

DAYANE ANDRADE QUEIRÓZ

CATEGORIAS CLUSTER

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS-BRASIL
2015**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

Q3c
2015

Queiróz, Dayane Andrade, 1990-

Categorias Cluster / Dayane Andrade Queiróz. – Viçosa,
MG, 2015.

v, 82f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Rogério Carvalho Picanço.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.81-82.

1. Álgebras. 2. Álgebras Cluster. 3. Teoria Tilting.
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 512

DAYANE ANDRADE QUEIRÓZ

CATEGORIAS CLUSTER

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de janeiro de 2015.

Edson Ribeiro Alvares

Sônia Maria Fernandes

Rogério Carvalho Picanço
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus, por ter me dado saúde, força, coragem e determinação para enfrentar as dificuldades encontradas ao longo desta caminhada e conquistar este sonho em minha vida.

Aos meus pais, Maria Leonicia e Evangelista, pelo amor, carinho, educação e incentivo que sempre me proporcionaram fazendo com que eu tivesse forças para atingir meus objetivos, mesmo estando distante.

À minha irmã, Daniela, pelas palavras de carinho e apoio.

À meu namorado, Rafael, pelo amor, companheirismo e compreensão que teve comigo durante todo este tempo.

Aos meus amigos Erasmo, Grazielle e Loughas que iniciaram comigo esta caminhada, mas por vontade de Deus trilharam outro caminho, em especial a meu grande amigo Erasmo, pelo carinho, ajuda e incentivo.

Aos meus colegas de mestrado, Lizeth, Flávio, Cris, Lázaro, Glelson, Sabrina, Marcelo e Ygor pelos bons momentos que vivemos juntos.

Ao professor, Sebastião, da Universidade Estadual de Montes Claros com quem muito aprendi e foi quem primeiro me incentivou a fazer mestrado.

Ao meu orientador, Rogério, pelos ensinamentos, incentivo, ajuda, paciência e exemplo de pessoa e profissional que é.

Aos docentes e à coordenação do programa, em especial a professora, Marinês, com quem tive a oportunidade de muito aprender.

Aos membros da banca, Edson e Sônia, pelo interesse e disposição em participar e colaborar com este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
INTRODUÇÃO	1
1 Conceitos Básicos	3
1.1 Quivers e Álgebras de Caminhos	3
1.1.1 O quiver de uma álgebra de dimensão finita	6
1.2 Representação de Quivers	7
1.2.1 Módulos simples, projetivos e injetivos	9
1.3 Classificação de Quivers com Finitas Representações Indecomponíveis	10
1.4 Categorias e Funtores	12
1.4.1 Categoria Derivada	17
1.5 Teoria de Auslander-Reiten	20
1.6 Categorias Trianguladas	22
2 Álgebras Cluster	26
2.1 Mutação e Sementes	27
2.1.1 Mutação de um quiver	27
2.1.2 Sementes	29
2.1.3 Álgebras Cluster	32
2.2 Álgebras Cluster e Representações de Quiver	35
3 Categorias Cluster	38
3.1 Categorificação das álgebras cluster	38
3.1.1 Teoria Tilting para módulos	39
3.2 Skew-Categorias	41
3.3 Categorias Órbitas	42
3.4 Categorias Cluster	44
3.5 Teoria Tilting em categorias cluster	52
3.6 Objetos Tilting e Módulos Tilting	55
3.7 Relação entre Álgebras cluster e Categorias cluster	63
4 Aplicações dos resultados	66
4.1 Caso D_4	66
4.2 Caso quiver acíclico não Dynkin simples	77
Referências Bibliográficas	81

RESUMO

QUEIROZ, Dayane Andrade, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, janeiro de 2015. **Categorias Cluster**. Orientador: Rogério Carvalho Picanço.

Neste trabalho apresentamos as categorias cluster, que foram introduzidas por Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten e Gordana Todorov, com o objetivo de categorificar as álgebras cluster criadas em 2002 por Sergey Fomin e Andrei Zelevinsky. Os autores acima, em [4], mostraram que existe uma estreita relação entre álgebras cluster e categorias cluster para quivers cujo grafo subjacente é um diagrama de Dynkin. Para isto desenvolveram uma teoria tilting na estrutura triangulada das categorias cluster. Este resultado foi generalizado mais tarde por Philippe Caldero e Bernhard Keller em [8] para quivers do tipo acíclico. O objetivo principal desta dissertação é estudar como a teoria tilting sobre cluster permite estabelecer a relação entre estas estruturas e apresentar exemplos.

ABSTRACT

QUEIROZ, Dayane Andrade, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, January, 2015.
Cluster Categories. Adviser: Rogério Carvalho Picanço.

In this work we present the cluster categories, which were introduced by Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten and Gordana Todorov, with objective of categorification cluster algebras created in 2002 by Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. The authors above, on [4], showed that there is a close relationship between cluster algebras and cluster categories for quivers whose underlying graph is a Dynkin diagram. For this they developed a tilting theory in the triangulated structure of the cluster categories. This result was later generalized by Philippe Caldero and Bernhard Keller on [8] for quivers of the acyclic type. The main objective of this dissertation is to study how the tilting theory about cluster enables establish the relationship between these structures and present examples.

INTRODUÇÃO

Álgebras cluster foram introduzidas no ano de 2002 por Sergey Fomin e Andrei Zelevinsky em [11] e [12]. Esta classe de álgebras surgiu da necessidade de se obter uma ferramenta combinatória para alguns resultados provenientes da teoria de Lie. Desde a sua criação a teoria de álgebras cluster ganhou cada vez mais espaço no mundo matemático, graças a descoberta da sua ligação com diversas outras áreas, dentre as quais podemos citar, geometria de Poisson, sistemas integráveis, geometria algébrica comutativa e não comutativa, teoria de representações de quiver, álgebras de dimensão finita, teoria de Teichmüller, superfícies trianguladas, álgebras Calabi-Yau, etc. Apesar de ser uma teoria bastante recente, no ano de 2010, o estudo de álgebras cluster recebeu o número 13F60 de classificação de área de conhecimento matemático, tornando-se ela própria um campo de pesquisa.

As categorias cluster foram introduzidas em [4] por Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten e Gordana Todorov com o objetivo de criar uma estrutura categórica para as álgebras cluster. Categorias cluster são definidas como categorias de órbitas do grupo de um conveniente autofunctor da categoria derivada. Tal como as categorias derivadas, as categorias cluster são categorias trianguladas. Para estabelecer uma conexão com as álgebras cluster, foi desenvolvida uma teoria tilting em categorias cluster, dando origem a nova classe de álgebras cluster-tilting. Propriedades das categorias cluster, como ser 2-Calabi-Yau entre outras, tem permitido nos dias de hoje novas generalizações destes resultados, permitindo aplicações em diversas áreas da Matemática, da Física Teórica etc. Apesar de terem sido criadas para categorificar as álgebras cluster, as categorias cluster se tornaram um campo de pesquisa independente.

No artigo inicial [4], os autores mostraram a relação entre álgebras cluster e categorias cluster para quivers cujo grafo subjacente é um diagrama de Dynkin, resultado este, generalizado mais tarde, por Philippe Caldero e Bernhard Keller em [8] para quivers acíclicos. Nosso objetivo neste trabalho é estudar esta relação e apresentar por meio de aplicações explícitas, como esta relação de fato se efetiva.

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos. Apresentamos à seguir uma descrição sucinta de cada capítulo.

No capítulo 1, são apresentados alguns conceitos básicos e os principais resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Neste capítulo apresentamos conceitos de Quivers, de Álgebras de Caminhos, da Teoria de Representações de Quiver, da Teoria de Categorias e da Teoria de Auslander-Reiten.

No capítulo 2, definimos primeiramente os ingredientes necessários para se definir álgebras cluster (sem coeficientes). Posteriormente, definimos e estudamos os principais resultados e propriedades das álgebras cluster. E, finalizamos este capítulo apresentando a relação entre álgebras cluster e representações de quiver.

No capítulo 3, apresentamos as skew-categorias, das quais as categorias órbitas são casos particulares. Utilizando um conveniente autofuntor da categoria derivada, definimos as categorias cluster como categorias de órbitas do grupo gerado por este autofuntor. Estudamos e demonstramos alguns dos principais resultados e propriedades, em especial algumas propriedades homológicas, a estrutura triangulada e alguns aspectos da teoria de Auslander-Reiten em categorias cluster. Posteriormente, apresentamos a teoria tilting desenvolvida na categoria cluster e a relação entre conjuntos tilting e Ext-configurações. Na seção seguinte, introduzimos os conceitos de objetos cluster-tilting básicos e estabelecemos uma relação destes com módulos tilting básicos. Finalizamos este capítulo descrevendo algumas conexões entre álgebras cluster e categorias cluster.

Por fim, o capítulo 4 é destinado a apresentação de aplicações dos resultados vistos no decorrer do trabalho. Neste capítulo, tivemos a oportunidade de explicitar e comentar os resultados apresentados nos capítulos anteriores.

Ao longo deste trabalho a composição será escrita da esquerda para direita, isto é, denotaremos por $f \circ g$ ou fg a composição do morfismo f seguido do morfismo g .

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo introduziremos as principais definições e resultados necessários para desenvolvimento deste trabalho. Para maiores informações sobre os assuntos indicamos como referências [17], [21], [13], [14], [15] [18], [16] e [25].

1.1 Quivers e Álgebras de Caminhos

Um dos conceitos essenciais ao longo deste trabalho é o de um quiver. Informalmente um quiver nada mais é do que um grafo orientado. A denominação "quiver" ao invés de grafo orientado se justifica para não confundir a teoria de suas representações com a já bem estabelecida Teoria de Grafos. Vamos a uma definição formal.

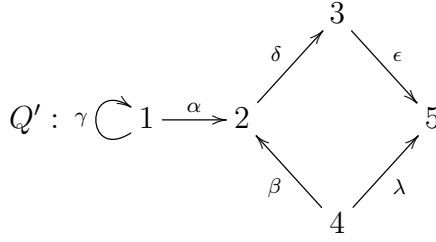
Um *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é formado por um conjunto Q_0 cujos elementos são vértices, um conjunto Q_1 cujos elementos são flechas e duas aplicações $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que associa cada flecha $\alpha \in Q_1$, os vértices $s(\alpha)$ e $t(\alpha)$ que são chamados, respectivamente, o início e o fim da flecha α . Mais adiante veremos que, um quiver é uma categoria cujos objetos são os vértices e os morfismos são os caminhos. Em geral, um quiver é representado graficamente associando cada vértice a um ponto e cada flecha α a uma seta partindo de $s(\alpha)$ e chegando em $t(\alpha)$. Usaremos as seguintes notações $\alpha : a \rightarrow b$ ou $a \xrightarrow{\alpha} b$ para denotar uma flecha $\alpha \in Q_1$ cujo início é a e fim b .

Dizemos que um quiver Q é *finito* se os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos. Além disso, Q é dito *conexo* se, esquecendo a orientação de suas flechas, obtém-se um grafo conexo, ou seja, para quaisquer dois vértices existe uma aresta ou sequência de arestas que os unem.

Exemplos 1. Q e Q' dados abaixo são exemplos de quivers finitos e conexos.

$$(a) \quad Q : 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2 \xrightarrow{\eta} 3$$

(b)



Em geral, vamos rotular o conjunto de vértices de um quiver por números naturais $\{1, 2, \dots, n\}$ e as flechas por letras gregas.

Seja Q um quiver e $i, j \in Q_0$. Um *caminho* w de comprimento $l(w) = k > 0$ no quiver Q com origem no vértice i e fim em j é uma sequência (ou justaposição) de flechas $(i|\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k|j)$ em que $\alpha_l \in Q_1$ para todo $l \in \{1, \dots, k\}$, $s(\alpha_1) = i$, $t(\alpha_k) = j$ e, para cada, $1 \leq l < k$, temos $t(\alpha_l) = s(\alpha_{l+1})$, que será denotado por:

$$i \xrightarrow{\alpha_1} s(\alpha_2) \xrightarrow{\alpha_2} s(\alpha_3) \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{k-1}} s(\alpha_k) \xrightarrow{\alpha_k} j$$

Vamos estender as aplicações s , t para caminhos. Seja $w = (i|\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k|j)$ um caminho no quiver Q , com $s(\alpha_1) = i$ e $t(\alpha_k) = j$. Definimos o início e o fim do caminho w , respectivamente, por $s(w) = i$ e $t(w) = j$.

Para cada vértice $i \in Q_0$ definimos formalmente o *caminho trivial* e_i que tem início e fim no vértice i e comprimento $l(e_i) = 0$. Um caminho de comprimento $l \geq 1$ é chamado *ciclo* se seu início coincide com seu fim. Chamamos de *loop* um ciclo de comprimento 1 e de *2-ciclos* um ciclo de comprimento 2. Um quiver que não contém ciclos é dito *acíclico*.

Seja Q um quiver e seja K um corpo algebricamente fechado¹. Denote por C o conjunto de caminhos em Q . Consideremos o K -espaço vetorial que tem como base o conjunto de caminhos C , e o denote por KQ , ou seja, KQ é formado por combinações lineares formais de caminhos em Q com coeficientes em K . Vamos definir uma álgebra neste espaço vetorial. Dados $w, v \in C$ defina a seguinte operação em KQ por:

$$\begin{cases} w.v = wv, & \text{se } t(w) = s(v) \\ w.v = 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde wv denota a justaposição dos caminhos w e v .

Munido com esta operação, obtemos uma K -álgebra associativa, em geral não comutativa, chamada *álgebra de caminhos sobre Q* . Pode-se mostrar que KQ tem identidade, a saber,

$$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$$

¹Neste trabalho, para simplificar algumas demonstrações, trabalhamos apenas com corpos algebricamente fechados. No entanto, a maior parte dos resultados não depende do corpo.

se, e somente se, Q_0 é finito. Além disso, a álgebra de caminhos sobre Q possui dimensão finita se, e somente se, Q é finito e acíclico.

Exemplos 2. (a) Seja Q o quiver

$$\alpha \curvearrowright 1$$

O conjunto dos caminhos de Q é $C = \{e_1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots\}$ que é uma base para o espaço de caminhos KQ . Podemos mostrar que, neste caso, a álgebra de caminhos KQ é isomorfa a álgebra de polinômios $K[x]$ em uma indeterminada. Basta definir o isomorfismo de álgebras levando e_1 em 1 e α em x .

(b) Seja Q o quiver

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2$$

Os caminhos em Q são dados pelo conjunto $C = \{e_1, e_2, \alpha\}$ que é uma base para o espaço de caminhos KQ . Temos a seguinte tabela de multiplicação:

$\cdot$	e_1	e_2	α
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	α
α	α	0	0

Verifica-se que a álgebra de caminhos KQ é isomorfa a álgebra das matrizes triangulares inferiores,

$$A_2(K) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}; a, b, c \in K \right\}.$$

pelo isomorfismo

$$e_1 \mapsto e_{11}, \quad e_2 \mapsto e_{22}, \quad \alpha \mapsto e_{21}.$$

De forma geral, a álgebra de caminhos de um quiver $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow \dots \longleftarrow n$ é isomorfa a álgebra de matrizes $n \times n$ triangulares inferiores.

Seja Q um quiver finito e conexo. Chamamos de *ideal de flechas* da álgebra de caminhos KQ , e denotamos por R_Q , o ideal gerado pelas flechas de Q . Denotaremos por R_Q^l o ideal de KQ gerado, como um K -espaço vetorial, por todos os caminhos de comprimento maior ou igual a l . Um ideal bilateral I da álgebra de caminhos KQ é chamado *admissível* se existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subset I \subset R_Q^2$.

O ideal nulo é admissível em KQ se, e somente se, Q é um quiver acíclico. De fato, o ideal nulo é admissível em KQ se, e somente se, existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m = 0$, ou seja, o produto de m flechas em KQ é igual a zero. Isso acontece se, e somente se, o quiver é acíclico.

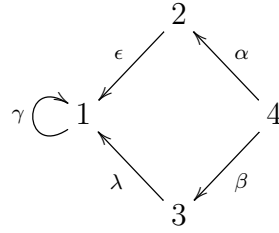
Uma K -combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois com mesma origem e fim em Q é chamada uma *relação*. Assim, a relação ρ é um elemento de KQ da seguinte forma:

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

em que $\lambda_i \in K$, λ_i não todos nulos, w_i são caminhos em Q , com $l(w_i) \geq 2$, tal que $s(w_i) = s(w_j)$ e $t(w_i) = t(w_j)$ para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Dizemos que uma relação é *nula* se $m = 1$ e *comutativa* se é da forma $\rho = w_1 - w_2$, em que w_1 e w_2 são dois caminhos.

Seja $I = \langle \rho_i / i \in J \rangle$ um ideal admissível em que $\{\rho_i\}_{i \in J}$ são relações. Dizemos que (Q, I) é um *quiver com relações* ou *limitado pelas relações* $\rho_i = 0$ para todo $i \in J$. A álgebra quociente KQ/I é chamada *álgebra de caminhos sobre o quiver com relações*.

Exemplo 3. Consideremos Q o quiver



Pode-se mostrar sem dificuldades que o ideal $I = \langle \alpha\epsilon - \beta\lambda, \epsilon\gamma, \gamma^3 \rangle$ é admissível. Por outro lado, $J = \langle \epsilon\gamma, \alpha\epsilon - \beta\lambda \rangle$ não é admissível, pois para todo natural n segue que $\gamma^n \notin J$. Logo, não existe n tal que $R_Q^n \subset J$. (Veja exemplo 2.2, capítulo II, em [17]).

1.1.1 O quiver de uma álgebra de dimensão finita

Definição 4. Seja A uma K -álgebra associativa e de dimensão finita e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. Dizemos que a álgebra A é *básica* se $e_i A \not\cong e_j A$, para todo $i \neq j$, em que $e_l A$ são A -módulos à direita projetivos, com $l \in \{1, \dots, n\}$.

É conhecido que dada uma K -álgebra A associativa e de dimensão finita que admite conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$, existe uma K -álgebra A^b tal que as categorias de A -módulos e A^b -módulos são equivalentes, ou seja, $\text{mod} A \cong \text{mod} A^b$. Dessa forma, o estudo de representações de álgebras associativas e de dimensão finita pode-se restringir as álgebras básicas.

Definição 5. Seja A uma K -álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Consideremos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A . Definimos o *quiver ordinário* Q_A de A por:

- (a) Os vértices de Q_A são rotulados pelos números $\{1, 2, \dots, n\}$ que estão em bijeção com os idempotentes $e_1, e_2, \dots, e_n$.
- (b) As flechas $\alpha : a \rightarrow b$ de Q_A estão em bijeção com os vetores da base do espaço vetorial $e_a \left(\frac{\text{rad} A}{\text{rad}^2 A} \right) e_b$ sobre o corpo K .

Teorema 6. *Seja A uma K -álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Então existe um ideal admissível I de KQ_A tal que $A \simeq KQ_A/I$.*

Pelo Teorema 6 o estudo de representações de álgebras associativas de dimensão finita pode ser feito pelo estudo das álgebras de caminhos de quivers com relações, finitos e conexos. Esta será a abordagem feita ao longo deste texto.

1.2 Representação de Quivers

Seja Q um quiver e seja K um corpo algebricamente fechado. Uma *representação* $V = (V_i, T_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ do quiver Q é um funtor da categoria Q na categoria de espaços vetoriais. Em outras palavras, uma representação V é um diagrama de espaços vetoriais com a mesma forma do quiver Q , em que para cada vértice i associa-se um espaço vetorial V_i e, para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ associa-se uma transformação linear $T_\alpha : V_i \rightarrow V_j$. Dizemos que uma representação é de dimensão finita se cada V_i , com $i \in Q_0$, tem dimensão finita. Sejam $V = (V_i, T_\alpha)$ e $V' = (V'_i, T'_\alpha)$ duas representações do quiver Q . Um *morfismo de representações* $\phi : V \rightarrow V'$ é uma transformação natural entre os respectivos funtores. Em outras palavras, $\phi : V \rightarrow V'$ é um conjunto de aplicações lineares $\{\phi_i : V_i \rightarrow V'_i\}_{i \in Q_0}$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{T_\alpha} & V_j \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_j \\ V'_i & \xrightarrow{T'_\alpha} & V'_j \end{array}$$

é comutativo para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Q_1 .

A *composição* $\phi\psi$ de dois morfismos $\phi : V \rightarrow V'$ e $\psi : V' \rightarrow V''$ é definido pontualmente em cada aplicação linear, ou seja, se $\phi = \{\phi_i\}_{i \in Q_0}$ e $\psi = \{\psi_i\}_{i \in Q_0}$ então $\phi\psi = \{\phi_i\psi_i\}_{i \in Q_0}$. Obtemos uma categoria de representações do quiver Q e a denotaremos por $\text{Rep}(Q)$. Denotaremos por $\text{rep}(Q)$ a categoria de representações de dimensão finita de Q .

Exemplo 7. Seja Q o quiver

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$$

e seja K um corpo. Então,

$$K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K, \quad K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{0} 0 \quad \text{e} \quad K^2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} K^3 \xleftarrow{0} 0$$

são representações de Q .

Não é difícil verificar que as categorias $\text{Rep}(Q)$ e $\text{rep}(Q)$ são categorias abelianas. Núcleo e conúcleo de morfismos, somas diretas, objetos nulos são definidos de forma natural, pontualmente em cada vértice.

Dizemos que uma representação V é *indecomponível* se é não-nula e, em cada decomposição $V = V' \oplus V''$, temos $V' = 0$ ou $V'' = 0$, caso contrário, chamamos V de *decomponível*.

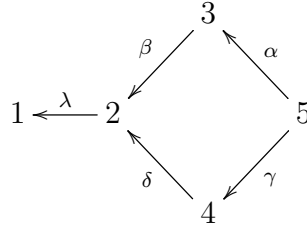
Definimos o *vetor dimensão* de uma representação V como a n -upla $\dim V = [\dim V_i]_{i \in Q_0}$ das dimensões de V_i , com $i \in Q_0$.

Seja Q um quiver finito e $V = (V_i, T_\alpha)$ uma representação de Q . A *avaliação* de V sobre um caminho $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k : i \rightarrow j$ é a aplicação linear $T_w : V_i \rightarrow V_j$ definida por $T_w = T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \dots T_{\alpha_k}$.

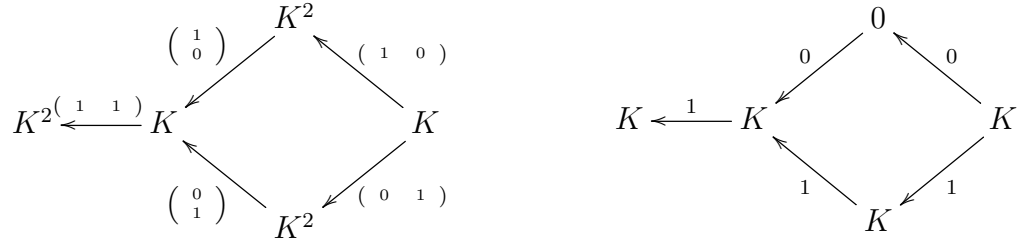
Seja Q um quiver finito e consideremos I um ideal admissível em KQ . Uma representação do quiver com relações (Q, I) é uma representação $V = (V_i, T_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ cuja avaliação sobre qualquer relação em I é nula, ou seja,

$$T_\rho = 0, \text{ para todo } \rho \in I.$$

Exemplo 8. Seja Q o quiver



limitado pela relação comutativa $\alpha\beta = \gamma\delta$. Consideremos as representações V e V' de Q dadas, respectivamente, por



A primeira é uma representação de (Q, I) , porém a segunda não o é.

Como vimos anteriormente o estudo de representações de álgebras, ou de seus módulos, se restringe ao estudo de álgebras de caminhos sobre quivers com relações. Uma relação similar é dada no próximo teorema em que o estudo de módulos é equivalente ao estudo de representações de quivers. Neste trabalho utilizamos módulos à direita.

Seja A uma K -álgebra básica, conexa e de dimensão finita.

Teorema 9. *Seja $A = KQ/I$, onde Q é um quiver conexo, finito e I é um ideal admissível de KQ . Existe uma K -equivalência linear de categorias*

$$F : \text{Mod} A \xrightarrow{\simeq} \text{Rep}(Q)$$

que se restringe a equivalência

$$F : \text{mod} A \xrightarrow{\simeq} \text{rep}(Q).$$

Demonstração: Teorema 1.6, capítulo III em [17]. □

Assim, pelo Teorema 9, estudar a categoria de A -módulos sobre uma álgebra A associativa e de dimensão finita é equivalente a estudar a categoria de representações de um quiver com relações. Esse resultado é muito útil, pois esta equivalência nos permite extrair informações de categorias de A -módulos na categoria de representações de quivers, que envolvem espaços vetoriais e transformações lineares.

A partir dos resultados desta seção, passaremos a considerar álgebras sendo álgebras de caminhos sobre um quiver Q conexo e finito e módulos como suas representações.

1.2.1 Módulos simples, projetivos e injetivos

A partir das equivalências citadas na seção anterior é interessante obtermos uma caracterização dos A -módulos simples, projetivos e injetivos de uma álgebra A na linguagem de representações de quivers.

Seja (Q, I) um quiver com n vértices limitado pelo ideal admissível I de KQ . Consideremos $A = KQ/I$ a respectiva K -álgebra. Para cada vértice $i \in Q_0$, definimos o A -módulo simples S_i pela representação $S_i = ((S_i)_j, (T_i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ dada por:

$$(S_i)_j = \begin{cases} K, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (T_i)_\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in Q_1.$$

Prova-se que se Q é um quiver acíclico, estes são todos os A -módulos simples. (Veja seção III.2, capítulo III, em [17]).

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. Os A -módulos projetivos indecomponíveis $P_i = e_i A$, com $i \in Q_0$, são dados pelas representações $P_i = ((P_i)_j, (T_i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, em que,

- para cada vértice j , $(P_i)_j$ é o espaço vetorial cuja base é o conjunto $\{\bar{w} = w + I \mid w : i \rightarrow j\}$, em que w é um caminho, e;
- para cada flecha $\alpha : j \rightarrow k$ temos a K -aplicação linear $(T_i)_\alpha : (P_i)_j \rightarrow (P_i)_k$ definida pela multiplicação à direita por $\bar{\alpha}$, ou seja, para cada $x \in (P_i)_j$, $(T_i)_\alpha(x) = x\bar{\alpha}$.

De forma dual, definimos o A -módulo injetivo indecomponível I_i , com $i \in Q_0$, pela representação $I_i = ((I_i)_j, (T_i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, em que,

- para cada vértice j , $(I_i)_j$ é o espaço vetorial com base $\{\bar{w} = w + I \mid w : j \rightarrow i\}$, onde w é um caminho, e;
- para cada flecha $\alpha : j \rightarrow k$ temos a K -aplicação linear $(T_i)_\alpha : (I_i)_j \rightarrow (I_i)_k$ definida pela multiplicação à esquerda por $\bar{\alpha}$, ou seja, $(T_i)_\alpha(x) = \bar{\alpha}x$, para todo $x \in (I_i)_j$.

Exemplo 10. (a) Seja Q o quiver de Kronecker $1 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 2$. Temos os KQ -módulos

simples dados pelas seguintes representações $S_1 = K \xrightleftharpoons[0]{0} 0$ e $S_2 = 0 \xrightleftharpoons[0]{0} K$. Note que $S_1 = P_1$ é projetivo indecomponível.

(b) Seja Q o quiver $1 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 2 \xrightleftharpoons[\gamma]{\delta} 3$ limitado pelas relações $\delta\alpha = 0$ e $\gamma\beta = 0$.

As representações projetivas de Q são as seguintes $P_1 = K \xrightleftharpoons[0]{0} 0 \xrightleftharpoons[0]{0} 0$,

$$P_2 = K^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightleftharpoons[0]{0} K \xrightleftharpoons[0]{0} 0 \text{ e } P_3 = K^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightleftharpoons[0]{0} K^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K.$$

(c) Considerando o mesmo quiver do item anterior temos as seguintes repre-

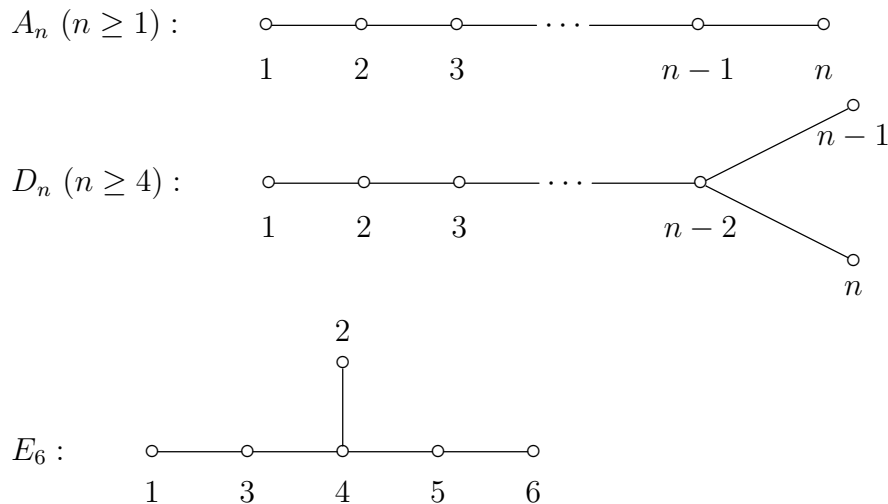
sentações injetivas $I_1 = K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightleftharpoons[0]{0} K^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightleftharpoons[0]{0} K^2$, $I_2 = 0 \xrightleftharpoons[0]{0} K \xrightleftharpoons[0]{0} K^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

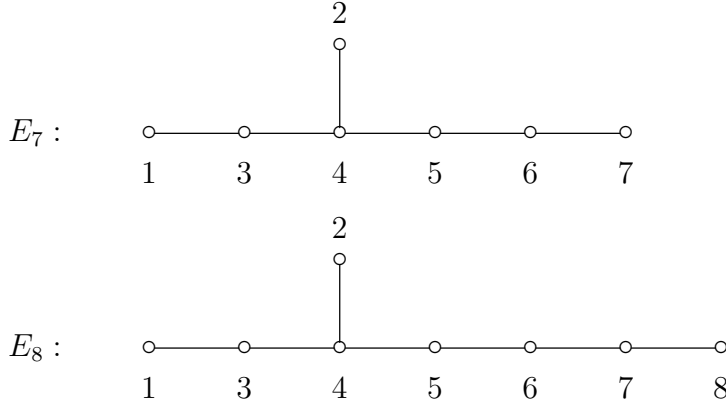
$$I_3 = 0 \xrightleftharpoons[0]{0} 0 \xrightleftharpoons[0]{0} K.$$

1.3 Classificação de Quivers com Finitas Representações Indecomponíveis

A categoria de representações de quivers, sendo equivalente a de módulos sobre álgebra de caminhos, satisfaz o Teorema de Krull-Schmidt, ou seja, toda representação pode ser escrita, de forma única a menos de permutação de índices e isomorfismo, como soma direta de representações indecomponíveis. Em vista disto, é natural obter uma classificação dos quivers cujo número de classes de representações indecomponíveis é finito. Para quivers sem relações, esta classificação é dada pelo Teorema de Gabriel e para tal são importantes os grafos de Dynkin, a seguir relacionados.

Os grafos descritos abaixo, são chamados *grafos de Dynkin simples*.





Seja Q um quiver com vértices $\{1, \dots, n\}$, conexo e acíclico e seja $\mathbb{Z}^n$ o grupo abeliano livre cuja base canônica é dada por $\{e_1, \dots, e_n\}$, em que e_i tem coordenadas nulas com exceção da i -ésima que é igual a 1. Denotaremos os elementos de $\mathbb{Z}^n$ como n-uplas.

A forma quadrática $q_Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ que associa cada n-upla $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ um número inteiro, definida por:

$$q_Q(v) = \sum_{i \in Q_0} v_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} v_{s(\alpha)} v_{t(\alpha)}$$

é chamada *forma de Tits*.

Por exemplo, consideremos o quiver de Kronecker $Q : 1 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 2$. A forma de Tits de Q é dada por:

$$q_Q(v) = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2$$

Considerando o vetor $v = [-7, 4] \in \mathbb{Z}^2$, temos:

$$q_Q(v) = (-7)^2 + 4^2 - 2(-7)4 = 121.$$

Uma n-upla $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ é dita *positiva* se é não nula e tem coordenadas $v_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Similarmente, uma n-upla $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ é dita *negativa* se é não nula e tem coordenadas $v_i \leq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

A forma de Tits q_Q é chamada *positiva definida* se para toda n-upla não nula $v \in \mathbb{Z}^n$ temos $q_Q(v) > 0$. Se $q_Q(v) = 1$ dizemos que a n-upla v é uma *raiz* de q_Q . Denotaremos por Φ , Φ^+ e Φ^- , respectivamente, o conjunto de todas as raízes, o conjunto das raízes positivas e o conjunto das raízes negativas.

Claramente todas as n-uplas da base canônica são raízes positivas de q_Q .

Observe que a forma de Tits depende apenas de grafo subjacente Δ do quiver Q , independentemente da orientação das flechas de Q .

Com estas definições temos o seguinte teorema que tem um papel fundamental na classificação dos quivers com representação de tipo finita.

Teorema 11 (Gabriel [18]). *Seja Q um quiver finito conexo e K um corpo algebricamente fechado. São equivalentes:*

- (i) Q tem finitas representações indecomponíveis, a menos de isomorfismo;
- (ii) q_Q é positiva definida;
- (iii) O grafo subjacente de Q é um diagrama de Dynkin Δ simples.

Além disso, neste caso, a aplicação levando uma representação em seu vetor dimensão é uma bijeção do conjunto de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis ao conjunto de raízes positivas da forma de Tits q_Q .

Dizemos que uma álgebra A é *hereditária* se todo submódulo de módulo projetivo indecomponível finitamente gerado é ainda projetivo. Uma caracterização destas álgebras é dada pelas álgebras de caminhos de um quiver finito, conexo e acíclico.

O Teorema de Gabriel acima classifica ainda as álgebras hereditárias que tem finitas representações indecomponíveis, a menos de isomorfismo.

Observação 12. Pode-se mostrar que se Q é um quiver conexo cujo grafo subjacente Δ é um diagrama de Dynkin simples então as raízes positivas de q_Q estão em bijeção com as raízes positivas do sistema de raízes Φ associado com Δ dada pela aplicação que leva uma raiz positiva v de q_Q no elemento

$$\sum_{i \in Q_0} v_i \alpha_i$$

do reticulado de raízes de Φ .

1.4 Categorias e Funtores

Nesta seção apresentaremos sucintamente as principais definições e resultados sobre categorias. Para maiores informações sobre o assunto consultar [21], [17] e [16].

Na teoria (ingênua) de conjuntos, estes são definidos pelas propriedades que seus elementos satisfazem. Brevemente falando, na linguagem das categorias, objetos são definidos pela forma com que se relacionam com outros, sem precisarmos olhar "dentro" deles. Esta linguagem, introduzida em 1942, por Saunders Mac Lane, ganha cada vez mais espaço na Matemática contemporânea.

Definição 13. Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

- (C1) uma classe de objetos $\text{Ob } \mathcal{C}$ ², também denotados simplesmente por $\mathcal{C}$;
- (C2) para cada par (X, Y) de objetos em $\mathcal{C}$, temos um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, cujos elementos são chamados *morfismos*, tal que se $(X, Y) \neq (Z, W)$, então os conjuntos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ são disjuntos, ou seja, cada morfismo tem "início" e "fim" bem definidos;

²Para evitarmos problemas com a Teoria de Conjuntos, tais como, paradoxo de Russell, neste trabalho assumiremos sempre que $\text{Ob } \mathcal{C}$ será um conjunto contido num conjunto universo.

(C3) para cada tripla $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ existe uma aplicação:

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g = fg \end{aligned}$$

chamada *composição* satisfazendo as seguintes condições:

- (i) se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, então $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, ou seja, a composição é "associativa".
- (ii) para cada $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, existe $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ chamado *morfismo identidade* em X , tal que $1_X f = f$ e $g 1_X = g$ para quaisquer $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$.

Denotaremos um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, por $f : X \rightarrow Y$.

Exemplos 14. (a) A categoria **Sets** cujos objetos são conjuntos, os morfismos são as funções entre conjuntos e a composição é a composição ordinária de funções.

(b) A categoria **Grp** cujos objetos são os grupos, os morfismos são dados pelos homomorfismos de grupos e a composição é a composição de homomorfismos. **Ab** é um outro exemplo de categoria cujos objetos são os grupos abelianos. Em breve veremos que, neste caso, **Ab** é uma subcategoria de **Grp**.

(c) A categoria **Vect_K**, em que K é um corpo. Os objetos de **Vect_K** são os K -espaços vetoriais e os morfismos são as transformações lineares. A composição é definida pela composição usual de aplicações.

Chamamos de *categoria oposta* de uma categoria $\mathcal{C}$ e, denotamos por $\mathcal{C}^{op}$, a categoria cujos os objetos são os objetos de $\mathcal{C}$, morfismos são dados por:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

e a composição é definida de maneira óbvia.

Conceitos definidos na categoria oposta $\mathcal{C}^{op}$ produzem um conceito dual em $\mathcal{C}$.

Definição 15. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma categoria $\mathcal{C}'$ é chamada uma *subcategoria* de $\mathcal{C}$ se são válidas as seguintes condições:

- (a) a classe $\text{Ob } \mathcal{C}'$ é uma subclasse de $\text{Ob } \mathcal{C}$;
- (b) se $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}'$, então $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
- (c) a composição em $\mathcal{C}'$ é a restrição da composição em $\mathcal{C}$;
- (d) para cada $X \in \text{Ob } \mathcal{C}'$ o morfismo identidade $1'_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$ é o mesmo morfismo identidade $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é dita *completa*, se em (b) temos $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para quaisquer objetos X, Y em $\mathcal{C}'$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é dito um *monomorfismo* (mono) se, e somente se, $gf = hf$ implica $g = h$, para quaisquer $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. Dualmente, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é dito um *epimorfismo* (epi) se, e somente se, $fg = fh$ implica $g = h$ para $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo se, e somente se, existe $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que $fg = 1_X$ e $gf = 1_Y$. É fácil ver que todo isomorfismo é mono e epi. A recíproca, em geral, não é verdadeira.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e considere X_1, X_2 objetos em $\mathcal{C}$. Chamamos de *produto* dos objetos X_1, X_2 em $\mathcal{C}$ a tripla $(X_1 \times X_2, \pi_1, \pi_2)$, em que, $X_1 \times X_2 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e $\pi_j : X_1 \times X_2 \rightarrow X_j$, para $j = 1, 2$, satisfazendo a seguinte propriedade universal. Para cada objeto $W \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e morfismos $f_j : W \rightarrow X_j$, para $j = 1, 2$, existe um único morfismo $f : W \rightarrow X_1 \times X_2$ tal que $f\pi_j = f_j$ para todo $j \in \{1, 2\}$, ou seja, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & f_1 \swarrow & \downarrow f & \searrow f_2 & \\ X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \end{array}$$

é comutativo. O conceito dual de produto dos objetos X_1, X_2 em $\mathcal{C}$ é chamado *coproduto* e, denotado por, $(X_1 \sqcup X_2, i_1, i_2)$, em que $i_j : X_j \rightarrow X_1 \sqcup X_2$ para $j = 1, 2$. Podemos estender o conceito de produto e coproduto para uma família de objetos em $\mathcal{C}$. Seja $\{X_j\}_{j \in \mathcal{F}}$ uma família de objetos em $\mathcal{C}$. O coproduto $\bigsqcup_{j \in \mathcal{F}} X_j$ da família $\{X_j\}_{j \in \mathcal{F}}$ em $\mathcal{C}$ é uma família de morfismos $i_j : X_j \rightarrow \bigsqcup_{j \in \mathcal{F}} X_j$, com $j \in \mathcal{F}$, que satisfazem a seguinte propriedade universal. Para cada objeto $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e cada família de morfismos $\{f_j : X_j \rightarrow Z\}_{j \in \mathcal{F}}$ existe um único morfismo $f : \bigsqcup_{j \in \mathcal{F}} X_j \rightarrow Z$ tal que $i_j f = f_j$ para todo $j \in \mathcal{F}$, ou seja, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{i_j} & \bigsqcup_{j \in \mathcal{F}} X_j \\ & \searrow f_j & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

é comutativo. O produto é definido de maneira dual. Como objetos universais, se o produto e o coproduto existem, então eles são únicos, a menos de isomorfismo.

Definição 16. Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita uma *Ab-Categoria* se para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ o conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um grupo abeliano e a composição de morfismos em $\mathcal{C}$

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

é bilinear com a operação deste grupo, ou seja, $f(g+h) = fg+fh$ e $(f+t)h = fh+th$, para quaisquer $f, t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Neste caso, denotamos por $0 : X \rightarrow Y$ o elemento neutro do grupo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Ab-categoria que possui produto e coproduto finito. Dados $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, consideremos o produto $(X \times Y, \pi_1, \pi_2)$ destes objetos em $\mathcal{C}$. Temos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ 1_X \swarrow & \downarrow h_1 & \searrow 0 \\ X & X \times Y & Y \\ \xleftarrow{\pi_1} & & \xrightarrow{\pi_2} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ 0 \swarrow & \downarrow h_2 & \searrow 1_Y \\ X & X \times Y & Y \\ \xleftarrow{\pi_1} & & \xrightarrow{\pi_2} \end{array}$$

daí, existem únicos morfismos $h_1 : X \rightarrow X \times Y$ e $h_2 : Y \rightarrow X \times Y$ tais que $h_1\pi_1 = 1_X$, $h_1\pi_2 = 0$ no primeiro diagrama e $h_2\pi_1 = 0$ e $h_2\pi_2 = 1_Y$ no segundo. Dessa forma, obtemos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_1} & X \sqcup Y & \xleftarrow{i_2} & Y \\ & \searrow h_1 & \downarrow h & \swarrow h_2 & \\ & & X \times Y & & \end{array}$$

Pela propriedade universal do coproduto, existe único morfismo $h : X \sqcup Y \rightarrow X \times Y$ tal que o diagrama acima é comutativo. Dizemos que os objetos X, Y em $\mathcal{C}$ possuem *biproduto* se h é um isomorfismo. O biproduto de X, Y em $\mathcal{C}$ será denotado por $X \oplus Y$. O biproduto, se existe, é caracterizado pelos morfismos

$$X \xrightleftharpoons[\pi_1]{i_1} X \oplus Y \xrightleftharpoons[\pi_2]{i_2} Y \text{ satisfazendo } i_1\pi_1 = 1_X, i_2\pi_2 = 1_Y \text{ e } \pi_1 i_1 + \pi_2 i_2 = 1_{X \oplus Y}.$$

Definição 17. Seja $\mathcal{A}$ uma Ab-categoria. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *categoria aditiva* se as seguintes condições são satisfeitas:

- (A1) a categoria $\mathcal{A}$ possui objeto nulo, denotado por 0 , isto é, os conjuntos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, 0)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(0, X)$, para qualquer objeto $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$, possuem apenas um morfismo;
- (A2) a categoria $\mathcal{A}$ possui biproduto.

Definição 18. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Um objeto X em $\mathcal{C}$ é dito *indecomponível* se X é não nulo e, em cada decomposição $X = X' \oplus X''$ temos $X' = 0$ ou $X'' = 0$. Caso contrário, o objeto X é dito *decomponível*.

Definição 19. Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita *Krull-Schmidt* se para cada objeto X em $\mathcal{C}$ existe uma decomposição

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n,$$

única, a menos de isomorfismo e permutação de índices, em que cada X_i é um objeto indecomponível em $\mathcal{C}$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria de Krull-Schmidt, denotaremos por $\text{ind}\mathcal{C}$ a subcategoria de representantes de classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis em $\mathcal{C}$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Considere $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Chamamos de *núcleo* de f ao par $(\text{Ker } f, u)$ formado por um objeto $\text{Ker } f$ juntamente com um morfismo $u : \text{Ker } f \rightarrow X$ tais que $uf = 0$ e satisfazendo a seguinte propriedade universal. Dado qualquer morfismo $h : Z \rightarrow X$ em $\mathcal{C}$ de tal forma que $hf = 0$, existe um único morfismo $h' : Z \rightarrow \text{Ker } f$ tal que $h = h'u$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \uparrow h' & \nearrow h & & \\ & Z & & & \end{array}$$

De forma dual, o *conúcleo* de f é o par $(\text{Coker } f, c)$ formado por um objeto $\text{Coker } f$ juntamente com um morfismo $c : Y \rightarrow \text{Coker } f$ tais que $fc = 0$ e satisfazendo a seguinte propriedade universal. Para qualquer morfismo $g : Y \rightarrow Z$ em $\mathcal{C}$ de tal forma que $fg = 0$, existe um único morfismo $g' : \text{Coker } f \rightarrow Z$ tal que $g = cg'$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & \text{Coker } f \\ & & \searrow g & & \downarrow g' \\ & & & & Z \end{array}$$

Podemos mostrar que o morfismo $u : \text{Ker } f \rightarrow X$, definido acima, é um monomorfismo e $c : Y \rightarrow \text{Coker } f$ é um epimorfismo.

Definição 20. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria *abeliana* se as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) $\mathcal{C}$ é aditiva;
- (b) cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ possui núcleo e conúcleo e o morfismo $\bar{f} : \text{Coker } u \rightarrow \text{Ker } c$ obtido no diagrama abaixo pelas propriedades universais de Ker e Coker é um isomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & \text{Coker } f \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \text{Coker } u & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Ker } c & & \end{array}$$

$\text{Ker } c$ é chamado *imagem* de f .

Exemplo 21. As categorias de grupos abelianos, de espaços vetoriais, e de módulos são exemplos de categorias abelianas. O isomorfismo da letra (b) na Definição 20 nestas categorias é usualmente chamado de "Teorema do Isomorfismo".

Definição 22. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um *funtor covariante* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma aplicação que associa cada objeto $X \in \mathcal{C}$ um objeto $F(X) \in \mathcal{D}$ e para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ um morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ em $\mathcal{D}$ de modo que valem as seguintes condições:

- (a) para cada $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
- (b) para cada par de morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ em $\mathcal{C}$, temos $F(fg) = F(f)F(g)$.

Um *funtor contravariante* é um funtor covariante de $\mathcal{C}^{op}$ em $\mathcal{D}$.

Exemplos 23. (a) Seja Q um quiver, Q pode ser visto como uma categoria em que os objetos são os vértices e os morfismos são os caminhos em Q . Uma representação do quiver Q é um funtor covariante da categoria Q na categoria de espaços vetoriais $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}$, em que K é um corpo. Este funtor associa cada vértice i de Q um espaço vetorial V_i e cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ uma transformação linear $T_\alpha : V_i \rightarrow V_j$.

- (b) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e considere $X \in \mathcal{C}$. O funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ é um funtor covariante que associa cada objeto $Y \in \mathcal{C}$ o grupo abeliano $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e para cada morfismo $f : Y \rightarrow Z$ o morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. O funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ é um funtor contravariante.

1.4.1 Categoria Derivada

Categorias derivadas foram introduzidas em [28] por Verdier no início da década de 1960. Um de seus objetivos foi criar uma ambiente de trabalho apropriado para o estudo das propriedades homológicas de categorias abelianas. Nesta seção, faremos uma descrição bastante sucinta de categorias derivadas, contendo apenas o suficiente para o que será necessário nos capítulos seguintes. Para uma exposição mais detalhada deixamos como referências [13], [14], [15] e [16].

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um complexo $X^\bullet = (X_i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sobre a categoria $\mathcal{A}$ é uma sequência de objetos $X_i \in \mathcal{A}$ juntamente com uma sequência de morfismos $d_X^i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{Z}$, $d_X^i d_X^{i+1} = 0$. Geralmente, escrevemos um complexo da seguinte forma:

$$X^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X_i \xrightarrow{d_X^i} X_{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X_{i+2} \xrightarrow{d_X^{i+2}} X_{i+3} \longrightarrow \cdots$$

Sejam $X^\bullet = (X_i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $Y^\bullet = (Y_i, d_Y^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ complexos sobre $\mathcal{A}$. Um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é uma coleção de morfismos $\{f^i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ tais que $d_X^i f^{i+1} = f^i d_Y^{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X_{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X_i & \xrightarrow{d_X^i} & X_{i+1} & \xrightarrow{d_X^{i+1}} & X_{i+2} & \xrightarrow{d_X^{i+2}} & X_{i+3} & \longrightarrow & \cdots \\ f^\bullet \downarrow & & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & & \downarrow f^{i+2} & & \downarrow f^{i+3} & & \\ Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & Y_{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y_i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y_{i+1} & \xrightarrow{d_Y^{i+1}} & Y_{i+2} & \xrightarrow{d_Y^{i+2}} & Y_{i+3} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Podemos mostrar que estes objetos e morfismos definem uma categoria, chamada *categoria dos complexos sobre $\mathcal{A}$* e, denotada por, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dizemos que um complexo $X^\bullet = (X_i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é limitado superiormente (respectivamente, limitado inferiormente) se existe algum $n \in \mathbb{Z}$ tal que $X_i = 0$ para todo $i > n$ (respectivamente, $i < n$). Se $X^\bullet$ é limitado superiormente e inferiormente, dizemos que $X^\bullet$ é limitado. Denotaremos por $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, respectivamente, as subcategorias de complexos limitados superiormente, inferiormente e limitados.

Proposição 24. *A categoria de complexos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ é abeliana.*

Demonstração: Proposição 2.5, em [16]. □

Seja $\mathcal{A} = \text{mod } A$ a categoria de módulos sobre uma K -álgebra A e seja $X^\bullet = (X_i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos $\text{Im } d_X^{i-1} \subset \text{Ker } d_X^i$, uma vez que $d_X^{i-1} d_X^i = 0$. Assim faz sentido definir o seguinte quociente de A -módulos em $\mathcal{A}$:

$$H^i(X^\bullet) = \text{Ker } d_X^i / \text{Im } d_X^{i-1}.$$

O A -módulo $H^i(X^\bullet)$ é chamado a *i -ésima cohomologia* do complexo $X^\bullet$. Portanto, para cada $i \in \mathbb{Z}$, podemos definir o seguinte funtor:

$$H^i(\cdot) : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

que associa cada complexo $X^\bullet$ a sua i -ésima cohomologia $H^i(X^\bullet)$ e, para cada morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, definimos $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$ dado por $H^i(f^\bullet)(\bar{x}) = \overline{f^i(x)}$. Podemos verificar que H^i é, de fato, um funtor.

Definição 25. Dizemos que um morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ na categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é um *quasi-isomorfismo* se $H^i(f^\bullet)$ é um isomorfismo em $\mathcal{A}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Definição 26. Um morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é dito *homotopicamente nulo* $f^\bullet \sim 0$, se existe uma família de morfismos $\{h^i : X_i \rightarrow Y_{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tais que $f^i = h^i d_Y^{i-1} + d_X^i h^{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & X_{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X_i & \xrightarrow{d_X^i} & X_{i+1} & \xrightarrow{d_X^{i+1}} & X_{i+2} & \xrightarrow{d_X^{i+2}} & X_{i+3} & \longrightarrow & \cdots \\ f^\bullet \downarrow & & & \swarrow f^{i-1} \downarrow & \swarrow h^i & \downarrow f^i & \swarrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} & \swarrow h^{i+2} & \downarrow f^{i+2} & \swarrow h^{i+3} & \downarrow f^{i+3} & \swarrow & \\ Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & Y_{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y_i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y_{i+1} & \xrightarrow{d_Y^{i+1}} & Y_{i+2} & \xrightarrow{d_Y^{i+2}} & Y_{i+3} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Sejam $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Consideremos $I(X^\bullet, Y^\bullet)$ o conjunto de todos os morfismos de $X^\bullet$ para $Y^\bullet$ homotopicamente nulos, ou seja, $I(X^\bullet, Y^\bullet) = \{f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet / f^\bullet \sim 0\}$. Podemos provar que $I(X^\bullet, Y^\bullet)$ é um ideal bilateral na categoria de complexos. Dessa forma, obtemos a *categoria homotópica* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ cujos objetos são os mesmos objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, ou seja, complexos e os morfismos são dados por:

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) / I(X^\bullet, Y^\bullet).$$

É importante ressaltar que a categoria $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, em geral, não é abeliana, mesmo com $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Existem exemplos de morfismos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ que não possuem conúcleos, entre outros problemas. Uma forma de controlar esta situação é introduzir uma estrutura triangulada em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, assunto que introduziremos mais adiante.

Sejam $f^\bullet$ e $g^\bullet$ morfismos na categoria de complexos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, se a diferença $f^\bullet - g^\bullet \sim 0$ é homotopicamente nula dizemos que $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são *homotópicos*.

Proposição 27. *Se $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são homotópicos, então $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Lema 2, capítulo III em [13]. □

A proposição acima nos permite estender o conceito de quasi-isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ para a categoria $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Assim, um morfismo $\overline{f^\bullet}$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é um *quasi-isomorfismo* se, e somente se, $f^\bullet$ é um quasi-isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. A proposição 27 nos garante que esta definição independe do representante. Para simplificar a notação denotaremos os morfismos $\overline{f^\bullet}$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ simplesmente por $f^\bullet$.

Por simplicidade, definimos os conceitos anteriores sobre a categoria de A -módulos sobre uma K -álgebra A . No entanto, em linguagem categórica, todos estes conceitos podem ser definidos sobre uma categoria abeliana $\mathcal{A}$. Veja, por exemplo, [13].

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. A *categoria derivada de $\mathcal{A}$* , denotada por $D(\mathcal{A})$, é uma categoria tal que existe um funtor $Q : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$, chamado funtor de localização, que leva todo quasi-isomorfismo $f^\bullet$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ a isomorfismos $Q(f^\bullet)$ em $D(\mathcal{A})$ e, satisfaz a seguinte propriedade universal. Para qualquer funtor $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow E$, que leva quasi-isomorfismo em isomorfismo, existe um único funtor $G : D(\mathcal{A}) \rightarrow E$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{Q} & D(\mathcal{A}) \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & E \end{array}$$

é comutativo.

Por ser universal, a categoria derivada $D(\mathcal{A})$ é única, a menos de isomorfismo (de categorias). Sua existência foi provada por Verdier em [28] e uma construção de $D(\mathcal{A})$ pode ser vista com detalhes em [13].

Da mesma forma que a categoria homotópica a categoria derivada $D(\mathcal{A})$ não é abeliana, porém é de Krull-Schmidt. Em breve, veremos que ela também possui uma estrutura triangulada.

Definição 28. Seja $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ a categoria de complexos de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$. Definimos o funtor $[n] : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$, com $n \in \mathbb{Z}$, chamado *funtor shift*, que

associa cada complexo $X^\bullet = (X_i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ o complexo $X^\bullet[n] = (X_{i+n}, (-1)^n d_X^{i+n})_{i \in \mathbb{Z}}$, ou seja, para $n > 0$ o complexo

$$X^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X_{-n} \xrightarrow{d_X^{-n}} \cdots \longrightarrow X_{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X_0 \xrightarrow{d_X^0} X_1 \xrightarrow{d_X^1} \cdots$$

é associada ao complexo

$$X^\bullet[n] : \quad \cdots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{(-1)^n d_X^0} \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{n-1}} X_n \xrightarrow{(-1)^n d_X^n} X_{n+1} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{n+1}} \cdots$$

e cada morfismo $f^\bullet = \{f^i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ o morfismo $f^\bullet[n] = \{f^{i+n} : X_{i+n} \rightarrow Y_{i+n} \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Seja $\text{mod}A$ a categoria de módulos à direita finitamente gerados sobre uma K -álgebra A . Chamamos de *complexo concentrado de grau 0* o seguinte complexo:

$$M^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

em que M é um A -módulo à direita. O funtor que associa cada A -módulo M ao complexo concentrado $M^\bullet$ produz uma imersão, como subcategoria completa, de $\text{mod}A$ em $D(\mathcal{A})$.

Embora de grande importância teórica, para muito poucas classes de álgebras é conhecida explicitamente sua categoria derivada. Uma destas poucas classes em que a categoria derivada é totalmente conhecida, e que será de grande importância neste trabalho, é a classe das álgebras hereditárias.

Seja A uma álgebra hereditária de dimensão finita, ou seja, uma álgebra de caminhos sobre um quiver sem relações. Consideremos $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos à direita finitamente gerados. Neste caso, a *categoria derivada limitada de $\text{mod}A$* , denotada por $D^b(A)$, é conhecida explicitamente. Os objetos indecomponíveis de $D^b(A)$ são os complexos concentrados da forma $M[n]$, onde M é um A -módulo e $n \in \mathbb{Z}$ é o funtor shift em $D^b(A)$ e os morfismos são dados por:

$$\text{Hom}_{D^b(A)}(M[i], N[j]) = \text{Ext}_A^{j-i}(M, N) = \begin{cases} \text{Hom}_A(M, N), & \text{se } j = i \\ \text{Ext}_A^1(M, N), & \text{se } j = i + 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.1)$$

1.5 Teoria de Auslander-Reiten

Uma vez que a categoria derivada de uma categoria abeliana é de Krull-Schmidt, é interessante obter uma teoria que permite identificar seus objetos indecomponíveis. Uma delas é a Teoria de Auslander-Reiten.

Nesta seção, $\mathcal{A}$ denotará a categoria de A -módulos finitamente gerados $\mathcal{A} = \text{mod}A$ ou a categoria derivada limitada $\mathcal{A} = D^b(A)$, em que A é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K . Um morfismo $s : M \rightarrow N$ em $\mathcal{A}$ é dito *seção* se existe um morfismo $h : N \rightarrow M$ tal que $sh = 1_M$. Similarmente, um morfismo $r : M \rightarrow N$ em $\mathcal{A}$ é dito uma *retração* se existe $g : N \rightarrow M$ tal que $gr = 1_N$.

Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{A}$ é dito *irredutível*, se:

- (i) f não é seção nem retração;
- (ii) Se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & Z & \end{array}$$

é comutativo, ou seja, se $f = gh$, então g é seção ou h é retração.

Uma boa descrição, embora não completa, da categoria $\mathcal{A}$ é feita descrevendo seus objetos indecomponíveis e seus morfismos irredutíveis. Pelo Teorema de Krull-Schmidt, a partir dos objetos indecomponíveis obtemos os demais por somas diretas (finitas). Por outro lado, por composição, obtemos todos os morfismos que são composições finitas de morfismos irredutíveis. Nesta descrição ficam faltando apenas os morfismos que são composições infinitas de irredutíveis. Existem resultados, tanto para A -módulos quanto para categorias derivadas, que garantem que o número de morfismos que são desta forma são muito poucos. Uma forma de obter objetos indecomponíveis na categoria de módulos (respectivamente, na categoria derivada) são pelas sequências (respectivamente, triângulos) de Auslander-Reiten.

Definição 29. Uma sequência exata curta de A -módulos que não cinde:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \quad (1.2)$$

é chamada *sequência de Auslander-Reiten* se, e somente se:

- (AR1) X e Z são indecomponíveis;
- (AR2) f não é seção e para cada morfismo $u : X \rightarrow U$ não seção, existe $u' : Y \rightarrow U$ tal que $fu' = u$, neste caso, dizemos que f é *quase cindida à esquerda*.

Se a condição (AR1) é satisfeita podemos trocar a condição (AR2) pela seguinte condição equivalente:

- (AR2)' g não é retração e para cada morfismo $v : V \rightarrow Z$ não retração, existe $v' : V \rightarrow Y$ tal que $v'g = v$, neste caso, dizemos que g é *quase cindida à direita*.

Proposição 30. Uma sequência exata curta de A -módulos:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é sequência de Auslander-Reiten se, e somente se:

- (i) X e Z são indecomponíveis, e;
- (ii) f e g são irredutíveis.

Demonstração: Teorema 1.13, capítulo IV em [17]. □

O próximo teorema nos diz sob quais condições existem sequências de Auslander-Reiten.

Teorema 31. *Se Z é um A -módulo indecomponível não projetivo (resp. X não injetivo), então existe uma sequência de Auslander-Reiten que termina em Z (resp. começa em X).*

Demonstração: Teorema 3.1, capítulo IV em [17]. □

O termo inicial das sequências de Auslander-Reiten cujo terceiro termo é M é chamado *translação de Auslander-Reiten* de M e, denotado por, τM .

No caso de categorias derivadas, como elas não são abelianas [13] (logo não faz sentido falar em sequências exatas), temos uma estrutura alternativa, as categorias trianguladas.

1.6 Categorias Trianguladas

Como citamos anteriormente a categoria derivada $D^b(A)$ não é abeliana. Consequentemente, não temos o conceito de sequência exata. Dessa forma, faz-se necessário introduzir uma teoria com o objetivo de suprir estes conceitos ausentes na categoria derivada, esse é o assunto que introduziremos a seguir. Para maiores detalhes sobre o assunto ficam como referências [14], [15] e [16].

Seja $\mathcal{T}$ uma categoria aditiva e seja $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ um automorfismo, conhecido como *functor suspensão*. Um *triângulo* em $\mathcal{T}$ é uma sequência de morfismos (f, g, h) da forma

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX.$$

Na literatura, o nome triângulo se justifica pelo fato de escrevermos a sequência de morfismos acima na seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \bar{h} \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

em que, denotamos por $\bar{h}$ o morfismo $h : Z \rightarrow TX$.

Um morfismo entre dois triângulos (f, g, h) e (f', g', h') é uma sequência de morfismos (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \phi_1 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_3 \downarrow & & \downarrow T(\phi_1) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

A categoria $\mathcal{T}$ é chamada *triangulada* se contém uma classe de triângulos, chamados *triângulos exatos* (alguns textos chamam "triângulos distinguidos"), que satisfazem

4 axiomas, para maiores detalhes sobre categorias triânguladas indicamos como referência [14].

Um exemplo clássico de categoria triângulada é a categoria homotópica. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e seja $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ a categoria homotópica de $\mathcal{A}$. O funtor shift $[1]$ que leva cada complexo $X^\bullet = (X_i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ no complexo $X^\bullet[1] = (X_{i+1}, -d_X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ e cada morfismo $f^\bullet = \{f^i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ no morfismo $f^\bullet[1] = \{f^{i+1} : X_{i+1} \rightarrow Y_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ é um automorfismo de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Dado $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Chamamos de *cone de $f^\bullet$* o complexo $C_{f^\bullet} = ((C_{f^\bullet})_i, d_{C_{f^\bullet}}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, em que $(C_{f^\bullet})_i = X^{i+1} \oplus Y^i$ e $d_{C_{f^\bullet}}^i = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & f^{i+1} \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$.

É fácil ver que, de fato, o cone $C_{f^\bullet}$ é um complexo.

Para cada morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ em $\mathcal{A}$, temos o seguinte triângulo:

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} C_{f^\bullet} \xrightarrow{\pi^\bullet} TX^\bullet,$$

em que $i^\bullet$ e $\pi^\bullet$ são imersões e projeções usuais. Veja o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ f^{i-1} \downarrow & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X^i \oplus Y^{i-1} & \xrightarrow{d_{C_{f^\bullet}}^{i-1}} & X^{i+1} \oplus Y^i & \xrightarrow{d_{C_{f^\bullet}}^i} & X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ X^i & \xrightarrow{-d_X^i} & X^{i+1} & \xrightarrow{-d_X^{i+1}} & X^{i+2} \end{array}$$

Considerando $\mathcal{T}$ a classe de todos os triângulos da forma acima, e seus isomorfos, podemos mostrar que $\mathcal{T}$ satisfaz os quatro axiomas (ver [14]) e portanto $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria triângulada, cujos triângulos exatos são aqueles em $\mathcal{T}$. Além disso, esta triangulação é compatível com o funtor de localização, ou seja, ela define uma triangulação na categoria derivada limitada $D^b(\mathcal{A})$ cujos triângulos exatos são imagens de triângulos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ pelo funtor localização $Q : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{A})$. Desta forma, estes triângulos desempenham papel similar ao das seqüências exatas em categorias abelianas o que nos leva a seguinte definição.

Seja $D^b(A)$ a categoria derivada limitada de A -módulos finitamente gerados. Um triângulo

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX,$$

é dito *triângulo de Auslander-Reiten* se, e somente se, satisfaz as condições (AR1) e (AR2) da Definição 29 e $h \neq 0$.

O termo inicial dos triângulos de Auslander-Reiten cujo terceiro termo é Z é chamado *translação de Auslander-Reiten* de Z e, denotado por, τZ .

Prova-se que um triângulo cinde se, e somente se, $h = 0$. Assim, a condição da sequência não cindir aqui é substituída por $h \neq 0$. Uma caracterização dos triângulos de Auslander-Reiten é dada pela proposição abaixo:

Proposição 32. *Um triângulo*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX ,$$

é de Auslander-Reiten se, e somente se:

- (i) X e Z são indecomponíveis;
- (ii) f e g são irredutíveis;
- (ii) $h \neq 0$.

Poucas classes de álgebras possuem uma descrição explícita dos triângulos de Auslander-Reiten em $D^b(A)$. Uma destas classes é a classe das álgebras hereditárias, que será de bastante utilidade nos capítulos seguintes.

Seja $\mathcal{A}$ a categoria de A -módulos finitamente gerados $\mathcal{A} = \text{mod} A$ ou a categoria derivada limitada $\mathcal{A} = D^b(A)$, em que A é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K . Uma maneira eficiente de reunir todas as informações importantes da categoria $\mathcal{A}$ é descrevê-las por meio de um quiver. Como a categoria $\mathcal{A}$ é de Krull-Schmidt todos os objetos se decompõe como soma direta de objetos indecomponíveis, assim é natural desejar que os vértices representem classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis de $\mathcal{A}$ e as flechas morfismos em $\mathcal{A}$ que não podem ser fatorados. Isso motiva a seguinte definição:

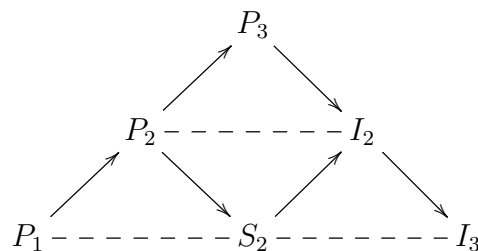
Definição 33. O *quiver de Auslander-Reiten* de $\mathcal{A}$ é um quiver cujos vértices são as classes de isomorfismo $[X]$ de objetos indecomponíveis X em $\mathcal{A}$ e as flechas são morfismos irredutíveis.

As sequências (respectivamente, os triângulos) de Auslander-Reiten de uma álgebra A (respectivamente, da categoria derivada $D^b(A)$) são descritas no quiver de Auslander-Reiten.

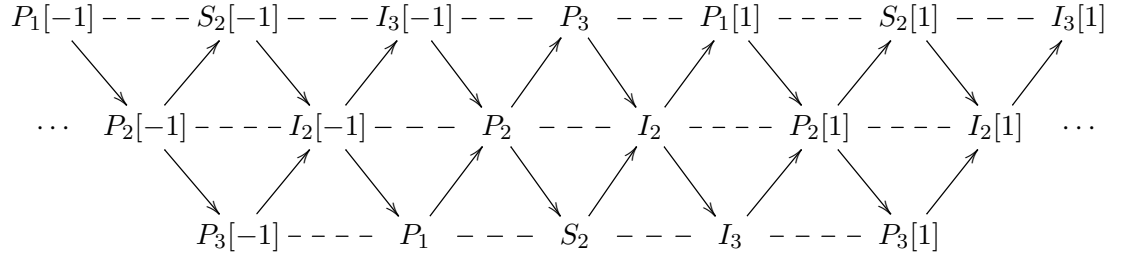
Exemplo 34. Seja Q o quiver

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$$

O quiver de Auslander-Reiten da categoria $\text{mod} KQ$ é dado por:



O seguinte quiver é o quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada limitada $D^b(KQ)$:



Observe que a álgebra de caminhos do quiver Q é hereditária, assim os triângulos de Auslander Reiten possuem uma descrição explícita. Por exemplo consideremos o morfismo $f^\bullet : P_1^\bullet \rightarrow P_2^\bullet$ em $D^b(KQ)$, vamos encontrar o cone de $f^\bullet$. Procedemos de forma similar da descrita para a categoria de complexos, ou seja:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_1^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 f^\bullet \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \\
 P_2^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 i \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \\
 C_{f^\bullet} : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Temos o seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{f^\bullet} & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 \downarrow & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \downarrow 0 & & \\
 S_2^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{f} & S_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Daí, $C_{f^\bullet}$ e $S_2^\bullet$ são quasi-isomorfos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, logo isomorfismo na categoria derivada limitada $D^b(KQ)$. Assim, temos o seguinte triângulo:

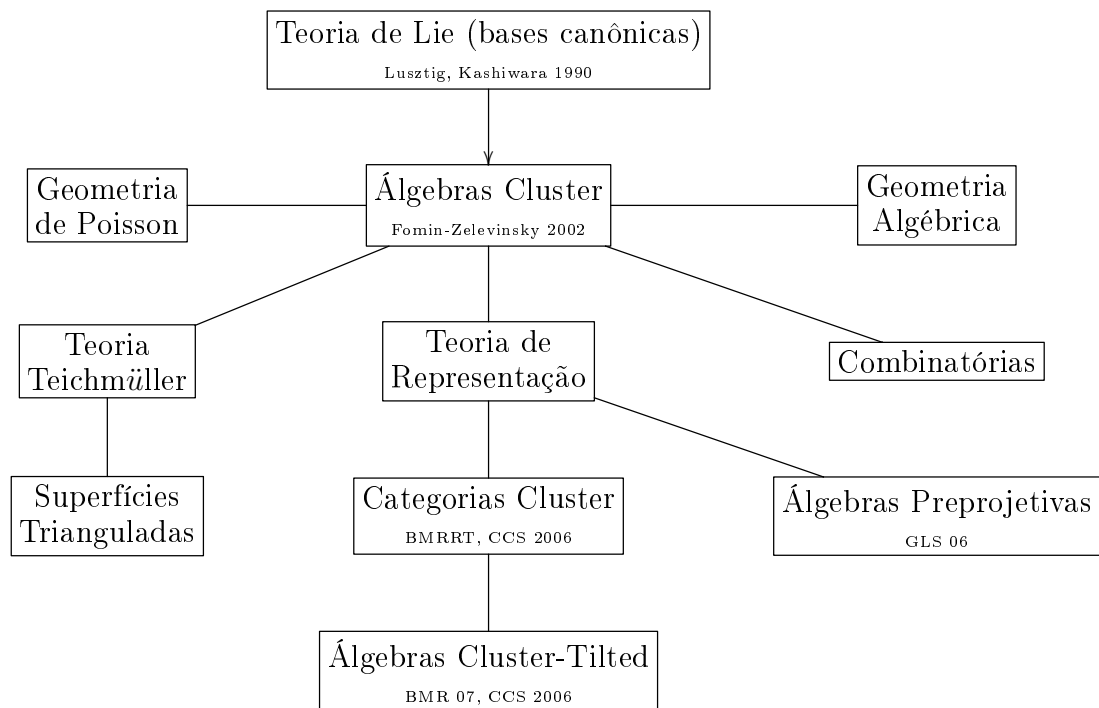
$$P_1^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} P_2^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} S_2^\bullet \longrightarrow P_1^\bullet[1],$$

em que $S_2^\bullet$ é a resolução projetiva de $C_{f^\bullet}$. Os morfismos $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são irredutíveis (tanto em $\text{mod} KQ$ quanto em $D^b(KQ)$).

Capítulo 2

Álgebras Cluster

Álgebras cluster foram introduzidas por S. Fomin (1958,-) e A. Zelevinsky (1953-2013) em [11] e [12] no ano de 2002. O objetivo inicial da criação destas álgebras era criar uma ferramenta combinatória para resultados obtidos por G. Lusztig no estudo sobre a positividade total para grupos algébricos e bases canônicas em grupos algébricos semissimples, que foram descobertas independentemente por M. Kashiwara. A teoria de álgebras cluster desde a sua criação teve um desenvolvimento espetacular graças à descoberta de vários assuntos relacionados e aplicações importantes. O diagrama a seguir, retirado de [27], apresenta algumas das áreas que tem ligação com esta teoria.



A teoria de álgebras cluster motivou a criação da teoria de categorias cluster, assunto do próximo capítulo, e mais recentemente de álgebras cluster-tilted. Apesar de recente, diversos softwares e aplicativos livres [20] de fácil manuseio, tem sido desenvolvidos, o que trás novas perspectivas para o trabalho pelas facilidades que proporcionam aos cálculos. Para definição de álgebras cluster, precisaremos primeiro definir os conceitos de mutação e sementes.

2.1 Mutação e Sementes

Nesta seção faremos um estudo dos pré-requisitos necessários para se definir álgebras cluster. A definição mais geral de álgebras cluster, dada no artigo inicial [11], envolve certos coeficientes que não serão necessários para os objetivos deste trabalho. Além disso, esta definição é feita com base em matrizes antissimetrizáveis. No entanto, matrizes antissimétricas podem ser associadas a quivers da seguinte forma: para cada matriz inteira antissimétrica $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ de ordem $n \times n$ podemos associar a um quiver com n vértices e a_{ij} flechas de $i \rightarrow j$ se $a_{ij} > 0$ (ou $j \rightarrow i$ se $a_{ij} < 0$). Por exemplo, a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

corresponde ao quiver $4 \rightrightarrows 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$. Note que as entradas a_{ij} da matriz A indicam o número de flechas de $i \rightarrow j$ menos o número de flechas de $j \rightarrow i$, assim os quivers correspondentes à matrizes antissimétricas não tem 2-ciclos e, além disso, não possuem loops, pois $a_{ii} = 0$. Utilizando esta associação entre matrizes antissimétricas e quivers, Keller [18] apresentou uma definição equivalente para álgebras cluster utilizando quivers, que será a que utilizaremos. Nesta seção utilizamos como referência os trabalhos [18], [27] e [24].

2.1.1 Mutação de um quiver

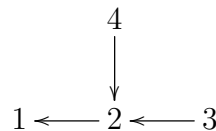
Definição 35. Seja Q um quiver sem loops e 2-ciclos com conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$ e seja k um vértice de Q . Uma *mutação* μ_k de Q é um novo quiver Q' obtido pelas seguintes operações, sendo respeitada a ordem em que são apresentadas:

- (i) Para cada sequência $i \rightarrow k \rightarrow j$, com o vértice k no centro, acrescentamos uma flecha $i \rightarrow j$;
- (ii) Invertamos o sentido das flechas com início ou fim no vértice k ;
- (iii) Excluimos 2-ciclos.

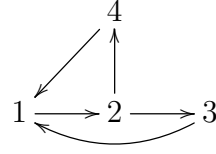
Observe que o quiver $Q' = \mu_k(Q)$ na definição acima também não possui loops e nem 2-ciclos o que nos permite aplicar mutações sobre este quiver. Dois quivers Q e Q' são ditos *mutação equivalentes* se um é obtido do outro usando um número finito de mutações.

Exemplos 36. (a) Seja Q o quiver $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. Aplicando a mutação μ_2 em Q obtemos o seguinte quiver $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$.

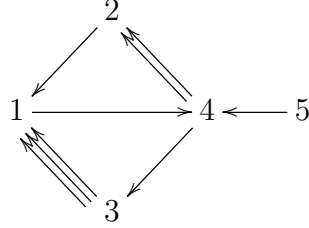
(b) Seja Q o quiver



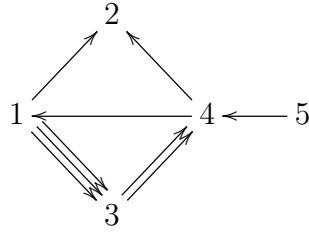
Fazendo a mutação μ_2 obtemos:



(c) Considere o quiver Q



Aplicando a mutação μ_1 temos:

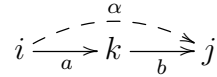


A operação de mutação é uma involução, como mostra o seguinte resultado:

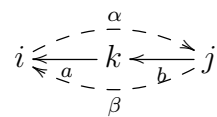
Lema 37. *Seja Q um quiver finito sem loops e 2-ciclos e seja k um vértice de Q , então $\mu_k^2(Q) = Q$.*

Demonstração: Seja Q um quiver finito sem loops e 2-ciclos. Aplicando μ_k em Q obtemos um novo quiver que denotaremos por Q' . Agora ao aplicarmos μ_k em Q' o quiver obtido será denotado por Q'' . Para provar que $\mu_k^2(Q) = Q$ mostraremos que cada operação da definição 35 é uma involução.

1. Seja uma flecha $\alpha : i \rightarrow j$ criada por (i) em Q' pela composta $ab : i \rightarrow j$ em Q .



A operação (ii) dá origem o caminho composto $ba : j \rightarrow i$ em Q' , que produz uma flecha $\beta : j \rightarrow i$ em Q'' , pela operação (i).



A operação (ii) reverte o sentido das flechas com início e fim no vértice k . Observe que esta operação não modifica o 2-ciclos formado pelas flechas α e β . Assim, a operação (iii) cancela α e β . Portanto, a operação (i) é involutiva.

2. A operação (ii) é claramente involutiva.
3. Seja $\alpha : j \rightarrow i$ uma flecha em Q tal que existe o caminho composto $ab : i \rightarrow j$ em Q .

$$i \xleftarrow{\alpha} k \xrightarrow{b} j$$

A operação (i) produz uma flecha $\beta : i \rightarrow j$ em Q' criada pelo caminho composto $ab : i \rightarrow j$ em Q ,

$$i \xleftarrow{\alpha} k \xrightarrow{b} j$$

β

formando assim um 2-ciclos em Q' e, daí a operação (iii) cancela α e β . Pela operação (ii) temos o caminho composto $ba : j \rightarrow i$ em Q' que produz, pela operação (i), uma flecha $j \rightarrow i$ em Q'' . Além disso, obtemos pela operação (ii), o caminho composto $ab : i \rightarrow j$ em Q'' resultante do caminho composto $ba : j \rightarrow i$ em Q' . Logo, voltamos a situação inicial. Portanto, a operação (iii) é involutiva.

□

2.1.2 Sementes

Definição 38. Uma *semente* é um par (u, Q) formado por um conjunto u e um quiver Q em que:

- (i) $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base transcendente sobre o corpo $\mathbb{Q}$, com cada u_i no corpo $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ em n indeterminadas;
- (ii) Q é um quiver finito com conjunto de vértices $Q_0 = \{1, \dots, n\}$, sem loops e 2-ciclos.

Note que o quiver de uma semente qualquer, por definição, é finito, sem loops e 2-ciclos, isso nos permite aplicar sobre este quiver as mutações da definição 35 que, como mencionado anteriormente, origina um novo quiver satisfazendo estas mesmas condições. Assim, podemos definir mutações de sementes dada abaixo:

Definição 39. Seja $(u = \{u_1, \dots, u_n\}, Q)$ uma semente. Uma *mutação* μ_k de (u, Q) é uma nova semente $(u', Q') = \mu_k(u, Q)$ em que:

- (i) $u' = (u - \{u_k\}) \cup \{u'_k\}$, ou seja, u' é obtido de u pela substituição da variável u_k por u'_k dado pela seguinte relação de troca:

$$u'_k = \frac{1}{u_k} \left(\prod_{\alpha: i \rightarrow k} u_i + \prod_{\beta: k \rightarrow j} u_j \right)$$

em que, i é início de flechas que terminam no vértice k e j é o fim de flechas que começam no vértice k . Caso um destes conjuntos seja vazio, ou seja, se não existirem flechas $i \rightarrow k$ ou flechas $k \rightarrow j$, o produto será considerado igual a 1.

(ii) $Q' = \mu_k(Q)$.

Observe que o conjunto u' depende do conjunto u e do quiver Q , enquanto que, o quiver Q' depende apenas do quiver Q . Pode-se mostrar que $(u', Q') = \mu_k(u, Q)$, de fato, é uma semente. (Veja, seção 3.2, em [18]).

Note que ao fazer a mutação no vértice k substituímos o elemento u_k por u'_k . Para que não haja confusão vamos sempre ordenar os elementos do conjunto u da seguinte forma $u = \{u_1, \dots, u_n\}$, em que, u_k está associado ao vértice k do quiver Q .

Exemplo 40. Considere a seguinte semente $(x, Q) = (\{x_1, x_2, x_3\}, 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3)$. Aplicando μ_2 em (x, Q) obtemos a semente $(x', Q') = (\{x_1, u'_2, x_3\}, 1 \rightleftarrows 2 \rightrightarrows 3)$, em que, $u'_2 = \frac{x_1+x_3}{x_2}$. Observe que considerando a semente (x', Q') e aplicando novamente μ_2 obteremos uma nova semente $(x'', Q'') = (\{x_1, u''_2, x_3\}, 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3)$, em que,

$$u''_2 = \frac{x_1 + x_3}{u'_2} = \frac{x_1 + x_3}{\frac{x_1+x_3}{x_2}} = x_2,$$

ou seja, obtemos exatamente a semente inicial. Portanto, $\mu_2^2(x, Q) = (x, Q)$. O lema abaixo nos mostra que este não é um caso particular e ocorre para cada vértice k do quiver Q .

Lema 41. *Seja (u, Q) uma semente. Para cada vértice k do quiver Q , temos $\mu_k^2(u, Q) = (u, Q)$.*

Demonstração: Seja $(u = \{u_1, \dots, u_n\}, Q)$ uma semente. Pelo Lema 37 temos $\mu_k^2(Q) = Q$ para cada vértice k do quiver Q , assim falta mostrar apenas que o mesmo ocorre para a base u . Por definição, $\mu_k(u, Q) = (u', Q')$ em que, $u' = \{u_1, \dots, u'_k, \dots, u_n\}$ com

$$u'_k = \frac{1}{u_k} \left(\prod_{i \rightarrow k} u_i + \prod_{k \rightarrow j} u_j \right)$$

em que, i é início de flechas que terminam no vértice k e j é o fim de flechas que começam no vértice k . Considerando agora u' e aplicando novamente μ_k em u' obtemos uma nova base $u'' = \{u_1, \dots, u''_k, \dots, u_n\}$ em que,

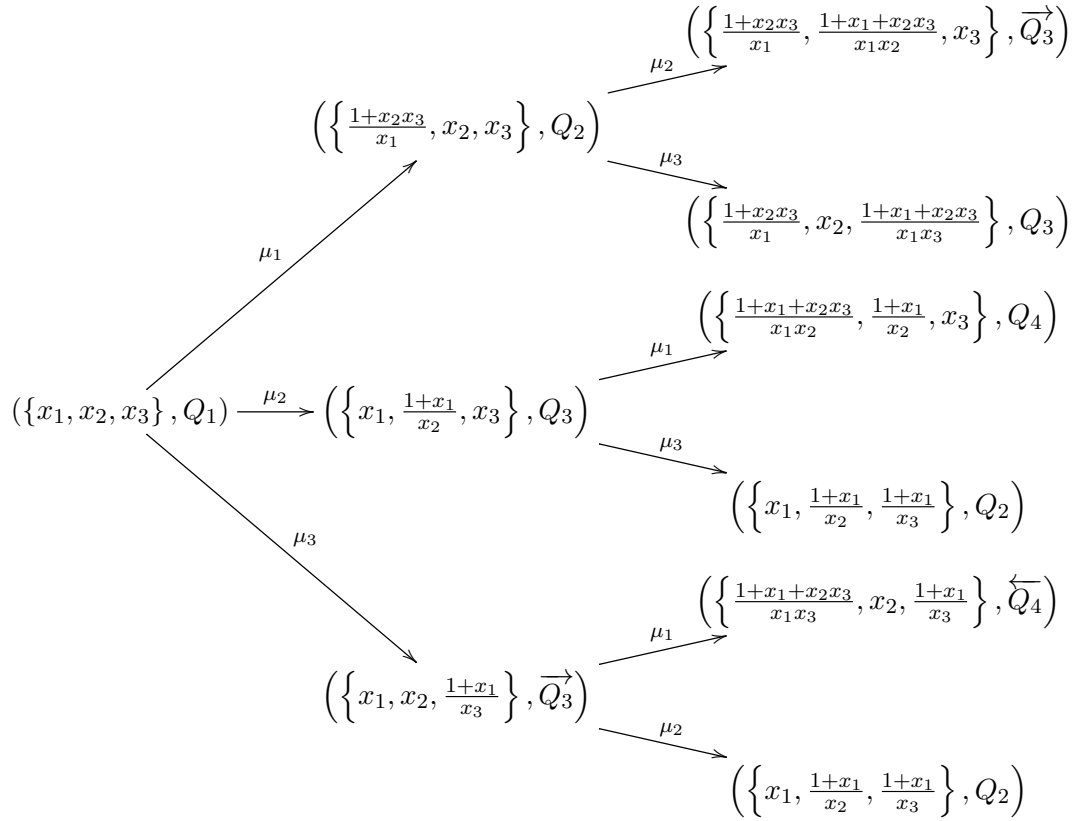
$$u''_k = \frac{1}{u'_k} \left(\prod_{j' \rightarrow k'} u_{j'} + \prod_{k' \rightarrow i'} u_{i'} \right) = \frac{1}{u'_k} \left(\prod_{k \rightarrow j} u_j + \prod_{i \rightarrow k} u_i \right)$$

onde j' é início de flechas que terminam no vértice k' e i' é o fim de flechas que começam no vértice k' , no quiver Q' , pois u' depende do quiver Q' e em Q' temos a orientação das flechas que terminam ou começam no vértice k revertidas com relação as de Q . Assim,

$$u''_k = \frac{1}{\frac{1}{u_k} \left(\prod_{i \rightarrow k} u_i + \prod_{k \rightarrow j} u_j \right)} \left(\prod_{k \rightarrow j} u_j + \prod_{i \rightarrow k} u_i \right) = \frac{u_k \left(\prod_{k \rightarrow j} u_j + \prod_{i \rightarrow k} u_i \right)}{\left(\prod_{i \rightarrow k} u_i + \prod_{k \rightarrow j} u_j \right)} = u_k$$

Logo, $u'' = \{u_1, \dots, u_k, \dots, u_n\} = u$. Portanto, para cada v3rtice k em Q , $\mu_k^2(u, Q) = (u, Q)$. $\square$

Seja (u, Q) uma semente. Aplicando μ_k em (u, Q) , para cada $k \in Q_0$, obtemos n novas sementes. Agora, considerando cada uma dessas novas sementes encontradas e aplicando novamente todas as muta33es encontramos outras $n - 1$ novas sementes, uma vez que, pelo Lema 41 $\mu_k^2(u, Q) = (u, Q)$. (Pode ocorrer de entre estas $n - 1$ novas sementes encontrarmos sementes que j31 tenham aparecido anteriormente). Este procedimento 3e chamado *processo de itera33o* e a semente (u, Q) 3e chamada *semente inicial*. Ser31 conveniente considerarmos, na semente inicial o conjunto $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. Por exemplo, seja a semente inicial $(x = \{x_1, x_2, x_3\}, Q_1 : 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3)$, esquematizamos abaixo os primeiros passos do processo de muta33o iterada a partir desta semente inicial.



Em que, $Q_2 : 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3$, $Q_3 : 2 \longleftarrow 1 \longleftarrow 3$, $\overrightarrow{Q_3} : 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$, $Q_4 : 2 \rightleftarrows 1 \longrightarrow 3$ e $\overleftarrow{Q_4} : 2 \longleftarrow 1 \rightleftarrows 3$. Observe que obtivemos sementes iguais aplicando muta33es iteradas distintas, por exemplo, a semente $(\{x_1, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1}{x_3}\}, Q_2)$ foi obtida atrav3s das muta33es $\mu_2\mu_3$ e $\mu_3\mu_2$ da semente inicial.

Os conjuntos u' das sementes (u', Q') obtidos de muta33es iteradas a partir de uma semente inicial s3o chamados *cluster* e os elementos u'_i das cluster s3o chamados *vari3veis cluster*.

2.1.3 Álgebras Cluster

Definição 42. Seja a semente inicial $(x = \{x_1, \dots, x_n\}, Q)$. A *álgebra cluster* $\mathcal{A}_Q$ associada ao quiver Q é a $\mathbb{Q}$ -subálgebra do corpo $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ gerada pelas variáveis cluster contidas na união das cluster.

Observe que a álgebra cluster $\mathcal{A}_Q$ é obtida através de um processo recursivo a partir da semente inicial, de certa forma, um sistema dinâmico discreto.

Exemplo 43. Seja o quiver

$$Q_1 : 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$$

Vamos obter a álgebra cluster $\mathcal{A}_{Q_1}$ associada ao quiver Q_1 . Consideremos a semente inicial $(x = \{x_1, x_2, x_3\}, Q_1)$. Aplicando a mutação μ_1 em (x, Q_1) obtemos uma nova semente dada por $\left(\left\{\frac{1+x_2x_3}{x_1}, x_2, x_3\right\}, Q_2 : 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3\right)$. Agora aplicando a mutação μ_2 em (x, Q_1) obtemos uma outra semente $\left(\left\{x_1, \frac{1+x_1}{x_2}, x_3\right\}, Q_3 : 2 \longleftarrow 1 \longleftarrow 3\right)$. Aplicando a mutação μ_3 em (x, Q_1) encontramos a semente $\left(\left\{x_1, x_2, \frac{1+x_1}{x_3}\right\}, \overrightarrow{Q_3} : 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3\right)$. Para cada uma destas novas sementes aplicamos novamente todas as mutações e encontraremos mais duas sementes, uma vez que $\mu_k^2(x, Q_1) = (x, Q_1)$, pelo Lema 41. Dando continuidade ao processo encontraremos 14 sementes distintas listadas na tabela abaixo:

$\{Cluster\}$	$Quiver$
x_1, x_2, x_3	$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$
$\frac{1+x_2x_3}{x_1}, x_2, x_3$	$2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3$
$x_1, \frac{1+x_1}{x_2}, x_3$	$2 \longleftarrow 1 \longleftarrow 3$
$x_1, x_2, \frac{1+x_1}{x_3}$	$2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$
$\frac{1+x_2x_3}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, x_3$	$2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$
$\frac{1+x_2x_3}{x_1}, x_2, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}$	$2 \longleftarrow 1 \longleftarrow 3$
$\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2}, x_3$	$2 \rightleftarrows 1 \rightrightarrows 3$
$x_1, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1}{x_3}$	$2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3$
$\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}, x_2, \frac{1+x_1}{x_3}$	$2 \rightleftarrows 1 \rightleftarrows 3$
$\frac{1+x_2x_3}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}$	$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$
$\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}$	$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$
$\frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1}{x_3}$	$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$
$\frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}$	$2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3$
$\frac{1+x_1}{x_3}, \frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}$	$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$

Da tabela acima, obtemos que a álgebra cluster associada ao quiver Q_1 é gerada por 9 variáveis cluster são elas:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \frac{1+x_2x_3}{x_1}, \quad \frac{1+x_1}{x_2}, \quad \frac{1+x_1}{x_3}, \quad \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2},$$

$$\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}, \quad \frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}.$$

Ou seja, os elementos da álgebra cluster $\mathcal{A}_{Q_1}$ são somas finitas da seguinte forma:

$$\sum \alpha_{d_1d_2\dots d_9} u_1^{d_1} u_2^{d_2} \dots u_9^{d_9}$$

em que, u_i são variáveis cluster, $d_i \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_{d_1d_2\dots d_9} \in \mathbb{Q}$.

Note que no exemplo acima todas as variáveis cluster possuem monômios nos denominadores. Isto chama atenção por ser um fato, a princípio, inesperado uma vez que, ao realizar uma mutação em uma semente a relação de troca da variável,

$$u'_k = \frac{1}{u_k} \left(\prod_{\alpha:i \rightarrow k} u_i + \prod_{\beta:k \rightarrow j} u_j \right)$$

por definição, tem como denominador uma variável cluster que, como vimos anteriormente, são elementos do corpo $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$. Por exemplo, considere a semente $\left(\left\{ \frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3} \right\}, 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3 \right)$ listada na tabela do exemplo acima. Aplicando a mutação μ_3 nesta semente, vamos substituir $u_3 = \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}$ pela seguinte variável:

$$\begin{aligned} u'_3 &= \frac{u_1 + 1}{u_3} = \frac{\frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3} + 1}{\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}} = \frac{\frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3}}{\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}} = \\ &= \frac{(1+x_1)(1+x_1+x_2x_3)}{x_2(1+x_1+x_2x_3)} = \frac{1+x_1}{x_2} \end{aligned}$$

que possui novamente um monômio no denominador.

Outro fato que desejamos chamar atenção no exemplo 43 é que obtivemos 6 variáveis cluster não iniciais que é exatamente o número de raízes positivas do sistema de raízes do grafo A_3 subjacente do quiver Q . Este caso particular é generalizado no Teorema seguinte:

Teorema 44 (Fomin-Zelevinsky [18]). *Seja Q um quiver finito, conexo, sem loops e 2-ciclos, com $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. Seja $\mathcal{A}_Q$ a álgebra cluster associada, então:*

- (a) *Todos os denominadores das variáveis cluster são monômios.*
- (b) *O número de variáveis cluster é finito se, e somente se, Q é mutação equivalente para uma orientação de um diagrama de Dynkin Δ simples. Neste caso, Δ é único e as variáveis cluster não iniciais estão em bijeção com as raízes positivas de Δ , isto é, se denotamos as raízes simples por $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, então para cada raiz positiva $\sum_{i=1}^n d_i \alpha_i$ existe uma única variável cluster não inicial cujo denominador é $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$.*

Dizemos que uma álgebra cluster é de tipo finito se o número de suas variáveis cluster é finito. O teorema abaixo, mostrado em [12], nos garante uma relação entre número finito de variáveis cluster e sementes finitas:

Teorema 45. *Seja $\mathcal{A}_Q$ uma álgebra cluster de tipo finito associada a um quiver Q . Cada semente (u', Q') em $\mathcal{A}_Q$ é unicamente determinada por sua cluster u' .*

Demonstração: Teorema 1.12, em [12]. □

Em outras palavras, este resultado nos garante que, se conhecemos a cluster u' então também conhecemos Q' . Consequentemente, se temos uma álgebra cluster com finitas variáveis cluster então também temos finitas sementes. A relação entre u' e Q' será estudada no próximo capítulo.

Dizemos que duas sementes (u, Q) e (u', Q') são *equivalentes* se uma pode ser obtida da outra por reordenação simultânea dos vértices e das variáveis cluster associadas.

Exemplo 46. Considere as seguintes sementes listadas na tabela do exemplo 43:

$$\left(\left\{ x_1, \frac{1+x_1}{x_2}, x_3 \right\}, 2 \longleftarrow 1 \longleftarrow 3 \right)$$

$$\left(\left\{ \frac{1+x_2x_3}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, x_3 \right\}, 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \right)$$

Aplicando a mutação μ_1 nas duas sementes obtemos, respectivamente:

$$\left(\left\{ \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2}, x_3 \right\}, 2 \rightleftarrows 1 \rightleftarrows 3 \right)$$

$$\left(\left\{ \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}, x_3 \right\}, 2 \rightleftarrows 1 \rightleftarrows 3 \right)$$

Considerando uma destas sementes obtidas, e reordenando as variáveis cluster e os vértices associados encontramos a outra semente, ou seja, estas sementes são equivalentes.

Considerando a equivalência de sementes podemos explicitar o processo iterativo de construção das variáveis cluster na forma de um grafo.

Definição 47. Seja a semente inicial $(x = \{x_1, \dots, x_n\}, Q)$. O *grafo de troca associado a Q* é o grafo que tem como vértices sementes, a menos de equivalência, e cujas arestas correspondem as mutações.

Exemplo 48. Seja $Q_1 : 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$ o mesmo quiver do exemplo anterior. Vimos que a classe de mutação equivalente de Q_1 tem, além dele próprio, os quivers $Q_2 : 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3$, $Q_3 : 2 \longleftarrow 1 \longleftarrow 3$ e $Q_4 : 2 \rightleftarrows 1 \rightrightarrows 3$. Identificando as sementes equivalentes obtemos o grafo de troca dado pela Figura 2.1. Aqui as arestas tracejadas indicam que as sementes não são aquelas obtidas exatamente da mutação e, sim, sementes equivalentes. Por simplicidade, chamamos $a = \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}$, $b = \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}$ e $c = \frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}$.

Observe no exemplo 48 que para toda cluster u e para toda variável $u_i \in u$, existe uma única variável cluster u'_i que substitui u_i de tal modo que este novo conjunto seja uma cluster. Isso é consequência do seguinte resultado geral:

Teorema 49. *Seja $\mathcal{A}_Q$ a álgebra cluster associada a um quiver acíclico Q . Para toda cluster u e para toda variável $u_i \in u$, existe uma única variável cluster u'_i tal que $(u - \{u_i\}) \cup \{u'_i\}$ é uma cluster.*

Demonstração: Corolário A.3, em [5]. □

2.2 Álgebras Cluster e Representações de Quiver

O objetivo desta seção é descrever uma relação entre álgebras cluster e Representações de Quiver. Esta seção tem como referência o artigo [18].

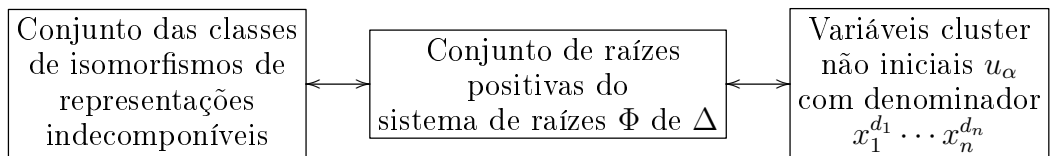
Seja Q um quiver finito com conjunto de vértices $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ cujo grafo subjacente Δ é um diagrama de Dynkin simples. É conhecido que existe uma bijeção entre representações indecomponíveis V de Q e seus respectivos vetores dimensão $\dim V = [d_i]_{i \in Q_0}$, com $d_i = \dim V_i$. Pelo Teorema 11 e observação 12 na página 12 temos que o conjunto de classes de isomorfismos de representações indecomponíveis está em bijeção com o conjunto de raízes positivas do sistema de raízes Φ associado com Δ . Por outro lado, pela parte (b) do Teorema 44, página 33, para cada raiz positiva

$$\alpha = \sum_{i=1}^n d_i \alpha_i$$

em Φ , onde $\alpha_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, ou seja, tem 1 na i -ésima coordenada e 0 nas demais, existe uma única variável cluster não inicial u_α com denominador

$$x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}.$$

Em resumo, temos as bijeções seguintes:



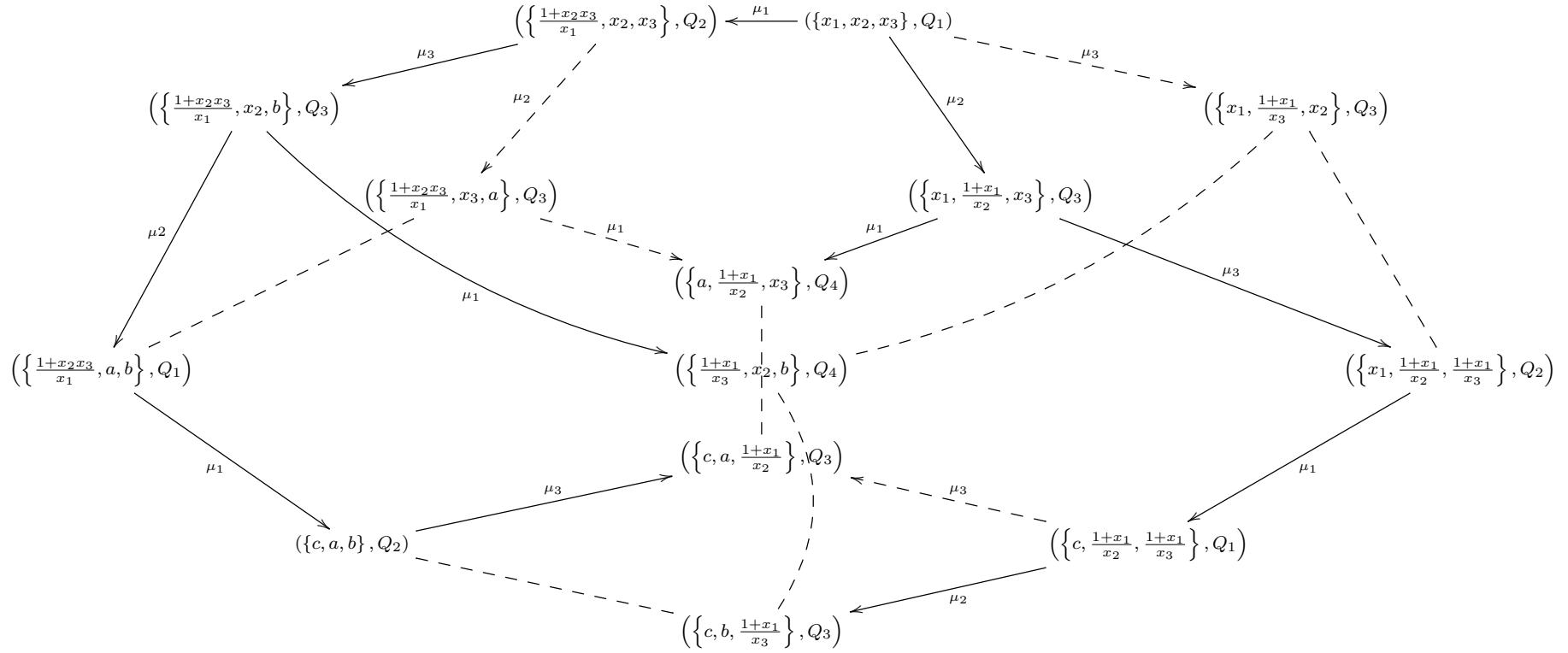


Figura 2.1: Exemplo 48: O grafo de troca do quiver Q_1 .

ou seja, aplicação que leva uma representação indecomponível V com vetor dimensão $\dim V = [d_i]_{i \in Q_0}$ de Q para a única variável cluster não inicial u_V cujo denominador é $x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ induz uma bijeção do conjunto de classes de isomorfismos de representações indecomponíveis para o conjunto de variáveis cluster não iniciais. Segue daí a primeira ligação estreita entre álgebras cluster e a teoria de representações de quiver.

Observe que as n variáveis cluster iniciais $x_1, \dots, x_n$ não aparecem na bijeção acima. No próximo capítulo veremos o papel que elas desempenham.

Exemplo 50. Seja Q_1 o quiver

$$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$$

o mesmo que trabalhamos nos exemplos anteriores. Como vimos, as variáveis cluster não iniciais da álgebra cluster $\mathcal{A}_{Q_1}$ associada a Q_1 são:

$$\frac{1+x_2x_3}{x_1}, \quad \frac{1+x_1}{x_2}, \quad \frac{1+x_1}{x_3}, \quad \frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2},$$

$$\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}, \quad \frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}.$$

Daí, pelas bijeções acima, a variável cluster $\frac{1+x_2x_3}{x_1}$ é levada no vetor dimensão $[100]$ que corresponde a representação indecomponível P_1 . A variável cluster $\frac{1+x_1}{x_2}$ é levada no vetor dimensão $[010]$ que corresponde a representação indecomponível I_2 . De forma análoga, as demais variáveis cluster possuem correspondentes vetores dimensão que, por sua vez, correspondem a representações indecomponíveis, veja a tabela abaixo.

Variável cluster	Vetor dimensão	Representação indecomponível
$\frac{1+x_2x_3}{x_1}$	$[100]$	P_1
$\frac{1+x_1}{x_2}$	$[010]$	I_2
$\frac{1+x_1}{x_3}$	$[001]$	I_3
$\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_2}$	$[110]$	P_2
$\frac{1+x_1+x_2x_3}{x_1x_3}$	$[101]$	P_3
$\frac{1+2x_1+x_1^2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}$	$[111]$	I_1

Capítulo 3

Categorias Cluster

Neste capítulo introduziremos as categorias cluster que foram criadas em [4] por Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten e Gordana Todorov no ano de 2004, com objetivo de obter uma estrutura categórica para as álgebras cluster. A fim de alcançar este objetivo uma teoria tilting foi desenvolvida na categoria cluster que, posteriormente, motivou a criação de uma outra teoria, as álgebras cluster-tilting, iniciada em [2]. Este capítulo foi elaborado com base nas referências [4], [24] e [25].

3.1 Categorificação das álgebras cluster

Seja Q um quiver acíclico sem loops ou 2-ciclos. Nesta seção, estamos interessados em obter uma categoria a partir de Q que reflita os principais ingredientes das álgebras cluster $\mathcal{A}_Q$. Precisamos de uma categoria que contenha:

- Uma classe de objetos de tal forma que cada objeto T nesta classe seja decomposto num mesmo número de somandos indecomponíveis não isomorfos, isto é, $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$, onde n é o número de vértices do quiver Q . Neste contexto, T seria um análogo para as cluster e os somandos às variáveis cluster.
- Um modelo para as mutações de cluster, ou seja, considerando um objeto $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_i \oplus \cdots \oplus T_n$ na classe descrita acima queremos que cada somando indecomponível T_i possa ser substituído por um único somando indecomponível não isomorfo T'_i tal que $T' = T_1 \oplus \cdots \oplus T'_i \oplus \cdots \oplus T_n$ pertença a esta classe.
- Para cada objeto T nesta classe precisamos associar um quiver Q_T de forma que cada semente (u, Q) na álgebra cluster corresponda ao par (T, Q_T) na categoria procurada e ainda que as mutações de sementes sejam compatíveis com estas associações.

Seja Q um quiver acíclico e seja $\mathcal{A}_Q$ a álgebra cluster associada ao quiver Q . Pelo capítulo 1, a álgebra de caminho sobre Q é hereditária e tem dimensão finita. Uma primeira tentativa de categorificação das álgebras cluster seria considerar a categoria de KQ -módulos finitamente gerados como a categoria que estamos procurando. Neste caso, poderíamos utilizar a bem conhecida teoria tilting para módulos e daí uma natural escolha da classe de objetos análogos às cluster seria a classe dos KQ -módulos tilting básicos.

3.1.1 Teoria Tilting para módulos

Nesta subseção apresentaremos brevemente as principais definições e resultados da Teoria Tilting para módulos. Para maiores informações a respeito deste assunto indicamos as referências [17], [25].

Definição 51. Seja A uma K -álgebra. Um A -módulo T é chamado *módulo tilting* se satisfaz as seguintes condições:

- (i) dimensão projetiva de T é menor ou igual a 1;
- (ii) $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$;
- (iii) $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$, em que n é o número de vértices do quiver associado a álgebra A e cada T_i é um A -módulo indecomponível.

Definição 52. Seja T um A -módulo tilting. Dizemos que T é um módulo *tilting básico* se todos os seus somandos diretos são não isomorfos.

Definição 53. Um A -módulo $\overline{T}$, cuja dimensão projetiva é menor ou igual a 1, que possui $n - 1$ somandos indecomponíveis não isomorfos, e é tal que $\text{Ext}_A^1(\overline{T}, \overline{T}) = 0$ é chamado um *A -módulo tilting quase completo*. O módulo M é dito *complemento* de $\overline{T}$ se $T = \overline{T} \oplus M$ é um módulo tilting.

Exemplo 54. Seja Q um quiver acíclico com $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ e seja o KQ -módulo tilting $T = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, em que P_j são KQ -módulos indecomponíveis projetivos associados com o vértice j e P_1 é simples, projetivo. Então $T' = \tau^{-1}P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ é um KQ -módulo tilting, chamado *APR-módulo tilting*.

A motivação de utilizar a teoria tilting segue dos seguintes fatos:

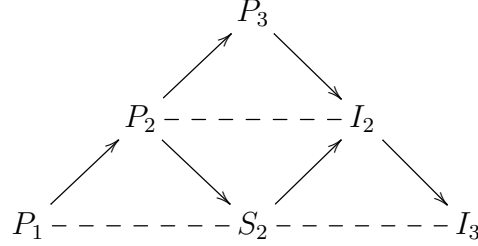
- (I) os KQ -módulos tilting básicos possuem n somandos indecomponíveis não isomorfos, onde n é o número de vértices de Q ;
- (II) para cada KQ -módulo tilting básico $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_i \oplus \cdots \oplus T_n$ existe no máximo um KQ -módulo indecomponível T'_i tal que $T' = T_1 \oplus \cdots \oplus T'_i \oplus \cdots \oplus T_n$ é um novo KQ -módulo tilting básico;
- (III) podemos associar a cada KQ -módulo tilting básico T o quiver Q_T da álgebra $(\text{End}T)^{op}$ e obter um par (T, Q_T) ;
- (IV) como vimos no exemplo 54, a substituição de um somando num APR-módulo tilting corresponde a uma mutação num poço.

Vamos verificar, num exemplo simples, se este é um bom modelo para categorificação de álgebra cluster. Nesta seção, para simplificar a notação, quando escrevemos módulos estamos referindo a módulos sobre a álgebra de caminhos KQ .

Exemplo 55. Seja Q o quiver

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3.$$

O quiver de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos KQ é:



Consideremos a semente inicial $(x = \{x_1, x_2, x_3\}, Q)$. Precisamos de um módulo tilting básico T cujo quiver da álgebra $(\text{End}T)^{op}$ seja Q . Claramente este módulo é o módulo tilting $T = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$. Vejamos o que ocorre com as mutações. Para cada vértice $j \in Q_0$, queremos substituir P_j , $j \in Q_0$, em $T = \bar{T} \oplus P_j$, por um outro módulo indecomponível T'_j de tal forma que $T' = \bar{T} \oplus T'_j$ seja um módulo tilting básico e cujo quiver da álgebra $(\text{End}T')^{op}$ seja isomorfo a $\mu_j(Q)$.

Vamos analisar o que ocorre quando fazemos a mutação na semente inicial e buscamos um associado módulo tilting correspondente a nova cluster obtida.

- (a) Vamos primeiramente considerar o vértice 1 no quiver Q que é um poço. Aplicando a mutação μ_1 em (x, Q) obtemos a seguinte semente $\left(\left\{\frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3\right\}, Q_1 : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3\right)$. Por outro lado, considerando $T = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$, vamos substituir o módulo indecomponível P_1 . Observe que $P_1 = S_1$ é um módulo simples, projetivo e não injetivo, então $T' = \tau^{-1}P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ é um APR-módulo tilting. Logo, $T' = S_2 \oplus P_2 \oplus P_3$ e daí podemos mostrar que, de fato, o quiver de $(\text{End}T')^{op}$ é Q_1 , uma vez que, APR-módulos tilting estão associados a funtores de reflexão para vértices em poço.
- (b) Agora aplicando a mutação μ_2 em (x, Q) obtemos $\left(\left\{x_1, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3\right\}, Q_2 : 1 \xleftarrow{\quad} 2 \longrightarrow 3\right)$. Por outro lado, devemos substituir o módulo indecomponível P_2 em T . Vamos verificar para qual módulo T'_2 temos $T' = P_1 \oplus T'_2 \oplus P_3$ um módulo tilting básico. Para isso T' precisa satisfazer a seguinte condição:

$$\text{Ext}_{KQ}^1(T', T') = 0.$$

Temos,

$$\text{Ext}_{KQ}^1(T', T') = \text{Ext}_{KQ}^1(T'_2, P_1 \oplus T'_2) \simeq \text{DHom}_{KQ}(P_1 \oplus T'_2, \tau T'_2).$$

daí,

$$\text{DHom}_{KQ}(P_1 \oplus T'_2, \tau T'_2) = 0 \iff T'_2 = I_3.$$

Logo, $T' = P_1 \oplus I_3 \oplus P_3$ e o quiver de $(\text{End}T')^{op}$ é $1 \xleftarrow{\quad} 2 \longrightarrow 3$. Para o desejado está faltando uma flecha $1 \rightarrow 2$. Isto indica que, para o modelo que procuramos, faltam morfismos na categoria $\text{mod}KQ$.

Nossa tentativa de usar módulos e teoria tilting não funcionou como um modelo para as mutações, mas não estamos muito longe.

- (c) Vamos analisar o que ocorre quando trabalhamos com o vértice 3. Aplicando a mutação μ_3 em (x, Q) temos a seguinte semente $\left(\left\{x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_3}\right\}, Q_2 : 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3\right)$. Por outro lado, considerando T precisamos de um módulo indecomponível T'_3 que substitua o módulo projetivo e injetivo P_3 de tal forma que $T' = P_1 \oplus P_2 \oplus T'_3$ é tilting básico. No entanto, um resultado conhecido da teoria tilting afirma que um módulo indecomponível projetivo e injetivo é somando de no máximo um módulo tilting, ou seja, não existe módulo T'_3 na categoria $\text{mod}KQ$ que substitui P_3 . Em outras palavras, para o nosso modelo a categoria $\text{mod}KQ$ apresenta uma deficiência de módulos indecomponíveis.

Pelo exemplo percebemos que existem dois problemas quando tentamos categorificar as álgebras cluster utilizando a categoria $\text{mod}KQ$ e a classe de módulos tilting. O primeiro é que se $\overline{T}$ é um módulo tilting quase completo nem sempre existem dois complementos de $\overline{T}$, ou seja, não existem módulos suficientes na categoria $\text{mod}KQ$ para realizar mutações. O segundo é que nesta categoria também faltam morfismos, isto é, quando conseguimos dois módulos tilting T e T' que diferem por um único somando indecomponível, nem sempre os quivers Q_T e $Q_{T'}$ das respectivas álgebras de endomorfismos opostas correspondem as respectivas mutações.

O exemplo mostra que precisamos de uma categoria "maior" que a categoria $\text{mod}KQ$, isto é, uma categoria com mais objetos e mais morfismos. Uma alternativa para resolver estes problemas seria utilizar a categoria derivada limitada $D^b(KQ)$ dos KQ -módulos finitamente gerados, uma vez que, a categoria $\text{mod}KQ$ está imersa em $D^b(KQ)$. Na verdade, a solução será um quociente da categoria $D^b(KQ)$ como veremos em seguida. Em geral, quocientes em categorias são restritos à quocientes de morfismos, preservando objetos. Uma forma de fazer quociente também na classe de objetos é utilizar as categorias órbitas definidas por Keller, em [19] que na verdade são um caso particular das chamadas Skew-categorias, introduzidas por Claude Cibils e Eduardo N. Marcos em [9].

3.2 Skew-Categorias

Segundo Keller em [19] as categorias órbitas são casos particulares de Skew-categorias. Em virtude disto, nesta seção, faremos uma breve exposição sobre as Skew-categorias. Nosso objetivo aqui é ressaltar este fato de que, tanto as categorias órbitas quanto as categorias cluster que serão tratadas nas seções seguintes, tratam-se na verdade de casos particulares de skew-categorias. Mais detalhes podem ser encontrados em [9].

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e seja G um grupo. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma G -categoria se existe um homomorfismo de grupos $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C})$, ou seja, para cada $s \in G$ temos um autofuntor $\varphi_s : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que leva cada objeto $x \in \mathcal{C}$ em outro objeto $sx \in \mathcal{C}$ e cada morfismo $f : x \rightarrow y$ num morfismo $sf : sx \rightarrow sy$. Em outras palavras, temos uma ação do grupo G sobre o conjunto de objetos $G \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ e, para cada par de objetos $x, y \in \mathcal{C}$ um homomorfismo de grupos abelianos $\varphi_s : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(sx, sy)$, para todo $s \in G$.

Seja $\mathcal{C}$ uma G -categoria. A Skew-categoria $\mathcal{C}[G]$ tem como objetos os mesmos objetos de $\mathcal{C}$ e, para todo par de objetos $x, y \in \mathcal{C}[G]$ definimos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, y) = \bigsqcup_{s \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, sy)$$

A composição de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(y, z) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, z)$ é definida, em cada componente do coproduto, com os devidos ajustes, utilizando a ação de G , ou seja, para cada $u \in G$, a composta na componente $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, uz)$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, z)$ é induzida pelas compostas $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, sy) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(sy, s(s^{-1}uz)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, uz)$, para todo $s \in G$.

Se $G = \{e = s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$ é um grupo finito, a composição pode ser escrita na seguinte forma matricial. Dado $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \bigoplus_{i=0}^n s_i y)$, e denotando $g_{ij} : s_i y \rightarrow s_i s_j z$ podemos escrever a composta $fg \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, z)$ como o produto matricial:

$$(f_i)_{1 \times (n+1)} \cdot (s_i g_{i^{-1}j})_{(n+1) \times (n+1)}.$$

Para cada objeto $x \in \mathcal{C}$ considere a órbita $\tilde{x}$ da ação de G , isto é, $\tilde{x} = \{sx; s \in G\}$. Se $y \in \tilde{x}$ então temos um isomorfismo $x \cong y$ em $\mathcal{C}[G]$. Realmente, se $y = tx$, para algum $t \in G$, então

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, y) = \bigsqcup_{s \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, stx) = \bigsqcup_{g \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, gx) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, x).$$

Assim, $1_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(x, y)$ e, de forma similar, $1_y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(y, x)$. Estes morfismos são inversos um do outro.

Desta forma, a menos de equivalência de categorias, podemos assumir que objetos em $\mathcal{C}[G]$ são as órbitas $\tilde{x}$, com $x \in \mathcal{C}$ e morfismos são $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigsqcup_{s \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, sy)$, onde x e y são representantes das órbitas. Veja que em Skew-categorias temos quociente de objetos.

3.3 Categorias Órbitas

Seja $\mathcal{T}$ uma categoria triangulada e seja $G : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ um automorfismo. Considere $G^{\mathbb{Z}}$ o grupo de automorfismos gerado por G . A categoria órbita $\mathcal{T}/G^{\mathbb{Z}}$ tem como objetos as G -órbitas de objetos em $\mathcal{T}$, ou seja, para cada $X \in \mathcal{T}$, a G -órbita $\tilde{X} = \{G^i X / i \in \mathbb{Z}\}$ é um objeto na categoria órbita e os morfismos são dados por:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/G^{\mathbb{Z}}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, G^i Y),$$

em que, X e Y são objetos em $\mathcal{T}$ e, $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são os correspondentes objetos em $\mathcal{T}/G^{\mathbb{Z}}$. Por simplicidade, denotaremos $\mathcal{T}/G^{\mathbb{Z}}$ por $\mathcal{T}/G$. Em geral, categorias órbitas $\mathcal{T}/G$

não são trianguladas, mesmo com $\mathcal{T}$ uma categoria triangulada. Em [19] Keller estabeleceu condições suficientes para que isso ocorresse, em um caso particular, dadas pelo seguinte teorema:

Teorema 56. *Seja $\mathcal{D} = D^b(\mathcal{H})$ a categoria derivada limitada de $\mathcal{H}$, em que $\mathcal{H}$ é uma K -categoria abeliana hereditária. Suponha $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ um automorfismo que satisfaça:*

- (i) *Para cada U em $\text{ind}\mathcal{H}$, apenas um número finitos objetos $G^i U$, $i \in \mathbb{Z}$, estão em $\text{ind}\mathcal{H}$.*
- (ii) *Existe algum inteiro $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{U[n]; U \in \text{ind}\mathcal{H}, n \in [-N, N]\}$ contém um sistema de representantes das órbitas de G sobre $\text{ind}\mathcal{D}$.*

Então existe uma triangulação da categoria órbita $\mathcal{D}/G$ tal que o funtor projeção $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/G$ é triangular.

Demonstração: Teorema 1, em [19]. □

Cabe salientar que a demonstração do teorema acima não apresenta, de forma explícita, os triângulos na categoria órbita $\mathcal{D}/G$.

Sejam Q um quiver finito, conexo e sem ciclos orientados, K um corpo algebricamente fechado e seja KQ a álgebra de caminhos do quiver Q . Consideremos $\mathcal{T}$ a categoria derivada limitada $D^b(KQ)$ de KQ -módulos finitamente gerados com funtor shift $[1]$. Por simplicidade, denotaremos $D^b(KQ)$ por $\mathcal{D}_Q$. Seja $F : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q$ o funtor triângulo $F = \tau^{-1}[1]$, em que τ denota a translação de Auslander-Reiten. Como composição de dois automorfismos, τ e $[1]$, segue que F é um automorfismo da categoria derivada limitada $\mathcal{D}_Q$.

Lema 57. *Seja $\{1, \dots, n\}$ vértices do quiver Q . Consideremos as mesmas notações acima, então $\mathcal{S} = \text{ind}(\text{mod}KQ) \cup \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$ é um sistema de representantes das órbitas de F sobre $\text{ind}\mathcal{D}_Q$, onde P_i é um módulo projetivo indecomponível.*

Demonstração: De fato, seja $M \in \text{ind}(\text{mod}KQ)$, suponha primeiramente M um módulo projetivo, então $\tau^{-1}M$ não é projetivo (pois KQ é hereditária) e, daí $FM = \tau^{-1}M[1]$ não pertence a $\text{ind}(\text{mod}KQ)$ (por ser translação) e nem ao conjunto $\{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$. Logo, $FM \notin \mathcal{S}$. Suponha agora M não projetivo, então $M[1] \notin \mathcal{S}$. Logo, $FM = \tau^{-1}M[1] \notin \mathcal{S}$. Finalmente, se $M \in \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$, então $M = P_i[1]$ para algum i . Assim, $FM = FP_i[1] = \tau^{-1}P_i[2]$ e, claramente, $\tau^{-1}P_i[2] \notin \mathcal{S}$. Portanto, $\mathcal{S}$ possui somente um representante de cada F -órbita. Além disso, estes são todos os representantes das órbitas de F sobre $\text{ind}\mathcal{D}_Q$. De fato, suponha que exista outro representante U que não está em $\mathcal{S}$. Assim, U é da forma $M[i]$ para algum KQ -módulo indecomponível M , com $i \in \mathbb{Z}^* - \{1\}$ ou é da forma $M[1]$ para algum KQ -módulo indecomponível M não projetivo. Note que basta provar para $U = M[1]$. Como M é não projetivo $\tau M \in \text{ind}(\text{mod}KQ)$ e, $F(\tau M) = \tau^{-1}[1](\tau M) = M[1] = U$, daí $\tilde{U} = \tau \widetilde{M} \in \mathcal{S}$, o que contradiz nossa hipótese. □

Proposição 58. *Sejam $X, Y \in \mathcal{S}$, temos $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, F^i Y) = 0$, para todo $i \neq 0, 1$.*

Demonstração: Como $F = \tau^{-1}[1]$ temos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, F^i Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, \tau^{-i} Y[i])$. Pelo fato de KQ ser hereditária, segue de (1.1), página 20, que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, F^i Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, \tau^{-i} Y[i]) = \text{Ext}_{KQ}^i(X, \tau^{-i} Y) = 0,$$

para $i < 0$ e $i \geq 2$. □

3.4 Categorias Cluster

Definição 59. Sejam Q um quiver finito, conexo e acíclico, KQ a álgebra de caminhos do quiver Q , em que K é um corpo algebricamente fechado, e $\mathcal{D}_Q$ a categoria derivada limitada de KQ -módulos finitamente gerados com funtor shift $[1]$. Considere $F : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q$ o funtor triângulo $F = \tau^{-1}[1]$, em que τ denota a translação de Auslander-Reiten. Definimos a categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ como a categoria órbita $\mathcal{D}_Q/F$ cujos objetos são as F -órbitas de objetos em $\mathcal{D}_Q$, ou seja, para cada $X \in \mathcal{D}_Q$, a F -órbita $\tilde{X} = \{F^i X \mid i \in \mathbb{Z}\}$ é um objeto na categoria cluster e os morfismos são dados por:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, F^i Y),$$

em que, X e Y são objetos em $\mathcal{D}_Q$ e, $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são os correspondentes objetos em $\mathcal{C}_Q$.

Lema 60. *Considere as mesmas notações da definição acima então F satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 56.*

Demonstração: De fato, pela descrição no exemplo 34 é suficiente analisar os KQ -módulos indecomponíveis. Seja M um KQ -módulo indecomponível é claro que somente $F^0 M \in \text{ind}(\text{mod} KQ)$, satisfazendo o item (i). O item (ii) foi demonstrado no Lema 57. □

Quando $X, Y \in \mathcal{S}$, a Proposição 58 nos garante que:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, Y) \sqcup \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, Y) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY), \end{aligned} \tag{3.1}$$

pois como apenas para dois valores de i temos $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, F^i Y) \neq 0$, então o produto na categoria $\mathcal{D}_Q$ é isomorfo ao co-produto. Desta forma, podemos denotar um morfismo $\tilde{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ por $\tilde{f} = [f_0 \ f_1]$, com $f_0 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, Y)$ e $f_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY)$. Quando não houver risco de ambiguidade, denotaremos os objetos $\tilde{X}$ na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ simplesmente por X .

Como F é um automorfismo segue do lema acima e do Teorema 56 que a categoria cluster $\mathcal{C}_Q = \mathcal{D}_Q/F$ é uma categoria triangulada cujo funtor projeção $\pi : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q/F$, que associa cada X em $\mathcal{D}_Q$ à sua F -órbita $\tilde{X}$, e cada morfismo $f \in \mathcal{D}_Q$,

o morfismo $\tilde{f} \in \mathcal{C}_Q$, projeção de f , dado por $\tilde{f} = \begin{bmatrix} f & 0 \end{bmatrix}$, é triangular. Como consequência disto, o funtor suspensão $[1]_{\mathcal{C}_Q}$ em $\mathcal{C}_Q$ é induzido pelo funtor suspensão $[1]_{\mathcal{D}_Q}$ em $\mathcal{D}_Q$, ou seja, $\widetilde{X[1]_{\mathcal{C}_Q}} = X[1]_{\mathcal{D}_Q}$.

Seja A uma K -álgebra e considere $\text{mod} A$ a categoria de A -módulos. É conhecido que dados $M, N \in \text{mod} A$ temos $\text{Ext}_A^1(M, N) \cong \text{Hom}_{D^b(A)}(M, N[1])$. Este resultado motiva a seguinte definição de $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^1(X, Y)$ numa categoria triangulada $\mathcal{T}$ com funtor suspensão $[1]$. Para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{T}$ temos:

$$\text{Ext}_{\mathcal{T}}^1(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[1])$$

Segue da definição que, para quaisquer complexos $X, Y \in \mathcal{D}_Q$ e objetos $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{C}_Q$:

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, Y[1]) \quad \text{e} \quad \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) := \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}[1]),$$

na categoria derivada $\mathcal{D}_Q$ e na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$, respectivamente. Daí temos que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}[1]) \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, F^i Y[1]) \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Y). \end{aligned}$$

logo,

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Y), \quad (3.2)$$

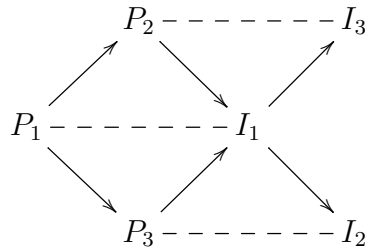
Pela Proposição 58 para X, Y em $\mathcal{S}$, temos:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) \oplus \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, FY) \quad (3.3)$$

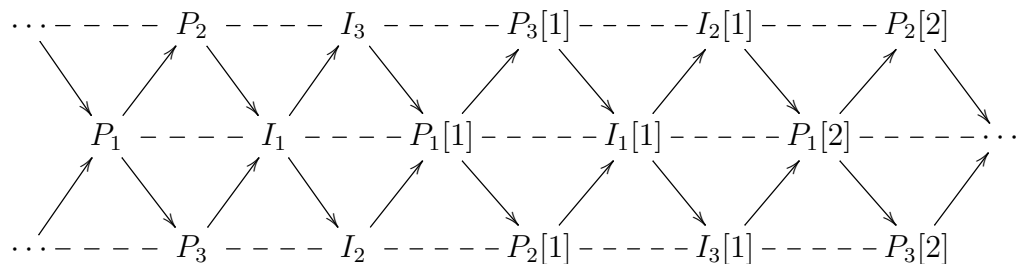
Exemplo 61. Seja Q o quiver

$$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$$

o quiver de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos KQ , é:



Pelo fato da álgebra de caminhos KQ ser hereditária, podemos descrever a categoria derivada $\mathcal{D}_Q$ dada por:



Vamos identificar os objetos que estão na mesma F -órbita para construirmos a categoria cluster. Considerando o módulo P_1 , temos:

$$FP_1 = \tau^{-1}P_1[1] = I_1[1],$$

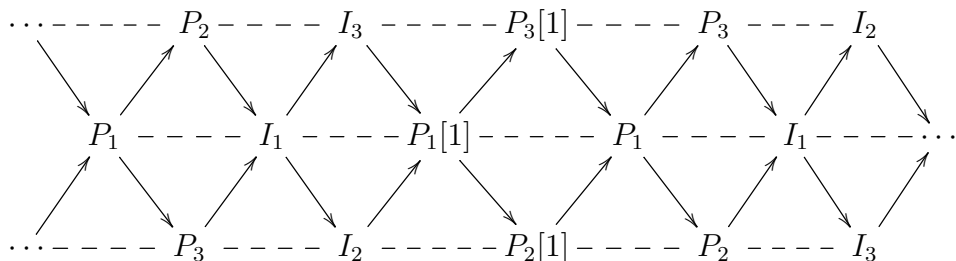
assim P_1 encontra-se na mesma F -órbita que $I_1[1]$. Considerando agora o módulo P_2 , temos que P_2 está na mesma F -órbita que $I_3[1]$, pois:

$$FP_2 = \tau^{-1}P_2[1] = I_3[1].$$

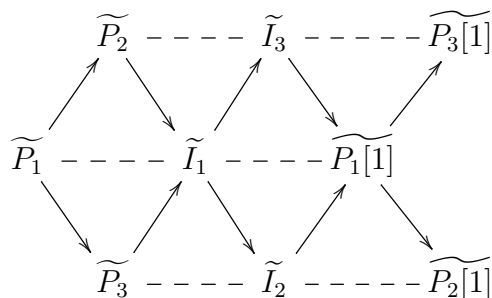
Fazendo o mesmo processo para o módulo P_3 obtemos:

$$FP_3 = \tau^{-1}P_3[1] = I_2[1],$$

isto é, P_3 está na mesma F -órbita que $I_2[1]$. Dessa forma, identificamos no quiver de Auslander-Reiten os representantes das F -órbitas, ou seja,



Portanto, restringindo às órbitas, obtemos a seguinte categoria cluster $\mathcal{C}_\rho$:



Observe que, as flechas na figura acima são somas diretas de morfismos. Por exemplo, a flecha $\widetilde{P}_2 \rightarrow \widetilde{I}_1$ corresponde a um morfismo $\widetilde{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{P}_2, \widetilde{I}_1)$. Como $P_2, I_1 \in \mathcal{S}$, então por (3.1), $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{P}_2, \widetilde{I}_1) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2, I_1) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2, FI_1)$. Assim, $\widetilde{f} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 \end{bmatrix}$, em que $f_0 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2, I_1)$ é a flecha no quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod} KQ$ e $f_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2, F(I_1)) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2, P_1[2]) = 0$, ou seja, $f_1 = 0$.

Proposição 62. *Seja $\mathcal{D}_Q$ a categoria derivada limitada de KQ -módulos finitamente gerados e seja $F : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q$ o funtor triângulo $F = \tau^{-1}[1]$. Então a categoria triangulada $\mathcal{C}_Q$ é uma categoria de Krull-Schmidt.*

Demonstração: Proposição 1.2 em [4]. □

Utilizando a proposição acima e sua demonstração podemos mostrar que os objetos indecomponíveis em $\mathcal{C}_Q$ são exatamente da forma $\tilde{X}$ para X um objeto em $\mathcal{S} = \text{ind}(\text{mod} KQ) \cup \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$, a grosso modo, podemos dizer que os objetos indecomponíveis na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ são os objetos indecomponíveis em $\text{mod} KQ$ mais n objetos extras que são os n indecomponíveis projetivos $P_i[1]$. Daí para $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ objetos indecomponíveis em $\mathcal{C}_Q$ temos a igualdade (3.1), ou seja,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, Y) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY).$$

Ainda pelo fato de $\mathcal{C}_Q$ ser de Krull-Schmidt, além de objetos indecomponíveis, temos os conceitos de morfismos irredutíveis o que nos permite construir uma Teoria de Auslander-Reiten sobre $\mathcal{C}_Q$. Os triângulos de Auslander-Reiten em $\mathcal{C}_Q$ são induzidos pelos triângulos de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}_Q$, como mostra a proposição abaixo:

Proposição 63. *Seja Q um quiver acíclico e seja $\mathcal{D}_Q$ a categoria derivada limitada de KQ -módulos finitamente gerados. Considere $F : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q$ o funtor triângulo $F = \tau^{-1}[1]$. Então $\mathcal{C}_Q$ possui triângulos de Auslander-Reiten e todo triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{C}_Q$ é projeção de um triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}_Q$. Além disso, o quiver de Auslander-Reiten de $\mathcal{C}_Q$ é $Q(\mathcal{D}_Q)/F$.*

Demonstração: Seja $\tilde{X}$ um objeto em $\text{ind}\mathcal{C}_Q$. Como a categoria $\mathcal{D}_Q$ é hereditária e X é um objeto em $\mathcal{S} \subseteq \text{ind}\mathcal{D}_Q$ existe o triângulo

$$\tau X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \xrightarrow{s} \tau X[1] \quad (3.4)$$

de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}_Q$. Pelo fato de $\pi : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q/F$ ser um funtor triângulo temos que existe o triângulo induzido

$$\widetilde{\tau X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{s}} \widetilde{\tau X[1]} \quad (3.5)$$

em $\mathcal{C}_Q$. Queremos mostrar que o triângulo 3.5 é de Auslander-Reiten, ou seja, $\tilde{f}$ é quase cindida à esquerda, $\tilde{g}$ é quase cindida à direita e $\tilde{s} \neq 0$. Em razão de $\tilde{s}$ ser projeção de s temos $\tilde{s} = \begin{bmatrix} s & 0 \end{bmatrix}$. Como o triângulo 3.4 é de Auslander-Reiten temos $s \neq 0$. Assim, $\tilde{s} \neq 0$. Seja $\tilde{Z}$ em $\text{ind}\mathcal{C}_Q$, com $\widetilde{\tau X} \not\cong \tilde{Z}$ e seja $\tilde{h} : \widetilde{\tau X} \rightarrow \tilde{Z}$ um morfismo não seção. Como $\widetilde{\tau X}, \tilde{Z} \in \text{ind}\mathcal{C}_Q$, então $\tilde{h} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \end{bmatrix}$ com $h_0 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau X, Z)$ e $h_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau X, FZ)$. Em virtude de $\widetilde{\tau X} \not\cong \tilde{Z}$, segue que $\tau X \notin \tilde{Z}$, logo $\tau X \not\cong F^i Z$ e h_i não é seção, para $i = 0, 1$. Assim, existem $t_0 : E \rightarrow Z$ e $t_1 : E \rightarrow FZ$ tais que $ft_0 = h_0$ e $ft_1 = h_1$, ou seja, o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tau X & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow h_i & \nearrow t_i & \\ F^i Z & & \end{array}$$

é comutativo. Logo, tome $\tilde{t} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 \end{bmatrix}$, com $t_0 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(E, Z)$ e $t_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(E, FZ)$. Pelo fato de $\tilde{f}$ ser projeção de f temos $\tilde{f} = \begin{bmatrix} f & 0 \end{bmatrix}$, daí

$$\tilde{f}\tilde{t} = \begin{bmatrix} f & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_0 & t_1 \\ F^1t_1 & F^1t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ft_0 & ft_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \end{bmatrix} = \tilde{h}$$

Portanto, $\tilde{f}$ é quase cindida à esquerda. Analogamente, mostramos que $\tilde{g}$ é quase cindida à direita e, daí 3.5 é um triângulo de Auslander-Reiten.

Como o triângulo 3.5 é de Auslander-Reiten segue que $\widetilde{\tau_{\mathcal{D}_Q}X} = \tau_{\mathcal{C}_Q}\tilde{X}$. Além disso, $Q(\mathcal{D}_Q)/F$ é o quiver de Auslander-Reiten de $\mathcal{C}_Q$. $\square$

A proposição acima caracteriza os triângulos de Auslander-Reiten na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$, embora os triângulos exatos em $\mathcal{C}_Q$ não sejam, de forma geral, projeções de triângulos em $\mathcal{D}_Q$. Na verdade não existe uma descrição explícita dos triângulos exatos na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ ¹.

Um resultado interessante na categoria cluster é que o funtor suspensão é igual a translação de Auslander-Reiten, como mostra o corolário abaixo:

Corolário 64. $\tau_{\mathcal{C}_Q} = [1]_{\mathcal{C}_Q}$.

Demonstração: Seja $\tilde{M}$ um objeto em $\mathcal{C}_Q$, então

$$\tau_{\mathcal{C}_Q}\tilde{M} = \widetilde{\tau M} = \widetilde{\tau FM} = \tau\widetilde{\tau^{-1}M}[1] = \widetilde{M[1]} = \tilde{M}[1]_{\mathcal{C}_Q},$$

a primeira igualdade segue da Proposição 63. $\square$

O resultado acima nos garante um fato muito interessante. Veja o exemplo abaixo.

Considere o morfismo $f : I_1 \rightarrow I_2 \oplus I_3$ em $\mathcal{D}_Q$ no exemplo 61. Construindo o triângulo de Auslander-Reiten, obtemos:

$$I_1 \xrightarrow{f} I_2 \oplus I_3 \xrightarrow{g} P_1[1] \longrightarrow I_1[1]$$

Pela proposição 63, temos o seguinte triângulo em $\mathcal{C}_Q$:

$$\tilde{I}_1 \xrightarrow{f} \tilde{I}_2 \oplus \tilde{I}_3 \xrightarrow{g} \widetilde{P_1[1]} \longrightarrow \widetilde{I_1[1]}.$$

Segue que:

$$\tilde{I}_1 \xrightarrow{f} \tilde{I}_2 \oplus \tilde{I}_3 \xrightarrow{g} \widetilde{P_1[1]} \longrightarrow \tilde{I}_1[1]_{\mathcal{C}_Q}.$$

Pelo Corolário 64, temos:

$$\tilde{I}_1 \xrightarrow{f} \tilde{I}_2 \oplus \tilde{I}_3 \xrightarrow{g} \widetilde{P_1[1]} \longrightarrow \tau_{\mathcal{C}_Q}\tilde{I}_1,$$

¹A demonstração da triangulação da categoria cluster, e mais geralmente das categorias órbitas cujos automorfismos satisfazem as condições do Teorema 56 é feita por Keller, em [19], por uma imersão exata em uma DG categoria triangulada de Frobenius. Os elementos na imagem desta imersão não estão explícitos.

daí temos:

$$\widetilde{I}_1 \xrightarrow{f} \widetilde{I}_2 \oplus \widetilde{I}_3 \xrightarrow{g} \widetilde{P_1[1]} \longrightarrow \widetilde{P_1}.$$

Por outro lado, temos o seguinte triângulo em $\mathcal{C}_Q$:

$$\widetilde{P_1} \xrightarrow{h} \widetilde{P_2} \oplus \widetilde{P_3} \xrightarrow{t} \widetilde{I_1} \longrightarrow \widetilde{P_1[1]}.$$

Portanto,

$$\widetilde{I}_1 \xrightarrow{f} \widetilde{I}_2 \oplus \widetilde{I}_3 \xrightarrow{g} \widetilde{P_1[1]} \longrightarrow \widetilde{P_1} \xrightarrow{h} \widetilde{P_2} \oplus \widetilde{P_3} \xrightarrow{t} \widetilde{I_1} \longrightarrow \widetilde{P_1[1]},$$

ou seja, os triângulos na categoria cluster formam um ciclo.

Seja $D = \text{Hom}_K(-, K)$ o funtor contravariante que é conhecido como dualidade Standard. Na categoria $\mathcal{D}_Q$ é conhecida a seguinte dualidade de Serre:

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(M, N) \simeq \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(N, \tau M), \quad (3.6)$$

em que, $M, N \in \mathcal{D}_Q$. A proposição abaixo induz uma fórmula análoga para $\mathcal{C}_Q$.

Proposição 65 (Dualidade de Serre). *Sejam $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ objetos em $\mathcal{C}_Q$ e seja $D = \text{Hom}_K(-, K)$. A categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ tem dualidade de Serre, ou seja,*

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \simeq \text{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{Y}, \tau_{\mathcal{C}_Q} \widetilde{X}),$$

funtorial em ambos $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$.

Demonstração: Segue dos isomorfismos seguintes:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}[1]) \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, F^i Y[1]) \\ &\simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(F^i Y, \tau X) && \text{segue de (3.6)} \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(Y, F^i \tau X) && F^i \text{ é equivalência} \\ &= \text{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{Y}, \widetilde{\tau X}) \\ &= \text{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\widetilde{Y}, \tau_{\mathcal{C}_Q} \widetilde{X}) \end{aligned}$$

□

Uma categoria triangulada $\mathcal{T}$ é dita *n-Calabi-Yau* se para $M, N \in \mathcal{T}$ temos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, N) \simeq \text{DHom}_{\mathcal{T}}(N, M[n]).$$

A categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ tem a propriedade de ser 2-Calabi-Yau graças a proposição anterior que nos garante a dualidade de Serre em $\mathcal{C}_Q$, veja a proposição abaixo:

Proposição 66. *A categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ é 2-Calabi-Yau, ou seja,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{Y}, \tilde{X}[2]),$$

para $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{C}_Q$.

Demonstração: Sejam $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{C}_Q$. É suficiente mostrar a seguinte "simetria" do funtor $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1$:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{DExt}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{Y}, \tilde{X}), \quad (3.7)$$

pois,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}[-1]) \\ &\simeq \mathrm{DExt}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{Y}[-1], \tilde{X}) && \text{segue de (3.7)} \\ &= \mathrm{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{Y}[-1], \tilde{X}[1]) \\ &= \mathrm{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{Y}, \tilde{X}[2]) \end{aligned}$$

Agora mostraremos que (3.7) de fato se verifica.

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{Y}, \tau\tilde{X}) = \mathrm{DHom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{Y}, \tilde{X}[1]) = \mathrm{DExt}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{Y}, \tilde{X})$$

O isomorfismo segue da dualidade de Serre em $\mathcal{C}_Q$ e a primeira igualdade de $\tau_{\mathcal{C}_Q} = [1]_{\mathcal{C}_Q}$. $\square$

Proposição 67. *Seja KQ a álgebra de caminhos de um quiver Q acíclico.*

(a) *Se $X, Y \in \mathcal{D}_Q$, então*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) \simeq \mathrm{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(Y, F^{-1}X).$$

(b) *Se X e Y são KQ -módulos indecomponíveis, então*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{Ext}_{KQ}^1(X, Y) \oplus \mathrm{DExt}_{KQ}^1(Y, X).$$

(c) *Se X e Y são KQ -módulos e X é projetivo, então*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_{KQ}(X, Y).$$

Demonstração:

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) &\simeq \mathrm{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(Y, \tau X) \\ &= \mathrm{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(Y[1], \tau X[1]) \\ &= \mathrm{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(Y[1], \tau X) \\ &= \mathrm{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(Y, \tau X[-1]) \\ &= \mathrm{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(Y, F^{-1}X) \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) \simeq \mathrm{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(Y, F^{-1}X)$, como queríamos.

(b) Sejam X e Y KQ -módulos indecomponíveis, então

$$\begin{aligned}
\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Y) && \text{segue de (3.2)} \\
&= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X[-1], F^i Y) \\
&= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau^{-1} \tau X[-1], F^i Y) \\
&= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau^{-1} F^{-1} X, F^i Y) \\
&= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau^{-1} X, F^{i+1} Y)
\end{aligned}$$

Como $X \in \text{ind}(\text{mod } KQ)$, então $\tau^{-1}X$ pertence a $\mathcal{S}$. Daí, pela Proposição 58, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau^{-1}X, Y) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau^{-1}X, FY) \\
&= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau^{-1}X[1], Y[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, \tau FY) \\
&\simeq \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(FX, Y) \oplus \text{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(FY, X) \\
&\simeq \text{DExt}_{KQ}^1(Y, X) \oplus \text{Ext}_{KQ}^1(X, Y)
\end{aligned}$$

Em que, o último isomorfismo é consequência das seguintes observações. Pelo item (a) e pelo fato de X, Y serem KQ -módulos, temos:

$$\text{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(Y, F^{-1}X) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) \simeq \text{Ext}_{KQ}^1(X, Y).$$

Além disso,

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(FX, Y) = \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^{-1}Y) = \text{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(Y, X) \simeq \text{DExt}_{KQ}^1(Y, X).$$

(c) Sem perda de generalidade, suponha $X, Y \in \text{ind}(\text{mod } KQ)$, segue da Proposição 58 que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, Y) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY). \quad (3.8)$$

Agora, note que:

$$\begin{aligned}
\text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY) &= \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(X, \tau^{-1}Y[1]) \\
&\simeq \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(\tau X, Y[1]) \\
&= \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(\tau X, Y).
\end{aligned}$$

Como X é projetivo por hipótese, então $\tau X = I[-1]$, para algum módulo injetivo I , assim:

$$\text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(\tau X, Y) = \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(I[-1], Y) \simeq \text{Ext}_{KQ}^2(I, Y) = 0,$$

pois KQ é hereditária. Logo, $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, FY) = 0$ daí substituindo este resultado em (3.8) temos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{KQ}(X, Y).$$

□

3.5 Teoria Tilting em categorias cluster

Nesta seção apresentaremos a teoria tilting em categorias cluster tendo como referência [4]. Robert Marsh, Markus Reineke e Andrei Zelevinsky em 2003 mostraram que existe uma conexão entre álgebras cluster e teoria tilting para álgebras hereditárias em [22], motivando assim a criação desta teoria. Neste trabalho esta teoria será utilizada para fazer conexão entre álgebras cluster e categorias cluster. Ao longo desta seção KQ é a álgebra de caminhos hereditária de um quiver Q acíclico.

Definição 68. Um subconjunto $\mathcal{T}$ de objetos indecomponíveis não-isomorfos em $\mathcal{D}_Q$ ou em $\mathcal{C}_Q$ é dito uma *Ext-configuração*, se:

- (E1) $\text{Ext}_{\bullet}^1(X, Y) = 0$ para todo X, Y em $\mathcal{T}$, e;
- (E2) Para qualquer indecomponível $Z \notin \mathcal{T}$ existe algum $X \in \mathcal{T}$ tal que $\text{Ext}_{\bullet}^1(X, Z) \neq 0$.

O próximo resultado nos mostra que uma Ext-configuração em $\mathcal{D}_Q$ é estável sob a ação do funtor $F = \tau^{-1}[1]$. Este será mais um dos motivos da conveniência na definição do funtor F e terá como consequência que a categoria cluster é um ambiente mais adequado para a teoria tilting, eliminando algumas deficiências que existem na categoria de módulos.

Proposição 69. *Seja $\mathcal{T}$ uma Ext-configuração em $\mathcal{D}_Q$ e seja $M \in \text{ind}\mathcal{D}_Q$. Então $M \in \mathcal{T}$ se, e somente se, $FM \in \mathcal{T}$.*

Demonstração: Suponha $M \in \mathcal{T}$. É suficiente mostrar que FM e $F^{-1}M$ estão em $\mathcal{T}$. É claro que $FM, F^{-1}M \in \text{ind}\mathcal{D}_Q$. Mostraremos primeiro que $F^{-1}M \in \mathcal{T}$. Suponha o contrário, ou seja, $F^{-1}M \notin \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ é uma Ext-configuração, por (E2) existe $X \in \mathcal{T}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^{-1}M) \neq 0$. Pela Proposição 67(a), temos:

$$\text{DExt}_{\mathcal{D}_Q}^1(M, X) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^{-1}M) \neq 0.$$

Daí, $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(M, X) \neq 0$ o que contradiz (E1), pois $X, M \in \mathcal{T}$. Logo, $F^{-1}M \in \mathcal{T}$. Analogamente, suponha que $FM \notin \mathcal{T}$. Assim, por (E2), existe algum $X \in \mathcal{T}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, FM) \neq 0$. Como $X \in \mathcal{T}$, pelo que provamos acima $F^{-1}X \in \mathcal{T}$, daí

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(F^{-1}X, M) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, FM) \neq 0$$

o que contradiz (E1). Portanto, $FM \in \mathcal{T}$. □

Ext-configurações em $\mathcal{D}_Q$ e em $\mathcal{C}_Q$ possuem uma ligação dada pela seguinte proposição:

Proposição 70. (a) *Se $\tilde{\mathcal{T}}$ é uma Ext-configuração na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$, então*

$$\mathcal{T} = \left\{ X \in \mathcal{D}_Q \mid \tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}} \right\}$$

é uma Ext-configuração em $\mathcal{D}_Q$.

(b) Se $\mathcal{T}$ é uma Ext-configuração em $\mathcal{D}_Q$, então

$$\tilde{\mathcal{T}} = \left\{ \tilde{X} / X \in \mathcal{T} \right\}$$

é uma Ext-configuração em $\mathcal{C}_Q$.

Demonstração:

- (a) Queremos mostrar que $\mathcal{T} = \left\{ X \in \mathcal{D}_Q / \tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}} \right\}$ satisfaz (E1) e (E2). Sejam X e Y em $\mathcal{T}$, então $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{T}}$. Como $\tilde{\mathcal{T}}$ é uma Ext-configuração em $\mathcal{C}_Q$, então $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$. Assim, $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Y) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, em particular, $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) = 0$, logo a condição (E1) é satisfeita. Seja $Z \in \text{ind}\mathcal{D}_Q$ tal que $Z \notin \mathcal{T}$. Então $\tilde{Z}$ é indecomponível em $\mathcal{C}_Q$, com $\tilde{Z} \notin \tilde{\mathcal{T}}$. Assim, por (E2) existe $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Z}) \neq 0$ na categoria $\mathcal{C}_Q$. Logo,

$$0 \neq \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Z}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Z),$$

ou seja, para pelo menos algum $i \in \mathbb{Z}$, temos $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Z) \neq 0$, assim $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(F^i X, Z) \neq 0$. Sabemos que $\tilde{X} = \widetilde{F^i X}$, como $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}}$, então $\widetilde{F^i X} \in \tilde{\mathcal{T}}$, segue daí que $F^i X \in \mathcal{T}$. Logo, a condição (E2) é satisfeita. Portanto, $\mathcal{T}$ é uma Ext-configuração em $\mathcal{D}_Q$.

- (b) Vamos mostrar agora que $\tilde{\mathcal{T}} = \left\{ \tilde{X} / X \in \mathcal{T} \right\}$ é uma Ext-configuração. Sejam $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{T}}$ e suponha $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \neq 0$. Pela construção de $\tilde{\mathcal{T}}$ temos que $X, Y \in \mathcal{T}$. Como

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Y),$$

então existe algum i inteiro tal que $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, F^i Y) \neq 0$. Pela Proposição 69, $F^i Y \in \mathcal{T}$, pois $Y \in \mathcal{T}$, o que é uma contradição para (E1) em $\mathcal{T}$. Logo, $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$, satisfazendo (E1). Seja $\tilde{Z} \notin \tilde{\mathcal{T}}$ tal que $Z \in \text{ind}\mathcal{D}_Q$. Então, $Z \notin \mathcal{T}$, assim existe algum $X \in \mathcal{T}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Z) \neq 0$, por (E2) em $\mathcal{T}$. Segue que $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Z}) \neq 0$. Como $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}}$ temos que $\tilde{\mathcal{T}}$ satisfaz (E2). Portanto, $\tilde{\mathcal{T}}$ é uma Ext-configuração em $\mathcal{C}_Q$. □

Um conceito importante na teoria tilting é o de conjunto tilting, dado pela definição abaixo.

Definição 71. Dizemos que um conjunto $\mathcal{T}$ de objetos indecomponíveis não-isomorfos em $\mathcal{D}_Q$ ou em $\mathcal{C}_Q$ é um *conjunto tilting*, se satisfaz as seguintes condições:

- (C1) $\text{Ext}^1(T, T') = 0$, para todo $T, T' \in \mathcal{T}$, neste caso, dizemos que $\mathcal{T}$ é um conjunto rígido, e;

(C2) $\mathcal{T}$ é maximal com respeito a esta propriedade.

A condição (C2) é equivalente a dizer que, para todo indecomponível $M \notin \mathcal{T}$ existe algum $T \in \mathcal{T}$ tal que $\text{Ext}^1(T, M) \neq 0$ ou $\text{Ext}^1(M, T) \neq 0$.

Os conceitos de conjunto tilting e Ext-configurações são coincidentes em categorias cluster. Veremos que o mesmo não ocorre na categoria derivada.

Proposição 72. *Seja $\tilde{\mathcal{T}}$ um conjunto de objetos indecomponíveis não-isomorfos em $\mathcal{C}_Q$. $\tilde{\mathcal{T}}$ é um conjunto tilting se, e somente se, é uma Ext-configuração.*

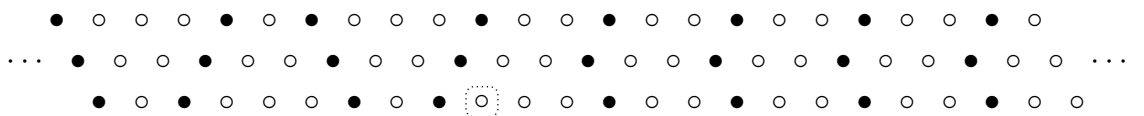
Demonstração: Suponha $\tilde{\mathcal{T}}$ um conjunto tilting em $\mathcal{C}_Q$. Assim, por definição, $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, Y) = 0$, para todo $X, Y \in \tilde{\mathcal{T}}$, satisfazendo a condição (E1). Seja $M \in \text{ind}\mathcal{C}_Q$ tal que $M \notin \tilde{\mathcal{T}}$. Se $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, M) = 0$, para todo $X \in \tilde{\mathcal{T}}$, pela simetria do funtor $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1$ (3.7), página 50, segue que $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, X) = 0$, para todo $X \in \tilde{\mathcal{T}}$. Assim, $\tilde{\mathcal{T}} \cup \{M\}$ é um conjunto rígido, o que contradiz a maximalidade de $\tilde{\mathcal{T}}$. Logo, existe algum $X \in \tilde{\mathcal{T}}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, M) \neq 0$, assim (E2) é satisfeito. Portanto, $\tilde{\mathcal{T}}$ é uma Ext-configuração em $\mathcal{C}_Q$. Reciprocamente, suponha $\tilde{\mathcal{T}}$ uma Ext-configuração em $\mathcal{C}_Q$. Queremos mostrar que $\tilde{\mathcal{T}}$ é um conjunto tilting. Por definição, $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, Y) = 0$, para todo $X, Y \in \tilde{\mathcal{T}}$, assim a condição (C1) é satisfeita. Como $\tilde{\mathcal{T}}$ uma Ext-configuração, por (E2), para todo indecomponível $M \notin \tilde{\mathcal{T}}$ existe algum $X \in \tilde{\mathcal{T}}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, M) \neq 0$, ou seja, $\tilde{\mathcal{T}}$ é maximal com respeito a propriedade (C1). Portanto, $\tilde{\mathcal{T}}$ é um conjunto tilting. $\square$

Observe que para provarmos a primeira implicação na proposição acima usamos a seguinte simetria do funtor Ext^1 válida em $\mathcal{C}_Q$:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \text{DExt}_{\mathcal{C}_Q}^1(\tilde{Y}, \tilde{X}).$$

Porém, esta simetria não ocorre, em geral, na categoria derivada $\mathcal{D}_Q$. Segue daí que em $\mathcal{D}_Q$ existem conjuntos tilting que não são Ext-configurações como mostra o próximo exemplo. Este é um dos fatos que mostra que a categoria cluster é um bom ambiente para a teoria tilting, enquanto que, na categoria derivada $\mathcal{D}_Q$ existem alguns problemas.

Exemplo 73. Suponha KQ a álgebra de caminhos de um quiver Q cujo grafo subjacente é do tipo A_3 . Na figura abaixo ilustramos o quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada $\mathcal{D}_Q$. As flechas foram omitidas para facilitar a visualização.



Seja o conjunto infinito $\mathcal{T}$ formado pelos objetos que seguem o padrão dos círculos preenchidos. Pela dualidade de Serre na categoria derivada, temos:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(Y, \tau X).$$

Considerando quaisquer dois objetos X, Y em $\mathcal{T}$ e, lembrando que para qualquer objeto X , a translação τX é o objeto imediatamente à esquerda, temos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(Y, \tau X) = 0$ daí $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Y) = 0$, satisfazendo a condição (C1) da definição 71. Podemos observar ainda na figura que para qualquer objeto M tal que $M \notin \mathcal{T}$, existe algum $X \in \mathcal{T}$ tal que:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, M) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(M, \tau X) \neq 0,$$

ou

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(M, X) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(X, \tau M) \neq 0,$$

isto é, $\mathcal{T}$ é maximal com respeito a condição (C1). Portanto, $\mathcal{T}$ é um conjunto tilting. Considere agora o objeto Z correspondente ao vértice destacado na figura com um pontilhado em volta. Temos que, $Z \notin \mathcal{T}$ e para todo $X \in \mathcal{T}$,

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(X, Z) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(Z, \tau X) = 0,$$

portanto, $\mathcal{T}$ não satisfaz (E2), logo não é uma Ext-configuração. Note ainda que $\mathcal{T}$ não é F -invariante, assim pela Proposição 69 não poderia ser uma Ext-configuração.

3.6 Objetos Tilting e Módulos Tilting

Na seção anterior definimos e estudamos a relação entre conjuntos tilting e Ext-configurações. Vamos introduzir aqui os conceitos de objetos tilting básico em $\mathcal{C}_Q$ e estabelecer uma relação entre estes e os módulos tilting básicos sobre KQ introduzidos na subseção 3.1.1.

Definição 74. Um objeto T na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ é chamado *objeto tilting básico*, se:

- (i) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T, T) = 0$, ou seja, T é rígido, e;
- (ii) T tem um número máximo de somandos diretos não-isomorfos satisfazendo a condição (i).

Observação 75. Um objeto em $\mathcal{C}_Q$ é um objeto tilting básico se, e somente se, é a soma direta de todos os objetos em um conjunto tilting $\mathcal{T}$.

Mais adiante veremos que qualquer conjunto tilting em $\mathcal{C}_Q$ é finito de tal forma que sempre existirá um objeto tilting básico correspondente.

O próximo resultado nos permite estender um objeto rígido básico em $\mathcal{C}_Q$ à um objeto tilting básico.

Proposição 76. *Seja Q um quiver acíclico com n vértices e considere KQ a álgebra de caminhos sobre Q . Seja $\mathcal{C}_Q$ a categoria cluster associada ao quiver Q . Se T é um objeto rígido básico em $\mathcal{C}_Q$, então T pode ser estendido a um objeto tilting básico.*

Demonstração: Para provarmos o teorema primeiro mostraremos a seguinte afirmação:

Afirmação: Qualquer objeto rígido básico T' em $\mathcal{C}_Q$ tem no máximo $2n$ somandos indecomponíveis.

Seja T' um objeto rígido básico em $\mathcal{C}_Q$. Suponha $T_1, \dots, T_r, T_{r+1}, \dots, T_t$ objetos indecomponíveis em $\mathcal{S}$ tal que $T_1 \oplus \dots \oplus T_r \oplus T_{r+1} \oplus \dots \oplus T_t$ determina T' , em que $\{T_1, \dots, T_r\} \subset \text{ind}(\text{mod } KQ)$ e $\{T_{r+1}, \dots, T_t\} \subset \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$. Pela Proposição 67 (b) temos que:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(X, Y) = \text{Ext}_{KQ}^1(X, Y) \oplus \text{DExt}_{KQ}^1(Y, X),$$

em que, X, Y são KQ -módulos indecomponíveis. Como T' é um objeto rígido básico, segue que $\text{Ext}_{KQ}^1(T_1 \oplus \dots \oplus T_r, T_1 \oplus \dots \oplus T_r) = 0$. Então, $T_1 \oplus \dots \oplus T_r$ é um módulo rígido básico. Logo, $r \leq n$ e daí $t \leq 2n$. O que mostra a afirmação.

Em particular qualquer objeto rígido básico tendo T como um somando direto tem no máximo $2n$ somandos diretos indecomponíveis e daí T pode ser estendido a um objeto rígido maximal em $\mathcal{C}_Q$, que é então, por definição, um objeto tilting básico. $\square$

Veja que a definição de objeto tilting básico é muito parecida com a de módulo tilting básico. De fato, como a categoria de módulos $\text{mod } KQ$ pode ser imersa na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ é natural desejar que os KQ -módulos tilting básicos, quando visto em $\mathcal{C}_Q$, pertençam a classe dos objetos tilting básicos. Isso segue do seguinte resultado:

Teorema 77. *Seja Q um quiver acíclico com n vértices. Considere a categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ associada a Q .*

- (a) *Os objetos tilting básicos na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ são exatamente aqueles vindos de módulos tilting básicos sobre alguma álgebra hereditária $\mathcal{H}$ derivadamente equivalente à KQ . Como consequência disto, estes possui n somandos diretos indecomponíveis não isomorfos.*
- (b) *Seja $\mathcal{H}$ uma álgebra hereditária derivadamente equivalente à KQ . Qualquer $\mathcal{H}$ -módulo tilting básico induz um objeto tilting básico em $\mathcal{C}_Q$.*

Demonstração:

- (a) Seja T um objeto tilting básico em $\mathcal{C}_Q$. Suponha $T_1, T_2, \dots, T_r$ objetos em $\mathcal{S}$ induzindo T .

Caso 1 Se T_i não é somando de $\{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$, ou seja, $T_1, T_2, \dots, T_r \in \text{mod } KQ$, então $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_r$ é um KQ -módulo rígido básico. Suponha que $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_r$ não é módulo tilting. Pelo Teorema de Bongartz, existe um KQ -módulo T' não nulo tal que $\overline{T} = T \oplus T'$ é um módulo tilting básico sobre KQ . Assim, $\overline{T}$ é um objeto tilting básico em $\mathcal{C}_Q$ que contém propriamente T como um somando direto, o que contradiz a maximalidade de T . Logo, $T' = 0$ e daí T é um módulo tilting básico sobre KQ .

Caso 2 Suponha algum objeto $T_j \in \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Subcaso 2.1 Se $T_1, T_2, \dots, T_r$ não são projetivos, lembrando que algum $T_j \in \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$. Neste subcaso, temos $\{T_1, T_2, \dots, T_r\} \subset \tau_{\mathcal{D}_Q}^{-1}(\text{mod} KQ)$, e então $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_r$ é módulo tilting básico sobre uma álgebra hereditária derivadamente equivalente à KQ , na verdade isomorfa à KQ , porém com uma imersão diferente em $\mathcal{D}_Q$.

Subcaso 2.2 Se algum T_i é projetivo.

(2.2.1) Suponha KQ do tipo de representação infinita. Lembre-se que algum $T_j \in \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$, caso contrário, já provamos no caso 1. Se T não tem somando direto injetivo, então $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}T \subset \text{mod} KQ$. De fato, como T_i é projetivo, $\tau^{-1}T_i \in \text{mod} KQ$. Por outro lado, como $T_j \in \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, temos $T_j = P_j[1]$, daí:

$$\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}T_j = \tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}P_j[1] = FP_j,$$

logo, $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}T_j \in \text{mod} KQ$. Assim, como no subcaso 2.1, $T \in \tau_{\mathcal{D}_Q}^{-1}(\text{mod} KQ)$. Se T possui algum somando direto injetivo T_k tal que $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}T$ tem um somando direto em $\{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$. Daí podemos aplicar novamente $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}$. Como a representação é infinita não há risco de que $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}(\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}T_j)$ seja injetivo, logo caímos no caso que acabamos de provar. Se mesmo depois de aplicarmos $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-2}T$ tivermos mais módulos injetivos, aplicamos $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}$ até eliminá-los. Lembrando que, neste caso, não temos risco de algum módulo não injetivo produzir um módulo injetivo após aplicar $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}$, pois a representação é infinita. Como a álgebra KQ é de dimensão finita, para algum t , temos $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-t}T \in \text{mod} KQ$. Logo, tome $\mathcal{H}$ álgebra hereditária derivadamente equivalente à KQ imersa como $\tau^{-t}(\text{mod} KQ)$ e daí T é um módulo tilting básico sobre $\mathcal{H}$.

(2.2.2) Suponha KQ do tipo de representação finita. Observe que, neste caso, o processo anterior não pode ser aplicado, uma vez que, as repetidas aplicações de $\tau_{\mathcal{C}_Q}^{-1}$ podem produzir novos módulos injetivos. Para mostrarmos este caso, fazemos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Se T é um objeto tilting básico, para todo KQ -módulo projetivo simples S que não é somando de T , existe um caminho para algum T_i .

De fato, se $S \notin \text{add} T$, então $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T, S) \neq 0$. Pela dualidade de Serre, segue que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(S, \tau T) \neq 0$. Daí, pela Proposição 58, temos:

$$\begin{aligned} 0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(S, \tau T) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, \tau T) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, F\tau T) = \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, \tau T) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, T[1]). \end{aligned}$$

Como S é módulo projetivo simples, temos $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, T[1]) = 0$ e daí $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, \tau T) \neq 0$. Logo, existe uma caminho do módulo S para algum somando T_i de T .

Consideremos $\alpha(KQ)$ a soma dos comprimentos de todos os caminhos, em que caminhos através da mesma sequência de vértices são contados apenas uma vez, de um KQ -módulo projetivo simples que não está em $\text{add } T$, para algum somando T_i de T , ou seja,

$$\alpha(KQ) = \sum_S l(S, T_i),$$

em que S é um KQ -módulo projetivo simples e não está em $\text{add } T$. Substituindo KQ por uma álgebra hereditária $\mathcal{H}$ derivadamente equivalente à KQ , se necessário, considere $\alpha(KQ)$ o menor valor possível. Suponha $\alpha(KQ) > 0$. Então existe algum KQ -módulo projetivo simples S_i tal que $S_i \notin \text{add } T$, ou seja, pelo menos um caminho é não nulo. Como S_i é projetivo simples (e KQ é hereditária), então o vértice i é um poço. Seja $\mathcal{H} = (\text{End } M)^{op}$, em que $M = \tau^{-1}S_i \oplus \bar{P}$ é um APR-módulo tilting, com $\bar{P}$ soma direta dos módulos projetivos com exceção do projetivo P_i associado ao vértice i . Segue daí que $\alpha(\mathcal{H}) < \alpha(KQ)$, mas é conhecido que a álgebra de endomorfismo oposta de um APR-módulo tilting é derivadamente equivalente à álgebra deste respectivo módulo, contradizendo a minimalidade de $\alpha(KQ)$. Assim, $\alpha(KQ) = 0$. Portanto, existe $\mathcal{H}$ álgebra hereditária derivadamente equivalente à KQ , tal que todo módulo projetivo simples é somando direto de T .

Afirmção 2: Nenhum somando de T está em $\tau_{\mathcal{D}_Q}^{-1}KQ$.

Suponha $T_i = \tau^{-1}P$, em que P é um KQ -módulo indecomponível projetivo. Então, como já vimos, existe algum KQ -módulo indecomponível projetivo simples S , com $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, P) \neq 0$, daí $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(S, \tau T_i) \neq 0$. Pela dualidade de Serre, temos:

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T_i, S) \simeq \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(S, \tau T_i) \neq 0.$$

Logo, $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T_i, S) \neq 0$, mas $S \in \text{add } T$, pois é um KQ -módulo indecomponível projetivo simples, o que contradiz a rigidez de T . Portanto, T não possui somandos diretos em $\tau_{\mathcal{D}_Q}^{-1}KQ$.

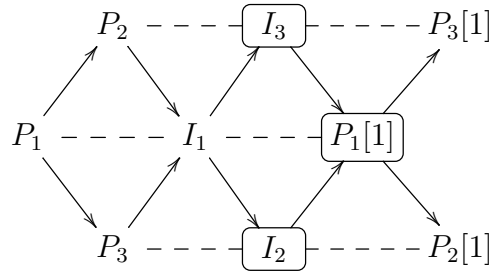
Escolha $\mathcal{H}$ derivadamente equivalente à KQ , se necessário, tal que $\tau_{\mathcal{D}_Q}^{-2}(\text{mod } KQ \cup \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\})$ é igual a $(\text{mod } \mathcal{H} \cup \{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\})$, em que P_i em ambos os casos representam os objetos indecomponíveis projetivos sobre as respectivas álgebras. Como T_i não é um somando de $\tau_{\mathcal{D}_Q}^{-1}KQ$, então T_i não é somando de $\{P_i[1] \mid 1 \leq i \leq n\}$ sobre a álgebra $\mathcal{H}$. Portanto, T é um módulo tilting básico sobre $\mathcal{H}$.

- (b) Seja T um objeto rígido básico em $\mathcal{C}_Q$ induzido por um $\mathcal{H}$ -módulo tilting básico. Então T tem n somandos diretos indecomponíveis. Pela Proposição 76, T pode ser estendido a um objeto tilting básico em $\mathcal{C}_Q$, finalizando assim a demonstração.

□

Segue do teorema acima e da observação 75, página 55, que qualquer conjunto tilting em $\mathcal{C}_Q$ é induzido por um módulo tilting básico sobre alguma álgebra hereditária $\mathcal{H}$ derivadamente equivalente à KQ . Logo, qualquer Ext-configuração em $\mathcal{C}_Q$ é induzido por tal módulo tilting básico. Além disso, segue que todos os objetos tilting básicos em $\mathcal{C}_Q$ tem o mesmo número de somandos indecomponíveis não-isomorfos quanto o número de vértices do quiver Q .

Exemplo 78. Seja Q o quiver $2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$. Seja $\mathcal{C}_Q$ a categoria cluster associada a Q e considere o objeto $T = P_1[1] \oplus I_2 \oplus I_3$ em $\mathcal{C}_Q$. Como vimos no exemplo 61, página 45, a categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ é dada por:



No quiver acima os objetos indecomponíveis destacados formam o objeto T . Mostraremos que T é um objeto tilting básico em $\mathcal{C}_Q$. De fato, segue de (3.3) que:

$$\begin{aligned}
 \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T, T) &= \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T, T) \oplus \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T, FT) \\
 &\simeq \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(T, \tau T) \oplus \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(FT, \tau T) \\
 &= \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1] \oplus I_2 \oplus I_3, I_1 \oplus P_3 \oplus P_2) \oplus \\
 &\quad \oplus \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1[2] \oplus P_2[2] \oplus P_3[2], I_1 \oplus P_3 \oplus P_2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Assim, T satisfaz a condição (i) da Definição 74. A condição (ii) é claramente satisfeita.

Pelo teorema acima, T é induzido por um módulo tilting básico sobre alguma álgebra hereditária derivadamente equivalente à KQ . Queremos encontrar esse tal módulo tilting. Vamos encontrar a álgebra de endomorfismo oposta do objeto T , para isso precisamos calcular os morfismos entre cada somando do objeto T . Pela equação 3.1, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_1[1], I_2) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], I_2) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], FI_2) \\
 &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], I_2) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], P_2[2]) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_1[1], I_3) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], FI_3) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1], P_3[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_2, P_1[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, P_1[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, FP_1[1]) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, P_1[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, I_1[2]) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, P_1[1]) \\
&\simeq K.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_2, I_3) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, FI_3) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, P_3[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_3, P_1[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, P_1[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, I_1[2]) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, P_1[1]) \\
&\simeq K.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_2, I_3) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_2, P_2[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí, obtemos o seguinte (omitindo as identidades):

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{End}_{\mathcal{C}_Q} T : & T & \longrightarrow T \\
& & \\
& P_1[1] & \longrightarrow P_1[1] \\
& I_2 & \nearrow I_2 \\
& I_3 & \nearrow I_3
\end{array}$$

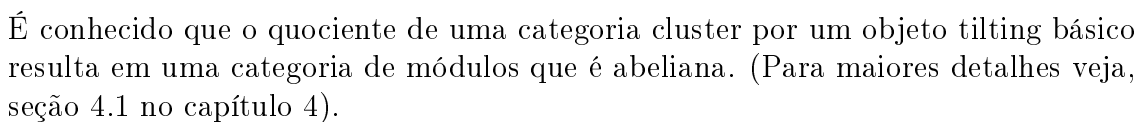
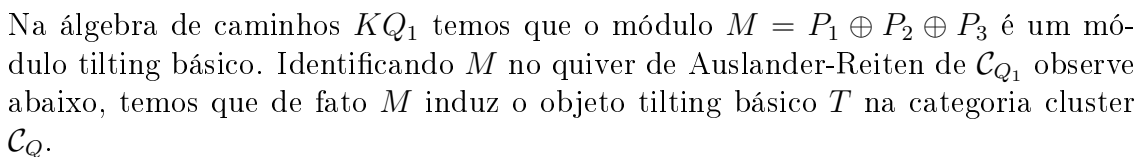
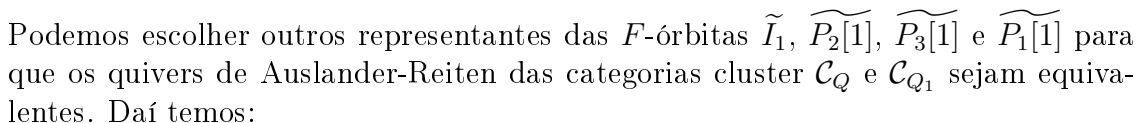
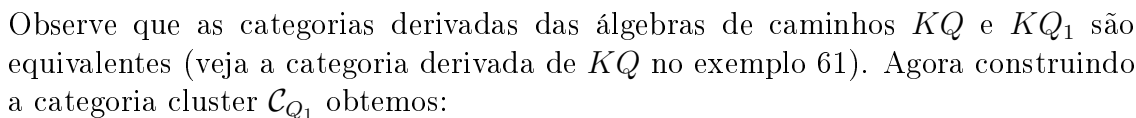
Logo, $(\mathrm{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op}$ é isomorfo ao quiver

$$Q_1 : 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3$$

Consideremos a álgebra de caminhos sobre Q_1 . O quiver de Auslander-Reiten da álgebra KQ_1 é:

$$\begin{array}{ccccc}
P_2 & \text{-----} & I_3 & & \\
& \searrow & \nearrow & & \\
& & P_1 & \text{-----} & I_1 \\
& \nearrow & \searrow & & \\
P_3 & \text{-----} & I_2 & &
\end{array}$$

Podemos construir a categoria derivada $\mathcal{D}_{Q_1}$, em virtude da álgebra de caminhos KQ_1 ser hereditária, obtendo:



Seja KQ a álgebra de caminhos de um quiver Q com vértices $\{1, \dots, n\}$. Relembrando que na categoria de módulos $\text{mod} KQ$ um KQ -módulo $\bar{T}$ é chamado *tilting quase completo* se, sua dimensão projetiva é menor ou igual a 1, possui $n - 1$ somandos indecomponíveis não isomorfos e é tal que $\text{Ext}_{KQ}^1(\bar{T}, \bar{T}) = 0$. O módulo M é dito *complemento* de $\bar{T}$ se $T = \bar{T} \oplus M$ é um módulo tilting. Nas categorias cluster $\mathcal{C}_Q$ temos um conceito similar, dado pela seguinte definição:

Definição 79. Um objeto $\bar{T}$ em $\mathcal{C}_Q$ é chamado *objeto tilting básico quase completo*, se:

- (i) $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(\bar{T}, \bar{T}) = 0$;
- (ii) $\bar{T}$ possui $n - 1$ somandos indecomponíveis não-isomorfos, onde n é o número de vértices do quiver Q .

Se existe algum objeto indecomponível M tal que $T = \bar{T} \oplus M$ é um objeto tilting básico, dizemos que M é um *complemento* de $\bar{T}$.

Seja H uma álgebra hereditária de dimensão finita. É conhecido que dado um H -módulo tilting quase completo $\bar{M}$ existe no máximo dois complementos de $\bar{M}$, o que não garante a existência de exatamente dois complementos. No caso das categorias cluster, o próximo resultado nos garante quantos complementos exatamente um objeto tilting básico quase completo possui.

Teorema 80. *Seja $\bar{T}$ um objeto tilting básico quase completo em $\mathcal{C}_Q$. Então $\bar{T}$ possui exatamente dois complementos não isomorfos em $\mathcal{C}_Q$.*

Demonstração: Teorema 2.7, em [24] ou Teorema 5.1, em [4]. □

Seja T um objeto tilting básico em $\mathcal{C}_Q$, então existe um quiver Q_T associado a T que é o quiver da álgebra de endomorfismo oposta do objeto T , ou seja, $(\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op}$. Assim, obtemos um par (T, Q_T) o qual chamaremos de *semente tilting*. Dessa forma, o Teorema 80 nos permite definir uma mutação de um objeto tilting básico T , para cada $k = 1, \dots, n$, por:

$$\mu_k(T) = \mu_k(\bar{T} \oplus T_k) = \bar{T} \oplus T'_k = T',$$

em que $\bar{T}$ é um objeto tilting básico quase completo em $\mathcal{C}_Q$ e seus complementos são T_k e T'_k .

Assim, podemos definir também uma mutação nas sementes tilting da seguinte forma. Dada uma semente tilting $(T, (\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op})$, definimos:

$$\mu_k(T, (\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op}) = (T', (\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T')^{op}),$$

onde $T' = \mu_k(T)$.

De forma similar a que fazemos no capítulo 2, definimos o *grafo tilting*, cujos vértices correspondem as sementes tilting e as arestas são as mutações.

Teorema 81. *O grafo tilting de uma categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ associada a um quiver Q acíclico é conexo.*

Demonstração: Proposição 3.5, em [4]. □

3.7 Relação entre Álgebras cluster e Categorias cluster

Como vimos no capítulo 2, para quivers Dynkin existe uma bijeção entre variáveis cluster não iniciais e raízes positivas do associado sistema de raízes e, consequentemente, uma bijeção entre variáveis cluster não iniciais e módulos indecomponíveis. Completando este resultado, podemos obter uma bijeção entre variáveis cluster (iniciais e iteradas) e objetos indecomponíveis na categoria cluster do respectivo quiver Q , em que as n variáveis cluster iniciais que não possuíam correspondentes com módulos estão em correspondência com os n objetos indecomponíveis $\widetilde{P_i[1]}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, na categoria cluster, que estão associados a complexos transladados na categoria derivada. É o que estudaremos nesta seção.

Seja Q um quiver finito com conjunto de vértices $Q_0 = \{1, \dots, n\}$, conexo e acíclico. Consideremos a semente inicial $(x, Q) = (\{x_1, \dots, x_n\}, Q)$. Vamos construir uma aplicação α que associa variáveis cluster à objetos rígidos indecomponíveis e cluster à objetos tilting básicos em $\mathcal{C}_Q$. Definimos primeiramente $\alpha(x_i) = P_i[1]$ para $i = 1, \dots, n$. Dessa forma, a cluster $\{x_1, \dots, x_n\}$ está em correspondência com o objeto tilting básico $P_1[1] \oplus \dots \oplus P_n[1]$. Considerando agora a semente inicial e aplicando a mutação μ_i em (x, Q) , obtemos uma nova variável cluster u'_i cujo denominador determina um vetor dimensão associado a um único KQ -módulo indecomponível rígido T'_i , em que $T'_i \not\cong P_i[1]$ e $P_1[1] \oplus \dots \oplus T'_i \oplus \dots \oplus P_n[1]$ é um objeto tilting básico em $\mathcal{C}_Q$. Logo, a cluster $\{x_1, \dots, u'_i, \dots, x_n\}$ está em correspondência com o objeto tilting básico $P_1[1] \oplus \dots \oplus T'_i \oplus \dots \oplus P_n[1]$. Prosseguindo de forma iterada, verifica-se que a aplicação α está bem definida. Utilizando o Teorema 81, mostra-se a sobrejetividade da aplicação α .

Dessa forma, temos o seguinte resultado:

Teorema 82. *Seja Q um quiver finito acíclico e considere $\mathcal{A}_Q$ e $\mathcal{C}_Q$, respectivamente, a álgebra cluster e a categoria cluster associadas ao quiver Q . A aplicação*

$$\alpha : \left\{ \text{variáveis cluster em } \mathcal{A}_Q \right\} \longrightarrow \left\{ \text{objetos indecomponíveis rígidos em } \mathcal{C}_Q \right\}$$

é sobrejetiva e induz aplicações $\tilde{\alpha}$ que associa cluster em $\mathcal{A}_Q$ e objetos tilting básicos em $\mathcal{C}_Q$ e $\bar{\alpha}$ que associa sementes em $\mathcal{A}_Q$ e sementes tilting em $\mathcal{C}_Q$ sendo que $\bar{\alpha}$ preserva mutações.

Demonstração: Teorema 2.3, em [5]. □

Exemplo 83. Seja Q_1 o quiver

$$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3.$$

Como vimos no Exemplo 50, página 37, cada variável cluster não inicial da álgebra cluster $\mathcal{A}_{Q_1}$ possui um correspondente módulo indecomponível. Como vimos acima, as variáveis cluster iniciais também possuem correspondentes objetos indecomponíveis, a saber, cada variável cluster x_i está em correspondência com o objeto indecomponível rígido $P_i[1]$, com $i = 1, 2, 3$.

Seja Q um quiver finito conexo e acíclico. Vamos agora definir uma aplicação ψ que leva objetos indecomponíveis rígidos em variáveis cluster na associada álgebra cluster $\mathcal{A}_Q$.

Seja $M \in \text{mod} KQ$ com vetor dimensão $\dim M = \bar{m}$ e seja $Gr_{\bar{e}}(M)$ o conjunto de todos os submódulos de M com vetor dimensão $\bar{e}$, ou seja,

$$Gr_{\bar{e}}(M) = \{N \in \text{mod} KQ; N \subset M, \dim N = \bar{e}\}.$$

A fórmula seguinte é chamada *fórmula de Caldero-Chapoton* :

$$X_M = \sum_{\bar{e}} \chi(Gr_{\bar{e}}(M)) \prod_i u_i^{-\langle \bar{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \bar{m} - \bar{e} \rangle},$$

em que, χ é a característica de Euler-Poincaré do quiver Grassmaniano (veja [6]) e para $M, N \in \text{mod} KQ$ definimos

$$\langle \dim M, \dim N \rangle = \dim_K \text{Hom}_{KQ}(M, N) - \dim_K \text{Ext}_{KQ}^1(M, N),$$

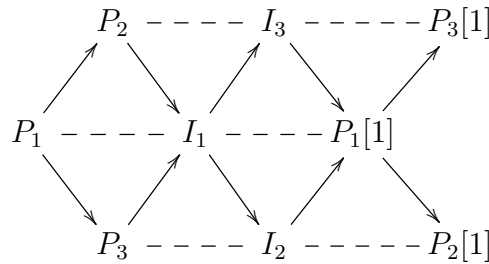
e α_i denota o vetor dimensão que tem 1 na i -ésima coordenada e 0 nas demais.

Não daremos aqui a definição formal da característica de Euler-Poincaré do quiver Grassmaniano, uma vez que a mesma não será necessária no caso geral, neste trabalho. Nos casos que necessitamos, em que o quiver é Dynkin, pode-se mostrar que o coeficiente $\chi(Gr_{\bar{e}}(M)) = 1$.

Por exemplo, considere Q o quiver:

$$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3.$$

Como vimos no exemplo 61, página 45, a categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ associada a Q é dada por:



Consideremos $P_1 \in \text{mod} KQ$, vamos calcular X_{P_1} utilizando a fórmula de Caldero-Chapoton. O vetor dimensão de P_1 é $\bar{m} = [100]$, além disso, os únicos submódulos de P_1 são 0 e ele próprio, daí $\bar{e} = [000]$ ou $\bar{e} = [100]$, em ambos os casos $\chi(Gr_{\bar{e}}(P_1)) = 1$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} X_{P_1} &= u_1^{-\langle 0, \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \cdot u_2^{-\langle 0, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle} \cdot u_3^{-\langle 0, \alpha_3 \rangle - \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle} + \\ &\quad + u_1^{-\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_1, 0 \rangle} \cdot u_2^{-\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_2, 0 \rangle} \cdot u_3^{-\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle - \langle \alpha_3, 0 \rangle} \\ &= u_1^{-\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \cdot u_2^{-\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle} \cdot u_3^{-\langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle} + u_1^{-\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \cdot u_2^{-\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle} \cdot u_3^{-\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle} \\ &= \frac{u_2 u_3 + 1}{u_1} \end{aligned}$$

pois, $\text{Ext}_{KQ}^1(S_2, S_1) \simeq K$, $\text{Ext}_{KQ}^1(S_3, S_1) \simeq K$. Observe que $X_{P_1} = \frac{u_2 u_3 + 1}{u_1}$ é exatamente a variável cluster que corresponde à P_1 no exemplo 50, página 37 no capítulo 2.

Dessa forma, definimos a correspondente aplicação ψ de objetos indecomponíveis rígidos na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ para as variáveis cluster na associada álgebra cluster $\mathcal{A}_Q$ da seguinte forma, para cada módulo indecomponível rígido M associa-se à variável cluster X_M dada pela fórmula de Caldero-Chapoton e $X_{P_i[1]} = u_i$, para $i = 1, \dots, n$, em que P_i são KQ -módulos indecomponíveis projetivos e n é o número de vértices do quiver Q . Podemos mostrar a injetividade e a sobrejetividade da aplicação ψ . Consequentemente, temos o seguinte teorema:

Teorema 84. *Seja Q um quiver acíclico com conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$, e seja $\mathcal{C}_Q$ e $\mathcal{A}_Q$, a categoria cluster e a álgebra cluster associadas a Q , respectivamente. Então existem as bijeções:*

1.

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \text{objetos indecomponíveis rígidos em } \mathcal{C}_Q \right\} & \longrightarrow & \left\{ \text{variáveis cluster em } \mathcal{A}_Q \right\} \\ M & \longmapsto & u_M \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \text{objetos tilting básicos em } \mathcal{C}_Q \right\} & \longrightarrow & \left\{ \text{cluster em } \mathcal{A}_Q \right\} \\ T = T_1 \oplus \dots \oplus T_n & \longmapsto & u_T = \{u_{T_1}, \dots, u_{T_n}\} \end{array}$$

Demonstração: Teorema 4, em [8]. □

Observe que o teorema acima nos dá uma ligação estreita entre objetos tilting básicos na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ e cluster na álgebra cluster $\mathcal{A}_Q$, porém nada é afirmado a respeito de uma ligação entre o quiver da álgebra de endomorfismo oposta destes objetos tilting básicos com o quiver que aparece na semente da cluster em questão. O próximo resultado nos mostra que de fato esta ligação acontece.

Teorema 85. *Seja Q um quiver finito e acíclico. Seja $\bar{T}$ um objeto tilting básico quase completo em $\mathcal{C}_Q$ com M e M' seus dois complementos. Consideremos $T = \bar{T} \oplus M$ e $T' = \bar{T} \oplus M'$ e denote por $Q_T = (\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op}$ e $Q_{T'} = (\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T')^{op}$. Suponha i o vértice em Q_T tal que $\mu_i(T) = T'$, então o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\mu_i} & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_T & \xrightarrow{\mu_i} & \mu_i(Q_T) = Q_{T'} \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Teorema 5.1, em [1]. □

R. Schiffler apresentou em [26] uma descrição geométrica da categoria cluster para quivers do tipo D_n .

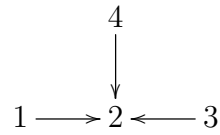
Capítulo 4

Aplicações dos resultados

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos que ilustram os conceitos introduzidos nos capítulos anteriores e, ainda, teremos a oportunidade de evidenciar e comentar os resultados que apresentamos e demonstramos.

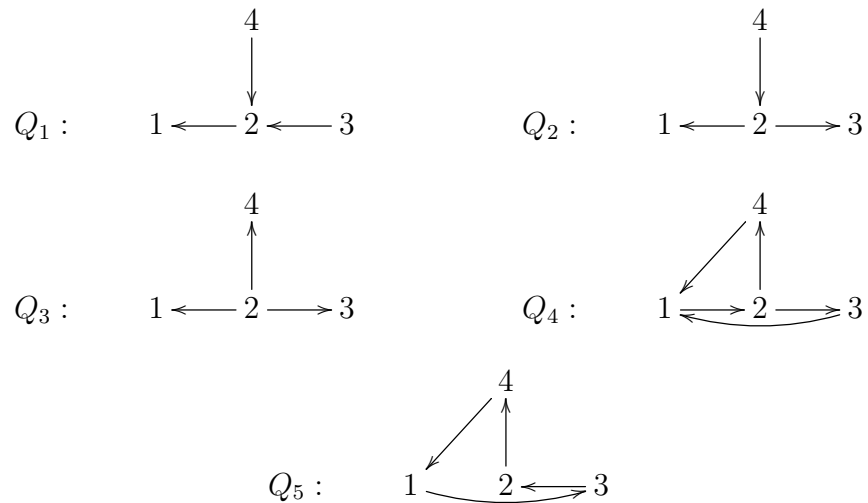
4.1 Caso D_4

Seja Q o quiver

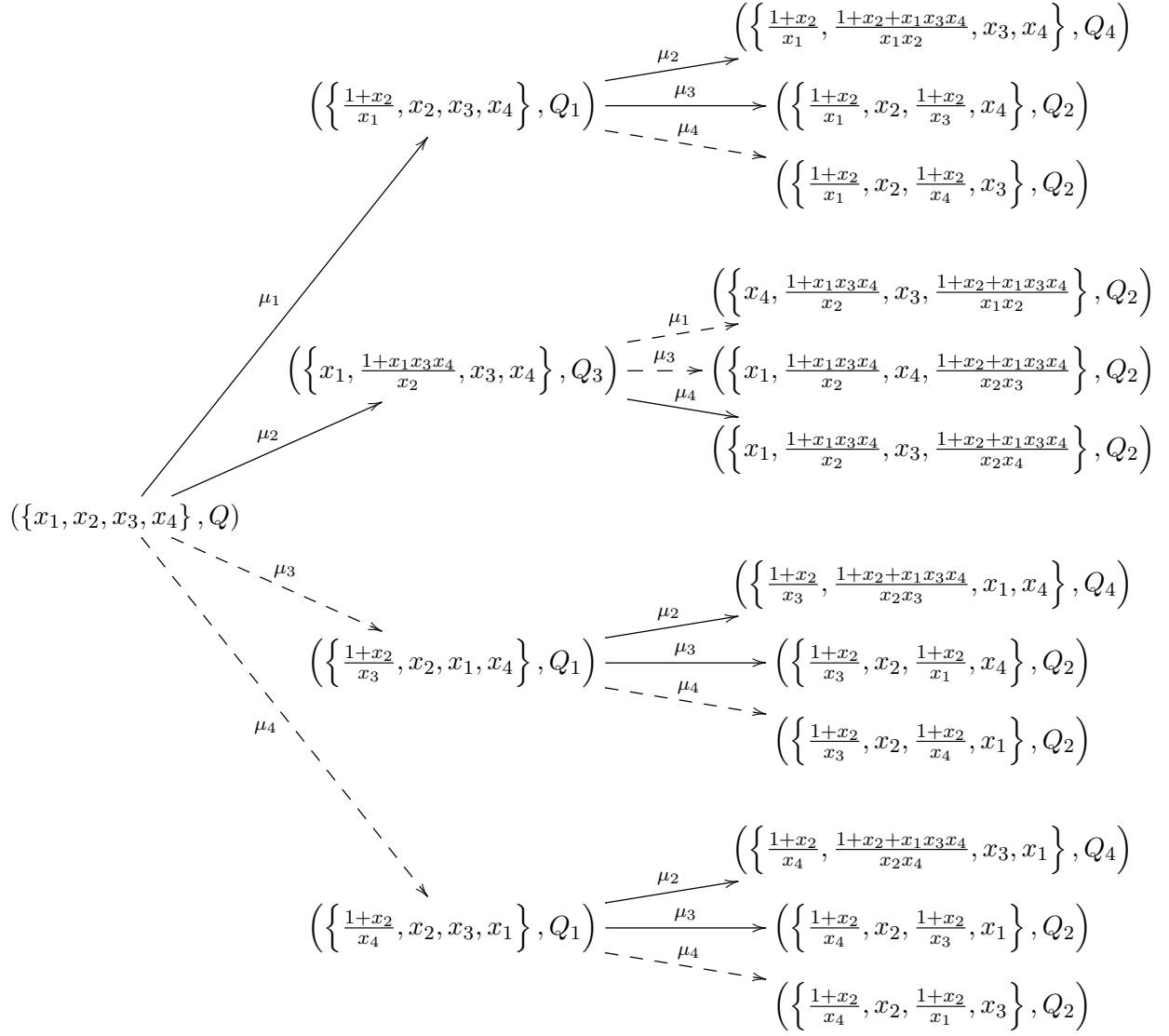


que é Dynkin do tipo D_4 .

Vamos encontrar a álgebra cluster $\mathcal{A}_Q$ associada a Q . A classe de mutações equivalentes do quiver Q tem, além dele próprio, os seguintes quivers:



Consideremos a semente inicial $(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Q)$. Na figura abaixo descrevemos as primeiras iterações do processo de mutação desta semente.



Lembrando que as setas tracejadas indicam que as sementes não são aquelas obtidas exatamente da mutação e, sim, sementes equivalentes.

Dando continuidade ao processo de iteração feito acima encontramos 50 sementes distintas¹, a menos de equivalência, e um total de 16 variáveis cluster, são elas:

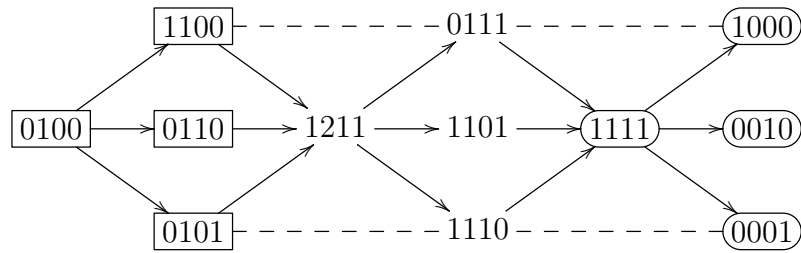
$$\begin{aligned}
& x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1x_3x_4}{x_2}, \frac{1+x_2}{x_3}, \frac{1+x_2}{x_4}, \\
& \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_1x_2}, \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_3}, \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_4}, \\
& \frac{1+2x_2+x_2^2+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_3}, \frac{1+2x_2+x_2^2+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_4}, \\
& \frac{1+2x_2+x_2^2+x_1x_3x_4}{x_2x_3x_4}, \frac{1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}, \\
& \frac{1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+((2x_1+3x_1x_2)x_3)x_4+x_1^2x_3^2x_4^2}{x_1x_2^2x_3x_4}.
\end{aligned}$$

¹Este número de sementes foi obtido através do pacote Sage [23].

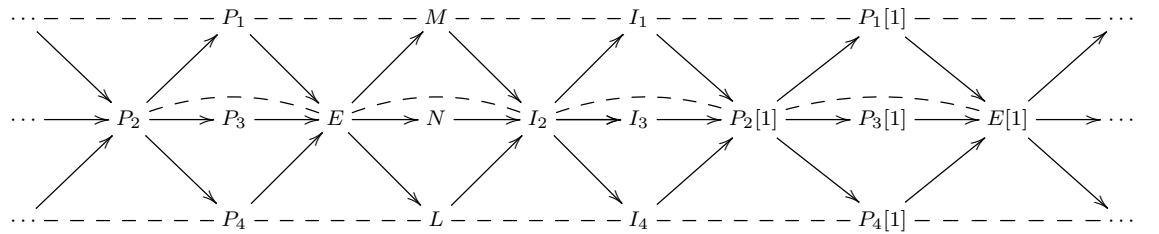
Daí a álgebra cluster associada ao quiver Q é gerada por estas 16 variáveis cluster.

Ilustramos na figura 4.1 da página 69 uma parte do grafo de troca associado com o quiver Q , apenas com as 14 sementes distintas que encontramos no processo de iteração. As setas tracejadas indicam que ao fazer a mutação obtemos uma semente equivalente à descrita no grafo. Por simplicidade, denotamos por $a = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_1x_2}$, $b = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_3}$ e $c = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_4}$.

Vamos encontrar agora a categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ associada ao quiver Q . O quiver de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos KQ é dado por:

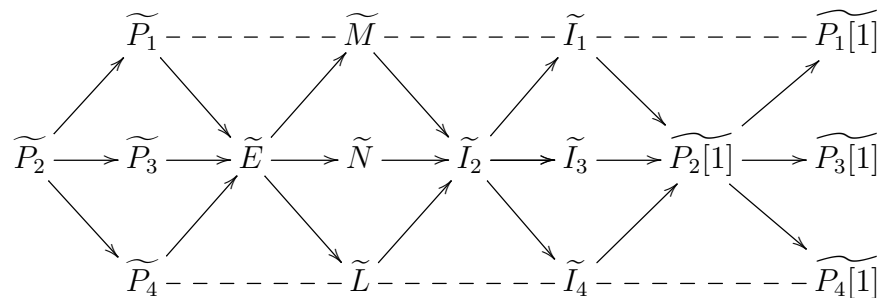


onde os módulos projetivos estão destacados à esquerda e os módulos injetivos destacados à direita. Denotaremos $E = 1211$, $M = 0111$, $N = 1101$ e $L = 1110$. Em virtude da álgebra de caminhos KQ ser hereditária, descrevemos a categoria derivada de KQ , dada pelo quiver abaixo:



as linhas tracejadas indicam as translação $\mathcal{T}$.

Podemos identificar os objetos que estão na mesma F -órbita para encontrarmos a categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ associada ao quiver Q . Como vimos no capítulo 3 na observação feita após a Proposição 62, página 47, os objetos indecomponíveis em $\mathcal{C}_Q$ são da forma $\tilde{X}$ para X um objeto em $\mathcal{S}$. Assim, o quiver de Auslander-Reiten da categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ é dado por:



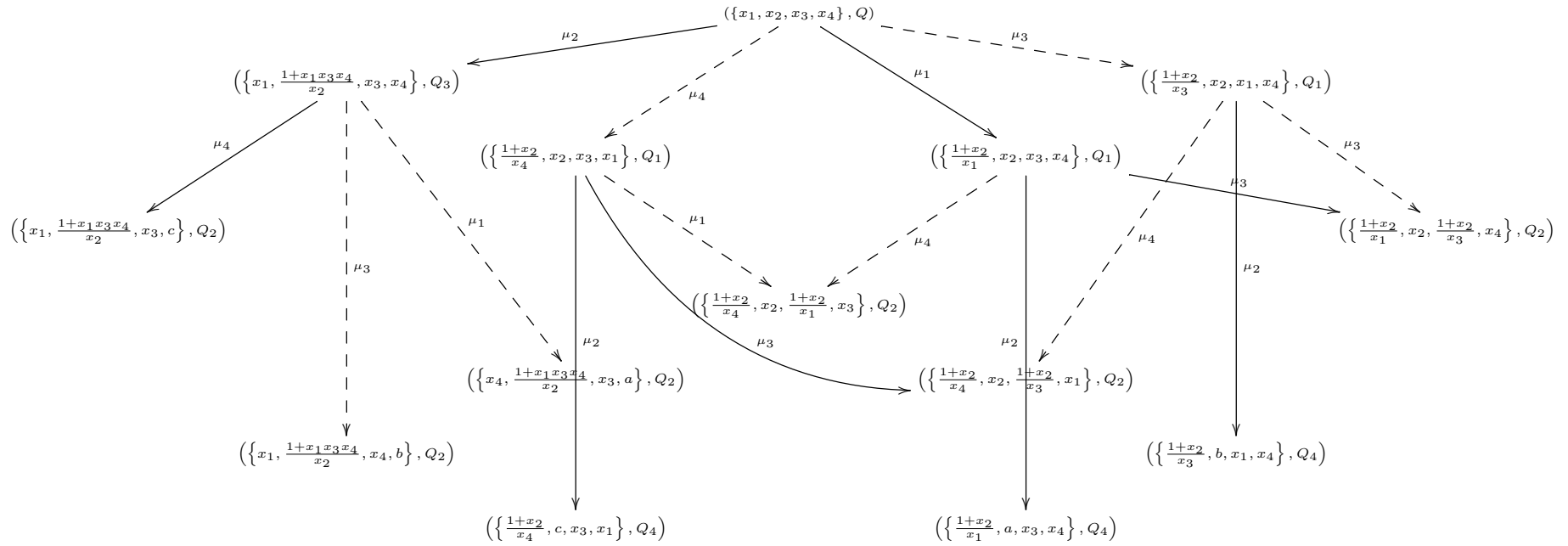


Figura 4.1: Parte do grafo de troca (caso D_4)

Além disso, na seção 3.7 do capítulo 3 vimos que existe uma relação muito interessante entre álgebras cluster e categorias cluster. Vamos mostrar agora como esta relação se dá na prática por meio deste exemplo. Consideremos a semente inicial $(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Q)$. A aplicação que associa variáveis cluster à objetos rígidos indecomponíveis e, cluster à objetos tilting básicos, leva cada variável cluster inicial x_i na álgebra cluster $\mathcal{A}_Q$ em $P_i[1]$ na categoria cluster $\mathcal{C}_Q$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Daí, a cluster $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ está em correspondência com o objeto tilting básico $P_1[1] \oplus P_2[1] \oplus P_3[1] \oplus P_4[1]$. Aplicando a mutação μ_1 em $(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Q)$, obtemos a seguinte semente:

$$\left(\left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3, x_4 \right\}, Q_1 \right).$$

Com isso, obtemos uma nova variável cluster cujo denominador determina o vetor dimensão [1000], esse vetor dimensão por sua vez corresponde ao único KQ -módulo indecomponível I_1 . Daí, a cluster $\left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3, x_4 \right\}$ corresponde ao objeto $T = I_1 \oplus P_2[1] \oplus P_3[1] \oplus P_4[1]$ que é tilting básico. De fato, claramente T satisfaz a condição (ii) da Definição 74. Por outro lado, segue de (3.3) que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T, T) &= \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T, T) \oplus \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T, FT) \\ &\simeq \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(T, \tau T) \oplus \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(FT, \tau T) \\ &= \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1 \oplus P_2[1] \oplus P_3[1] \oplus P_4[1], M \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus I_4) \oplus \\ &\quad \oplus \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[2] \oplus E[2] \oplus N[2] \oplus L[2], M \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus I_4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a condição (i) é satisfeita.

Agora verificaremos que $(\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op} \cong Q_1$. Para encontrar a álgebra de endomorfismo do objeto T podemos calcular os morfismos em cada somando do objeto T . Pela equação 3.1, capítulo 3, página 44, temos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_1, P_2[1]) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_2[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, FP_2[1]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_2[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, E[2]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_2[1]) \\ &\simeq K. \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_1, P_3[1]) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_3[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, FP_3[1]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_3[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, N[2]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_3[1]) \\ &\simeq K. \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_1, P_4[1]) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_4[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, FP_4[1]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_4[1]) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, L[2]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_4[1]) \\ &\simeq K. \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_2[1], I_1) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], I_1) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], FI_1) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_1[2]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_2[1], P_3[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_3[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], N[2]) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_3[1]) \\
&\simeq K.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_2[1], P_4[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_4[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], L[2]) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_4[1]) \\
&\simeq K.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_3[1], I_1) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_3[1], I_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_3[1], P_1[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_3[1], P_2[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_3[1], P_2[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_3[1], E[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_3[1], P_4[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_3[1], P_4[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_3[1], L[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_4[1], I_1) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], I_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], P_1[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_4[1], P_2[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], P_2[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], E[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_4[1], P_3[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], P_3[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], N[2]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí, obtemos o seguinte (omitindo as identidades):

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{End}_{\mathcal{C}_Q} T : & T & \longrightarrow T \\
& I_1 & \longrightarrow I_1 \\
& P_2[1] & \longrightarrow P_2[1] \\
& P_3[1] & \longrightarrow P_3[1] \\
& P_4[1] & \longrightarrow P_4[1]
\end{array}$$

Logo, $(\mathrm{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op} \cong Q_1$ como esperado. Portanto, a semente $\left(\left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3, x_4 \right\}, Q_1 \right)$ está em correspondência com a semente tilting (T, Q_T) , em que $Q_T = (\mathrm{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op}$.

Aplicando agora μ_2 em $(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Q)$, obtemos a semente:

$$\left(\left\{ x_1, \frac{1+x_1x_3x_4}{x_2}, x_3, x_4 \right\}, Q_3 \right).$$

Note que o denominador da variável cluster $\frac{1+x_1x_3x_4}{x_2}$ está associado ao vetor dimensão $[0100]$. O KQ -módulo indecomponível rígido associado com $[0100]$ é P_2 . Logo, a cluster $\left\{ x_1, \frac{1+x_1x_3x_4}{x_2}, x_3, x_4 \right\}$ está associada ao objeto $T' = P_1[1] \oplus P_2 \oplus P_3[1] \oplus P_4[1]$, que é tilting básico, pois

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(T', T') &= \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T', T') \oplus \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(T', FT') \\ &\simeq \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(T', \tau T') \oplus \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(FT', \tau T') \\ &= \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(P_1[1] \oplus P_2 \oplus P_3[1] \oplus P_4[1], I_1 \oplus I_2[-1] \oplus I_3 \oplus I_4) \oplus \\ &\quad \oplus \text{DHom}_{\mathcal{D}_Q}(M[2] \oplus E[1] \oplus N[2] \oplus L[2], I_1 \oplus I_2[-1] \oplus I_3 \oplus I_4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

logo, T' satisfaz a condição (i) da Definição 74 e a condição (ii) é claramente satisfeita.

Calculando a álgebra de endomorfismo do objeto tilting básico T' , obtemos o seguinte (omitindo as identidades):

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T' : & T' & \longrightarrow T' \\ & & \\ & P_1[1] & P_1[1] \\ & \searrow & \\ & P_2 & P_2 \\ & \nearrow & \\ & P_3[1] & P_3[1] \\ & \nearrow & \\ & P_4[1] & P_4[1] \end{array}$$

Logo, $(\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T')^{op}$ é isomorfo ao quiver

$$\begin{array}{c} 4 \\ \uparrow \\ 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \end{array}$$

que é Q_3 . Portanto, a semente $\left(\left\{ x_1, \frac{1+x_1x_3x_4}{x_2}, x_3, x_4 \right\}, Q_3 \right)$ está em correspondência com a semente tilting $(T', Q_{T'})$, em que $Q_{T'} = (\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T')^{op}$.

Consideremos agora a semente $\left(\left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3, x_4 \right\}, Q_1 \right)$. Vimos acima que esta semente está em correspondência com a seguinte semente tilting (T, Q_T) , em que $T = I_1 \oplus P_2[1] \oplus P_3[1] \oplus P_4[1]$ e $Q_T = (\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T)^{op}$. Aplicando a mutação μ_2 em $\left(\left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3, x_4 \right\}, Q_1 \right)$, obtemos:

$$\left(\left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_1x_2}, x_3, x_4 \right\}, Q_4 \right).$$

Daí obtemos a variável cluster $\frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_1x_2}$ cujo denominador está associado ao vetor dimensão $[1100]$ que corresponde ao KQ -módulo indecomponível rígido P_1 . Logo, a cluster $\left\{\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_1x_2}, x_3, x_4\right\}$ é levada no objeto $T'' = I_1 \oplus P_1 \oplus P_3[1] \oplus P_4[1]$. Podemos verificar que de fato T'' é tilting básico. Calculando a álgebra de endomorfismo de T'' , obtemos o seguinte (omitindo as identidades):

$$\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T : \quad T \longrightarrow T$$

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & I_1 \\ P_1 & \nearrow & P_1 \\ P_3[1] & \nearrow & P_3[1] \\ P_4[1] & \nearrow & P_4[1] \end{array}$$

Portanto, $(\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T'')^{op} \cong Q_4$.

Dando continuidade a este processo podemos verificar de forma similar ao que foi feito acima que cada semente na álgebra cluster está associada a uma semente tilting na categoria cluster. Dessa forma, obtemos o grafo tilting da categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ dado pela figura 4.2, página 74.

Além disso, podemos realizar o processo inverso, ou seja, dado um quiver Q , a partir da categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ podemos encontrar as variáveis cluster na álgebra cluster $\mathcal{A}_Q$ correspondentes aos objetos indecomponíveis rígidos em $\mathcal{C}_Q$ e, consequentemente, as cluster em $\mathcal{A}_Q$ correspondentes aos objetos tilting básicos em $\mathcal{C}_Q$, devido o Teorema 84, página 65. O único problema é que a única forma para determinar se um objeto na categoria cluster é tilting básico é verificar se o mesmo satisfaz as condições da Definição 74. Não é fácil identificar um objeto tilting básico a priori. Daí, uma das importâncias da ligação estreita entre cluster na álgebra cluster e objetos tilting básicos na categoria cluster, uma vez que as variáveis cluster podem ser obtidas através de um processo combinatório e algébrico, perfeitamente adaptável a cálculos por meio de softwares. Pela estreita relação entre objetos tilting básicos e módulos tilting podemos ainda obter os módulos tilting da álgebra.

Por exemplo, considere o KQ -módulo indecomponível rígido P_1 , vamos encontrar por meio da fórmula de Caldero-Chapoton, apresentada na página 64, a variável cluster associada a P_1 . O vetor dimensão de P_1 é dado por $\bar{m} = [1100]$ e os seus únicos submódulos são 0 , P_2 e ele próprio. Logo, $\bar{e} = [0000] = 0$ ou $\bar{e} = [1000] = \alpha_1$ ou $\bar{e} = [1100] = \bar{m}$. Em virtude de Q ser do tipo Dynkin, em todos os casos temos $\chi(\text{Gr}_{\bar{e}}(P_1)) = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} X_{P_1} &= u_1^{-\langle 0, \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_1, \bar{m} \rangle} \cdot u_2^{-\langle 0, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_2, \bar{m} \rangle} \cdot u_3^{-\langle 0, \alpha_3 \rangle - \langle \alpha_3, \bar{m} \rangle} \cdot u_4^{-\langle 0, \alpha_4 \rangle - \langle \alpha_4, \bar{m} \rangle} + \\ &\quad + u_1^{-\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle} \cdot u_2^{-\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} \cdot u_3^{-\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle - \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle} \cdot u_4^{-\langle \alpha_1, \alpha_4 \rangle - \langle \alpha_4, \alpha_2 \rangle} + \\ &\quad + u_1^{-\langle \bar{m}, \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_1, 0 \rangle} \cdot u_2^{-\langle \bar{m}, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_2, 0 \rangle} \cdot u_3^{-\langle \bar{m}, \alpha_3 \rangle - \langle \alpha_3, 0 \rangle} \cdot u_4^{-\langle \bar{m}, \alpha_4 \rangle - \langle \alpha_4, 0 \rangle} \\ &= u_2^{-1} \cdot u_3 \cdot u_4 + u_1^{-1} \cdot u_2^{-1} + u^{-1} \\ &= \frac{u_1 u_3 u_4 + 1 + u_2}{u_1 u_2} \end{aligned}$$

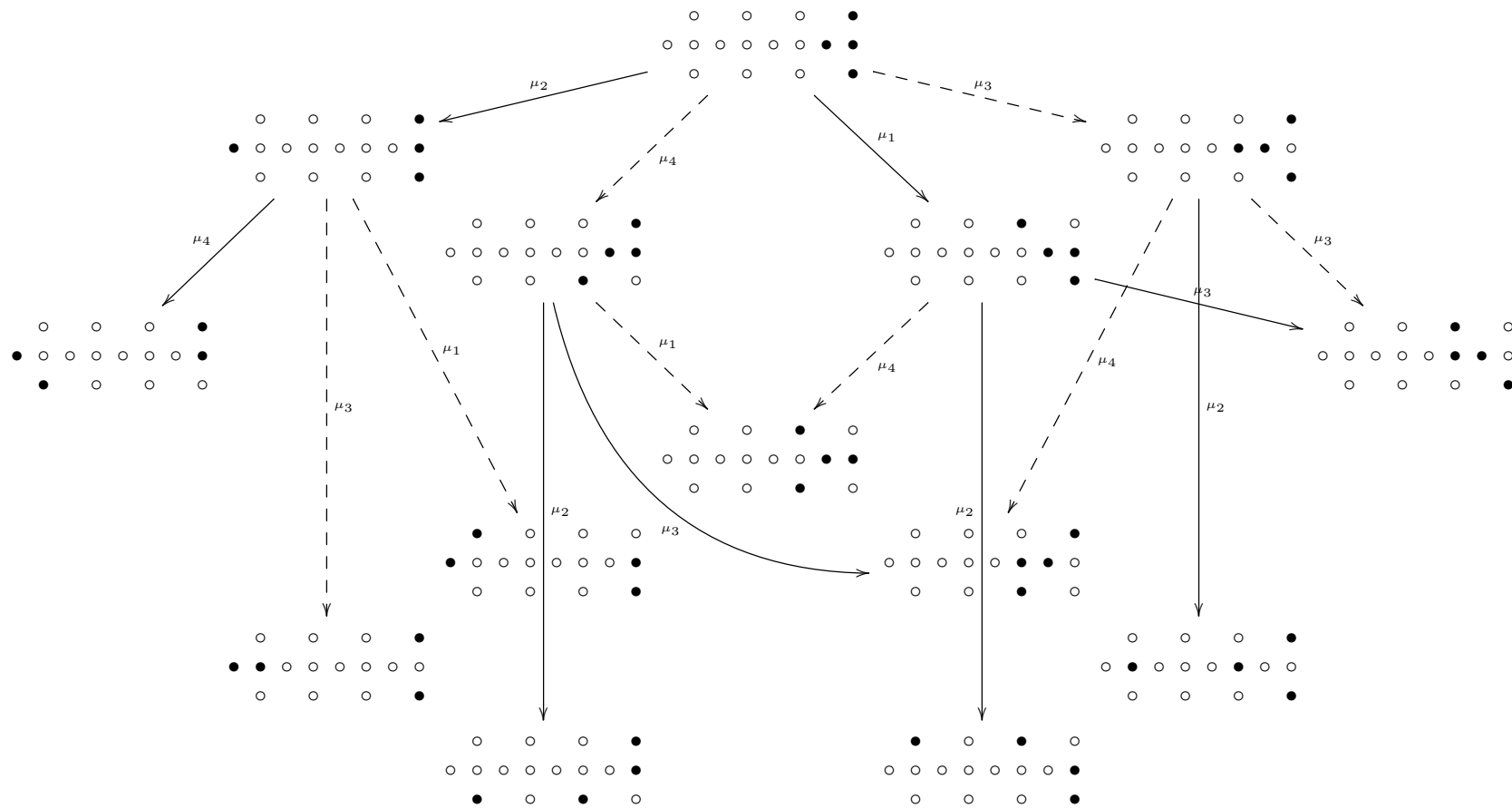


Figura 4.2: Parte do grafo tilting (caso D_4). Compare com o grafo de troca da figura 4.1 na página 69.

que é exatamente a variável cluster associada a P_1 que encontramos anteriormente.

Como vimos pela Proposição 62, página 47, a categoria cluster possui estrutura triangulada. Outro fato bastante interessante é que o quociente de uma categoria cluster por um objeto tilting básico resulta em uma categoria de módulos que tem a propriedade de ser abeliana. Vejamos o exemplo abaixo.

Consideremos o objeto tilting básico $T^* = I_1 \oplus P_2[1] \oplus I_3 \oplus P_4[1]$. Calculamos abaixo os morfismos entre cada somando de T^* .

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_1, P_2[1]) \simeq K,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_1, I_3) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_3[2]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_1, P_4[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_4[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, L[2]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_1, P_4[1]) \\ &\simeq K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_2[1], I_1) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], I_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_1[2]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_2[1], I_3) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_3[2]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_2[1], P_4[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_4[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], L[2]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_2[1], P_4[1]) \\ &\simeq K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_3, I_1) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, I_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, P_1[2]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_3, P_2[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, P_2[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, E[2]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, P_2[1]) \\ &\simeq K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(I_3, P_4[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, P_4[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, L[2]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(I_3, P_4[1]) \\ &\simeq K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_4[1], I_1) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], I_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], P_1[2]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(P_4[1], P_2[1]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], P_2[1]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], E[2]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

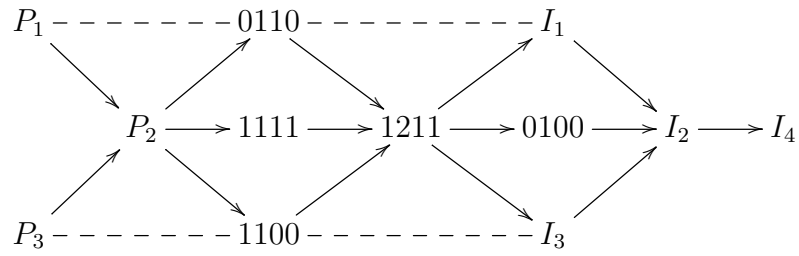
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{C_Q}(P_4[1], I_3) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], I_3) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(P_4[1], P_3[2]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, omitindo as identidades, temos:

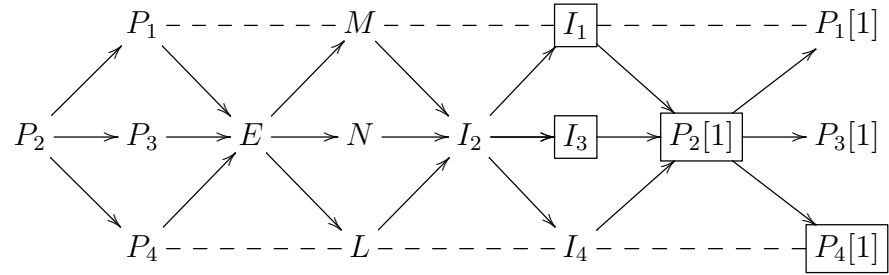
$$\mathrm{End}_{C_Q} T^* : \quad \begin{array}{ccc} T^* & \longrightarrow & T^* \\ I_1 & \searrow & I_1 \\ P_2[1] & \nearrow & P_2[1] \\ I_3 & \searrow & I_3 \\ P_4[1] & \nearrow & P_4[1] \end{array}$$

Portanto, $(\mathrm{End} T^*)^{op} \cong Q_2$.

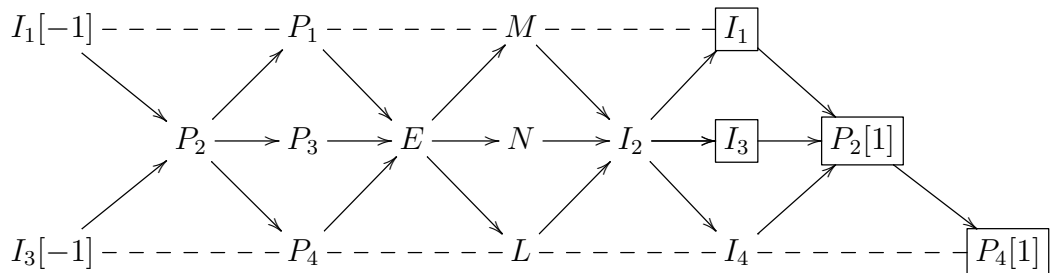
Construindo o quiver de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos do quiver $Q_2 \cong (\mathrm{End} T^*)^{op}$, obtemos:



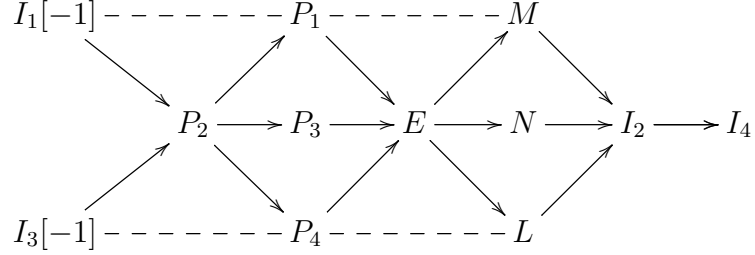
Por outro lado, considere a categoria cluster associada a Q , dada por:



Para fazer o quociente desta categoria pelo objeto T^* é preciso escolher outros representantes para as F -órbitas que $P_1[1]$ e $P_3[1]$ representam, assim obtemos:



Logo, o quociente da categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ pelo objeto tilting básico T^* é a seguinte categoria:

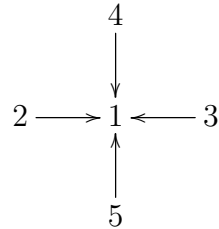


que é isomorfa a categoria de módulos da álgebra de endomorfismo oposta de T^* .

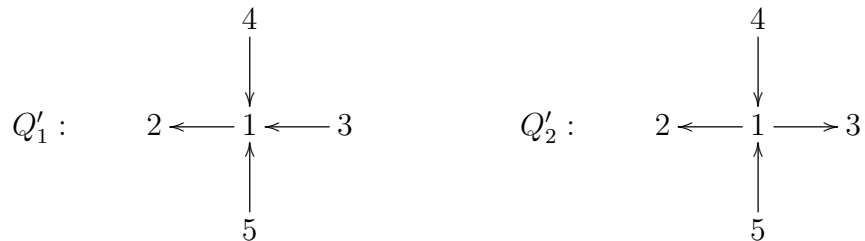
Este fato mostra que cada cluster determina o seu quiver e vice-versa. Este fato é importante no estudo das álgebras de endomorfismos de objetos tilting básicos, chamadas Álgebras Cluster-Tilted, assunto de muitas pesquisas nos dias atuais.

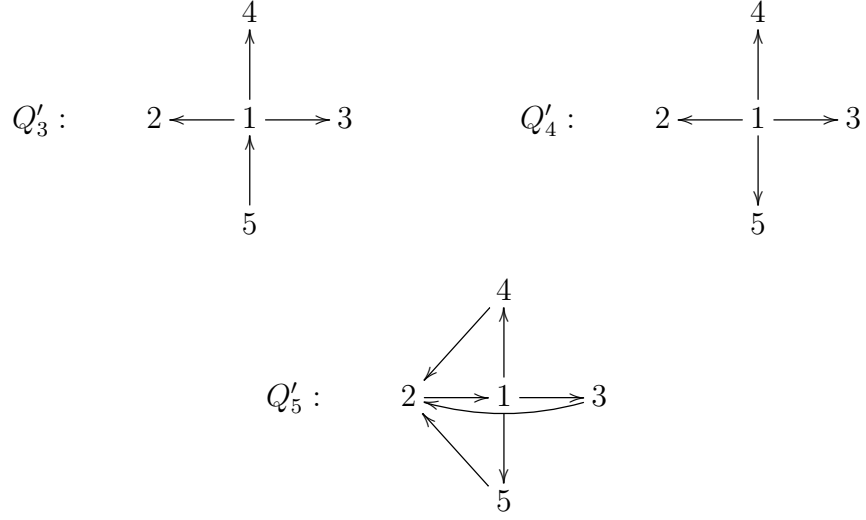
4.2 Caso quiver acíclico não Dynkin simples

Para finalizar este capítulo faremos mais um exemplo de álgebra cluster e categoria cluster de um quiver acíclico do tipo infinito (não Dynkin). Considere o quiver Q' abaixo:

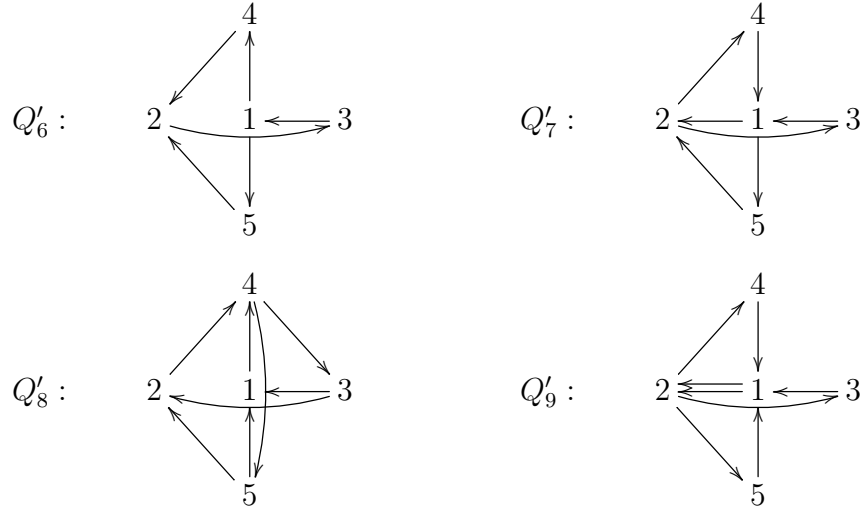


Consideremos a semente inicial $(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, Q')$. Descrevemos os primeiros passos do processo de iteração desta semente na figura 4.3. Denotamos por $a' = \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_2}$, $b' = \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_3}$, $c' = \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_4}$, $d' = \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_5}$ e os seguintes quivers mutação equivalentes:





É importante salientar que a classe de mutação equivalente do quiver Q' tem, ele próprio, os quivers que já mencionamos e ainda os seguintes quivers:



Observe que o quiver Q' é um quiver acíclico, porém seu grafo subjacente não é um diagrama de Dynkin simples. Daí, pelo Teorema 44 temos que o número de variáveis cluster não é finito. Dessa forma, a álgebra cluster $\mathcal{A}_{Q'}$ associada a Q' possui dimensão infinita e é gerada por infinitas variáveis cluster. As primeiras variáveis cluster que obtivemos são as descritas a seguir:

$$\begin{aligned}
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \frac{1+x_2x_3x_4x_5}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1}{x_3}, \frac{1+x_1}{x_4}, \\
& \frac{1+x_1}{x_5}, \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_2}, \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_3}, \\
& \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_4}, \frac{1+x_1+x_2x_3x_4x_5}{x_1x_5}, \dots
\end{aligned}$$

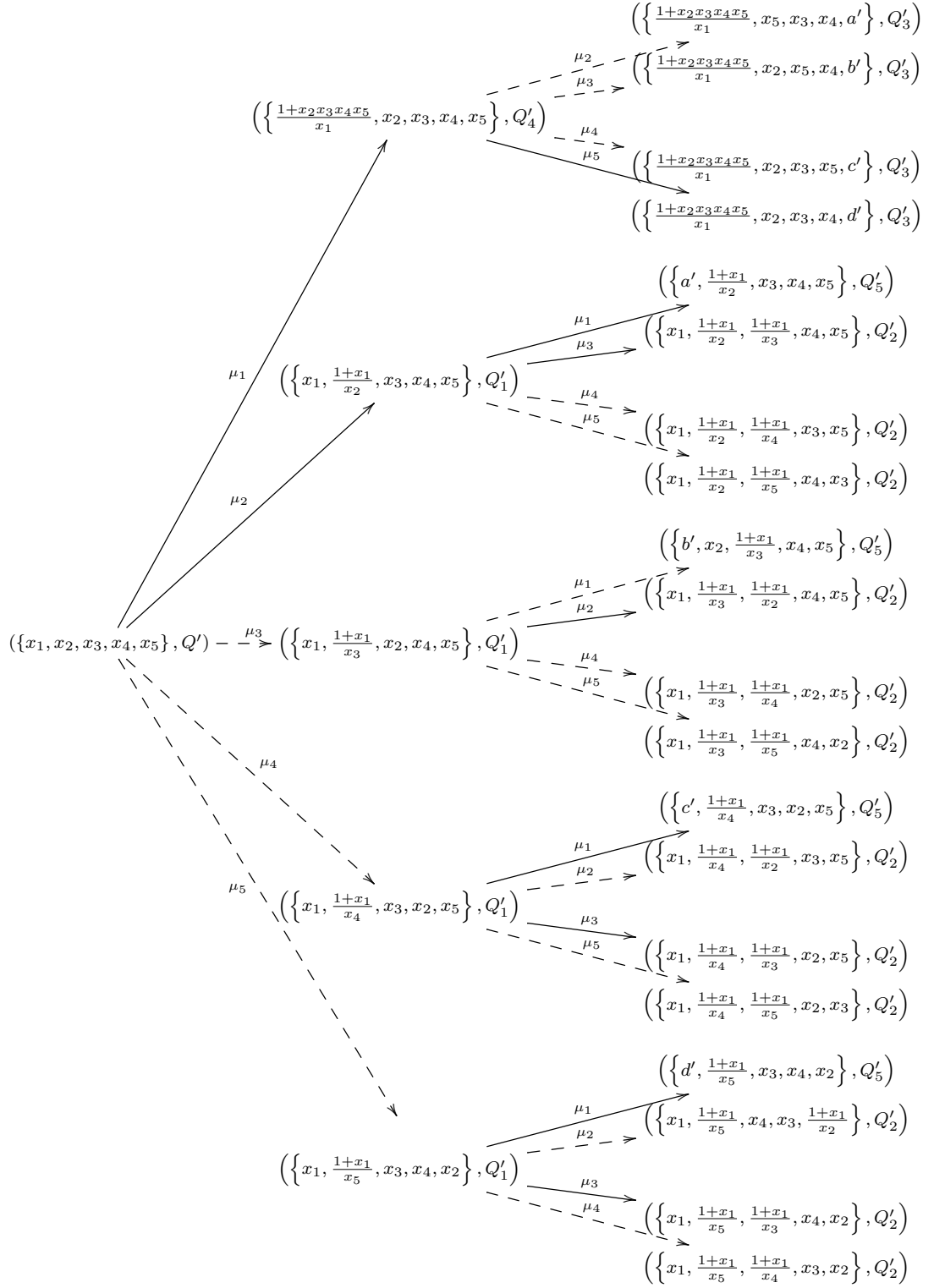
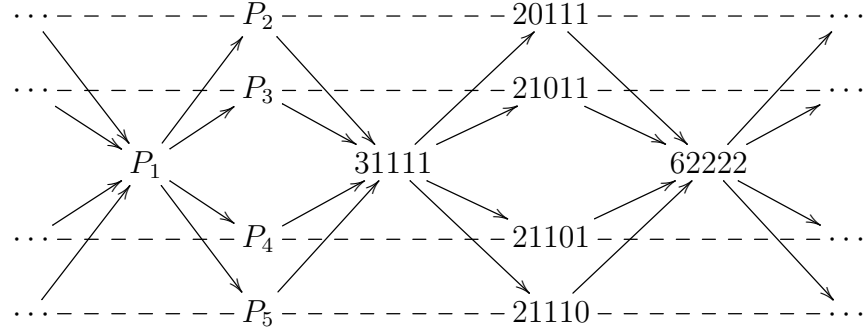
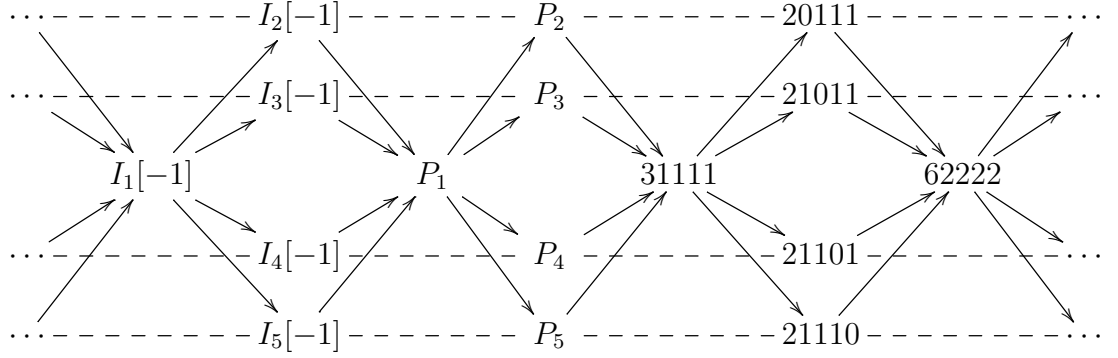


Figura 4.3: Parte do processo de Iteração

Uma componente (pré-projetiva) do quiver de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos do quiver Q' é dada por:



Portanto, uma componente da categoria cluster $\mathcal{C}_{Q'}$ associada a Q' é dada por:



Da mesma forma que fizemos na seção anterior podemos relacionar cada semente na álgebra cluster $\mathcal{A}_{Q'}$ a uma semente tilting na categoria cluster $\mathcal{C}_{Q'}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Buan, A. B.; Marsh, R.; Reiten, I. *Cluster mutation via quiver representations*. Comment. Math. Helv. **83** (2008), 1, 143-177.
- [2] Buan, A. B.; Marsh, R.; Reiten, I. *Cluster-tilted algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 1, 323-332 (electronic).
- [3] Buan, A. B.; Marsh, R.; Reiten, I. *Denominators of cluster variables*. J. Lond. Math. Soc. (2) **79** (2006), 3, 589-611.
- [4] Buan, A. B., et al. *Tilting theory and cluster combinatorics*. Adv. Math. **204** (2006), 2, 572-618.
- [5] Buan, A. B.; Marsh, R.; Reiten, I.; Todorov, G. *Clusters and seeds in acyclic Cluster Algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 10, 3049-3060. With an appendix coauthored in addition by P. Caldero and B. Keller. Disponível em: arXiv:math/0510359v3.
- [6] Caldero, P.; Chapoton, F. *Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations*. Comment. Math. Soc. **81** (2006), 3, 595-616. Disponível em arXiv:math/0410187v2.
- [7] Caldero, P.; Chapoton, F.; Schiffler, Ralf. *Quivers with relations arising from clusters (A_n case)*. Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 3, 1347-1364.
- [8] Caldero, P.; Keller, B. *From triangulated categories to cluster algebras II*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), 6, 983-1009.
- [9] Cibils, Claude; Marcos, Eduardo N. *Skew category, Galois covering and smash product of a k -category*. Disponível em arXiv:math/0312214v3.
- [10] Fomin, S.; Shapiro, M.; Thurston, D. *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I. Cluster complexes*. Acta. Math. **201** (2008), 83-146.
- [11] Fomin, Sergey; Zelevinsky, Andrei. *Cluster algebras I: Foundations*. J. Amer. Math. Soc. **15** (2) (2002), 497-529.
- [12] Fomin, Sergey; Zelevinsky, Andrei. *Cluster algebras II: Finite type classification*. Invent. Math. **154** (1) (2003), 63-121. Disponível em arXiv:math/0208229v2.
- [13] Gelfand, S; Manin, Y. *Methods of Homological Algebra*. Springer, Berlin (1996).

- [14] Happel; D. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge (1988).
- [15] Happel; D. *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite dimensional algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (3) (1991) 641-648.
- [16] Holm, Thorsten; Jorgensen, Peter. *Triangulated categories*. London Mathematical Society Student Texts. Lecture Note Series, vol. 375, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).
- [17] Ibrahim Assem; Daniel Simson; Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras*. Vol. 1, London Mathematical Society Student Texts **65**, Cambridge University Press, Cambridge, (2006).
- [18] Keller, Bernhard. *Cluster Algebras, quiver representations and triangulated categories*, (2013). Disponível em arXiv:0807.1960v11.
- [19] Keller, Bernhard. *On Triangulated orbit categories*, (2005) Disponível em arXiv:math/0503240v4.
- [20] Keller, Bernhard. Quiver mutation in Java, Java applet available at the author's home page. (2000) Disponível em: <http://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/quivermutation/>
- [21] Mac Lane; S. *Categories for the Working Mathematician*. Springer. 2 ed. (1978).
- [22] Marsh, Robert; Reineke, Markus; Zelevinsky, Andrei. *Generalized associahedra via quiver representations*. Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 10, 4171-4186.
- [23] Musiker, G.; Stump, C. *A compendium on the cluster algebra and quiver package in sage*. (2011). Disponível em: arXiv:1102.4844v2.
- [24] Reiten, Idun. *Tilting Theory and Cluster Algebras*, (2010). Disponível em arXiv:1012.6014v1.
- [25] Reiten, Idun. *Cluster Categories*, (2010) Disponível em arXiv:1012.4949v1.
- [26] Schiffler, Ralf. *A geometric model for cluster categories of type*. Alg. Comb. **27** (2008), 1, 1-21.
- [27] Schiffler, Ralf. *Cluster algebras and cluster categories*. In: XVIII Latin American Algebra Colloquium. São Pedro - Brasil (2009).
- [28] Verdier; J. *Catégories dérivées, état 0*. SGA 4 1/2, Springer LNM **569** (1977) 262-311.