nestes sistemas ainda, então qualquer violação destas simetrias deve ser minúscula aqui na Terra [79].

Considerando apenas o setor de matéria da lagrangeana (B.2), e na ausência de interação, nos obtemos uma equação de Dirac modificada dada por:

$$(i\Gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x) = 0, \tag{B.6}$$

sendo que uma equação tipo Klein-Gordon satisfeita por cada uma das componentes do espinor de Dirac pode ser obtida, porém o procedimento utilizado para se converter a

equação de Dirac, que é de primeira ordem nas derivadas, na equação de Klein-Gordon deve ser aplicado duas vezes levando a uma equação de quarta ordem. Isto porque se aplicarmos o procedimento uma única vez a equação tipo-Klein-Gordon obtida conterá elementos não diagonais e a de quarta ordem contém apenas elementos diagonais [26, 79]. Esta equação de quarta ordem pode ser obtida também como sendo o determinante da equação de Dirac modificada:

$$\det(i\Gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Pode-se procurar por soluções de onda plana da forma $\psi(x) = W(\mathbf{p}) \exp(-ip \cdot x)$ da equação de Dirac (B.6) como no caso usual, sendo que isto leva a equação:

$$(\Gamma^\mu p_\mu - M)W(\mathbf{p}) = 0, \quad (\text{B.8})$$

determinando as quatro componentes do espinor $W(\mathbf{p})$ em função do momento \mathbf{p} , sendo que o 4-momento p^μ deve ser solução da relação de dispersão geral:

$$\det(\Gamma^\mu p_\mu - M) = 0. \quad (\text{B.9})$$

A relação de dispersão (B.9) acima pode ser vista como uma equação de quarta ordem para $p^0(\mathbf{p})$, e uma solução exata desta equação que determina as exatas energias de uma partícula com um dado momento \mathbf{p} na presença da quebra da simetria de Lorentz e \mathcal{CPT} pode ser encontrada. Porém várias propriedades destas relações de dispersão podem ser obtidas sem uma explícita solução. Por exemplo, uma hamiltoniana hermitiana H pode ser construída para a equação (B.6) e, conseqüentemente, todas as quatro raízes da relação de dispersão deverão ser reais [79]. Uma característica das raízes da relação de dispersão é que a usual degenerescência do módulo das quatro raízes que ocorre no caso usual não acontece aqui, devido ao acoplamento existente entre o momento \mathbf{p} e os parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz. Em qualquer sistema concordante, como aqui na Terra, a relação de dispersão exibe duas raízes positivas, que correspondem a soluções com energia positiva, e duas negativas, que correspondem a soluções de energia negativa, como no caso usual da teoria de Dirac [79]. Uma extensiva discussão da mecânica quântica relativística e da TQC obtida da equação de Dirac (B.6) pode ser encontrada

nas referências [26, 79], aqui limitaremos a esta breve discussão realizada apenas com o intuito de ilustrar um pouco mais a QED estendida e algumas de suas propriedades.

Na Introdução desta dissertação discutimos várias análises que foram realizadas com esta QED estendida, a grande maioria com o intuito de impor limites para os parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz. No entanto outras análises têm sido realizadas apenas com o intuito de examinar como os resultados convencionais da QED se modificam em um ambiente com quebra da simetria de Lorentz. Na referência [125] os autores estudaram a renormalização desta QED estendida, e assuntos como estabilidade, causalidade e a maneira como esta teoria de baixas energias se conecta a teoria fundamental na escala de Planck foram analisadas na referência [79], sendo que este último ponto ainda permanece uma questão em aberto carecendo de uma resposta definitiva. Outros aspectos como polarização do vácuo foram discutidos em [126], e redefinição de campos não localmente para se eliminar coeficientes que controlam a quebra da simetria de Lorentz e um análise do operador de Pauli-Lubanski, que apesar da quebra de Lorentz mantém a sua estrutura, bem como seus autovalores, foram analisados na referência [127].

Na referência [26] os autores analisaram extensivamente o setor de matéria que é CPT -ímpar desta QED estendida. Neste caso, alguns coeficientes que controlam a quebra da simetria de Lorentz, como o a_μ aparecendo em (B.4), podem ser eliminados por uma simples redefinição da fase do espinor de Dirac. Neste trabalho os autores realizam uma extensa análise deste modelo, tratando de assuntos como solução da equação de Dirac generalizada obtida deste modelo, relação de dispersão para os férmions, quantização canônica e propagadores. Este setor da QED estendida mostrou-se ser uma teoria quântica consistente a passou a ser um dos setores do MPE, juntamente com o setor eletromagnético, mais estudados até o momento. O leitor interessado em mais discussões sobre a QED estendida é remetido a extensa literatura existente, sendo que alguns poucos artigos sobre este assunto foram listados neste apêndice.

Apêndice C

Análise de Unitariedade e Causalidade na aproximação clássica

Neste apêndice vamos tentar responder uma pergunta fundamental para uma teoria de campos, como a descrita por (1.1). Quando uma teoria de campos que incorpora a violação da simetria de Lorentz e ou \mathcal{CPT} pode ser uma teoria de campos quântica consistente? Para responder esta pergunta, pelo menos em um nível clássico sem a realização de cálculos perturbativos, uma análise do espectro de partículas descritas pelo modelo de campos da lagrangeana (1.1) é feita. Para isto, é realizada uma análise dos propagadores do modelo, a partir da qual, aspectos de causalidade, unitariedade e graus de liberdade propagados são obtidos. A análise é a nível de árvore (tree level), dividida em duas partes. Primeiro o modelo com quebra de Lorentz e \mathcal{CPT} , isto é com $d^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ e depois o modelo que é \mathcal{CPT} -par, isto é com $b^\mu = 0$. Posteriormente escolhas convenientes dos parâmetros que quebram a simetria de Lorentz são adotadas com o objetivo de se evitar modos taquiônicos¹⁰ e ghosts¹¹ no espectro. Esta análise é importante para se verificar quando o procedimento de quantização canônica utilizado no Capítulo 1 é válido.

¹⁰Partículas que se propagam em velocidades supraluminais violando a causalidade.

¹¹Estados de uma partícula no espaço de Hilbert dos estados com norma negativa que violam a unitariedade do modelo.

O Caso \mathcal{CPT} -ímpar

O Propagador é uma função de Green da teoria definida a partir da parte quadrática da ação clássica do modelo. A partir dele obtêm-se informações sobre causalidade, unitariedade, graus de liberdade propagados, dentre outros. Para obter o propagador do modelo de campos definido por (1.1) vamos escrever a ação para o caso \mathcal{CPT} -ímpar, isto é com $d^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ da seguinte forma:

$$S(A) = \int d^4x \frac{1}{2} A^\mu(x) \mathcal{O}_{\mu\nu}(\partial) A^\nu(x) \quad (\text{C.1})$$

sendo que o operador diferencial $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ que aparece na parte quadrática da ação é chamado de operador de onda. O propagador de Feynman da teoria é dado pela inversa do operador de onda aparecendo em (C.1) e como no caso usual da QED este operador não possui inversa pois ele é singular. Esta singularidade tanto aqui, como na QED usual vêm do fato de estarmos tratando de uma teoria de calibre, neste caso que possui uma invariância local $U(1)$ dada por (1.7). Esta simetria do modelo suprime da ação a dinâmica do setor longitudinal do campo vetorial A_μ o que leva o operador de onda a ser singular, pois este não é escrito como uma combinação linear de todos os operadores de projeção [9]. Para evitar esta singularidade e conseguir inverter o operador de onda vamos trazer para a ação do modelo o setor longitudinal através de um termo de fixação de calibre dado por:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{\alpha}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (\text{C.2})$$

Onde α é um parâmetro arbitrário que pode assumir qualquer valor, desde 0 até $+\infty$, sendo a física descrita pelo modelo independente deste parâmetro. Agora, na presença deste termo de fixação de calibre (gauge fixing) o operador de onda aparecendo em (C.1) assume a forma:

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = \square \eta_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \partial_\mu \partial_\nu - \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu} b^\alpha \partial^\beta, \quad (\text{C.3})$$

que não é singular e possui uma inversa. Para inverter este operador vamos usar o método dos projetores, mas agora temos que introduzir novos operadores para que a álgebra dos projetores se feche [76], assim temos:

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad s_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu} b^\alpha \partial^\beta, \quad (\text{C.4})$$

sendo $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ os operadores de projeção transversal e longitudinal respectivamente e $s_{\mu\nu}$ é um novo operador que não é um projetor pois $s^2 \neq s$. Para se entender a necessidade de novos operadores observe que:

$$s_{\mu\alpha} s^\alpha{}_\nu = (b^2 \square - \chi^2) \theta_{\mu\nu} - \chi^2 \omega_{\mu\nu} - \square \Lambda_{\mu\nu} + \chi (\Sigma_{\mu\nu} + \Sigma_{\nu\mu}) \equiv f_{\mu\nu} \quad (\text{C.5})$$

sendo que foram definidos três novos operadores, dados por,

$$\Lambda_{\mu\nu} = b_\mu b_\nu, \quad \Sigma_{\mu\nu} = b_\mu \partial_\nu, \quad \chi = b \cdot \partial, \quad (\text{C.6})$$

para que a álgebra formada pelos operadores (C.4) e (C.6) se feche, como mostrado na tabela C.1 abaixo, tornando possível a inversão do operador de onda (C.3).

	$\theta^\alpha{}_\nu$	$\omega^\alpha{}_\nu$	$s^\alpha{}_\nu$	$\Lambda^\alpha{}_\nu$	$\Sigma^\alpha{}_\nu$	$\Sigma_\nu{}^\alpha$
$\theta_{\mu\alpha}$	$\theta_{\mu\nu}$	0	$s_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\chi}{\square} \Sigma_{\nu\mu}$	$\Sigma_{\mu\nu} - \chi \omega_{\mu\nu}$	0
$\omega_{\mu\alpha}$	0	$\omega_{\mu\nu}$	0	$\frac{\chi}{\square} \Sigma_{\nu\mu}$	$\chi \omega_{\mu\nu}$	$\Sigma_{\nu\mu}$
$s_{\mu\alpha}$	$s_{\mu\nu}$	0	$f_{\mu\nu}$	0	0	0
$\Lambda_{\mu\alpha}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\chi}{\square} \Sigma_{\mu\nu}$	$\frac{\chi}{\square} \Sigma_{\mu\nu}$	0	$b^2 \Lambda_{\mu\nu}$	$b^2 \Sigma_{\mu\nu}$	$\chi \Lambda_{\mu\nu}$
$\Sigma_{\mu\alpha}$	0	$\Sigma_{\mu\nu}$	0	$\chi \Lambda_{\mu\nu}$	$\chi \Sigma_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu} \square$
$\Sigma_{\nu\alpha}$	$\Sigma_{\nu\mu} - \chi \omega_{\mu\nu}$	$\chi \omega_{\mu\nu}$	0	$b^2 \Sigma_{\nu\mu}$	$b^2 \square \omega_{\mu\nu}$	$\chi \Sigma_{\nu\mu}$

Tabela C.1: Álgebra formada pelos operadores de spin. Os produtos obedecem a ordem de linha vezes coluna.

É conveniente agora escrever o operador de onda (C.3) em termos dos operadores de projeção definidos em (C.4):

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = \square \theta_{\mu\nu} + \alpha \square \omega_{\mu\nu} - s_{\mu\nu} \quad (\text{C.7})$$

O propagador que é o valor esperado no vácuo do produto de campos ordenado temporalmente [8, 9, 10] é dado em termos do operador de onda como¹²:

¹²Observe que $T[A_\mu(x)A_\nu(y)] = A_\mu(x)A_\nu(y)$, de $x^0 > y^0$ ou $A_\nu(y)A_\mu(x)$ se $y^0 > x^0$

$$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = i(\mathcal{O}^{-1})_{\mu\nu}\delta^4(x-y). \quad (\text{C.8})$$

Utilizando a álgebra dos operadores mostrada na tabela C.1, conseguimos inverter o operador de onda, simplesmente assumindo que sua inversa é uma combinação linear de todos os operadores aparecendo na tabela C.1, e o fato que $\mathcal{O}^{\mu\alpha}(\mathcal{O})_{\alpha\nu}^{-1} = \delta^\mu{}_\nu$. Assim obtemos para o propagador¹³:

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{D} \left\{ \square\theta_{\mu\nu} + \frac{D - \alpha\chi^2}{\alpha\square}\omega_{\mu\nu} + s_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} + \frac{\chi}{\square}(\Sigma_{\mu\nu} + \Sigma_{\nu\mu}) \right\} \quad (\text{C.9})$$

sendo $D(k) = k^4 + b^2k^2 - (b \cdot k)^2$, a relação de dispersão característica do modelo, (1.23) que fornece o espectro de massas das partículas propagadas.

Agora pode-se discutir o conteúdo de partícula da teoria. Consideramos que as partículas elementares estáveis (on-shell) descritas como as excitações de um modelo de campos aparecem como os polos dos propagadores. Contudo desde que os polos sejam identificados, assuntos como causalidade e unitariedade devem ser analisados. Tendo em vista que os polos do propagador dependem do vetor de fundo b^μ , vamos dividir nossa análise em três partes, b^μ sendo do tipo-tempo, tipo-luz e tipo-espaço.

No caso em que b^μ é do tipo-tempo pode-se sempre encontrar um referencial onde $b^\mu = (m, \mathbf{0})$ e os polos da função $D(k)$ no espaço dos momentos são $k^2 = \pm m|\mathbf{k}|$, mostrando que a “massa” da partícula pode ser imaginária, levando a uma velocidade de propagação maior que c , conseqüentemente violando causalidade, logo a versão quântica do modelo no caso em que o vetor de fundo é do tipo-tempo não é satisfatória, pois o espectro é contaminado por ghosts.

No caso em que b^μ é tipo luz pode-se escolher um referencial onde $b^\mu = (b^0, 0, 0, b^0)$ e é fácil ver que os polos do propagador levam a um espectro análogo ao usual para fótons, apenas com um desvio da energia e do momento por quantidades constantes, as quais podem ser reabsorvidos em uma nova definição destas quantidades, não sendo por exemplo mensuráveis [29, 78]:

¹³Os autores da referência [76] obtêm um resultado similar a este, porém eles tratam de um modelo com a simetria de calibre quebrada espontaneamente onde o campo vetorial A_μ adquire uma massa.

$$\left(\omega \pm \frac{b^0}{2}\right)^2 = \left(\mathbf{k} \pm \frac{\mathbf{b}}{2}\right)^2. \quad (\text{C.10})$$

Não consideraremos mais este caso, e daremos ênfase apenas para os casos extremos de b^μ , ou seja, tipo-tempo e tipo-espaço.

Finalmente no caso em que b^μ é do tipo espaço podemos sem perda de generalidade escolher o vetor de fundo como sendo $b^\mu = (0, 0, 0, m)$, e neste caso o propagador apresenta dois polos $k^2 = M_+$ e $k^2 = M_-$ sendo as massas dadas por:

$$M_\pm^2 = \frac{1}{2}(m^2 \pm m\sqrt{m^2 + 4k_3^2}). \quad (\text{C.11})$$

Neste caso ambos polos determinam partículas estáveis com um propagador bem definido respeitando causalidade [74]. O propagador (C.9) só possui polos simples, o que nos diz que possíveis estados no espaço de Hilbert dos estados com norma negativa não devem estar presentes no espectro do modelo, ou seja a unitariedade dos estados é respeitada pelo modelo. Para inferirmos sobre este aspecto temos que calcular os autovalores da matriz de resíduos do propagador nos polos (C.11) e verificar se são positivos definidos. No caso do vetor de fundo ser do tipo-tempo isso não é necessário pois os polos já violam unitariedade.

Fixando-se o momento como $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^3)$ e com a condição de que $k^2 > 0$ pois o espectro do modelo possui partículas massivas, pode-se calcular a matriz de resíduos do propagador (C.9) nos polos (C.11) [84]. Não apresentaremos detalhes aqui pois isto não é importante para nós, sendo o leitor interessado remetido as referências [76, 84]. O que é importante aqui é o fato de que a matriz de resíduos possui um único autovalor não nulo e positivo definido em cada um dos polos M_+^2 e M_-^2 . Isto significa que cada um dos polos está associado com um único grau de liberdade propagado e que os estados de uma partícula no espaço de Hilbert possuem norma positiva definida levando a uma teoria quântica satisfatória com dois graus de liberdade propagados.

Assim, da análise acima conclui-se que uma teoria quântica consistente para o caso \mathcal{CPT} -ímpar é possível apenas no caso em que o vetor de fundo b^μ é tipo-espaço, isto confirma as discussões das dificuldades apresentadas com a teoria já no nível clássico feitas no capítulo 2, e conseqüentemente uma possível quantização canônica do modelo é possível somente para o vetor de fundo tipo-espaço. A análise apresentada aqui confirma uma feita por Adam e Klinkhamer na Ref.[74], porém eles analisaram a unitariedade do

ponto de vista que somente para o vetor de fundo b^μ do tipo-espaço o hamiltoniano admite uma extensão auto-adjunta, positivo definido, dando origem portanto a um operador de evolução temporal unitário.

Aqui a análise de unitariedade [76] é referida ao espaço de Hilbert dos estados de uma partícula. Ou seja estados com norma negativa, ou estados de ghost sempre estão presentes quando b^μ for do tipo-tempo. Porém quando ele for do tipo espaço tais estados não estão presentes e o modelo pode ser adotado como uma teoria quântica consistente.

O Caso \mathcal{CPT} -par

Vamos agora analisar o propagador do modelo (1.1) para o caso \mathcal{CPT} -par, ou seja considerando $b^\mu = 0$. Rescrevendo a ação do modelo com o termo de fixação de calibre (C.2) pois sem ele, novamente o operador de onda é singular devido a invariância de calibre do modelo, obtemos:

$$S(A) = \int d^4x \frac{1}{2} A^\mu(x) \mathcal{O}_{\mu\nu}(\partial) A^\nu(x) \quad (\text{C.12})$$

onde o operador de onda $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ é dado por:

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = \square \eta_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \partial_\mu \partial_\nu + 2d_{\mu\rho\sigma\nu} \partial^\rho \partial^\sigma. \quad (\text{C.13})$$

Agora, contrário ao caso anterior não precisamos introduzir mais operadores para que a álgebra dos operadores defidos no espaço dos momenta por

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad v_{\mu\nu} = d_{\mu\rho\sigma\nu} k^\rho k^\sigma, \quad (\text{C.14})$$

se feche. A álgebra destes operadores é mostrada na tabela C.2 abaixo, sendo que substituímos o produto $k^\rho k^\sigma$ que aparece no operador $v_{\mu\nu}$ por $\hat{k}^\rho \hat{k}^\sigma k^2$, de modo que $v_{\mu\nu} = k^2 d_{\mu\rho\sigma\nu} \hat{k}^\rho \hat{k}^\sigma = -k^2 \tilde{d}_{\mu\nu}$, assim temos:

$$v_{\mu\alpha} v^\alpha{}_\nu = k^4 \tilde{d}_{\mu\alpha} \tilde{d}^\alpha{}_\nu \approx 2\eta_{\mu\nu} k^4 (\sigma^2 + \rho^2) = \Delta (\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}).$$

sendo $\Delta = 2k^4 (\sigma^2 + \rho^2)$ um número. Justifica-se esta aproximação baseados em dois fatos. O primeiro é que sem esta aproximação a álgebra dos operadores (C.14) não se

fecha, mesmo introduzindo outros operadores, o problema fica muito mais complicado que no caso \mathcal{CPT} -ímpar, sendo quase intratável. A segunda justificativa é baseada no fato experimental de que as componentes do campo tensorial $d^{\mu\nu\alpha\beta}$ são muito pequenas, como discutido no capítulo 1, então se houver alguma invalidação deste modelo em um nível quântico esta deve se mostrar já em primeira ordem nos parâmetros que controlam a quebra de Lorentz. A álgebra dos operadores (C.14) é:

	$\theta^\alpha{}_\nu$	$\omega^\alpha{}_\nu$	$v^\alpha{}_\mu$
$\theta_{\mu\alpha}$	$\theta_{\mu\nu}$	0	$v_{\mu\nu}$
$\omega_{\mu\alpha}$	0	$\omega_{\mu\nu}$	0
$v_{\mu\alpha}$	$v_{\mu\nu}$	0	$\Delta(\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})$

Tabela C.2: Álgebra formada pelos operadores de spin. Os produtos obedecem a ordem de linha vezes coluna.

Agora podemos inverter o operador de onda e encontrar o propagador da teoria. Escrevendo então o operador de onda (C.13) em termos dos operadores (C.14) temos:

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = \square\theta_{\mu\nu} + \alpha\square\omega_{\mu\nu} + 2v_{\mu\nu} \quad (\text{C.15})$$

Utilizando a álgebra dos projetores mostrada na tabela 3.2, conseguimos inverter o operador $\mathcal{O}_{\mu\nu}$, e obter o propagador, definido em (C.8), o qual toma a seguinte forma:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = \frac{-1}{k^2(1 - 8(\sigma^2 + \rho^2))} \left(\theta_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha}\omega_{\mu\nu} + \frac{2}{k^2}v_{\mu\nu} \right). \quad (\text{C.16})$$

Este resultado nos permite discutir a natureza das excitações físicas, presentes no espectro do modelo, que correspondem aos pólos do propagador. Note que o denominador geral $k^2(1 - 8(\sigma^2 + \rho^2))$ possui um polo em $k^2 = 0$ que corresponde a uma partícula de massa nula, e que o setor $v_{\mu\nu}$ do propagador possui um polo duplo que pode levar a violação da unitariedade do modelo, por isso um estudo mais detalhado deste setor deve ser realizado. As partículas descritas pelo modelo são partículas estáveis (on-shell) de massa nula $k^2 = 0$, e calculando-se a matriz de resíduos para se inferir sobre possíveis estados de norma negativa temos, que o propagador (C.16) possui matriz de resíduos no polo $k^2 = 0$ dada por:

$$R = \frac{1}{(1 - 8(\sigma^2 + \rho^2))} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

sendo que para obtermos o resultado acima utilizamos a arbitrariedade do parâmetro de calibre α e escolhemos ele como sendo $\alpha = 1$ e fixamos o momento como sendo $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0)$. Observe que esta matriz de resíduos possui autovalores positivos e negativos. O auto-valor negativo da matriz de resíduos está associado aos fótons tipo-tempo do modelo que são descritos pela componente A^0 do campo de calibre e são não-físicos, assim como os fótons com polarização longitudinal que também não são físicos. A presença destes graus de liberdade espúrios é consequência da introdução do termo de fixação de calibre (C.2) que traz para a ação do modelo graus de liberdade espúrios que devem ser eliminados do espaço de Hilbert da teoria por alguma condição suplementar imposta aos estados, como acontece no caso usual da QED [9]. Importante para nós é que o número de graus de liberdade físicos, propagados pelo modelo são dois que correspondem a uma excitação de spin-1 com massa nula.

Em qualquer um dos dois casos analisados o número de graus de liberdade físicos propagados é dois. Isto é um ponto sutil do modelo pois como vemos a quebra da simetria de Lorentz introduz várias características novas ao modelo mas mantém o número de graus de liberdade propagados em qualquer um dos casos, \mathcal{CPT} -par ou ímpar.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, “*Sobre o princípio da relatividade e suas implicações*”, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 37 (2005).
- [2] T.D. Lee and C.N. Yang, “*Question of Parity Conservation in Weak Interactions*”, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
- [3] C.S. Wu, et al., “*Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*”, Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).
- [4] M. Pospelov and R. Romalis, “*Lorentz Invariance on Trial*”, Phys. Today 40 (2004).
- [5] A. Cho, “*Special Relativity Reconsidered*”, Science **307**, 866 (2005).
- [6] C. Amsler, et al., “*Review of Particle Physics*”, Phys. Lett. **B 667**, 1 (2008).
- [7] S.S. Schweber “*An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*”, Dover, New York, (2005).
- [8] L.H. Ryder, “*Quantum Field Theory*”, Cambridge Univ. Press, Nova Iorque, 2^ª ed. (1996).
- [9] C. Itzykson and J.B. Zuber, “*Quantum Field Theory*”, Dover, New York, (2005).
- [10] S. Weinberg, “*The Quantum Theory Of Fields*”, vol. I, Cambridge Univ. Press, New York (1995).
- [11] R. Lehnert “*Violations of spacetime symmetry*”, arXiv:hep-th/0711.4851v1.
- [12] R. Lehnert “*CPT-and Lorentz-Symmetry Breaking: A Review*”, arXiv:hep-ph/0611177v2.

- [13] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “*Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*”, Phys. Rev. **D 39**, 683 (1989).
- [14] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “*Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings*”, Phys. Rev. **D 40**, 1886 (1989).
- [15] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “*Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher-dimensional Theories*”, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989).
- [16] V.A. Kostelecký and R. Potting, “*Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string*”, Phys. Lett. **B 381**, 89 (1996).
- [17] S.M. Carroll et al., “*Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation*”, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [18] A. Anisimov, et al., “*Remarks on noncommutative phenomenology*”, Phys. Rev. **D 65**, 085032 (2002).
- [19] V.A. Kostelecký, R. Lehnert and M.J. Perry “*Spacetime-varying couplings and Lorentz violation*”, Phys. Rev. **D 68**, 123511 (2003).
- [20] O. Bertolami, et al., “*Cosmological acceleration, varying couplings and Lorentz breaking*”, Phys. Rev. **D 69**, 083513 (2004).
- [21] T. Jacobson, et al., “*Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena and astrophysical constraints*”, Ann. of Phys. **321**, 150 (2006).
- [22] F.R. Klinkhamer, “*A CPT anomaly*”, Nucl. Phys. **B 578**, 277 (2000).
- [23] G.A. Camelia, et al., “*Tests of quantum gravity from observations of γ -ray bursts*”, Nature (London) **393**, 763 (1998).
- [24] R. Lehnert “*Aspects of spacetime symmetry violations*”, arXiv:gr-qc/0602073v1.
- [25] H. C. Ohanian “*Gravitation and Spacetime*”, W.W. Norton & Company, (1976).
- [26] D. Colladay e V.A. Kostelecký, “*CPT violation and the standard model*”, Phys. Rev. **D 55** 6760 (1997).

- [27] O.W. Greenberg, “*CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance*”, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [28] O.W. Greenberg, “*Why is CPT Fundamental*”, Found. of Phys. **36**, 1535 (2002).
- [29] D. Colladay e V.A. Kostelecký, “*Lorentz-violating extension of the standard model*”, Phys. Rev. **D 58** 116002 (1998).
- [30] V.A. Kostelecký, “*Gravity, Lorentz Violation, and the Standard Model*”, Phys. Rev. **D 69** 105009 (2004).
- [31] R. Bluhm “*Overview of the SME: Implications and Phenomenology of Lorentz Violation*”, arXiv:hep-ph/0506054v1.
- [32] V.A. Kostelecký “*Em Busca de Violações na Relatividade*”, Scientific American, **29**, 72 (2004).
- [33] R. Bluhm, et al., “*Clock-Comparison tests of Lorentz and CPT Symmetry in Space*”, Phys. Rev. Lett. **88**, 090801 (2002).
- [34] S. Coleman and S.L. Glashow, “*High-energy tests of Lorentz invariance*”, Phys. Rev. **D 59** 116008 (1999).
- [35] V.A. Kostelecký “*Signals for CPT and Lorentz violation in neutral-meson oscillations*”, Phys. Rev. **D 61**, 016002 (1999).
- [36] V.A. Kostelecký and R.V. Kooten “*Bounding CPT violation in the neutral B system*”, Phys. Rev. **D 54**, 5585 (1996).
- [37] D.L. Anderson, et al., “*Lorentz and CPT violation in the Higgs sector*”, **D 70**, 016001 (2004).
- [38] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “*Lorentz and CPT violation in neutrinos*”, Phys. Rev. **D 69**, 016005 (2004).
- [39] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “*Lorentz and CPT violation in the neutrino sector*”, Phys. Rev. **D 70**, 031902 (2004).

- [40] R. Bluhm, et al., “*CPT and Lorentz Tests with Muons*”, Phys. Rev. Lett. **84**, 1098 (2000).
- [41] G. Gabrielse *et al.*, “*Precision Mass Spectroscopy of the Antiproton and Proton Using Simultaneously Trapped Particles*”, Phys. Rev. Lett. **82** 3198 (1999).
- [42] L-S. Hou, W.-T. Ni and Y.-C.M. Li, “*Test of Cosmic Spatial Isotropy for Polarized Electrons Using a Rotatable Torsion Balance*”, Phys. Rev. Lett. **90** 201101 (2003).
- [43] H. Müller, *et al.*, “*Optical cavity tests of Lorentz invariance for the electron*”, Phys. Rev. **D 68** 116006 (2003).
- [44] B. Altschul, and D. Colladay, “*Velocity in Lorentz-violating fermion theories*”, Phys. Rev. **D 71**, 125015 (2005).
- [45] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, “*Limits on a Lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics*”, Phys. Rev. **D 41** 1231 (1990).
- [46] V.A. Kostelecký and A.G.M. Pickering, “*Vacuum Photon Splitting in Lorentz-Violating Quantum Electrodynamics*”, Phys. Rev. Lett. **91**, 031801 (2003).
- [47] C. Adam and F.R. Klinkhamer, “*Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics*”, Nucl. Phys. **B 657** 214 (2003).
- [48] C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, “*Vacuum Cherenkov radiation and photon triple-splitting in a Lorentz-noninvariant extension of quantum electrodynamics*”, Nucl. Phys. **B 734** 1 (2006).
- [49] B. Altschul, “*Lorentz violation and Faddeev-Popov ghosts*”, Phys. Rev. **D 73**, 045004 (2006).
- [50] M.S. Berger and V.A. Kostelecky, “*Supersymmetry and Lorentz violation*”, Phys. Rev. **D 65**, 091701 (2002).
- [51] H. Belich, et al., “*Supersymmetric extension of the Lorentz- and CPT-violating Maxwell-Chern-Simons model*”, Phys. Rev. **D 68**, 065030 (2003).
- [52] P.A. Bolokhov, S.G. Nibbelink, and M. Pospelov, “*Lorentz violating supersymmetric quantum electrodynamics*”, Phys. Rev. **D 72**, 015013 (2005).

- [53] H. Belich, et al., *N=1-supersymmetric quantum mechanics in a scenario with Lorentz-symmetry violation*, Phys. Lett. **A 370** 126 (2007).
- [54] R. Lehnert and R. Potting, “*Cerenkov effect in Lorentz-violating vacua*”, Phys. Rev. **D 70** 125010 (2004).
- [55] R. Lehnert and R. Potting, “*Vacuum Cerenkov Radiation*”, Phys. Rev. Lett. **93** 110402 (2004).
- [56] C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, “*Vacuum Cherenkov radiation in spacelike Maxwell-Chern-Simons theory*”, Phys. Rev. **D 76**, 025024 (2007).
- [57] B. Altschul, “*Cerenkov radiation in a Lorentz-violating and birefringent vacuum*”, Phys. Rev. **D 75** 105003 (2007).
- [58] B. Altschul, “*Vacuum Cerenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation*”, Phys. Rev. Lett. **98** 041603 (2007).
- [59] B. Altschul, “*Finite duration and energy effects in Lorentz-violating vacuum Cerenkov radiation*”, Nucl. Phys. **B 796** (2008) 262.
- [60] B. Altschul, “*Lorentz violation and synchrotron radiation*”, Phys. Rev. **D 72** 085003 (2005).
- [61] J.E. Frolov and V. Ch. Zhukovsky, “*Synchrotron Radiation in the Standard Model Extension*”, J. Phys. **A 40** (2007) 10625.
- [62] B. Altschul, “*Limits on Lorentz Violation from Synchrotron and Inverse Compton Sources*”, Phys. Rev. Lett. **96** 201101 (2006).
- [63] M.M. Ferreira Jr., et al., “*Influence of Lorentz-violating terms on a two-level system*”, Phys. Rev. **D 76** (2007) 105031.
- [64] H. Belich, et al., “*Lorentz-violating corrections on the hydrogen spectrum induced by a nonminimal coupling*”, Phys. Rev. **D 74**, 065009 (2006).
- [65] R. Bluhm, V.A. Kostelecký and N. Russel, “*CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen*”, Phys. Rev. Lett. **82** 2254 (1999).

- [66] R. Bluhm, V.A. Kostelecký and N. Russel, “*Testing CPT with Anomalous Magnetic Moments*”, Phys. Rev. Lett. **79** 1432 (1997).
- [67] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “*Lorentz-Violating Electrodynamics and the Cosmic Microwave Background*”, Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007).
- [68] A. Lue, L. Wang, and M. Kamionkowski, “*Cosmological Signature of New Parity-Violating Interactions*”, Phys. Rev. Lett. **83** 1506 (1999).
- [69] B. Feng, et al., “*Searching for CPT Violation with Cosmic Microwave Background Data from WMAP and BOOMERANG*”, Phys. Rev. Lett. **96** 221302 (2006).
- [70] G-C. Liu, S. Lee, and K-W. Ng, “*Effect on Cosmic Microwave Background Polarization of Coupling of Quintessence to Pseudoscalar Formed from the Electromagnetic Field and its Dual*”, Phys. Rev. Lett. **97** 161303 (2006).
- [71] H. Belich, et al., “*Dimensional reduction of a Lorentz-and CPT-violating Maxwell-Chern-Simons model*”, Phys. Rev. **D 67** 125011 (2003).
- [72] H. Belich, Jr. et al., “*Classical solutions in a Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons electrodynamics*”, Phys. Rev. **D 68**, 025005 (2003).
- [73] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., and J.A. Helayël-Neto, “*Dimensional reduction of the Abelian Higgs Carroll-Field-Jackiw model*”, Eur. Phys. J. **C 38** (2005) 511.
- [74] C. Adam and F.R. Klinkhamer, “*Causality and CPT violation from an Abelian chern-simons-like term*”, Nucl. Phys. **B 607** 247 (2001).
- [75] C. Adam and F.R. Klinkhamer, “*Causality and radiatively induced CPT violation*”, Phys. Lett. **B 513** 245 (2001).
- [76] A.B. Bâeta Scarpelli, et al., “*Aspects of causality and unitarity and comments on vortex like configurations in an Abelian model with a Lorentz-breaking term*”, Phys. Rev. **D 67** 085021 (2003).
- [77] A.A. Andrianov and R. Soldati, “*Patterns of lorentz symmetry breaking in QED by CPT-odd interaction*”, Phys. Lett. **B 435** 449 (1998).

- [78] A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, “*Dynamical Lorentz symmetry breaking from a (3+1)-dimensional axion-Wess-Zumino model*”, Phys. Rev. **D 59** 025002 (1998).
- [79] V.A. Kostelecký and R. Lehnert, “*Stability, causality, and Lorentz and CPT violation*”, Phys. Rev. **D 63** (2001) 065008.
- [80] N.M. Barraz Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayël-Neto, “*Dirac-like monopoles in a Lorentz-and CPT-violating electrodynamics*”, Phys. Rev. **D 76** (2007) 027701.
- [81] P.A.M. Dirac, “*Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*”, Proc. Royal Soc. (London) **A 133** 60 (1931).
- [82] P.A.M. Dirac, “*The Theory of Magnetic Poles*”, Phys. Rev. **74** (1948) 817.
- [83] J.M. Fonseca, “*Uma Breve Introdução aos Monopólos Magnéticos de Dirac*”, Trabalho final de conclusão de curso, Universidade Federal de Viçosa (2007).
- [84] A.P. Baêta Scarpelli and J.A. Helayël-Neto, “*Lorentz SO(3) model: Discussing unitarity, causality, and 't Hooft-Polyakov monopoles*”, Phys. Rev. **D 73**, 105020 (2006).
- [85] J.M. Fonseca, A. Herkenhoff Gomes and W.A. Moura-melo, “*Emission and absorption of photons and the black-body spectrum in Lorentz-odd electrodynamics*”, Phys. Lett. **B 671** 280 (2009).
- [86] R. Jackiw e V.A. Kostelecký, “*Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. Lett. **82** 3572 (1999).
- [87] M. Pérez-Victoria, “*Exact Calculation of the Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in QED*”, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999).
- [88] J.-M. Chung, “*Radiatively-induced Lorentz and CPT Violating Chern-Simons term in QED*”, Phys. Lett. **B 461**, 138 (1999).

- [89] G. Bonneau, “*Regularisation: many recipes, but a unique principle: Ward identities and normalisation conditions. The case of CPT violation in QED*”, Nucl. Phys. **B 593**, 398 (2001).
- [90] A.P. Baêta Scarpelli, et al., “*Gauge invariance and the CPT and Lorentz induced Chern-Simons-like term in extended QED*”, Eur. Phys. J. **C 56**, 571 (2008).
- [91] A.A. Andrianov, P.G. and R. Soldati “*Lorentz and CPT violations from Chern-Simons modifications of QED*”, JHEP **02**, 30 (2002).
- [92] F.A. Brito, et.al., “*Induced Chern-Simons-like action in Lorentz-violating massless QED*”, Phys. Rev. **D 78**, 125023 (2008).
- [93] R. Jackiw, “*When radiative corrections are finite but undertermined*”, arXiv:hep-th/9903044v1.
- [94] O. Piguet and S.P. Sorella, “*Algebraic Renormalization*”, Lecture Notes in Physics, m28, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [95] O. M. Del Cima, J.M. Fonseca, D.H.T. Franco and O. Piguet, “*Yet on the radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED: a missing analysis*”, Submetido ao Nuclear Physics **B**.
- [96] R. Jackiw, “*Chern-Simons Violation of Lorentz and PCT Symmetries in Electrodynamics*”, arXiv:hep-th/9811322.
- [97] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “*Topologically Massive Gauge Theories*”, Ann. of Phys. **281**, 409 (2000), reimpresso do volume 140, página 372.
- [98] W.A. Moura-Melo and J.A. Helayël-Neto, “*Remarks on Dirac-like monopoles, Maxwell and Maxwell-Chern-Simons electrodynamics in D=2+1 dimensions*”, Phys. Rev. **D 63** 065013 (2001).
- [99] W.A. Moura-Melo, “*Aspectos Peculiares das Eletrodinâmicas de Maxwell e Maxwell-Chern-Simons Planares*”, Tese de Doutorado, CBPF (2001).
- [100] J.D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, Wiley, New York, 1999, 3rd edição.

- [101] R. Casana, et al., “*Lorentz-violating contributions of the carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy*”, Phys. Rev. **D 78** 125013 (2008).
- [102] V.A. Kostelecký e M. Mewes, “*Signal for Lorentz Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. **D 66** 056005 (2002).
- [103] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “*Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).
- [104] E. Hecht, “*Óptica*”, Fundação Caloute Gul Benkian, 2rd ed. (ano).
- [105] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “*Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-ray Bursts*”, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).
- [106] F.R. Klinkhamer and M. Risse, “*Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified Maxwell Theory*”, Phys. Rev. **D 77** 016002 (2008).
- [107] B. Nodland and J.P. Ralston, “*Indication of Anisotropy in Electromagnetic Propagation over Cosmological Distances*”, Phys. Rev. Lett. **78**, 3043 (1997).
- [108] S.M. Carrol and G.B. Field, “*Is There Evidence for Cosmic Anisotropy in the Polarization on Distant radio Sources?*”, Phys. Rev. Lett. **79**, 2394 (1997).
- [109] J.F.C. Wardle, R.A. Perley and M.H. Cohen, “*Observational Evidence against Birefringence over Cosmological Distances*”, Phys. Rev. Lett. **79**, 1801 (1997).
- [110] Q.G. Bailey and V.A. Kostelecký, “*Lorentz-Violating Electrostatics and Magnetostatics*”, Phys. Rev. **D 70** 076006 (2004).
- [111] A.J. Hariton and R. Lehnert, “*Spacetime symmetries of the Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons model*”, Phys. Lett. **A 367** 11 (2007).
- [112] J.J. Sakurai, “*Advanced Quantum Mechanics*”, Addison-Wesley, Reading, (1967).
- [113] W. Heitler, “*The Quantum Theory of Radiation*”, Oxford University Press, (1944).
- [114] R. Eisberg and R. Resnick, “*Física Quântica Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*” Editora CAMPUS (1979).

- [115] F. Reif, *“Fundamentals of Statistical and Thermal Physics”*, McGraw-Hill International Editions (1985).
- [116] J.J. Sakurai, *“Modern Quantum Mechanics”*, Addison-Wesley, Reading, (1994).
- [117] A.H. Fatollahi and M. Hajirahimi, *“Black-body radiation of noncommutative gauge fields”*, Phys. Lett. **B 641** 381 (2006).
- [118] J. Ludescher and R. Hofmann, *“Thermal photon dispersion law and modified black-body spectra”*, arXiv:hep/th-0806.097v2.
- [119] M. Mewes and A. Petroff, *“Cavity tests of parity-odd Lorentz violations in electrodynamics”*, Phys. Rev. **D 75** 056002 (2007).
- [120] M. E. Tobar, et al., *“New methods of testing Lorentz violation in electrodynamics”*, Phys. Rev. **D 71** 025004 (2005).
- [121] A.H. Gomes, J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo and A. R. Pereira *“Testing CPT and Lorentz-odd electrodynamics with waveguides”*, Trabalho em preparação.
- [122] R. Ferraro, *“Testing Born-Infeld Electrodynamics in Waveguides”*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 230401.
- [123] Griffiths, D. J. *“Introduction to Elementary Particles”*, Wiley, New York, (1987).
- [124] H. Belich, et al., *“Violação da simetria de Lorentz”*, Revis. Brasil. Ens. Fís. **29**, 57 (2007)
- [125] V.A. Kostelecký, C.D. Lane and A. G. M. Pickering, *“One-loop renormalization of Lorentz-violation electrodynamics”*, Phys. Rev. **D 65**, 056006 (2002).
- [126] G. Bonneau, L.C. Costa and J.L. Tomazelli, *“Vacuum Polarisation Effects in the Lorentz Violating Electrodynamics”*, Int. J. Theor. Phys. **47**, 1764 (2008).
- [127] R. Lehnert, *“Nonlocal on-shell field redefinition for the standard-model extension”*, Phys. Rev. **D 74** 125001 (2006).

Anexo

Trabalho Publicado



Emission and absorption of photons and the black-body spectrum in Lorentz-odd electrodynamics

J.M. Fonseca, A.H. Gomes, W.A. Moura-Melo*

Departamento de Física, Universidade Federal de Viçosa, 36570-000 Viçosa, Minas Gerais, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 3 October 2008
 Received in revised form 26 November 2008
 Accepted 11 December 2008
 Available online 16 December 2008
 Editor: L. Alvarez-Gaumé

PACS:

11.15.-q
 11.30.Cp
 11.30.Er

Keywords:

Lorentz symmetry
 CPT invariance
 Electrodynamics
 Black-body radiation

ABSTRACT

We study emission and absorption of radiation by non-relativistic electrons within the framework of a Lorentz-breaking electrodynamics in $(3 + 1)$ dimensions. We have realised that Planck-type law acquires extra terms proportional to the violating parameters: For the CPT-odd model, the leading extra terms appear to be linear or quadratic in these violating parameters according to the background vector is parallel or perpendicular to the photon wave-vector. In the CPT-even case a linear correction shows up. Besides these deviations in the black-body spectra, those violations may be also probed through a difference in the photon mean occupation number for the two modes. Our results also indicate that such violations are better probed at very low temperatures, where their effects on the thermal spectra are largely enhanced.

© 2008 Elsevier B.V. All rights reserved.

Symmetries are keystones for building the modern theories describing particle physics. For instance, the symmetry structure of gauge groups is crucial for classifying the possible particle content in a given model whenever irreducible representations of the Lorentz group are concerned. On the other hand, continuous symmetries imply in dynamically conserved quantities, like energy-momentum and electric charge, whose conservation laws show up whenever the action remains invariant under space-time translations and local gauge transformations, respectively. Discrete symmetries are also very important in these frameworks, for instance, the combined CPT-invariance should be verified in all Lorentz-covariant local quantum field theories.

Although Lorentz and CPT invariances have been confirmed in several high precision tests, they are sometimes believed to be only approximate, not exact symmetries in Nature. Such a belief is partially supported by Lorentz violation in a number of frameworks trying to consistently describe quantum gravity, like string theories. Even though these violations take place only at the Planck scale, their reminiscent effects would survive at ordinary energies. Among such descendants, those which are power-counting renormalizable, preserve the usual $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

gauge structure and respect Lorentz symmetry under observer-type transformations (but not under particle-like ones) are collected in the so-called Standard Model Extension (SME), which is the Standard Model augmented by these non-standard terms [1]. Here, we shall consider two of them, responsible for breaking Lorentz symmetry at the Abelian electrodynamic level, say, in the radiation sector. One of these terms also violates CPT-operation, once it is parametrised by a constant vector-like background field which chooses a preferred direction in the space-time. Of course, such violations should be very small, once Lorentz and CPT symmetries have been confirmed to high precision in several experiments. Indeed, in the CPT-odd case, the background field magnitude is stringently constrained by astrophysical data, $|b_\mu| \lesssim 10^{-42}$ GeV [2,3]; in turn, CPT-even may take larger values: suitable combinations of the dimensionless rank-4 tensor parameter could be around 10^{-16} [4].

Several works have been devoted to study how those extra terms modify conventional results concerning radiation and matter physical properties. For example, in the presence of the Lorentz- and CPT-odd and/or CPT-even terms a number of usual results concerning classical and quantum aspects of electromagnetic radiation acquire (small) contributions which often are linear or quadratic in the violating parameters. Among them are the Cerenkov [5,6] and synchrotron radiations [7]. Quantum mechanical effects could be also probed by means of two-level system [8]. In turn, cos-

* Corresponding author. Tel.: +55 31 3899 3417; fax: +55 31 3899 2483.
 E-mail address: winder@ufv.br (W.A. Moura-Melo).

mic microwave background (CMB) data have been also investigated to search for possible traces of these violations in the very early Universe [3,9]. An even more amazing possibility is the photon splitting into two or more other on-shell photons within such frameworks [10]. Furthermore, there is also an extensive literature dedicated to study how such violations can be somewhat probed in the matter sector, dealing with electrons [11], neutrinos [12], and so forth. Many other aspects have been also extensively investigated, like dimensional reduction [13], causality and unitarity [14], and so on. However, additional results are important, for instance, to wide the possible experimental ways for probing such subtle symmetry breakings.

Here, we seek for possible effects of these violations in mechanisms of emission and absorption of quantum radiation by atoms. Namely, we realise that Planck law is sensitive to Lorentz breaking, accompanied by the CPT-odd and CPT-even terms. Although small, these deviations, linear or quadratic in the respective violating parameters, could be of prime importance once our results rely on mechanisms abundantly observed in nature. Indeed, the searching for those symmetry-breaking, based upon the present analysis (perhaps combined with others), include a very broad range of physical systems, from a relatively small number of atoms and photons to the CMB, which permeates the whole Universe. Namely, the observation of a tiny predominance of a given polarisation over the another in a thermal bath could be taken as a good indication of such violations, as some of our results claim. Additionally, our results clearly indicate that the probing for these small symmetry violations should be accomplished at very low temperatures, where thermal effects on the black-body-type spectra are enormously enhanced. This should be contrasted with similar thermal effects brought about by non-commutative geometry which demand very high energy scales [15] to be effectively probed.

Considering only the radiation sector of the (Abelian) SME, we realise that in this framework the Maxwell theory is modified by incorporating two additional Lorentz-odd terms, as below¹:

$$\mathcal{L}_{\text{MED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}b_\alpha A_\beta \bar{F}^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}d_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}, \quad (1)$$

where $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ and $\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Sources can be introduced in the usual way, $A_\mu j^\mu$. Those terms proportional to the parameters² b_μ and $d_{\mu\nu\alpha\beta}$ are responsible for the violation of the Lorentz symmetry, but keeping gauge invariance under usual local transformations, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$. Their roles are distinct under CPT-operation: once b_μ is a constant background vector field, $\partial_\alpha b_\mu = 0$, it implies in space-time anisotropy and ultimately in CPT-violation; contrary, $d_{\mu\nu\alpha\beta}$ respects this invariance. Additionally, it is dimensionless and bears the symmetries of the Riemann curvature tensor besides of having a vanishing double trace, so that only 19 components are independent. Another important difference between them lies on fact that while CPT-odd term yields a non-positive definite Hamiltonian, whenever $b_0 \neq 0$, all the CPT-even components leads to non-negative contributions to total energy (provided they are very small, as experiments strongly indicate; a good account on the latter is provided in Ref. [4]). The dynamical equations for A_μ read:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + d_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu F^{\alpha\beta} + b^\nu \bar{F}_{\nu\mu} = 0, \quad (2)$$

while the geometrical ones keep their usual form, $\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} \equiv 0$, stating the absence of magnetic sources. However, these exotic objects

can be consistently introduced in this framework, provided that an extra electric current proportional to b_μ is induced [17]. From Eq. (2), the general dispersion relation may be obtained. However, treating each of the Lorentz-breaking term separately is more convenient and simpler. Thus, for the CPT-odd case (then, with $d_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$), we have:

$$(k_\mu k^\mu)^2 + (k_\mu k^\mu)(b_\nu b^\nu) - (k_\mu b^\mu)^2 = 0, \quad (3)$$

which is valid for arbitrary wave-vector, $k^\mu = (k^0, \vec{k}) = (\omega, \vec{k})$, and b_μ . The coupling between both vectors yields the splitting of the frequency modes and eventually to distinct phase velocities, even in vacuum (light birefringence phenomenon; further details below). On the other hand, within the pure CPT-even framework (then, $b_\mu = 0$) we find, to leading order:

$$\omega_{\pm}^{\text{even}} = (1 + \rho \pm \sigma)|\vec{k}|, \quad (4)$$

where $2\rho = -\tilde{d}_{\mu}{}^{\mu}$ and $2\sigma^2 = \tilde{d}_{\alpha\beta}\tilde{d}^{\alpha\beta} - 2\rho^2$, with $\tilde{d}_{\mu\alpha} = d_{\mu\nu\alpha\beta}\hat{k}^\nu\hat{k}^\beta$ and $\hat{k}_\mu = k_\mu/|\vec{k}|$. Once these modes move at different phase velocities, $v_{\text{ph}} = \omega/|\vec{k}| = c(1 + \rho \pm \sigma)$, light experiences vacuum birefringence [1,4].

Further features may also be worked out for the pure CPT-odd model. For example, if $b_0 \neq 0$ a negative contribution to the Hamiltonian appears. Indeed, it was shown in Ref. [14] that a consistent quantisation of the radiation field is possible only for b_μ space-like, otherwise unitarity or causality is lost.³ Therefore, we take hereafter $b^\mu = (b^0; \vec{b}) \equiv (0; m\hat{b})$, where m is a parameter with mass dimension while \hat{b} is a constant unitary vector pointing along a preferred direction in the three-dimensional space. [In this case, the term in the Lagrangian is T-odd, C- and P-even, so that a direction in time is chosen by the model.] In this situation, the dispersion relation (3) gets the form below:

$$(\omega_{\pm}^{\text{odd}})^2 = |\vec{k}|^2 + \frac{1}{2}m^2 \pm \frac{1}{2}m\sqrt{m^2 + 4(\vec{k} \cdot \hat{b})^2}. \quad (5)$$

In general, these modes carry distinct mass-like gap proportional to m . For $\vec{k} \cdot \hat{b} = 0$ one of the modes is massless while the another bears a mass-like gap equal to m . Note also that their phase velocities are clearly different and depend on $m/|\vec{k}|$, they travel at distinct velocities even through vacuum. Actually, a number of results concerning emission and absorption of quantum radiation strongly depend on the frequency modes and how they couple to the wave-vector and other parameters, so that the dispersion relations (4) and (5) will be very important in our present work.

To canonically quantise the free radiation field, we expand A_μ in plane-waves, and use the Coulomb gauge, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (no convenience seems to have in considering a covariant gauge, once Lorentz invariance is lost [14]), so that:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\omega_+}} [a_+(\vec{k})\vec{\epsilon}_+(\vec{k})e^{-i(\omega_+ t - \vec{k}\cdot\vec{x})}] + \frac{1}{\sqrt{2\omega_-}} [a_-(\vec{k})\vec{\epsilon}_-(\vec{k})e^{-i(\omega_- t + \vec{k}\cdot\vec{x})}] + \text{H.C.} \right\}, \quad (6)$$

where H.C. accounts for the Hermitian conjugate terms. Expansion above is valid even in the general case of having both CPT-even and CPT-odd terms provided that the two remaining modes be taken into account; $\vec{\epsilon}_+$ and $\vec{\epsilon}_-$ are the polarisation vectors for the distinct modes (for details, see Refs. [4,16]). The creation

¹ Our conventions read: μ, ν , etc. = 0, 1, 2, 3, $\text{diag}(\eta_{\mu\nu}) = (+, -, -, -)$, and $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$, etc. Natural units, with $\hbar = c = 1$, is used except where their presences are convenient.

² Instead of b_μ and $d_{\mu\nu\alpha\beta}$, it is more common to use $(k_{AF})_\mu$ and $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, respectively. We justify our choosing for avoiding possible confusing of k with the wave-vector label, k_μ .

³ Indeed, unitarity or causality is lost in the pure time-like case, while it is kept if b_μ is pure space-like. In the light-like case there still lacks a complete analysis about the consistent quantisation of the CPT-odd model, particularly, no definite answer has been given whether both unitarity and causality are preserved. Further details may be found, for instance, in Ref. [14].

and annihilation operators satisfy usual commutation relations, $[a_{\pm}(\vec{k}), a_{\pm}^{\dagger}(\vec{l})] = \delta_{\vec{k}, \vec{l}}$, etc. The Fock space there follows immediately, once $a_{\pm}^{\dagger}(\vec{k})$ and $a_{\pm}(\vec{k})$ have their usual interpretation (for further details, see Ref. [16]).

For analysing some features of the electromagnetic radiation emerging from these Lorentz-violating frameworks, we consider the case of emission and absorption of photons by non-relativistic atomic electrons. Explicitly, we consider the absorption process where an atom begins at a quantum state A , interacts with a photon, characterised by (ω_+, \vec{k}) , and ends at B (emission process and/or the transition involving a mode with ω_- there follow in similar ways). At first order, the absorption process is described by:

$$(B; n_{\vec{k},+} - 1 | H_I | A; n_{\vec{k},+}) = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{n_{\vec{k},+}}{2V\omega_+}} \sum_i \langle B | e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_i} \vec{p}_i \cdot \vec{\epsilon}_+ | A \rangle e^{-i\omega_+ t}, \quad (7)$$

from which it follows that it is impossible the absorption of a photon with polarisation distinct from that released from the electromagnetic field, as usual.

Now, suppose a number of such atoms interacting with a radiation field by means of reversible processes, $A \rightleftharpoons B + \gamma$, keeping thermal equilibrium. Thus, if the population number of initial state is $N(A)$ and of the final state is $N(B)$, we have that $N(B)/N(A) = e^{-E_B/k_B T} / e^{-E_A/k_B T} = e^{\hbar\omega/k_B T}$, where E_A, E_B represent the total photon energy of states A and B , respectively, while k_B is the Boltzmann constant. Usual expressions for the probability of emitting and absorbing photons may be obtained so that the mean occupation number at a given photon state is given by:

$$n_{\vec{k},\pm} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1}. \quad (8)$$

Thus the average energy by photon state reads $\bar{E}_{\pm} = \hbar\omega_{\pm} n_{\vec{k},\pm}$. Along with the dispersion relations (4) and (5), these results clearly show that the radiation field is homogeneous, once the quantities above do not depend on vector position, for both CPT-even and CPT-odd frameworks. However, it is anisotropic in the CPT-odd case, since it depends on the relative orientation of \vec{k} and the background field, \vec{b} . In addition, in both cases each polarisation state experiences Lorentz anisotropy differently, say, at a given temperature, T , and momentum, \vec{k} , we generally have $n_{\vec{k},+} \neq n_{\vec{k},-}$ (for details below).

Now, assuming usual periodic boundary conditions, the momenta of the radiation field enclosed in a cubic volume $V = L^3$ are given by $k_i = 2\pi n_i/L$ where $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ and $n_x, n_y, n_z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Then, the total number of quantum radiation oscillators (photons) with polarisation ω_+ , energy between $[\hbar\omega_+, \hbar(\omega_+ + d\omega_+)]$, and propagating towards a direction enclosed by a solid angle $d\Omega$ equals the volume element in the three-dimensional n -space, $n^2 dn d\Omega = \rho_{\omega, d\Omega} dE$ [18]. In the latter equality $\rho_{\omega, d\Omega} = \mathcal{N} \prod_i dk_i$ is the so-called density of allowed states per unity frequency, ω , while \mathcal{N} is the number of polarisations. Therefore, energy density per unity frequency (and per polarisation) is given by the total energy enclosed in the volume times the density of states, $\int_V \rho_{\omega, d\Omega} dE$. Evaluating this expression we obtain (explicitly c and \hbar):

$$u(\omega_{\pm}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_{\pm}}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1} \frac{k^2 dk}{d\omega_{\pm}}. \quad (9)$$

The total energy density per frequency, $u(\omega)$, in a given radiation thermal bath is given by summing over the respective contributions from each polarisation. Although expression above has the

usual form, it should be emphasised that differences actually appear once the term $\omega_{\pm} k^2 dk/d\omega_{\pm}$ is dependent on the dispersion relations, as follows.

First, let us consider the CPT-odd framework. Using the dispersion relation (5) it is easy to show that (for $\omega \gg \omega_0$):

$$u^{\text{odd}}(\omega_{\pm}, T)|_{\omega \gg \omega_0} = \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left(1 \pm \frac{\omega_0 \cos\theta}{2\omega} + \frac{\omega_0^2}{4\omega^2} (2 - \cos^2\theta) \right) + \mathcal{O}(\omega_0^3), \quad (10)$$

where $\omega = \omega(k) = c|\vec{k}|$ and $\omega_0 \equiv mc^2/\hbar$ are the dynamical and rest-like (k -independent) frequencies. The non-vanishing ω_0 is related to the mass-like gap previously discussed which implies in a sort of rest energy for electromagnetic radiation in this case. The angle θ lies between the vectors \vec{k} and \vec{b} . Now, the energy density per polarisation mode (thereof, the factor 1/2 below), $U_{\pm} = \int_0^{\infty} u(\omega_{\pm}, T) d\omega_{\pm}$, reads:

$$U_{\pm}(T) = \frac{1}{2} \sigma_0 T^4 [1 \pm \sigma_1 \omega_0 \cos\theta T^{-1} + \sigma_2 \omega_0^2 (2 - \cos^2\theta) T^{-2}], \quad (11)$$

where $\sigma_0 = \pi^2 k_B^4 / 15 (\hbar c)^3 \approx 7.56 \times 10^{-16} \text{ J/m}^3 \text{ K}^4$ is the Stefan-Boltzmann constant, while $\sigma_1 \equiv 15\hbar \zeta(3) / \pi^4 k_B \approx 1.41 \times 10^{-12} \text{ K s}$ ($\zeta(3) \approx 1.2$, $\zeta(x)$ is the ζ -Riemann function) and $\sigma_2 \equiv 5\hbar^2 / \pi^2 k_B^2 \approx 3.69 \times 10^{-41} \text{ K}^2 \text{ s}^2$. Recalling that $[3] m \lesssim 10^{-42} \text{ GeV}/c^2$, what gives $\omega_0 \lesssim 10^{-17} \text{ Hz}$, then $\sigma_1 \omega_0 \approx 10^{-30} \text{ K}$ which is negligible compared to the unity, in equation above. However, considerable compensation may come from a very low temperature, say, $T \sim 10^{-9} \text{ K}$ (achieved in laboratories), so that the leading correction associated to Lorentz and CPT violations is around 10^{-21} (similar results have been also obtained in the work of Ref. [19]). Black-body-type radiation has been also studied in non-commutative geometry frameworks, where additional terms appear proportional to higher powers of T, T^8 at leading order. Therefore, contrary to the our case, probing for a fundamental length in space-time structure should focus at very high temperature [15].

As a special case, consider $\cos\theta = \vec{k} \cdot \vec{b} = 1$. Then besides the linear correction in (10) we also see that if energy is equally distributed for the two modes, then ω_- mode over populates the thermal bath by around $n_-(\vec{k}) - n_+(\vec{k}) \sim \omega_0/2\omega$. Clearly, for $\cos\theta = 0$ deviations above go like ω_0^2/ω^2 . On the other hand, for $\omega_0 \approx \omega$, we obtain the analogue of the Rayleigh-Jeans classical result:

$$u_1^{\text{odd}}(\omega_{\pm}, T)_{\omega \approx \omega_0} \simeq \frac{4\pi}{(2\pi c)^3} \frac{2k_B T \omega^2}{(\sqrt{5} \pm 1)}, \quad (12)$$

which clearly indicate that at such regimes energy difference between the modes cannot be neglected.

Now, let us carry out the CPT-even case, where the modes are given, at leading order, by (4). After some algebra the Planck-like law is obtained to be:

$$u^{\text{even}}(\omega_{\pm}, T) = \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1} \approx \frac{4\pi\hbar}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{k_B T} (\rho \pm \sigma) + \mathcal{O}((\rho \pm \sigma)^2) \right), \quad (13)$$

whose extra contributions appear linearly in the violating parameters, ρ and σ . If we sum over the modes with the assumption of equally partitioned energy between them, $\bar{E}(\omega_+) = \bar{E}(\omega_-)$, only the term proportional to ρ comes about at first order, say, $\hbar\omega\rho/k_B T$. For instance, for CMB radiation ($T \sim 3 \text{ K}$, $\omega \sim 10^{11} \text{ Hz}$)

we get $\frac{\hbar\omega}{k_B T} \rho \sim \rho$. Therefore, if ρ is constrained to be around 10^{-16} , the latter expression predicts a small deviation in the CMB power spectra around this latter value. Unfortunately, current data (provided by COBE) do restrict possible anisotropies in the CMB radiation due to thermal effects to be only about $\lesssim 0.5\%$. Of course, such a bound cannot be attributed to those anisotropies studied here, which are much smaller. However, Eq. (13) suggests that its deviation may be enhanced at very low temperatures. For example, a system at $T \sim 10^{-9}$ K would exhibit a deviation about $10^{-6}\%$, at $\omega \sim 10^2$ MHz (microwave radiation). The experimental challenge lies in the capability of measuring the spectrum of this system with such an accuracy, mainly at microwave frequencies.

Before concluding, we should point out that: (i) As $\vec{k} \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$) then $u(\omega)$ identically vanishes for all cases (even in CPT-odd framework, with rest-like frequency), so that thermal equilibrium is achieved by means of radiation dynamics (at other special limits, as $T \rightarrow 0$ and $T \rightarrow \infty$, present results behave as their usual counterparts, as may be easily checked); (ii) Even though canonical quantisation cannot be carried out to obtain Planck-type law if b^μ is pure time-like, $b^\mu = (b_0 \neq 0; \vec{0})$, semi-classical analysis, along with detailed thermal equilibrium balance, may be used. The result is similar to the case where $\vec{k} \cdot \hat{b} = 0$, so that deviations appear only proportional to b_0^2 .

In summary, we have studied a number of issues regarding the emission and absorption of photons by non-relativistic atomic electron, within a Lorentz-violating and CPT-odd or CPT-even electrodynamics. Our main results concern how Planck law is modified whenever those violations are incorporated in the usual Maxwell electromagnetism. We have realised that for the CPT-odd case the deviations appear to be linear or quadratic in the rest-like frequency, $\omega_0 = mc^2/\hbar$, according photon momentum and the background vector field are parallel or perpendicular each other. Actually, these corrections take place in the expressions for the energy density distribution for a given polarisation (mode). If a thermal bath with photons equally populated by each mode concerns, then even in the case where $\hat{b} \parallel \vec{k}$ the correction appears to be quadratic in ω_0 , but a higher number of ω_- -mode photons is in order by around $\omega_0/2\omega$. In the situation where CPT-symmetry is kept the leading order deviation appears linearly in the violating parameter. As a whole, our results clearly indicate that probing for these Lorentz violations by means of thermal effects demands very low temperature, where the associated deviations are enormously enhanced. For instance, CPT-even deviations (which are generally much larger than those from CPT-odd), in a system at $T \sim 10^{-9}$ K go around $10^{-6}\%$, at microwave frequencies, $\sim 10^2$ MHz.

As prospects for future investigation, we may quote the study of how such violations modify the analysis of the spin structure of photons. Indeed, in the CPT-odd situation, we have encountered several obstacles for carrying on this study, once even the

little group of spatial rotations now depends upon the relative orientation of the photon momentum with the background field. In some cases, the little group seems to be reduced to the Abelian $SO(2)$ -group [20], so that a quantisation (discretisation) of spin-like eigenvalues could be jeopardised.

Acknowledgements

The authors are grateful to B. Altschul, R. Casana, M.M. Ferreira Jr., and J.A. Helayël-Neto for fruitful discussions. They also thank the Brazilian agencies CAPES, CNPq and FAPEMIG for financial support.

References

- [1] D. Colladay, V.A. Kostelecký, Phys. Rev. D 55 (1997) 6760; D. Colladay, V.A. Kostelecký, Phys. Rev. D 58 (1998) 116002.
- [2] S.M. Carroll, G.B. Field, R. Jackiw, Phys. Rev. D 41 (1990) 1231.
- [3] V.A. Kostelecký, M. Mewes, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 011601.
- [4] V.A. Kostelecký, M. Mewes, Phys. Rev. D 66 (2002) 056005; Q.G. Bailey, V.A. Kostelecký, Phys. Rev. D 70 (2004) 076006.
- [5] R. Lehnert, R. Potting, Phys. Rev. D 70 (2004) 125010; R. Lehnert, R. Potting, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 110402.
- [6] B. Altschul, Phys. Rev. D 75 (2007) 105003; B. Altschul, Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 041603; B. Altschul, Nucl. Phys. B 796 (2008) 262.
- [7] B. Altschul, Phys. Rev. D 72 (2005) 085003; B. Altschul, Phys. Rev. D 74 (2006) 083003; B. Altschul, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 201101; R. Montemayor, L.F. Urrutia, Phys. Rev. D 72 (2005) 045018; J.E. Frolov, V.Ch. Zhukovskiy, J. Phys. A 40 (2007) 10625.
- [8] M.M. Ferreira Jr., A.R. Gomes, R.C.C. Lopes, Phys. Rev. D 76 (2007) 105031.
- [9] See, for example, B. Feng, M. Li, J.-Q. Xia, X. Chen, X. Zhang, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 221302.
- [10] V.A. Kostelecký, A.G.M. Pickering, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 031801; C. Kaufhold, F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 734 (2006) 1.
- [11] See, for example, G. Gabrielse, et al., Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 3198; L.-S. Hou, W.-T. Ni, Y.-C.M. Li, Phys. Rev. Lett. 90 (2003) 201101.
- [12] S. Coleman, S.L. Glashow, Phys. Rev. D 59 (1999) 116008; V.A. Kostelecký, M. Mewes, Phys. Rev. D 70 (2004) 076002; S. Choubey, S.F. King, Phys. Lett. B 586 (2004) 353.
- [13] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayël-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D 67 (2003) 125011; H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayël-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D 69 (2004) 109903, Erratum; H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C 38 (2005) 511.
- [14] C. Adam, F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 607 (2001) 247; C. Adam, F.R. Klinkhamer, Phys. Lett. B 513 (2001) 245.
- [15] A.H. Farollahi, M. Hajirahimi, Phys. Lett. B 641 (2006) 381; J. Ludescher, R. Hofmann, arXiv: 0806.0972 [hep-th].
- [16] C. Adam, F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 657 (2003) 214.
- [17] N.M. Barráz Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D 76 (2007) 027701.
- [18] W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Oxford Univ. Press, 1944; J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, 1967.
- [19] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., J.S. Rodrigues, Phys. Rev. D 78 (2008) 125013.
- [20] A.J. Hariton, R. Lehnert, Phys. Lett. A 367 (2007) 11.