

**TATIANA MACHADO RESENDE GUEDES**

**CONTRIBUIÇÕES INTERDISCIPLINARES DA EXPLORAÇÃO ESTÉTICA DOS  
PADRÕES FRACTAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, para obtenção do título *Magister Scientiae*.

Orientadora: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria

**VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2023**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

G924c  
2023 Guedes, Tatiana Machado Resende, 1989-  
Contribuições interdisciplinares da exploração estética dos  
padrões fractais / Tatiana Machado Resende Guedes. – Viçosa,  
MG, 2023.

1 dissertação eletrônica (120 f): il. (algumas color.).

Inclui apêndices.

Orientador: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,  
Departamento de Educação, 2023.

Inclui bibliografia.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.660>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Fractais - Estudo e ensino. 2. Smartphones. 3. GeoGebra  
(Software). 4. Ensino médio. 5. Inovações educacionais. I. Faria,  
Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho, 1988-. II. Universidade  
Federal de Viçosa. Departamento de Educação. Programa de  
Pós-Graduação em Educação. III. Título.

CDD 22. ed. 514.742

Bibliotecário(a) responsável: Bruna Silva CRB-6/2552


**TATIANA MACHADO RESENDE GUEDES**

**CONTRIBUIÇÕES INTERDISCIPLINARES DA EXPLORAÇÃO ESTÉTICA DOS  
PADRÕES FRACTAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27/09/2023


Assentimento:

Documento assinado digitalmente  
 TATIANA MACHADO RESENDE GUEDES  
Data: 18/10/2023 21:02:23-0300  
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

---

**Tatiana Machado Resende Guedes**

**Autora**

Documento assinado digitalmente  
 REJANE WAIANDT SCHUWARTZ DE CARVALHO I  
Data: 18/10/2023 22:40:11-0300  
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

---

**Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria**

**Orientadora**

## AGRADECIMENTOS

Manifesto minha gratidão, primeiramente a Deus, pelo dom da vida. Sem Ele eu não estaria aqui, escrevendo estas palavras.

Aos meus pais, José Arnaldo Resende Guedes e Rosângela Maria Machado Resende Guedes, exemplos de amor, carinho, honestidade e perseverança. Modelos a serem seguidos. Orgulho de ser filha de vocês.

À minha irmã, Maria Clara Machado Resende Guedes, agradeço por todo o incentivo, confiança e por sempre me motivar a seguir em frente.

Ao meu esposo, Leonir P. de Oliveira Carvalho, com você cada dia é uma alegria. Obrigada pelo seu incentivo e pela paciência nos dias atarefados que precederam a entrega deste trabalho.

Ao meu filho Arthur Machado Resende de Oliveira, minha razão de viver e por quem sinto um amor impossível de descrever com palavras.

À minha orientadora, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria, pelo seu trabalho comprometido com todos os seus alunos e orientandos. Agradeço por sua amizade e pelo exemplo de ser humano fantástico que é. Me faltam palavras para descrever a importância desta incrível professora, orientadora, mãe e esposa.

Às professoras que compuseram a banca de qualificação do projeto e de defesa deste trabalho, Caroline Mendes dos Passos e Ângela Rita Christofolo de Mello, agradeço pela leitura atenciosa, sugestões e contribuições.

Aos meus colegas de trabalho, Júnia de Magalhães Vieira Machado, Paola Luciana Correia e Diego Rossi, sou grata pela disponibilidade e por ter me ajudado no desenvolvimento desse trabalho. Sem vocês não seria possível.

À Renata Roque, aluna de iniciação científica, gratidão por ter me ajudado nessa jornada.

Aos membros do GATE, manifesto a minha gratidão por terem me acolhido e aberto as portas para novas aprendizagens.

Aos funcionários e professores do Departamento de Educação, agradeço por sempre estarem à disposição, me auxiliando em questões pertinentes ao mestrado.

À Universidade Federal de Viçosa, sou grata por ter me acolhido e me proporcionado dar esse passo tão importante na minha carreira profissional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## RESUMO

GUEDES, Tatiana Machado Resende, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, setembro de 2023. **Contribuições Interdisciplinares da Exploração Estética dos Padrões Fractais**. Orientadora: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria.

Esta pesquisa objetiva investigar as contribuições interdisciplinares da exploração estética dos Padrões Fractais para alunos do Ensino Médio integrado ao curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*. A pesquisa se concentra em buscar respostas para a seguinte pergunta: “Quais contribuições a exploração estética dos Padrões Fractais traz ao ensino de Artes, Informática e Matemática em uma perspectiva interdisciplinar, no contexto do Ensino Médio?”. Essa problemática é explorada por meio dos três artigos que compõem a pesquisa: “Trabalho Integrado de Professores de Diferentes Áreas em uma Perspectiva Interdisciplinar”, “Construção de Padrões Fractais com Materiais Manipuláveis: aprendizagem em uma abordagem interdisciplinar” e “Aprendizagem Interdisciplinar por Meio da Construção de Padrões Fractais com Tecnologias Digitais”. Os objetivos específicos se concentram em debater o trabalho interdisciplinar com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática, na busca de garantir a perspectiva interdisciplinar e de aprimorar as atividades elaboradas; discutir as contribuições da exploração interdisciplinar dos Padrões Fractais com materiais manipuláveis para alunos do Ensino Médio e investigar como o estudo de Padrões Fractais com tecnologias digitais podem contribuir para aprendizagem interdisciplinar de alunos do Ensino Médio, respectivamente. Pautada na metodologia de pesquisa qualitativa, a produção dos dados da pesquisa ocorreu em duas etapas. A primeira aconteceu por meio de encontros com os professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática do curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*, com o intuito de aprimorar as atividades, bem como de integrar os professores participantes com a proposta da pesquisa. Na segunda etapa ocorreu a realização das atividades com os alunos. Na ocasião, foram utilizados materiais manipuláveis e o aplicativo GeoGebra. Os instrumentos utilizados foram filmagens, folhas de atividades respondidas pelos estudantes e registros no caderno de campo da pesquisadora. Os resultados apontam para as seguintes contribuições da exploração estética dos Padrões Fractais ao ensino de Artes, Informática e Matemática em uma perspectiva interdisciplinar, no contexto do Ensino Médio: proporcionar discussões interdisciplinares; instigar a curiosidade dos alunos por meio da exploração estética dos Padrões Fractais; possibilitar que novos conhecimentos

globais e dinâmicos emergem a partir de ideias investigadas com materiais manipuláveis e tecnologias digitais; mobilizar conhecimentos prévios oriundos das disciplinas envolvidas para construir novas conjecturas; proporcionar a integração das disciplinas de Artes, Informática e Matemática; integrar os professores de diferentes disciplinas em um trabalho colaborativo; engajar os docentes em atividades de planejamento que garantam a perspectiva interdisciplinar e o envolvimento ativo dos alunos; favorecer a interação entre alunos, professores, pesquisadores, conteúdos abordados, materiais manipuláveis e tecnologias digitais. Nesse contexto, vislumbramos uma contribuição potencialmente interdisciplinar da pesquisa para que cada indivíduo expresse suas impressões e, ao mesmo tempo, deixe sua visão fluir, aguçada por algo que seja esteticamente belo.

**Palavras-chave:** Celular Inteligente. Materiais Manipuláveis. GeoGebra. Ensino Médio. Tecnologias Digitais.

## ABSTRACT

GUEDES, Tatiana Machado Resende, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, September, 2023. **Interdisciplinary Contributions of the Aesthetic Exploration of Fractal Patterns.** Adviser: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria.

This research aims to investigate the interdisciplinary contributions of the aesthetic exploration of Fractal Patterns for high school students integrated into the computer science technical course at the Federal Institute of Science and Technology of Southeast Minas Gerais, Campus Muriaé. The research focuses on finding answers to the following question: "What contributions does the aesthetic exploration of Fractal Patterns bring to the teaching of Arts, Informatics and Mathematics in an interdisciplinary perspective, in the context of High School?". This problem is explored through the three articles that make up the research: "Integrated Work of Teachers from Different Areas in an Interdisciplinary Perspective", "Construction of Fractal Patterns with Manipulable Materials: learning in an interdisciplinary approach" and "Interdisciplinary Learning through the Construction of Fractal Patterns with Digital Technologies". The specific objectives focus on discussing interdisciplinary work with teachers working in the disciplines of Arts, Computer Science and Mathematics, in order to guarantee an interdisciplinary perspective and improve the activities developed; discussing the contributions of interdisciplinary exploration of Fractal Patterns with manipulable materials for high school students and investigating how the study of Fractal Patterns with digital technologies can contribute to interdisciplinary learning for high school students, respectively. Based on the qualitative research methodology, the research data was produced in two stages. The first took place through meetings with teachers working in the Arts, Computer Science and Mathematics disciplines of the computer science technical course at the Federal Institute of Science and Technology of Southeast Minas Gerais, Muriaé Campus, with the aim of improving the activities, as well as integrating the participating teachers with the research proposal. The second stage involved carrying out the activities with the students. Manipulable materials and the GeoGebra application were used. The instruments used were filming, activity sheets answered by the students and records in the researcher's field notebook. The results point to the following contributions of the aesthetic exploration of Fractal Patterns to the teaching of Arts, Computer Science and Mathematics in an interdisciplinary perspective, in the context of High School: provide interdisciplinary discussions; instigate students' curiosity through the aesthetic exploration of Fractal Patterns; enable new global and dynamic knowledge to emerge from ideas investigated with

manipulable materials and digital technologies; mobilize previous knowledge from the disciplines involved to construct new conjectures; provide integration between the disciplines of Arts, Computer Science and Mathematics; integrate teachers from different disciplines in collaborative work; engage teachers in planning activities that guarantee an interdisciplinary perspective and the active involvement of students; encourage interaction between students, teachers, researchers, content covered, manipulable materials and digital technologies. In this context, we envision a potentially interdisciplinary contribution from the research so that each individual can express their impressions and, at the same time, let their vision flow, sharpened by something that is aesthetically beautiful.

Keywords: Smart cell phone. Manipulable Materials. GeoGebra. High School. Digital Technologies.

## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO .....</b>	<b>10</b>
1.1 Estrutura da dissertação .....	13
1.2 Justificativa, Objetivos e Problema da Pesquisa.....	14
1.3 Metodologia e Procedimentos de Produção dos Dados da Pesquisa .....	16
<b>ARTIGO I - TRABALHO INTEGRADO DE PROFESSORES DE DIFERENTES</b>	
<b>ÁREAS EM UMA PERSPECTIVA INTERDISCIPLINAR .....</b>	<b>19</b>
Resumo .....	19
1. Introdução .....	19
2. Trabalho Interdisciplinar Docente .....	21
3. Materiais Manipuláveis e Tecnologias Digitais no Ensino Interdisciplinar .....	23
4. Padrões Fractais .....	25
5. Metodologia .....	28
6. Análise dos dados .....	29
7. Considerações Finais .....	37
Referências.....	38
<b>ARTIGO II - CONSTRUÇÃO DE PADRÕES FRACTAIS COM MATERIAIS</b>	
<b>MANIPULÁVEIS: APRENDIZAGEM EM UMA ABORDAGEM</b>	
<b>INTERDISCIPLINAR.....</b>	<b>41</b>
Resumo .....	41
1. Introdução .....	41
2. A Aprendizagem na Abordagem Interdisciplinar .....	42
3. Materiais Manipuláveis.....	44
4. Padrões Fractais .....	47
5. Metodologia .....	48
6. Análise de Dados .....	49
7. Considerações Finais .....	66
Referências.....	67
<b>ARTIGO III - APRENDIZAGEM INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA</b>	
<b>CONSTRUÇÃO DE PADRÕES FRACTAIS COM TECNOLOGIAS DIGITAIS.....</b>	<b>70</b>
Resumo .....	70
1. Introdução .....	70
2. Interdisciplinaridade e Aprendizagem .....	71

3. Tecnologias Digitais na Educação Escolar .....	73
4. Padrões Fractais .....	74
5. Metodologia .....	76
6. Análise de Dados .....	77
7. Considerações Finais .....	92
Referências.....	93
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>96</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>99</b>
<b>APÊNDICE A – DESENVOLVENDO O CARTÃO FRACTAL DEGRAUS.....</b>	<b>101</b>
<b>APÊNDICE B – DESENVOLVENDO O CARTÃO FRACTAL TRIÂNGULO DE SIERPINSKI .....</b>	<b>106</b>
<b>APÊNDICE C – CRIANDO PADRÕES FRACTAIS NO GEOGEBRA.....</b>	<b>110</b>
<b>APÊNDICE D – RECONHECIMENTO DO APP GEOGEBRA.....</b>	<b>116</b>

## APRESENTAÇÃO

Para aprender, o ser humano precisa passar por um processo de aperfeiçoamento pessoal em aspectos emocionais, sociais, culturais, físicos, além do aprimoramento em princípios vinculados à aprendizagem como o conhecimento, as habilidades, as atitudes, e os valores. Todos esses fatores que permeiam um indivíduo contribuem para que ele consiga aprender em um processo construtivo e contínuo (DIAS, 2011). Nesse sentido, consideramos que o ensino tradicional pouco tem contribuído para que a aprendizagem ocorra de modo significativo.

O ensino tradicional é predominante no cenário da Educação Básica Nacional e é caracterizado por valorizar mais a memorização do que o raciocínio além de utilizar apenas lousa, giz, papel e caneta em detrimento de outros recursos que poderiam ser empregados com vistas a uma aprendizagem significativa (FARIA, 2020). Embora, tais recursos sejam característicos no contexto do ensino tradicional, existem diversos outros que tornam a aprendizagem gratificante e construtiva.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estimula que sejam criados outros meios para que os jovens alunos do Ensino Médio aprendam de forma a se tornarem “[...] sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis” (BRASIL, 2018, p. 463). Nesse sentido, Freire (2018) explica que um dos erros cometidos pelos educadores é a insistência de utilizar os mecanismos tradicionais sem buscar inovar ou motivar o aluno. Antes, o estudante era exposto a memorizar conceitos, realizar diversos exercícios repetidos e copiar longos textos da lousa em seu caderno, sem emitir opinião sobre o assunto abordado. Contudo, o autor indica que tal memorização não oportuniza a aprendizagem, uma vez que o discente não sabe o que é, na verdade, o objeto e não o reconhece de fato.

Na perspectiva de Freire (1970), é preciso que a escola adote a reflexão crítica que visa uma formação do indivíduo em sua completude, contribuindo para o desenvolvimento de cidadãos capazes de atuar em sua realidade social, histórica e cultural. Essas ideias estão fundamentadas em uma pedagogia crítica na qual não é possível haver neutralidade na educação, no sentido de que é preciso capacitar os alunos para entender o mundo com amplitude e profundidade. Cada pessoa possui seu papel na história e, por isso, é capaz de criar possibilidades para transformá-la com o intuito de alcançar a autonomia e a emancipação.

Conforme retrata Freire (2000), essas transformações não podem ficar no campo das

ilusões ou abstrações, pois precisam ser colocadas em prática. O professor crítico-reflexivo possui como uma de suas grandes características a preocupação com as consequências éticas e morais de suas ações na prática social. Através da linguagem crítica, que orienta o processo reflexivo, torna-se importante a formação de professores e alunos conscientes do seu agir na sociedade e no mundo. Assim, ao despertar a interação entre o homem e o universo, desencadeamos aptidões reflexivas e críticas em uma pessoa.

Nesse sentido, argumentamos sobre a importância de trazer alternativas viáveis que levem o aluno a buscar o conhecimento, trabalhando de forma autônoma através de suas habilidades. Assim,

explicar o caminho encontrado e compartilhar com a turma o procedimento para chegar a um resultado é uma forma dos alunos desenvolverem a autonomia, a criticidade, a criatividade e a capacidade de tomar decisões. Ao raciocinar, conectamos argumentos, fazemos deduções e estabelecemos relações que nos conduzem a reflexões, análises e sínteses. No lugar de exigir a insistência e o esforço de nossos alunos para decorar, podemos valorizar o raciocínio. (FARIA; MALTEMPI, 2020, p. 7).

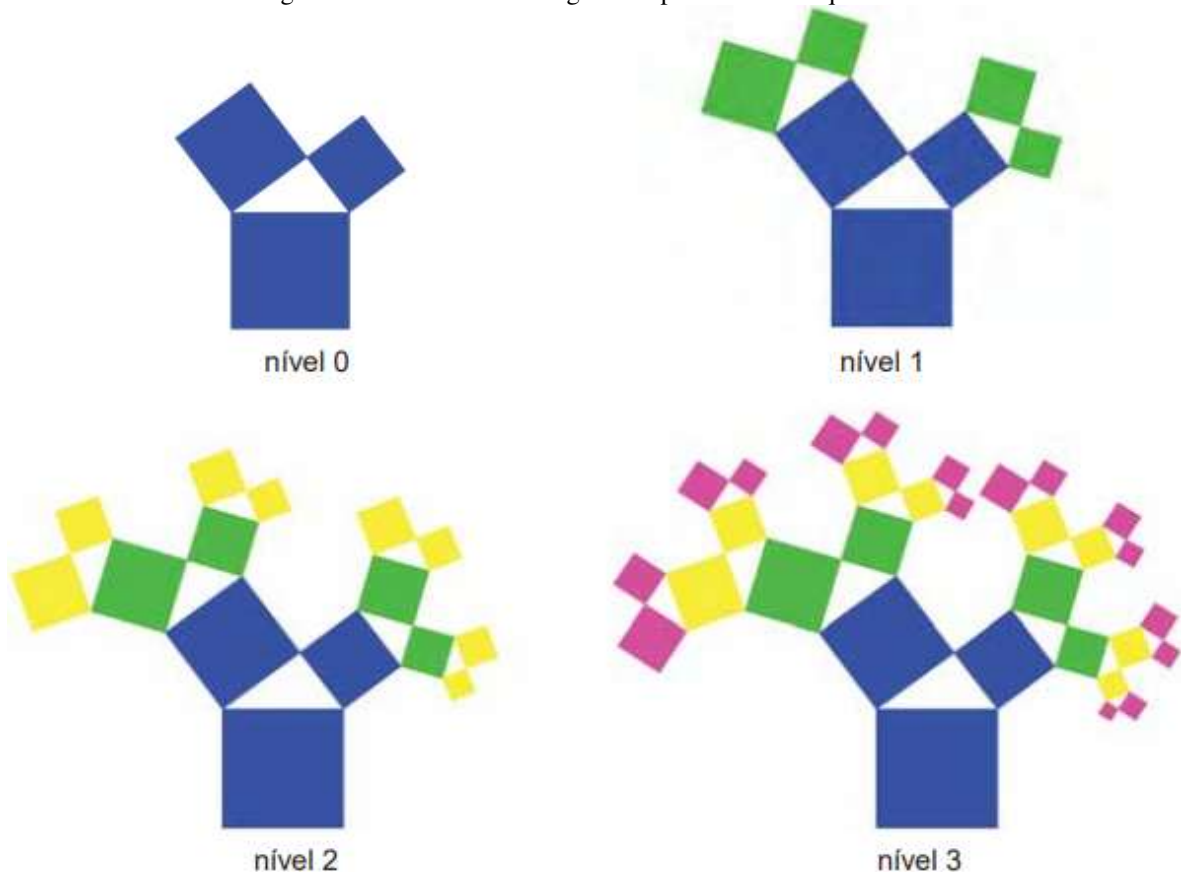
É importante ressaltar que, para mudar essa visão, é necessário trazer motivação para a sala de aula. Para isso, um dos caminhos possíveis é explorar os conteúdos escolares de forma criativa, conectando o conceito do objeto de estudo à experimentação, à apreciação, à manipulação e à construção, seja com materiais manipuláveis ou tecnologias digitais.

Se referindo aos parâmetros curriculares nacionais, Denardin e Mello (2021, p. 23) destacam que “em atenção aos diferentes níveis de conhecimento prévio, a orientação é que a escola valorize as diferentes áreas do conhecimento, para promover a aprendizagem, legalmente assegurada, enquanto direito de todos”. Um dos caminhos para valorização das diferentes áreas do conhecimento é a interdisciplinaridade.

Na busca por métodos que favoreçam a participação ativa e reflexiva dos alunos, propomos a exploração estética dos Padrões Fractais com diferentes recursos no âmbito da disciplina de Artes. Por meio da exploração dos Fractais é possível descrever uma representação capaz de expressar o modelo do que ocorre ao longo de suas iterações com o passar dos níveis. Nesse sentido, “[...] os Padrões Fractais são entendidos como o modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente” (FARIA, 2012, p. 62). Além disso, esse tipo de padrão tem infinitas iterações que não tem limites para serem descobertos, característica que o torna extremamente intrigante e possível de ser utilizado para explicar fenômenos da natureza.

Os padrões fractais encantam por seu apelo estético. A regularidade das suas formas constitui uma bela sequência. Barbosa (2002) afirma que a beleza dos fractais torna possível desenvolver o senso estético no estudo da Arte e que, por isso, deve ser trabalhado na sala de aula. Ao observarmos um Padrão Fractal podemos prever o que ocorrerá ao longo das iterações, de modo que o nível sucessor será a base para a iteração seguinte (Figura 1).

Figura 1: Fractal Árvore Pitagórica representado em quatro níveis.



Fonte: Faria (2012, p.40)

Os Padrões Fractais possuem forte apelo estético e visual, mas vão além, pois sua estrutura e iteração são regidas por padrões que permitem que, mesmo após diversas iterações, sejam mantidas as suas principais propriedades: complexidade infinita e autossimilaridade.

Essas propriedades proporcionam a sensação de surpresa e a contemplação da estética nas regularidades presentes na aparente irregularidade desses padrões. Esse efeito, causado na observação, está relacionado ao fato de cada propriedade ser composta de características como harmonia e simetria, oriundas da atividade humana para construção desses objetos, com rigor e criatividade. (FARIA; MALTEMPI, 2012, p. 42).

O crescimento e o aperfeiçoamento do homem são oriundos das experiências que

perpassam as práticas escolares. A vivência em sala de aula gera infinitas possibilidades em que, tanto o professor quanto o aluno, desenvolvem a criatividade e o senso estético que podem ser aguçados com a exploração dos padrões fractais. Nesse sentido, é possível ponderar que a interação do homem e o universo parte da premissa de encontrar nela argumentos que lhe tragam prazer de explorar suas próprias ideias. Essa interação pode ser beneficiada com a exploração dos padrões fractais que se fazem presente na natureza, na arte, na geometria e em tantas outras áreas.

Nesse sentido, afirmamos que os padrões fractais possuem caráter interdisciplinar de conectar o indivíduo com a ciência que embasa as diversas disciplinas, considerando os aspectos histórico e cultural. Entendemos a interdisciplinaridade, portanto, como a integração simultânea entre diversas ciências, removendo fronteiras historicamente estabelecidas (FRIGOTTO, 1995). Assim, na sala de aula, a interdisciplinaridade integra duas ou mais disciplinas, colaborando para que o conhecimento seja realizado em conexão com as demais de forma crítica e estimuladora. Ao explorar esses padrões, é possível gerar uma expansão de ideias que contribuem para a construção de um conhecimento com caráter interdisciplinar.

É importante destacar que os padrões fractais podem ser criados ou descobertos. Devido ao aprimoramento das tecnologias nas últimas décadas, novas possibilidades estão surgindo na exploração desses padrões. As tecnologias digitais e a evolução da informática trazem ferramentas que são constantemente aperfeiçoadas. Diariamente surgem novas necessidades para a humanidade que são solucionadas ou favorecidas pelos avanços tecnológicos. Na escola, mais especificamente na sala de aula, tais ferramentas podem auxiliar na exploração de artefatos, com vistas tanto a descoberta de respostas, quanto ao surgimento de novas indagações capazes de aguçar a criatividade. Por isso, consideramos que as Tecnologias Digitais são alternativas importantes para explorar os Padrões Fractais e para compreender que o ser humano não tem limites em suas pesquisas e conquistas (FARIA, 2012).

## **1.1 Estrutura da dissertação**

A presente dissertação é iniciada com esta introdução que apresenta as seções: Estrutura da Dissertação, Justificativa, Objetivos, Problema da Pesquisa, Metodologia e Procedimentos de Produção dos Dados da Pesquisa. Na sequência, são apresentados os três artigos que compõem a pesquisa, cada um com seu próprio objetivo, introdução, metodologia, análise dos dados, resultados, considerações e referências.

O primeiro artigo, intitulado “Trabalho Integrado de Professores de Diferentes Áreas em uma Perspectiva Interdisciplinar”, objetiva debater o trabalho interdisciplinar com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática, na busca de garantir a perspectiva interdisciplinar e de aprimorar as atividades elaboradas.

O segundo artigo, “Construção de Padrões Fractais com Materiais Manipuláveis: aprendizagem em uma abordagem interdisciplinar”, objetiva discutir as contribuições da exploração interdisciplinar dos padrões fractais com materiais manipuláveis para alunos do Ensino Médio.

O terceiro e último artigo, intitulado “Aprendizagem Interdisciplinar por Meio da Construção de Padrões Fractais com Tecnologias Digitais”, objetiva investigar como o estudo de padrões fractais com tecnologias digitais podem contribuir para aprendizagem interdisciplinar de alunos do Ensino Médio.

Para uma visão mais abrangente da temática da dissertação, é interessante que a leitura seja realizada na íntegra. No entanto, cabe esclarecer que esses artigos se completam entre si e, ao mesmo tempo, podem ser lidos separadamente, de acordo com o interesse do leitor, pois os objetivos de cada artigo são tratados com sua singularidade, mesmo oriundos de uma complexidade de conteúdos que conseguem se encontrar entre as discussões em torno do que foi investigado. Finalizando a dissertação, são apresentadas as considerações finais que abordam os resultados da pesquisa bem como as referências e os anexos.

## **1.2 Justificativa, Objetivos e Problema da Pesquisa**

A escolha do tema é justificada por entender que os Padrões Fractais são motivadores para a compreensão de aspectos artísticos interdisciplinares e que as construções de tais ideias podem contribuir para que os alunos se tornem cidadãos crítico-reflexivos. Especificamente na pesquisa aqui proposta, a produção de dados foi realizada com os alunos do curso técnico em Informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais – *Campus Muriaé*.

A escolha por essa instituição ocorreu pois nela atuo como professora da disciplina de Artes desde 2011. Ao longo dos anos, foi possível perceber que os alunos expressam seus sentimentos e criatividade, auxiliando no desenvolvimento de habilidades e aguçando o interesse pela pintura, desenho, música, teatro, comunicação, dentre outras formas de manifestação artística e cultural. Estruturamos este estudo nestes conceitos, pois compreender a existência e a formação dos Padrões Fractais mobiliza a imaginação e envolve o ser humano

na busca pelo entendimento de padrões inesperados e surpreendentes.

Dentre as turmas em que leciono a disciplina de Artes no IF Muriaé, os alunos do curso Técnico em Informática foram escolhidos para participarem da pesquisa por terem acesso às tecnologias digitais durante as aulas e, assim, explorarem a beleza dos padrões fractais para o desenvolvimento do senso estético. Como professora da Instituição, é válido ressaltar que pretendo prosseguir explorando essa temática nas minhas aulas nas turmas em que leciono a disciplina de Artes.

Por meio da exploração dos Padrões Fractais, a pesquisa visa contribuir para o desenvolvimento cidadão crítico e reflexivo dos alunos, ressaltando a relevância do estudo da disciplina de Artes na escola, bem como a relação com as outras áreas de conhecimento como Matemática e Biologia. Além disso, o estudo estético dos Padrões Fractais pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades dentre as quais destaco concentração, criatividade, disciplina, percepção, criticidade, improvisação, comunicação e integração social.

Os padrões fractais devem ser explorados com intencionalidade. No caso dessa pesquisa, o intuito é evidenciar as contribuições que a exploração estética dos Padrões Fractais traz à formação cidadã crítico-reflexiva dos alunos do curso técnico em informática do Ensino Médio do IF Muriaé. Nesse contexto, vislumbramos na disciplina de Artes um interessante potencial para que cada indivíduo expresse suas impressões e, ao mesmo tempo, deixe sua visão fluir e ser aguçada por algo que seja esteticamente belo.

Nesse cenário, esta pesquisa de cunho qualitativo nasce do anseio de investigar o quanto e como a exploração estética dos Padrões Fractais pode contribuir para o ensino de Artes dos alunos do curso técnico em Informática do IF Muriaé. Assim, esta pesquisa foi orientada pela seguinte questão de pesquisa:

**Quais contribuições a exploração estética dos Padrões Fractais traz ao ensino de Artes, Informática e Matemática em uma perspectiva interdisciplinar, no contexto do Ensino Médio?**

Buscando possíveis respostas para o questionamento exposto, traçamos os objetivos a seguir.

**Objetivo Geral:** Investigar as contribuições interdisciplinares da exploração estética dos Padrões Fractais para alunos do curso Técnico de Informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*.

**Objetivos Específicos:**

- Debater o trabalho interdisciplinar com professores atuantes nas disciplinas de Artes,

Informática e Matemática em busca de garantir a perspectiva interdisciplinar e de aprimorar as atividades elaboradas.

- Discutir as contribuições da exploração interdisciplinar dos padrões fractais com materiais manipuláveis para alunos do Ensino Médio.
- Investigar como o estudo de padrões fractais com tecnologias digitais podem contribuir para a aprendizagem interdisciplinar de alunos do Ensino Médio.

### **1.3 Metodologia e Procedimentos de Produção dos Dados da Pesquisa**

Os métodos qualitativos, em geral, objetivam ressaltar as características de um acontecimento. Para isso, os dados não são padronizáveis e devem ser minuciosamente detalhados, fazendo com que o pesquisador tenha flexibilidade e criatividade para coletá-los e analisá-los, a fim de compreender os indivíduos, sujeitos de sua pesquisa (GOLDENBERG, 2004).

A pesquisa qualitativa pode ser elaborada com diferentes finalidades que consistem em buscar respostas para um problema ou para uma pergunta que direciona o pesquisador para o tema escolhido. Segundo Bicudo (2006), o significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito, de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências. Silva e Menezes (2001) corroboram essa ideia por considerarem que:

[...] há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem. (SILVA; MENEZES, 2001, p. 20).

Esta pesquisa se enquadra nesta definição, sendo a sala de aula a fonte para a coleta de dados. Nesse sentido, caracterizamos a metodologia deste trabalho como qualitativa na qual investigamos o processo de aprendizagem em que os alunos analisem e compreendam a estética presente nas formas geométricas dos Padrões Fractais. Para tanto, é necessário aguçar a criatividade e a criticidade com a finalidade de contribuir para a formação cidadã crítico-

reflexiva de nossos alunos. Por meio de uma abordagem interdisciplinar, propomos atividades investigativas de exploração estética dos Padrões Fractais nas disciplinas de Artes, Matemática e Informática para alunos do curso Técnico de Informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*.

No contexto dessa proposta de pesquisa qualitativa, os dados foram produzidos em duas etapas. A primeira delas ocorreu por meio de quatro encontros, de 2 horas cada, com os professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática com o intuito de aprimorar as atividades cuja versão preliminar foi previamente elaborada pela autora dessa pesquisa com a colaboração da aluna de iniciação científica, Renata Roque Dourado, e da Professora orientadora Rejane Faria. Nesta etapa, buscamos garantir a perspectiva interdisciplinar do material elaborado, bem como integrar os professores participantes com a proposta da pesquisa. Ao todo, elaboramos três atividades: “Desenvolvendo o seu Cartão Fractal”, “Reconhecimento do App GeoGebra<sup>1</sup> Geometria” e “Criando Padrões Fractais no GeoGebra para *Smartphone*”.

A segunda etapa ocorreu em oito encontros com os alunos, com duração de 1 hora/aula cada, no período regular das aulas, utilizando 2 horas/aula de cada uma das disciplinas (Artes, Informática e Matemática). Na ocasião, foram realizadas as atividades utilizando materiais manipuláveis, além do aplicativo GeoGebra, escolhido por possuir propriedades que permitem a realização de diferentes padrões fractais, além de ser de simples manipulação. Os instrumentos utilizados foram filmagens, as folhas de atividades resolvidas pelos estudantes e os registros no caderno de campo.

Nos dois primeiros encontros, foi apresentada a proposta aos alunos, enfatizando o aspecto estético dos Padrões Fractais e promovendo a interdisciplinaridade entre Informática, Arte e Matemática, além de realizar uma atividade de reconhecimento do aplicativo GeoGebra para *smartphone*.

Com a finalidade de reconhecer e investigar as propriedades dos Padrões Fractais com materiais manipuláveis, foi realizada uma atividade (Anexo 1) com recursos como papel, tesoura, cola, régua, dentre outros. O uso de materiais didáticos manipuláveis faz com que o aluno possa tocar, sentir, manipular e movimentar os objetos. Estes materiais exercem um papel importante na aprendizagem, uma vez que facilitam a observação e a análise, desenvolvem o raciocínio lógico, crítico e científico fundamental para o ensino experimental, além de serem excelentes para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos

---

<sup>1</sup> Como resultado da pesquisa de Iniciação Científica, foi criado o GeoGebraBook<sup>1</sup> “Fractais: Uma experiência com a Matemática e a Arte”, espaço em que foram disponibilizadas as atividades elaboradas (ROQUE, 2023).

(LORENZATO, 1991).

As atividades foram desenvolvidas com o intuito de possibilitar que os alunos apreciassem as formas dos Padrões Fractais em suas várias linguagens, desenvolvendo tanto a fruição quanto a análise estética. Além disso, visamos contribuir para a formação cidadã crítico-reflexiva dos alunos, refletindo sobre o papel de cada indivíduo na sociedade e no mundo. Para isso, trabalhamos na apreciação dos dados que passaram por um processo de triangulação, categorização e análise. A leitura e análise dos dados revelou três temáticas principais que resultaram na produção dos três artigos que compõem essa dissertação.

Esclarecemos que, antes do início da produção de dados, a pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa e que o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) foi entregue a todos os participantes maiores de dezoito anos (alunos e professores), assim como o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) que foi entregue aos responsáveis de todos os participantes menores de dezoito anos.

## ARTIGO I

### TRABALHO INTEGRADO DE PROFESSORES DE DIFERENTES ÁREAS EM UMA PERSPECTIVA INTERDISCIPLINAR

#### Resumo

Este artigo objetiva debater o trabalho interdisciplinar com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *campus* Muriaé, em busca de garantir a perspectiva interdisciplinar e de aprimorar as atividades elaboradas. A proposta metodológica é de cunho qualitativo e os dados foram produzidos em três encontros síncronos, via *Google Meet*. Após essa etapa, os dados foram analisados a partir da descrição das percepções, transcrição dos diálogos e triangulação com o referencial teórico sobre interdisciplinaridade. A experiência mostrou que é possível estabelecer um trabalho concomitante entre as disciplinas de Arte, Matemática e Informática. Concluímos, portanto, que por meio do trabalho interdisciplinar, atividades podem ser aprimoradas por meio de discussões que mobilizem o conhecimento específico que cada docente tem da disciplina em que atua. Afinal, os professores conhecem a realidade da instituição de ensino e dos seus alunos, o que permite que realizem interferências quanto à relevância, eficiência e factibilidade das atividades.

**Palavras-chave:** Interdisciplinaridade. Ensino Médio. Materiais Manipuláveis. Educação Pública.

#### 1. Introdução

Ao longo da vida, passamos por processos de aperfeiçoamento pessoal em diversos aspectos: emocional, social, cultural, físico, dentre outros. Existem também fatores e princípios que precisam ser aprimorados como o conhecimento, as habilidades, as atitudes e os valores. Esses e outros fatores que norteiam a vida de um indivíduo contribuem para que ele evolua em um processo construtivo contínuo (DIAS, 2011, p. 83).

Dentre tantas entidades que influenciam na constituição do indivíduo, a escola tem papel fundamental nos mais diversos processos de formação das pessoas, o que nos leva a refletir sobre como a educação escolar tem contribuído para que cada um, com suas características e particularidades, aprimore habilidades que contribuam para o desenvolvimento da humanidade. Nessa reflexão, com destaque para o contexto escolar, consideramos que o ensino tradicional pouco tem contribuído para que a aprendizagem ocorra (FREIRE, 2000).

O ensino tradicional é predominante no cenário da Educação Básica Nacional e é

caracterizado por valorizar mais a memorização do que o raciocínio e por utilizar apenas recursos como lousa, giz, papel e caneta (FARIA; MALTEMPI, 2020). Assim, a discussão aqui realizada não é direcionada à argumentação de que estes recursos sejam abandonados, mas que eles não sejam utilizados em detrimento de outros que poderiam contribuir para a aprendizagem.

Documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), estimulam que sejam criados meios para que alunos do Ensino Médio aprendam de forma a se tornarem “[...] sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis” (BRASIL, 2018, p. 463). Com base em Freire (2000), são necessárias ações para que ocorram transformações no ensino, pois as ideias não podem ficar no campo das ilusões ou abstrações, mas precisam ser colocadas em prática. Nesse sentido, o professor que se dispõe a contribuir para a formação integral dos seus alunos deve desempenhar um papel crítico e reflexivo. Por meio da criticidade que conduz o processo reflexivo, os professores podem orientar os alunos para que eles se sintam aptos a atuar de modo consciente na sociedade e no mundo, despertando a interação entre o homem e a sociedade, desencadeando aptidões que contribuam para o desenvolvimento da humanidade.

Nesse sentido, argumentamos a respeito da importância de trazer alternativas para que o ensino possa levar o aluno a buscar o conhecimento, trabalhando de forma autônoma e explorando suas habilidades. Assim,

Explicar o caminho encontrado e compartilhar com a turma o procedimento para chegar a um resultado é uma forma dos alunos desenvolverem a autonomia, a criticidade, a criatividade e a capacidade de tomar decisões. Ao raciocinar, conectamos argumentos, fazemos deduções e estabelecemos relações que nos conduzem a reflexões, análises e sínteses. No lugar de exigir a insistência e o esforço de nossos alunos para decorar podemos valorizar o raciocínio. (FARIA; MALTEMPI, 2020, p. 7).

Por acreditarmos na formação integral dos alunos, optamos por desenvolver uma pesquisa com perspectiva interdisciplinar, envolvendo e mobilizando os professores das diferentes disciplinas que abordam o conteúdo proposto: os Padrões Fractais. Esclarecemos que este artigo é parte integrante da Pesquisa de Mestrado aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa (CAAE 58898822.0.0000.5153). O termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) foi entregue, lido e assinado por todos os professores participantes da pesquisa. Do mesmo modo, os termos de assentimento livre e esclarecido (TALE) destinado aos alunos com idade inferior a 18 anos foram assinados por eles e por seus responsáveis. Também foi autorizada a

divulgação científica dos dados produzidos na dissertação “Contribuições Interdisciplinares da Exploração Estética dos Padrões Fractais” que se concentrou na atuação do professor, ao objetivar debater o trabalho interdisciplinar com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática, na busca de garantir a perspectiva interdisciplinar e de aprimorar as atividades elaboradas.

Deste modo, este artigo está estruturado abordando, inicialmente, o trabalho interdisciplinar entre professores. Em seguida, é discutida a relevância dos materiais manipuláveis e das tecnologias digitais no ensino interdisciplinar. O tema em estudo, os Padrões Fractais, é abordado na sequência. Expomos a metodologia e os procedimentos adotados na produção de dados que, em seguida, passam a ser analisados. Por fim, são tecidas as considerações finais.

## **2. Trabalho Interdisciplinar Docente**

Ao argumentar sobre a relevância do trabalho integrado de professores de diferentes áreas para que o ensino ocorra de forma interdisciplinar, consideramos importante que os professores atuem na busca de interagir e propor ideias que integrem a temática com conteúdos abordados em suas disciplinas. A interdisciplinaridade é um meio de integrar os conteúdos levando conhecimento aos alunos e, ao mesmo tempo, desenvolvimento profissional para os docentes. Segundo Japiassu (1976, p. 75),

Podemos dizer que nós reconhecemos diante de um empreendimento interdisciplinar todas as vezes que ele conseguir incorporar os resultados de várias especialidades, que tomar de empréstimo a outras disciplinas certos instrumentos e técnicas metodológicos, fazendo uso dos esquemas conceituais e das análises que se encontram nos diversos ramos do saber, a fim de fazê-los integrarem e convergirem, depois de terem sido comparados e julgados.

O autor ressalta a necessidade de que o conhecimento seja construído a partir da integração de ideias convergentes, o que requer uma organização curricular diferente da que ocorre no ensino tradicional. Os professores precisam compartilhar os conhecimentos com o intuito de integrar as disciplinas. Segundo Coimbra (2000, p.58),

O interdisciplinar consiste num tema, objeto ou abordagem em que duas ou mais disciplinas intencionalmente estabelecem nexos e vínculos entre si para alcançar um conhecimento mais abrangente, ao mesmo tempo diversificado e unificado. Verifica-se nesses casos a busca de um entendimento comum

(ou simplesmente partilhado) e o envolvimento direto dos interlocutores.

Tavares (2005) aborda a importância da interdisciplinaridade na área educacional defendendo que cada disciplina deve ocorrer em conexão de aprendizagem mútua com dinamicidade e criatividade por parte dos professores e alunos. Concordamos que “falar da metodologia do interdisciplinar significa, antes de tudo, falar de disciplinas operante e cooperantes. Não é uma tarefa fácil a participação numa obra comum, enquanto diferem os métodos e as modalidades de pensamento” (JAPIASSU, 1976, p. 117).

A importância da interdisciplinaridade no trabalho dos professores de diferentes áreas consiste na forma de compartilhar conhecimentos específicos da área de atuação e, simultaneamente, gerar novos conhecimentos oriundos do trabalho em conjunto, permeado das informações e ideias compartilhadas por cada docente envolvido no processo. Assim, o trabalho interdisciplinar gera uma construção de valores e de conhecimento que rompem os limites das disciplinas. A interdisciplinaridade vem demonstrar que a flexibilidade no trabalho docente tem uma postura de inclusão, de conexão e de interação entre as disciplinas que demandam que o ensino ocorra de forma integrada, contínua e ampla (MIRANDA; GALVÃO-FILHO, 2012).

Assim, o professor deve atuar como um mediador de ideias e conhecimentos, em sintonia com a realidade existente em sala de aula. Nesse sentido, a interdisciplinaridade é uma forma estratégica para que o professor crie alternativas capazes de unificar e de interagir dinamicamente com a realidade das diversas disciplinas que precisam ser ensinadas com criatividade e motivação (MIRANDA; GALVÃO-FILHO, 2012).

A interdisciplinaridade integra uma ampla iniciativa que não deve ser limitada, mas sim aberta para novos caminhos encontrados por meio de discussões de novas formas de ensinar. Na busca de um conhecimento amplo de ideias, sua construção deve considerar questões científicas, culturais, históricas e sociais. Na construção do conhecimento, o ensino não deve ser realizado pautado em técnicas de memorização. Na perspectiva que propomos, é preciso considerar o aluno como um sujeito ativo para que a aprendizagem ocorra de modo dinâmico e criativo. Assim, áreas distintas podem trabalhar de forma conjunta para que as atividades ocorram em um contexto rico de ideias.

O trabalho concomitante de professores de diferentes áreas permite a abordagem integrada de conteúdos escolares. É uma forma de lidar com os desafios e dificuldades que os alunos enfrentam entre as disciplinas, pois estabelecer conexões entre o que foi aprendido no contexto escolar de forma isolada não é uma tarefa simples. O professor deve buscar

aprimorar e conhecer novos caminhos, novas alternativas para apresentar ao aluno uma proposta de ensino em que ele se destaque e desenvolva seu pensamento crítico e reflexivo. Na proposta interdisciplinar, é possível que o professor encontre um caminho a ser percorrido com riqueza de abordagens que integram diferentes metodologias disciplinares concernentes ao seu planejamento (COSTA *et al.*, 2020). Para isso, o planejamento da atividade deve ser realizado em colaboração com os professores das demais disciplinas envolvidas, considerando as especificidades de cada área do conhecimento.

Consideramos a interdisciplinaridade um movimento articulado entre o ensino e a aprendizagem e, por isso, um caminho para trabalhar as disciplinas, agregando as perspectivas das diferentes áreas do conhecimento em prol de soluções para desafios oriundos do cotidiano escolar. Com essa sistemática, conteúdos que seriam ensinados da maneira convencional passam a ser trabalhados de forma conjugada de acordo com os aspectos de cada disciplina (THIESEN, 2008).

Não podemos ocultar que existem barreiras e resistências para que ocorra a interdisciplinaridade na escola, pois é necessário que cada professor considere o entendimento e formação de cada colega de profissão envolvido no processo. Além disso, é preciso tempo e dedicação para realizar reuniões envolvendo os diversos professores comprometidos, o que esbarra no desafio de conciliar as agendas. Para realizar um projeto ou atividade interdisciplinar, é preciso uma tomada de consciência coletiva das questões levantadas pelo grupo. Contudo, destacamos que, apesar das dificuldades a serem enfrentadas com a interdisciplinaridade, podemos articular, estrategicamente, meios de colaboração entre os docentes, pois os resultados são significativamente positivos (SANTOS, 2000).

Para Ferreira (1993), a interdisciplinaridade não possui uma definição estanque, mas precisa ser compreendida, pois o que caracteriza uma prática interdisciplinar é o sentimento intencional presente nela. Em termos educacionais, constitui-se um modelo de ensino focado na integração disciplinar. Portanto, pensar de modo interdisciplinar é permitir o diálogo de qualquer disciplina com as demais do currículo escolar para promover um trabalho contextualizado. Para que o ensino ocorra de modo interdisciplinar, o professor pode trazer como alternativa o uso das tecnologias digitais e dos materiais manipuláveis, recursos que passamos a discutir na seção seguinte.

### **3. Materiais Manipuláveis e Tecnologias Digitais no Ensino Interdisciplinar**

Para tornar a escola um ambiente fecundo para a aprendizagem, é necessário trazer

motivação para a sala de aula. Para isso, um dos caminhos possíveis é explorar os conteúdos escolares de forma criativa, conectando o conceito do objeto de estudo à experimentação, apreciação, manipulação e construção, mobilizando os materiais manipuláveis e as tecnologias digitais. Na pesquisa realizada, utilizamos esses recursos como alternativas para que houvesse compreensão sobre o conteúdo trabalhado.

Além disso, a visão de um trabalho eficiente deve incluir atividades que prezem pela interdisciplinaridade, principalmente na escola contemporânea. Para trabalhar nessa perspectiva, é necessário buscar abordagens metodológicas que favoreçam tal ação e contribuam para que ocorra aprendizagem (FAZENDA, 1993). Nesse sentido, entendemos que recursos como materiais manipuláveis e tecnologias digitais colaboram para que isso ocorra.

Os materiais manipuláveis, no contexto escolar, podem ser entendidos como todo recurso utilizado a fim de auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem e de contribuir para o desenvolvendo da criatividade à medida que envolve atividades nas quais o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar (REYS, 1971). Sua principal função é contribuir para que ocorra aprendizagem e se ajustar às necessidades específicas dos alunos, visando estimular o interesse e favorecer o desenvolvimento da capacidade de percepção e observação, numa tentativa de aproximar o aluno da realidade. Os materiais manipuláveis são capazes de proporcionar aos alunos informações e dados que servem para visualizar ou concretizar os conteúdos estudados (QUIRINO, 2011, p. 13).

Estephan (2000) ressalta a importância de, nos processos de ensino e de aprendizagem, utilizar materiais manipuláveis com a finalidade de reproduzir e explorar os conceitos, desenhos e figuras, contribuindo, desta maneira, para uma formação reflexiva. Corroborando esta ideia, Camacho (2012) complementa que a aplicabilidade de materiais manipuláveis favorece a expansão do espírito de iniciativa, autonomia, criatividade, criticidade e sensibilidade no desenvolvimento e na criação de conceitos.

Para além dos materiais manipuláveis, atualmente, o professor tem acesso às alternativas tecnológicas para motivar os alunos do Ensino Médio a buscarem conhecimento, a pensarem de modo criativo e atuarem com comprometimento. Uma das opções é contribuir para que o aluno aprenda como um sujeito ativo atuando com seu próprio *smartphone*, o que contribui para que ele se sinta entusiasmado e se dedique a alcançar os objetivos ao se sentir parte da proposta de aula. Moura (2016) considera que,

Com as tecnologias móveis, as aulas são mais dinâmicas e transcendem o

horário semanário, proporcionando que a aprendizagem aconteça em contextos diversificados, quando e onde o aluno pretenda. Assim maximiza-se o potencial dos alunos, convidando-os a criar, inventar, explorar e resolver problemas complexos num mundo cada vez mais conectado e global (MOURA, 2016, p. 166)

As tecnologias digitais são capazes de aguçar o interesse, de chamar atenção e de promover o engajamento dos alunos. Os *smartphones* são utilizados nos dias atuais para as mais diversas funções e inseri-lo no ambiente escolar para fins pedagógicos é importantíssimo, dada a sua praticidade e eficiência reconhecida pelos alunos e professores (ROMANELLO, 2016). Por termos essa compreensão, discutimos e aprimoramos atividades com professores atuantes na escola em que os dados foram, posteriormente, produzidos. Tais atividades propuseram que, com uso do aplicativo GeoGebra e com materiais manipuláveis, ocorresse a exploração da criatividade para a construção de Padrões Fractais em uma perspectiva interdisciplinar.

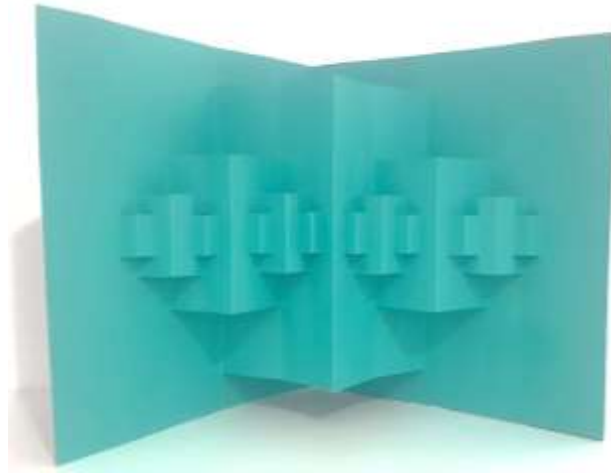
Nesta seção, apresentamos argumentos quanto ao uso de recursos manipuláveis e digitais no ambiente escolar. Na seção seguinte, abordamos o tema em estudo: os Padrões Fractais.

#### **4. Padrões Fractais**

“Os Padrões Fractais estão relacionados ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente.” (FARIA, MALTEMPI, 2012, p. 42). A escolha do tema é justificada por entender que os Padrões Fractais são motivadores para a compreensão de aspectos artísticos interdisciplinares e que as construções de tais ideias podem contribuir para que os alunos se tornem cidadãos críticos e reflexivos.

O estudo dos fractais pode ser empregado para explicar vários fenômenos da natureza e outras formas. Assim como os diversos elementos da natureza que são cheios de irregularidades e fragmentações, os aspectos geométricos dos Padrões Fractais dispõem de estrutura de repetição que é uma das suas peculiaridades, dentre as quais destacaremos a complexidade infinita e a autossimilaridade que encantam pelo apelo estético que apresentam (Figura 1) (BARBOSA, 2005).

Figura 1: Cartão Fractal Degraus Centrais.



Fonte: Autoras

A complexidade infinita pode ser entendida como a capacidade de repetição do mesmo padrão por infinitas vezes em um fractal e,

[...] portanto, está associada às infinitas iterações que ocorrem na construção de um fractal, pois ele é regido por um padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes e que ocorre algébrica e geometricamente. (FARIA, 2012, p.40).

Segundo Assis *et al.* (2008), a complexidade infinita é a reprodução de uma imagem de modo ilimitado. Seu significado no contexto dos Padrões Fractais é que, quando se executa os níveis por repetidas vezes, com as mesmas técnicas, encontra-se sua própria estrutura infinitamente complexa.

Já a autossimilaridade é uma propriedade que revela a semelhança existente em cada nível do fractal de modo a apresentar a mesma estrutura da figura inicial em qualquer escala em que seja observado. Ao iterar, um novo nível surge e passam a existir novas reentrâncias e saliências cada vez menores, mas que mantém intactas as características presentes desde o nível inicial.

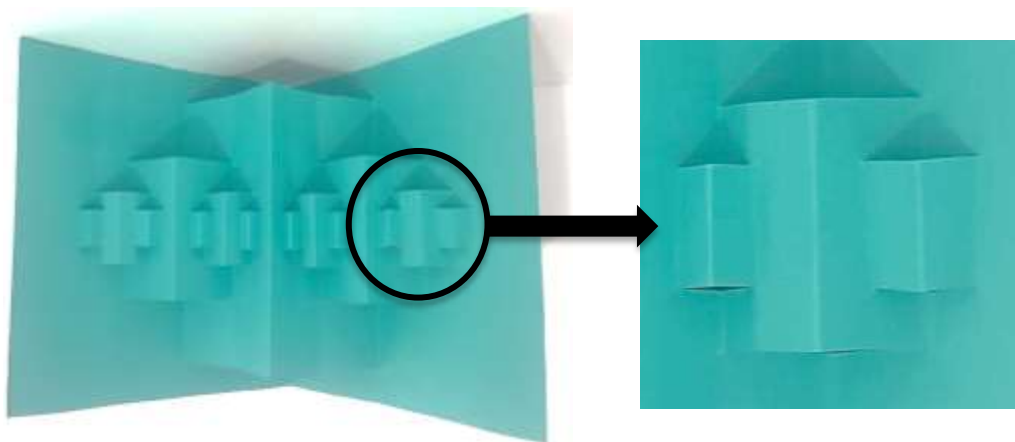
Nos Padrões Fractais, cada parte é semelhante à figura em sua totalidade e isso significa que os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte. É essa propriedade que permite que novos níveis de um Padrão Fractal sejam criados como réplicas da imagem no primeiro nível. Assim, essa é uma característica que ressalta a beleza das figuras em qualquer escala que sejam observados.

De acordo com Faria (2012), tanto a complexidade infinita quanto a autossimilaridade, são propriedades relacionadas ao aspecto visual, pois ambas podem ser observadas por meio

da visualização da iteração dos níveis do fractal. Tais características são visuais e estão presentes em todos os Padrões Fractais. Elas proporcionam a sensação de surpresa e contemplação da estética nas regularidades presentes na aparente irregularidade desses padrões. Esse efeito causado na observação está relacionado ao fato de cada propriedade ser composta de características como harmonia e simetria presentes na natureza ou oriundas da atividade humana para construção de fractais com rigor e criatividade.

Na figura 2, por exemplo, à esquerda, temos o Padrão Fractal Degraus Centrais representado em um cartão em três níveis. À direita, é destacado um recorte da figura original com uma parte do segundo e terceiro nível. No recorte, podemos visualizar que, nos menores degraus, é possível repetir o padrão inicial. De igual modo, nos novos degraus a serem gerados, outros poderão ser feitos de forma indefinida, o que caracteriza a complexidade infinita. Além disso, é possível observar a característica da autossimilaridade, pois é notável que a imagem é similar a geradora.

Figura 2: Cartão Fractal Degraus Centrais com destaque para a Complexidade Infinita.



Fonte: Autoras

Segundo Barbosa (2005), as tecnologias digitais aplicadas à geometria fractal transformaram a geração e a repetição de imagens, pois permitem que incontáveis iterações sejam realizadas por meio de programação. É nesse sentido que Kripka e Santos (2009) afirmam que, com os recursos tecnológicos atuais, é possível gerar Padrões Fractais a partir de figuras planas e sólidos geométricos esteticamente bonitos devido à autossimilaridade e à complexidade infinita que podem ser observadas nas partes em relação ao todo.

A simetria também é identificada nos Padrões Fractais. Ela “[...] é um conceito muito importante na Filosofia da Arte e na Estética, é um fator determinante de emoções [...]”. Ela

individualiza um objeto belo e lhe fornece caráter e expressão” (BARBOSA, 2005, p.13). Um objeto simétrico estabelece uma relação de paridade na união e conformidade das partes de uma obra.

Uma composição simétrica é aquela em que cada elemento tem seu correspondente, ou seja, cada elemento ou conjunto se associa a outro idêntico. Essa correspondência pode ser no tamanho, na forma ou na posição de partes situadas em lados opostos, de uma linha ou plano ou, ainda, de formas que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo. (PERAZZO; VALENÇA, 1997, p. 86).

Conhecimentos artísticos também precisam ser utilizados, como os elementos visuais ponto, linha e forma que, juntos, compõem o esqueleto estrutural da obra na construção de um Padrão Fractal em formato de cartão. Além disso, é preciso delimitar largura, altura e a profundidade e mobilizar conceitos de Arte sobre plano, textura, cor, escala, contraste e equilíbrio, ainda que de forma intuitiva, com o objetivo de dar ênfase ao aspecto estético dos Padrões Fractais.

## **5. Metodologia**

Os métodos qualitativos, em geral, objetivam ressaltar as características de um acontecimento. Para isso, os dados não são padronizáveis, mas devem ser minuciosamente detalhados, fazendo com que o pesquisador tenha flexibilidade e criatividade para coletá-los e analisá-los, a fim de compreender os indivíduos, sujeitos de sua pesquisa (GOLDENBERG, 2004).

A pesquisa tratada neste artigo se enquadra nesta definição, sendo o contexto escolar a fonte para a coleta de dados. Como já exposto, objetivamos debater o trabalho integrado com professores em busca de garantir a perspectiva interdisciplinar, de aprimorar as atividades elaboradas, bem como de integrar os professores participantes com a proposta. A pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *campus* Muriaé. A escolha por essa instituição ocorreu devido ao fato de que nela atuo como professora da disciplina de Artes (primeira autora deste artigo) desde o ano de 2011.

No contexto da pesquisa de mestrado realizada, os dados foram produzidos em duas etapas: a primeira com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática da turma e a segunda com alunos do primeiro ano do Ensino Médio integrado ao curso Técnico de Informática.

Neste artigo, expomos os dados obtidos na primeira etapa por se tratar do objeto de estudo. Nesta fase, ocorreram três encontros, de duas horas cada, com os professores. Assim, para contextualizar os conteúdos de diferentes áreas de forma conjunta, foram realizados três encontros síncronos com carga horária total de seis horas, via *Google Meet*. A opção por realizar os encontros virtualmente se deu por opção dos professores participantes da pesquisa devido à dificuldade de nos encontrarmos presencialmente.

Levamos para os encontros uma versão inicial das atividades, planejadas para reconhecer e investigar as propriedades dos Padrões Fractais com materiais manipuláveis e com o aplicativo GeoGebra para *smartphones*. Ao todo, elaboramos três atividades: “Reconhecimento do App<sup>2</sup> GeoGebra Geometria”, “Desenvolvendo o seu Cartão Fractal” e “Criando Padrões Fractais no GeoGebra para *Smartphone*”. A versão preliminar foi previamente elaborada pelas autoras desse artigo e contou com a colaboração da aluna de iniciação científica voluntária, Renata Dourado Roque, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, também sob orientação da Professora Rejane Faria.

Antes do primeiro encontro, conversamos individualmente com cada professor e entregamos as atividades e os materiais necessários para realização destas. Nossa intenção foi a de que as docentes chegassem com uma noção de como se daria a dinâmica das atividades.

Os instrumentos utilizados para coleta de dados foram as gravações dos encontros na plataforma *Google Meet* e os registros no caderno de campo da pesquisadora. Ao trazer os registros dos professores participantes, optamos por usar nomes fictícios a fim de resguardar suas identidades. Esclarecemos que as falas dos professores participantes estão dispostas com recuo para facilitar a identificação ao longo do texto ou, quando menores de três linhas, estão no parágrafo em curso, entre aspas, com a finalidade de dar fluidez à leitura. Esses trechos foram extraídos das gravações dos encontros, contudo, existem interferências nas falas que foram acrescentadas entre colchetes [ ] com o intuito de dar sentido ao trecho para o leitor. Na seção seguinte, passamos a analisar os dados produzidos, triangulando-os com autores referência nas áreas de estudo.

## 6. Análise dos dados

Nos encontros realizados, discutimos cada etapa com os professores das disciplinas de Artes, Informática e Matemática na busca de garantir uma perspectiva interdisciplinar do

---

<sup>2</sup> Como resultado da pesquisa de Iniciação Científica, foi criado o GeoGebraBook<sup>2</sup> “Fractais: Uma experiência com a Matemática e a Arte”, espaço em que foram disponibilizadas as atividades elaboradas (ROQUE, 2023).

material elaborado e de integrar os professores participantes com a proposta da pesquisa. Entendemos que é o professor que

[...] conhece seus alunos e entende o contexto em que eles estão inseridos, o que carregam em suas bagagens escolares e não escolares. O professor, que relaciona as questões acadêmicas e práticas, consegue identificar as situações relevantes ao ensino e à aprendizagem [...], mobilizando para tanto os diferentes domínios do conhecimento específico em situações didáticas (FARIA, 2016, p. 79).

Nesse sentido, buscamos agregar o que cada professor, enquanto especialista em sua área de atuação, tinha para contribuir com a pesquisa. No primeiro encontro, estavam presentes os docentes Júnia, Diego e Paola, das disciplinas de Artes, Informática e Matemática, respectivamente. Estavam presentes, ainda, a professora Rejane, orientadora da pesquisa de mestrado, e Renata, aluna de iniciação científica que atuou dando apoio técnico nesse encontro.

Iniciamos introduzindo o tema Arte e Fractais, enfatizando as contribuições interdisciplinares da exploração estética dos Padrões Fractais. Abordamos a metodologia interdisciplinar ancorados em Japiassu (1976) que afirma que,

Falar da metodologia interdisciplinar significa, antes de tudo, falar de disciplinas operante e cooperantes. Não é uma tarefa fácil a participação numa obra comum, enquanto diferem os métodos e as modalidades de pensamento [...]. É extremamente difícil adquirir os conceitos das disciplinas diferentes da nossa. Mas a interdisciplinaridade é uma tentativa de superação desse obstáculo. (JAPIASSU, 1976, p. 117).

Nessa perspectiva, seguimos enfatizando as temáticas abordadas na pesquisa: interdisciplinaridade, Padrões Fractais e o trabalho com materiais manipuláveis e tecnologias digitais. Apresentamos, ainda, os objetivos e a metodologia do trabalho.

Os professores foram questionados sobre o que conheciam sobre “Fractal” e a professora de Matemática, Paola, disse que não tinha conhecimento sobre o tema. Nas palavras dela:

[...] eu já ouvi falar, mas eu não li nada sobre. Nunca tinha pesquisado. Eu li aquele material que você me enviou, assisti alguns vídeos e achei muito bacana. Inclusive tem uns exercícios que a gente trabalha em PG, progressão geométrica, sem saber que está se tratando de um fractal, quando a gente trabalha soma infinita. Então, para mim, foi muito legal.

É importante ressaltar, que a professora Paola utilizou exercícios sobre progressão geométrica em suas aulas de Matemática sem saber que estava usando fractais. Nascimento e

Costa (2022) discutem a falta de conhecimento, por parte dos professores, sobre os fractais, desde a formação inicial:

Percebemos, ao longo do percurso investigativo, que a utilização da Geometria Fractal [...] ainda é vista como novidade, pois muitos professores em formação desconhecem sua aplicabilidade no ensino da Matemática, principalmente na Educação Básica. (NASCIMENTO; COSTA, 2022, p. 3).

Dando continuidade, apresentamos os fractais que seriam usados nas atividades e comentamos sobre o processo de iteração desses padrões. O professor de Informática Diego destacou que, na sua disciplina, “[...] iteração é uma coisa que os alunos já têm domínio [...], então, para eles não é nada que eles não tenham ouvido falar”. Nas atividades interdisciplinares, os conteúdos oriundos de múltiplos componentes curriculares se complementam e se integram para abordar um tema comum. O propósito é criar ligações entre diferentes áreas do conhecimento em uma situação de aprendizagem ativa na qual o estudante é incentivado a criar soluções para problemas contextualizados. Seguimos compartilhando com os professores as diversas possibilidades de trabalhar com Padrões Fractais.

Após a apresentação sobre as temáticas das atividades, discutimos a agenda e o cronograma dos encontros que ocorreriam tanto entre nós, professores, quanto com os alunos. Depois de ajustarmos o cronograma, passamos a discutir as atividades.

Com todos os professores de posse dos materiais necessários, iniciamos, então, a realização da atividade “Desenvolvendo o seu Cartão Fractal” com a construção e a exploração do cartão fractal tridimensional degraus (já apresentado na figura 1) que, a cada nova iteração, com seus cortes e dobras, fazem surgir novos degraus de forma progressiva e ordenada.

Durante a construção, a professora de Artes Júnia observou: “[...] vamos fazendo e vai diminuindo [se referindo ao tamanho dos degraus], o processo repete, mas com pedaços menores”. Embora ainda não tivéssemos explicado formalmente as propriedades dos fractais, a professora conseguiu identificar características importantes observando o processo de iteração.

A auto semelhança é identificada quando uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor. [...] A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como sendo um fractal, é recursivo. Isto significa que, quando se executa um determinado procedimento, no decorrer da mesma encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado. Vale salientar que, no caso da construção iterativa de um fractal matematicamente definido, dispõe-se de um número infinito de procedimentos a serem executados, gerando-se assim uma estrutura infinitamente complexa. (ASSIS *et al.*, 2008, p. 2).

Durante o processo de montagem do Cartão Fractal Degraus, algumas dificuldades foram apresentadas pelas professoras Júnia e Paola que sugeriram mudanças nas atividades, prevendo que o mesmo poderia ocorrer com os alunos. Segundo Júnia, as orientações deveriam também ser visuais e não somente escritas nos enunciados. Deveríamos indicar, por imagens, os pontilhados que mostrassem onde deveriam haver cortes e dobraduras. Concordando, a professora Paola acrescentou:

eu me perdi aí, eu não percebi que o papel ficou dobrado. Por exemplo, a letra a. Dobre a folha ao meio horizontalmente. Depois eu não entendi que para pular para a letra b o papel tinha ficado dobrado e feito as outras três dobras, entendeu? Só depois que eu entendi isso. Então para mim não ficou claro que a folha estava dobrada. Apesar de estar bonito o desenho eu custei a perceber isso.

Percebendo questões relativas à disciplina que leciona, o professor Diego afirmou que, na questão 2, quando pedimos aos alunos que observem o fractal degraus e solicitamos que descrevam o processo de construção, os alunos devem perceber que

[...] para responder à pergunta da questão 2, na verdade, a gente tem um algoritmo que é para construir isso que é uma sequência finita de passos. Na programação a gente faz basicamente isso, define a sequência de passos e vai executando. O resultado pode ocorrer infinitamente, então acho que tem relação com isso também na minha área.

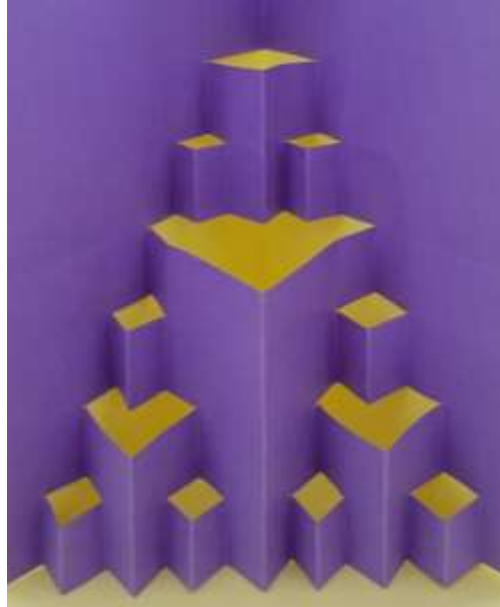
Concordamos com o que foi apontado pelos professores e fizemos as alterações nas atividades. É nesse sentido que Tavares (2005) considera relevante buscar se colocar na posição dos alunos, pois é preciso colocar em prática algo que traga motivação e desenvolva o raciocínio, a criatividade e a criticidade deles. De forma sucinta, esse foi o primeiro encontro.

Iniciamos o segundo encontro apresentando as alterações que foram sugeridas no anterior. A mestranda Tatiana disse: “Na última reunião vocês pediram para alterar alguns dados e eu vou mostrar as alterações para vocês. Decidimos colocar umas caixinhas de texto, para falar ‘dobre na horizontal’, ‘vincos verticais’, dentre outros. O que vocês acharam?”. O professor Diego respondeu que achou boa a alteração feita e os demais professores concordaram com ele. Logo após, começamos a construção do Triângulo de Sierpinski (figura 3) que

[...] é construído a partir de um triângulo equilátero qualquer, no qual determina-se os pontos médios dos lados desse triângulo e se constrói um triângulo central, com vértices nos pontos médios marcados. Em seguida, retira-se esse triângulo central, restando então os demais três triângulos, que

são semelhantes ao anterior, pois também são equiláteros (FARIA, 2012, p.36).

Figura 3: Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoras

De forma dialogada, seguimos na construção até que a professora Júnia indicou que algo não estava certo no fractal que ela havia construído, pois “[...] ao invés de cortar a parte interna que está dobrada eu cortei a outra, é por isso que não está dando [certo], [...] na verdade, eu segui a imagem. Ai, de repente, [seja] só colocar uma observação na parte do vinco da dobra.”. A dificuldade encontrada pela professora ao construir o fractal com material manipulável é comum por possuir vários detalhes. De acordo com Maciel (2021, p. 9), é preciso “[...] ter bastante atenção para realizar o procedimento da construção do triângulo de Sierpinski, pois é uma figura geométrica que vai criando forma a partir de uma figura inicial”, o que implica que, se algo der errado, o restante do processo fica comprometido.

Seguimos a sugestão da Professora Júnia em colocar uma observação no manual de construção do Triângulo de Sierpinski. Destacamos, nessa atividade, que na construção dos fractais utilizamos elementos presentes na Arte e na Matemática como simetrias, padrões geométricos, paralelismo, perpendicularidade e reflexão. A professora Júnia acrescentou: “[...] na arte nós temos as formas geométricas, as repetições e a simetria”. A afinidade da Arte com a Matemática tem relação com o apelo visual predominante na exploração geométrica que pode ser identificada e mobilizada nas obras e expressões artísticas. Ao questionarem “O que a Arte tem a ver com a Matemática e vice-versa?”, Santos e Gonçalves esclarecem que

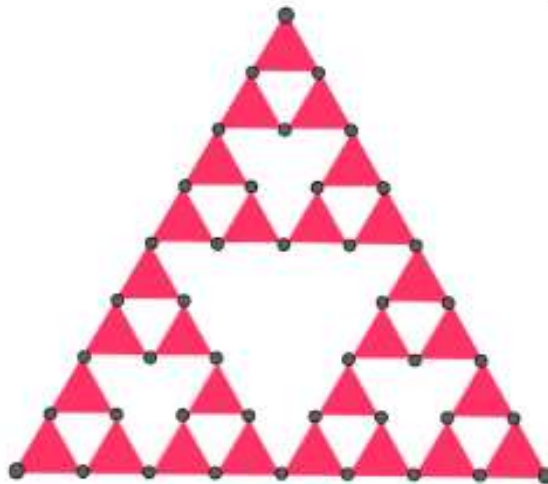
[...] a Matemática está em tudo, identificamos conexões entre as duas áreas do conhecimento em alguns momentos. Exemplificamos dois desses momentos [...] (i) artistas valem-se de conhecimentos matemáticos consciente, intencional ou não, ou inconscientemente na produção de suas obras; e (ii) educadores matemáticos servem-se da Arte para produzir novos olhares e conhecimentos em Matemática e suas práticas sociais. (SANTOS; GONÇALVES, 2020, p. 2).

Essa relação pode ser explorada de diferentes modos, com papéis, dobraduras, recortes e materiais manipuláveis, mas também com tecnologias digitais. Assim, encerramos a atividade “Desenvolvendo o seu Cartão Fractal”. Finalizando o segundo encontro, apresentamos a atividade “Reconhecimento do App GeoGebra Geometria” previamente elaborada. Nessa atividade, os professores não tiveram dificuldades, também não fizeram sugestões e sinalizaram apenas que gostaram do conteúdo apresentado.

No terceiro encontro, apresentamos os aprimoramentos realizados na atividade do encontro anterior, seguindo as alterações sugeridas pelos professores. De acordo com Tavares (2005), no trabalho interdisciplinar, é necessário estar aberto a descobertas coletivas e a compartilhar as individuais, estar atento as mudanças e disposto a realizar adaptações.

Em seguida, iniciamos a atividade “Criando Padrões Fractais no GeoGebra para *Smartphone*”, com a construção do Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski no aplicativo GeoGebra, seguida de questionamentos sobre o fractal que estava sendo investigado (Figura 4).

Figura 4: Triângulo de Sierpinski construído no GeoGebra.



Fonte: Autoras

Construído o Triângulo de Sierpinski, questionamos aos professores se, com essa atividade, os alunos compreenderiam a relação da complexidade infinita dos fractais. O

professor Diego respondeu: “eu acredito que dá para entender sim, na verdade, na programação nós acabamos fazendo isso, são pastas que se repetem várias vezes, então creio que os alunos vão conseguir entender”. Segundo Arantes *et al.* (2014, p.2),

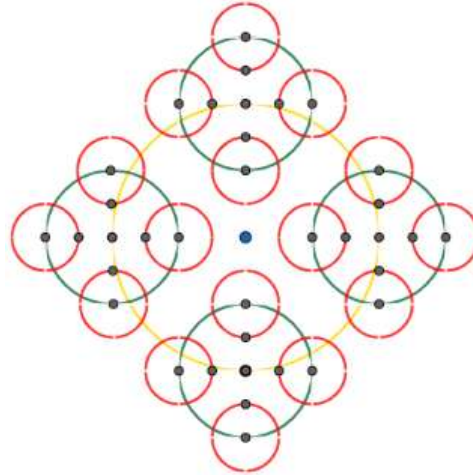
A complexidade infinita prende-se ao fato de o processo gerador de fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações. Quanto maior for o número de iterações, mais detalhes se apresentam, de forma a nunca obter uma “imagem final”. A percepção de infinito está subjacente aos objetos fractais, pois estes são obtidos no limite de um processo de construção que se repete indeterminadamente e como tal, temos necessidade de atribuir um limite ao nosso campo de visão. Para os olhos da mente, um fractal é uma maneira de entrever o infinito.

Assim como explicado pelo autor e observado pelo professor Diego, a complexidade infinita é perceptível nos fractais. Com a fala deste docente, refletimos sobre como fazer uma conexão desse trecho da atividade com o conteúdo de programação ligada à disciplina de Informática. Neste contexto, o professor Diego argumentou: “nós chamamos isso na programação de laço de repetição, [...] de repente, daria para falar sobre isso aí, [explicar] que é um laço de repetição que vai sendo feito por várias vezes”. Tecnicamente, os

laços de repetição, também conhecidos como laços de iteração ou simplesmente *loops*, são comandos que permitem iteração de código, ou seja, que comandos presentes no bloco sejam repetidos diversas vezes. Através de laços de repetição é possível criar programas que percorram *arrays*, analisando individualmente cada elemento, e até mesmo criar trechos de código que sejam repetidos até que certa condição estabelecida seja cumprida. (MARIANO, MELO-MINARDI, 2016, p. 89).

Questionado sobre como inserir essa ideia na atividade, o professor Diego sugeriu “incluir algo perguntando se eles conseguem visualizar essa lógica de programação na construção dos padrões.”. Na discussão sobre essa questão, foi sugerido ainda que houvesse um espaço para os alunos opinarem sobre a construção desse Padrão Fractal com papel e com aplicativo. Implementamos as sugestões de modo que o enunciado se configurou do seguinte modo: “[...]Questão 2, letra b) Você consegue identificar uma sequência lógica na construção do triângulo de Sierpinski? Comente sobre pontos positivos e negativos (caso haja), de construir esse Padrão Fractal com papel e com o aplicativo GeoGebra.”. Essa mesma sugestão também foi incorporada na atividade de construção do Padrão Fractal Tetra Círculo no aplicativo GeoGebra (Figura 5).

Figura 5: Padrão Fractal Tetra-Circulo.



Fonte: Autoras

No enunciado dessa questão, professores também sugeriram reforçar a ideia do zoom, pois esse fractal tem uma estrutura que contém detalhes em suas várias circunferências com tamanhos variados. Além disso, foi indicado que, para melhor visualização, deveríamos esconder os objetos que não fazem parte do fractal, deixando claro a diferença entre esconder e apagar um objeto.

Perguntamos, ainda, aos professores se julgavam necessário pedir aos alunos para colorirem as circunferências e a Professora Júnia comentou: “Eu acredito que se colorir eles não vão conseguir enxergar tão claro, de uma maneira tão clara essa junção entendeu? Não sei...”. Com a fala da professora, percebemos um equívoco nos conceitos de circunferência e círculo. Estávamos nos referindo à circunferência, ou seja, à linha que delimita o círculo, não da região interna em si que é o círculo.

Foi explicado, então, que não se tratava de colorir os círculos, mas sim as circunferências. Neste contexto, a Professora Júnia explicou: “entendi, eu pensei que fosse para colorir dentro entendeu? Porque aí ficaria confuso desse jeito que você falou vai ficar bonito.”. Ela ainda acrescentou:

eu acho interessante quando coloca as cores principalmente esse trabalho igual você fez [se referindo à imagem da construção realizada durante o encontro que estava sendo compartilhada no *Google Meet*, semelhante à figura 5], dá até impressão de estar sobressaindo, estar sobrepondo o outro. Tem a questão do movimento também, eu tenho essa impressão. Embora seja algo muito particular essa questão do sentimento em relação à Arte, esses pontos são bem parecidos, acredito que eles devem ter respostas bastantes parecidas entre os alunos com relação a isso. E a partir daí, [do que] a maioria responder [podemos ver se] o conjunto em si, pode proporcionar algum tipo de sentimento e reação.

Foi, então, acrescentado no enunciado “Para destacar os níveis formados, mude a cor das circunferências de acordo com sua preferência, de modo que as circunferências de cada nível fiquem com a mesma cor”.

Durante essa atividade, o professor Diego comentou que achou interessante a proposta de realização da atividade em sala de aula com os *smartphones*. Nas palavras do professor: “quando eu levo [os alunos] para o laboratório de informática, eles ficam muito eufóricos, tem essa dificuldade também né, na sala funciona melhor”. De acordo com Romanello (2016, p.125),

Com o professor querendo ou não, o celular já está inserido na sala de aula e é possível observar facilidades, como a mobilidade. O fato de não precisar levar os alunos ao laboratório de informática para utilizar tecnologias digitais durante as aulas faz com que o professor não perca tempo fazendo essa mudança de ambiente, além de poder utilizar o espaço da sala como preferir, sem a limitação de movimentar aparelhos grandes e ter que se preocupar com os fios dessas máquinas.

A fala do professor vai ao encontro do que a autora declara no trecho supracitado. Esse e outros assuntos, diálogos e discussões ocorridos ao longo dos encontros com os professores apontam diversas possibilidades de trabalho em um contexto interdisciplinar. Essa experiência mostrou que é possível estabelecer um trabalho concomitante entre as disciplinas de Arte, Matemática e Informática, como apresentamos nesta seção.

## **7. Considerações Finais**

Ao trabalhar na perspectiva interdisciplinar, colaboramos para que os professores tivessem uma compreensão dos conteúdos e metodologias das temáticas e das disciplinas envolvidas. Durante os momentos de reflexão sobre a própria prática, os professores tiveram a oportunidade de partilhar de suas experiências e de conhecerem ou aprofundarem a compreensão sobre os Padrões Fractais, sobre o trabalho com materiais manipuláveis e com *smartphone* no contexto escolar, recursos capazes de tornar a aprendizagem gratificante e construtiva. Além disso, discutimos com os professores a relevância de aguçar a criatividade dos alunos na construção do conhecimento de modo articulado entre as disciplinas envolvidas. Debatemos, ainda, sobre a importância de contribuir para a formação cidadã crítica e reflexiva dos nossos alunos, ajudando-os a refletir sobre o papel de cada indivíduo na sociedade e no mundo.

Ademais, ao realizar os encontros com os professores, foram feitos aprimoramentos nas atividades previamente elaboradas por meio da discussão que mobilizou o conhecimento

específico que cada docente tem da disciplina em que atua. Esses refinamentos certamente resultaram no aperfeiçoamento de cada questão. Estava nítido que os professores conheciam a realidade da instituição de ensino e dos seus alunos, o que permitiu que eles interferissem quanto à relevância, à eficiência e à factibilidade das atividades com foco nas contribuições interdisciplinares da exploração estética dos Padrões Fractais. Assim, contemplamos o objetivo desse artigo que consistiu em debater o trabalho interdisciplinar com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática na busca de garantir a perspectiva interdisciplinar e de aprimorar as atividades elaboradas.

## Referências

- ARANTES, M. G.; COSTA, V. H. H.; CARDOSO, H. A.; HARTMANN, A. M. Fractais: a complexidade e a auto-semelhança dos padrões geométricos representadas com materiais concretos e tecnologia computacional. *In: 2º Encontro Nacional Pibid Matemática, Anais*. Santa Maria, 2014. Disponível em: [http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed\\_4/MC/MC\\_2\\_Angela\\_Hartmann.pdf](http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_2_Angela_Hartmann.pdf). Acesso em: 15 jul. 2021.
- ASSIS, T. A.; MIRANDA, J. G. V.; MOTA, F. B.; ANDRADE, R. F. S.; CASTILHO, C. M. C. GEOMETRIA FRACTAL: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/NkxTkgKJJdBX6Zy95zWHZkG/#>. Acesso em: 17 jul. 2021.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.
- BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CAMACHO, M. S. F. P. **Materiais manipuláveis no processo ensino/aprendizagem da matemática: aprender explorando e construindo**. 2012. 102f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Universidade da Madeira, Funchal. 2012. Disponível em: <https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/373/1/MestradoMarianaCamacho.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2021.
- COIMBRA, J. A. A. Considerações sobre a Interdisciplinaridade. *In: PHILIPPI JUNIOR, Arlindo (org.). Interdisciplinaridade em Ciências Ambientais*. São Paulo: Signus, 2000.
- COSTA, C. S. V., RESENDE, E.; PINTO, M. F. R.; OLIVEIRA, M. M. **Interdisciplinaridade na sala de aula em relatos de professores**. Rio de Janeiro: Editora Imperial, 2020.
- DIAS, A. R. S. Os saberes da experiência e a formação inicial de professoras de língua materna: um repensar da prática pedagógica. *In: Revista Metáfora Educacional*, n. 10, 2011. Disponível em: [http://www.valdeci.bio.br/pdf/Dias\\_OS\\_SABERES\\_DA.pdf](http://www.valdeci.bio.br/pdf/Dias_OS_SABERES_DA.pdf). Acesso em: 03 ago. 2021.

ESTEPHAN, V. M. **Perspectivas e limites do uso de material didático manipulável na visão de professores de matemática do ensino médio**. 2000. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Raciocínio proporcional na matemática escolar. **Revista Educação em Questão**, 58(57). 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/20024>. Acesso em: 22 ago. 2021.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Padrões fractais: conectando matemática e arte. **Eccos Revista Científica**, v. 1, p. 33-53, 2012. Disponível em: <https://periodicos.uninove.br/eccos/article/viewFile/3484/2268>. Acesso em: 03 set. 2021.

FAZENDA, I. C. A. Interdisciplinares: definição, projeto, pesquisa. *In*: FAZENDA, I. C. A. (org.). **Práticas interdisciplinares na escola**. São Paulo: Cortez, 1993.

FERREIRA, S. L. Introduzindo a noção de interdisciplinaridade. *In*: FAZENDA, I. C. A. (org.). **Práticas interdisciplinares na escola**. São Paulo: Cortez, 1993.

FREIRE, P. **Pedagogia da indignação: cartas pedagógicas e outros escritos**. São Paulo: UNESP, 2000.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

JAPIASSÚ, H. **Interdisciplinaridade e patologia do saber**. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

MACIEL, R. S. **Investigação matemática explorando o Triângulo de Sierpinski por meio do uoftware GeoGebra em uma turma do 9º ano do ensino fundamental**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual do Amazonas, Tefé, 2021. Disponível em: <http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/bitstream/riuea/4011/1/Investiga%C3%A7%C3%A3o%20Matem%C3%A1tica%20Explorando%20o%20Tri%C3%A2ngulo%20de%20Sierpinski%20por%20meio%20do%20software%20GoGebra%20em%20uma%20Turma%20do%209%C2%BA%20ano%20do%20Ensino%20Fundamental.pdf>. Acesso em: 15 set. 2021.

MARIANO, D. C. B.; MELO-MINARDI, R. C. **Introdução à programação para bioinformática com Perl**. 1. ed. North Charleston, SC (EUA): Create Space Independent Publishing Platform, v. 2, 2016.

MIRANDA, T. G.; GALVÃO-FILHO, T. A. **O professor e a educação inclusiva**. Salvador: EDUFBA, 2012.

MOURA, A. Aplicativos para Aprendizagem Baseada em Projetos. *In*: COUTO, E.; PORTO, C.; SANTOS, E. (orgs.). **App-Learning: experiências de pesquisa e formação**. Salvador: EDUFBA, 2016.

NASCIMENTO, R. C.; COSTA, L. F. M. A geometria fractal e a formação do professor de matemática: constructos possíveis. *In*: **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 11, 2020. DOI:

<http://dx.doi.org/10.36397/emteia.v1i1.241658>. Disponível em:  
[https://www.researchgate.net/publication/343052205\\_A\\_geometria\\_fractal\\_e\\_a\\_formacao\\_do\\_professor\\_de\\_Matematica\\_constructos\\_possiveis](https://www.researchgate.net/publication/343052205_A_geometria_fractal_e_a_formacao_do_professor_de_Matematica_constructos_possiveis). Acesso em: 21 set. 2021.

PERAZZO, L. F; VALENÇA, M. T. **Elementos da Forma**. Rio de Janeiro: ed. Senac Nacional, 1997.

QUIRINO, V. L. Materiais manipuláveis - Fundamentos de Utilização. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em GEOGRAFIA) - Universidade Estadual da Paraíba. 2011. Disponível em: <https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/2278>. Acesso em: 04 out. 2021.

REYS, R. E. Considerations for teaching using manipulative materials. *In: The Arithmetic Teacher*, 1971.

ROMANELLO, L, A. **Potencialidades do uso do celular na sala de aula**: atividades investigativas para o ensino de função. 2016.135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016. Disponível em: [https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmediaseeducacaomatematica/romanello\\_ta\\_me-rcla.pdf](https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmediaseeducacaomatematica/romanello_ta_me-rcla.pdf). Acesso em: 17 out. 2021.

ROQUE, R. D. **Padrões fractais, tecnologias digitais e interdisciplinaridade**. Relatório (Iniciação Científica em Educação Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2023.

SANTOS, E. F.; GONÇALVES, H. J. L. **A interface entre arte e matemática**: em busca de perspectivas curriculares críticas e criativas. *BOLEMA*, v. 34, p. 1144-1173, 2020. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a15>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/hTWxf5Jf7cHCJ57cHkDc56j/>. Acesso em: 14 nov. 2021.

SANTOS, M. P. **Brinquedoteca**: a criança, o adulto e o lúdico. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

SANTOS, R. S.; KRIPKA, R. M. L. **Estudo de padrões fractais no ensino fundamental**: uma introdução ao estudo da geometria. Série Educar- Volume 15, Matemática. 1. ed. Belo Horizonte: Editora Poisson, v. 15, p. 140-147, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.36229/978-65-86127-00-3.CAP.19>. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/339731852\\_Estudo\\_de\\_padroes\\_fractais\\_no\\_ensino\\_fundamental\\_Uma\\_introducao\\_ao\\_estudo\\_da\\_geometria](https://www.researchgate.net/publication/339731852_Estudo_de_padroes_fractais_no_ensino_fundamental_Uma_introducao_ao_estudo_da_geometria). Acesso em: 19 nov. 2021.

TAVARES, D. E. Ciência: conceitos e saberes. *In: Revista Interdisciplinaridade*. 2005. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/interdisciplinaridade/article/view/25477>. Acessado em: 27 nov. 2021.

THIESEN, J. S. A interdisciplinaridade com um movimento articulador no processo de ensino-aprendizagem. *In: Revista Brasileira de Educação*. v. 13, n.39, set/dez 2008. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1413-24782008000300010>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/swDcnzst9SVpJvpx6tGYmFr/>. Acesso em: 02 dez. 2021.

## ARTIGO II

### CONSTRUÇÃO DE PADRÕES FRACTAIS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS: APRENDIZAGEM EM UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

#### Resumo

Este artigo objetiva discutir as contribuições da exploração interdisciplinar dos padrões fractais com materiais manipuláveis para alunos do Ensino Médio do curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus* Muriaé, que compôs o cenário de pesquisa de mestrado ao qual este artigo é parte integradora. A proposta metodológica é de cunho qualitativo. Os dados produzidos ao longo dos encontros foram analisados a partir dos registros feitos pelos alunos nas folhas de atividades e triangulado com o referencial teórico a partir das nossas percepções enquanto professoras e pesquisadoras. Nossas conclusões apontam que a exploração interdisciplinar dos Padrões Fractais, envolvendo as disciplinas de Informática, Artes e Matemática, contribuiu para que os alunos pudessem ter uma compreensão globalizada de padrões, infinitude e tridimensionalidade, aguçando a capacidade de análise estética e contribuindo para a construção de conhecimentos pertinentes às disciplinas envolvidas. No caso dos padrões fractais, foi possível identificar que as propriedades de autossimilaridade e de complexidade infinita proporcionaram a contemplação da estética nas harmonias, proporções e simetrias presentes nas regularidades desses padrões. Ademais, a abordagem dos padrões fractais contribuiu para a formação cidadã crítico-reflexiva dos alunos, colaborando para que eles refletissem sobre o papel de cada indivíduo na sociedade e no mundo.

**Palavras-chave:** Interdisciplinaridade. Ensino Médio. Materiais Manipuláveis. Educação Pública.

#### 1. Introdução

Especificamente no contexto do Ensino Médio, a educação carrega problemas que se estendem por anos no que tange à aprendizagem de diversas disciplinas. Por persistir no método tradicional que valoriza a repetição de técnicas e na memorização em detrimento do raciocínio, consideramos a necessidade de rever conceitos e inovar usando recursos que ofereçam possibilidades de aprendizagem de forma integradora e dinâmica (FARIA; MALTEMPI, 2020). Nessa perspectiva, a interdisciplinaridade, a investigação com materiais manipuláveis e as tecnologias digitais atuam para que ocorra uma comunicação fluída entre professores e alunos, contribuindo para que haja aprendizagem dos conteúdos escolares envolvidos em uma proposta.

Nesse sentido, o objetivo deste artigo consiste em discutir as contribuições da

exploração interdisciplinar dos padrões fractais com materiais manipuláveis para alunos do Ensino Médio do curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus* Muriaé. Nesse contexto, promovemos a interdisciplinaridade entre as disciplinas de Informática, Arte e Matemática por meio de atividades investigativas de exploração estética dos Padrões Fractais. Para isso, as formas dos Padrões Fractais foram apreciadas em suas várias linguagens, desenvolvendo tanto a fruição quanto a análise estética. Além disso, a criatividade dos alunos na construção do conhecimento foi explorada de modo articulado entre as disciplinas envolvidas, utilizando materiais manipuláveis. Entendemos que, deste modo, contribuímos para a formação cidadã crítico-reflexiva dos alunos, refletindo sobre o papel de cada indivíduo na sociedade e no mundo.

Buscando atingir o objetivo proposto nesse artigo, discutimos, inicialmente, a abordagem interdisciplinar com enfoque na aprendizagem. Na sequência, apresentamos a relevância do uso de materiais manipuláveis no ambiente escolar. Na seção seguinte, os Padrões Fractais, tema explorado na pesquisa, são abordados. Dando continuidade, é exposta a metodologia. Na análise, triangulamos os dados com o referencial teórico a partir da descrição das respostas dos alunos e das nossas percepções enquanto professoras e pesquisadoras. Finalizamos o artigo com considerações e conclusões.

## **2. A Aprendizagem na Abordagem Interdisciplinar**

Defendemos a importância de buscar o conhecimento em sua totalidade a fim de que os alunos percebam que a escola, mesmo com disciplinas e conhecimentos fragmentados, pode apresentar os conteúdos de uma forma unificada, de modo a tornar o aprendizado mais efetivo. Entendemos que, no contexto escolar, é importante articular ações capazes de “destruir barreiras acadêmicas, incorporar novas visadas e abrir espaço para as complexidades” (PASSOS, 2018, p. 38).

Nesse sentido, Rizolli (2007) destaca que a interdisciplinaridade no mundo contemporâneo tem sua importância e seus desafios. Para que uma disciplina se desenvolva no espaço escolar, é preciso relacionar saberes de modo a promover o encontro entre teoria e prática, trabalhando com os mais diversos significados da expressão humana e estreitando relações do cotidiano. Portanto, a escola deve assumir o papel de despertar o olhar crítico dos alunos, estimulando-os a conhecer, estudar e compreender não somente os conteúdos escolares específicos de uma disciplina, mas as articulações possíveis com as demais.

Nesse sentido, a interdisciplinaridade pode ser entendida como

[...] um método de pesquisa e de ensino suscetível de fazer com que duas ou mais disciplinas interajam entre si, esta interação podendo ir da simples comunicação das ideias até a integração mútua dos conceitos, da epistemologia, da terminologia, da metodologia, dos procedimentos, dos dados e da organização da pesquisa. (JAPIASSU, 1976, p.136).

Dentre tantos possíveis espaços, a escola se apresenta como um *lócus* rico para estimular o processo criativo dos alunos, oferecendo oportunidades para desenvolver novas habilidades, individuais ou coletivas. Portanto, trabalhar de modo interdisciplinar deve desenvolver a sensibilidade e a percepção visual.

Como espaço que reflete as manifestações sociais, a escola deve trabalhar a visão de produção integrada, considerando que, enquanto criação humana, as disciplinas escolares influenciam a formação dos nossos alunos. Para que a interdisciplinaridade ocorra no contexto escolar, é preciso repensar a prática pedagógica, trazendo para sala de aula um estudo contextualizado e participativo para que os alunos estejam motivados a aprender as temáticas pertinentes às disciplinas envolvidas (CALDAS; HOLZER; POPI, 2017).

A Base Nacional Comum Curricular também defende essa ideia, ao afirmar que é preciso

[...] contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas e decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem. (BRASIL, 2018, p.18).

A interdisciplinaridade em sala de aula é considerada uma aliada para o ensino, agregando valores indispensáveis ao avanço da educação, especialmente no que diz respeito aos conhecimentos que fundamentam o pensamento crítico. Ela figura como um dos principais mecanismos para que o aluno consiga fazer uma relação entre as matérias e perceba como os conhecimentos são interdependentes (THIESEN, 2008).

Assim, a interdisciplinaridade apresenta uma proposta em que os conteúdos se complementam e são interconectados articulando diversas matérias escolares de forma conjunta e delineando as atividades por meio de trabalhos integrados. Com essa estrutura, a interdisciplinaridade possibilita uma reflexão entre vários aspectos, trazendo para o aluno a construção de uma percepção da realidade.

Ademais, destacamos que tornar as aulas interdisciplinares contribui para transformar os problemas com determinadas disciplinas, pois a abordagem ocorre de modo mais flexível, se comparado ao ensino tradicional. Essa é uma forma do aluno entender a necessidade de articular conhecimentos, mesmo que considerem distantes entre si, sendo necessário encontrar soluções que podem ser vistas de outros ângulos (TOMASSINI; RIBEIRO; PEREIRA, 2021).

As atividades interdisciplinares propõem uma infinidade de ações e conhecimentos que agregam aprendizado aos alunos. Estudos mostram que, ao trabalhar em uma abordagem interdisciplinar, eles se sentem mais motivados e desafiados a aprender de modo articulado no que tange às diversas disciplinas escolares (TOMASSINI; RIBEIRO; PEREIRA, 2021; THIESEN, 2008; RIZOLLI, 2007; FRIGOTTO, 1995; CALDAS; HOLZER; POPI, 2017). Nesse sentido, os discentes são incentivados a valorizarem ideias oriundas de diversas ciências que resultam em uma aprendizagem abrangente e criativa e que fazem a diferença no cotidiano das pessoas.

Entendemos ser importante contribuir para uma formação crítico e reflexivo dos nossos alunos. Para isso, é necessário oportunizar e oferecer subsídios para o desenvolvimento de atividades que promovam a criatividade e o pensamento crítico, sendo imprescindível desenvolver o conhecimento por meio da expressão de ideias, da compreensão de significados e da construção do conhecimento dos temas envolvidos.

### **3. Materiais Manipuláveis**

De acordo com Reys (*apud* MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 193), os materiais manipuláveis são “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma ideia”. Lorenzato (2006) explica que existem os materiais didáticos que permitem ao aluno realizar descobertas e desenvolver a percepção de propriedades de modo a construir uma efetiva aprendizagem.

Embora vários autores destaquem a relevância dos materiais manipuláveis, é preciso estar atento para o uso eficaz desses materiais. Nacarato (2004) destaca o fato de que o “uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los” (NACARATO, 2004, p.4). Entendemos que, em um estudo interdisciplinar envolvendo artes, matemática e informática, o uso de material manipulável precisa ser intencional e pautado em uma atividade com planejamento bem definido.

Na pesquisa realizada, trabalhamos com padrões fractais representados em materiais

manipuláveis que possuam características de um origami arquitetônico. Os origamis arquitetônicos são formas de trabalho manual com o papel resultantes da combinação da dobradura do origami e a engenharia dos livros infantis conhecidas como "*pop-ups*" (PIROLA, 2004). Para a elaboração desse material é necessário a etapa de planificação e detalhamento, uma vez que são essenciais para definição da interatividade e complexidade de cada dobra. Além disso, é preciso mobilizar o conhecimento geométrico ao longo do processo de construção com a finalidade de viabilizar a projeção da imagem, como as distâncias entre os planos, as marcas de corte e dobras e as distâncias entre elas (PIROLA, 2004).

As criações resultantes do origami arquitetônico podem ser dobradas numa forma plana e, quando abertas, resultar em uma estrutura tridimensional. Assim, o origami arquitetônico possibilita o desenvolvimento motor, educacional e social dos alunos (LIMA, 2019).

Especificamente nas atividades que desenvolvemos, foram realizadas construções com cartões com abertura de 90°. Nesse tipo de cartão, a capa e o espaço interior representam planos perpendiculares entre si reciprocamente. Para a confecção, foi necessário a mobilização de conhecimentos oriundos tanto da geometria plana quanto da espacial, além de técnicas de cortes e dobras para exprimir o propósito da figura como profundidade, tamanho e volume (PIROLA, 2004).

Nos padrões fractais identificamos também a simetria, “um conceito muito importante na Filosofia da Arte e na Estética, é um fator determinante de emoções [...]. Ela individualiza um objeto belo e lhe fornece caráter e expressão” (BARBOSA, 2005, p. 13). Um objeto simétrico estabelece uma relação de paridade na união e conformidade das partes de uma obra. Assim,

Uma composição simétrica é aquela em que cada elemento tem seu correspondente, ou seja, cada elemento ou conjunto se associa a outro idêntico. Essa correspondência pode ser no tamanho, na forma ou na posição de partes situadas em lados opostos, de uma linha ou plano ou, ainda, de forma que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo (PERAZZO; VALENÇA, 1997, p. 86).

Conhecimentos artísticos como os elementos visuais ponto, linha e forma também precisam ser utilizados uma vez que, juntos, compõem o esqueleto estrutural da obra na construção de um padrão fractal em formato de cartão do tipo origami arquitetônico. Além disso, é preciso delimitar largura, altura e a profundidade e mobilizar conceitos de Arte sobre plano, textura, cor, escala, contraste e equilíbrio, ainda que de forma intuitiva, com o objetivo de dar ênfase ao aspecto estético dos padrões fractais.

A definição desses elementos, apresenta a expressão artística que carregam. “Uma linha é a trilha deixada pelo ponto em movimento. Ela é criada pelo movimento - mais especificamente, pela destruição do repouso, intenso e ensimesmado do ponto” (KANDINSKY, 1997 *apud* LUPTON; PHILLIPS, 2008, p.13). Lupton e Phillips (2008, p. 70) expressaram que “a cor pode exprimir uma atmosfera, descrever uma realidade ou codificar uma informação”, pois ela é capaz de expressar nossos sentimentos e nos emocionar, além de enriquecer a criação, tornando-as únicas. A textura e espessura do papel utilizado também devem ser considerados, pois podem impressionar a visualização, dando ênfase a qualidade tátil das superfícies das peças, já que “as texturas incluem a superfície efetivamente empregada na feitura de uma peça impressa ou de um objeto palpável e a aparência ótica dessa superfície” (LUPTON; PHILLIPS, 2008, p. 52).

É nesse sentido que, na pesquisa realizada, utilizamos materiais manipuláveis, pois concordamos que

Os conceitos e as relações matemáticas são entes abstratos, mas podem encontrar ilustrações, representações e modelos em diversos tipos de suportes físicos. Convenientemente orientada, a manipulação de material pelos alunos pode facilitar a construção de certos conceitos. Pode também servir para representar conceitos que eles já conhecem por outras experiências e atividades, permitindo assim a sua melhor estruturação. (PONTE; SERRAZINA, 2000, p. 116).

Os padrões fractais explorados podem ser usados para abordar diversos conceitos interdisciplinares que perpassam relações matemáticas, artísticas e tecnológicas. Nesse contexto, os materiais manipuláveis são considerados recursos privilegiados para dar suporte às tarefas escolares investigativas. Deste modo, consideramos que os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar não somente com papel, lápis, tesoura e régua, explorando técnicas de dobradura, mas puderam vivenciar uma experiência interdisciplinar capaz de contribuir para a formação cidadã crítico-reflexiva, refletindo sobre o papel de cada indivíduo na sociedade e no mundo.

Estephan (2000) ressalta que, nos processos de ensino e de aprendizagem, é importante utilizar materiais manipuláveis com a finalidade de reproduzir e explorar os conceitos, os desenhos e as figuras, contribuindo, desta maneira, para uma formação reflexiva. Corroborando esta ideia, Camacho (2012) complementa que a aplicabilidade de materiais manipuláveis favorece a expansão do espírito de iniciativa, autonomia, criatividade, criticidade e sensibilidade no desenvolvimento e na criação de conceitos por parte dos alunos.

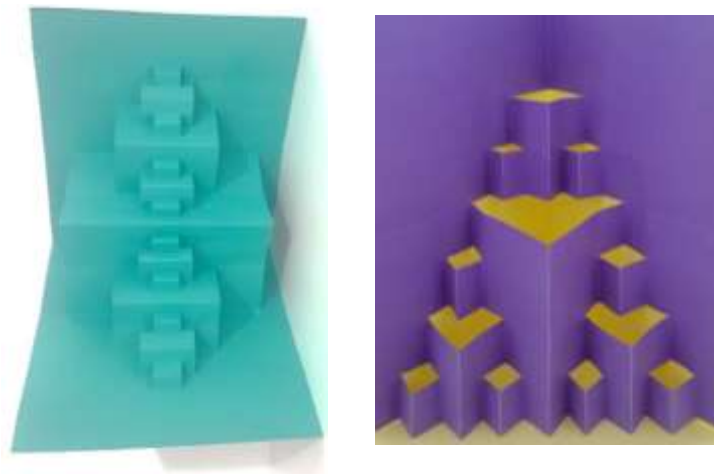
Lucena (2017) destaca que os materiais manipuláveis e o trabalho com dobraduras,

recortes e colagens possibilitam ao aluno a tarefa de pesquisar e participar e, conseqüentemente, facilitam a aprendizagem no contexto escolar. Na atividade que propusemos, tivemos o intuito de transformar uma folha de papel em um cartão fractal que dispusesse de formas geométricas planas e espaciais. Entretanto, fomos além, pois acreditamos que transformar o papel em arte, de forma intencional, contribui para o desenvolvimento da aprendizagem em uma perspectiva interdisciplinar lúdica e atraente.

#### 4. Padrões Fractais

Nessa pesquisa, os padrões fractais são motivadores para a compreensão de aspectos artísticos interdisciplinares. Concordamos que “os padrões fractais estão relacionados ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente.” (FARIA, MALTEMPI, 2012, p. 42). No trabalho com materiais manipuláveis, foram explorados os fractais Degraus Centrais e Triângulo de Sierpinski (figura 1).

Figura 1: Cartão Fractal Degraus (direita) e Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski (esquerda).



Fonte: Autoras

Esses fractais possuem um padrão de repetição oriundo de suas características, dentre as quais destacamos a complexidade infinita e a autossimilaridade (BARBOSA, 2005). A complexidade infinita pode ser entendida como a capacidade de repetição do mesmo padrão por infinitas vezes em um fractal. Essa característica “está associada às infinitas iterações que ocorrem na construção de um fractal, pois ele é regido por um padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes e que ocorre algébrica e geometricamente” (FARIA 2012, p.40).

Já a autossimilaridade é uma propriedade que revela a semelhança existente em cada nível do fractal de modo a apresentar a mesma estrutura da figura inicial em qualquer escala em que seja observado. Ao iterar, um novo nível surge e passam a existir novas reentrâncias e saliências cada vez menores, mas que mantêm intactas as características presentes desde o nível inicial. Assim, nos Padrões Fractais, cada parte é semelhante à figura em sua totalidade, significando que os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte.

## 5. Metodologia

A metodologia de pesquisa qualitativa visa compreender e interpretar fenômenos sociais e humanos por meio da coleta e análise de dados, explorando a complexidade, as experiências, as perspectivas e os significados atribuídos pelos participantes do estudo. Os trabalhos dessa natureza objetivam ressaltar as características de um acontecimento, o que implica que os dados não sejam padronizáveis, mas minuciosamente detalhados com o interesse em compreender os sujeitos da pesquisa (GOLDENBERG, 2004).

Este artigo traz um recorte de uma pesquisa de mestrado<sup>3</sup> desenvolvida na abordagem qualitativa e realizada no contexto escolar do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *campus* Muriaé. A escolha por essa instituição ocorreu pois nela atuou (primeira autora deste artigo) como professora de Artes desde o ano de 2011.

No contexto da pesquisa de mestrado, os dados foram produzidos em duas etapas: a primeira com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática da turma e a segunda com alunos do primeiro ano do Ensino Médio integrado ao curso Técnico de Informática. Os dados produzidos na segunda etapa nos permitiram discutir o potencial da exploração interdisciplinar dos padrões fractais com tecnologias digitais e com materiais manipuláveis. Especificamente neste artigo, centramos a análise e a discussão dos dados no que tange os padrões fractais com materiais manipuláveis com alunos do Ensino Médio.

Com os trinta e seis alunos dessa turma, realizamos quatro encontros de duas horas cada. Na ocasião, foram realizadas as atividades utilizando materiais manipuláveis, além do aplicativo GeoGebra que foi escolhido por possuir propriedades que permitem a realização de diferentes padrões fractais, além de ser de simples manipulação.

---

<sup>3</sup> Pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa (CAAE 58898822.0.0000.5153). O termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) foi entregue, lido e assinado por todos os professores participantes da pesquisa. De igual modo ocorreu com os termos de assentimento livre e esclarecido (TALE) destinado aos alunos com idade inferior a 18 anos e aos seus responsáveis. Deste modo, foi autorizada a divulgação científica dos dados produzidos.

Levamos para os encontros atividades planejadas para reconhecer e investigar as propriedades dos padrões fractais com materiais manipuláveis e com o aplicativo GeoGebra para *smartphones*. As atividades intituladas “Reconhecimento do App<sup>4</sup> GeoGebra Geometria”, “Desenvolvendo o seu Cartão Fractal” e “Criando padrões fractais no GeoGebra para *Smartphone*” foram elaboradas pelas autoras desse artigo com a colaboração da aluna de iniciação científica voluntária, Renata Dourado Roque, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, também sob orientação da Professora Rejane Faria. Além disso, as atividades foram previamente realizadas com os professores atuantes nas disciplinas envolvidas e passaram por um processo de refinamento de acordo com as sugestões que ocorreram nos encontros com os docentes.

Os instrumentos utilizados para a realização da pesquisa foram as filmagens dos encontros e os registros no caderno de campo. Ao trazer os registros dos alunos participantes, optamos por usar nomes fictícios a fim de resguardar suas identidades.

Devido ao volume de dados produzidos na pesquisa, nesse artigo, analisamos a etapa da produção de dados em que trabalhamos com materiais manipuláveis. A fase na qual trabalhamos com as tecnologias digitais é abordada em outro artigo, também disponível na dissertação de mestrado. Além disso, trinta e seis alunos colaboraram com este estudo, mas optamos por analisar três respostas por item, podendo analisar respostas de um mesmo aluno em questões diferentes. Na seção seguinte, passamos a analisar os dados produzidos e triangulados com autores referência nas áreas de estudo.

## 6. Análise de Dados

Iniciamos nosso encontro apresentando para a turma o tema “Fractais” por meio de formas geométricas e obras artísticas. Após uma breve introdução, iniciamos a construção do cartão Fractal Degraus. Ele apresenta níveis, paralelepípedos, que transmitem a ideia de degraus de uma escada, mas em escala cada vez menor ao longo das iterações. Nesse padrão fractal, as linhas são traçadas em distintas direções (paralelas ou perpendiculares). Para a construção dos níveis são utilizados conhecimentos de matemática e artes que podem ser associados à ideia sequencial de um algoritmo, conteúdo pertinente também na disciplina de informática.

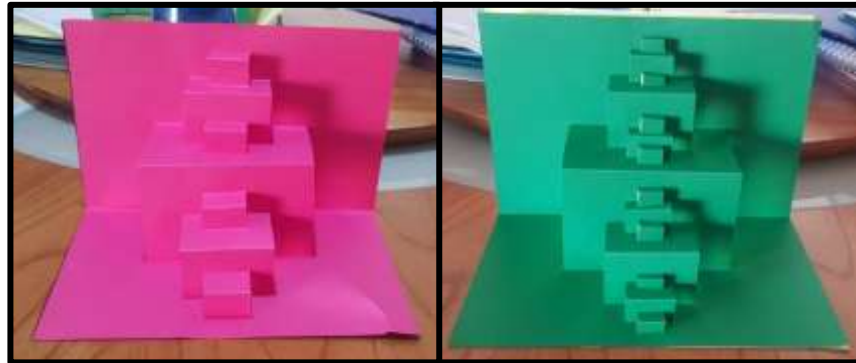
No decorrer da primeira questão, foi realizado o cartão fractal degraus (figura 2) utilizando

---

<sup>4</sup> Como resultado da pesquisa de Iniciação Científica, foi criado o GeoGebraBook<sup>4</sup> “Fractais: Uma experiência com a Matemática e a Arte”, espaço em que foram disponibilizadas as atividades elaboradas (ROQUE, 2023).

materiais como: tesoura, lápis, régua, fita adesiva dupla-face ou cola e papel de gramatura 185 g/m<sup>2</sup>.

Figura 2: Cartões Fractal Degraus construído com materiais manipuláveis pelos alunos.

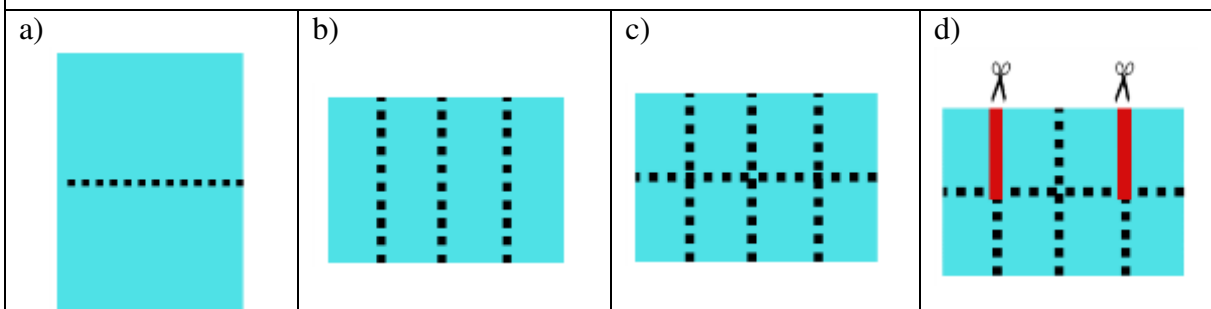


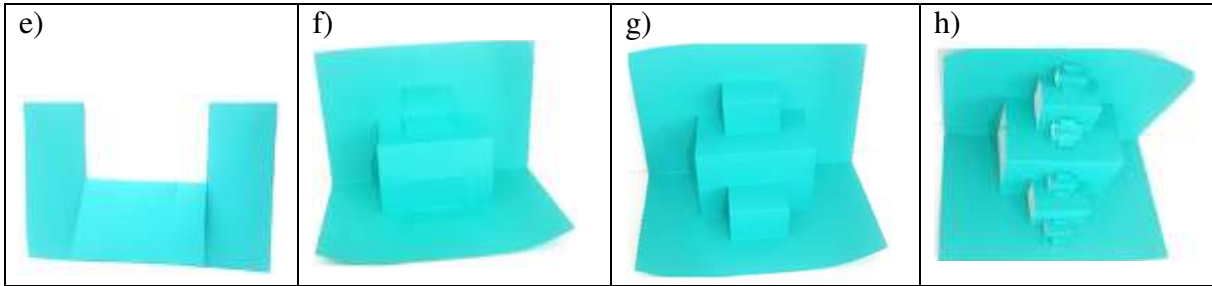
Fonte: Autoras

Conforme o enunciado descrito no quadro 1, para fazer este fractal, fizemos marcações, dobras, vincos e cortes para construção do primeiro degrau que também é o primeiro nível do fractal. O processo se repetiu para a construção dos demais níveis, enquanto fosse possível realizar o processo.

Quadro 1: Primeira questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

1. Vamos construir o cartão fractal tipo degraus. Para confeccioná-lo, vamos precisar de tesoura, lápis, régua, fita adesiva dupla-face ou cola, papel cartão ou outro de gramatura 185 g/m<sup>2</sup>. Siga os passos:
  - a) Dobre a folha ao meio horizontalmente fazendo um vinco, no lado mais comprido, como indicado na figura abaixo.
  - b) Para fazer o primeiro degrau, divida, com vincos suaves, a folha em 4 partes iguais verticalmente, como mostra a figura.
  - c) Logo após, faça mais um vinco na metade da parte em que estamos trabalhando, agora na horizontal.
  - d) Corte o papel no primeiro e no terceiro vinco da vertical até o vinco que fizemos na horizontal no item anterior, indicado na figura a seguir por traços vermelhos.
  - e) Dobre o retângulo formado para baixo, reforçando o vinco da dobra.
  - f) Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro, formando a figura em relevo, que é o primeiro degrau do cartão fractal (nível 1).
  - g) Construa, em uma escala menor, o nível dois seguindo os passos do b ao f. Para isso, o segmento de partida deve ser o vinco superior e inferior do retângulo gerado no nível anterior.
  - h) Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel.





Fonte: Autoras

No desenvolvimento desse fractal os alunos tiveram dúvidas na execução até que entendessem o padrão. Percebemos, ainda, que eles não estavam habituados a trabalhar com os materiais manipuláveis que utilizamos. Vários estudantes ficaram com dúvida em relação às medidas, em como dividir a folha, onde cortar e como dobrar o papel. Para a construção de um cartão fractal como o Degraus, é necessário planificar para definir a flexibilidade e os detalhes que exigem eficiência em cada dobra (figura 3). Para isso, é preciso entender o padrão que rege o fractal e mobilizar o conhecimento geométrico ao longo do processo de construção com a finalidade de viabilizar a projeção da imagem como as distâncias entre os planos, as marcas de corte e dobras e as distâncias entre elas (PIROLA, 2004).

Figura 3: Alunos construindo padrões fractais com materiais manipuláveis.



Fonte: Autoras

Na segunda questão foi solicitado que observassem o cartão fractal degraus e descrevessem seu processo de construção (quadro 2).

Quadro 2: Segunda questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

Questão 2: Observe o fractal degraus. Como você descreveria o processo de construção?

Fonte: Autoras

Como apresentado na figura 4, a seguir, um aluno considerou interessante, pois conforme o processo de construção é repetido, é alterada a escala dos degraus. Outro afirmou

que gostou da construção dos fractais e registrou aspectos importantes da arte, da matemática e da informática dentre as quais destacamos a identificação da característica tridimensional, a proporção e a autossimilaridade bem como a associação da ideia da sequência e do processo de construção como um algoritmo. Outro aluno respondeu que teve um pouco de dificuldade no início, mas quanto mais iterações fazia, mais fácil ficava a compreensão do padrão. Ele destacou ainda que, com o passar dos níveis, fica mais difícil manter a precisão das medidas.

Figura 4: Respostas da segunda questão - Atividade Fractal Degraus.

<p><i>É interessante ver como o processo se repete, apenas mudando a escala com que é feito, consequentemente aumentando a dificuldade conforme a escala diminui.</i></p>
<p><i>Gostei muito de construir o fractal, achei uma coisa interessante.</i>  <i>Arte: elementos visuais, ponto, tridimensional</i>  <i>Matemática: ângulo, geometria, proporção, alta similaridade</i>  <i>Informática: padrão, lógica e algoritmos.</i></p>
<p><i>Difícil de compreender no início, mas quanto mais passos você faz, mais fácil é enxergar e repetir o padrão. Até que você atinge um limite de detalhes onde 1 milímetro já pode deixar a estrutura torta, além de em tal escala as camadas de papel ficam grossas demais para recortar. (Proporção, geometria, medidas, pontos, segmentos de reta, perspectiva, recursão)</i></p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b>  I. É interessante ver como o processo se repete, apenas mudando a escala com que é feito, consequentemente, aumenta a dificuldade conforme a escala diminui.  II. Gostei muito de construir o fractal, achei uma coisa interessante. Arte: elementos visuais, ponto, tridimensional. Matemática: ângulo, geometria, proporção, autossimilaridade. Informática: padrão, lógica e algoritmo.  III. Difícil de compreender no início, mas quanto mais passos você faz, mais fácil é enxergar e repetir o padrão. Até que você atinge um limite de detalhes onde um milímetro já pode deixar a estrutura torta, além de em tal escala as camadas de papel ficarem grossas demais para recortar. (Proporção, geometria, medidas, pontos, segmentos de reta, perspectiva, recursão).</p>

Fonte: Autoras

As respostas dos alunos revelam a identificação de que, assim como no estudo dos algoritmos da informática, o fractal degraus é regido por padrões. Identificaram, ainda, na construção os aspectos ligados à harmonia, estética e beleza pertinentes à disciplina de Artes. Também relataram sobre padrões, escalas e sequências, como ocorre na disciplina de matemática. Assim, ao construir o Cartão Fractal Degraus, compreendemos que a cada novo corte e dobradura, novas formas geométricas surgiam em escala menor.

Na terceira questão (quadro 3), foi pedido aos alunos para observarem a construção do fractal Degraus e verificarem elementos que estão presentes na arte e na matemática, como simetrias, padrões geométricos, paralelismo, perpendicularidade e reflexão, além de

identificarem as características presentes no processo de criação desse padrão fractal.

Quadro 3: Terceira questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

Questão 3: Na construção dos fractais utilizamos elementos presentes na arte e na matemática. Quais desses elementos você consegue identificar no processo de criação desse padrão fractal? Além desses elementos, você consegue relacionar com outros? Quais?

Fonte: Autoras

Como pode ser visto na figura 5, após destacar as ferramentas utilizadas na construção do cartão, um aluno ressaltou que o cartão fractal é construído a partir de um padrão repetitivo e constante e o relacionou com um jogo em que a cada fase fica mais difícil de prosseguir, além da ideia de infinitude. Outro aluno descreveu que consegue perceber perspectiva, segmento de reta, luz e sombra, cores, formas, tridimensionalidade, padrão, lógica, recursão, semelhança de figuras e congruências entre os segmentos de reta. Um terceiro aluno também destacou que o padrão fractal formado é tridimensional e que consegue relacionar com o mundo, pois assim como no cotidiano, percebe a presença de elementos geométricos.

Figura 5: Respostas da terceira questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

<p>Repetitivo, mais constante, como um jogo infinito que fica cada vez mais difícil de passar.</p>
<p>Perspectiva, segmento de reta, luz e sombra, cores, formas, tridimensionalidade, padrão, lógica, recursão, semelhança de figuras; os segmentos de reta possuem o mesmo tamanho. <span style="float: right;">3</span></p>
<p>as formas geométricas como elemento da matemática e uma ilusão 3D de elemento artístico. Sim, consigo relacionar com o mundo, pois, usando a técnica conseguimos fabricar vários elementos do nosso dia a dia. <span style="float: right;">3</span></p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b>            I. Repetitivo, mais constante, como um jogo infinito que fica cada vez mais difícil de passar [de fase].            II. Perspectiva, segmento de reta, luz e sombra, cores, formas, tridimensionalidade, padrão, lógica, recursão, semelhança de figuras; os segmentos de reta possuem os mesmos tamanhos.            III. As formas geométricas como elemento da matemática e uma ilusão 3D de elemento artístico. Sim, consigo relacionar com o mundo, pois, usando a técnica conseguimos fabricar vários elementos do nosso dia a dia.</p>

Fonte: Autoras

Nas respostas descritas, percebemos que os alunos estabeleceram conexões entre o Fractal Degraus e o cotidiano, destacando a tridimensionalidade e a infinitude. Pensando nas características de autossimilaridade e de complexidade infinita, foi possível perceber que, mesmo informalmente, os alunos identificaram essas características ou falaram das semelhanças entre os níveis e da infinitude das fases, como em um jogo. Essa é uma das vantagens de se trabalhar com materiais manipuláveis, pois o fato de termos construído um origami arquitetônico atribui a este padrão fractal o efeito 3D e a ideia de profundidade. Nesse tipo de origami, “[...] uma figura bidimensional transforma-se em tridimensional através da manipulação de cortes e dobra, sendo uma fusão do desenvolvimento das artes do origami” (UENO; CALDEIRA, 2001, p.66).

Na quarta questão foi pedido aos alunos para descreverem o processo de iteração do padrão fractal em estudo, utilizando elementos listados no item anterior (quadro 4).

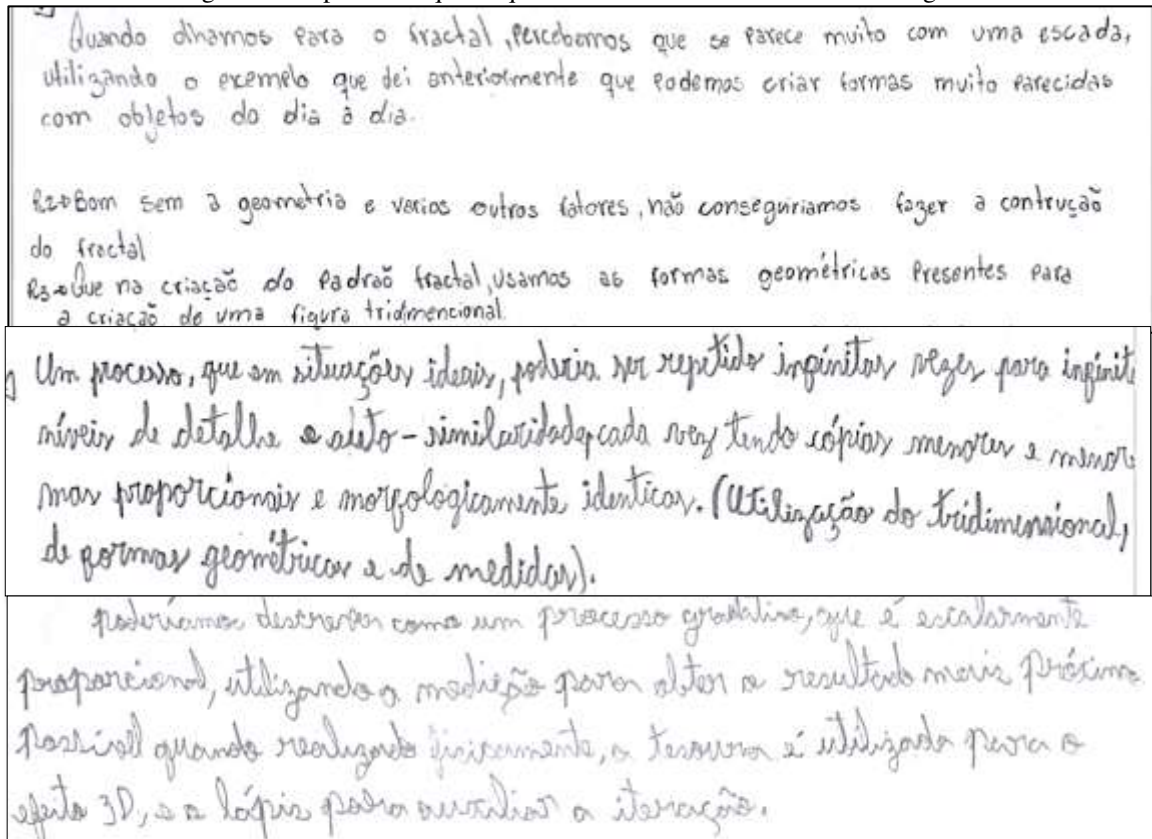
Quadro 4: Quarta questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

Questão 4: De que maneira poderíamos descrever o processo de iteração desse padrão fractal, utilizando nessa descrição os elementos listados no item anterior?

Fonte: Autoras

Um aluno percebeu que o cartão se parece com uma escada construída a partir de formas geométricas planas resultando em uma tridimensional, enfatizando que, sem a geometria, seria impossível criar um fractal. Outro aluno notou que o processo de iteração poderia ser feito infinitamente seguindo a mesma sequência e que, devido à autossimilaridade, teríamos degraus cada vez menores e proporcionais. Um terceiro aluno descreveu que a construção é um processo gradativo e proporcional, utilizando medidas corretas (figura 6).

Figura 6: Respostas da quarta questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.



#### DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA

I. Quando olhamos para o fractal, percebemos que se parece muito com uma escada, utilizando o exemplo que dei anteriormente que podemos criar formas muito parecidas com objetos do dia a dia.  
 R2: Bom sem a geometria e vários outros fatores, não conseguiríamos fazer a construção do fractal.  
 R3: Que na criação do padrão fractal, usamos as formas geométricas presentes para a criação de uma figura tridimensional.

II. Um processo que, em situações ideais, poderia ser repetido infinitas vezes para infinito níveis de detalhes e autossimilaridade, cada vez tendo cópias menores e menores, mas proporcionais e morfologicamente idênticas. (Utilização do tridimensional, de formas geométricas e de medidas).

III. Poderíamos descrever como um processo gradativo, que é proporcional, utilizando a medida para obter o resultado mais próximo possível quando realizado fisicamente, a tesoura é utilizada para efeito 3D, e o lápis para auxiliar a iteração.

Fonte: Autoras

A quinta questão (quadro 5) é iniciada com um texto sobre as sensações que a observação de uma figura pode nos trazer.

Quadro 5: Quinta questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

Questão 5: O trecho "A partir de um ponto podemos traçar uma linha. A linha é uma sequência de pontos. Essa linha deve ser entendida como força e direção e não apenas como linha de contorno. Isso quer dizer que as linhas direcionam o nosso olhar diante da imagem. Assim, elas também podem gerar sensações psicológicas como paz, agitação, etc." (Fonte: [Os Elementos Visuais - Ponto, Linha, Forma e Cor | Falando de Artes - http://www.falandodeartes.com.br/2016/03/os-elementos-visuais-ponto-linha-forma.html](http://www.falandodeartes.com.br/2016/03/os-elementos-visuais-ponto-linha-forma.html)). Na construção do padrão fractal de graus, várias linhas são traçadas, que na matemática, quando retas, são chamadas de segmentos.

a) Descreva a sensação que a criação do cartão fractal de graus te traz.

b) Após pronto, ao contemplar a figura criada, quais sensações você descreveria?

Fonte: Autoras

No item “a” foi solicitado que os alunos descrevessem a sensação que tiveram ao criar o cartão fractal de graus. Um deles descreveu que a construção do cartão lhe trouxe a percepção de infinito, o que lhe deixou pensativo, enfatizando as dificuldades humanas de lidar com a infinitude. Outro aluno se sentiu desafiado, mas sentiu as dificuldades iniciais darem espaço para uma sensação de satisfação oriunda da conquista de conseguir realizar mais um nível do padrão. Um terceiro aluno afirmou que realizar a construção fez com que ele se sentisse relaxado ao se entreter com a construção e apreciar a beleza do que era formado (figura 7).

Figura 7: Respostas do item “a” da quinta questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

<p>Traz uma sensação pensativa, pois se continuarmos a construir, podemos repetir o processo infinitamente, o que assemelha à outras coisas que fogem do entendimento humano, afinal não conseguimos lidar com o infinito.</p>
<p>Frustração e confusão no começo, por causa da dificuldade de me localizar na figura e seguir os passos, mas a cada iteração completa era um sentimento de conquista, por mais difícil que fosse a próxima iteração que iria exigir medições mais precisas e cortes/dobraduras mais precisos.</p>
<p>Simplicidade, você acaba por esquecer outras coisas e foca apenas em fazer algo bonito e divertido, é bem relaxante.</p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b></p> <p>I. Traz uma sensação pensativa, pois se continuarmos a construir, podemos repetir o processo infinitamente, o que assemelha à outras coisas que fogem do entendimento humano, afinal não conseguimos lidar com o infinito.</p> <p>II. Frustração e confusão no começo por causa da dificuldade de me localizar na figura e seguir os passos, mas a cada iteração completa era um sentimento de conquista, por mais difícil que fosse a próxima iteração que iria exigir medições mais precisas e cortes/dobraduras mais precisos.</p> <p>III. Simplicidade, você acaba por esquecer outras coisas e foca apenas em fazer algo bonito e divertido, é bem relaxante.</p>

Fonte: Autoras

As respostas dos alunos para o item “a” dessa questão revelaram que a arte foi capaz de provocar sensações e reflexões. Assim como diante de uma obra de arte, diversas e distintas sensações são provocadas em quem as realiza ou observa. Ao elaborar um cartão fractal a preocupação com a forma dos objetos representados está diretamente relacionada ao seu equilíbrio ou à instabilidade, algo que tem relação direta com o entendimento do padrão geométrico e artístico. A cor atua como elemento agregador e é o toque final da composição

artística que também possui qualidade emotiva. Por isso, na construção dos cartões optamos por utilizar papéis com cores vivas e vibrantes sobrepostas a uma folha preta usada para dar a ideia de tridimensionalidade.

A arte é movida pelos sentimentos de seus criadores em um processo de experimentação em suas criações, utilizando técnicas, estilos e movimentos. Segundo Figueiredo e González (2019), a arte possui as funções de ensinar, comover e agradar ou dar prazer. Outra percepção dos alunos participantes da pesquisa foi a sensação de infinitude do cartão fractal construído. De fato,

a percepção de infinito está subjacente aos objetos fractais, pois estes são obtidos no limite de um processo de construção que se repete indeterminadamente e como tal, temos necessidade de atribuir um limite ao nosso campo de visão. Para os olhos da mente, um fractal é uma maneira de entrever o infinito (ARANTES *et al.*, 2014, p.12).

E a ideia de infinito é basilar para as três disciplinas envolvidas neste trabalho interdisciplinar. A Arte, a Informática e a Matemática se apoderam do infinito para representar algo sem limites ou fronteiras definidas.

Na arte, o infinito pode ser entendido de forma literal ou simbólica e pode representar uma sensação de espaço, tempo, continuidade, inovação, complexidade ou abstração. Na informática, ele nos lembra o *loop*, uma estrutura de programação que continua executando um conjunto de instruções repetidamente sem parar, de maneira contínua e sem fim, a menos que seja interrompido. Na matemática, ele representa um conceito abstrato que expressa a ideia de que algo não tem fim ou limite, percepção fundamental para a compreensão das séries infinitas, conjuntos infinitos e operações matemáticas envolvendo limites. Essas possibilidades interpretativas nos levam a compreender que a complexidade infinita dos padrões fractais certamente provoca reflexões interdisciplinares.

Após a construção do cartão Fractal Degraus, foi solicitado aos alunos, no item “b”, que contemplassem a figura e falassem sobre as sensações que tiveram. Eles relataram felicidade, curiosidade, surpresa, reconforto, mas também incompreensão e desapontamento. Percebemos que se, por um lado, construir um fractal bonito e robusto permite que boas sensações sejam a floradas, por outro, não conseguir construir todos os níveis esperados pode gerar sensações ruins (figura 8).

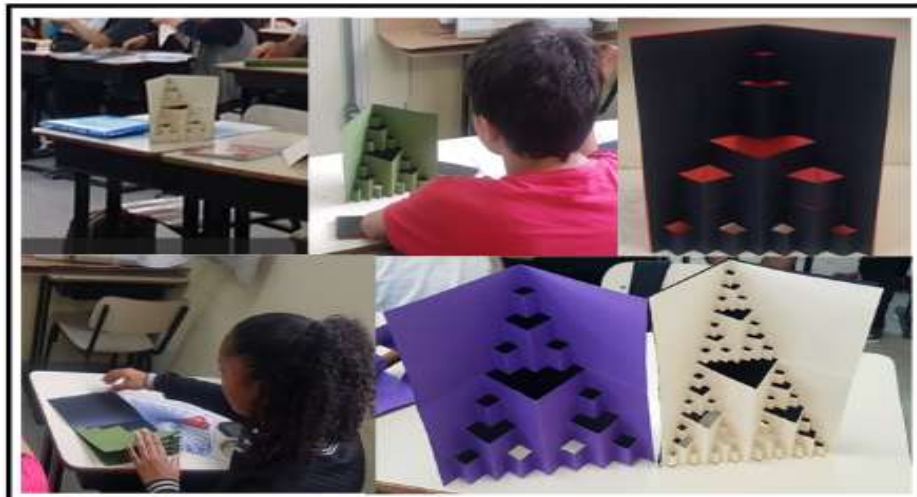
Figura 8: Respostas do item “b” da quinta questão da Atividade Cartão Fractal Degraus.

<p>Felicidade, curiosidade, surpresa, incompreensão.</p>
<p>Surpreso por ter conseguido fazer 3 camadas e como simples cortes e dobraduras no papel podem fazer uma figura tão interessante, além de curiosidade para saber que outros tipos de fractais podem ser feitos em uma folha de papel.</p>
<p>Satisfação, consegui fazer o proposto de maneira reconfortante, mesmo passando dificuldades, também fiquei um pouco desapontado por não conseguir repetir o padrão mais 1 ou 2 vezes; no geral eu fiquei "querendo mais" por assim dizer.</p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b></p> <p>I. Felicidade, curiosidade, surpresa, incompreensão.</p> <p>II. Surpreso por ter conseguido fazer três camadas e como simples cortes e dobraduras no papel podem fazer uma figura tão interessante, além de curiosidade para saber que outros tipos de fractais podem ser feitos em uma folha de papel.</p> <p>III. Satisfação, consegui fazer o proposto de maneira reconfortante, mesmo passando dificuldades, também fiquei um pouco desapontado por não conseguir repetir o padrão mais uma ou duas vezes, mas, no geral eu fiquei querendo mais por assim dizer.</p>

Fonte: Autoras

Assim, encerramos a atividade do Cartão Fractal Degraus e iniciamos a construção do Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski (figura 9).

Figura 9: Alunos construindo o Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski .



Fonte: Autoras

Na primeira questão foi proposta a construção do Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski utilizando tesoura, lápis, régua, fita adesiva dupla-face ou cola, papel cartão ou outro de gramatura 185 g/m<sup>2</sup>. Seguimos os passos descritos no quadro 6.

Quadro 6: Primeira questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

<p>1. Vamos construir o cartão fractal Triângulo de Sierpinski. Para confeccioná-lo, vamos precisar de tesoura, lápis, régua, fita adesiva dupla-face ou cola, papel cartão ou outro de gramatura 185 g/m<sup>2</sup>. Siga os passos:</p> <p>a) Este fractal é composto por triângulos equiláteros. Para fazer o primeiro nível, vamos construir o primeiro e maior triângulo, cuja altura é a mesma do lado maior do papel. Dobre a folha ao meio horizontalmente fazendo um vinco, no lado maior, como indicado na figura abaixo.</p> <p>b) Novamente, dobre sutilmente o papel ao meio, no outro sentido, marcando o meio.</p> <p>c) Com a folha dobrada ao meio na vertical, faça um corte até a metade da largura, conforme a figura.</p> <p>d) Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra (nos dois lados).</p> <p>e) Os próximos níveis serão obtidos nos dois retângulos (dobrados) formados no cartão. Para isso, repetimos os passos do b ao d. Abra o cartão, e vire as partes cortadas para fora. Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível.</p>			
a)	b)	c)	d)
e)		Figura Final	

Fonte: Autoras

O Triângulo de Sierpinski possui a mesma aparência em diferentes escalas, o que implica que seu processo de construção seja de repetidas subdivisões. Com forma tridimensional, o padrão repetitivo emerge de forma impressionante, resultando em uma estrutura geométrica complexa e interessante. Na nossa experiência, essas características contribuíram para que os alunos estivessem envolvidos ao longo da construção.

No desenvolvimento desse fractal, alguns alunos tiveram dificuldades. Alguns fizeram cortes errados e precisaram recomeçar com outro papel. Contudo, no momento em que os alunos entenderam o processo de construção do fractal conseguiram prosseguir com as atividades.

Se comparado à construção do Cartão Fractal anterior, os alunos mostraram mais habilidade com os materiais manipuláveis, pois eles fazem com que o estudante possa tocar,

sentir, manipular e movimentar os objetos, o que exerce um papel importante na aprendizagem. Além disso, esses materiais facilitam a observação, a análise e o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e científico, fundamental para o ensino experimental e excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos (LORENZATO, 2006).

Na segunda questão foi solicitado que os alunos observassem o Cartão Fractal e descrevessem o processo de construção (quadro 7).

Quadro 7: Segunda questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

Questão 2. Observe o fractal triângulo de Sierpinski. Como você descreveria o processo de construção?
---

Fonte: Autoras

Um aluno destacou características pertinentes a cada disciplina como: escala geometria e autossimilaridade para matemática, proporção, cor e emoção para Artes e algoritmo para Informática. Um segundo aluno citou as ferramentas necessárias para construção do cartão e identificou conceitos vistos na elaboração como intercessão entre as linhas e formas geométricas. Outro aluno enfatizou que, para perceber a projeção oriunda das características tridimensionais do fractal, foi preciso observar a construção de cima (figura 10).

Figura 10: Respostas da segunda questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

<p>Matemática: Escala, Geometria, auto similaridade.          Artes: Proporção, cor e intencionalidade da construção.          Informática: Algoritmo de construção.</p>
<p>Um processo que utiliza ferramentas artísticas como: tesoura, cola, papel.          E ferramentas ou conceitos geométricos como: régua para medição, análise de comprimento e intersecção de linhas (segmentos de reta), formas geométricas, etc.</p>
<p>O processo de construção envolveu conceitos como: proporção, assim como no anterior todos os segmentos possuem a mesma medida de acordo com as medidas somadas. Um detalhe a destacar é que para esse fractal é necessário uma base, pois dependendo de que angulação você olha essa "base" fica visível e para entender a projeção o indicado é olhá-lo de cima.</p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b></p> <p>I. Matemática: Escala, geometria, auto similaridade; Artes: Proporção, cor e de emoções; Informática: Algoritmos e construções.</p> <p>II. Um processo que utiliza ferramentas artísticas como: tesoura, cola, papel. E ferramentas ou conceitos geométricos como: régua para medição, análise de comprimento e intersecção de linhas (segmentos de reta) forma geométricas e etc.</p> <p>III. O processo de construção envolveu conceitos como: proporção, assim como no anterior todos os segmentos possuem a mesma medida de acordo com as medidas somadas. Um detalhe a destacar é que para esse fractal é necessária uma base, pois dependendo de que angulação você olha essa "base" fica visível e para entender a projeção o indicado é olhá-lo de cima.</p>

Fonte: Autoras

Nas falas dos alunos, podemos notar que todos destacam diretamente as características geométricas da construção ou citam entes geométricos como os segmentos. A geometria é algo que se destaca na construção do Cartão Fractal e desempenha um papel significativo na Arte por oferecer um conjunto de princípios e ferramentas para criar composições visualmente agradáveis e equilibradas.

[...] algumas áreas da Matemática, como a Geometria, possibilitam o surgimento de prazer e gozo que merecem ser explorados pelos educadores. Assim são as situações de contemplação de aspectos harmoniosos ou de contrastes na Arte, na pintura ou arquitetura, o na própria natureza. A visualização de simetrias, por exemplo, é um fator poderoso para sentir o belo. (BARBOSA, 2005, p. 13).

Os alunos também destacaram a proporção na arte e os algoritmos na informática, conceitos que são primordiais na matemática. A interdisciplinaridade, no contexto escolar, permite que os indivíduos explorem um tópico de diferentes perspectivas, o que ajuda a compreender a pluralidade e a complexidade dos problemas, contribuindo para percepção de características generalistas, amplas e profundas.

A proporção, por exemplo, é utilizada na Arte para criar harmonia e equilíbrio na composição, além de ser relevante para criar diferentes efeitos visuais, como a sensação de movimento ou de estabilidade. Na Matemática, por sua vez, a proporção envolve a relação entre quantidades ou grandezas. Ela descreve a comparação entre as partes de um todo ou entre diferentes elementos.

O mesmo ocorre com o conceito de algoritmos que, na informática, está relacionado à sequência de passos que descrevem a realização de uma tarefa específica, e são essenciais na programação de computadores. Na matemática, os algoritmos apresentam um conjunto de regras e procedimentos bem definidos que descrevem como realizar uma tarefa ou resolver um problema específico.

Esses e outros conteúdos interdisciplinares abordados na pesquisa ajudaram os estudantes a conectar conceitos de forma abrangente e a aplicá-los em situações do cotidiano. É nesse sentido que a interdisciplinaridade prepara os alunos para enfrentarem desafios complexos e desenvolverem habilidades de pensamento crítico. Assim, as atividades foram desenvolvidas possibilitando que os alunos apreciassem as formas dos Padrões Fractais em suas várias linguagens, desenvolvendo tanto a fruição, quanto à análise estética.

A interdisciplinaridade tem a essência de conectar o indivíduo com a ciência que embasa as diversas disciplinas. Entendemos, portanto, a interdisciplinaridade como a mútua integração de várias ciências, minimizando as fronteiras que, historicamente, foram estabelecidas entre elas (FRIGOTTO, 1995). Assim, quando ocorre na sala de aula, a interdisciplinaridade integra duas ou mais disciplinas, colaborando para que o conhecimento seja realizado se conectando às demais de forma crítica e estimuladora. Ao explorar esses padrões, é possível gerar uma expansão de ideias que contribuem para a construção de um conhecimento com caráter interdisciplinar.

Na terceira questão foi pedido aos alunos para observarem, na construção dos fractais, a utilização de elementos presentes na Arte e na Matemática. Foi solicitado também que descrevessem os elementos identificados no processo de criação desse padrão fractal (quadro 8).

Quadro 8: Terceira questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

Questão 3: Na construção dos fractais, utilizamos elementos presentes na arte e na matemática, como simetrias, padrões geométricos, paralelismo, perpendicularidade e reflexão. Quais elementos você consegue identificar no processo de criação desse padrão fractal?

Fonte: Autoras

Os alunos observaram elementos da arte como a combinação de cores, os padrões, a

tridimensionalidade, a harmonia, os segmentos de reta, os ângulos, as proporções, os pontos, a simetria, as pirâmides, a profundidade, dentre outros (figura 11).

Figura 11: Respostas da terceira questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

fractal? contraste na seleção de cores, padrões visuais que satisfazem o olhar, tridimensionalidade, harmonia.
Segmentos de reta, formas geométricas, medidas, ângulos, proporções, na matemática. Pontos, cores, efeito tridimensional na arte.
Elementos artísticos como: cores, padrão, harmonia e contraste. E elementos matemáticos / geométricos como: pontos, linhas, triângulos, pirâmides, composição, simetria, perspectiva, profundidade (tridimensionalidade).
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b></p> <p>I. Contraste na seleção de cores, padrões visuais que satisfazem o olhar, tridimensionalidade, harmonia.</p> <p>II. Segmentos de reta, formas geométricas, medidas, ângulos, proporções, na matemática. Pontos, cores, efeito tridimensional na arte.</p> <p>III. Elementos artísticos como: cores, padrão, harmonias e contraste. E elementos matemáticos, geométricos como: pontos, linhas, triângulos, pirâmides, composição, simetria, perspectiva, profundidade (tridimensionalidade).</p>

Fonte: Autoras

Na quarta questão foi pedido aos alunos para descreverem a maneira em que acontece o processo de iteração desse fractal, utilizando, nessa descrição, os elementos listados no item anterior (quadro 9).

Quadro 9: Quarta questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

Questão 4: De que maneira poderíamos descrever o processo de iteração desse padrão fractal, utilizando, nessa descrição, os elementos listados no item anterior?

Fonte: Autoras

Nessa questão, um aluno observou que o processo de construção do cartão fractal poderia ser feito várias vezes, repetitivamente, porém com escalas menores, ressaltando a ideia da complexidade infinita e de autossimilaridade. Outro aluno comentou que o primeiro nível do cartão seria o início do padrão e que, a partir dele, haveria uma repetição em escalas menores, até não ser mais possível avançar nos níveis devido às limitações da realização de uma construção com material manipulável. Um terceiro aluno destacou a simetria e a reflexão presentes no cartão fractal por meio de suas formas geométricas, padrões, ângulos e triângulos (figura 12).

Figura 12: Respostas da quarta questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

<p>Um processo que, em condições ideais, poderia ser repetido infinitas vezes, criando figuras cada vez menores e morfologicamente idênticas, mantendo uma proporção e concedendo auto-similaridade.</p>
<p>O 1º nível se forma sendo o maior e a partir dele forma teoricamente iguais, mas em uma proporção menor se forma e esse processo se repete até que não consigo mais fazer as repetições.</p>
<p>A simetria está presente por vermos vários padrões iguais, os padrões geométricos são autoexplicativos já que temos vários triângulos equiláteros, perpendicularidade porque temos ângulos de 90° e a reflexão é presente já que temos uma reflexão das formas geométricas.</p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b></p> <p>I. Um processo que, em condições ideais, poderia ser repetido infinitas vezes, criando figuras cada vez menores e morfologicamente idênticas, mantendo uma proporção e concedendo a auto similaridade.</p> <p>II. O primeiro nível se forma sendo o maior e a partir dele forma teoricamente iguais, mas em proporção menor se forma e esse processo se repete até que não consigo mais fazer as repetições.</p> <p>III. A simetria está presente por vermos vários padrões iguais, os padrões geométricos são autoexplicativos que temos vários triângulos equiláteros, perpendicularidade porque temos ângulos de 90° e a reflexão é presente, já que temos uma reflexão das formas geométricas.</p>

Fonte: Autoras

Na questão seguinte (quadro 10), foi solicitado aos alunos que fizessem considerações sobre o padrão fractal Triângulo de Sierpinski.

Quadro 10: Quinta questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

<p>Questão 5: Sobre o padrão fractal Triângulo de Sierpinski:</p> <p>a) Descreva a sensação que a criação do cartão fractal te traz.</p> <p>b) Após pronto, ao contemplar a figura criada, quais sensações você descreveria?</p>
--

Fonte: Autoras

Inicialmente, foi solicitado que descrevessem a sensação que a criação do cartão fractal trazia e os alunos expressaram diferentes opiniões. Um descreveu que achou o Triângulo de Sierpinski mais difícil de ser criado do que o Degraus. Outro disse que foi formada uma imagem interessante e agradável, mas que, inicialmente, o fez se sentir frustrado por ter errado na construção. Um terceiro aluno relatou que realizar a construção foi uma experiência agradável que lhe trouxe calma e prazer. No entanto, também relatou que a figura tinha dobraduras em excesso, o que lhe causou certo desconforto (figura 13).

Figura 13: Respostas do item a da quinta questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

<p>me deu um pouco de agonia por ser uma experiência diferente e por ser mais difícil que a anterior.</p>
<p>interessante e agradável, tirando a parte que eu errei um cartãozinho e tive que recomeçar do zero, aquilo que foi frustrante.</p>
<p>novamente, foi uma sensação de calma, prazer. Mas eu senti que eu especialmente um leve desconforto quanto ao excesso de dobraduras sem necessidade.</p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b>            I. Me deu um pouco de agonia por ser uma experiência diferente e por ser mais difícil que a anterior.            II. Interessante e agradável, tirando a parte que eu errei um cartãozinho e tive que recomeçar do zero, aquilo que foi frustrante.            III. Novamente, foi uma sensação de calma, prazer, mas eu senti especialmente um leve desconforto quanto ao excesso de dobraduras sem necessidade.</p>

Fonte: Autoras

Embora esse aluno tenha afirmado que essas dobraduras eram sem necessidade, na verdade, eram necessárias para a precisão das construções auxiliares. Marcar o meio de um segmento, por exemplo, é algo que, na perspectiva de alguns alunos, é possível fazer sem medições. Contudo, sem instrumentos, a dobradura fica imprecisa, o que pode acarretar em erros significativos na construção final. Assim, o uso de instrumentos de construção geométrica é crucial para determinar o equilíbrio ou a instabilidade de uma figura geométrica. Concordamos que

as Construções Geométricas [...] representam uma excelente forma de retomar conceitos que os alunos já conhecem, além de servir como ferramenta para introduzir novos conceitos geométricos, ensinar a forma correta do traçado das figuras, utilizar corretamente os instrumentos de desenho e desenvolver a percepção geométrica nos objetos e formas. (MARCA, 2015, p. 111).

No item “b” dessa questão, pedimos que os alunos contemplassem o cartão fractal Triângulo de Sierpinski e falassem sobre as sensações que sentiram. Um aluno afirmou que se sentiu satisfeito e orgulhoso do próprio trabalho. Ele pondera também que achou o cartão bonito, mas ficou um pouco chateado pois, como errou os cortes na construção, precisou mudar de papel e não pode finalizar o cartão com as cores desejadas. Um segundo aluno expressou satisfação por conseguir fazer vários níveis do cartão e um terceiro relatou que achou a experiência legal, interessante e diferente (figura 14).

Figura 14: Respostas do item “b” da quinta questão da Atividade Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

<p>Orgulho, pois além de ter ficado bem bonito e sem partes amassadas eu consegui fazer meu próprio padrão de repetição acima da dobradura base. E um pouco de culpa porque perdi a última folha ciano com um corte errado e tive que mudar para uma folha branca.</p>
<p>Volto a destacar a satisfação em vê-lo com níveis avançados, mostrando cada vez mais o quanto podemos ir além do considerável “aceitável”, conseguir cada vez mais ir além do sentimento de orgulho.</p>
<p>Muito legal, uma experiência diferente.</p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b></p> <p>I. Orgulho, pois além de ter ficado bem bonito e sem partes amassadas eu consegui fazer meu próprio padrão de repetição acima da dobradura base. E um pouco de culpa, porque perdi a última folha ciano com um corte errado e tive que mudar para uma folha branca.</p> <p>II. Volto a destacar a satisfação em vê-lo com níveis avançados, mostrando cada vez mais o quanto podemos ir além do considerável “aceitável”, conseguir cada vez mais ir além do sentimento de orgulho.</p> <p>III. Muito legal, uma experiência diferente.</p>

Fonte: Autoras

A construção do cartão fractal degraus mobiliza elementos como movimento, combinação de cores, simetria, harmonia e forma. Após sua construção, o mesmo se torna uma obra de arte singular, pois o objeto transmite ideias, sentimentos e interpretações pertinentes a cada aluno, revelando uma visão sensível e criativa.

## 7. Considerações Finais

Este artigo objetivou discutir as contribuições da exploração interdisciplinar dos padrões fractais com materiais manipuláveis para os alunos participantes da pesquisa. Consideramos que o objetivo proposto foi alcançado, pois evidenciamos que a exploração interdisciplinar dos Padrões Fractais, envolvendo as disciplinas de Informática, Artes e Matemática, contribuiu para que os alunos pudessem ter uma compreensão globalizada de padrões, infinitude e tridimensionalidade, aguçando a capacidade de análise estética e contribuindo para a construção de conhecimentos pertinentes às disciplinas envolvidas.

Os materiais manipuláveis, por sua vez, contribuíram para tornar atraente o estudo dos padrões fractais, dando ao aluno autonomia e criatividade na construção do conhecimento.

Quanto aos padrões fractais, foi possível identificar que as propriedades de

autossimilaridade e de complexidade infinita proporcionaram a contemplação da estética nas harmonias, proporções e simetrias presentes nas regularidades desses padrões. Concluímos, portanto, que a abordagem dos padrões fractais contribuiu para a formação cidadã crítico-reflexiva dos alunos, colaborando para que refletissem sobre o papel de cada indivíduo na sociedade e no mundo.

## Referências

ARANTES, M. G.; COSTA, V. H. H.; CARDOSO, H. A.; HARTMANN, A. M. Fractais: a complexidade e a auto-semelhança dos padrões geométricos representadas com materiais concretos e tecnologia computacional. *In: 2º Encontro Nacional Pibid Matemática, Anais*. Santa Maria, 2014. Disponível em:

[http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed\\_4/MC/MC\\_2\\_Angela\\_Hartmann.pdf](http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_2_Angela_Hartmann.pdf).

Acesso em: 05 mar. 2022.

BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CALDAS, F. R.; HOLZER, D. C.; POPI, J. A. A interdisciplinaridade em arte: algumas considerações. **Revista Nupeart**, v.17, n.1, 2017. DOI:

<https://doi.org/10.5965/2358092517172017160>. Disponível em:

<https://revistas.udesc.br/index.php/nupeart/article/view/9839>. Acesso em: 17 mar. 2022.

CAMACHO, M. S. F. P. **Materiais manipuláveis no processo ensino/aprendizagem da matemática: aprender explorando e construindo**. 2012.102f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Universidade da Madeira, Funchal. 2012. Disponível em:

<https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/373/1/MestradoMarianaCamacho.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2022.

ESTEPHAN, V. M. **Perspectivas e limites do uso de material didático manipulável na visão de professores de matemática do ensino médio**. 2000. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Raciocínio proporcional na matemática escolar. **Revista Educação em Questão**, 58(57). 2020. Disponível em:

<https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/20024>. Acesso em: 23 abr. 2022.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Padrões fractais: conectando matemática e arte. **Eccos Revista Científica**, v. 1, p. 33-53, 2012. Disponível em:

<https://periodicos.uninove.br/eccos/article/viewFile/3484/2268>. Acesso em: 30 abr. 2022.

FIGUEIREDO, J. G. F.; GONZÁLEZ, D. G. Arte-Educação e Aspectos históricos da Arte. **ID on Line. Revista de Psicologia**, v.13, n.45, 2019. DOI:

<https://doi.org/10.14295/idonline.v13i45.1811>. Disponível em:  
<https://idonline.emnuvens.com.br/id/article/view/1811>. Acesso em: 01 maio 2022.

FRIGOTTO, G. A interdisciplinaridade como necessidade e como problema nas ciências sociais. In: JANTSCH, A.; BIANCHETTI, L. (orgs.) **Interdisciplinaridade para além da filosofia do sujeito**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

JAPIASSU, H. **Interdisciplinaridade e patologia do saber**. Rio de Janeiro, Imago, 1976.

LIMA E.P. **Kirigami no ensino de matemática**. 2019. 16f. Artigo Científico para aprovação do trabalho de conclusão de curso (TCC). Faculdade Educacional Lapa-Fael. Lapa, Paraná, 2019. Disponível em: [https://matematicando.net.br/wp-content/uploads/2020/02/Eliane\\_Peixoto\\_.pdf](https://matematicando.net.br/wp-content/uploads/2020/02/Eliane_Peixoto_.pdf). Acesso em: 16 maio 2022.

LORENZATO, S. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. In: LORENZATO, S. (org). **Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LUCENA, R. S. Laboratório de Ensino de Matemática: Jogos e Atividades. **Ebook**. PUC Minas. Belo Horizonte, 2017.

LUPTON, E.; PHILLIPS, J. C. **Novos Fundamentos do Design**. São Paulo: Cosac Naify, 2008.

MARCA, A. **Construções Geométricas como Recurso Pedagógico nas Aulas de Matemática do Ensino Médio**. 2015. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Pato Branco, 2015. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1692>. Acesso: 15 maio 2022.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didática da Matemática**. Lisboa: 1996.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, v.9, n.9-10, p. 1-6, 2004-2005. Disponível em:  
[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6253402/mod\\_resource/content/1/Nacarato\\_eu%20trabalho%20primeiro%20no%20concreto.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6253402/mod_resource/content/1/Nacarato_eu%20trabalho%20primeiro%20no%20concreto.pdf). Acesso em: 29 maio 2022.

PASSOS, C. M. Etnomatemática: conhecimento que constrói sua existência nas fronteiras. **Educação Matemática em Revista (EMR)**, v. 23, n.60, p. 30-42, 23 dez 2018. Disponível em: <http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr/article/view/1253>. Acesso em: 01 jun. 2022.

PERAZZO, L. F; VALENÇA, M. T. **Elementos da Forma**. Rio de Janeiro: Ed. Senac Nacional, 1997.

PIROLA, D. L. **Um enfoque geométrico na prática de origami**. 2004. 67f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

Disponível em:

[https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96805/Daiani\\_Lodete%20Pirola.PDF?sequence=1](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96805/Daiani_Lodete%20Pirola.PDF?sequence=1). Acesso em: 14 jun. 2022.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L. **Didática da Matemática no 1º Ciclo**. Universidade Aberta, 2000. Disponível em:

[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1825101/mod\\_resource/content/2/PONTE%2C%20J.%3B%20SERRAZINA%2C%20M.%20de%20L.%20Did%C3%A1tica%20da%20Matem%C3%A1tica%20do%201%C2%BA%20Ciclo%20%28cap.%208%29.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1825101/mod_resource/content/2/PONTE%2C%20J.%3B%20SERRAZINA%2C%20M.%20de%20L.%20Did%C3%A1tica%20da%20Matem%C3%A1tica%20do%201%C2%BA%20Ciclo%20%28cap.%208%29.pdf). Acesso em: 27 jun. 2022.

RIZOLLI, M. Estudos sobre Arte e Interdisciplinaridade. *In: 16º Encontro Nacional da Associação Nacional de Pesquisadores de Artes Plásticas Dinâmicas Epistemológicas em Artes Visuais, anpap*, p. 914-924, Florianópolis, 2007. Disponível em:

<https://anpap.org.br/anais/2007/2007/artigos/093.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2022.

ROQUE, R. D. **Padrões fractais, tecnologias digitais e interdisciplinaridade**. Relatório (Iniciação Científica em Educação Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2023.

THIESEN, J. S. A interdisciplinaridade com um movimento articulador no processo de ensino-aprendizagem. *In: Revista Brasileira de Educação*, v. 13, n.39, set/dez 2008. DOI:

<https://doi.org/10.1590/S1413-24782008000300010>. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/rbedu/a/swDcnzst9SVpJvpx6tGYmFr/>. Acesso em: 07 jul. 2022.

TOMASSINI, F. P.; RIBEIRO, S.; PEREIRA, T. I. A interdisciplinaridade do pensamento educacional de Paulo Freire: uma obra conectiva. **Gavagai: Revista Interdisciplinar de Humanidades**, Erechim, v. 8, n. 1, p. 12-32, jan./jul. 2021. DOI:

<https://doi.org/10.36661/2358-0666.2021v8n1.12424>. Disponível em:

<https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/GAVAGAI/article/view/12424>. Acesso em: 08 jul. 2022.

UENO, T. R.; CALDEIRA, M. A. C. Origami arquitetônico no ensino da geometria projetiva. **Revista Educação Gráfica**. Bauru - SP - Brasil, v. 5, p. 65-76, 2001.

## ARTIGO III

### APRENDIZAGEM INTERDISCIPLINAR POR MEIO DA CONSTRUÇÃO DE PADRÕES FRACTAIS COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

#### Resumo

Este artigo objetiva investigar como o estudo de padrões fractais conectado às tecnologias digitais podem contribuir para aprendizagem interdisciplinar. A proposta metodológica é de cunho qualitativo e os dados foram produzidos com alunos do Ensino Médio integrado ao curso técnico de Informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*, que compôs o cenário de pesquisa de mestrado ao qual este artigo é parte integradora. Os dados foram analisados a partir dos registros feitos pelos alunos nas folhas de atividades e no aplicativo GeoGebra para *smartphone*. Em seguida, foram triangulados com o referencial teórico a partir das nossas percepções enquanto professoras e pesquisadoras. Nossas conclusões apontam que a abordagem interdisciplinar dos Padrões Fractais, englobando Informática, Artes e Matemática, estimulou a capacidade de análise estética e enriqueceu a construção de conhecimentos relevantes nas disciplinas em questão. Quanto às tecnologias digitais, o *smartphone* contribuiu para apresentar uma visualização impactante, interativa e dinâmica dos padrões fractais. O GeoGebra, especificamente, possibilitou a criação e exploração dos fractais de modo detalhado, em alta resolução, em diferentes escalas e ângulos capazes de expandir horizontes de maneiras criativa e interativa, permitindo que os alunos se envolvessem ativamente e descobrissem detalhes envolvendo as propriedades de complexidade infinita e de autossimilaridade.

**Palavras-chave:** Interdisciplinaridade. Ensino Médio. Smartphone. GeoGebra. Educação Pública.

#### 1. Introdução

O Ensino Médio no Brasil apresenta desafios complexos que impactam tanto a qualidade educacional quanto o futuro dos alunos. Esta etapa de ensino carece de uma abordagem prática e aplicada capaz de preparar os alunos para enfrentar os desafios da vida real. Nesse sentido, argumentamos sobre a necessidade de reformular e repensar conceitos já estabelecidos e, ao mesmo tempo, inovar na produção de conhecimentos em uma sociedade que já tem incorporada no cotidiano as tecnologias digitais (FARIA; MALTEMPI, 2020).

Entendemos ser necessário explorar conteúdos escolares que não apenas proporcionem aprendizado, mas também integrem e dinamizem a experiência educacional em uma perspectiva interdisciplinar que estimule o engajamento dos alunos e os inspire a construir o conhecimento de maneira mais profunda e criativa. Nesse sentido, a interdisciplinaridade, a investigação com materiais manipuláveis e as tecnologias digitais atuam para que ocorra uma

comunicação fluída entre professores e alunos, visando aprendizagem dos conteúdos escolares.

Nessa perspectiva, o objetivo deste artigo consiste em investigar como o estudo de padrões fractais com tecnologias digitais podem contribuir para a aprendizagem interdisciplinar. A proposta metodológica é de cunho qualitativo e os dados foram produzidos com alunos do Ensino Médio integrado ao curso técnico de Informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*, que compôs o cenário de pesquisa de mestrado ao qual este artigo é parte integradora.

Buscamos apresentar conexões entre as disciplinas de Informática, Artes e Matemática em uma abordagem interdisciplinar por meio de atividades investigativas de exploração estética dos Padrões Fractais. Mais precisamente, os Padrões Fractais Tetra Círculo e Triângulo de Sierpinski foram investigados dando ênfase às propriedades de autossimilaridade e de complexidade infinita que permitiram desenvolver a fruição e a análise estética. Por meio das atividades realizadas, também foi possível contribuir para o desenvolvimento da criatividade dos alunos que construíram conhecimento interdisciplinar entre as disciplinas envolvidas utilizando tecnologias digitais.

Com o intuito de atingir o objetivo proposto nesse artigo, discutimos, inicialmente, a abordagem interdisciplinar com enfoque na aprendizagem. Na sequência, apresentamos a relevância das tecnologias digitais no ambiente escolar. Na seção seguinte, os Padrões Fractais são abordados. Dando continuidade, é exposta a metodologia. Na análise, triangulamos os dados com o referencial teórico a partir da descrição das respostas dos alunos e das nossas percepções enquanto professoras e pesquisadoras. Finalizamos o artigo com considerações e conclusões.

## **2. Interdisciplinaridade e Aprendizagem**

De acordo com Caldas, Holzer e Popi (2017), a interdisciplinaridade é fundamental para que os alunos possam construir saberes gerais, permeando o saber específico de uma disciplina com as demais do currículo escolar e construindo ideias articuladas. Ela contribui para que os alunos sejam capazes de atuar na sociedade com senso crítico apurado, opiniões fundamentadas, e ações que consideram o saber construído de forma flexível e abrangente.

Essa abordagem atua como ponte entre as disciplinas que, historicamente, têm sido estudadas isoladamente no contexto do ensino tradicional na Educação Básica brasileira. O construto obtido por meio das informações processadas e conhecimentos gerados tende a repercutir em uma postura que estabelece uma conexão com a realidade, edificando

entendimentos plurais e transformando-os em suas próprias reflexões (THIESEN, 2008).

Para que isso ocorra, as atividades escolares devem privilegiar formas diversificadas de expressão, diferentes visões de mundo, possibilidades plurais de dar forma à imaginação, além de explorações que permitam desenvolver o saber estético, criativo e artístico dos alunos. É preciso difundir a ideia de que é possível construir conhecimentos que agucem a percepção e a imaginação de uma forma abrangente e não restrita a uma disciplina (CALDAS; HOLZER; POPI, 2017).

As atividades interdisciplinares podem proporcionar inúmeras experiências para os alunos. Reconhecendo as conexões entre as diferentes disciplinas, é possível desenvolver o pensamento crítico e construir conhecimento de modo amplo e flexível no contexto escolar. Com uma visão global, a interdisciplinaridade favorece a construção da conscientização social, criando um ambiente colaborativo e interativo entre as disciplinas escolares. Nesse sentido,

a interdisciplinaridade é uma chamada para a complexidade, a restabelecer as interdependências e inter-relações entre processos de diferentes ordens de materialidade e racionalidade, a internalizar as externalidades (condicionamentos, determinações) dos processos excluídos dos núcleos de racionalidade que organizam os objetos de conhecimento das ciências (de certos processos ônticos e objetivos). Nesse sentido, a interdisciplinaridade é uma busca de “retotalização” do conhecimento, de “completude” não alcançada por um projeto de cientificidade que, na busca de unidade do conhecimento, da objetividade e do controle da natureza, terminou fraturando o corpo do saber e submetendo a natureza a seus desígnios dominantes; exterminando a complexidade e subjugando os saberes “não científicos”, saberes não ajustáveis às normas paradigmáticas da ciência moderna. (LEFF, 2000, p. 22).

Deste modo, uma das vantagens de trabalhar na perspectiva interdisciplinar, é conduzir a aula de modo a possibilitar que o aluno busque o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico ao longo do processo em que as atividades estão sendo realizadas. Trata-se de momentos propícios para formulação de ideias que enriquecem os conteúdos e contribuem para que a aprendizagem ocorra de modo significativo no contexto escolar (MULLER, 2005).

A interdisciplinaridade é fundamentada em uma perspectiva de trabalho dinâmica e somatória que consegue agregar valores de acordo com o conhecimento de um objeto estruturado em um projeto que envolve busca e um plano de interferência colaborativo. A sua aplicabilidade consegue auxiliar no processo de compreensão dos conteúdos de forma prática e construtiva, demonstrando a importância de cada disciplina e dos seus respectivos conteúdos e valores.

Essa abordagem articulada enriquece a construção do conhecimento que ocorre em sua completude. Deste modo, é possível ensinar os mais diversos conteúdos escolares contemplando a complexidade que a dinâmica de ideias e conceitos requer. Por meio do ensino interdisciplinar, os alunos conseguem entender que um tema pode ser estudado de várias formas, construindo uma opinião crítica ao invés de aceitar qualquer ensinamento como verdadeiro (MIRANDA; FILHO, 2012).

É importante ressaltar que a interdisciplinaridade tem o potencial de instigar as capacidades e desenvolvimentos imprescindíveis para uma formação de cidadãos críticos, capazes de contribuir para a sociedade em que vivem. Nesta visão, os alunos conseguem captar e interagir entre eles de forma dinâmica e criativa, levando o professor a ressaltar argumentos que agucem as discussões em sala de aula e instiguem os alunos a buscar respostas através da exploração de ideias, conceitos e materiais mobilizados (MULLER, 2005).

De acordo com Faria e Maltempi (2020), trabalhar com o ensino de modo restrito ao ambiente da sala de aula pode resultar em desmotivação dos alunos devido a um foco excessivo na teoria e no acúmulo de conteúdo, como é comum no modelo de ensino tradicional. Como alternativa, os autores propõem o ensino apoiado pelas tecnologias digitais em uma perspectiva capaz de desenvolver uma sala criativa que propicie oportunidades de aprendizagem diversificadas.

A interdisciplinaridade promove a colaboração entre as disciplinas escolares e, atrelada ao uso da tecnologia digital, permite que os alunos aprendam de modo interativo e abrangente. Assim, aliar tecnologias digitais e interdisciplinaridade é um dos meios capazes de tornar as aulas dinâmicas e criativas, colaborando para que o aluno aprenda a utilizar o celular a fim de aprender com mais flexibilidade os conteúdos propostos no currículo escolar (DIAS; CAVALCANTE, 2016).

Por concordarmos com essa perspectiva, na pesquisa realizada, propomos atividades explorando padrões fractais em uma abordagem interdisciplinar. Na seção seguinte, passamos a abordar a temática das tecnologias digitais na escola.

### **3. Tecnologias Digitais na Educação Escolar**

A visão de um trabalho eficiente no contexto escolar deve incluir atividades que prezem pela interdisciplinaridade, principalmente na escola contemporânea. Para trabalhar nessa perspectiva, é necessário buscar abordagens metodológicas que favoreçam as ações e contribuam para uma aprendizagem significativa (FAZENDA, 1993).

Segundo Barbosa (2005), as tecnologias digitais para a exploração de fractais transformaram a geração e a repetição de imagens. É nesse sentido que Santos e Kripka (2020) afirmam que, com os recursos tecnológicos atuais, é possível gerar padrões fractais a partir de figuras planas e sólidos geométricos esteticamente bonitos devido à autossimilaridade e à complexidade infinita que podem ser observadas nas partes em relação ao todo, propriedades que trataremos adiante.

As tecnologias digitais apareceram no século XX e inovaram a indústria, a economia e a sociedade. Formas de armazenamento e de difusão de informação foram modificadas, produzindo discussões sobre a relação da humanidade com seu passado, seu presente e seu futuro.

Segundo Ribeiro (2014), com a tecnologia digital foi possível descentralizar a informação, aumentar a segurança de uma série de dados fundamentais e criar muitas outras tecnologias. Na atualidade, nossos telefones empregam tecnologias digitais, assim como as agências bancárias das quais somos correntistas, como grande parte do painel de nossos carros, com as urnas em que votamos nas eleições de nosso país, como grande parte da informação que lemos e suas plataformas, entre muitos outros eventos.

Nesse contexto, as crianças, mesmo as bem pequenas, já convivem com esses sistemas, operando com tecnologias digitais que permitem internalizar os procedimentos necessários para utilizá-los e para serem inseridos em uma cultura digital. A utilização de aplicativos educacionais nos celulares permite que o aluno esteja com os recursos sempre à mão, facilita a busca e o compartilhamento de dados, além de complementar os conteúdos do currículo escolar (COSTA, 2023).

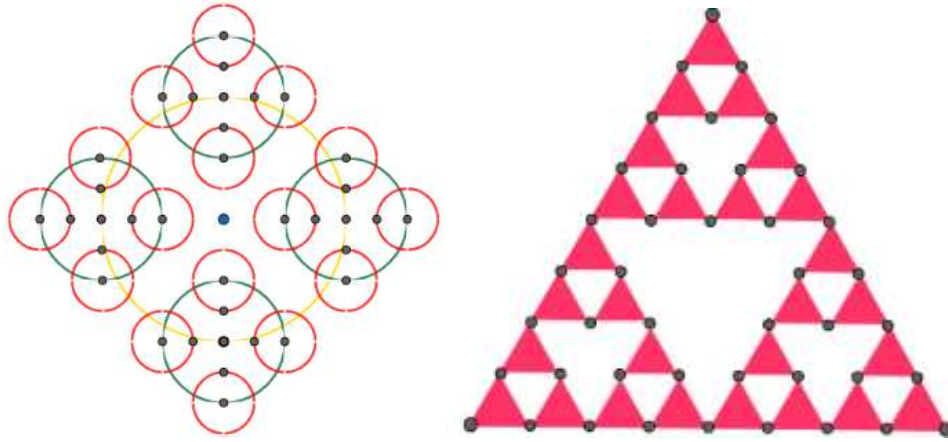
Na pesquisa realizada, elaboramos e desenvolvemos, em parceria com professores das outras disciplinas envolvidas, atividades utilizando o *smartphone* com o intuito de promover a interdisciplinaridade empregando as tecnologias digitais. Através do *smartphone*, os alunos utilizaram o aplicativo GeoGebra Geometria nas aulas de Matemática, o que proporcionou a manipulação e a exploração de construções geométricas, contribuindo para investigação e autonomia dos alunos. Com esses recursos, exploramos, ao longo das atividades, os padrões fractais, tema que passamos a tratar na próxima seção.

#### **4. Padrões Fractais**

“Os padrões fractais estão relacionados ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente.” (FARIA, MALTEMPI, 2012, p. 42). Nas atividades com o aplicativo GeoGebra, foram explorados os fractais Tetra Círculo e

Triângulo de Sierpinski (figura 1).

Figura 15: Fractais Tetra Círculo (direita) e Triângulo de Sierpinski (esquerda) construídos no aplicativo GeoGebra



Fonte: Autoras

Os fractais possuem as características de autossimilaridade e de complexidade infinita. Essas propriedades tornam os fractais distintos e interessantes uma vez que revelam padrões complexos e detalhados em várias escalas (BARBOSA, 2005; FARIA, 2012).

A autossimilaridade está relacionada à estrutura do fractal que faz com que as partes menores se assemelhem ao todo, o que significa que os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte. É essa propriedade que faz com que, quando observado de perto, o fractal exiba padrões semelhantes ao todo. No aplicativo GeoGebra para *smartphone*, se ampliarmos uma parte desses fractais utilizando a ferramenta zoom, será possível observar que ele contém padrões semelhantes à estrutura geral da figura (BARBOSA, 2005).

A complexidade infinita, por sua vez, “está associada às infinitas iterações que ocorrem na construção de um fractal, pois ele é regido por um padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes e que ocorre algébrica e geometricamente” (FARIA 2012, p.40).

Deste modo, a quantidade de detalhes e a estrutura recursiva aumentam indefinidamente à medida que se amplia a escala, criando a sensação de que não importa o quão profundamente se investigue um fractal, sempre haverá mais detalhes para explorar. Assim, a recursão dos fractais resulta em padrões que se repetem em diferentes níveis de ampliação. Esse processo de exploração e descoberta de detalhes, em diferentes escalas, confere aos fractais padrões semelhantes, criando uma sensação de complexidade que se estende infinitamente.

## 5. Metodologia

A pesquisa realizada é de cunho qualitativo. Trabalhos dessa natureza podem ser elaborados com diferentes finalidades que, em geral, consistem em buscar respostas para um problema ou para uma pergunta que direciona o pesquisador ao tema escolhido. Segundo Bicudo (2006), o significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito, de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências. Prodanov e Freitas (2013, p. 70) corroboram essa ideia, pois consideram que “[...] há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números”.

Nesse sentido, caracterizamos a metodologia deste trabalho como qualitativa. Por meio de uma abordagem interdisciplinar, propomos atividades investigativas de exploração estética dos Padrões Fractais envolvendo as disciplinas de Artes, Matemática e Informática para alunos do primeiro ano do Ensino Médio integrado ao curso técnico de Informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*. A escolha por essa instituição ocorreu, pois nela atuo (primeira autora deste artigo) como professora da disciplina de Artes desde o ano de 2011.

Esclarecemos que este artigo traz um recorte de uma pesquisa de mestrado<sup>5</sup> em que os dados foram produzidos em duas etapas: a primeira com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática da turma e a segunda com alunos do primeiro ano do Ensino Médio integrado ao curso Técnico de Informática. Os dados produzidos na segunda etapa nos permitiram discutir o potencial da exploração interdisciplinar dos Padrões Fractais com Tecnologias Digitais e com Materiais Manipuláveis. Nesse artigo, analisamos a etapa da produção de dados na qual trabalhamos com tecnologias digitais. A fase em que exploramos os materiais manipuláveis é abordada em outro artigo, também disponível na dissertação de mestrado.

Levamos para os encontros atividades planejadas para reconhecer e investigar as propriedades do Padrões Fractais, a saber: “Reconhecimento do App<sup>6</sup> GeoGebra Geometria”, “Desenvolvendo o seu Cartão Fractal”, e “Criando Padrões Fractais no GeoGebra para

---

<sup>5</sup> Pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa (CAAE 58898822.0.0000.5153). O termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) foi entregue, lido e assinado por todos os professores participantes da pesquisa. Do mesmo modo, os termos de assentimento livre e esclarecido (TALE) destinado aos alunos com idade inferior a 18 anos foram assinados por eles e por seus responsáveis. Deste modo, foi autorizada a divulgação científica dos dados produzidos.

<sup>6</sup> Como resultado da pesquisa de Iniciação Científica, foi criado o GeoGebraBook<sup>6</sup> “Fractais: Uma experiência com a Matemática e a Arte”, espaço em que foram disponibilizadas as atividades elaboradas (ROQUE, 2023).

*Smartphone*”. As atividades foram elaboradas pelas autoras desse artigo e contou com a colaboração da aluna de iniciação científica voluntária, Renata Dourado Roque, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, também sob orientação da Professora Rejane Faria. Além disso, as atividades foram previamente realizadas com os professores atuantes nas disciplinas envolvidas e passaram por um processo de refinamento de acordo com as sugestões que ocorreram nos encontros com os docentes.

Os instrumentos utilizados para a realização da pesquisa foram as filmagens dos encontros e os registros no caderno de campo. Ao trazer os registros dos alunos participantes, optamos por não divulgar seus nomes, a fim de resguardar suas identidades.

Trinta e seis alunos colaboraram com este estudo, mas optamos por analisar apenas uma resposta nas questões que apresentam tabelas e três respostas por item nas demais, podendo analisar respostas de um mesmo aluno em questões diferentes. Na seção seguinte, passamos a avaliar os dados produzidos, triangulando-os com autores referência nas áreas de estudo.

## 6. Análise de Dados

Após apresentar o tema Fractais e construir alguns cartões do tipo origami arquitetônico nos encontros anteriores, iniciamos este momento apresentando aos alunos uma atividade de reconhecimento do aplicativo GeoGebra. Explicamos as ferramentas que utilizaríamos na construção dos fractais Triângulo de Sierpinski e Tetra Círculo (figura 2).

Figura 2: Alunos construindo o Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski com o aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autoras

Logo após essa apresentação, iniciamos a construção do Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski no aplicativo, seguindo os passos descritos no quadro 1. O Triângulo de Sierpinski é construído a partir de um triângulo equilátero. Nele, deve-se

[...] marcar os pontos médios de cada um dos lados do triângulo; em seguida, os

pontos médios são unidos por três segmentos de reta, que dividem o triângulo inicial em quatro novos triângulos menores e congruentes. Deste ponto em diante, o triângulo central é retirado e o mesmo procedimento é realizado nos triângulos menores para iteração dos níveis seguintes (FARIA, 2012, p. 41).

Quadro 1: Primeira questão da Atividade Triângulo de Sierpinski.

**Questão 1: CONSTRUA O PADRÃO FRACTAL NO APP.**

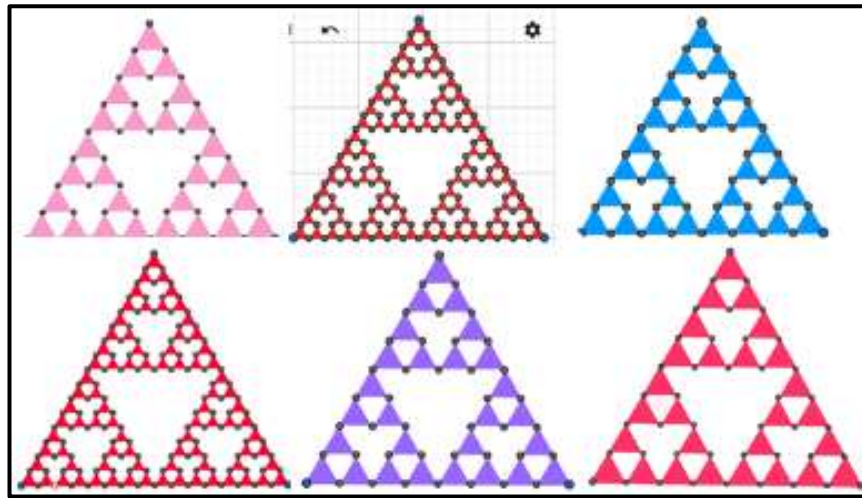
- a) Abra o aplicativo GeoGebra no seu *smartphone*.
- b) Selecione em configurações -> geral -> rotular -> menos para os objetos novos.
- c) Volte para a tela principal.
- d) Construa, com a ferramenta polígono regular, um triângulo equilátero.
- e) Use a cor que preferir para personalizar o triângulo criado e retire a transparência da cor para que o triângulo apareça totalmente preenchido (nível 0).
- f) Marque os pontos médios dos três lados do triângulo.
- g) Construa um novo triângulo com a ferramenta polígono, unindo os pontos médios criados no item anterior.
- h) Preencha o triângulo central de branco para que seja possível visualizar o Triângulo de Sierpinski vazado, formando o primeiro nível do padrão fractal (nível 1).
- i) Construa, em uma escala menor, o nível dois, seguindo os passos do e ao g. Para isso, os novos triângulos gerados no nível anterior devem servir como ponto de partida.
- j) Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível. Se necessário, dê zoom (faça o

Fonte: Autoras

Na construção desse fractal, alguns alunos tiveram dúvidas. Ao longo da atividade, fomos elucidando as imprecisões ao mesmo tempo em que os próprios alunos esclareciam os questionamentos dos colegas próximos. Na realização da pesquisa, a colaboração entre os alunos contribuiu para que a aprendizagem ocorresse de forma coletiva. As discussões em equipe estimularam a troca de ideias e a construção conjunta do conhecimento, promovendo habilidades sociais como comunicação e cooperação, ao mesmo tempo em que reforçavam os conceitos aprendidos. Assim como recomendam Alrø e Skovsmose (2006), a produção do conhecimento foi favorecida no trabalho em equipe englobando a investigação.

A realização da questão 1 resultou na construção do Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski pelos alunos em diferentes níveis e cores. A beleza encantadora deste fractal, já construída por eles em três dimensões com materiais manipuláveis em encontros anteriores, motivou e envolveu os alunos no decorrer da atividade (figura 3).

Figura 3: Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski construído por alunos com o aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autoras

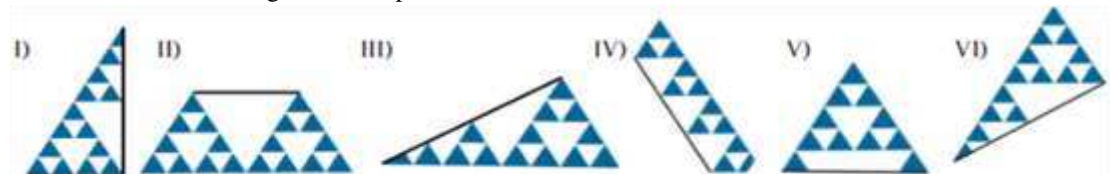
Na segunda questão dessa atividade, foi solicitado que os alunos observassem o Triângulo de Sierpinski no nível 3 e respondessem os itens “a” e “b” da questão (quadro 2). O item “a” tem por enunciado: “Se utilizarmos a transformação geométrica simetria a partir do eixo marcado nas figuras abaixo, quais delas formariam o Triângulo de Sierpinski nesse nível?”. Os alunos responderam sem dificuldades e de forma unânime que as alternativas corretas eram I, III e VI.

Quadro 2: Segunda questão da Atividade Triângulo de Sierpinski.

Questão 2: O padrão fractal Triângulo de Sierpinski está representado abaixo, no nível 3.



a) Se utilizarmos a transformação geométrica simetria a partir do eixo marcado nas figuras abaixo, quais delas formariam o Triângulo de Sierpinski nesse nível?



b) Você consegue identificar uma sequência lógica na construção do triângulo de Sierpinski? Comente sobre os pontos positivos e negativos (caso haja) de construir esse padrão fractal com o papel e com o aplicativo GeoGebra.

Fonte: Autoras

Também destacamos que, nesta questão, os alunos tiveram facilidade com a resposta, pois todos já compreenderam que

Uma composição simétrica é aquela em que cada elemento tem seu correspondente, ou seja, cada elemento ou conjunto se associa a outro idêntico. Essa correspondência pode ser no tamanho, na forma ou na posição de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano ou, ainda, de formas que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo. (PERAZZO; VALENÇA, 1997, p. 86).

No item “b” foi solicitado que os alunos identificassem uma sequência lógica na construção do Triângulo de Sierpinski e que comentassem sobre os pontos positivos e negativos de construir esse padrão fractal com materiais manipuláveis e com o aplicativo GeoGebra.

Como apresentado na figura 4, um aluno percebeu que, para avançar nos níveis, seria preciso calcular sempre a metade dos lados dos novos triângulos que iam surgindo, se referindo à marcação do ponto médio do lado de cada triângulo. Para o aluno, fazer o fractal utilizando o *smartphone* tem uma vantagem que é a possibilidade de criar novos e infinitos níveis utilizando a ferramenta *zoom* para aproximar alguma área específica da figura. Outro aluno achou divertido realizar a construção no *smartphone* e destacou que, ao construir o fractal usando o aplicativo, os erros podem ser corrigidos de forma rápida e fácil se comparado ao papel onde qualquer erro cometido impõe um recomeço. Outro aluno ressaltou que a utilização do aplicativo permitiu criar o fractal com quantos níveis se queira, em um processo que pode ser repetido infinitamente, o que não é possível em uma folha de papel.

Figura 4: Respostas do item “b” da segunda questão da Atividade Triângulo de Sierpinski.

Atamos ter sempre que calcular a metade de um dos lados dos triângulos para formar mais triângulos. No celular, temos um ponto positivo de poder fazer um fractal infinitamente, já que podemos dar um zoom para continuar a fazer o fractal.

Sim, um ponto positivo de construir o fractal é a diversão e um negativo é que quando estamos construindo o fractal com papel qualquer erro pode levar a ter que começar tudo de novo, enquanto no aplicativo é só arrumar.

Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples e permite alcançar um nível de detalhes teoricamente infinito, coisa que as limitações do papel não permitem.

#### DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA

I. Vamos ter sempre que calcular a metade de um dos lados dos triângulos para formar mais triângulos. No celular, temos um ponto positivo de poder fazer um fractal infinitamente, já que podemos dar um zoom para continuar a fazer o fractal.

II. Sim. Um ponto positivo de construir um fractal é a diversão e um negativo é que quando estamos construindo o fractal com papel qualquer erro pode levar a começar tudo de novo, enquanto no aplicativo é só arrumar.

III. Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples e permite alcançar um nível de detalhes teoricamente infinito, coisa que as limitações do papel não permitem.





Fonte: Autoras

Construir o mesmo padrão fractal com materiais manipuláveis e com tecnologias digitais contribuiu para que os alunos percebessem a relevância do aplicativo para que a construção geométrica ocorresse de forma mais prática e complexa. Os alunos destacaram que, no aplicativo, em caso de erro, bastava desfazer o equívoco e prosseguir. O mesmo não ocorre no papel, pois um corte errado ou um vinco mal feito comprometia a construção, não deixando outra alternativa a não ser recomeçar. Além disso, os alunos destacaram que, no aplicativo, é mais prático ampliar a construção e continuar a construir níveis, aproximando de um determinado trecho construído. Essas observações ressaltaram a utilidade do GeoGebra e do *smartphone* na construção e na exploração das propriedades dos fractais.

A questão seguinte teve por enunciado: “Questão 3: Preencha a tabela, observando a construção do Triângulo Sierpinski que realizamos”. A maioria dos alunos analisou o número de triângulos e a relação com os lados e a área correspondente em cada nível. Essa quantidade seguia uma progressão geométrica representada pela sequência  $\{1, 3, 9, 27, \dots, 3^n\}$ , sendo “n”

o nível de interação do fractal (coluna 3 da tabela representada na figura 5). O lado do triângulo, por sua vez, diminuía ao longo dos níveis de modo que o lado do triângulo de cada novo nível correspondia à metade do lado do triângulo do nível anterior, podendo ser escrito como  $\frac{l}{2^n}$  ou  $l \cdot 2^{-n}$ , onde  $l$  representava o lado do triângulo no nível  $n$ . Por fim, na tabela, era representado que a área, reduzida a um quarto da anterior em cada nível, era representada por  $\frac{l^2 \sqrt{3}}{4^{n+1}}$ . A maior parte dos alunos conseguiu identificar os valores correspondentes para novos triângulos para a medida do lado de cada triângulo e para a área de cada triângulo destacado até o nível 3. Contudo, os alunos tiveram dificuldades para preencher todas as células da tabela de forma generalizada e encontrar as respostas para o nível  $n$  que representa um nível qualquer. Ainda assim, alguns preencheram corretamente de forma idêntica ou parecida com a realizada pelo aluno, conforme registro na figura 5.

Figura 5: Resposta de um aluno na terceira questão da Atividade Triângulo de Sierpinski.

Iteração	Imagem	Triângulos destacados	Medida do lado de cada triângulo	Área de cada triângulo destacado
0		1	$l$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$
1		3	$\frac{l}{2}$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{16}$
2		9	$\frac{l}{4}$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{64}$
3		27	$\frac{l}{8}$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{256}$
( $n=4$ )		$3^n$	$l \cdot 2^{-n}$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4^{n+1}}$
$L_0$		$3^4 = 81$	$\frac{l}{2^4} = \frac{l}{16}$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4^{4+1}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{1024}$

Fonte: Autoras

A forma generalizada de escrita matemática de padrões pode não revelar dificuldades de entendimento do padrão propriamente dito. Essas dificuldades, muitas vezes, são oriundas de dúvidas que os alunos apresentavam sobre a linguagem ou sobre cálculos matemáticos em geral. Por isso, Zazkis e Liljedahl (2002) destacam que é importante apresentar aos alunos abordagens de padronização provenientes da observação e da verbalização das generalizações, com a finalidade de registrá-las matematicamente.

Nessa atividade, o aplicativo viabilizou a exploração das características de um nível

particular, bem como sua comparação aos estágios anteriores e posteriores, abrindo caminho para a representação matemática dos diversos níveis envolvidos, especificidades relativas à propriedade de autossimilaridade. Além disso, a versatilidade do GeoGebra em relação à visualização, construção e manipulação de fractais em vários níveis, favorecido pelo dinamismo desse aplicativo, permitiu que os alunos interagissem com a propriedade que levam o fractal a repetir infinitamente sua estrutura original ao longo das iterações: a complexidade infinita.

No encontro seguinte, passamos a construir o Padrão Fractal Tetra Círculo no aplicativo GeoGebra (figura 6) seguindo os passos descritos no quadro 3. O Padrão Fractal Tetra Círculo “[...] é formado a partir de uma circunferência. Nela são marcados quatro pontos que a dividem em quatro arcos congruentes e que são centros de quatro novas circunferências de raios iguais a metade do raio das circunferências formadas no nível anterior” (FARIA, 2012, p.38).

Figura 6: Alunos construindo o Padrão Fractal Tetra Círculo com o aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autoras

Quadro 3: Primeira questão da Atividade Tetra Círculo.

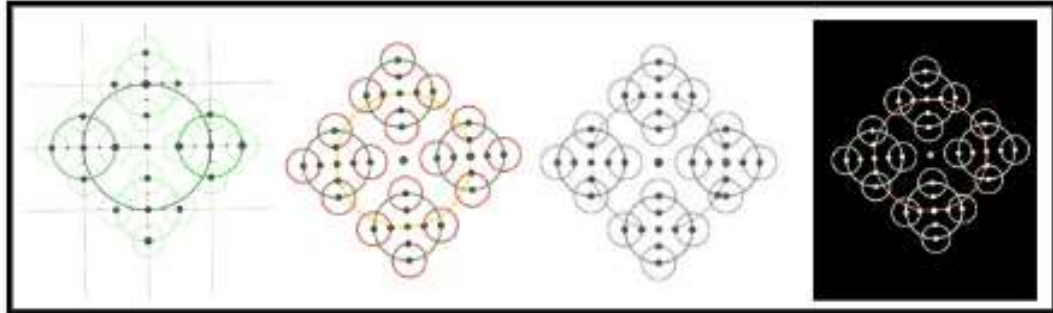
**Questão 1: CONSTRUA O PADRÃO FRACTAL NO APP.**

- a) Limpe a construção anterior e selecione em configurações -> geral -> rotular -> menos para os objetos novos.
- b) Crie um círculo de raio qualquer com a ferramenta Círculo dados centro e um de seus pontos (nível 0).
- c) Crie uma reta passando pelo centro e pelo ponto marcado na circunferência.
- d) Construa uma reta perpendicular à reta anterior passando pelo centro da circunferência.
- e) Com a ferramenta de interseção de dois objetos, marque os pontos de interseção das retas com a circunferência.
- f) Use a ferramenta ponto médio para marcar os pontos médios de cada raio.
- g) Construa 4 circunferências cujo o centro seja a interseção marcada no item “e” e o raio seja a metade do raio da circunferência do nível anterior.
- h) Com os passos anteriores, construímos o nível 1 do Padrão Fractal Tetra Círculo. Para construir os próximos níveis, repita os passos do e ao g em cada uma das circunferências criadas.
- i) Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível. Se necessário, dê zoom (faça o movimento de pinça) em partes do fractal.
- j) Para melhor visualização, esconda os objetos que não fazem parte do fractal. Para destacar os níveis formados, mude a cor das circunferências de acordo com sua preferência de modo que as novas circunferências de cada nível fiquem com a mesma cor.

Fonte: Autoras

Os alunos construíram esse padrão fractal apresentando poucas dificuldades. As dúvidas estavam restritas apenas à localização de algumas ferramentas no GeoGebra (figura 7).

Figura 7: Padrão Fractal Tetra Círculo construído por alunos com o aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autoras

Dando continuidade, na segunda questão foi solicitado que observassem o Tetra Círculo representado em três níveis e descrevessem o seu processo de construção (quadro 4).

Quadro 4: Primeira questão da Atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 2: Observe o Tetra Círculo representado em 3 níveis. Como você descreveria o processo de construção deste padrão fractal?

Fonte: Autoras

Como apresentado na figura 8, um aluno notou que o Tetra Círculo é uma figura simétrica. Um segundo caracterizou o processo de construção como dinâmico e divertido e um terceiro aluno percebeu que, para cada círculo, surgiam mais quatro ao longo das iterações.

Figura 8: Respostas da segunda questão da Atividade Tetra Círculo.

Simétrico
Um processo dinâmico e divertido
A cada 1 círculo surgem 4
<b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b>
I. Simétrico.
II. Um processo dinâmico e divertido.
III. A cada um círculo surgem 4.

Fonte: Autoras

Na terceira questão, foi solicitado aos alunos que registrassem os elementos presentes nas Artes e na Matemática identificados no processo de criação do Padrão Fractal Tetra Círculo (quadro 5).

Quadro 5: Terceira questão da Atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 3. Quais elementos presentes na arte e na matemática você consegue identificar no processo de criação desse padrão fractal?

Fonte: Autoras

Um aluno identificou os padrões e as formas geométricas na Matemática. Já nas Artes, registrou a estilização e as cores. Dentre os elementos destacados por esse aluno, a estilização ainda não havia sido citada. Nas Artes, estilizar está relacionado à criação de um estilo próprio, singular e original capaz de atribuir detalhes a uma figura ou a uma peça. Esse processo foi realizado com os fractais construídos (MOREIRA, 2018), uma vez que cada aluno teve autonomia para atribuir a medida desejada, além de escolher a espessura e as cores, características que contribuiriam para criar figuras únicas.

Outro aluno citou alguns dos conceitos matemáticos utilizados na construção do fractal como ponto médio, retas, retas perpendiculares, círculos e proporção. Nas Artes, destacou as cores utilizadas para criar diferentes efeitos visuais e combinações, o tom relacionado à maior ou menor quantidade de luz presente na cor, a forma que indica se um objeto é tridimensional no espaço e o ponto que é a unidade básica da identidade visual.

Um terceiro aluno destacou que, para elaborar o fractal, utilizou conceitos geométricos e cores diferentes (quadro 6).

Quadro 6: Respostas da terceira questão da Atividade Tetra Círculo.

<p>formas geométricas, e na arte temos a estilização e as cores.</p>
<p>na matemática: ponto médio, retas, retas perpendiculares, círculos e proporção na arte: cores, tom, forma e ponto.</p>
<p>O fractal se utiliza de conceitos da geometria no caso da matemática. Na arte temos as cores diferentes.</p>

**DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA**

- I. Na matemática, temos os padrões e as formas geométricas e na arte temos a estilização e as cores.  
 II. Na matemática: ponto médio, retas, retas perpendiculares, círculos e proporção. Na arte: cores, tom, forma e ponto.  
 III. O fractal se utiliza de conceitos da geometria no caso da matemática. Na arte temos as cores diferentes.

Fonte: Autoras

Assim como os três alunos cujas respostas foram descritas no quadro 6, diversos alunos pontuaram sobre as cores. A cor se destaca nas Artes, pois é utilizada nas mais variadas circunstâncias e pode ser entendida como “[...] a sensação provocada pela ação da luz sobre o órgão da visão. As cores só existem se pelo menos três componentes estiverem presentes: observador (visão), objeto e luz” (COSTA, 2015, p.12).

Na quarta questão foi solicitado que os alunos descrevessem o processo de iteração do Padrão Fractal analisado, utilizando, nessa descrição, os elementos listados no item anterior (quadro 7).

Quadro 7: Quarta questão da Atividade Tetra Círculo.

**QUESTÃO 4.** De que maneira poderíamos descrever o processo de iteração desse Padrão Fractal, utilizando nessa descrição os elementos listados no item anterior?

Fonte: Autoras

Um aluno afirmou que, a partir do círculo inicial, foi possível criar outros, mas acrescentou que esse processo deve ser feito utilizando outras construções geométricas como suporte. Um segundo aluno registrou que era preciso criar circunferências utilizando retas e pontos para auxiliar na construção que são conceitos geométricos. Destacou, ainda, que é necessário utilizar cores diferentes para distinguir e identificar os níveis. Um terceiro aluno afirmou que foi preciso criar circunferências que, em cada novo nível, apresentavam raio com metade da medida do raio das circunferências do nível anterior. Também destacou que essas

novas circunferências eram feitas sobre os cantos de uma circunferência maior do nível anterior. Esclarecemos que, ao mencionar os cantos da circunferência, o aluno está se referindo aos quatro pontos equidistantes marcados, afinal, uma circunferência não é um polígono e, portanto, não tem vértices ou cantos (quadro 8).

Destacamos, ainda, que mesmo de forma implícita, houve contribuição para a disciplina de informática na construção deste padrão fractal. Por meio das ferramentas do aplicativo, as potencialidades das tecnologias digitais foram evidenciadas. A representação gráfica do fractal Tetra Círculo foi otimizada pela informática, se mostrando capaz de exibir soluções precisas e esteticamente belas.

Quadro 8: Respostas da quarta questão da Atividade Tetra Círculo.

<p>um círculo gera outro, mas necessita de suporte das retas para isso, que por sua vez precisa de pontos.</p>
<p>No campo da geometria temos a utilização de circunferências, de retas e de pontos. Na arte, a utilização de cores diferentes em cada nível nos ajuda a identificá-los com mais clareza.</p>
<p>Circunferências com metade do raio dispostas sobre os quatro cantos de uma circunferência maior do nível anterior.</p>
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b>  I. Um círculo gera outro, mas necessita de um suporte das retas para isso, que por sua vez precisa de pontos.  II. No campo da geometria, temos a utilização de circunferências, de retas e de pontos. Na arte, a utilização de cores diferentes em cada nível nos ajuda a identificá-los com mais clareza.  III. Circunferências com metade do raio dispostas sobre os quatro cantos de uma circunferência maior do nível anterior.</p>

Fonte: Autoras

Dificuldades como essa demonstram que, para os alunos, manifestar-se matematicamente pode não ser simples. As dificuldades em geometria são frequentemente influenciadas por fatores individuais e de aprendizado. Por ser uma área da Matemática que se baseia em conceitos fundamentais, caso não haja uma compreensão sólida desses conceitos, pode ser difícil apresentar domínio com relação à visualização, à representação e à linguagem geométrica (ROGENSKI; PEDROSO, 2009).

Sobre o Tetra Círculo criado no GeoGebra, no item “a” da quinta questão foi solicitado que os alunos descrevessem a sensação de criar esse Padrão Fractal (quadro 9).

Quadro 9: Quinta questão da Atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 5. Sobre o Padrão Fractal Tetra Círculo criado no GeoGebra:

- a) Descreva a sensação que a criação dele te traz  
b) Após pronto, ao contemplar a figura criada, quais sensações você descreveria?

Fonte: Autoras

Um aluno registrou que se sentiu satisfeito e relaxado. Podemos perceber que a atividade atendeu suas expectativas e houve um contentamento de ter concluído a atividade. Outro aluno também adjetivou a atividade como relaxante e um terceiro achou o processo simples e, ao seguir cada etapa, sentiu-se satisfeito, pois o resultado era proporcional ao seu esforço (quadro 10).

Quadro 10: Respostas do item a da quinta questão da Atividade Tetra Círculo.

Entusiasmado, valorizante
Dizem que foi bem relaxante.
É um processo simples que causa uma satisfação proporcional quando conseguimos seguir os passos.
<p><b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b></p> <p>I. Satisfatório e Relaxante. II. Diria que foi bem relaxante. III. É um processo simples que causa uma satisfação proporcional quando conseguindo seguir os passos.</p>

Fonte: Autoras

No item “b” da quinta questão, ao contemplar a construção do Padrão Fractal Tetra Círculo, foi solicitado que registrassem as sensações experimentadas durante a observação. Um aluno destacou a sensação de conquista proveniente da conclusão de um objetivo. Outro aluno registrou admiração pela construção realizada. Um terceiro aluno descreveu que sentiu uma satisfação proporcional à dificuldade de realizar a atividade (quadro 11).

Quadro 11: Respostas do item “b” da quinta questão da Atividade Tetra Círculo.

Conquista, uma meta concluída e um objetivo alcançado
Um sentimento de admiração pelo que foi criado
Satisfação proporcional a dificuldade do trabalho
<b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b>
I. Conquista, uma meta concluída e um objetivo alcançado.
II. Um sentimento de admiração pelo que foi criado.
III. Satisfação proporcional as dificuldades do trabalho.

Fonte: Autoras

As respostas dos alunos revelaram que, construir o Padrão Fractal no aplicativo GeoGebra foi desafiador e, ao mesmo tempo, prazeroso. Eles afirmaram que, apesar da complexidade, realizar a construção foi relaxante e trouxe as sensações de conquista, admiração e satisfação, despertando emoções de prazer e bem-estar.

Ao longo da realização dessa questão, foi possível observar vários alunos retornando à construção realizada no aplicativo. A visualização favorecida pelo GeoGebra permitiu que, de maneira muito próxima, o aluno construísse e interagisse com a construção finalizada, observando detalhes e características que tornam o Padrão Fractal singular.

Na questão 6 que finaliza a atividade, foi pedido aos alunos que, observando a construção do Tetra Círculo, preenchessem a tabela (quadro 12).

Quadro 12: Sexta questão da Atividade Tetra Círculo.


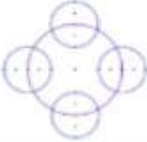

<p>QUESTÃO 6. Preencha a tabela observando a construção do Tetra Círculo que realizamos.</p> <p>a) De acordo com a tabela, podemos identificar um padrão para a quantidade de circunferências ao avançar dos níveis?</p> <p>b) E para as medidas dos raios das novas circunferências construídas em cada item?</p> <p>c) Você consegue identificar uma sequência lógica na construção do Tetra Círculo Comente sobre pontos positivos e negativos (caso haja), de construir esse padrão fractal no aplicativo GeoGebra?</p>
---

Fonte: Autoras

Diferentemente do que ocorreu na atividade realizada com o Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski, n todos os alunos conseguiram preencher corretamente a tabela do Padrão Fractal Tetra Círculo. Eles perceberam que cada círculo possuía raio com a metade da medida das circunferências geradas no nível anterior. Registraram ainda que, a cada interação, quatro

novos círculos eram gerados em cada um dos criados no nível anterior (figura 9).

Figura 9: Tabela da sexta questão da Atividade Tetra Círculo preenchida por um aluno.

Interação	imagem	Quantidade de circunferências	Medida do Raio
0		1	r
1		5	r/2
2		24	r/4

Fonte: Autoras

A partir da tabela preenchida no item “a” da sexta questão, foi solicitado que os alunos respondessem os demais itens. No “a”, um aluno registrou que havia um padrão e outro que não havia. A maior parte dos alunos reconheceu o padrão e registrou como o primeiro aluno. Poucos alunos não perceberam que havia um padrão. De forma generalizada, apenas um aluno respondeu que existia um padrão que poderia ser escrito como  $\sum_{l=1}^n (4^l) = f(n)$ . De fato, a quantidade de circunferências é: 1 no nível 0 (nível inicial), 5 no nível 2, 21 no nível 3 e assim por diante. Essa sequência  $\{1, 5, 21, \dots\}$  pode ser escrita como  $\{4^0, 4^0+4^1, 4^0+4^1+4^2, \dots\}$  e definida como o somatório apontado pelo aluno (figura 10).

Figura 10: Respostas do item “a” da sexta questão da Atividade Tetra Círculo.

Sim.
mas tem um padrão.
Sim. $\sum_{l=0}^n (4^l) = f(n)$
<b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b> I. Sim. II. Não tem um padrão. III. Sim. $\sum_{l=1}^n (4^l) = f(n)$

Fonte: Autoras

No item “b” dessa questão, foi solicitado aos alunos as medidas dos raios das novas circunferências construídas em cada item. Todos os alunos perceberam que existia um padrão e que o raio das novas circunferências era a metade do raio da circunferência do nível anterior (quadro 13).

Quadro 13: Respostas do item “b” da sexta questão da Atividade Tetra Círculo.

Temos um padrão, o raio é dividido pela metade do anterior
Sim. É sempre a metade do valor da anterior
Sim. É sempre a metade do valor anterior
<b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b> I. Temos um padrão, o raio é dividido pela metade do anterior. II. Sim. É sempre a metade do valor anterior. III. Sim. É sempre a metade do valor anterior.

Fonte: Autoras

No item “c” dessa questão, foi solicitado aos alunos que identificassem uma sequência lógica na construção do Tetra Círculo e comentassem sobre pontos positivos e negativos de construir esse Padrão Fractal no aplicativo GeoGebra. Um aluno registrou que uma vantagem é poder criar padrões repetidas vezes.

Outro aluno mencionou que é mais fácil montar o fractal usando o aplicativo GeoGebra graças às ferramentas que este aplicativo oferece. Nos chamou a atenção essa colocação, pois o aluno estava comparando a construção no aplicativo às construções com materiais manipuláveis. No entanto, esse fractal não foi construído com materiais manipuláveis nos encontros anteriores, como fizemos com o Triângulo de Sierpinski.

O aluno afirmou, ainda, que “é uma pena não poder expor ele depois”, apontando uma desvantagem no uso do *smartphone*. Segundo este estudante, a utilização do papel facilita a exposição para os demais colegas da turma.

Um terceiro aluno afirmou que a utilização do aplicativo GeoGebra é considerado mais viável, pois permite fazer quantos níveis desejar, transmitindo a sensação de infinito e favorecendo a compreensão de alguns conceitos de geometria. A expressão “mais viável” também é comparativa, podendo ser entendida como “trabalhar com *smartphone* é mais viável do que trabalhar com materiais manipuláveis” (quadro 14).

Quadro 14: Respostas do item “c” da sexta questão da Atividade Tetra Círculo.

O padrão fractal construído no aplicativo tem como vantagem poder fazer quantas vezes quisermos.
Sim. É bem mais fácil montar fractais pelo GeoGebra graças as ferramentas dele mas é uma pena não poder expor ele depois.
Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples e permite alcançar um nível de detalhes teoricamente infinito. Além de permitir entender mais a matemática e geometria por trás.
<b>DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA</b> I. O padrão fractal construído no aplicativo tem como vantagem poder fazer quantas vezes quisermos. II. Sim. É bem mais fácil montar fractais pelo GeoGebra graças as ferramentas dele, mas é uma pena não poder expor ele depois. III. Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples e permite alcançar um nível de detalhes teoricamente infinito. Além de permitir entender mais a matemática e geometria por trás.

Fonte: Autoras

Entendemos, portanto, que por meio do aplicativo GeoGebra, exploramos a criatividade dos alunos na construção de Padrões Fractais. Deste modo, foi possível aguçar o interesse e promover o engajamento dos alunos, “(...) convidando-os a criar, inventar, explorar e resolver problemas complexos num mundo cada vez mais conectado e global” (MOURA, 2016, p. 166).

Com base na produção de dados da pesquisa, afirmamos que a aprendizagem no Ensino Médio é favorecida por meio da integração de conteúdos pertinentes às disciplinas de Artes, Matemática e Informática, aliados a métodos de aprendizagem que posicionem o aluno como sujeito ativo. Para isso, é necessário a utilização de recursos como tecnologias digitais, uma vez que elas são capazes de favorecer um ambiente educacional dando-lhe aspecto dinâmico e integrador.

## 7. Considerações Finais

Este artigo objetivou investigar como o estudo de Padrões Fractais aliado às tecnologias digitais podem contribuir para aprendizagem interdisciplinar de alunos do Ensino Médio. Consideramos que o objetivo proposto foi alcançado, pois demonstramos que a abordagem

interdisciplinar dos Padrões Fractais, englobando Informática, Artes e Matemática, desempenhou um papel essencial ao permitir que os alunos desenvolvessem uma percepção abrangente de padrões, de infinitude e de tridimensionalidade. Esta abordagem estimulou a capacidade de análise estética e enriqueceu a construção de conhecimentos relevantes nas disciplinas supracitadas.

Destacamos que a colaboração entre os alunos contribuiu para que a aprendizagem ocorresse de forma coletiva. As discussões em equipe estimularam a troca de ideias e a construção conjunta do conhecimento, promovendo habilidades sociais como comunicação e cooperação, ao mesmo tempo em que reforçou os conceitos aprendidos.

As propriedades de complexidade infinita e de autossimilaridade, presentes nos Padrões Fractais Tetra Círculo e Triângulo de Sierpinski, permitiram a exploração de conceitos pertinentes às disciplinas envolvidas na pesquisa. Na Matemática, os Fractais foram apresentados como objetos geométricos fascinantes e desafiadores. Nas Artes, foram usados para criar padrões visuais intrigantes e detalhados. Já na Informática geraram imagens realistas e recursivas. Assim, as propriedades estudadas proporcionaram a contemplação da estética nas harmonias, proporções e simetrias presentes nas regularidades desses padrões.

Quanto às tecnologias digitais, é possível ponderar que o *smartphone* contribuiu para apresentar uma visualização impactante, interativa e dinâmica dos Padrões Fractais. O GeoGebra, especificamente, possibilitou a criação e exploração dos Fractais de modo detalhado, em alta resolução e em diferentes escalas e ângulos. Destacamos, no processo de construção de fractais, a ferramenta *zoom* que permitiu a construção e exploração dinâmica de níveis mais avançados.

Outro fator positivo do aplicativo é a capacidade de corrigir, de forma simples, pequenos erros nas construções se comparado às construções realizadas com materiais manipuláveis. Deste modo, com os recursos do GeoGebra, foi possível criar figuras esteticamente atraentes, capazes de expandir horizontes de maneiras criativa e interativa, permitindo que os alunos se envolvessem ativamente e descobrissem detalhes dos fractais.

Assim, evidenciamos que a incorporação dos Padrões Fractais neste estudo desempenhou um papel significativo na promoção da educação cidadã crítico-reflexiva dos estudantes, o que contribuiu para instigar uma análise ponderada sobre a posição de cada pessoa na sociedade.

## Referências

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo

Horizonte: Autêntica, 2006.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. *In*: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 101-113. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

CALDAS, F. R.; HOLZER, D. C.; POPI, J. A. A interdisciplinaridade em arte: algumas considerações. **Revista Nupeart** v.17, 2017. Disponível em: <https://revistas.udesc.br/index.php/nupeart/article/view/9839/7561>. Acesso em: 05 jan. 2023.

COSTA, D. C. **Potencialidades do uso do celular na matemática escolar**: atividades investigativas de função exponencial. 2023. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2023.

COSTA, E. C. F. **Cores**: processo e aprendizados de artes visuais. Monografia (Especialização em Ensino de Artes Visuais). 2015. 36f. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2015. Disponível em: [https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUOS-AN5LAK/1/monografia\\_finalizada\\_\\_17\\_10\\_2016\\_\\_pdf.pdf](https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUOS-AN5LAK/1/monografia_finalizada__17_10_2016__pdf.pdf). Acessado em: 06 jan. 2023.

DIAS, G. A.; CAVALCANTI, R. A. As tecnologias da informação e suas implicações para a educação escolar: uma conexão em sala de aula. **Revista de Pesquisa Interdisciplinar**, v. 1, Ed. especial, p. 160-167, 2016. DOI: <https://doi.org/10.24219/rpi.v1iEsp.80>. Disponível em: <https://cfp.revistas.ufcg.edu.br/cfp/index.php/pesquisainterdisciplinar/article/view/80>. Acesso em: 10 jan. 2023.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Padrões fractais: conectando matemática e arte. **Eccos Revista Científica**, v. 1, p. 33-53, 2012. Disponível em: <https://periodicos.uninove.br/eccos/article/viewFile/3484/2268>. Acesso em: 14 jan. 2023.

FARIA, R. W. S. **Padrões fractais**: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. 2012. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2012. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/4090b78d-acf2-4921-a22b-3777b004b851>. Acesso em: 17 jan. 2023.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Raciocínio proporcional na matemática escolar. **Revista Educação em Questão**, 58(57). 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/20024>. Acesso em: 25 jan. 2023.

FAZENDA, I. C. A. Interdisciplinares: definição, projeto, pesquisa. *In*: FAZENDA, I. C. A. (org.). **Práticas interdisciplinares na escola**. São Paulo: Cortez, 1993.

LEFF, E. Complexidade, interdisciplinaridade e saber ambiental. *In*: PHILIPPI JR, Arlindo (org.), **Interdisciplinaridade em Ciências Ambientais**. p. 22-50. São Paulo: Signus, 2000.

MIRANDA, T. G.; FILHO, T. A. G. **O professor e a educação inclusiva**. Editora EDUFBA/ Salvador, 2012.

MOREIRA, V. C. **Arte e Ilustração**. 1ª ed. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018. v. 1. 208p.

MOURA, A. Aplicativos para Aprendizagem Baseada em Projetos. *In*: COUTO, E.; PORTO, C.; SANTOS, E. (orgs.). **App-Learning**: experiências de pesquisa e formação. Salvador: EDUFBA, 2016.

MULLER, S. A. P. **Inclusão digital e escola pública**: uma análise da ação pedagógica e da informática na educação. 2005. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Porto Alegre, Porto Alegre, 2005.

PERAZZO, L. F; VALENÇA, M. T. **Elementos da Forma**. Rio de Janeiro: Ed. Senac Nacional, 1997.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RIBEIRO, A. E. Termos de Alfabetização, Leituras e Escritas para Educadores. *In*: Isabel Cristina Alves da Silva Frade, Maria da Graça Costa Val, Maria das Graças de Castro Bregunci (orgs). **Glossário Ceale**. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2014. Disponível em: <https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossario-ceale.html>. Acesso em: 09 fev. 2023.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades. 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2023.

ROQUE, R. D. **Padrões fractais, tecnologias digitais e interdisciplinaridade**. Relatório (Iniciação Científica em Educação Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2023.

SANTOS, R. S.; KRIPKA, R. M. L. **Estudo de padrões fractais no ensino fundamental**: uma introdução ao estudo da geometria. Série Educar- Volume 15, Matemática. 1ªed. Belo Horizonte: Editora Poisson, v. 15, p. 140-147, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.36229/978-65-86127-00-3.CAP.19>. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/339731852\\_Estudo\\_de\\_padroes\\_fractais\\_no\\_ensino\\_fundamental\\_Uma\\_introducao\\_ao\\_estudo\\_da\\_geometria](https://www.researchgate.net/publication/339731852_Estudo_de_padroes_fractais_no_ensino_fundamental_Uma_introducao_ao_estudo_da_geometria). Acesso em: 13 fev. 2023.

THIESEN, J. S. A interdisciplinaridade com um movimento articulador no processo de ensino-aprendizagem. *In*: **Revista Brasileira de Educação**. v. 13, n.39, set/dez 2008. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1413-24782008000300010>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/swDcnzst9SVpJvpx6tGYmFr/>. Acesso em: 22 fev. 2023.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHN, P. Generalization of Patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 49, n. 3, p. 379-402, Springer, 2002.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, investigamos as contribuições interdisciplinares da exploração estética dos Padrões Fractais para alunos do Ensino Médio integrado ao curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*. Enfatizamos que a pesquisa se justifica por evidenciar as contribuições que a exploração estética dos Padrões Fractais traz à formação cidadã crítico-reflexiva dos alunos participantes da pesquisa.

Com caráter qualitativo, a produção dos dados da pesquisa ocorreu em duas etapas. A primeira com os professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática, e na segunda com alunos do curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus Muriaé*. Com os professores, tivemos o intuito de integrá-los com a proposta da pesquisa e aprimorar as atividades. Com os alunos, realizamos as atividades utilizando materiais manipuláveis e o aplicativo GeoGebra a fim de investigar as contribuições da exploração interdisciplinar dos Padrões Fractais.

Após uma minuciosa leitura e revisão dos dados coletados, procedemos a análise que resultou em três artigos. Deste modo, buscamos explorar e refletir sobre as descobertas que emergiram desses resultados, conscientes de que as discussões não se limitam a esta dissertação. Nesse sentido, almejamos que este estudo possa enriquecer a compreensão das possibilidades de incorporar materiais manipuláveis e tecnologias móveis digitais, especialmente o celular, no contexto da sala de aula em uma perspectiva investigativa e interdisciplinar.

Quanto ao primeiro objetivo específico, este estudo consistiu em debater o trabalho interdisciplinar com professores atuantes nas disciplinas de Artes, Informática e Matemática, na busca de garantir a perspectiva interdisciplinar e de aprimorar as atividades elaboradas. Os resultados indicaram que atividades podem ser aprimoradas por meio do trabalho interdisciplinar com discussões que mobilizam o conhecimento específico de cada docente em sua disciplina. Nossa experiência revelou que são os professores que conhecem a realidade da instituição de ensino e dos seus alunos, o que permite que sejam realizadas interferências estratégicas quanto à relevância, eficiência e factibilidade das atividades.

Estudos posteriores poderiam incluir problematizações concernentes à importância da reflexão e da autonomia dos docentes em relação ao planejamento integrado e interdisciplinar que rompe com os materiais “estruturados” impostos pelas secretarias de educação estaduais e municipais. Além disso, é necessário ressaltar também sobre a importância de ouvir e

respeitar os colegas de trabalho, pois nenhum conhecimento se sustenta por si só. É imperioso perceber e aceitar a incompletude das ciências, ou melhor, dos conhecimentos de cada uma das disciplinas que integra conhecimentos específicos de outras disciplinas para que um conceito seja construído pelos estudantes.

O segundo objetivo específico consistiu em discutir as contribuições da exploração interdisciplinar dos padrões fractais com materiais manipuláveis para alunos do Ensino Médio. Afirmamos que a exploração interdisciplinar dos fractais com materiais manipuláveis, envolvendo as disciplinas de Informática, Artes e Matemática contribuiu para que os alunos pudessem ter uma compreensão globalizada de padrões, infinitude e tridimensionalidade, aguçando a capacidade de análise estética e contribuindo para a construção de conhecimentos pertinentes às disciplinas envolvidas.

No caso dos padrões fractais, foi possível identificar que as propriedades de autossimilaridade e de complexidade infinita proporcionaram a contemplação da estética nas harmonias, proporções e simetrias presentes nas regularidades desses padrões. Ademais, o trabalho com tais propriedades contribuiu para a formação cidadã crítico-reflexiva dos alunos, colaborando para que eles refletissem sobre o papel de cada indivíduo na sociedade e no mundo.

Por fim, o terceiro objetivo específico consistiu em investigar como o estudo de padrões fractais com tecnologias digitais podem contribuir para aprendizagem interdisciplinar de alunos do Ensino Médio. Nossas conclusões apontam que a abordagem utilizada estimulou a capacidade de análise estética e enriqueceu a construção de conhecimentos relevantes nas disciplinas em questão.

Quanto às tecnologias digitais, o *smartphone* contribuiu para apresentar uma visualização impactante, interativa e dinâmica dos Padrões Fractais. O GeoGebra, especificamente, possibilitou a criação e exploração dos fractais de modo detalhado, em alta resolução, em diferentes escalas e ângulos. Percebemos, então, que os Fractais foram capazes de expandir horizontes de maneiras criativa e interativa, permitindo que os alunos se envolvessem ativamente e descobrissem detalhes sobre as propriedades de complexidade infinita e de autossimilaridade.

A abordagem investigativa se mostrou capaz de envolver os alunos em um processo de interação com várias formas de construção do conhecimento relativo aos Padrões Fractais. As atividades investigativas foram concebidas para estimular os alunos a pensar, raciocinar, criticar e explorar as disciplinas e conteúdos envolvidos não apenas através de técnicas, como é comum no ensino tradicional, mas também por meio de um processo de experimentação e

investigação baseado em questões dinâmicas.

A pergunta que norteou a pesquisa foi “Quais contribuições a exploração estética dos Padrões Fractais traz ao ensino de Artes, Informática e Matemática em uma perspectiva interdisciplinar, no contexto do Ensino Médio?”. Os resultados apontaram que as contribuições consistiram em: proporcionar o surgimento das discussões interdisciplinares ; instigar a curiosidade dos alunos por meio da exploração estética dos Padrões Fractais; possibilitar que novos conhecimentos globais e dinâmicos emergjam a partir de ideias investigadas com materiais manipuláveis e tecnologias digitais; mobilizar conhecimentos prévios oriundos das disciplinas envolvidas para construir novas conjecturas; proporcionar a integração das disciplinas de Artes, Informática e Matemática; integrar os professores de diferentes disciplinas na busca de um trabalho colaborativo; engajar os docentes em atividades de planejamento que garantam a perspectiva interdisciplinar e o envolvimento ativo dos alunos; favorecer a interação entre alunos, professores, pesquisadores, conteúdos abordados, materiais manipuláveis e tecnologias digitais.

Nesse contexto, vislumbramos uma interessante contribuição de potencial interdisciplinar da pesquisa para que cada indivíduo expresse suas impressões e, ao mesmo tempo, deixe sua visão fluir e ser aguçada por algo que seja esteticamente belo.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrimo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2006.

BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DENARDIN, E. R. T. ; MELLO, A. R. C. de . Charge: gênero multimodal no letramento dos estudantes do segundo ciclo da Educação Fundamental. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, v.16, n.1, jan/mar 2021. DOI: <https://doi.org/10.21723/riace.v16i1.12676>. Disponível em: <https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/12676>. Acesso em: 12 fev. 2023.

DIAS, A. R. S. Os saberes da experiência e a formação inicial de professoras de língua materna: um repensar da prática pedagógica. In: **Revista Metáfora Educacional** (ISSN 1809-2705) – versão on-line, n. 10, jun 2011. Disponível em: [http://www.valdeci.bio.br/pdf/Dias\\_OS\\_SABERES\\_DA.pdf](http://www.valdeci.bio.br/pdf/Dias_OS_SABERES_DA.pdf). Acesso em: 15 fev. 2023.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Padrões fractais: conectando matemática e arte. **Eccos Revista Científica**, v. 1, p. 33-53, 2012. Disponível em: <https://periodicos.uninove.br/eccos/article/viewFile/3484/2268>. Acesso em: 09 fev. 2023.

FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos**. 2012. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2012. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/4090b78d-acf2-4921-a22b-3777b004b851>. Acesso em: 01 fev. 2023.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Raciocínio proporcional na matemática escolar. **Revista Educação em Questão**, 58(57). 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/20024>. Acesso em: 05 fev. 2023.

FREIRE, P. **Pedagogia da indignação: cartas pedagógicas e outros escritos**. São Paulo: UNESP, 2000.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra, 1970.

FREIRE, P. **Pedagogia do compromisso: América Latina e educação popular**. São Paulo: Paz e Terra. 2018.

FRIGOTTO, G. A interdisciplinaridade como necessidade e como problema nas ciências sociais. In: JANTSCH, A.; BIANCHETTI, L. (orgs.) **Interdisciplinaridade para além da filosofia do sujeito**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

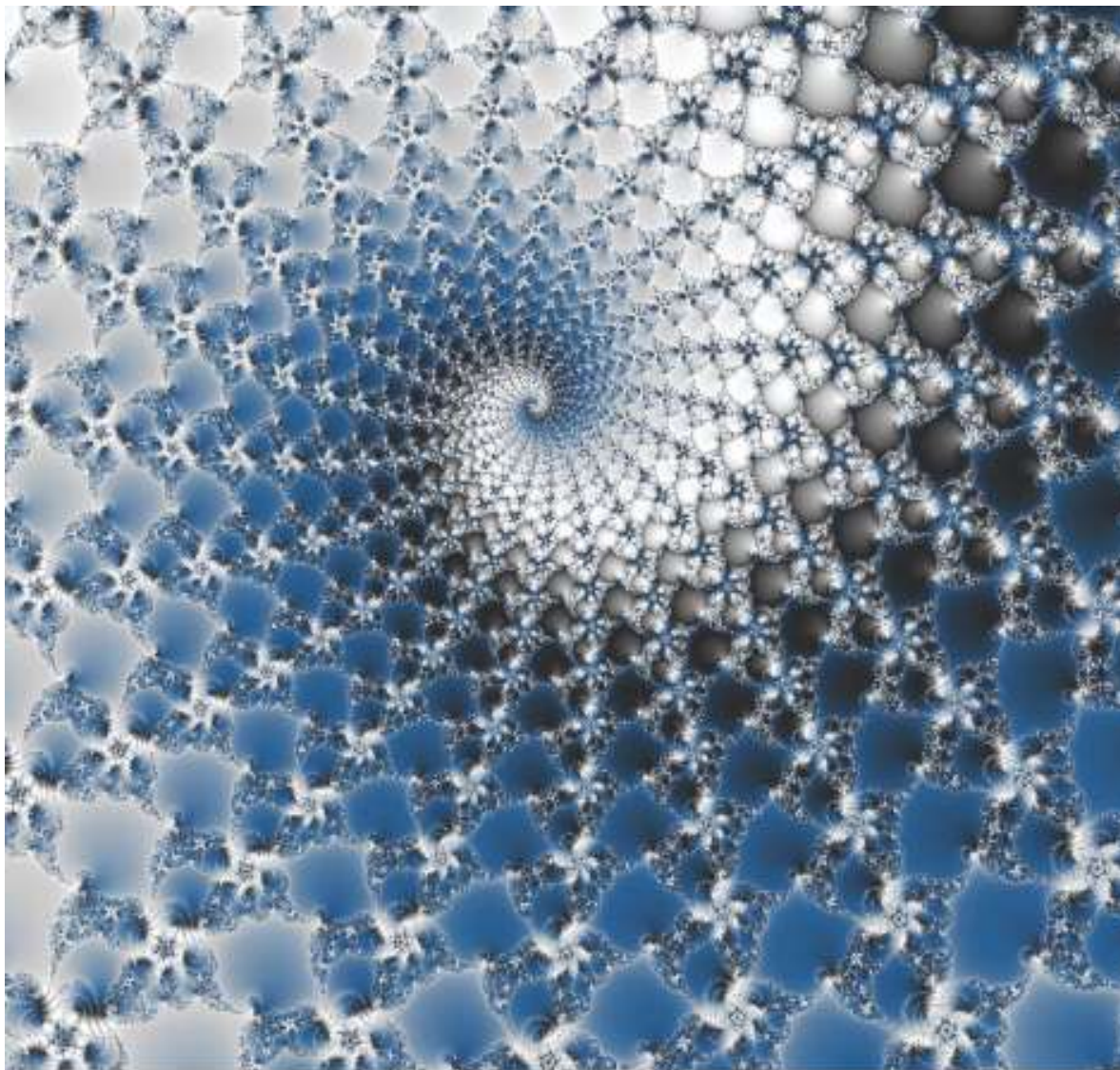
GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

LORENZATO, S. O Uso de Materiais Concretos. *In:* Encontro de Pesquisa em Educação Matemática, (II EpeM), **Anais. DEME - FE - Unicamp**, 1991.

ROQUE, R. D. Padrões fractais, tecnologias digitais e interdisciplinaridade. Relatório (Iniciação Científica em Educação Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2023.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação.** 3ª ed. Florianópolis: UFSC, 2001.

## APÊNDICE A – DESENVOLVENDO O CARTÃO FRACTAL DEGRAUS



## DESENVOLVA O SEU CARTÃO FRACTAL

**Atividades desenvolvidas por:**

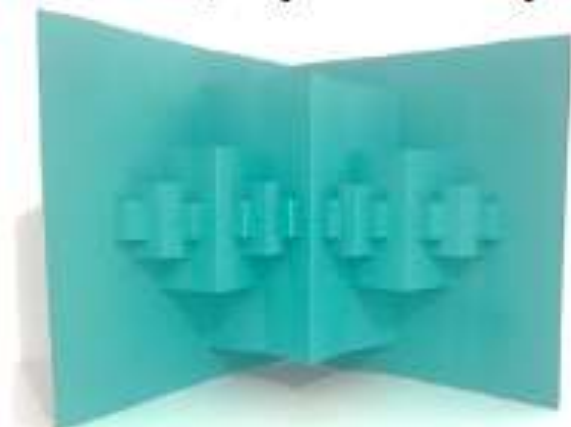
Tatiana Machado Resende Guedes (mestranda)

Renata Dourado Roque (iniciação científica)

Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de  
Carvalho Faria (orientadora)

## CARTÃO FRACTAL DEGRAUS

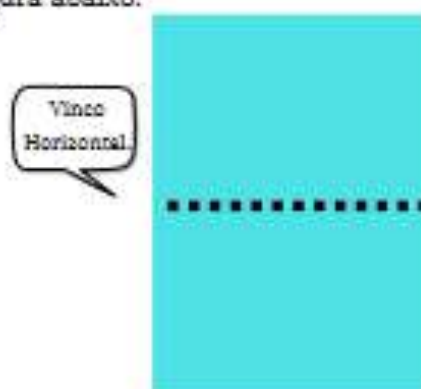
1. Vamos construir o cartão fractal tipo degraus. Ele tem o seguinte formato:



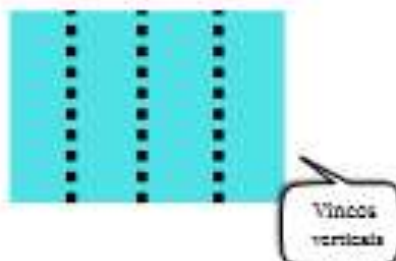
Para confeccioná-lo, vamos precisar de tesoura, lápis, régua, fita adesiva dupla-face ou cola, papel cartão ou outro de gramatura 185 g/m<sup>2</sup>.

Siga os passos:

a) Dobre a folha ao meio horizontalmente fazendo um vinco, no lado mais comprido, como indicado na figura abaixo.



b) Para fazer o primeiro degrau, divida, com vincos suaves, a folha em 4 partes iguais verticalmente, como mostra a figura.



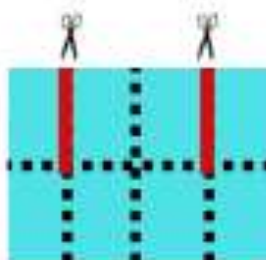
c) Logo após, faça mais um vinco na metade da parte em que estamos trabalhando, agora na horizontal.

Aqui o vinco será na metade da metade, nas duas partes da folha.



d) Corte o papel no primeiro e no terceiro vinco da vertical até o vinco que fizemos na horizontal no item anterior, indicado na figura a seguir por traços vermelhos.

Ação: o corte é no vinco e não na parte aberta da folha.



e) Dobre o retângulo formado para baixo, reforçando o vinco da dobra.



f) Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro, formando a figura em relevo, que é o primeiro degrau do cartão fractal (nível 1).



g) Construa, em uma escala menor, o nível dois seguindo os passos b ao f. Para isso, o segmento de partida deve ser o vinco superior e inferior do retângulo gerado no nível anterior.



h) Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel.



2. Observe o fractal degraus. Como você descreveria o processo de construção?

3. Na construção dos fractais utilizamos elementos presentes na arte e na matemática. Quais desses elementos você consegue identificar no processo de criação desse padrão fractal? Além desses elementos você consegue relacionar com outros? Quais?

4. De que maneira poderíamos descrever o processo de iteração desse padrão fractal, utilizando nessa descrição os elementos listados no item anterior?

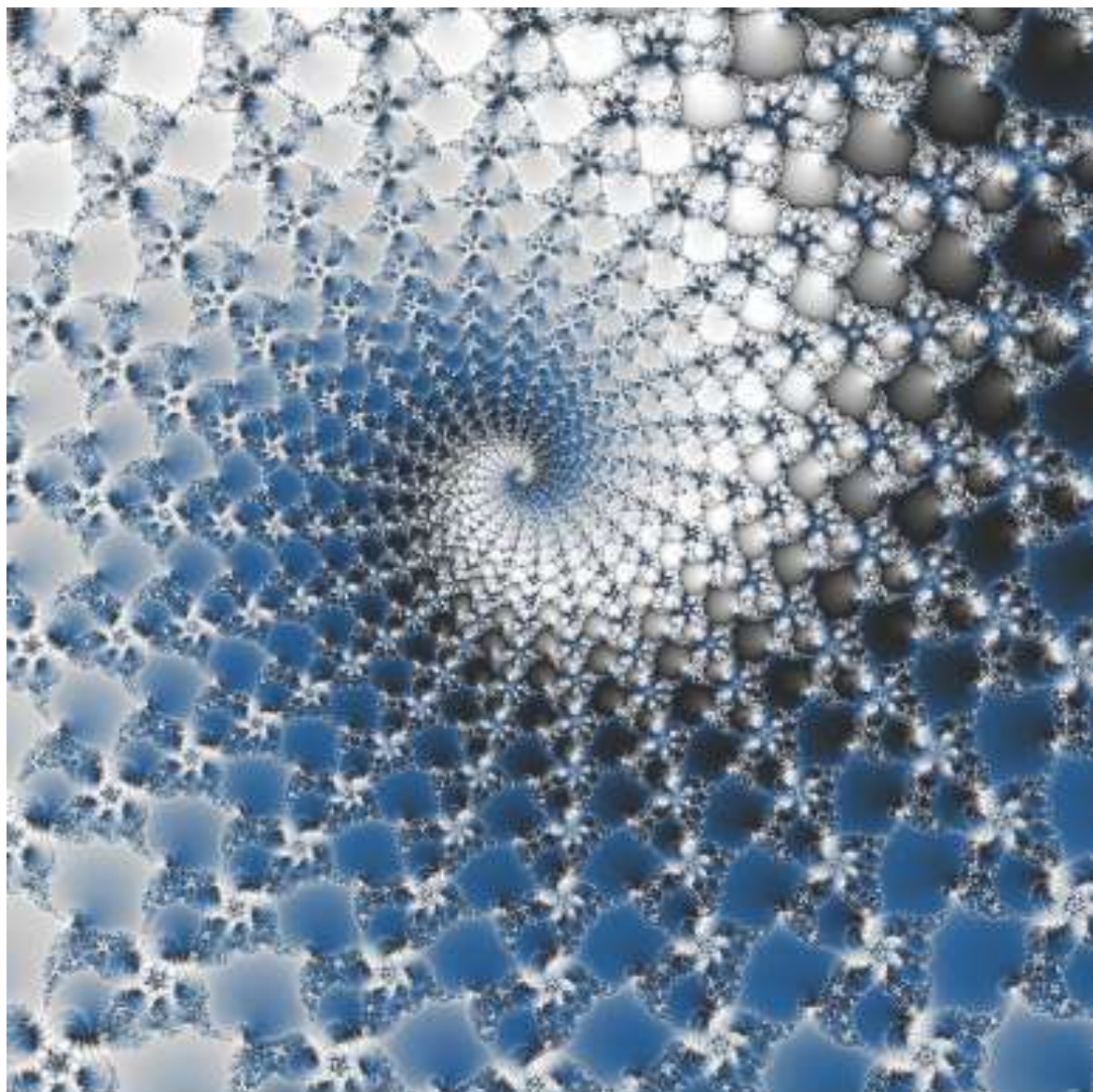
5. O trecho "A partir de um ponto podemos traçar uma linha. A linha é uma sequência de pontos. Essa linha deve ser entendida como força e direção e não apenas como linha de contorno. Isso quer dizer que as linhas direcionam o nosso olhar diante da imagem. Assim, elas também podem gerar sensações psicológicas como paz, agitação, etc." (FONTE: Os Elementos Visuais - Ponto, Linha, Forma e Cor | Falando de Artes - <http://www.falandodeartes.com.br/2016/03/os-elementos-visuais-ponto-linha-forma.html>).

Na construção do padrão fractal degraus, várias linhas são traçadas, que na matemática, quando retas, são chamadas de segmentos.

a) Descreva a sensação que a criação do cartão fractal degraus te traz.

b) Após pronto, ao contemplar a figura criada, quais sensações você descreveria?

## APÊNDICE B – DESENVOLVENDO O CARTÃO FRACTAL TRIÂNGULO DE SIERPINSKI



### DESENVOLVA O SEU CARTÃO FRACTAL

*Atividades desenvolvidas por:*

Tatiana Machado Resende Guedes (mestranda)

Renata Dourado Roque (iniciação científica)

Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de  
Carvalho Faria (orientadora)

## TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

1. Vamos construir o cartão fractal tipo Triângulo de Sierpinski. Ele tem o seguinte formato:



Para confeccioná-lo, vamos precisar de tesoura, lápis, régua, fita adesiva dupla-face ou cola, papel cartão ou outro de gramatura 185 g/m<sup>2</sup>.

Siga os passos:

a) Este fractal é composto por triângulos equiláteros. Para fazer o primeiro nível, vamos construir o primeiro e maior triângulo, cuja altura é a mesma do lado maior do papel. Dobre a folha ao meio horizontalmente fazendo um vinco, no lado maior, como indicado na figura abaixo.



b) Novamente, dobre sutilmente o papel ao meio, no outro sentido, marcando o meio.



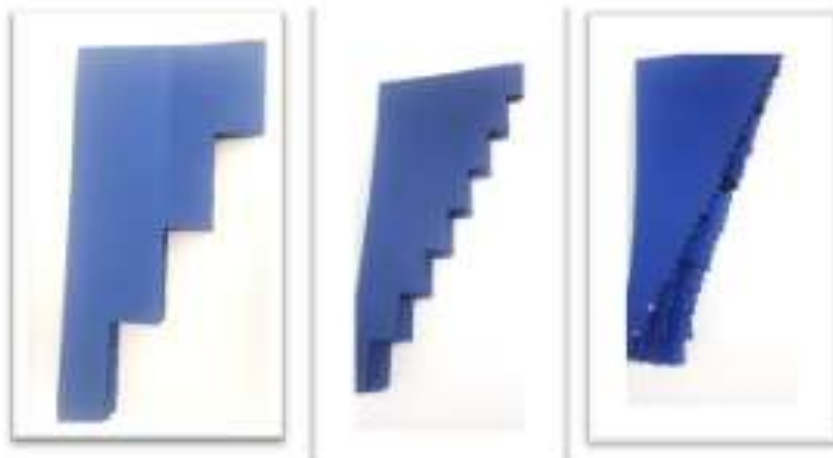
c) Com a folha dobrada ao meio na vertical, faça um corte até a metade da largura, conforme a figura.



d) Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra (nos dois lados)



e) Os próximos níveis serão obtidos nos dois retângulos (dobrados) formados no cartão. Para isso, repetimos os passos b ao d. Abra o cartão, e vire as partes cortadas para fora. Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível.



2. Observe o fractal triângulo de sierpinski. Como você descreveria o processo de construção?

3. Na construção dos fractais utilizamos elementos presentes na arte e na matemática, como simetrias, padrões geométricos, paralelismo, perpendicularidade e reflexão. Quais elementos você consegue identificar no processo de criação desse padrão fractal?

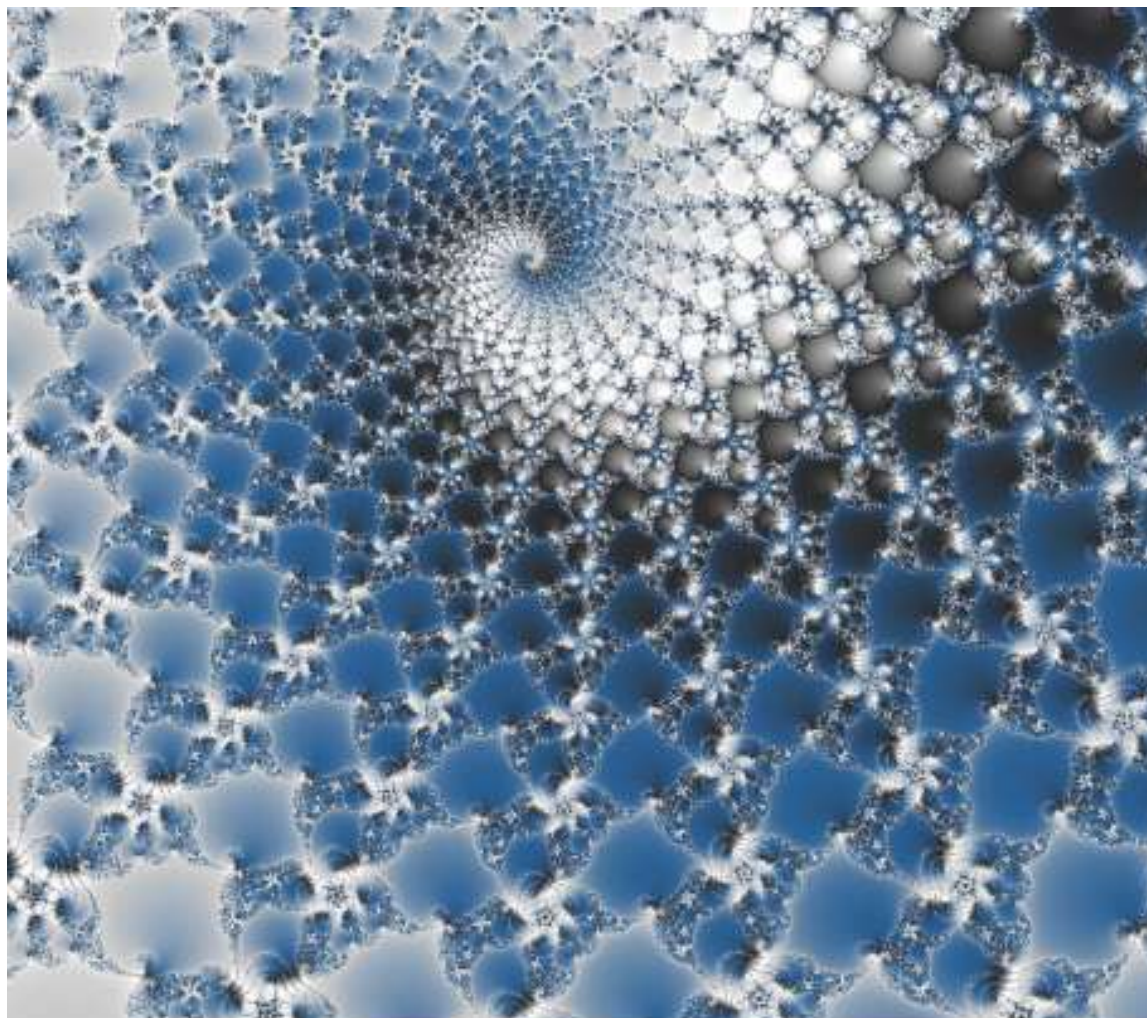
4. De que maneira poderíamos descrever o processo de iteração desse padrão fractal, utilizando nessa descrição os elementos listados no item anterior?

5. Sobre o padrão fractal triângulo de sierpinski:

a) Descreva a sensação que a criação do cartão fractal te traz.

b) Após pronto, ao contemplar a figura criada, quais sensações você descreveria?

## APÊNDICE C – CRIANDO PADRÕES FRACTAIS NO GEOGEBRA

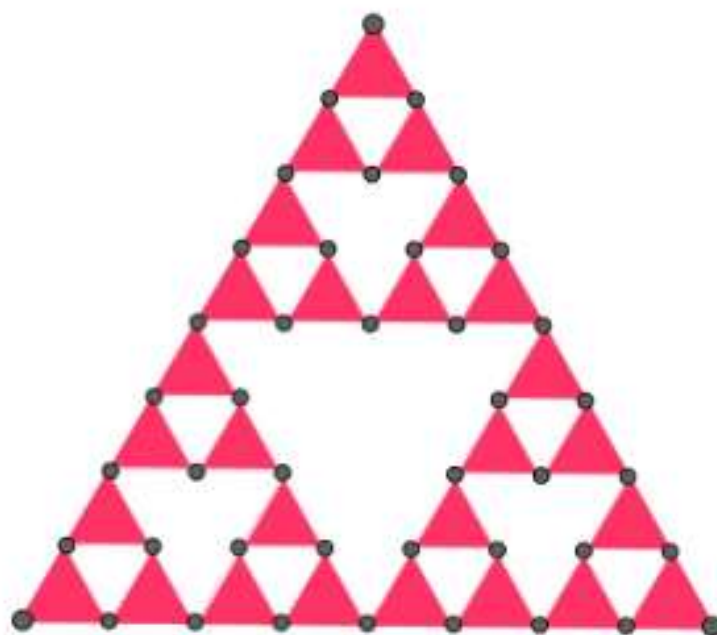


## CRIANDO PADRÕES FRACTAIS NO GEOGEBRA PARA SMARTPHONE

GeoGebra

Atividades desenvolvidas por:  
Tatiana Machado Resende Guedes (mestranda)  
Renata Dourado Roque (Iniciação científica)  
Profa. Dra. Rejane Watandir Schwartz de  
Carvalho Faria (orientadora)

## I. CONSTRUÇÃO DO PADRÃO FRACTAL TRIÂNGULO DE SIERPISNKI



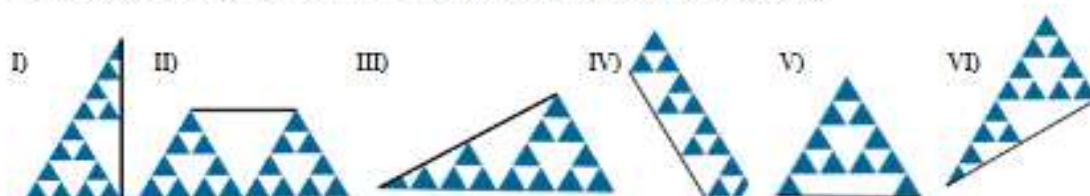
### 1. CONSTRUA O PADRÃO FRACTAL NO APP

- a) Abra o aplicativo GeoGebra no smartphone.
- b) Selecione em configurações -> geral -> rotular -> menos para os objetos novos.
- c) Volte para a tela principal.
- d) Construa, com a ferramenta polígono regular, um triângulo equilátero.
- e) Use a cor que preferir para personalizar o triângulo criado, e retire a transparência da cor, para que o triângulo apareça totalmente preenchido (nível 0).
- f) Marque os pontos médios dos três lados do triângulo.
- g) Construa um novo triângulo, com a ferramenta polígono, unindo os pontos médios criados no item anterior.
- h) Preencha o triângulo central de branco, para que seja possível visualizar o Triângulo de Sierpinski vazado, formando o primeiro nível do padrão fractal (nível 1).
- i) Construa, em uma escala menor, o nível dois seguindo os passos e ao g. Para isso, os novos triângulos gerados no nível anterior devem servir como ponto de partida.
- j) Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível. Se necessário, dê zoom (faça o movimento de pinça) em partes do fractal.

2. O padrão fractal triângulo de Sierpinski está representado abaixo, no nível 3.



a) Se utilizarmos a transformação geométrica simetria a partir do eixo marcado nas figuras abaixo, quais delas formariam o triângulo de Sierpinski nesse nível?



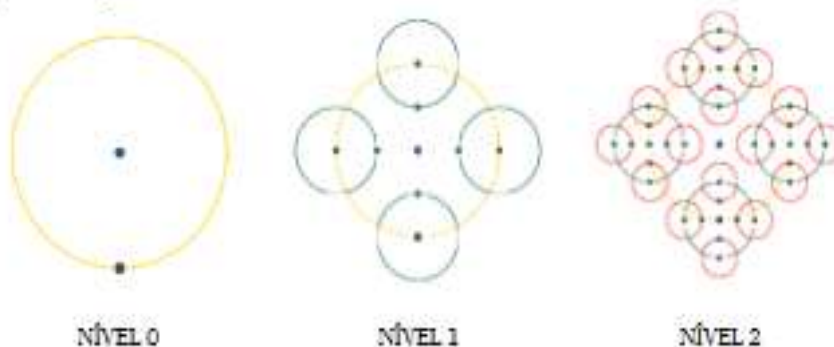
b) Você consegue identificar uma sequência lógica na construção do triângulo de Sierpinski? Comente sobre os pontos positivos e negativos (caso haja), de construir esse padrão fractal com o papel e com o aplicativo GeoGebra.

3. Preencha a tabela, observando a construção do Triângulo Sierpinski que realizamos.

Iteração	Imagem	Triângulos destacados	Medida do lado de cada triângulo	Área de cada triângulo destacado
0		1	$l$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
1		3	$\frac{l}{2}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$
2				
3				
n				



2. Observe o Tetra Círculo representado em 3 níveis. Como você descreveria o processo de construção deste padrão fractal?



3. Quais elementos presentes na arte e na matemática você consegue identificar no processo de criação desse padrão fractal?

4. De que maneira poderíamos descrever o processo de iteração desse padrão fractal, utilizando nessa descrição os elementos listados no item anterior?

5. Sobre o padrão fractal Tetra Círculo criado no GeoGebra

a) Descreva a sensação que a criação dele te traz.

b) Após pronto, ao contemplar a figura criada, quais sensações você descreveria?

6. Preencha a tabela observando a construção do Tetra Círculo que realizamos.

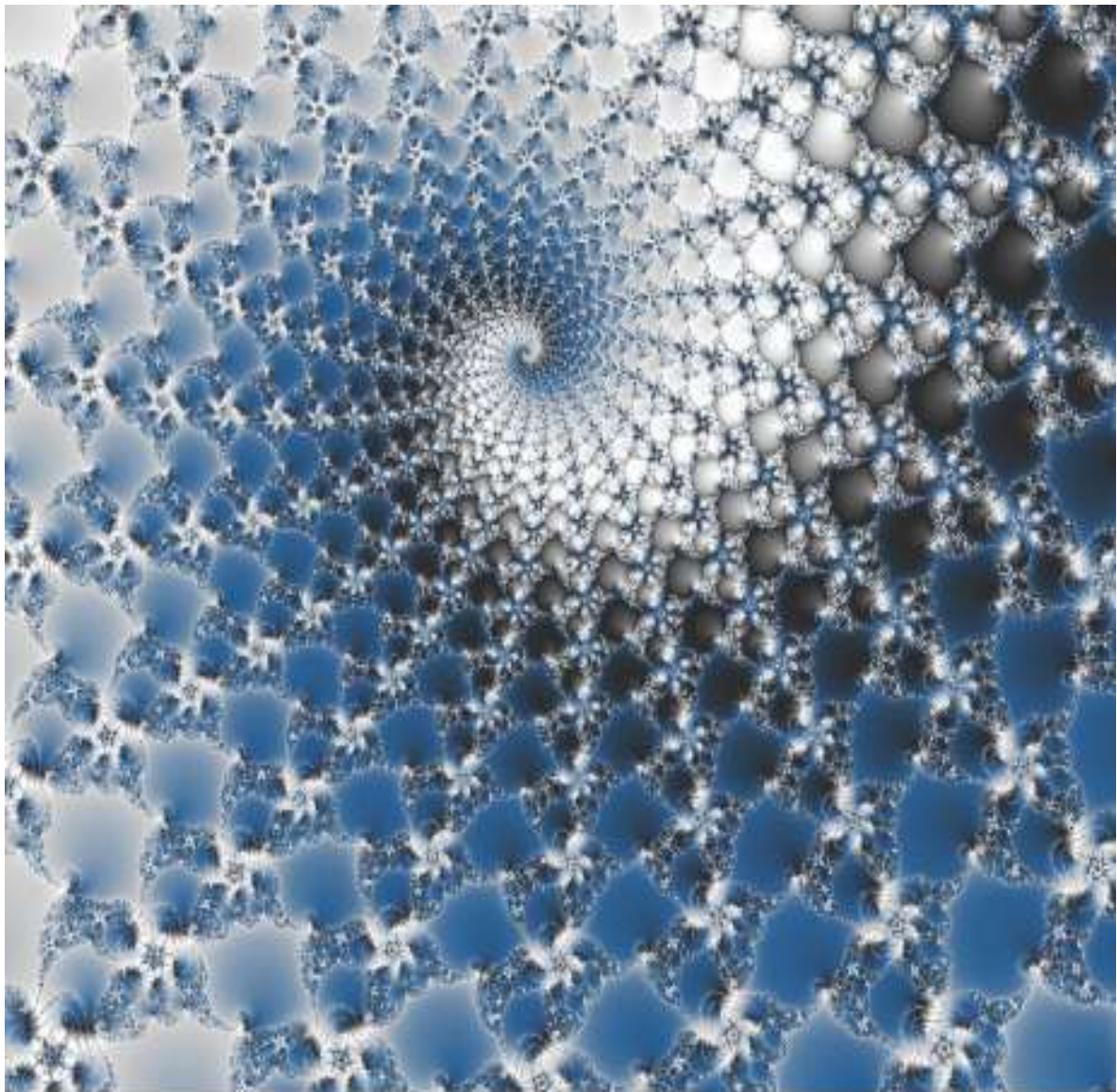
Interação	imagem	Quantidade de circunferências	Medida do Raio
0		1	$r$
1		5	$r/2$
2			

a) De acordo com a tabela, podemos identificar um padrão para a quantidade de circunferências ao avançar dos níveis?

b) E para as medidas dos raios das novas circunferências construídas em cada item?

c) Você consegue identificar uma sequência lógica na construção do Tetra Círculo Comente sobre pontos positivos e negativos (caso haja), de construir esse padrão fractal no aplicativo GeoGebra?

## APÊNDICE D – RECONHECIMENTO DO APP GEOGEBRA



## RECONHECIMENTO DO APP GEOGEBRA

GeoGebra

Atividades desenvolvidas por:  
Tartana Machado Resende Guedes (mestranda)  
Renata Dourado Roque (iniciação científica)  
Profa. Dra. Rejane Watandt Schwartz de  
Carvalho Faria (orientadora)



## O que é o GeoGebra?

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica gratuito, que reúne recursos de geometria, álgebra, cálculo e estatística. Disponível para os sistemas *Windows*, *MacOS*, *Android* e *iOS*. O uso desse software nas aulas de matemática, proporciona aos alunos a manipulação e exploração dos objetos matemáticos, contribuindo para investigação e autonomia.

Usaremos nesse trabalho, o aplicativo **GeoGebra Geometria** que conecta a álgebra e geometria, na versão para smartphones, que pode ser baixado em plataformas ou lojas de aplicativos.



## Conhecendo o aplicativo GeoGebra Geometria

A tela inicial mostrada na figura ao lado, é composta pela janela gráfica e uma barra com as funções de álgebra e de ferramentas.








A função álgebra, apresenta um campo de entrada, para inserir expressões algébricas ou comandos. E um espaço *Visão Álgebra* para visualização de todos os objetos criados.



Já em ferramentas, temos as opções: básicas, editar, construções, medições, retas, círculos, polígonos, transformar e mídia.



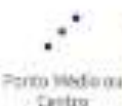
Para construção dos padrões fractais, usaremos as seguintes ferramentas.

 Move	<b>Move:</b> Move e arrasta objetos.
 Ponto	<b>Ponto:</b> Utilizados para criar pontos em qualquer posição.
 Segmento	<b>Segmento:</b> Cria um segmento que une um ponto a outro.
 Reta	<b>Reta:</b> Constrói uma reta a partir de dois pontos.
 Polígono	<b>Polígono:</b> Constrói qualquer polígono.



Polígono Regular

**Polígono Regular:** Constrói polígonos com lados e ângulos congruentes.



Ponto Médio ou Centro

**Ponto médio:** Utilizado para criar um ponto central de um segmento ou entre dois pontos.



Reta Perpendicular

**Reta perpendicular:** Selecionado um ponto e depois uma reta (segmento, semirreta) podemos construir uma perpendicular a reta passando pelo ponto selecionado.



Círculo dados Centro e Um de seus Pontos

**Círculo dados centro e um de seus pontos:** Podemos construir um círculo a partir de dois pontos, sendo o centro e um ponto qualquer pertencente a circunferência.



Selecionar Objetos

**Selecionar Objetos:** Permite selecionar qualquer objeto da janela de visualização.



Exibir / Esconder Rótulo

**Exibir/esconder rótulos:** Permite exibir ou esconder rótulos de um objeto.



Exibir / Esconder Objeto

**Exibir/esconder objetos:** Permite exibir ou esconder um objeto.



Apagar

**Apagar:** Apaga objeto selecionado.



### Atividade de exploração das ferramentas

---

**Atividade 1:** Crie uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento.

1º passo: Crie um segmento.

2º passo: Marque o ponto médio do segmento.

3º passo: Em seguida, crie a reta perpendicular que passa pelo esse ponto médio.

**Atividade 2:** Crie um triângulo equilátero, e trace sua altura.

1º passo: Crie o triângulo.

2º passo: Marque o ponto médio de um dos seus lados.

3º passo: Crie um a altura.

4º passo: Altere a cor do triângulo. Para isso, selecione a ferramenta básica mover, clique sobre o triângulo. Selecione a ferramenta cor (primeira opção) e altere a cor para outra de sua preferência. Selecione ainda os três pontinhos (última ferramenta que aparece ao clicar sobre o triângulo), e retire a transparência da cor movendo o cursor de transparência para o máximo para que o triângulo fique totalmente preenchido.

**Atividade 3:** Crie duas circunferências, de modo que a segunda tenha a metade do raio da outra.

1º passo: Crie a primeira circunferência com raio qualquer.

2º passo: Marque o raio.

3º passo: Marque o ponto médio do raio.

4º passo: Crie a segunda circunferência.