

DAVIDSON REZENDE VIANA

ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DO MODELO
PADRÃO ESTENDIDO: RADIAÇÃO CPT-PAR
CONFINADA A GUIAS DE ONDAS

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física Aplicada,
para obtenção do título de *Magister
Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2010

DAVIDSON REZENDE VIANA

**ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DO MODELO PADRÃO
ESTENDIDO: RADIAÇÃO CPT-PAR CONFINADA A GUIAS DE ONDAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 11 de fevereiro de 2010.

Prof^a. Daniel Heber Theodoro Franco
(Coorientador)

Prof. Afrânio Rodrigues Pereira
(Coorientador)

Prof^a. Márcio Santos Rocha

Prof. Samuel Maier Kurcbart

Prof. Winder Alexander de Moura Melo
(Orientador)

À minha família e meus amigos.

"Eu aprendi que todos querem viver no topo da montanha, mas toda felicidade e crescimento ocorre quando você está escalando-a."

(William Shakespeare)

Agradecimentos

Primeiramente, expresso aqui, meu mais sincero agradecimento à minha família. Meu muitíssimo obrigado ao meu pai Joaquim, à minha mãe Rosália e aos meus irmãos por estarem constantemente motivando meus estudos, por todo amor e confiança que foram fundamentais para que eu perseverasse em cada adversidade.

Agradeço ao Professor Winder A. Moura-Melo pela oportunidade, incentivo, orientação e paciência. Por ser um professor acessível para conversar e por ter me motivado muito desde o início do mestrado. Por me mostrar o caminho para ser um Físico melhor.

Meu muitíssimo obrigado aos meus colegas do grupo de pesquisa André H. Gomes e Jakson M. Fonseca pelas sugestões essenciais, ajuda na revisão deste trabalho, pela amizade e conhecimento compartilhado.

Aos professores que lecionaram as disciplinas que cursei durante o mestrado, Winder A. Moura Melo, Daniel H. T. Franco, Afrânio R. Pereira, Ricardo Cordeiro, Marcelo Lobato e Álvaro Neves.

Aos meus estimados amigos que tive o privilégio de cursar alguma(s) disciplina(s), em especial, Dênis R. Pereira, Fábio N. Fagundes, Fábio S. Nascimento e Herman F. Fumiã, com os quais pude aprender muito sobre Física e sobre amizade.

Agradeço o companheirismo e a amizade de Anderson H. A. Gomes, Claudia M. Oliveira, Fabiano Crisafuli, José A. Duarte, Felipe Apolônio, Ronan Ferreira, Juliana Franco, Frederico L. Marcelino e Vagson C. Santos.

Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFV.

Aos amigos que conheci na UFSJ, alunos, professores e funcionários.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
1 Introdução e Motivação	1
2 Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres	7
2.1 Propriedades Básicas da Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz.	7
2.1.1 Peculiaridades do Modelo em que $(k_{AF})^\mu = 0$	14
2.2 Submodelo em que $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$ com Índices Completamente Distintos	20
3 Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas	24
3.1 Eletrodinâmica Modificada Aplicada ao Guia de Onda Retangular . . .	25
3.1.1 Submodelo com $\sigma = 0$	26
3.1.2 Submodelo com $\xi \neq 0, \rho \neq 0$ e $\sigma \neq 0$ Aplicada ao Guia Retangular	31
3.2 Eletrodinâmica Modificada Aplicada ao Guia de Onda Tipo Cabo Coaxial	35
4 Conclusões e Perspectivas	39
Referências Bibliográficas	41

Unidades, notações e convenções

- São utilizadas unidades naturais (também chamadas unidades de Planck) em quase todo o texto. Algumas vezes o Sistema Internacional de unidades (SI) é utilizado por razões específicas, devidamente explicadas.

Em unidades naturais as constantes fundamentais da física lêem-se: $\hbar = c = G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_B = 1$, de modo que as dimensões seguem a relação:

$$[comprimento] = [tempo] = [massa]^{-1} = [energia]^{-1}$$

- Índices tensoriais quadridimensionais são representados por letras gregas e assumem valores de 0 a 3 (por exemplo, μ, ν , etc). Índices tensoriais com letras latinas representam valores de 1 a 3 (por exemplo, i, j, k , etc). É utilizada a convenção de Einstein a qual diz que, se um monômio possui índices repetidos, ficará subentendida uma soma sobre estes índices.

- A métrica de Minkowski (ou tensor métrico "*flat*"), $\eta_{\mu\nu}$, é igual a sua inversa e tem a assinatura: $\eta_{00} = 1$ e $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, $\eta^{\mu\nu} = 0 \ \forall \mu \neq \nu$.

- Os quadrivetores têm a forma covariante $x_\mu = (x_0, -\vec{x})$ e contravariante $x^\mu = (x_0, \vec{x})$ em que a métrica funciona como abaixadora ou elevadora de índices de modo que $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$.

- O símbolo de Levi-Civita representado por $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é totalmente antissimétrico e tal que $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$.

- A delta de Kronecker é representado por δ_ν^μ , sendo $\delta_0^0 = \delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1$ e todos os elementos com os índices $\mu \neq \nu$ são nulos; daí $tr \delta_\nu^\mu = tr \eta_\nu^\mu = 4$.

Resumo

VIANA, Davidson Rezende, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2010.
Algumas Contribuições ao Estudo do Modelo Padrão Estendido: Radiação CPT-Par Confinada a Guias de Ondas. Orientador: Winder Alexander Moura Melo. Co-Orientadores: Afrânio Rodrigues Pereira, Daniel Heber Theodoro Franco e Ricardo Reis Cordeiro

A escala de Planck, um regime de altíssimas energias, constitui-se um domínio ainda muito distante da tecnologia nos dias de hoje. Uma questão de interesse é saber se a simetria de Lorentz continua válida nesta escala de energia. Tal investigação pode ajudar na construção de novas teorias que buscam unificar Gravitação (Relatividade Geral) e Mecânica Quântica via Teoria de Cordas, por exemplo. Assim sendo, temos como remanescente de tal modelo unificado, o Modelo Padrão Estendido (MPE), que é uma extensão da estrutura de calibre usual $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, que incorpora os termos que quebram a simetria de Lorentz. Neste trabalho estudamos o setor de radiação do MPE em (3+1)D. Em sua lagrangiana que essencialmente possui um termo adicional ao usual, de Maxwell; tal termo é proporcional a um objeto tipo tensorial (constante) que quebra a simetria de Lorentz (somente sob transformação ativa de Lorentz, também chamada transformação de partícula), mas é par sob a transformação CPT. Analisamos e interpretamos as consequências físicas desta quebra nas equações de Maxwell modificadas do modelo. Aplicamos estas equações a dois tipos particulares de confinamento de ondas eletromagnéticas, a saber: guia de onda retangular e guia de onda tipo cabo coaxial. No guia retangular obtemos equações para um submodelo que descrevem as componentes axiais das ondas eletromagnéticas que se propagam neste tipo de geometria estudando as possibilidades de haver modos transversos elétrico e

transverso magnético. No guia tipo cabo coaxial estudamos o modo transverso eletromagnético e verificamos que as dimensões do guia podem alargar os efeitos da quebra de modo a facilitar possíveis medidas em laboratório. Buscamos verificar quais implicações físicas um modelo em questão pode trazer a aplicações envolvendo condições de contorno. Comparamos os casos conhecidos na literatura com a presente proposta.

Abstract

VIANA, Davidson Rezende, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2010.
Some Contributions to Standard Model Extended: CPT-Even Electrodynamics in Waveguides. Adviser: Winder Alexander moura Melo. Co-Advisers: Afrânio Rodrigues Pereira, Daniel Heber Theodoro Franco and Ricardo Reis Cordeiro

Planck energy scale is still far beyond current possibilities. A question of interest is whether the Lorentz symmetry remains valid at these extremely high energies, whose answer certainly would be useful whenever building grand unified theories, in which general relativity is consistently accommodated. Here, we study a reminiscent of this possible symmetry violation, incorporated in the body of the so-called Standard Model Extension (SME). More precisely, we deal with the pure (Abelian) gauge sector, so that we have a modified classical electromagnetism in $(3+1)$ dimensions, whose Lagrangian include a term proportional to a (constant) background tensorial object that breaks the Lorentz symmetry (active Lorentz frame of particle transformation, more precisely in the other hand, particle transformation), but respecting CPT. Our attention is devoted to the wave-like solutions constrained to propagate inside waveguides. We studied basically, a waveguide of rectangular shape, which in usual case admits transverse electric (TE) and transverse magnetic (TM) modes. We obtained the partial differential equations which describe the axial components of the electric and magnetic fields in the waveguide. In a coaxial transmission line, which admits transverse electromagnetic modes (TEM), our results indicate that Lorentz-breaking implies in modifications of these modes and small corrections of the standard results which are proportional to the very small violating parameters, could be largely enhanced by diminishing the size of

the confined media. Perhaps, such an extra feature combined with the usual boundary conditions could lead us to large effects of this violation, somewhat similar to those predicted for CPT- and Lorentz-odd electromagnetic waves constrained to propagate along a hollow conductor waveguide.

Capítulo 1

Introdução e Motivação

Simetria é um conceito amplamente explorado em muitas áreas do conhecimento humano como Física, Matemática, Biologia e Arte. Muito além das belas formas simétricas que identificamos no nosso cotidiano, o conceito de simetria desempenha papel fundamental na compreensão de uma imensidão de fenômenos físicos. Simetria em Física leva diretamente ao conceito de invariância por meio de algum tipo transformação [1,2]. A relação entre simetria e quantidades conservadas, em um sistema físico, é expressa sob a forma do Teorema de Noether, o qual afirma que à cada simetria contínua da ação existe uma corrente que se conserva, $\partial_\mu J_N^\mu = 0$, e daí uma quantidade, a carga de Noether, $Q_N = \int J_N^0 dV$, que é dinamicamente conservada, $\frac{dQ_N}{dt} = 0$. Como exemplo, em física clássica sabe-se que, se a ação é tempo independente, a energia é conservada. É sabido também que, se a ação é invariante sob translação espacial em três dimensões o momento linear é conservado, enquanto sob rotações nos leva a conservação do momento angular.

Escrevendo a ação de teorias bem estabelecidas, como por exemplo, a ação do eletromagnetismo clássico em forma covariante de Lorentz, verifica-se que sob translações espaço-temporais, há a conservação do tensor energia-momento, $\Theta^{\mu\nu}$, que é uma quantidade física mais geral que a energia e o momento isoladamente. Em particular, o tensor energia-momento pode ser simetrizado quando o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico [1,3].

Estudando simetrias em Matemática, Évarist Galois elaborou a Teoria de Gru-

1. Introdução e Motivação

pos que é uma ferramenta usada atualmente em vários ramos da Física, como Matéria Condensada, Teoria Quântica de Campos (TQC) e Sistemas Complexos. Particularmente em TQC, a Teoria de Grupos é indispensável para o entendimento e classificação das simetrias de calibre, que estão relacionadas ao espectro de partículas fundamentais de um dado modelo teórico [3]. As interações fundamentais, *eletromagnética*, *fraca* e *forte* estão intimamente relacionadas a estas simetrias e muitos modelos que buscam unificá-las à Gravitação, procuram por grupos de simetria que são chave em tais esforços teóricos.

Um grupo de grande interesse em TQC é o grupo de Lorentz, $SO(1,3)$, que é a generalização do grupo de rotações, $SO(3)$, levado ao espaço de Minkowski (de curvatura nula em 3+1 dimensões). Aqui referimo-nos ao grupo restrito e ortócrono de matrizes 4×4 inversíveis de transformações de Lorentz do espaço-tempo de Minkowski. É o grupo de rotações e "*boosts*" (rotações hiperbólicas) neste espaço. O grupo de Lorentz combinado com translações espaço-temporais recebe o nome de grupo de Poincaré, que é a simetria mais extensa da Relatividade Especial. Os campos em TQC devem, a princípio, se transformar como representações irredutíveis do grupo de Lorentz, Poincaré ou algum grupo de isospin, de modo que as entidades físicas que se pretende descrever possam ser partículas fundamentais [1,4].

As transformações de Lorentz [5,6] conectam grandezas físicas em referenciais inerciais. Uma quantidade física é dita covariante de Lorentz se esta se transforma como uma representação do grupo de Lorentz e obedece ao Princípio da Relatividade [7], ou seja, é representada por um objeto linear e tensorial sob esse grupo. Em particular, escalares são ditos invariantes de Lorentz, pois se transformam sob a representação trivial [8,9]. Ainda com relação ao grupo de Lorentz, as leis físicas relativísticas devem se transformar covariantemente de acordo com as representações deste grupo, o que significa que tais leis devem manter sua forma em quaisquer referenciais inerciais [10,11]. Isto é o que chamamos de covariância de Lorentz, que substituiu a covariância de Galileu (relacionada ao grupo de Galileu) quando Albert Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Sendo esta teoria comprovada com altíssima precisão e sendo considerada exata a baixas energias, limitadas pelo Modelo Padrão (MP).

1. Introdução e Motivação

Como motivação para se estudar a quebra da simetria de Lorentz, temos a possibilidade de pequenos efeitos que tem origem em teorias mais fundamentais. Embora tanto a Relatividade Geral quanto a Mecânica Quântica tenham formulações elegantes, há incompatibilidades entre elas. Existem experimentos em que tanto uma teoria quanto outra são importantes na descrição de um fenômeno físico, mas não possuem uma explicação em nível fundamental. Como por exemplo, na experiência em que nêutrons frios sobem contra o campo gravitacional terrestre, incorpora-se a gravidade como força externa aplicada, descrevendo bem o fenômeno, mas não trazendo informações fundamentais sobre o que ocorre. Por estas e muitas outras razões, busca-se por meio de inúmeras propostas, teorias que visam a unificação e entender a Física na escala de Planck (cuja energia é da ordem de $10^{19} GeV$). Por sua vez, a simetria de Lorentz, mostra-se quebrada, por exemplo, em diferentes propostas que incorporam ao Modelo Padrão das partículas fundamentais, teorias efetivas, vindas de Teoria de Cordas [12, 13]. A busca por comprovar se Lorentz é uma simetria exata, abre caminho para estudar uma nova Física na escala de Planck, ou fortalecer as teorias vigentes.

Uma das propostas para a violação da simetria de Lorentz [13–15] tem como conceito chave a anisotropia do espaço-tempo. Existe um consenso de que a simetria de Lorentz possa ser quebrada na escala de energia do Modelo Padrão da física de partículas. Esta quebra ocorre pela anisotropia do espaço-tempo causada pela presença de campos vetoriais e tensoriais de fundo devido a processos de transição de fase. Deve-se observar que a violação ocorre apenas quando realizamos uma transformação de partícula, também chamada de transformação de referencial ativa de Lorentz. Por esta razão, é indispensável entender as diferenças entre as transformações de observador (passiva) e de partícula (ativa) [16–18], que são explicadas no Capítulo 2.

Em Física, as quantidades observáveis são invariantes por uma transformação combinada, em qualquer ordem, das operações C , P e T . Como consequência disto, toda partícula possui uma antipartícula com a mesma massa, mesma vida-média e mesmo momento magnético da partícula correspondente. É considerada uma simetria exata da natureza nas escalas de energia conhecidas [19–21]. A simetria sob conjugação de carga, C , é uma simetria discreta que inverte o sinal das cargas. Se esta fosse uma

1. Introdução e Motivação

simetria exata da natureza, haveria o mesmo número de partículas e antipartículas no universo. Todavia, no universo observado há mais partículas que antipartículas. A simetria de paridade, P (também chamada de simetria de reflexão espacial ou simetria especular), é uma simetria discreta que nos diz que a natureza não tem preferência na escolha de sistemas de coordenadas levógiros (canhotos) ou destrógiros (destros) [22]. Todavia, C. N. Yang e T. D Lee mostraram que esta é quebrada em determinados processos envolvendo interações fracas [20, 23]. Já a operação de reversão temporal, T , inverte o sinal da passagem do tempo. Por exemplo, as Leis de Newton são invariantes sob reversão temporal. Entretanto, fenômenos físicos irreversíveis (comuns em termodinâmica), desobedecem tal simetria. Sistemas onde existe algum tipo de dissipação como o atrito ou força viscosa são bons exemplos em que reverter o sinal do tempo resulta em quebra da simetria T . Existem discussões com relação a esta simetria envolvendo a segunda lei da termodinâmica [24]. Há ainda uma simetria que se pensou ser fundamental, a simetria CP . Ela foi proposta por L. D. Landau em 1957, além de trocar a carga associada à partícula também trocava o spin mantendo outras características intrínsecas inalteradas de modo que seria uma simetria que traria informação e predição sobre partículas e antipartículas. O prêmio Nobel de 1980 foi atribuído aos físicos norte-americanos James Watson Cronin e Val Logsdon Fitch pela descoberta da violação da simetria carga-paridade CP . Ainda não há nenhuma evidência da violação da simetria CPT [19–21, 25].

Qual a conexão entre a simetria de Lorentz e a simetria CPT ? Se uma teoria de campo satisfaz as condições: localidade, invariância de Lorentz, lagrangiana hermitiana, quantização com comutadores para bósons ou com anticomutadores para férmions, então a transformação CPT é uma simetria exata da teoria. Este é um dos enunciados do "Teorema CPT ". A simetria CPT prevê que, se um relógio é substituído por seu equivalente de antimatéria com paridade invertida e anda para trás no tempo, os dois manterão horário idêntico. [26]. É possível quebrar a simetria de Lorentz e manter a teoria invariante sob CPT , mas a recíproca não é verdadeira [21].

Em 1989, V. A. Kostelecky e S. Samuel [12], lançaram a idéia da quebra espontânea de simetria no contexto da Teoria de Cordas e do Modelo Padrão Estendido

1. Introdução e Motivação

(MPE), uma teoria de campos efetiva¹, que compartilha todas as propriedades do Modelo Padrão usual, como estrutura de calibre, renormalizabilidade e conservação de energia e momento, mas não preserva Lorentz e *CPT* [13, 15, 16, 26, 27]. Várias propostas surgiram desde então, como as de Carroll, Field e Jackiw [14], cujo modelo viola tanto Lorentz quanto *CPT*. Tais teorias tem sido guias para testes experimentais, ainda que não exista nenhuma evidência em favor das violações.

Observações astronômicas do espectro de estrelas, deram evidências de que a constante de estrutura fina, α , uma medida da intensidade da interação eletromagnética entre fótons e elétrons, esteja lentamente variando. Como α relaciona a carga elétrica, e , a constante de Planck, h , e a velocidade de propagação da luz no vácuo, c , haveria então mudança em alguma(s) desta(s) constante(s) fundamental(ais), o que seria extremamente drástico [28, 29]. Existem também dados experimentais de raios cósmicos além do limite Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK)² que evidenciam possíveis velocidades superiores à da luz no vácuo para partículas que a princípio decairiam antes de chegar ao sistema solar [16]. Entretanto, em um artigo recente [30] foram apresentados dados que limitam fortemente a possível variação da velocidade da luz, desfavorecendo-se assim teorias de gravidade quântica que tratam da física na escala de Planck e que assumem uma característica discreta (não-contínua) do espaço-tempo.

Uma origem plausível para a violação de Lorentz tem sido identificada em Teoria de Cordas, na qual as interações com uma estrutura genérica que poderia, a princípio, desencadear a violação espontânea da simetria de Lorentz e gerar valores esperados no vácuo para campos tensoriais de Lorentz. Vários outros mecanismos para violação de Lorentz em nível fundamental têm sido propostos como em teorias de campos não-comutativos, gravidade quântica, modelos dinâmicos aleatórios, multiversos, cenários de mundos-brana, supersimetria e gravidade massiva [16, 27, 31, 32].

Existem inúmeros esforços para validar ou não, modelos com quebra de Lorentz. Algumas destas investigações podem levar a uma física dependente da escolha do sistema de coordenadas [33], o que não é o caso do MPE, em que é assegurada a inde-

¹Uma teoria efetiva é uma aproximação para baixas energias de uma teoria fundamental

²Tal limite diz que raios cósmicos com energia superior a $\sim 5 \times 10^{19} \text{ eV}$ interagem com fótons da radiação cósmica de fundo.

1. Introdução e Motivação

pendência de coordenadas e a física é independente do observador [17].

O setor de radiação do MPE, que incorpora em sua lagrangiana termos com campos vetoriais e/ou tensoriais de fundo, tem sido estudado, inclusive em diversos trabalhos experimentais. Há esforços para se detectar os parâmetros associados aos campos tensoriais e vetoriais de fundo e impondo limites para as medições destes [27, 34, 35]. A comparação dos resultados teóricos e experimentais em física de partículas e campos também impõe limites neste sentido. Como exemplos citamos experimentos que envolvem mésons [36], neutrinos [37] e múons [38, 33]. Também têm sido estudadas buscas experimentais da violação de Lorentz no estudo da radiação Cherenkov [39], síncrotron [40] e radiação cósmica de fundo [27], que são estudos que buscam evidências de pequenas correções dos resultados para as ondas eletromagnéticas.

Propostas teóricas têm despertado para investigar maneiras de medir parâmetros de violação do MPE por meio do confinamento de ondas eletromagnéticas como, por exemplo, em cavidades ressonantes e guias de ondas, [43, 41, 42] sendo este último, o assunto de interesse na presente dissertação, a qual é dividida como segue. No Capítulo 2, apresentamos propriedades de alguns modelos e submodelos de interesse que violam Lorentz e alguns que violam também a simetria CPT . O capítulo 3 se restringe à aplicação do modelo a dois tipos de guias de ondas que apresentam modos distintos de propagação das ondas eletromagnéticas confinadas. São feitas discussões sobre os parâmetros de interesse e as vantagens do confinamento para estudar a quebra de Lorentz. Nos apêndices A e B são discutidas algumas propriedades do eletromagnetismo usual em guias de ondas, complementando principalmente o texto relativo ao Capítulo 3. Por fim, apresentamos nossas conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

Neste capítulo são apresentados os termos que quebram a simetria de Lorentz acrescentados à lagrangiana de Maxwell. Revisamos as propriedades de modelos com quebra de Lorentz e alguns submodelos que escolhemos estudar e aplicar aos guias de ondas (Capítulo 3). Discutimos as idéias básicas de transformação de observador e partícula. Numa abordagem clássica, mostramos peculiaridades dos submodelos para ondas livres utilizando-se as “equações de Maxwell” modificadas.

2.1 Propriedades Básicas da Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz.

No formalismo canônico e manifestamente covariante, o eletromagnetismo clássico pode ser derivado da lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (2.1)$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor eletromagnético, $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ o 4-vetor potencial eletromagnético e $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ a 4-corrente. A ação, $S = \int \mathcal{L} d^4x$, correspondente à lagrangiana (2.1), é invariante sob transformações de gauge abelianas locais: $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x)$, o que nos leva à conservação da carga elétrica. Por meio das equações de Euler-Lagrange, aplicadas em (2.1), obtemos as equações de movimento,

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

que acrescentadas à identidade de Bianchi nos dão o conjunto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

que são as equações de Maxwell em forma tensorial, sendo a última uma identidade geométrica, $\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0$ [3]. O dual do tensor eletromagnético é $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, sendo que $F_{0i} = -E^i$ e $-F^{ij} = \epsilon^{ijk}B^k$. O tensor energia-momento (simétrico), para o campo eletromagnético livre, que descreve a densidade e o fluxo de energia e momento eletromagnéticos, é dado por¹:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\gamma}F_\gamma^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (2.3)$$

que se conserva, $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$. Sua simetria, $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$, garante a conservação do momento angular e a isotopia do espaço-tempo neste modelo.

As equações de Maxwell na forma diferencial (local) em notação 3-vetorial escritas em unidades naturais no vácuo, lêem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

As equações (2.4) trazem uma gama de informações sobre os campos elétrico, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e magnético, $\vec{B}(\vec{x}, t)$, bem como sobre suas fontes, densidade de carga elétrica ρ e vetor densidade de corrente $\vec{J}$. Mostram, por exemplo, como cargas elétricas produzem campos elétricos (Lei de Gauss), como corrente elétrica e campo elétrico variável no tempo produzem campo magnético (Lei de Ampère-Maxwell), a ausência de monopolos magnéticos (nulidade da divergência do campo magnético) e como variações temporais de campo magnético produzem campos elétricos (Lei de Faraday). Na

¹O tensor energia-momento canônico para o campo eletromagnético $T^{\mu\nu}$ não é simétrico, mas é possível simetrizá-lo ao escrevê-lo como uma soma de uma parte simétrica e outra antissimétrica para obtermos o chamado tensor energia-momento simétrico, em que $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$. Detalhes podem ser vistos na Ref. [59].

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

ausência de fontes, ao tomar os rotacionais das Leis de Ampère-Maxwell e de Faraday, obtêm-se as equações de onda para os campos elétrico e magnético, que lêem-se: $(\partial_t^2 - \nabla^2)\vec{E} = 0$ e $(\partial_t^2 - \nabla^2)\vec{B} = 0$. Um dos grandes triunfos da teoria de Maxwell é a previsão de ondas eletromagnéticas, que foram detectadas experimentalmente, pela primeira vez, por Heinrich Hertz. Estas ondas se propagam com velocidade $v = c$, informação contida nas equações de onda [44]. Assumindo os campos na forma de ondas planas, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ e $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$, a relação entre frequência e vetor de onda para propagação no espaço livre é $\omega^2 = |\vec{k}|^2$. Ao compararmos esta, com a relação de dispersão de Einstein: $E^2 = m^2 + |\vec{p}|^2$, interpretamos que ondas eletromagnéticas possuem massa nula (o que implica em propagação da interação a distâncias muito longas). Tais ondas são uma combinação de campos elétrico e magnético que se propagam pelo espaço transportando energia e momento. A teoria eletromagnética de Maxwell é bem estabelecida pela grande precisão experimental. Possui inúmeras aplicações tecnológicas, em que poderíamos citar, por exemplo, a radiotransmissão, os radiotelescópios, os cabos de fibras óticas, o forno microondas e muitos outros.

O Modelo Padrão (MP) das partículas elementares descreve muito bem todas as partículas fundamentais e suas interações (exceto a gravitacional). Sua extensão proposta nas últimas décadas, o MPE compartilha das mesmas propriedades do MP usual (como conservação da energia e momento, microcausalidade, renormalizabilidade por contagem de potências e outras), exceto que as simetrias de Lorentz e *CPT* podem ser violados [13]. Nesta dissertação, nos dedicamos ao setor de radiação (também chamado setor puro-fóton ou setor de calibre) do MPE, cuja lagrangiana possui dois termos além do modelo de Maxwell (sem fontes), a saber:

$$\mathcal{L}_{total} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(k_{AF})_{\alpha}A_{\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

em que $(k_{AF})^{\alpha} = (\eta_o, \vec{\eta}) = m(\hat{\eta}_o, \hat{\eta})$ é um objeto tipo 4-vetor de fundo constante com dimensão de massa, em que os índices subscritos “*AF*” identificam o acoplamento com o 4-vetor potencial e o tensor eletromagnético². Este termo é conhecido como

²Em unidades do S.I. devemos ter $\frac{mc}{\hbar}$ ao invés de m , para que as unidades sejam de massa.

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

o termo de Carrol-Field-Jackiw (CFJ) e tem sido muito estudado desde sua proposta em 1990 [14, 45]. O objeto tensorial de rank 4, $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$, não tem dimensão física e é assumido como um conjunto de constantes, acoplando o tensor eletromagnético a ele mesmo (uma espécie de correção ao termo cinético usual, $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$). Tal objeto possui as simetrias do tensor de curvatura de Riemann,

$$(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta} = (k_F)^{\alpha\beta\mu\nu} = -(k_F)^{\nu\mu\alpha\beta} = (k_F)^{\nu\mu\beta\alpha}, \quad (2.6)$$

obedece a identidade de Bianchi para tensores de rank 4:

$$(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta} + (k_F)^{\mu\beta\nu\alpha} + (k_F)^{\mu\alpha\beta\nu} = 0, \quad (2.7)$$

e também possui duplo-traço nulo, $(k_F)_{\mu}{}^{\mu\nu} = 0$, de modo que das 256 componentes que o constituem, somente 19 são linearmente independentes (LI). Os testes experimentais mais precisos impõem limites para a ordem de grandeza dos parâmetros, sendo que as melhores estimativas têm sido obtidas de medidas cosmológicas de birrefringência da luz, de modo que $|(k_{AF})^{\mu\nu\alpha\beta}| \leq 10^{-32}$ [46]. Ou seja, as violações aqui tratadas seriam extremamente pequenas e por esta razão, difíceis de serem detectadas; o que por outro lado, dá a elas alguma possibilidade de existência real [47].

Ao requerer a invariância de calibre no modelo com o termo de CFJ, obtemos uma condição para o quadrivetor $(k_{AF})^\mu$, impondo para que este seja constante, ou seja, $\partial_\mu(k_{AF})^\mu = 0$, desta forma a carga elétrica é conservada. Casana *et al* estudaram uma lagrangiana em que $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$ e dois termos são acrescentados à lagrangiana de Maxwell, a saber: o termo de CFJ e um termo de massa $\frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu$, como no modelo de Proca, quebrando assim a invariância de calibre [48]. Um outro estudo do termo de CFJ foi feito por Scarpelli *et al*, cujo trabalho traz investigações acerca da preservação da simetria de calibre analisando correções quânticas, também para um modelo massivo [49].

A lagrangiana (2.5) escrita em notação 3-vetorial, explicitando campos e potenciais, lê-se:

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{total} = & \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{\alpha}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{2}\beta_E^{jk}E_jE_k + \frac{1}{2}\beta_B^{jk}B_jB_k + \frac{1}{2}\beta_{EB}^{jk}E_jB_k + \\ & + (k_{AF})^0 \vec{A} \cdot \vec{B} - \phi(k_{AF}) \cdot \vec{B} - (k_{AF}) \cdot (\vec{A} \times \vec{E}) - \rho\phi + \vec{A} \cdot \vec{J} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os coeficientes α , β_E , β_B , e β_{EB} são reais e representam os acoplamentos dos coeficientes de $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ com os campos elétrico e magnético. É interessante notar que todas as combinações quadráticas possíveis dos campos elétrico e magnético estão presentes aí [15].

A equação de movimento na forma tensorial obtida da lagrangiana (2.5), acrescentada à identidade de Bianchi, são as equações de Maxwell modificadas:

$$\partial_\alpha F_\mu^\alpha + (k_{AF})^\alpha \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma} + (k_F)_{\mu\alpha\beta\gamma} \partial^\alpha F^{\beta\gamma} = 0 \quad (2.9)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.10)$$

sendo a última uma identidade geométrica que não sofre efeito da quebra da simetria de Lorentz. Existem propostas na literatura para a quebra desta identidade [50]. Como consequência surgem os chamados monopolos magnéticos de Dirac que levam a um aparecimento de uma corrente elétrica induzida.

Sob transformações de Lorentz tanto $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ como $(k_{AF})^\mu$ não se transformam covariantemente dependendo de como é a transformação que conecta os referenciais inerciais. Sob transformação de partícula a covariância de Lorentz é perdida, todavia, a mesma é mantida sob transformação de observador. De que forma podemos entender a transformação de observador (transformação passiva)? Tomemos como exemplo didático, ilustrando esta transformação, um espaço tal que haja um campo vetorial de fundo fixo, um vetor posição $\vec{R}$ de uma partícula em um referencial inercial imerso neste espaço, conforme a Fig. 2.1. O referencial S é então transformado (girado de um ângulo ϕ) tal que, verificado no novo referencial S', o vetor $\vec{R}$ tem ainda a mesma orientação em relação ao campo de fundo. É interessante ressaltar que, poderíamos ter, ao invés de um campo vetorial de fundo, um campo tensorial, que poderia representar

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

uma anisotropia mais complicada. Todavia, a idéia de transformação de observador, que é uma transformação de coordenadas, colocada de maneira simples é esta. O que difere as transformações de partícula (transformação ativa) e de observador (passiva) é a mudança do vetor posição da partícula em relação ao campo de fundo, que foi girado, como na Fig. 2.2. Depois da transformação ativa realizada, o vetor $\vec{R}$ não tem a mesma orientação em relação ao campo vetorial responsável pela anisotropia do espaço-tempo [16, 17]. Ao realizar uma transformação ativa de Lorentz, sua inversa não é mais a transformação de Lorentz inversa que se tem quando não existe uma anisotropia do espaço-tempo. O que deve ficar claro é que a simetria de Lorentz é violada no MPE apenas quando realizamos uma transformação de partícula, isto é, não há quebra da simetria de Lorentz sob transformação de observador.

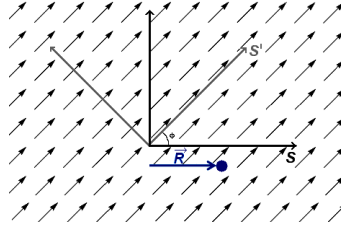


Figura 2.1: Ilustração da transformação de observador. O referencial é girado e o vetor posição continua fixo em relação ao campo de fundo após a transformação.

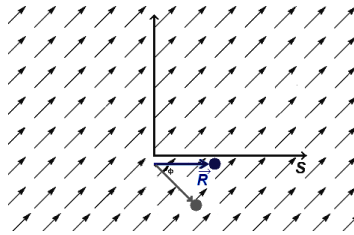


Figura 2.2: Ilustração da transformação de partícula. O que muda agora é o vetor posição, o referencial continua fixo.

O tensor energia-momento, obtido da maneira usual a partir da lagrangiana

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

(2.5) é:

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu} = & -F^{\mu\gamma}F_{\gamma}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - (k_F)^{\alpha\beta\mu\gamma}F_{\gamma}^{\nu}F_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(k_F)_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} + (k_{AF})^{\nu}A_{\alpha}\tilde{F}^{\alpha\mu}\end{aligned}\quad (2.11)$$

este obedece a conservação usual, ou seja, $\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu} = 0$. Os termos adicionais do modelo tornam $\Theta^{\mu\nu}$ assimétrico. Como consequência temos a não-conservação do momento angular e uma mudança na interpretação de suas componentes. Como $\Theta^{j0} \neq \Theta^{0j}$, neste caso geral, Θ^{j0} pode ser interpretado como as componentes do vetor de Poynting generalizado, mas sua integral de volume não é mais conservada. Isto impede a associação que se tem com Θ^{0j} , que está relacionada à densidade de momento. Diferentemente do caso usual, estas se tornam quantidades físicas bastante diferentes, devido à quebra de Lorentz. Ainda que existam estas contribuições extras, a energia e o momento permanecem invariantes de calibre, pois a integração sobre todo o espaço elimina os termos advindos de (k_{AF}) , que são derivadas totais [15]. A densidade de energia é dada pela componente Θ^{00} e lê-se:

$$\begin{aligned}\Theta^{00} &= -F^{0\gamma}F_{\gamma}^0 + \frac{1}{4}\eta^{00}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - (k_F)^{\alpha\beta 0\gamma}F_{\gamma}^0F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\eta^{00}(k_F)_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} + (k_{AF})^0A_{\alpha}\tilde{F}^{\alpha 0} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - (k_F)^{0j0k}E^jE^k + \frac{1}{4}(k_F)^{jklm}\epsilon^{jkp}\epsilon^{lmq}B^pB^q - (k_{AF})^0\vec{A} \cdot \vec{B}\end{aligned}\quad (2.12)$$

os valores muito pequenos dos termos adicionais ao modelo de Maxwell, tornam a densidade energia sempre positiva, mas sua integral de volume pode ser negativa, devido aos termos associados a (k_{AF}) . Isto não viola a conservação da energia, mas esta deixa de ser positiva definida podendo trazer instabilidades à teoria. Contudo, se tivermos uma anisotropia puramente tipo-espaço, $(k_{AF})^0 = 0$, a energia é sempre positiva [15]. Mais informações sobre o modelo com $(k_{AF})^{\mu} \neq 0$ e sua aplicação em guias de ondas podem ser encontradas na Ref. [51].

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

2.1.1 Peculiaridades do Modelo em que $(k_{AF})^\mu = 0$

O segundo termo na lagrangiana em (2.5) é um termo tipo Chern-Simons [52]³ ímpar sob a transformação CPT [14]. Restringimos esta subseção ao estudo do caso em que a simetria CPT é preservada, ou seja, quando o termo CFJ proporcional ao 4-vetor de fundo $(k_{AF})^\mu$ é nulo. Neste modelo encontramos várias peculiaridades, como por exemplo, vácuo birrefringente (dois modos distintos de polarização e velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo) e tensor energia-momento não simetrizável o que nos leva a um espaço tempo anisotrópico e à não conservação do momento angular [17, 27].

Nossa análise e estudo tem como foco as componentes de $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$. Escrevemos a lagrangiana de interesse sem fontes [53]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

ou explicitamente em termos dos potenciais ϕ e $\vec{A}$, e dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{\alpha}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{2}\beta_E^{jk}E_jE_k + \frac{1}{2}\beta_B^{jk}B_jB_k + \frac{1}{2}\beta_{EB}^{jk}E_jB_k \quad (2.14)$$

sendo que os três últimos termos possuem traço nulo.

Sabemos que o campo elétrico é ímpar sob paridade e o campo magnético é par. Então, podemos identificar partes do tensor de fundo que se transformam de maneira diferente sob paridade para que os termos somados sejam de paridades iguais, e a lagrangiana como um todo, par sob paridade. Desta forma, podemos dividir as componentes do tensor em setores pares e ímpares sob esta transformação e identificar as matrizes que acoplam os campos [15, 55]. Usando representação usada na Ref. [54], estas matrizes podem redefinir os campos que aparecem nas equações de Maxwell modificadas como uma espécie de meio homogêneo anisotrópico não dispersivo, definido pela matriz abaixo:

³O genuíno termo de Chern-Simons, $\epsilon_{\mu\nu\alpha}A^{\mu}F^{\nu\alpha}$, em 2+1 dimensões, preserva Lorentz, enquanto seu correspondente, (proposto por Carrol Field e Jackiw) em 3+1 dimensões, com o parâmetro $(k_{AF})^\mu$, constante (para respeitar a simetria de calibre), a covariância de Lorentz não é mais verificada.

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

$$\begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \kappa_{DE} & \kappa_{DB} \\ \kappa_{HE} & 1 + \kappa_{HB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

sendo

$$\begin{aligned} (\kappa_{DE})^{jk} &= -2(k_F)^{0j0k}, \\ (\kappa_{HB})^{jk} &= \frac{1}{2}\epsilon^{jpq}\epsilon^{krs}(k_F)^{pqrs}, \\ (\kappa_{DB})^{jk} &= -(\kappa_{HE})^{kj} = (k_F)^{0j pq}\epsilon^{kpq} \end{aligned} \quad (2.16)$$

As matrizes κ_{DE} e κ_{DB} contém juntas 11 elementos e as matrizes κ_{DB} e κ_{HE} somam juntas 8 elementos de modo que temos as 19 componentes LI do tensor $k^{\mu\nu\alpha\beta}$. Com estas matrizes podemos definir para este modelo, os vetores deslocamento elétrico efetivo $\vec{D}$ e o campo magnético efetivo $\vec{H}$.

$$\vec{D} = E^j - 2(k_F)^{0j0k}E^k + (k_F)^{0jkl}\epsilon^{klm}B^m \quad (2.17)$$

$$\vec{H} = B^j + \frac{1}{2}(k_F)^{pqrs}\epsilon^{pqj}\epsilon^{rsk}B^k - (k_F)^{0mkl}\epsilon^{jkl}E^m \quad (2.18)$$

estas equações reproduzem as equações de Maxwell para um meio material ⁴, que, no vácuo tomam a forma:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Por meio do vetor deslocamento elétrico, podemos escrever a relação entre o campo elétrico e a permissividade do meio ϵ^{jk} :

$$D^j = \epsilon^{jk}E^k \quad (2.20)$$

⁴ Existem problemas com a analogia no modelo em que $(k_{AF})^\mu$ é não nulo, pois a densidade de energia Θ^{00} e o vetor de Poynting Θ^{j0} não são análogos ao que se tem em um meio material [15].

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

sendo

$$\epsilon^{jk} = \delta^{jk} + \frac{2}{\omega^2} (k_F)^{j\beta\gamma k} p_\beta p_\gamma \quad (2.21)$$

É conveniente agrupar as matrizes e enfim renomeá-las de acordo com sua transformação sob paridade:

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^{jk}, \quad (2.22)$$

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^{jk} - \frac{1}{3}\delta^{jk}(\kappa_{DE})^{ll}, \quad (2.23)$$

$$(\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})^{jk}, \quad (2.24)$$

$$(\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})^{jk}, \quad (2.25)$$

$$\tilde{\kappa}_{tr} = \frac{1}{3}(\kappa_{DE})^{ll}. \quad (2.26)$$

As quatro primeiras equações são matrizes 3×3 e a última é o traço da matriz κ_{DE} . Os índices “e” e “o” de cada matriz indicam paridade par (*even*) em $(\tilde{\kappa}_{e\pm})^{jk}$ e paridade ímpar (*odd*) em $(\tilde{\kappa}_{o\pm})^{jk}$. desta forma os coeficientes “ β ” que apareceram na equação (2.14) estão completamente determinados. A lagrangiana para o modelo sem fontes, em termos das matrizes com a paridade identificada é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{\tilde{\kappa}_{tr}}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{2}\vec{E}(\tilde{\kappa}_{e+} + \tilde{\kappa}_{e-})\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{B}(\tilde{\kappa}_{e+} + \tilde{\kappa}_{e-})\vec{B} \\ & + \vec{E}(\tilde{\kappa}_{o+} + \tilde{\kappa}_{o-})\vec{B} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Os limites de birrefringência estipulados para a ordem de grandeza de alguns parâmetros [46, 47]:

$$|\kappa_{DB} - \kappa_{HE}| \leq 10^{-32}, \quad (2.28)$$

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

$$|(\tilde{\kappa}_{o+})^{ij}| < 2 \times 10^{-18}, \quad (2.29)$$

$$|(\tilde{\kappa}_{e-})^{kl}| < 4 \times 10^{-18}, \quad (2.30)$$

$$\text{tr}(\tilde{\kappa}_{e-}) < 1,4 \times 10^{-19}, \quad (2.31)$$

É evidente que estes parâmetros darão correções muito pequenas nas equações de Maxwell. Contudo, seus efeitos podem ser aumentados em situações particulares como no confinamento da radiação, por exemplo em guias de ondas, que serão apresentados no Capítulo 3.

A equação de movimento de interesse que deriva da lagrangiana (2.13):

$$\partial_\alpha F_\mu^\alpha + (k_F)_{\mu\alpha\beta\gamma} \partial^\alpha F^{\beta\gamma} = 0, \quad (2.32)$$

com a identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.33)$$

Formam um conjunto de equações lineares no tensor $F^{\mu\nu}$ e no potencial A^μ , que nos dão as equações de Maxwell modificadas em que a simetria discreta CPT é preservada. A simetria (contínua) de calibre $U(1)$, é preservada e, em conexão com o Teorema de Noether, temos a carga elétrica conservada.

Assumindo o “*ansatz*” tipo ondas planas:

$$F^{\mu\nu} = \mathcal{F}^{\mu\nu} e^{-ip^\alpha x_\alpha}, \quad (2.34)$$

onde $p^\alpha = (\omega, \vec{k})$, como solução de (2.33) obtém-se:

$$\vec{k} \times \vec{E} - \omega \vec{B} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.35)$$

Estas equações definem a relação simples entre os campos. Vale notar que o campo magnético permanece transverso à direção de propagação, sendo $\vec{k}$ o vetor de onda.

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

As equações de movimento dão Leis de Coulomb e Ampère modificadas que resolvidas para o campo elétrico tem como resultado a equação matricial [15]:

$$M^{jk} E^k = (-\delta^{jk} k^2 - k^j k^k - 2(k_F)^{\beta j \gamma k} k_\beta k_\gamma) E^k = 0, \quad (2.36)$$

a relação de dispersão é obtida ao calcularmos o determinante de M^{jk} . Considerando somente termos dominantes nos parâmetros de violação, obtêm-se:

$$\omega = (1 + \tilde{\rho} \pm \tilde{\sigma}) |\vec{k}|, \quad (2.37)$$

onde

$$\tilde{\rho} = -\frac{1}{2} \tilde{k}_\alpha^\alpha, \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2} (\tilde{k}_{\alpha\beta})^2 - \tilde{\rho}^2, \quad (2.38)$$

em que definimos

$$\tilde{k}_{\alpha\beta} = (k_F)_{\alpha\mu\beta\nu} \frac{k_\nu k_\mu}{|\vec{k}|^2}. \quad (2.39)$$

As duas soluções para a frequência em (2.37) indicam dois estados distintos de polarização do campo elétrico ou seja, no vácuo temos ondas eletromagnéticas propagando-se como se houvesse um meio ótico inativo. Isto implica na existência de dois estados de energia distintos no vácuo que não existem na teoria usual do eletromagnetismo [15, 17]. Nessa situação, em que consideramos apenas os termos dominantes, as velocidade de fase, de grupo e a de transporte de energia igualam-se:

$$v_{grupo} = v_{fase} = v_{te} = c(1 + r\tilde{h}o \pm \tilde{\sigma}) \quad (2.40)$$

sendo cada uma delas definidas formalmente por:

$$v_{grupo} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad v_{fase} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{te} = \frac{\Theta^{j0}}{\Theta^{00}} \quad (2.41)$$

A diferença entre os dois estados na velocidade de propagação (positivo e negativo) é $2\tilde{\sigma}$ (birrefringência do vácuo). Medidas cosmológicas impõem os limites $|\tilde{\sigma}| < 10^{-32}$ [34, 54]. Medidas de polarização linear de raios gama impõem $|\tilde{\sigma}| < 10^{-37}$ [56].

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

Os parâmetros associados a $\tilde{\rho}$ que não são birrefringentes tem sido medidos por meio de raios cósmicos de ultra alta energia, que viajam por longos intervalos de tempo de modo que efeitos cumulativos da quebra de Lorentz podem ser evidenciados. As medidas realizadas impõem $\tilde{\rho} < 10^{-18}$ [57].

Um caso particularmente interessante que também é par sob CPT, mas viola Lorentz é quando temos as únicas componentes de $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ sendo:

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = (k_F)_{0j0k} = -\frac{1}{2}\beta_j\beta_k \quad (2.42)$$

temos assim um conjunto de componentes relacionados pelas simetrias de $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. A lagrangiana neste caso especial se torna:

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{2}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})^2. \quad (2.43)$$

As equações de Maxwell modificadas não-homogêneas referentes a este modelo são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\beta} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \quad (2.44)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{\beta} \partial_t (\vec{\beta} \cdot \vec{E}). \quad (2.45)$$

As equações advindas da identidade de Bianchi (2.33) permanecem inalteradas. Vemos que as equações são lineares nas correções, nos campos e suas derivadas. Duas possíveis relações de dispersão advindas destas equações são:

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad (k_e)^\mu (k_e)_\mu = -\frac{(\vec{\beta} \times \vec{k}_e)^2}{1 + \vec{\beta}^2}, \quad (2.46)$$

a primeira equação corresponde à relação de dispersão usual, que, em notação 3-vetorial é $\omega = |\vec{k}|$. A segunda corresponde a um modo “extraordinário”, com vetor de onda (momento) diferente da usual. Fisicamente isto significa que a direção de propagação interferirá nas características da radiação. Caso a direção seja oblíqua ao vetor de fundo $\vec{\beta}$, a relação de dispersão será alterada [15] e consequentemente a velocidade de grupo e de fase. Mais detalhes sobre esse modelo específico podem ser encontrados na Ref. [43].

2.2 Submodelo em que $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$ com Índices Completamente Distintos

Aqui nossa atenção será devotada a um submodelo fixando uma componente ímpar sob paridade (e sob reversão temporal) sendo uma das que acarretam a birrefringência: $(k_F)^{0123}$. Ao analisar todas aquelas que se relacionam a esta por meio das simetrias do tensor de fundo, obtemos um conjunto de equações que relacionam suas componentes. Em particular escolhemos somente o caso em que $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ tem índices μ, ν, α, β completamente diferentes. Assumindo isto, segue a análise de alguns parâmetros que acoplam o campo elétrico e o magnético na lagrangiana (2.5), diferentemente do caso particular expresso em (2.43), em que não há um acoplamento explícito em $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Tal submodelo, que é o foco principal desta dissertação, apresenta correções dependendo da direção que tomamos para as ondas eletromagnéticas, como veremos adiante nesta seção. Contudo, o confinamento revela algumas peculiaridades e vantagens para se estudar estes parâmetros, o que é discutido no Capítulo 3.

Neste submodelo temos três componentes sendo que dois são LI relacionadas pela simetria do tensor de Riemann e pela identidade de Bianchi para tensores de rank 4, como na equação abaixo:

$$(k_F)^{0123} + (k_F)^{0312} + (k_F)^{0231} = 0. \quad (2.47)$$

Nomeando $(k_F)^{0123} = \xi$, $(k_F)^{0312} = \rho$ e $(k_F)^{0231} = \sigma$. É conveniente usar estes coeficientes para escrever as equações de Maxwell modificadas no vácuo na forma 3-vetorial em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 2\xi\partial_x B_x - 2\rho\partial_z B_z - 2\sigma\partial_y B_y, \quad (2.48)$$

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= (2\xi \partial_t B_x + 2\rho \partial_y E_z - 2\sigma \partial_z E_y) \hat{x} + \\ &+ (2\xi \partial_z E_x - 2\rho \partial_x E_z + 2\sigma \partial_t B_y) \hat{y} + \\ &+ (-2\xi \partial_y E_x + 2\rho \partial_t B_z + 2\sigma \partial_x E_y) \hat{z},\end{aligned}\quad (2.49)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.50)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0. \quad (2.51)$$

Todas as equações apresentam correções lineares nos parâmetros que quebram Lorentz, mesmo no limite estático. As equações advindas da identidade de Bianchi (2.33) permanecem inalteradas. Nas duas primeiras equações apresentam os campos como fontes para si mesmos através das novas derivadas que aparecem do lado direito. Com as equações de Maxwell deste submodelo, podemos, tomando o rotacional das equações (2.49) e (2.51) obter as equações de onda para os campos elétrico e magnético, que são:

$$\square \vec{E} = -\vec{\nabla} L_1 - \partial_t \vec{L}_2, \quad (2.52)$$

$$\square \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{L}_2, \quad (2.53)$$

onde o temos o escalar $L_1 = 2\xi(\partial_z B_z - \partial_x B_x)$ e o vetor $\vec{L}_2 = (2\xi \partial_t B_x + 2\rho \partial_y E_z - 2\sigma \partial_z E_y) \hat{x} + (2\xi \partial_z E_x - 2\rho \partial_x E_z + 2\sigma \partial_t B_y) \hat{y} + (-2\xi \partial_y E_x + 2\rho \partial_t B_z + 2\sigma \partial_x E_y) \hat{z}$, que são responsáveis pela quebra de Lorentz. Estas são equações de onda no vácuo em que as quantidades L_1 e $\vec{L}_2$ carregam as correções nos campos com diferentes contribuições nas três direções. Contudo, todas muito pequenas e até então, não detectadas.

Neste submodelo, o tensor energia-momento tem suas componentes $\Theta^{0j} \neq \Theta^{j0}$ devido ao termo $-(k_F)^{\alpha\beta\mu\gamma} F_\gamma^\nu F_\beta^\alpha$. A componente Θ^{0j} tem a contribuição de 18 componentes do objeto tensorial de fundo vindas de $-(k_F)^{\alpha\beta\mu\gamma} F_\gamma^\nu F_\beta^\alpha$ que não aparecem no modelo usual de Maxwell e acopla diferentes componentes do campo magnético. Já Θ^{j0} apresenta 6 componentes diferentes do usual também vindas do mesmo termo $-(k_F)^{\alpha\beta\mu\gamma} F_\gamma^\nu F_\beta^\alpha$. Esta diferença traz o acoplamento entre os campos elétrico e mag-

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

nético.⁵ Mesmo neste caso particular, Θ^{0j} pode ser associado ao vetor de Poynting generalizado [15].

A partir do determinante da matriz M^{jk} , na equação (2.36), obtemos a relação de dispersão para nosso submodelo (somente os termos dominantes dos parâmetros foram considerados). É interessante notar que se fizermos $\sigma = 0$, a relação de dispersão se torna a usual, $\omega = \pm |\vec{k}|$, pois, as correções são muito pequenas e foram desconsideradas na obtenção da matriz M^{jk} (equação 2.36) [54]. Escolhemos a onda se propagando na direção z do espaço, o que pode ser realizado se fizermos uma transformação (rotação) de partícula, tal que o vetor de onda seja $k^\mu = (\omega, 0, 0, k_z)$. Dependendo da escolha das componentes e da rotação de partícula podemos obter diferentes relações dispersão vindas da equação (2.36).

Considerando agora o caso particular em que $\rho = 0$ o que implica em $\sigma = -\xi$, considerando também $k^\mu = (\omega, 0, 0, k_z)$, a matriz M^{jk} se torna:

$$\begin{pmatrix} -k^\mu k_\mu & -4\xi \omega & 0 \\ 4\xi \omega k_z & -k_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k^\mu k_\mu \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

ao calcular seu determinante que deve ser nulo, ganhamos a relação de dispersão que segue,

$$\omega^2 = k_z^2 [1 + 8\xi^2 \pm 4(\xi\sqrt{1 + 4\xi^2})] \quad (2.55)$$

Aqui vemos que apesar de o referencial ser o mesmo em que o caso em que calculamos anteriormente, considerando $\sigma = 0$, apareceram parâmetros quadráticos não-nulos, ou seja correções minúsculas. Interpretamos então que, saber quais dos parâmetros existem ou não, significa que fisicamente a propagação das ondas eletromagnéticas em alguma dada direção é diferente de outra. A velocidade de grupo e de fase são coincidentemente iguais e ambas superiores a c por uma pequena correção que deve ser observada com o devido cuidado.

$$\frac{\omega}{k_z} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = [1 + 8\xi^2 \pm 4(\xi\sqrt{1 + 4\xi^2})]. \quad (2.56)$$

⁵Se estivéssemos considerando o modelo completo, apareceriam também os acoplamentos das componentes do campo elétrico com ele mesmo.

2. Setor de Radiação do Modelo Padrão Estendido: Ondas Livres

Em unidades SI, temos as velocidades como sendo $c[1 + 8\xi^2 \pm 4(\xi\sqrt{1 + 4\xi^2})]$, onde os sinais $\pm$ significam os dois modos de polarização para uma mesma onda, como discutido anteriormente. Vale notar que c , neste ambiente, não é uma velocidade limite para ondas eletromagnéticas. Discussões sobre violação da causalidade e também da unitariedade em modelos com quebra de Lorentz são encontradas nas Ref. [17, 58].

Capítulo 3

Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

Guias de ondas são estruturas que guiam ondas tais como ondas acústicas ou eletromagnéticas. Os guias de ondas eletromagnéticas, que são de particular interesse nesta dissertação, são tubos metálicos ocos ou preenchidos com material dielétrico com uma geometria tal que permita o confinamento e transporte de ondas eletromagnéticas. Neste capítulo são apresentados os resultados originais deste trabalho, obtidos da eletrodinâmica que viola Lorentz, mas é par sob CPT , cujos resultados se reduzem aos conhecidos da eletrodinâmica de Maxwell quando os parâmetros de violação se anulam. São feitas discussões sobre os contrastes entre o modelo com e sem quebra de Lorentz em dois tipos de guias de ondas que comportam diferentes modos. Na primeira seção tratamos o guia de onda retangular. Estudamos as equações diferenciais que governam a dinâmica dos campos no guia e como as correções interferem na possibilidade dos modos transversal elétrico (TE) e transversal magnético (TM). Discutimos os resultados e consequências físicas dos parâmetros de violação. Na segunda seção é tratado o guia de onda do tipo cabo coaxial e os modos transversal eletromagnético (TEM). Condições de contorno desse guia, relação de dispersão, vetor de Poynting e potência dissipada são computados, discutidos e comparados com os resultados da eletrodinâmica usual.

3.1 Eletrodinâmica Modificada Aplicada ao Guia de Onda Retangular

Num guia de onda retangular, ilustrado na Fig. 3.1, as ondas eletromagnéticas se propagam em seu interior (também chamada cavidade do guia). Assumiremos seu comprimento infinito (na direção z), de modo que não haja efeitos de borda. Admitiremos que as paredes do guia são perfeitamente condutoras (ou seja, de condutividade infinita), de modo que o campo elétrico paralelo às paredes se anula, assim como o campo magnético perpendicular a estas também se anula, o que formalmente, decorre das condições de contorno, que são consequência das equações de Maxwell homogêneas (inalteradas pela quebra da simetria de Lorentz). Sendo escritas:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}^{\parallel} = \vec{0}. \\ B^{\perp} = 0. \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

As fronteiras do guia (em coordenadas cartesianas) conforme a Fig. 3.1, são os planos:

$$x = 0, \quad x = a \quad e \quad y = 0, \quad y = b \quad (3.2)$$

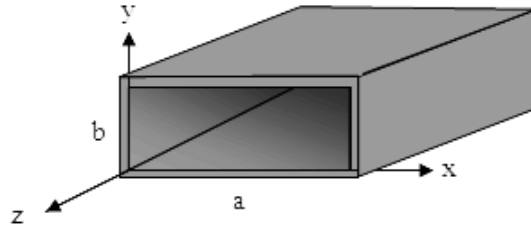


Figura 3.1: Guia de onda retangular, de seções retas a e b ao longo de x e y , respectivamente.

É razoável supor as formas gerais para os campos no guia retangular, para ondas na direção z ($k = k_z$) do guia como ondas planas que podem, em princípio, não serem as formas das soluções exatas das equações de Maxwell modificadas, contudo, por simplicidade tomaremos como proposta de solução, para cada campo, o "ansatz" [42]:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.3)$$

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

$$\vec{B} = \vec{B}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.4)$$

sendo

$$\vec{E}_0(x, y) = (E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}) \quad (3.5)$$

$$\vec{B}_0(x, y) = (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) \quad (3.6)$$

nesta proposta, as correções estariam associadas às componentes das amplitudes transversais $E_0(x, y)$ e $B_0(x, y)$ que contém os campos transversos à direção do movimento e as componentes axiais. As correções devem contribuir via relação entre ω e k .

Devido à difícil resolução das equações no guia de onda retangular, iremos adotar um submodelo mais simples, em que faremos $\sigma = 0$. Simplificações necessárias para tratar o problema e obter todas as correções possíveis dentro desta análise. Introduzindo a condição extra aos parâmetros: $\sigma = 0$ o que implica em $\rho = -\xi$, obteremos por meio de (3.3) e (3.4) os campos transversos e as equações para os campos axiais.

3.1.1 Submodelo com $\sigma = 0$

Substituindo as equações (3.3) e (3.4) nas equações de Maxwell modificadas obtemos três equações advindas da "Lei de Faraday"(2.51):

$$\partial_y E_z - ikE_y = i\omega B_x \quad (3.7)$$

$$ikE_x - \partial_x E_z = i\omega B_y \quad (3.8)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega B_z, \quad (3.9)$$

e outras três advindas da "Lei de Ampère"(2.49):

$$\partial_y B_z - ikB_y + i\omega E_x = -2\xi(i\omega B_x + \partial_y E_z) \quad (3.10)$$

$$ikB_x - \partial_x B_z + i\omega E_y = 2\xi(ikE_x + \partial_x E_z) \quad (3.11)$$

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x + i\omega E_z = 2\xi(-\partial_y E_x + i\omega B_z), \quad (3.12)$$

Com as equações (3.7), (3.8), (3.10) e (3.11) encontramos os campos transversos à direção de propagação das ondas em função das derivadas das componentes axiais:

$$\begin{aligned} E_x = \frac{i}{C} \Big[& (Ak - 4\xi^2\omega^2k)\partial_x E_z + (4\xi\omega^3 - 2\xi\omega k^2)\partial_y E_z - 2\xi\omega^2k\partial_x B_z + \\ & + A\omega\partial_y B_z \Big] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} E_y = \frac{i}{C} \Big[& (4\xi\omega^2 - 2\xi\omega^3)\partial_x E_z + (Ak + 8\xi^2\omega^2k)\partial_y E_z - A\omega\partial_x E_z + \\ & + 2\xi\omega^2k\partial_y B_z \Big] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} B_x = \frac{i}{C} \Big[& (2\xi\omega^2k - 4\xi k^3)\partial_x E_z - (\omega A - 4\xi^2\omega k^2)\partial_y E_z + Ak\partial_x B_z - \\ & - 2\xi\omega k^2\partial_y B_z \Big] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} B_y = \frac{i}{C} \Big[& (\omega A - 8\xi^2\omega k^2)\partial_x E_z + (4\xi\omega^2k - 2\xi k^3)\partial_y E_z - 2\xi\omega k^2\partial_x B_z + \\ & + Ak\partial_y B_z \Big] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Em que definimos, $A = \omega^2 - k^2$ e $C = A^2 - 4\xi^2\omega^2k^2$. Neste submodelo temos várias correções de diferentes ordens. Substituindo estes campos nas equações (3.9) e (3.12), isolando as componentes axiais e suas derivadas, obtemos as equações diferenciais que determinam a dinâmica de E_z e B_z :

$$\begin{aligned} & A\partial_x^2 B_z + A\partial_y^2 B_z + (2\xi\omega^2 - 4\xi k^2)\partial_x^2 E_z + (4\xi\omega^2 - 2\xi k^2)\partial_y^2 E_z - \\ & - 4\xi^2\omega k\partial_x\partial_y B_z - 12\xi^2\omega k\partial_x\partial_y E_z + CB_z = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

$$(A - 8\xi^2 k^2) \partial_x^2 E_z + (A - 8\xi^2 \omega^2) \partial_y^2 E_z - 2\xi k^2 \partial_x^2 B_z + (2\xi \omega^2 - 4\xi k^2) \partial_y^2 B_z + (4\xi \omega k - 8\xi^3 \omega k) \partial_x \partial_y E_z - 4\xi^2 \omega k \partial_x \partial_y B_z + C E_z + 2\xi C B_z = 0 \quad (3.18)$$

Diferentemente do caso usual, as equações são acopladas. Os parâmetros aparecem com ordens diferentes de correção em cada equação diferencial. Uma dificuldade adicional são as condições de contorno que são diferentes para cada campo, sendo bastante complicado garantir a consistência das equações e encontrar uma solução (ou conjunto de soluções, caso existam) que obedeçam tanto (3.17) quanto (3.18).

Verifica-se que, se $\xi \rightarrow 0$, temos $C \rightarrow A^2$ e com isto as equações se tornam as usuais conhecidas na literatura [59–61], respectivamente: $(\nabla_t^2 + A)B_z = 0$ e $(\nabla_t^2 + A)E_z = 0$. Sendo $\nabla_t^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ o operador laplaciano transversal.

Se $B_z = 0$, temos o modo chamado transversal magnético (TM), $E_z = 0$, temos o modo transversal elétrico (TE), que podem ser também entendidos por meio de uma análise dos potenciais ϕ , e $\vec{A}$, que mostram como as correntes elétricas se movem nas paredes do guia de onda retangular [62]. É possível fazer uma análise alternativa do problema na eletrodinâmica usual no guia retangular utilizando as partes transversal e longitudinal do potencial vetor: $\vec{A} = \vec{A}_L + \vec{A}_T$. Em tal análise o modo TM, equivale dizer que as correntes e o potencial vetor se orientam ao longo do guia (direção z). No modo TE, as correntes são perpendiculares à direção do guia. Resultados deste tratamento na eletrodinâmica usual podem ser vistos na Ref. [62].

Modo Transverso Magnético

No modo transversal magnético (TM), a componente axial do campo magnético se anula. O potencial escalar ϕ se anula nas paredes do guia quando se aplica a condição de contorno (3.1), todavia a densidade superficial de carga não se anula [62].

Neste modelo com quebra de Lorentz no modo TM, diferentemente do caso usual temos duas equações diferenciais para a componente axial elétrica, que são obtidas fazendo-se $B_z = 0$ em (3.17) e (3.18):

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

$$(\omega^2 - 2k^2)\partial_x^2 E_z + (2\omega^2 - 2k^2)\partial_y^2 E_z - 6\xi\omega k\partial_x\partial_y E_z = 0 \quad (3.19)$$

$$(A - 8\xi^2 k^2)\partial_x^2 E_z + (A - 8\xi^2 \omega^2)\partial_y^2 E_z + (4\xi\omega k - 8\xi^3 \omega k)\partial_x\partial_y E_z + CE_z = 0 \quad (3.20)$$

No caso usual, a primeira equação seria completamente anulada, pois ela vem de termos que seriam nulos. Todavia assumindo que $\xi \neq 0$, não se recupera mais o caso usual e as equações não possuem uma solução que satisfaça as condições de contorno corretamente (exceto a solução trivial). Substituindo (3.19) em 3.20 temos uma equação apenas:

$$\left[A - 8\xi^2 k^2 + \frac{2}{3}(1 - 4\xi^2)(\omega^2 - 2k^2) \right] \partial_x^2 E_z + \left[A - 8\xi^2 \omega^2 + \frac{2}{3}(1 - 4\xi^2)(2\omega^2 - k^2) \right] \partial_y^2 E_z + CE_z = 0 \quad (3.21)$$

Esta equação é macroscopicamente diferente do caso usual, ou seja, o fato do parâmetro de violação ser não-nulo implica numa mudança no vetor de onda, velocidade de fase e de grupo em valores grandes (correções que não são observadas), em consequência da equação (3.19). A solução de (3.21) é a mesma da eletrodinâmica usual, uma vez que a forma da equação é a mesma:

$$E_z = E_0 \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (3.22)$$

em que m e n são números inteiros, $m\pi/a = k_x$ e $n\pi/b = k_y$ são as componentes transversas do vetor de onda na eletrodinâmica usual, obtidos ao usar o método de separação de variáveis na equação (3.21). Apesar da solução (3.22) satisfazer a equação (3.21), ela não satisfaz (3.19) e (3.20). Temos assim, inconsistências físicas e interpretamos que podem haver várias possibilidades para o caso, a saber: não haver um modo puramente transversal magnético, ou seja, a componente do campo magnético pode não ser completamente nula, contudo, extremamente pequena, de modo que não seja

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

possível fazer $B_z = 0$. Outra possibilidade é que as soluções propostas inicialmente (3.3) e (3.4) não tragam todas as correções ou simplesmente não são as formas corretas das soluções, uma vez que estas têm se mostrado serem boas soluções para métodos perturbativos (aproximados), aplicados à eletrodinâmica CPT -par, não sendo tomada como uma solução exata do problema [42]. Ou ainda podemos interpretar que o modelo proposto (com $\sigma = 0$) não faz sentido físico.

Modo Transverso Elétrico

Neste modelo com quebra de Lorentz e sendo $E_z = 0$, diferentemente do caso usual e como no modo TM na seção anterior, temos duas equações diferenciais para a componente axial magnética:

$$A\partial_x^2 B_z + A\partial_y^2 B_z - 4\xi\omega k\partial_x\partial_y B_z + CB_z = 0 \quad (3.23)$$

$$-k^2\partial_x^2 B_z + \omega^2\partial_y^2 B_z - 2\xi\omega k\partial_x\partial_y B_z - CB_z = 0 \quad (3.24)$$

Neste modo, também temos equações que não possuem soluções que respeitem as condições de contorno (3.1). Substituindo o termo com derivadas em relação a x e a y da equação (3.23) em (3.24), temos uma equação apenas:

$$(\omega^2 + k^2)\partial_x^2 B_z + (k^2 - \omega^2)\partial_y^2 B_z + 3CB_z = 0 \quad (3.25)$$

As solução de (3.25) é também da forma usual:

$$B_z = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \quad (3.26)$$

Analogamente à seção anterior para o campo elétrico axial, há inconsistências entre as equações (3.23) e (3.24). Não há soluções satisfatórias e não há relação de dispersão que faça sentido físico, uma vez que o parâmetro ξ é assumido como não-nulo. A relação de dispersão vinda de (3.25), é muito distinta da eletrodinâmica usual:

$$(\omega^2 + k^2)k_x^2 + (k^2 - \omega^2)k_y^2 + 3[(\omega^2 - k^2)^2 - 4\xi^2\omega^2 k^2] = 0 \quad (3.27)$$

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

Estes resultados são importantes para compararmos com a próxima seção em que $\sigma \neq 0$ e aparecem mais restrições no modelo. Uma possibilidade é que o parâmetro σ não possa ser nulo, pois não corresponde fisicamente ao que se espera, ou senão, numa outra interpretação, não há modos puramente TE ou TM (com campos axiais identicamente nulos), sendo os campos de valor muito pequeno. De acordo com esta interpretação, fazem sentido apenas as equações para $E_z \neq 0$ e $B_z \neq 0$ que recobrem perfeitamente o caso usual e, se resolvidas (o que não é tarefa simples) podem, talvez levar a uma relação de dispersão que concorde com o caso usual com pequenas correções, que é o que se espera, já que os resultados da eletrodinâmica usual corroboram todos os experimentos feitos. Para entender melhor os resultados, temos que analisar o caso com os três parâmetros não nulos.

3.1.2 Submodelo com $\xi \neq 0, \rho \neq 0$ e $\sigma \neq 0$ Aplicada ao Guia Retangular

Nesta seção estudaremos o caso mais geral em que os três parâmetros associados à quebra da simetria de Lorentz são não-nulos. Entretanto, devido à complexidade das equações para este caso, consideraremos somente as contribuições dominantes nos parâmetros que quebram Lorentz.

Analogamente ao que foi feito na seção anterior, substituindo o “*ansatz*” de ondas planas na “Lei de Ampère”, (2.49), (em que tínhamos $\sigma \neq 0$), obtemos:

$$\partial_y B_z - ikB_y + i\omega E_x = -2\xi i\omega B_x + 2\rho \partial_y E_z - 2\sigma ikE_y \quad (3.28)$$

$$ikB_x - \partial_x B_z + i\omega E_y = 2\xi ikE_x - 2\rho \partial_x E_z - 2\sigma i\omega E_y \quad (3.29)$$

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x + i\omega E_z = -2\xi \partial_y E_x - 2\rho i\omega B_z + 2\sigma \partial_x E_y \quad (3.30)$$

As equações advindas da “lei de Faraday”, (3.7), (3.8) e (3.9) permanecem inalteradas. Neste caso os campos transversos são:

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

$$E_x = \frac{i}{A^2} [Ak\partial_x E_x + (-2\rho A\omega - 2\sigma\omega k^2 + 2\xi\omega^3)\partial_y E_z - (2\sigma\omega^2 k - 2\xi\omega^2 k)\partial_x B_z + A\omega\partial_y B_z] \quad (3.31)$$

$$E_y = \frac{i}{A^2} [(2\xi\omega k^2 + 2\rho A\omega + 2\sigma\omega^3)\partial_x E_z + Ak\partial_y E_z - A\omega\partial_x E_z + (2\xi\omega^2 k - 2\sigma\omega^2 k)\partial_y B_z] \quad (3.32)$$

$$B_x = \frac{i}{A^2} [(2\xi k^3 + 2\sigma\omega^2 k - 2\rho Ak)\partial_x E_z - A\omega\partial_y E_z + Ak\partial_x B_z + (-2\xi\omega k^2 + 2\sigma\omega k^2)\partial_y B_z] \quad (3.33)$$

$$B_y = \frac{i}{A^2} [A\omega\partial_x E_z + (-2\rho Ak - 2\sigma k^3 + 2\xi\omega^2 k)\partial_y E_z + (2\sigma\omega k^2 - 2\xi\omega^2)\partial_x B_z + Ak\partial_y B_z] \quad (3.34)$$

Aqui vemos que as correções dominantes são todas lineares. Usando as equações (3.30) e (3.9), obtemos as equações diferenciais para as componentes axiais, que determinam a dinâmica dos campos:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2)E_z + \left(\frac{2\sigma k^2 - 2\xi k^2}{\omega^2 - k^2} + 2\sigma\right)\partial_x^2 B_z + \left(\frac{2\xi k^2 - 2\sigma k^2}{\omega^2 - k^2} + 2\xi\right)\partial_y^2 B_z + \frac{4\xi\omega k}{\omega^2 - k^2}\partial_x\partial_y E_z + 2\rho(\omega^2 - k^2)B_z = 0 \quad (3.35)$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2)B_z + \left(\frac{2\sigma\omega^2 + 2\xi k^2}{\omega^2 + k^2} - 2\rho\right)\partial_x^2 E_z + \left(\frac{2\xi\omega^2 - 2\sigma k^2}{\omega^2 - k^2} - 2\rho\right)\partial_y^2 E_z + \frac{4(\sigma - \xi)\omega k}{\omega^2 - k^2}\partial_x\partial_y B_z = 0 \quad (3.36)$$

Diferentemente do caso usual, temos um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem acopladas. Estas equações recobrem o caso usual quando os três

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

parâmetros se anulam. Todavia, não se pode dizer que os três necessariamente devem ser nulos simultaneamente. Até aqui poderíamos escolher qualquer submodelo com $\xi = 0$ ou $\rho = 0$ ou $\sigma = 0$, sempre respeitando a simetria da equação (2.47), que proíbe que os três parâmetros tenham o mesmo sinal e também proíbe que dois parâmetros seja nulos e um não. As soluções (caso existam) de (3.35) e (3.36), que respeitem as condições de contorno do guia de onda, não são simples de serem obtidas analiticamente e mesmo numericamente, uma vez que os parâmetros de quebra são muito pequenos e seria difícil analisar diferenças entre o caso usual e estes resultados, por exemplo graficamente, o que justifica o trabalho analítico na busca por modos de propagação como os modos transversos elétrico e magnético, que têm equações mais simples.

Modo Transverso Magnético

As equações diferenciais para a componente axial elétrica neste modo são:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2)E_z + \frac{4\xi\omega k}{\omega^2 - k^2}\partial_x\partial_y E_z = 0 \quad (3.37)$$

$$\left(\frac{2\sigma\omega^2 + 2\xi k^2}{\omega^2 + k^2} - 2\rho\right)\partial_x^2 E_z + \left(\frac{2\xi\omega^2 - 2\sigma k^2}{\omega^2 - k^2}\right)\partial_y^2 E_z = 0 \quad (3.38)$$

A diferença do modelo em que $\sigma = 0$ é que as duplas de equações (3.37) e (3.38) têm formas distintas, o que mostra que estas podem ser independentes com soluções distintas, o que não faz sentido já que a componente axial é a mesma. Se recupera o caso usual com os três parâmetros sendo nulos. Então neste modo cada equação acarreta consequências físicas diferentes. A equação (3.37) leva uma relação de dispersão com uma pequena correção: $-k_x^2 - k_y^2 + \omega^2 - k^2 + \frac{4\xi\omega k}{\omega^2 - k^2}k_x k_y = 0$, que respeita o caso usual no limite em que os parâmetros são nulos: $-k_x^2 - k_y^2 + \omega^2 - k^2 = 0$, (apenas $\xi = 0$ recobre o caso usual neste caso em particular). A frequência de corte é a usual (como no apêndice A). Entretanto, a equação (3.38) leva a uma frequência de corte nula, $\omega_{mn} = 0$, o que não se observa experimentalmente. Analisemos algumas consequências da equação (3.38), cuja solução é a usual e implica na relação:

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

$$\omega^2 = k^2 \frac{(\xi - \rho)k_x^2 - (\rho - \sigma)k_y^2}{(\xi - \rho)k_y^2 - (\sigma + \rho)k_x^2} \quad (3.39)$$

que levam à velocidades de fase e grupo coincidentemente iguais:

$$v_{fase} = v_{grupo} = \pm \sqrt{\frac{(\xi - \rho)k_x^2 - (\rho - \sigma)k_y^2}{(\xi - \rho)k_y^2 - (\sigma + \rho)k_x^2}} \quad (3.40)$$

Não podemos mais anular os parâmetros simultaneamente. Estes resultados são bastante distintos da eletrodinâmica usual (vide Apêndice A), em que as velocidades de fase e grupo não são iguais e possuem uma forma bastante simples. Interpreta-se que: pode não haver um modo puramente TM, como também verificamos no modelo com $\sigma = 0$, ou as soluções tipo ondas planas propostas podem estar incorretas ou incompletas (não trazer todas as correções). A inclusão dos parâmetros de quebra alterou a dinâmica das ondas de tal forma que, não vemos mais sinais dos resultados usuais.

Modo Transverso Elétrico

Neste modo, as equações diferenciais para a componente axial magnética são:

$$\left(\frac{2\sigma k^2 - 2\xi k^2}{\omega^2 - k^2} + 2\sigma \right) \partial_x^2 B_z + \left(\frac{2\xi k^2 - 2\sigma k^2}{\omega^2 - k^2} + 2\xi \right) \partial_y^2 B_z + 2\rho(\omega^2 - k^2)B_z = 0 \quad (3.41)$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2)B_z + \frac{4(\sigma - \xi)\omega k}{\omega^2 - k^2} \partial_x \partial_y B_z = 0 \quad (3.42)$$

Neste modo também temos equações com formas distintas, o que implica em soluções diferentes e relações de dispersão distintas. A frequência de corte vinda da equação (3.42) é a usual (como no Apêndice A). A equação (3.41) leva à relação:

$$\omega^2 = k^2 + \frac{\sigma}{\rho} k_x^2 + \frac{\xi}{\rho} k_y^2 \quad (3.43)$$

A frequência de corte, as velocidades de fase e grupo são respectivamente:

$$\tilde{\omega}_{mn} = \frac{\sigma}{2\rho} k_x^2 + \frac{\xi}{2\rho} k_y^2 \quad (3.44)$$

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

$$v_{fase} = \sqrt{1 - (\tilde{\omega}_{mn}/\omega)^2} \quad (3.45)$$

$$v_{grupo} = 1/\sqrt{1 - (\tilde{\omega}_{mn}/\omega)^2} \quad (3.46)$$

Fazer os três parâmetros de quebra iguais não faz sentido conforme a simetria (2.47), o que mostra que a frequência de corte está em desacordo com o resultado usual. Também verifica-se que os três parâmetros não podem ser nulos em (3.34), pois assim teríamos uma indeterminação, isto acontece devido ao fato de termos assumido que os parâmetros são não-nulos em (3.35) e (3.36), e assim não se pode mais tomar o limite da eletrodinâmica usual. Nossa análise nos mostra que, de acordo com as soluções tipo ondas planas (3.3) e (3.4) que propomos, não podem haver modos nem TE nem TM nesta eletrodinâmica modificada que estudamos, pois estes modos implicariam em quantidades como vetor de onda, frequência em discordância com os resultados conhecidos [59–61]. Carece de maior investigação, as equações (3.35) e (3.36), que podem trazer resultados fisicamente compatíveis com os usuais (com pequenas correções, espera-se) se solucionadas em acordo com as condições de contorno do guia retangular.

3.2 Eletrodinâmica Modificada Aplicada ao Guia de Onda Tipo Cabo Coaxial

Nesta seção trataremos de um tipo de confinamento que se dá no interior de um guia de onda tipo cabo coaxial. Este consiste de um longo cilindro condutor reto, de raio a envolto por uma superfície cilíndrica também condutora, oca de raio constante b e seção transversal também constante, sendo $b > a$ conforme a Fig. 3.2. No cabo coaxial podemos ter ondas eletromagnéticas se propagando nos modos transversos eletromagnéticos (TEM), caracterizado pelas nulidades das componentes dos campos elétricos e magnéticos na direção do guia, ou seja, $E_z = B_z = 0$. Uma breve discussão e principais resultados do eletromagnetismo de Maxwell neste tipo de geometria podem ser encontrados no Apêndice B. Informações adicionais podem ser encontrados nos livros texto [59–61].

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

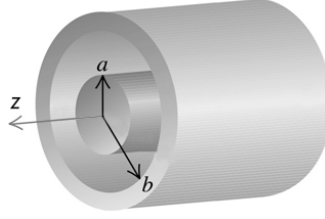


Figura 3.2: Guia de onda tipo cabo coaxial, sendo z a coordenada axial do guia ao longo do qual as ondas se propagam.

Reescrevendo-se as equações de Maxwell modificadas, (com $\xi \neq 0$, $\rho \neq 0$ e $\sigma \neq 0$), temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 2\xi \partial_x B_x - 2\rho \partial_z B_z - 2\sigma \partial_y B_y \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = & (2\xi \partial_t B_x + 2\rho \partial_y E_z - 2\sigma \partial_z E_y) \hat{x} + \\ & + (2\xi \partial_z E_x - 2\rho \partial_x E_z + 2\sigma \partial_t B_y) \hat{y} + \\ & + (-2\xi \partial_y E_x + 2\rho \partial_t B_z + 2\sigma \partial_x E_y) \hat{z} \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.49)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (3.50)$$

Iremos supor soluções gerais do tipo:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.51)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.52)$$

Fazendo $E_z = B_z = 0$ e substituindo (3.51) e (3.52) nas equações de Maxwell, obtemos as correções na relação de dispersão, e por meio desta, calculamos as velocidades de grupo e de fase, considerando apenas correções em ordem dominante dadas por:

$$\omega = \pm |\vec{k}| (1 \pm |\xi - \sigma|) + \mathcal{O}(|\xi - \sigma|^2) \quad (3.53)$$

$$v_{grupo} = v_{fase} = \pm c(1 \pm |\xi - \sigma|) + \mathcal{O}(|\xi - \sigma|^2) \quad (3.54)$$

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

Temos dois valores para as velocidades (dois modos de propagação), sendo que um deles é supraluminal. O parâmetro ρ não aparece explicitamente nas correções. Este fato não traz nenhuma imposição sobre este parâmetro, que em princípio pode ser nulo ou não conforme a simetria (2.47) que traz a dependência entre os três parâmetros, digo, $\xi + \rho + \sigma = 0$.

Por uma questão de simplicidade, iremos supor soluções das equações (3.47)-(3.50) como as soluções das equações da eletrostática e magnetostática em coordenadas cilíndricas (como no Apêndice B), com correções na frequência dada na relação de dispersão. Depois de uma expansão em série de potências, considerando apenas as correções dominantes, a parte real de cada campo toma a forma: ¹

$$\vec{E} = \frac{A_0 \cos(kz - \omega't)\hat{s}}{s} \pm \frac{|\xi - \sigma| A_0 \omega't(kz - \omega't)\hat{s}}{s} + \mathcal{O}(|\xi - \sigma|^2) \quad (3.55)$$

$$\vec{B} = \frac{A_0 \cos(kz - \omega't)\hat{\phi}}{cs} \pm \frac{|\xi - \sigma| A_0 \omega't(kz - \omega't)\hat{\phi}}{cs} + \mathcal{O}(|\xi - \sigma|^2) \quad (3.56)$$

Em que $\omega' = \pm |\vec{k}|$ a frequência que se obtém na eletrodinâmica usual. Usando as equações (3.55) e (3.56) obtemos as médias temporais do vetor de Poynting e a potência total irradiada com correções dominantes:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{A^2}{2cs^2} [1 \mp |\xi - \sigma| \cos(2kz)] + \mathcal{O}(|\xi - \sigma|^2) \quad (3.57)$$

A potência irradiada (média temporal) calculada usando o vetor de Poynting é:

$$\langle P \rangle = \frac{\pi A^2}{c} \ln\left(\frac{b}{a}\right) [1 \mp |\xi - \sigma| \cos(2kz)] + \mathcal{O}(|\xi - \sigma|^2) \quad (3.58)$$

Vemos que tais quantidades têm seus valores diminuídos ou aumentados por pequenas correções lineares nos parâmetros de quebra. Atentando-se à coordenada radial s , vemos que podemos obter valores mais discrepantes da eletrodinâmica usual se o guia de onda for de raio extremamente pequeno. Isto se deve ao fato que os

¹Aqui os campos são apresentados em unidades SI, para que se possa comparar com resultados conhecidos na literatura [60].

3. Eletrodinâmica com Quebra da Simetria de Lorentz em Guias de Ondas

parâmetros associado à quebra de Lorentz até então não foram detectados e os valores mais confiáveis obtidos de medidas cosmológicas impõem limites da ordem de 10^{-32} (conforme foi mencionado no Capítulo 2, equação (2.28)). Por exemplo, um guia com raio $s \sim 10^{-8}m$ levaria a correções na irradiância por um fator de $10^{16} \times [|\xi - \sigma| \cos(kz)]$. A contribuição associada à quebra de Lorentz pode ser evidenciada também pela oscilação dos valores tanto da irradiância como da potência na direção do guia, pois o termo $\propto \cos(kz)$ não aparece nos resultados usuais. Tais diferenças possibilitam impor limites experimentais para os parâmetros de quebra, ou detectá-los.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, revisamos propriedades básicas do setor de radiação do Modelo Padrão Estendido e estudamos alguns submodelos advindos deste. Investigamos o termo da lagrangiana (2.5) que possui um objeto tipo campo tensorial de fundo constante. Este termo viola a simetria de Lorentz sob transformação de partícula, mas respeita *CPT*. As ondas livres desta eletrodinâmica têm relações de dispersão corrigidas por pequenos parâmetros associados à violação de Lorentz, o que depende da direção de propagação que muda a dependência em relação às componentes do objeto tensorial $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$. Restringimo-nos ao estudo de três parâmetros que acoplam o campo elétrico ao campo magnético na lagrangiana (2.5). Ao entender o papel dos parâmetros deste submodelo e obtermos as equações de Maxwell modificadas, aplicamo-las a dois tipos de confinamento: o guia de onda tipo cabo coaxial e o guia de onda retangular.

Ao aplicarmos o submodelo com $\sigma = 0$ ao guia de onda retangular, encontramos os campos transversos em termos das amplitudes axiais e por fim escrevemos duas equações diferenciais apenas, cujas soluções são as componentes axiais dos campos. Procuramos por soluções para os modos transversos elétrico (quando $Ez = 0$) e transversos magnético (quando $Bz = 0$). Não sendo possível obter completamente os resultados da eletrodinâmica de Maxwell nestes modos quando o parâmetro ξ é anulado. Concluimos que, podem não existir modos em que componentes dos campos se anulem completamente na direção do movimento, e assim existir pequenos valores de campo que obedecem as equações diferenciais (3.17) e (3.18), mas que são soluções

4. Conclusões e Perspectivas

difíceis de serem obtidas analiticamente. Nossa análise do caso com três parâmetros não nulos mostra que, se assumirmos que as soluções que propomos tipo ondas planas (3.3) e (3.4) são soluções exatas do problema, não podem haver modos nem TE nem TM nesta eletrodinâmica modificada que estudamos, pois estes modos implicariam em quantidades que não fazem sentido físico. Carecem de maior investigação, as equações (3.35) e (3.36), para $E_z \neq 0$ e $B_z \neq 0$ que podem trazer resultados fisicamente corretos se solucionadas de acordo com as condições de contorno do guia retangular.

No guia de onda tipo cabo coaxial que permite a propagação de ondas eletromagnéticas no modo transversal eletromagnético (TEM), obtemos resultados advindos das equações de Maxwell modificadas com os três parâmetros associados à quebra Lorentz sendo não-nulos. As quantidades que calculamos trazem pequenas correções cujas principais diferenças do caso usual são correções dominantes lineares nos parâmetros. Contudo, a irradiância pode ter seus efeitos aumentados se o raio do guia for muito pequeno ($\sim 10^{-8}m$, por exemplo). E seus efeitos podem ser mais discrepantes também, ao levarmos em conta a oscilação dos valores na direção z do guia, o que não acontece no caso usual. Os resultados podem ajudar a detecção dos valores associados aos parâmetros, ou obter novos limites para estes, uma vez que a nanotecnologia permite a construção de aparatos em escala pequena o suficiente para que tais medidas sejam feitas.

Uma proposta de estudo futuro é a aplicação das equações de Maxwell modificadas do modelo que estudamos a cavidades ressonantes, em particular uma cavidade com geometria toroidal que permitiria entender como os parâmetros associados à violação interferem na maneira como as ondas eletromagnéticas se comportam neste tipo de confinamento em um ambiente em que não só a geometria difere dos guias de ondas, mas também a topologia.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Kaku, "*Quantum Field Theory a Modern Introduction*", Oxford University Press (1993).
- [2] C. Itzykson and J. B. Zuber, "*Quantum Field Theory*", Dover, New York (2005).
- [3] L. H. Ryder, "*Quantum Field Theory*", Cambridge Univ. Press, New York, Second Edition (1996).
- [4] J. M. F. Bassalo, "*Eletrodinâmica Quântica*", Editora Livraria da Física (2006)
- [5] V. M. S. Godoi "*A Dedução das Transformações de Lorentz em 1905*", Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 19, no. 3, Setembro, (1997).
- [6] H. C. Ohanian and R. Ruffini "*Gravitation and Spacetime*", W.W.Norton and Company, Second Edition (1994).
- [7] A. Einstein, "*The Foundation of the General Relativity*" (Traduzido para o inglês), Annalen der Physik (1916).
- [8] S. M. Carroll, "*Lecture Notes on General Relativity*", arXiv:gr-qc/9712019 v1 3 Dezembro. (1997).
- [9] D. F. Lawden, "*Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*", John Wiley and Sons, Third edition, (1982).
- [10] A. Einstein, "*Sobre o princípio da relatividade e suas implicações*", Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 1, p. 37 - 61, (2005).

7. Referências Bibliográficas

- [11] J. P. Baptista, "*Os princípios fundamentais ao longo da História da Física*", Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 28, n. 4, p. 541-553, (2006).
- [12] V. A. Kostelecký and S. Samuel, "*Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*" Phys. Rev. **D**, **39**, 683 (1989).
- [13] D. Colladay and V. A. Kostelecký, "*CPT Violation and the Standard Model*", Phys. Rev. **D** **55** 6760 (1997).
- [14] S. M. Carrol, G. B. Field, and R. Jackiw, "*Limits on a Lorentz and Parity-Violating Modification of Electrodynamics*", Phys. Rev. **D** **41** 1231 (1990).
- [15] D. Colladay and V. A. Kostelecký, "*Lorentz-Violating Extension of the Standard Model*", arXiv:hep-ph/9809521v1 24 Sep. (1998).
- [16] H. Belich, et al., "*Violação da Simetria de Lorentz*" Revista Brasileira de Ensino de Física, **29**, 57 (2007).
- [17] J. M. Fonseca, "*Algumas Peculiaridades da Radiação Associada à uma Eletrodinâmica que Viola a Simetria de Lorentz*". Dissertação de Mestrado, UFV (2009).
- [18] V. A. Kostelecký, "*Topics in Lorentz and CPT Violation*", arXiv:hep-ph/0104227v1, IUHET 431, Feb. (2001).
- [19] V. A. Kostelecký, "*The Status of CPT*", arXiv:hep-ph/9810365v1 15 Oct. (1998).
- [20] Nobel Prize <http://nobelprize.org/nobel-prizes/physics/laureates/>.
- [21] O. W. Greenberg "*CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance*" Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [22] R. Eijnisman, N. P. Bigelow, "*Violação de Paridade em Átomos*", Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 18, no. 2, junho, (1996).
- [23] T. D. Lee and C. N. Yang "*Question of Parity Conservation in Weak Interactions*" Phys. Rev. **104** 254 (1956).

7. Referências Bibliográficas

- [24] C. Maes, K. Netocny, "*Time-Reversal and Entropy*", arXiv:cond-mat/0202501v1 [cond-mat.stat-mech] (2002).
- [25] Particle Data Group, <<http://pdg.lbl.gov/2004/reviews/cpviolrpp.pdf>>.
- [26] V.A. Kostelecký "*Em Busca de Violações na Relatividade*", Scientific American, **29**, 72 (2004).
- [27] V. A. Kostelecký and M. Mewes, "*Lorentz Violating Electrodynamics and the Cosmic Microwave Background*", Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007).
- [28] R. Bluhm, a V. A. Kostelecký, N. Russell, "*CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen*", arXiv:hep-ph/9810269v1 6 Oct. (1998).
- [29] V. A. Kostelecký, R. Lehnert, and M. J. Perry "*Spacetime-varying couplings and Lorentz violation*", arXiv:astro-ph/0212003v1 30 Nov. (2002).
- [30] A. A. Abdo et al, "*A limit on the variation of the speed of light arising from quantum gravity effects*", <http://www.nature.com/nature/journal/v462/n7271/full/nature08574.html> 28 de Outubro, (2009).
- [31] V. A. Kostelecký, "*Perspectives on Lorentz and CPT Violation*", arXiv:0802.0581v1 [gr-qc] 5 Feb. (2008).
- [32] H. Belich, "*Quebra de Lorentz em Teorias de Gauge: aplicações a Fenômenos Planares e Conseqüências da Supersimetria*", Tese de doutorado CBPF, (2003).
- [33] R. Bluhm, "*Overview of the SME: Implications and Phenomenology of Lorentz Violation*" arXiv:hep-ph/0506054v1. 6 Jun. (2005).
- [34] V. A. Kostelecký and M. Mewes, "*Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics*", arXiv:hep-ph/0111026v1 2 Nov. (2001).
- [35] V. A. Kostelecký and N. Russell, "*Data Tables for Lorentz and CPT Violation*", arXiv:0801.0287v1 [hep-ph] 1 Jan. (2008).

7. Referências Bibliográficas

- [36] V. A. Kosteleký, "*Signals for Lorentz and CPT violations in neutral-mesons oscillations*", Phys Rev. **D 61** 016002 (1999).
- [37] V. A. Kosteleký, "*Lorentz and CPT violation in neutrinos*", Phys Rev. **D 69** 016005 (2004).
- [38] R Bluhm, et al. "*CPT and Lorentz Tests with muons*", Phys Rev. Lett.**84**, 1098 (2000).
- [39] B. Altchul, "*Vacuum Cherenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation*" Phys Rev. Lett.**98**, 041603 (2007).
- [40] B. Altchul, "*Lorentz Violation and Sincrotron Radiation*", Phys Rev. **D 72** 085003 (2005).
- [41] M. Mewes and A. Petrof, "*Cavity Tests of Parity-Odd Lorentz Violations in Electrodynamics*", Phys. Rev. **D 75**, 056002 (2007).
- [42] M. E. Tobar et al., "*New Methods of Testing Lorentz Violation in Electrodynamics*", Phys. Rev. **D 71**, 025004 (2005).
- [43] A. H. Gomes, J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, A. R. Pereira, "*Testing CPT- and Lorentz-odd electrodynamics with waveguides*", arXiv:0909.2854v1 [hep-th] 15 Sep. (2009).
- [44] J. C. Maxwell, "*A Treatise on Electricity and Magnetism*", Dover, New York, (1892).
- [45] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, and C. E. H. Santos, "*Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics*", Phys Rev. **D 78**, 025030 (2008).
- [46] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, and C. E. H. Santos, "*Classical solutions for the Lorentz-violating and CPT-even term of the standard model extension*", Phys. Rev. **D 78**, 105014 (2008).
- [47] F. R. Klinkhammer "*New Indirect Bounds on Lorentz Violation in the Photon Sector*", arXiv:0810.1446v3 [hep-ph] 27 Oct. (2008).

7. Referências Bibliográficas

- [48] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr, and Carlos E. H. Santos "*Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics*", Phys. Rev. **D 78**, 025030 (2008).
- [49] A.P. Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, "*Gauge invariance and the CPT and Lorentz violating induced ChernSimons-like term in extended QED*", Eur. Phys. J. C **56**: 571578 (2008).
- [50] N. M. Barraç Junior, "*Monopolos Magnéticos numa Eletrodinâmica com violação das simetrias de Lorentz e CPT*", Dissertação de mestrado, UFV, (2007).
- [51] A. H. Gomes, "*Propagação de ondas eletromagnéticas em meios confinados obedecendo a uma eletrodinâmica em (3+1) dimensões que viola a simetria de Lorentz*", Monografia, UFV (2007).
- [52] W. A. Moura-Melo, "*Aspectos Peculiares das Eletrodinâmicas de Maxwell e Maxwell Chern-Simons Planares*", Tese de Doutorado, CBPF (2001).
- [53] Q. G. Bailey and V. A. Kostelecký, "*Lorentz-Violating Electrostatics and Magnetostatics*", arXiv:hep-ph/0407252v1 21 Jul. (2004).
- [54] V. A. Kostelecký and M. Mewes "*Signals for Lorentz Violation in Electrodynamics*", Phys. Rev. **D 66** 056005 (2002).
- [55] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, and A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro, "*Gauge propagator and physical consistency of the CPT-even part of the Standard Model Extension*", arXiv:0909.0544v2 [hep-th] 8 Sep. (2009).
- [56] V. A. Kostelecký and M. Mewes "*Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violation in gamma ray bursts*" Phys. Rev. Lett **97**, 140401 (2006).
- [57] F. R. Klinkhammer, "*Ultrahigh-Energy Cosmic Ray Bounds on Nonbirefringent Modified Maxwell Theory*", Phys. rev D, **77** 016002 (2008).
- [58] V. A. Kostelecký and R. Lehnert, "*Stability, Causality and Lorentz and CPT Violation*" Phys. Rev. **D 63**, 065008 (2001).

7. Referências Bibliográficas

- [59] J. D. Jackson, "*Classical Electrodynamics*", Wiley, New York, Third Edition (1999).
- [60] D. J. Griffiths, "*Introduction to Electrodynamics*", Prentice Hall, Third Edition, (1999).
- [61] H. J. W. Müller-Kirsten, "*Electrodynamics: An Introduction Including Quantum Effects*", World Scientific Publishing, (2004).
- [62] G. F. L. Ferreira, "*O Guia de Onda Via Potenciais*", Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 21, no. 3, Setembro, (1999).
- [63] Zhi-Yong Wang, Cai-Dong Xiong, "*Photons inside a waveguide as massive particles*", arXiv:0708.3519v4[quant-ph] 19 Aug. (2008).

Apêndice A - Alguns Resultados da Eletrodinâmica Usual no Guia de Onda Retangular

Apresentamos aqui alguns resultados da eletrodinâmica usual no guia de onda retangular. Tais resultados podem ser facilmente encontrados na literatura, como em [17, 60, 61].

Se tivermos ondas monocromáticas que se propagam na direção z que escolhemos como sendo o eixo do guia. Temos campos com a forma:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}_o(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \vec{B}_o(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Sendo $\vec{E}_o(x, y)$ e $\vec{B}_o(x, y)$ as amplitudes dos campos, que só dependem de x e y . Podemos reescrevê-las da seguinte forma:

$$\vec{E}_o = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}, \quad \vec{B}_o = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad (\text{A.2})$$

Considerando a forma geral para ondas planas, equações (A.1), como soluções das equações de Maxwell na ausência de fontes, podemos então determinar as amplitudes dos campos, eqs. (A.2), para essas equações e desta maneira determinaremos os campo elétrico e magnético, dados pelas eqs. (A.1). Uma maneira de fazer isso é utilizar (A.1) nas equações para as componentes x e y para o rotacional de $\vec{E}(x, y, z, t)$ e $\vec{B}(x, y, z, t)$, e por conseguinte, escrever as componentes x e y das amplitudes dos campos (A.2), em função da componentes na direção z e suas derivadas:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_x E_z + \omega \partial_y B_z) \\ E_y &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_y E_z - \omega \partial_x B_z) \\ B_x &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_x E_z - \omega \partial_y B_z) \\ B_y &= \frac{i}{\omega^2 - k^2} (k \partial_y E_z + \omega \partial_x B_z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo novamente nas equações de Maxwell restantes se obtêm as equações diferenciais lineares e desacopladas para os campos axiais:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2) E_z = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \omega^2 - k^2) B_z = 0 \quad (\text{A.5})$$

Modo Transverso Magnético (TM)

A equação que determina a forma dos campos axiais neste caso é (A.4). As soluções $E_z(x, y)$ para esta equação são bem conhecidas [59–61]. Aplicando as condições de contorno (3.1), obtemos:

$$E_z = E_0 \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (\text{A.6})$$

em que m e n são números inteiros e E_0 é uma constante com dimensão do campo elétrico.

A relação de dispersão é

$$\omega^2 = k^2 + (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \quad (\text{A.7})$$

A frequência de corte ω_{mn} , que limita inferiormente os valores possíveis de frequência para as ondas do guia é:

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (\text{A.8})$$

O modo de menor frequência é $\omega_{10} = \pi/a$. Para frequências abaixo deste valor as ondas não se propagam no guia de onda em questão, pois isto leva um vetor de onda imaginário, o que significa uma atenuação.

A velocidade de fase e de grupo em unidades SI são:

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = c \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}} > c \quad (\text{A.9})$$

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega} = c \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2} < c \quad (\text{A.10})$$

Aqui vemos que a velocidade de fase é superior à velocidade da luz no vácuo. A velocidade de grupo é mesma velocidade de transporte de energia e é inferior à c .

Modo Transverso Elétrico (TE)

No modo chamado TE em que a componente E_z do campo elétrico se anula. Temos a seguinte solução para (A.4) dadas as condições de contorno do guia (3.1)

$$B_z = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \quad (\text{A.11})$$

em que m e n são números inteiros e B_0 é constante com dimensão de campo magnético.

A relação de dispersão, a frequência de corte, a velocidade de fase e de grupo têm formas análogas às da seção anterior e podem ser encontradas também em [17, 60, 61].

Sobre as Soluções da Eletrodinâmica Usual

As soluções destas equações diferenciais são bem conhecidas na literatura, tanto para o caso geral quanto para os modos TE e TM que são mais simples, usando as condições de contorno (3.1) [17, 60, 61].

Uma interpretação alternativa vinda de um tratamento de mecânica quântica relativística, permite escrever as equações de Maxwell na forma espinorial, uma equação tipo-Dirac, cujas soluções possíveis são bi-espinores que carregam os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Este tipo de análise permite interpretar fisicamente que o comportamento das ondas

Apêndices

dentro de um guia de onda é similar à ondas de matéria de de Broglie e os fótons guiados podem ser tratados como partículas massivas livres. Outras possíveis origens para tal “massa” são comentadas na Ref. [63].

Apêndice B - Alguns Resultados da Eletrodinâmica Usual no Guia de Onda tipo Cabo Coaxial

As equações de Maxwell usuais no modo TEM (2.4) são:

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x = 0 \quad (\text{B.4})$$

Estas são equações da eletrostática com soluções bem conhecidas. A parte real dos campos elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas (s, ϕ, z) são respectivamente:

$$\vec{E}(s, \phi, z, t) = \frac{A_0}{s} \cos(kz - \omega t) \hat{s} \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{B}(s, \phi, z, t) = \frac{A_0}{cs} \cos(kz - \omega t) \hat{\phi} \quad (\text{B.6})$$

O fluxo de energia que atravessa a seção reta do guia é dada pela média temporal do vetor de Poynting:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{A_0^2}{2cs^2} \quad (\text{B.7})$$

em que A_0 é uma constante (a amplitude). A potência irradiada (média temporal) calculada pela integral do vetor de Poynting sobre a área transversal do guia é:

$$\langle P \rangle = \frac{\pi A_0^2}{c} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{B.8})$$