

SUELEM FARIAS PINTO

**POSICIONAMENTO TOPOGRÁFICO DE ALVOS VISUALIZADOS ATRAVÉS  
DE ESPELHO PLANO, ESTIMANDO A PRECISÃO**

Dissertação apresentada a Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2013

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

P659p  
2013  
Pinto, Suelem Farias, 1983-  
Posicionamento topográfico de alvos visualizados através  
de espelho plano, estimando a precisão / Suelem Farias Pinto. –  
Viçosa, MG, 2013.  
xi, 61 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Dalto Domingos Rodrigues.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 56-61.

1. Levantamentos topográficos. 2. Distâncias - Medição.  
3. Espelhos. 4. Coordenadas (Matemática). I. Universidade  
Federal de Viçosa. Departamento de Engenharia Civil. Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Civil. II. Título.

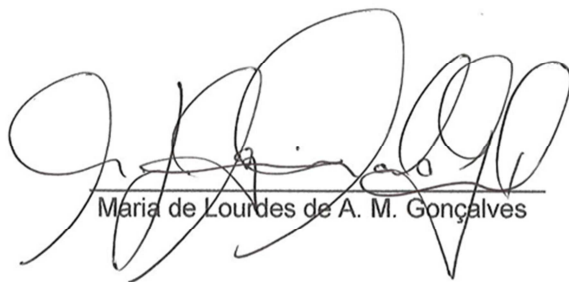
CDD 22 ed. 526.98

SUELEM FARIAS PINTO

**POSICIONAMENTO TOPOGRÁFICO DE ALVOS VISUALIZADOS ATRAVÉS  
DE ESPELHO PLANO, ESTIMANDO A PRECISÃO**

Dissertação apresentada a Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 02 de dezembro de 2013.



Maria de Lourdes de A. M. Gonçalves



Pedro Luis Faggion  
(Coorientador)



Dalto Domingos Rodrigues  
(Orientador)

**A Deus, meu noivo, familiares e amigos**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado essa oportunidade tão grandiosa em minha vida, por nunca desistir de mim e por sempre me amparar em momentos difíceis.

Aos Mestres pelos ensinamentos, em especial ao meu Orientador Professor Doutor Dalto Domingos Rodrigues, por me auxiliar na realização desse trabalho, pela paciência e por acreditar em mim, e acima de tudo um grande amigo, sempre me auxiliando de uma forma bastante criativa nas incontáveis dúvidas que surgiram durante a realização desse trabalho.

Aos meus pais João e Cátia e ao meu irmão Sandro pelo amor incondicional, carinho, apoio e compreensão.

Ao meu noivo Weldon Martins pelo companheirismo, confiança e dedicação e que mesmo de longe, esteve sempre perto e muito presente, e por ter me ensinado que a vida é maravilhosa quando estamos do lado de quem amamos.

Aos professores Nilcilene Medeiros, Willian Dal Poz, Joel Gripp, Antônio Santana Ferraz e Geraldo Santana do Curso de Engenharia de Agrimensura e Cartográfica – UFV e aos funcionários Cilene Knauf, Emília Dutra, Emerson, Sylvania, Dirceu e Geraldo Faria.

Aos meus amigos, em especial a Silvia Rocha, Alessandro Carvalho, Sandro Faria, Afonso De Paula, Bruno Ventorim, Marília Sanglard, Wellington Guimarães, Tânia Noronha que sempre me ajudaram quando eu precisei, e a todos aqueles que caminharam comigo nesta jornada.

Ao Departamento de Engenharia Civil, setor de Engenharia de Agrimensura e Cartográfica, pela oportunidade e a UFV pelo ensino gratuito e de excelente qualidade.

A CAPES pelo apoio financeiro.

E a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

A todos, o meu muito obrigada e vamo que vamo!!

***“O único lugar aonde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.” (Albert Einstein)”***

***“ Se você pode sonhar, você pode realizar.”( Walt Disney)”***

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
RESUMO .....	x
ABSTRACT .....	xi
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. OBJETIVOS .....	1
3. JUSTIFICATIVAS .....	2
4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	2
3.1. O LASER .....	2
3.2. A LUZ E SUAS CARACTERÍSTICAS .....	3
3.3. PROPRIEDADES DOS ESPELHOS .....	4
3.3.1. Planicidade .....	5
3.3.2. Rugosidade .....	6
3.3.3. Superfície Refletora .....	7
3.4. MEDIÇÃO DE ÂNGULOS .....	9
3.5. MEDIÇÃO DE DISTÂNCIAS .....	9
3.5.1. Interferometria .....	9
3.5.2. Medição eletrônica de distâncias .....	10
3.6. SISTEMAS DE REFERÊNCIA .....	13
3.6.1. Materialização de sistemas .....	15
3.6.1.1. Sistema da Estação Total .....	15
3.6.1.2. Sistema Topográfico .....	16
3.6.1.3. Sistema de um CAD .....	17
3.7. MÉTODOS DE POSICIONAMENTO MEDINDO ÂNGULOS E DISTÂNCIAS .....	17
3.7.1. Irradiação .....	19
3.7.1.1. Propagação de variâncias .....	21
3.7.2. Trilateração .....	22
3.8. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS .....	23
3.8.1. Transformação isogonal .....	23
3.8.2. Transformação inversa .....	25
4. METODOLOGIA .....	25
4.1. METODOLOGIA EMPREGADA POR GONÇALVES (2009) .....	25

4.2. METODOLOGIA PROPOSTA.....	31
4.2.1. Estimativa das coordenadas das marcas fiduciais, e de sua MVC, no sistema do espelho .....	31
4.2.2. Estimação dos parâmetros que relacionam o sistema do espelho com o sistema da Estação e de suas covariâncias .....	33
4.2.3. Transformação das coordenadas dos alvos virtuais, no sistema da estação, para o sistema do espelho, propagando as covariâncias.....	36
4.2.4. Reflexão das coordenadas dos alvos virtuais, no sistema do espelho ...	38
4.2.5. Transformação das coordenadas dos alvos virtuais, refletidas, para o sistema da estação, com propagação das covariâncias.....	38
4.3. SIMULAÇÃO DO EXPERIMENTO EM UM CAD .....	42
5. RESULTADOS .....	46
6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	56
APÊNDICE.....	62

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Demonstração da Le de Heron, em que os ângulos de incidência são iguais aos de reflexão .....	3
Figura 2: Efeito Fotoelétrico .....	4
Figura 3: Zona de tolerância de Planicidade.....	5
Figura 4: Perfil de uma superfície rugosa .....	7
Figura 5: Reflexão de um objeto em um espelho.....	8
Figura 6: Objeto pontual e sua imagem virtual.....	8
Figura 7: Interferômetro de Michelson .....	10
Figura 8: Prisma Refletor .....	11
Figura 9: Princípio de funcionamento do MED.....	12
Figura 10: Princípio da medição por diferença de fase .....	13
Figura 11: Sistema Cartesiano Bidimensional e Tridimensional .....	14
Figura 12: Sistemas Levogiro e Dextrogiro .....	15
Figura 13: Sistema da Estação Total .....	16
Figura 14: Método da Interseção .....	18
Figura 15: Método da interseção angular .....	18
Figura 16: Interseção a Ré .....	19
Figura 17: Multi-irradiações.....	20
Figura 18: Posicionamento por irradiação .....	21
Figura 19: Croqui de uma Trilateração .....	22
Figura 20: Marcas Fiduciais e Sistema do Espelho .....	26
Figura 21: Alvos de referência e ponto 'esp' .....	28
Figura 22: Reflexão do alvo virtual.....	30
Figura 23: Sistema do Espelho .....	31
Figura 24: Sistema da Estação Total em ambiente CAD .....	42
Figura 25: Marcas fiduciais e sistema do espelho em ambiente CAD .....	43
Figura 26: Simulação em ambiente CAD de levantamento topográfico utilizando Estação Total e espelho .....	45

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Distâncias ajustadas dos alvos de referência e seus desvios.....	27
Tabela 2: Coordenadas das Marca fiduciais no sistema da estação .....	27
Tabela 3: Coordenadas dos alvos virtuais no sistema da estação .....	28
Tabela 4: Coordenadas dos alvos reais medidas com a estação total .....	28
Tabela 5: Distâncias entre os alvos reais determinadas por Gonçalves (2009)	29
Tabela 6: Coordenadas dos Alvos reais processando os dados das Tabelas 1, 2 e 3, com o software desenvolvido.....	40
Tabela 7: Distâncias entre os alvos reais (mm).....	40
Tabela 8: Diferenças entre as coordenadas da Tabela 4, calculadas por Gonçalves, e as da Tabela 6. ....	41
Tabela 9: Coordenadas dos alvos reais, processando os dados das tabelas 1, 2 e 3, considerando as coordenadas medidas com estação com precisão de décimo de milímetro.....	41
Tabela 10: Diferença entre as coordenadas da Tabela 4, medidas por Gonçalves (2009), e as da Tabela 9.....	42
Tabela 11: Coordenada dos Alvos Reais com espelho não plano medidas com o CAD .....	44
Tabela 12: Coordenada dos Alvos Reais com espelho plano, medidas com o CAD .....	44
Tabela 13: Diferença entre as coordenadas dos Alvos Reais através de um espelho plano e um espelho não plano .....	44
Tabela 14: Resíduos das distâncias medidas com interferômetro e ajustadas por trilateração .....	45
Tabela 15: Distâncias entre as marcas fiduciais medidas no CAD, subtraídas dos resíduos .....	47
Tabela 16: Coordenadas das marcas fiduciais ajustadas por trilateração .....	48
Tabela 17: Parâmetros que relacionam o sistema do espelho com sistema da estação - precisão de milímetro .....	49
Tabela 18: Parâmetros que relacionam o sistema do espelho com sistema da estação - precisão de décimo de milímetro .....	50

Tabela 19: Coordenadas dos alvos reais no sistema da estação, admitindo precisão de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total.....	51
Tabela 20: Coordenadas dos alvos reais, no sistema da estação, admitindo precisão de décimo de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total.....	52
Tabela 21: Discrepância entre as coordenadas dos alvos reais calculadas e as medidas com CAD, admitindo precisão de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total.....	53
Tabela 22: Discrepância entre as coordenadas dos alvos reais estimadas e as medidas com CAD, admitindo precisão de décimo de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total.....	53

## RESUMO

PINTO, Suelem Farias, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, Dezembro, 2013. **Posicionamento topográfico de alvos visualizados através de espelho plano, estimando a precisão.** Orientador: Dalto Domingos Rodrigues. Coorientadores: Pedro Luís Faggion e Joel Gripp Jr.

Mesmo com o atual avanço tecnológico, há necessidade de se desenvolver uma técnica de levantamentos topográficos para situações em que o alvo não seja diretamente visualizado de onde a estação total está posicionada. Com este intuito, foi desenvolvido um projeto de um espelho e software que permitam estimar as coordenadas, e suas incertezas, de alvos visualizados indiretamente. Para a realização do trabalho foram construídas maquetes virtuais em 3D, empregando um CAD, de diversos cenários e foi elaborado software para estimar as coordenadas de marcas fiduciais no espelho, relacionar os sistemas do espelho e da estação total e por fim, estimar as coordenadas topográficas dos alvos e suas incertezas. Concluiu-se que medindo as coordenadas das marcas fiduciais com precisão de um milímetro, para uma mesma posição do espelho, da estação e dos alvos virtuais, as incertezas nas coordenadas dos alvos reais ficam acima do centímetro e que em vez de se empregar marcas fiduciais gravadas no espelho, é melhor adicionar círculos graduados que permitam medir os ângulos de atitude. Com precisão de cinco segundos nos ângulos e milímetro nas coordenadas dos alvos virtuais chega-se a precisão melhor que o centímetro nas coordenadas dos alvos reais.

## ABSTRACT

PINTO, Suelem Farias, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2013. **Topographic positioning of targets seen through plane mirror estimating the accuracy.** Adviser: Dalto Domingos Rodrigues.

Even in current times, there is a need to develop a topographic survey technique for situations in which the target is not directly visualized from the total station position. With this purpose, a project of a mirror and softwares that allow estimate the coordinates, and its uncertainties, of targets visualized through the mirror was developed. For the work development, 3D virtual models of different scenarios were made, employing CAD, and softwares, in which estimations of topographic coordinates of the targets and its uncertainties were made, were developed. Concludes that measuring the coordinates of the fiducial marks with a precision of one millimeter, the uncertainties on the coordinates of the real targets are above the centimeter and that instead of employing fiducial marks recorded in the mirror, is better to add graduated circles that allow measure the angles of attitude. With a precision of five seconds in the angles and millimeter on the coordinates of the targets comes to the accuracy better than the centimeter on the coordinates of the real targets.

## 1. INTRODUÇÃO

Há hoje diversas técnicas para determinação de coordenadas, entre as quais se pode citar: posicionamento por satélites, laser scanner, fotogrametria e os chamados métodos topográficos, onde são medidos ângulos e/ou distâncias.

Em posicionamentos topográficos, a escolha do método e das observáveis, depende da possibilidade de visualização e ocupação dos alvos e do ponto de apoio. Dependendo da localização dos alvos e das condições de instalação do instrumento de medida pode haver dificuldades no processo de medição, como por exemplo, impossibilidade de medida direta de distância, de ângulos verticais e direções horizontais em face da obstrução existente entre a estação total e o alvo, instabilidade no local do levantamento, impossibilidade de acesso ao objeto em estudo, dentre outros.

## 2. OBJETIVOS

Posicionar topograficamente alvos visualizados através de um espelho plano, estimando a precisão.

Testar diferentes tamanhos de espelho determinando sua atitude no espaço para avaliar a influência do mesmo na obtenção das coordenadas.

Especificamente, o objetivo é elaborar um software que permita o posicionamento de pontos observados através de um espelho plano dotado de marcas fiduciais e avaliar a precisão das coordenadas resultantes de diferentes cenários empregados no posicionamento.

### 3. JUSTIFICATIVAS

A determinação de coordenadas de objetos visualizados indiretamente teve seu primeiro estudo no Brasil, no Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas na UFPR com a tese “Determinação indireta de coordenadas topográficas utilizando estação total e espelho” (GONÇALVES, 2009).

Esse estudo despertou o interesse em planejar um sistema composto por hardware e software que permita determinar as coordenadas de alvos visualizados através de um espelho plano.

### 4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para a determinação de coordenadas topográficas, utilizando estação total e espelho, é necessário o conhecimento de alguns conceitos para uma melhor compreensão do trabalho proposto. A seguir serão apresentados alguns tópicos necessários para o seu melhor entendimento.

#### 3.1. O LASER

Segundo *Schoenknecht* (2010), a luz também é tratada como uma partícula, onde o fóton sofre pouca difração. O laser possui feixe de luz com alta directividade e sendo assim, podem ser direcionados a obstáculos específicos, que irão refletir um único feixe de luz de volta para o equipamento de medição, viabilizando sistemas de medição precisos e robustos.

De acordo com *Bagnato* (2001), a luz laser é monocromática, seu comprimento pode ser aumentado pelos átomos de meio ativo, permitindo chegar a quilômetros, possui alta intensidade direcional, reduzida largura

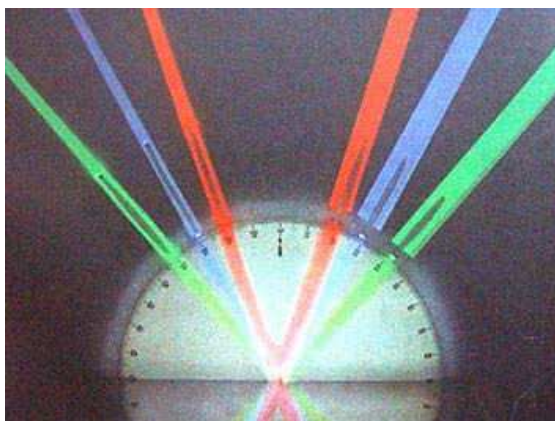
espectral (menor que 1nm) e coerente, ou seja, as ondas de luz possuem sempre a mesma velocidade e força.

Segundo Gonçalves (2009), o laser HeNe, foi utilizado em alguns equipamentos topográficos como portadora. Esse laser é emitido no feixe do infravermelho e do vermelho com um comprimento de onda de 632,8 nm, com um feixe de alta intensidade, monocromático e de pequena divergência (MEYER-ARENDR, 1995; RUEGER, 1996 *apud* GONÇALVES, 2009).

### 3.2. A LUZ E SUAS CARACTERÍSTICAS

A luz é um fenômeno de natureza ondulatória e pode ser tratada como uma manifestação da matéria, que até hoje intriga muitos cientistas, pois ainda não há um consenso sobre a sua verdadeira natureza.

A primeira descoberta importante surgiu ainda na Grécia com Heron de Alexandria, que fazendo experiências com espelhos, descobriu que a luz caminha em linha reta, o que levou à seguinte lei: o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, como mostra a Figura 1.



**Figura 1: Demonstração da Lei de Heron, em que os ângulos de incidência são iguais aos de reflexão**

**Fonte: Apostila de Cinematografia, Capítulo 8, pag. 67 – Prof. Filipe Santos**

Em 1905 Albert Einstein propôs que a teoria ondulatória da luz era incompleta e que poderia ter características de partículas. Ele demonstrou

matematicamente que um elétron liberado podia absorver uma partícula radiante, e ela então daria energia a ele, sendo essa energia chamada de energia de fóton ou quantum de energia. Quanto menor o comprimento de onda, mais energia ela poderia liberar.

Arthur Compton, em 1923, demonstrou que os fótons tinham energia cinética, e com isso, massa. A luz, portanto é ondulatória e corpuscular, predominando por vezes uma, por vezes outra, mas sua constituição é de ambas as características.

Segundo Gonçalves (2009), a luz, a partir da demonstração do efeito fotoelétrico, não pode ser tratada apenas como onda. Nessa demonstração uma placa metálica é exposta a um feixe de luz, quando os fótons do feixe de luz incidem sobre essa placa metálica, eles cedem sua energia aos elétrons da última camada da placa de metal, permitindo que esses adquiram energia suficiente para saltar da placa, como mostra a Figura 2.

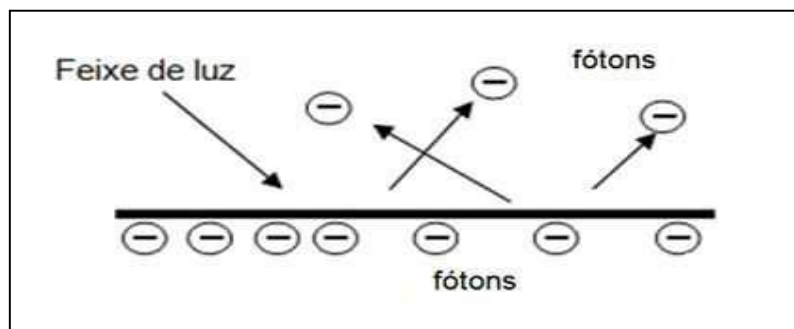


Figura 2: Efeito Fotoelétrico  
Fonte: GONÇALVES, 2009

### 3.3. PROPRIEDADES DOS ESPELHOS

Os espelhos podem possuir diferentes formas, tais como: plano, esférico, parabólico ou cilíndrico, tendo utilidade tanto no uso doméstico quanto em pesquisas e programas espaciais. Esses últimos são precisos, possuindo uma baixa distorção de imagem e alta refletividade (KING II *et al*, 1998).

O espelho é uma superfície que reflete um raio luminoso em direção definida em vez de absorvê-lo ou espalhá-lo em todas as direções, (HALLIDAY,

RESNICK E WALKER, 2007). Os espelhos são feitos geralmente de uma superfície metálica bem polida. É comum usar-se uma placa de vidro onde se deposita uma fina camada de prata ou alumínio em uma das faces, tornando a outra um espelho.

Atualmente é possível construir espelhos com qualidade óptica. Para tanto, é necessário identificar e adequar às propriedades (planicidade, deslocamento angular do eixo ótico e mecânico, precisão da superfície, rugosidade e refletividade) garantindo o correto desempenho destes. Muitas dessas propriedades são idênticas para todos os modelos de espelhos, porém, ainda não existe um controle de qualidade adequado para uma produção em série, sendo necessário testar individualmente cada um (KING II et al 1998).

### 3.3.1. Planicidade

Uma das maneiras de definir um plano é por três pontos não colineares, logo um plano não possui espessura. No entanto, não é possível fabricar, uma superfície exatamente plana. Em função disso, existem tolerâncias adotadas nos pontos externos a este plano ideal. Segundo a (ABNT<sup>1</sup>) o campo de tolerância é limitado por dois planos paralelos, com uma distância ( $t$ ) entre eles, e neste intervalo a superfície analisada, Figura 3, (MAGALHÃES, 2006 *apud* GONÇALVES, 2009).

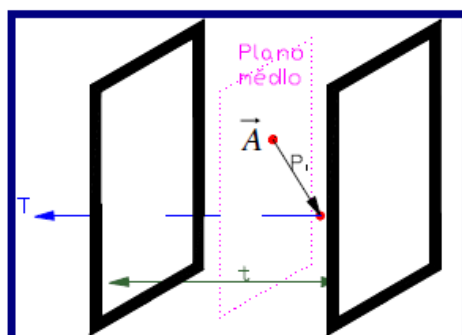


Figura 3: Zona de tolerância de Planicidade

Fonte: MAGALHÃES, 2006

1

Zona de planicidade é o volume em todos os pontos  $\vec{P}_i$  que satisfazem a condição:

$$|\hat{T} \times (\vec{P}_i - \vec{A})| \leq \frac{t}{2} \quad (1)$$

Onde,  $\hat{T}$  é o vetor direção dos planos paralelos que definem a zona de tolerância;  $\vec{A}$  o vetor posição localizado no plano médio da zona de tolerância e  $t$  a distância entre os dois planos paralelos que contêm todos os pontos medidos.

### 3.3.2. Rugosidade

De acordo com Gavinho (2005), a rugosidade do espelho provoca o espalhamento difuso do feixe, diminuindo a intensidade do feixe refletido. Os efeitos da ondulação caracterizam-se por desvios de pequeno ângulo do feixe refletido causando distorções na imagem desejada.

A qualidade da superfície de um espelho determina a sua capacidade de reflexão e reprodução da imagem. A tolerância de estrias e cavidades na superfície é especificada como (F-D), Figura 4, em que (F) é o número máximo de estrias visíveis e (D) é o máximo diâmetro das cavidades em nanômetro, sendo o padrão de qualidade 60-40, ou seja, são visíveis no máximo 60 estrias sendo que a maior possui um diâmetro igual ou menor a 40 nm (KING II et al, 1998 *apud* GONÇALVES, 2009).

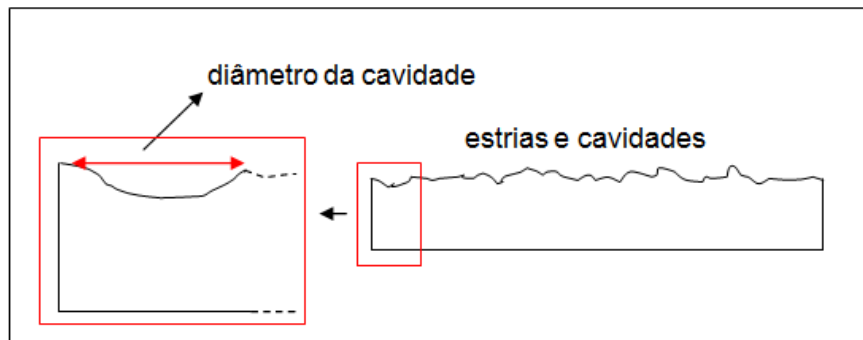


Figura 4: Perfil de uma superfície rugosa

Fonte: GONÇALVES, 2009

### 3.3.3. Superfície Refletora

Quando uma superfície permite uma reflexão de um feixe de luz, é porque ela é uma superfície refletora e suas características são:

1. A distância entre a imagem e o espelho e entre o objeto e o espelho são as mesmas;
2. A imagem e o objeto têm o mesmo tamanho;
3. Os raios de incidência e de reflexão pertencem ao mesmo plano.

Na Figura 5, onde

$\theta_i$  = ângulo de incidência;

$\theta_r$  = ângulo de reflexão;

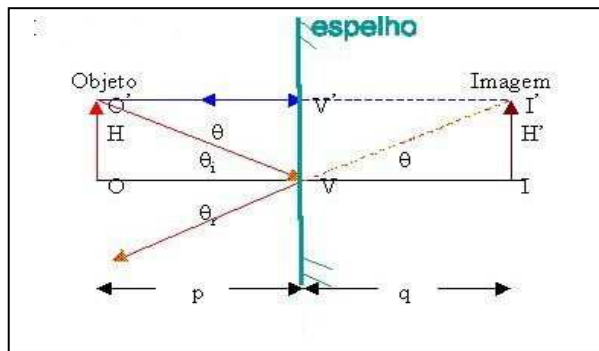
$p$  = distância do objeto ao espelho;

$q$  = distância da imagem ao espelho;

$H$  = tamanho do objeto;

$H'$  = tamanho da imagem;

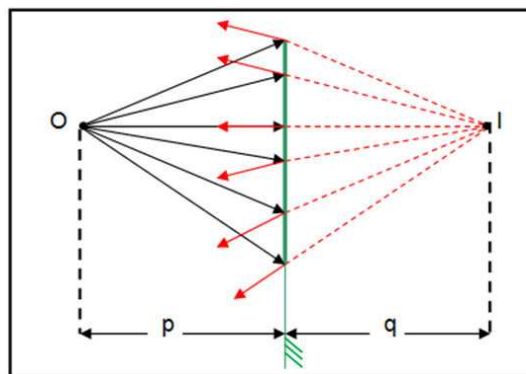
são mostradas estas características.



**Figura 5: Reflexão de um objeto em um espelho**  
**Fonte: Programa Educar CDCC – USP SC**

Desta forma, não há aumento da imagem em relação ao objeto, e toda imagem visível diante do espelho é formada por reflexão dos raios que incidem sobre uma superfície e voltam ao meio onde ocorreu a incidência.

Na Figura 6 apresenta-se uma fonte luminosa pontual O, chamada de objeto que está a uma distância de um espelho plano. Raios luminosos provenientes de O são refletidos pelo espelho. Se o olho de um observador intercepta alguns dos raios refletidos, ele tem a impressão de que existe uma fonte luminosa pontual I atrás do espelho, a uma distância q. A fonte fictícia I é uma imagem virtual do objeto O.



**Figura 6: Objeto pontual e sua imagem**  
**Fonte: HALLIDAY, RESNICK E WALKER, 2007**

### **3.4. MEDIÇÃO DE ÂNGULOS**

Goniômetro é qualquer aparelho utilizado para medir ângulos, teodolitos medem direções horizontais e verticais e as estações totais medem ângulos verticais, distâncias inclinadas e direções horizontais.

A medição eletrônica de ângulos é baseada na leitura digital em um círculo graduado de forma binária. Os teodolitos eletrônicos são instrumentos que permitem a medição eletrônica dos ângulos horizontais e verticais e seus valores são mostrados no próprio visor do instrumento, assim como na Estação Total, que é um equipamento que engloba teodolito e distaciômetro eletrônico. As estações totais permitem realizar medições de direções horizontais e verticais e também distâncias com muita eficiência.

Existem Estações Totais com diferentes qualidades e precisões, onde os ângulos podem ser medidos com precisão nominal variando de  $\pm 20$  segundos a  $\pm \frac{1}{2}$  segundo.

### **3.5. MEDIÇÃO DE DISTÂNCIAS**

Há algum tempo, ondas sonoras já estão sendo usadas para medir distâncias. Nas últimas décadas descobriu-se que o uso de onda de luz, ondas eletromagnéticas, infravermelhas e laser oferecem métodos muito mais precisos (MCCORMAC, 2007).

#### **3.5.1. Interferometria**

O homem vem buscando cada vez mais a melhor acurácia em mensurações, com isso utiliza-se de técnicas de interferometria de varredura de frequência (IVF). Sensores baseados nesta técnica podem desempenhar um importante papel em Metrologia dimensional, como por exemplo, o

monitoramento de distâncias em topografia com precisão micrométrica (CABRAL E REDORDÃO, 2008). A Figura 7 ilustra um interferômetro de Michelson.



**Figura 7: Interferômetro de Michelson**  
**Fonte: VILLATE, 2005**

A interferometria é o uso do fenômeno da interferência em sinais para medidas de distâncias através da mudança de fase em um dos sinais (LAROCCA, 2004).

No interferômetro de Michelson, um feixe de luz é separado em dois feixes perpendiculares, por meio de um espelho semitransparente que reflete parte da luz e deixa passar outra parte. Os dois feixes, provenientes da mesma fonte, são refletidos por dois espelhos fazendo com que regressem novamente ao espelho semitransparente, misturando-se novamente para produzir um padrão de interferência que pode ser observado. (FRAGNITO e COSTA, 2010).

### **3.5.2. Medição eletrônica de distâncias**

O primeiro distanciômetro eletro-óptico foi fabricado na Rússia em 1936, promovido pelo Instituto de Óptica Governamental. Em 1957, Wadley obteve

um distanciômetro de microondas, o Telurometro. A Wild fabricou entre os anos de 1967 e 1973 o DI-10, distanciômetro de pequenas dimensões, que unido a um teodolito proporcionava um grande benefício para as medidas topográficas, tanto em rapidez como em precisão, (CORRÊA, 2006)

Os distanciômetros ou medidores eletrônicos de distâncias (MED) são equipamentos que permitem medir distâncias enviando uma onda eletromagnética (luz visível, laser ou infravermelho) a um prisma refletor e recebendo esse sinal de volta. Os prismas de vidro são os refletores que fornecem os melhores resultados na medição eletrônica de distância. Eles são formados por superfícies refletoras que com ângulos de 90° graus entre elas, sendo sua cobertura interna de alumínio, cobre ou ouro. A Figura 8 ilustra um prisma refletor.

O prisma é feito de tal forma que um feixe de luz incidente em sua superfície retorne na mesma direção. Devido à disposição de suas superfícies refletoras, o sinal reflete em cada uma delas e retorna paralelamente ao sinal emitido pelo equipamento, (SMITH, NASCARELLA, 2004 *apud* MARTINI, 2005)

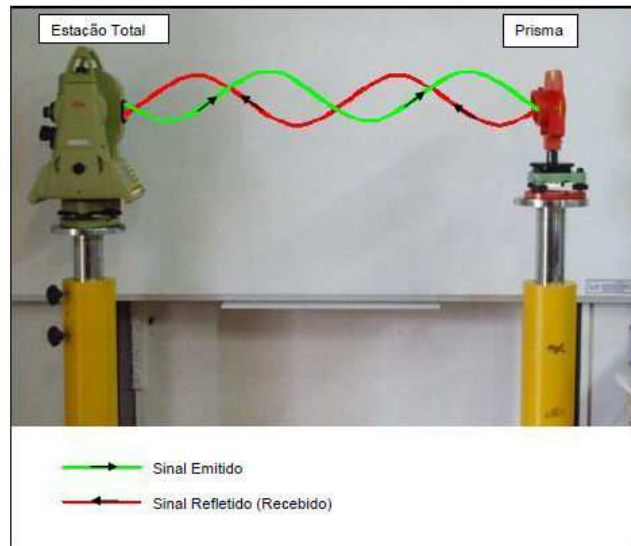


**Figura 8: Prisma Refletor**  
**Fonte: MARTINI, 2005**

Hoje em dia, existem também as Estações Totais que medem distâncias sem a utilização dos prismas refletores. Estas permitem o levantamento de objetos em lugares de difícil acesso ou inacessíveis.

A medida das distâncias através de um distanciômetro eletrônico é feita colocando o aparelho em uma das extremidades da distância a ser medida e

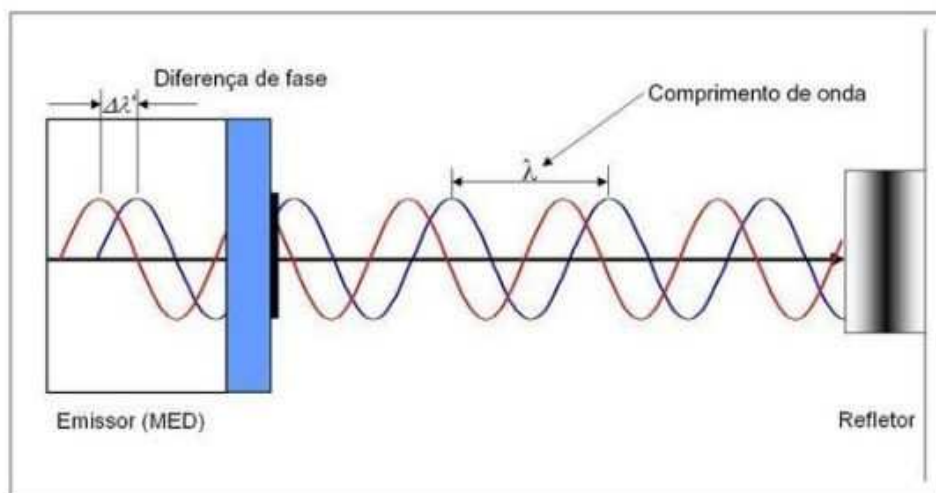
na outra extremidade um refletor, que refletirá a onda eletromagnética emitida pelo distanciômetro de volta ao aparelho – Figura 9.



**Figura 9: Princípio de funcionamento do MED**  
**Fonte: CRUZ, 2010**

A distância é obtida a partir de um número inteiro de comprimentos de onda mais uma diferença de fase (entre a onda recebida e emitida) medida no equipamento. O distanciômetro transmite o feixe de luz modulado para o refletor, que o reflete de volta para o emissor - Figura 9. O sinal eletromagnético recebido é convertido em um sinal elétrico, permitindo fazer então uma comparação entre o sinal emitido e recebido. A distância é obtida determinando o número inteiro de  $N$  comprimento de onda ( $\lambda$ ), contidos na distância percorrida pelo feixe, e medindo a parte fracionária,  $\Delta\lambda'$  resultante da diferença de fase entre o sinal modulado transmitido e o recebido. Desta forma a distância entre o emissor e o refletor é dada por:

$$D = \frac{1}{2} \cdot (N\lambda + \Delta\lambda') \quad (2)$$



**Figura 10: Princípio da medição por diferença de fase**

**Fonte: CRUZ, 2010**

As estações totais realizam medições emitindo laser, que permite que parte dos raios incidentes retorne ao MED sem a utilização de prismas refletores (KAHMEN; FAÍG, 1988; PACILÉO NETTO, 1990; RÜEGER, 1996; FAGGION, 2001; LEICA TCRA 1205, 2004; MARTINI, 2005, *apud* CRUZ, 2010).

### **3.6. SISTEMAS DE REFERÊNCIA**

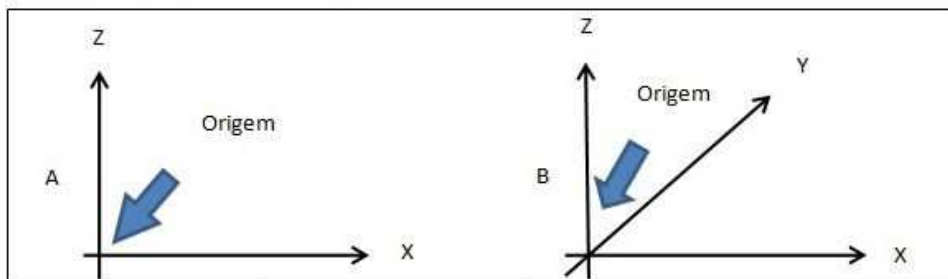
De acordo com o *International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS), um sistema de referência (*Reference System*) é um conjunto de prescrições e convenções, juntamente com a modelagem necessária para definir uma tríade de eixos de coordenadas. Os referenciais devem ser definidos ou materializados, e uma forma de realizar um sistema é arbitrando-o.

Quando um referencial é definido e adotado convencionalmente, deve-se coletar as observações a partir de pontos devidamente materializados, estabelecendo-se um conjunto de coordenadas de referência para os mesmos e esse conjunto materializa o sistema (RODRIGUES, 2011).

De acordo com Matos (2007), sobre um sistema de referencia podem ser definidos diversos tipos de sistemas de coordenadas, sobre os quais se efetuam cálculos de ângulos, posições e distâncias.

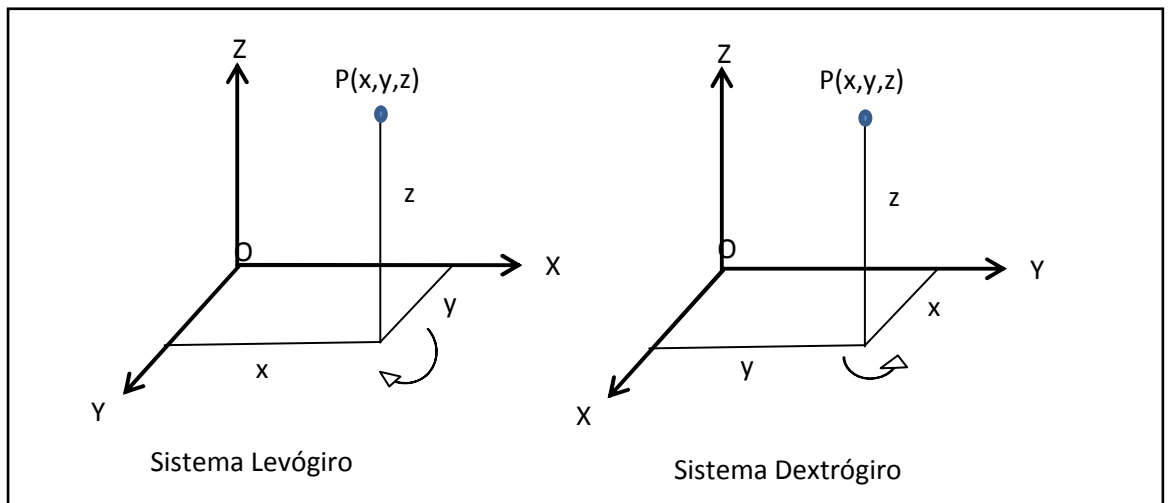
A definição de um sistema de coordenadas requer a especificação de sua origem, orientação e escala (RODRIGUES, 2009). Dentre os sistemas de coordenadas tem-se o Sistema Cartesiano que é caracterizado por um conjunto de três retas (eixos X, Y, Z) mutuamente perpendiculares.

Quando se posiciona um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas, a este ponto estão sendo atribuídas coordenadas. No espaço bidimensional, tem-se duas retas (X, Y) perpendiculares entre si e no espaço tridimensional três retas (X,Y,Z) e a origem do sistema se dá no cruzamento entre elas (Figura 11).



**Figura 11: Sistema Cartesiano Bidimensional e Tridimensional**  
**Fonte: A autora**

Conforme a posição da direção positiva dos eixos, um sistema de coordenadas cartesianas pode ser dextrógiro ou levógiro (GEMAEL,1981). Um sistema dextrógiro é aquele onde um observador situado no semi-eixo OZ vê o semi-eixo OX coincidir com o semi-eixo OY através de um giro de 90° no sentido anti-horário. Um sistema levógiro é aquele em que o semi-eixo OX coincide com o semi-eixo OY através de um giro de 90° no sentido horário como mostra a Figura 12



**Figura 12: Sistemas Levógiro e Dextrógiro**

Fonte: A autora

### 3.6.1. Materialização de sistemas

Para a materialização de um sistema de referência são necessários ajustamentos relacionando os pontos físicos com um determinado referencial. O resultado estabelece um conjunto de coordenadas para as estações que constituem a materialização de um sistema de referência (VOLPI 2007).

#### 3.6.1.1. Sistema da Estação Total

De acordo com Gonçalves (2009), o Sistema da Estação Total tem como origem o seu ponto cardam, o eixo Y coincide com sua linha de visada quando está colimada em  $0^\circ$  (direção horizontal) positivo no sentido do operador para o objeto e o eixo Z coincide com a vertical local, sendo positivo para cima. O eixo X, perpendicular a estes, torna o sistema dextrogiro.



**Figura 13: Sistema da Estação Total**

**Fonte: A autora**

### **3.6.1.2. Sistema Topográfico**

A definição de um sistema topográfico depende da extensão da área a ser levantada, que pode ser um município inteiro ou apenas um lote urbano (RODRIGUES, 2008).

- Origem: um ponto qualquer ou no centro da área a ser mapeada - para reduzir o efeito da curvatura terrestre -, na superfície física ou na superfície do nível médio da região ou nível médio dos mares - a fim de homogeneizar as distâncias -, corrigindo-se o efeito da altitude;
- Eixo z: possui a direção definida pelos pontos nadir e zênite do ponto de origem, sendo seu sentido positivo dirigido para o zênite;
- Eixo y: sua direção é definida pela tangente ao meridiano que passa pela origem e o sentido dirigido para o norte é o positivo;
- Eixo x: esse é perpendicular aos eixos z e y e o sentido positivo é o que torna o sistema dextrogiro, também conhecido como o sistema da mão direita.

### **3.6.1.3. Sistema de um CAD**

O CAD possui um sistema de coordenadas próprio e do usuário, sendo este chamado *User Coordinate System* (Sistema de Coordenadas do Usuário), conhecido como UCS. Este sistema pode ter origem e direções alteradas de acordo com cada necessidade (CESAR JR, 2009).

As coordenadas no UCS são fornecidas na forma X, Y e Z sendo, por *default*, X positivo na direção horizontal para a direita, podendo ser alterado de acordo com cada usuário, e os eixos Y e Z perpendiculares a X seguindo a regra da mão direita.

Segundo César Jr (2009) o Sistema de Coordenadas Global do CAD (WCS) tem suas orientações fixas e não podem ser alteradas pelo usuário. O eixo X é positivo para leste e sentido anti-horário, o eixo Y positivo para o norte e o eixo Z tem a orientação positiva saindo do papel, formando assim, um sistema dextrogiro.

## **3.7. MÉTODOS DE POSICIONAMENTO MEDINDO ÂNGULOS E DISTÂNCIAS**

Existem diversas técnicas de posicionamento das quais podemos citar: técnicas topográficas, onde são medidos ângulos e/ou distâncias; posicionamento por satélite; laser scanner; etc.

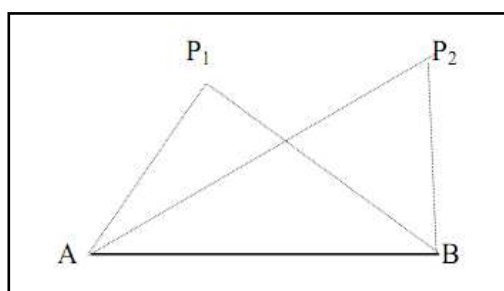
No posicionamento por satélite, medindo as distâncias satélites-antena do receptor, contaminadas pelo não sincronismo dos relógios, ou fases das portadoras dos sinais emitidos por pelo menos quatro satélites, é possível estimar as coordenadas X, Y e Z do centro de fase da antena.

Em posicionamento por satélite tem-se o absoluto com a utilização de um receptor apenas, com a obtenção das coordenadas em tempo real, utilizam o código C/A (menor precisão). O posicionamento relativo usa um receptor base de coordenadas conhecidas, pós-processado e de maior precisão devido ao código C/A e portadora L1 e L2 (OLIVEIRA 2011).

De acordo com Vosselman *et al* (2007) o sistema de varredura a laser é uma nova tecnologia projetada para a medição de direções e distâncias de pontos em uma superfície, baseada na emissão de um pulso laser que disparado na direção dos objetos e ao atingir as superfícies, parte do pulso é refletido na direção do sensor.

Além destas técnicas de posicionamento, tem-se aquelas onde se observam ângulos e/ou distâncias que são: irradiação, interseção angular ou linear, interseção a ré e trilateração.

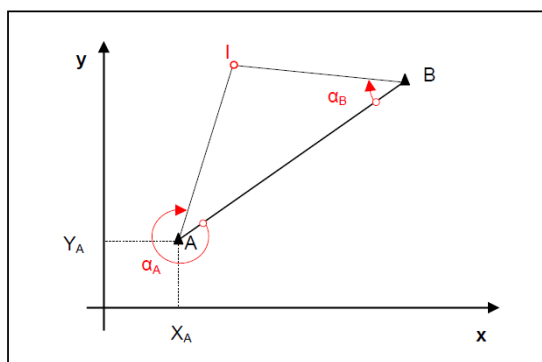
No método da interseção dois pontos temáticos ( $P_1$  e  $P_2$ ) são definidos pelas interseções das visadas realizadas a partir de dois pontos de apoio (A e B) como mostrado da Figura 14. Neste método a distância entre A e B deve ser conhecida e a interseção pode ser angular e linear.



**Figura 14: Método da Interseção**

**Fonte: A autora**

O método da interseção angular deve ser empregado quando são medidos somente direções horizontais dos pontos conhecidos ao temático (RODRIGUES, 2008). A Figura 15 ilustra um exemplo de interseção angular.

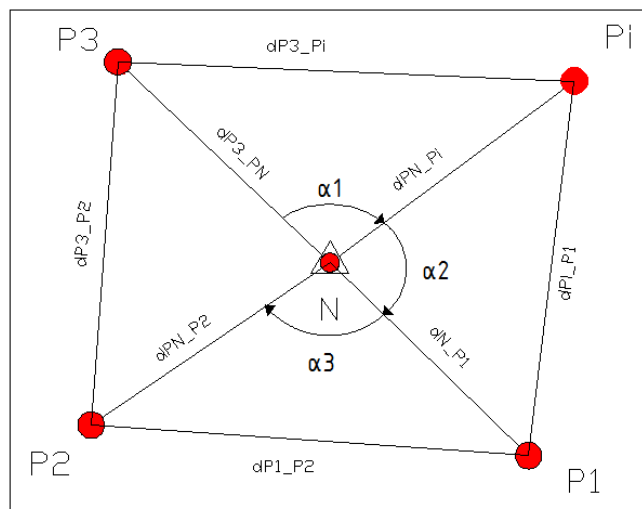


**Figura 15: Método da interseção angular**

**Fonte: Rodrigues, 2008**

O método de interseção a ré também conhecido como problema de Pothenot permite a determinação da posição de um ponto ocupado a partir de visadas a pontos conhecidos (RAMOS, RODRIGUES e ANDRADE, 2007).

A interseção a ré é feita com as medições de direções de um ponto qualquer a pontos de coordenadas conhecidas ( $P_i$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  – Figura 16). A solução das coordenadas do ponto que se quer determinar (ponto  $N$ ) é baseada na interseção de pelo menos três linhas retas.



**Figura 16: Interseção a Ré**

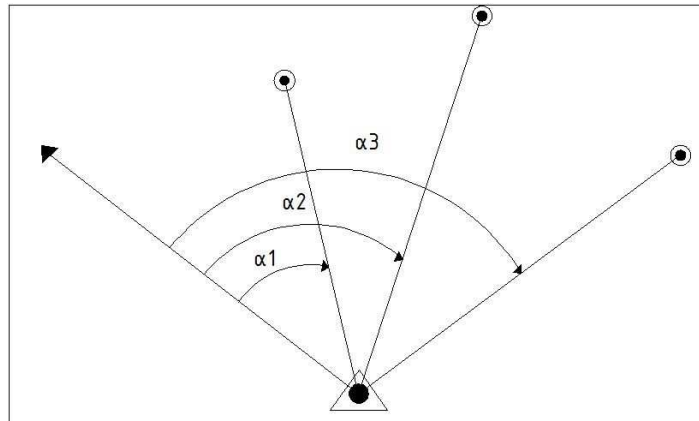
Fonte: Adaptada de KAHMEN e FAIG (1998) *apud* SILVA et al (2006)

### 3.7.1. Irradiação

A atividade de coleta de dados em campo do mundo real é o que se chama de levantamento e a atividade de extrair dados de uma descrição gráfica ou numérica e representá-lo no espaço real, é o que se chama de locação (RODRIGUES, 2008). As distâncias e direções que são medidas em campo durante o levantamento são transformados em coordenadas, e para uma locação as coordenadas são transformadas em ângulos e distâncias para a materialização do objeto no local projetado.

Levantamento topográfico por irradiação consiste em estacionar o equipamento em um único ponto e deste ponto as irradiações (visadas) são feitas nos pontos de interesse (detalhes), com o intuito de determinar suas

coordenadas (X, Y e Z). Um termo utilizado é a irradiação múltipla, onde a partir de um ponto de coordenadas conhecidas e uma direção também conhecida, obtêm-se as coordenadas de vários pontos. A Figura 17 mostra um exemplo de multi-irradiação.



**Figura 17: Multi-irradiações**

Fonte: A autora

Nesse método o equipamento fica estacionado sobre um ponto e faz-se a varredura dos elementos de interesse medindo-se as direções e distâncias para cada um deles (VEIGA *et al*, 2007).

Para se calcular as coordenadas (X, Y e Z) de pontos irradiados, também chamados de pontos temáticos, devem-se conhecer, no mínimo, as coordenadas de uma estação e um azimute de referência ou as coordenadas de duas estações, (RODRIGUES, 2008).

Na Figura 18, onde:

$Z_{AP}$  = distância zenital do ponto A para o ponto P;

$AZ_{AP}$  = azimute do alinhamento da estação ao ponto irradiado;

$x_P, y_P$  e  $z_P$  = diferenças de coordenadas de A para P;

$D_{AP}$  = distância inclinada entre os pontos A e P;

representa-se o posicionamento por irradiação.

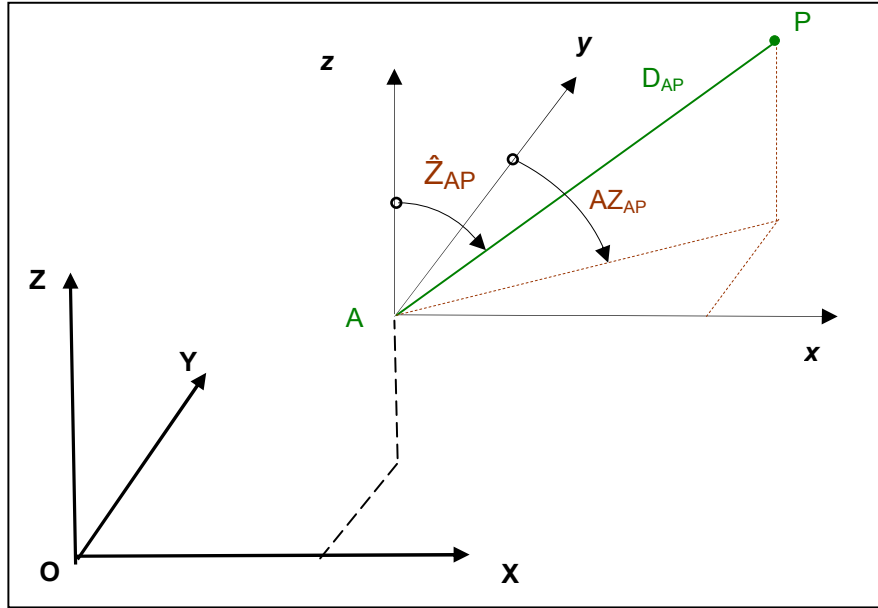


Figura 18: Posicionamento por irradiação

Fonte: Modificado de Rodrigues (2008)

Da Figura 18, verifica-se que as coordenadas dos pontos irradiados podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned}
 X_p &= X_A + D_{AP} \times \text{sen} \hat{Z}_{AP} \times \text{sen} AZ_{AP} \\
 Y_p &= Y_A + D_{AP} \times \text{sen} \hat{Z}_{AP} \times \text{cos} AZ_{AP} \\
 Z_p &= Z_A + D_{AP} \times \text{cos} \hat{Z}_{AP}
 \end{aligned} \tag{3}$$

### 3.7.1.1. Propagação de variâncias

As incertezas nas coordenadas do ponto A, nos ângulos e distâncias medidas se propagam às coordenadas X, Y e Z de P.

Aplicando a lei de propagação da covariância, a MVC das coordenadas do ponto irradiado, no ponto P, pode ser determinada por:

$$C_{XYZ(3 \times 3)} = J_{(3 \times 3)} \times C_{obs(6 \times 6)} \times J^T \tag{4}$$

Onde;

$J$  = matriz das derivadas parciais de  $X_p, Y_p$  e  $Z_p$  em relação às observações;  
 $C_{obs}$  = matriz das covariâncias das observações, ou seja, MVC de  $X_A, Y_A, Z_A, D_{AP}, AZ_{AP}$  e  $\hat{Z}_{AP}$

### 3.7.2. Trilateração

Medindo distâncias horizontais, o método trilateração pode ser empregado para se estimar as coordenadas de pontos desconhecidos. Na prática essas medidas contém erros e esses erros são estimados por métodos estatísticos, (MURPHY *et al* 1999).

Para empregar a trilateração há necessidade de se conhecer, no mínimo, as coordenadas de um ponto e um azimuth, ou as coordenadas de dois pontos.

Ainda de acordo com Murphy, Navidi *and* Rereman (1999), ao eliminar a necessidade de medir ângulos, a trilateração facilita a implantação de sistemas automatizados em tempo real. A Figura 19 mostra uma rede de triângulos onde à medida que a rede de triângulos é estendida, os pontos de apoio desconhecidos se afastam dos conhecidos e com isso os erros nas coordenadas determinadas aumentam, podendo ultrapassar a tolerância previamente fixada (RODRIGUES, 2008).

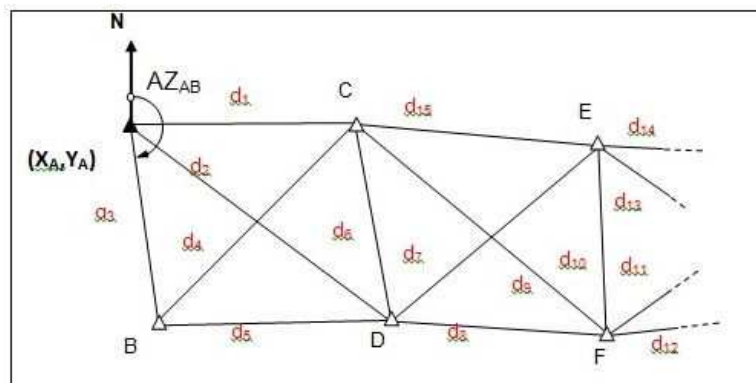


Figura 19: Croqui de uma Trilateração  
 Fonte: Rodrigues (2008)

Utilizando alguns pontos como pontos de apoio da rede, os outros serão parâmetros, e o número de equações trabalhadas na Trilateração estará de acordo com o número de observações. De acordo com Mendonça *et al* (2010) para cada distância medida, forma-se uma equação de distância do tipo:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (5)$$

Empregando o método paramétrico de ajustamento das observações, as coordenadas incógnitas serão estimadas bem com suas covariâncias.

### **3.8. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**

Transformações geométricas são instrumentos fundamentais para os trabalhos relacionados à descrição, definição e monitoramento de espaços (RODRIGUES, 2009).

#### **3.8.1. Transformação isogonal**

A transformação Isogonal (ou Transformação de similaridade, Transformação conforme ou Transformação de Helmert) no espaço tridimensional, considerando translação, rotação e fator de escala é o modelo aplicado quando a forma deve ser preservada.

No espaço em três dimensões (3D), a transformação isogonal apresenta 3 translações (tx, ty, tz), 3 rotações ( $k, \varphi, \omega$ ) e 1 fator de escala (s), totalizando assim 7 parâmetros (RODRIGUES, 2009).

As três translações são necessárias pela não coincidência da origem dos sistemas, as rotações são justificadas para expressar o não paralelismo

entre eixos e a escala é requerida para uniformizar a métrica dos sistemas (PINO, FIRKOWSKI, 2009).

De acordo com Wolf e Ghilani (2006), a transformação isogonal no espaço 3D tem como modelo matemático:

$$\begin{aligned} X &= s \cdot (m_{11} \cdot x + m_{21} \cdot y + m_{31} \cdot z) + t_X \\ Y &= s \cdot (m_{12} \cdot x + m_{22} \cdot y + m_{32} \cdot z) + t_Y \\ Z &= s \cdot (m_{13} \cdot x + m_{23} \cdot y + m_{33} \cdot z) + t_Z \end{aligned} \quad (6)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{bmatrix}$$

sendo a matriz  $M$ , a matriz de rotação obtida pelo produto das três matrizes  $R_z(k)$ ,  $R_y(\varphi)$  e  $R_x(\omega)$ , onde:

$$R_z(k) = \begin{bmatrix} \cos(k) & -\text{sen}(k) & 0 \\ \text{sen}(k) & \cos(k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \text{sen}(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$R_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & -\text{sen}(\omega) \\ 0 & \text{sen}(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}$$

Assim

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \cos(k) \cdot \cos(\varphi) \\
m_{12} &= -\text{sen}(k) \cdot \cos(\varphi) \\
m_{13} &= \text{sen}(\varphi) \\
m_{21} &= \cos(k) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{sen}(\omega) + \text{sen}(k) \cdot \cos(\omega) \\
m_{22} &= -\text{sen}(k) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \text{sen}(\omega) + \cos(k) \cdot \cos(\omega) \\
m_{23} &= -\cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\omega) \\
m_{31} &= -\cos(k) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\omega) + \text{sen}(k) \cdot \text{sen}(\omega) \\
m_{32} &= \text{sen}(k) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\omega) + \cos(k) \cdot \text{sen}(\omega) \\
m_{33} &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega)
\end{aligned}$$

### 3.8.2. Transformação inversa

Aplicando o modelo inverso ao descrito na equação (6), as coordenadas do sistema XYZ serão transformadas para o sistema xyz empregando a equação (8).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X - t_X \\ Y - t_Y \\ Z - t_Z \end{bmatrix} \quad (8)$$

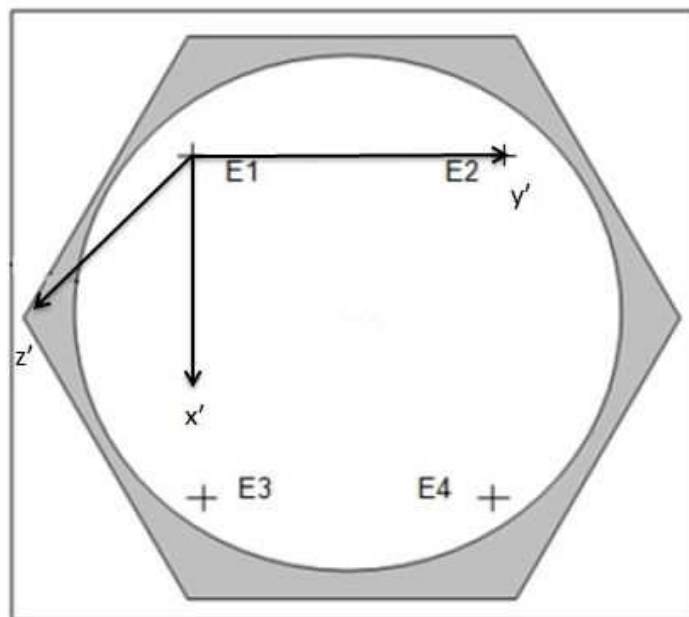
## 4. METODOLOGIA

### 4.1. METODOLOGIA EMPREGADA POR GONÇALVES (2009)

Gonçalves (2009) em um de seus experimentos fixou um espelho em uma placa metálica e após esta, determinou a atitude do mesmo no espaço para se ter um plano do espelho. Foi realizado um levantamento de três pontos na superfície do espelho, medindo-se as direções horizontais, distâncias inclinadas e ângulos zenitais, estando à estação total a cerca de dois metros de

distância do espelho. Para um melhor resultado, foram fixadas 04 marcas fiduciais nos cantos do espelho e a distância entre elas medidas com interferômetro tendo uma precisão micrométrica. Os alvos a serem levantados através do espelho foram fixados em uma mira horizontal de dois metros de comprimento.

No método empregado trabalhou-se com dois sistemas de coordenadas, um chamado de sistema principal, paralelo ao sistema da estação e transladado de 100 metros, ou seja, a origem do centro da luneta com coordenadas (100,100,100) metros e o outro, chamado sistema do espelho. O sistema do espelho tem como origem a marca fiducial E1, gravada na superfície do espelho, Figura 20. O eixo  $y'$  coincide com a reta que passa pelas marcas E1 e E2, sendo o plano formado pelos eixos  $y'$  e  $x'$  coincidente com a superfície do espelho, o eixo  $z'$  perpendicular à mesma, tornando o sistema levogiro.



**Figura 20: Marcas Fiduciais e Sistema do Espelho**

**Fonte: ADAPTADO de GONÇALVES ,2009**

As distâncias médias entre as marcas fiduciais são apresentadas na Tabela 1 assim como seus desvios.

**Tabela 1: Distâncias ajustadas dos alvos de referência e seus desvios**

**Fonte: Tabela 2, pág 85, Gonçalves (2009)**

Alvos de referência	Distâncias (mm)	Desvios (mm)
E1 – E2	99,372	0,011
E1 – E3	100,659	0,002
E1 – E4	141,464	0,007
E2 – E3	141,645	0,007
E2 – E4	100,683	0,007
E3 – E4	99,628	0,004

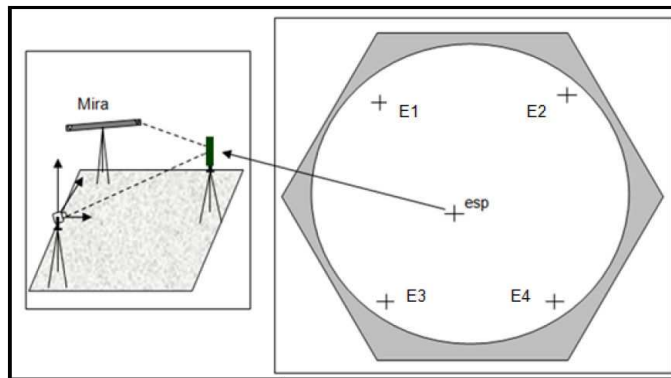
As coordenadas das marcas fiduciais no sistema da estação foram determinadas utilizando as equações da irradiação, equação. (3).

**Tabela 2: Coordenadas das Marca fiduciais no sistema da estação**

**Fonte: Calculadas a partir de Gonçalves (2009), Teste 3, posição 3 do espelho, pág. 113**

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
E1	96799	99892	99946
E2	96800	99894	100047
E3	96848	99980	100046
E4	96849	99979	99945

As coordenadas dos alvos virtuais também foram determinadas utilizando equações da irradiação, diferindo apenas na distância inclinada que passa a ser a distância total entre a estação e o espelho e o espelho e o objeto, a distancia horizontal e a distância zenital são as mesmas de um ponto denominado 'esp', sendo este materializado na superfície do espelho no momento da visada direta do alvo, sendo que cada alvo possui um ponto 'esp' diferente dos demais como mostra a Figura 21 (GONÇALVES, 2009).



**Figura 21: Alvos de referência e ponto 'esp'**  
**Fonte: GONÇALVES 2009**

A Tabela 3 mostra as coordenadas dos alvos virtuais, no sistema da estação, determinadas por Gonçalves (2009)

**Tabela 3: Coordenadas dos alvos virtuais no sistema da estação**

**Fonte: Calculadas a partir de Gonçalves (2009), Teste 3, posição 3 do espelho, pág. 113**

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
M1	71196	99487	100064
M2	71195	99330	100058
M3	71194	99147	100059
MA	71203	99751	100061

**Tabela 4: Coordenadas dos alvos reais medidas com a estação total**

**Fonte: Gonçalves (2009), Teste 3 pág. 100**

	X <sub>obs</sub> (mm)	Y <sub>obs</sub> (mm)	Z <sub>obs</sub> (mm)
M1	109791	77822	99942
M2	109657	77739	99937
M3	109500	77644	99939
MA	110013	77963	99939

**Tabela 5: Distâncias entre os alvos reais determinadas por Gonçalves (2009)**

Fonte: Gonçalves (2009), Tabela 16, pág. 98

Segmentos	Determinadas por Gonçalves (2009)(mm)
MA-M1	264
M1-M2	157
M2-M3	184

Para a transformação das coordenadas do sistema principal para o sistema do espelho e vice e versa é necessário conhecer no mínimo as coordenadas de quatro pontos nos dois sistemas, sendo estes os pontos das marcas fiduciais (E1, E2, E3 e E4). As coordenadas destes pontos foram calculadas pela equação (9) que retorna a medida algébrica da projeção de um vetor sobre o outro (GONÇALVES, 2009).

$$proj_u \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (9)$$

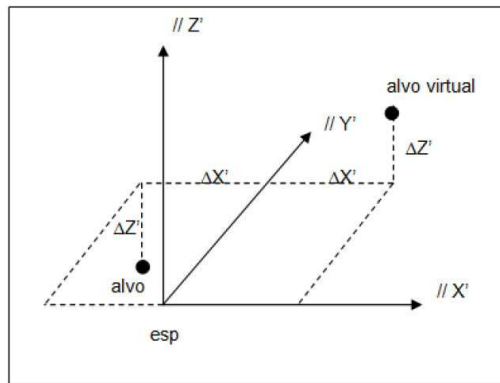
Onde:

$\vec{u}$  – vetor que define o eixo do sistema cartesiano do espelho

$\vec{v}$  – vetor que terá sua medida algébrica projetada

De acordo com Gonçalves (2009), sendo conhecida a coordenada do ponto inicial no sistema do espelho  $(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0)m$ , para obter a coordenada do ponto final do vetor no mesmo sistema, adiciona-se essa medida algébrica à coordenada do ponto inicial, no eixo utilizado como base para a projeção. Para transformar essas coordenadas para o sistema da estação (sistema principal) optou-se por determinar as matrizes de rotação e translação da transformação afim com as mesmas coordenadas das marcas fiduciais e da estação origem os quais têm as coordenadas conhecidas nos dois sistemas.

A seguir foi realizada a transformação das coordenadas do sistema principal para o sistema do espelho dos alvos virtuais e estes foram refletidos nos eixos  $x'$  e  $z'$  sendo a origem o ponto 'esp' como mostra a Figura 22.



**Figura 22: Reflexão do alvo virtual**

Fonte: GONÇALVES, 2009

Para a reflexão, inicialmente, foram calculadas as diferenças entre as coordenadas dos pontos x e z dos pontos 'esp' e alvo virtual da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'_{esp} - x'_{alvovirtual} \\ \Delta z' &= z'_{esp} - z'_{alvovirtual}\end{aligned}\tag{10}$$

A seguir adicionaram-se os valores  $\Delta x'$  e  $\Delta z'$  as respectivas coordenadas do ponto 'esp' obtendo-se assim as coordenadas do alvo desejado no sistema do espelho.

$$\begin{aligned}x'_{alvo} &= x'_{esp} + \Delta x' \\ z'_{alvo} &= z'_{esp} + \Delta z'\end{aligned}\tag{11}$$

Para calcular as coordenadas do alvo no sistema principal utilizou-se os parâmetros da transformação afim retornando o valor das coordenadas do alvo no sistema principal.

Segundo Gonçalves (2009), “Nos testes anteriormente realizados, detectou-se uma diferença padrão entre as coordenadas obtidas de forma indireta e as de forma direta para a mesma posição do espelho...” e

“Dessa forma, se as coordenadas do alvo MA forem conhecidas pode-se corrigir as coordenadas dos alvos M1, M2, M3 e M4 com a diferença obtida no alvo MA.

## 4.2. METODOLOGIA PROPOSTA

Com os dados apresentados por Gonçalves (2009), mostrados nas Tabelas de 1 a 4, iniciou-se a programação do modelo matemático utilizado na trilateração topográfica, para obter a distância entre as marcas fiduciais do espelho ajustadas. A seguir, elaborou-se um software para transformação Isogonal no espaço 3D para estimar os parâmetros - 03 rotações, 03 translações e um fator de escala - que relacionam os sistemas da estação e do espelho. As coordenadas dos alvos virtuais foram transformadas para o sistema do espelho e refletidas em relação ao plano do espelho, resultando em Coordenadas dos alvos reais no sistema do espelho. Para finalizar, as coordenadas dos Alvos Reais foram transformadas para o Sistema da Estação.

### 4.2.1. Estimativa das coordenadas das marcas fiduciais, e de sua MVC, no sistema do espelho

Gerou-se quatro marcas fiduciais (F1, F2, F3 e F4) na superfície do espelho, Figura 23. O sistema do espelho, adotado na metodologia proposta, tem como origem a marca fiducial F1. O eixo x passa pelas marcas F1 e F4, dirigido para a direita. O eixo z, perpendicular ao eixo x, define o plano do espelho e tem o sentido positivo dirigido para cima. O eixo y torna o sistema dextrogiro. Desta forma:

$$x_{F1} = z_{F1} = 0; z_{F4} = 0; y_{F1} = y_{F2} = y_{F3} = y_{F4} = 0 \quad (12)$$

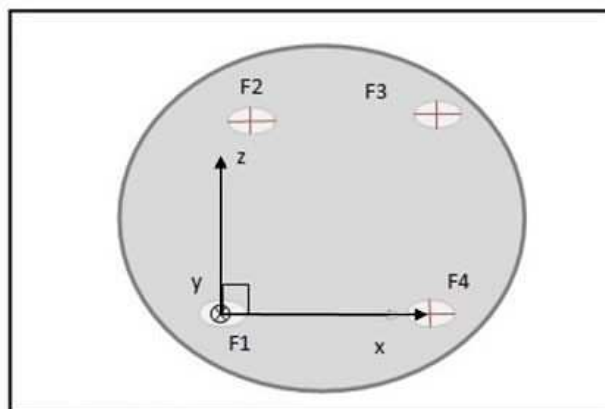


Figura 23: Sistema do Espelho

Fonte: A autora

Com o sistema do espelho assim materializado, fica faltando estimar as coordenadas  $x$  e  $z$  das marcas F2 e F3 e  $x$  da marca F4, ou seja, cinco parâmetros.

Para a estimativa destas coordenadas no sistema do espelho, as distâncias medidas entre elas ( $d_{12}$ ,  $d_{13}$ ,  $d_{14}$ ,  $d_{23}$ ,  $d_{24}$  e  $d_{34}$ ) foram ajustadas empregando o método paramétrico.

Como as distâncias medidas estão no plano  $xz$ , o modelo funcional das observações é o seguinte:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (13)$$

Como valores aproximados para os parâmetros, vetor  $x_0$  foram usados:

$$x_{F2} = 0; \quad z_{F2} = d_{12}; \quad x_{F3} = d_{14}; \quad z_{F3} = d_{12}; \quad x_{F4} = d_{14} \quad (14)$$

A ponderação das distâncias observadas foi realizada empregando os desvios obtidos por Gonçalves (2009), Tabela 1.

As correções aos parâmetros aproximados, vetor  $x$ , foram estimadas empregando a equação:

$$x = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot (L_b - L_0) \quad (15)$$

Sendo;

$A$  = matriz das derivadas parciais das observações em relação aos parâmetros;

$P$  = a matriz dos pesos;

$L_b$  = o vetor das observações;

$L_0$  = o vetor calculado

Após a convergência das iterações e análise da qualidade do ajustamento, a MVC dos parâmetros foi determinada por:

$$\hat{C}_{XYZ} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \quad (16)$$

Onde;

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{GL} \quad (17)$$

Sendo,

$V$  = vetor dos resíduos das observações e

$GL$  = o grau de liberdade.

#### 4.2.2. Estimação dos parâmetros que relacionam o sistema do espelho com o sistema da Estação e de suas covariâncias

Com as coordenadas das marcas fiduciais no sistema do espelho, ajustadas por trilateração,  $pes(i)_{esp}$  e no sistema da estação,  $POS(i)_{Est}$ , utilizou-se como modelo funcional o da transformação isogonal para estimar os sete parâmetros – 03 translações, 03 rotações e 01 fator de escala – que relacionam estes dois sistemas. Pressupondo uma transformação passiva de sistemas dextrogiros e rotação horária, o modelo matemático para estimar os parâmetros de transformação é:

$$POS(i)_{Est} = s \cdot M \cdot pes(i)_{esp} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Sendo,  $POS(i)_{Est}$  o vetor das observações, ou seja, o vetor das coordenadas X, Y e Z das quatro marcas fiduciais, no sistema da estação,  $s$  o fator de escala,  $t_X, t_Y$  e  $t_Z$  as translações utilizadas e  $M$  a matriz de rotação.

Para ajustar as coordenadas observadas seguiu-se os seguintes passos:

- a) Para vetor dos sete parâmetros e das doze observações, adotou-se, respectivamente:

$$X_{a(7 \times 1)} = [\omega \text{ fi k } t_X \ t_Y \ t_Z \ s]^T \quad (19)$$

Com as seguintes unidades

$$X_{a(7 \times 1)} = [\text{rad rad rad mm mm mm adm}]^T$$

$$L_{b(12 \times 1)} = [ \ ]mm \quad (20)$$

- b) Para modelo estocástico, adotou-se a seguinte matriz variância covariância das observações:

$$C_{Lb(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} mm^2 \quad (21)$$

Admitindo portanto, que as coordenadas das marcas fiduciais, medidas com estação total, são observações não correlacionas e com incerteza de 1 mm. Foram realizados testes admitindo as coordenadas observadas com precisão de décimo de milímetro.

A matriz dos pesos é a inversa de MVC, ou seja,

$$P = \sigma_0^2 \cdot C_{Lb}^{-1} \quad (22)$$

c) Para valores dos parâmetros aproximados, utilizou-se zero para as rotações; as coordenadas  $X_{F1}$ ,  $Y_{F1}$ ,  $Z_{F1}$ , da primeira marca fiducial no sistema da estação, para as translações e 1 para o fator de escala.

d) Cálculo dos vetores  $L_0$  e  $L$ :

$$\begin{aligned} F(X_0) &= L_0 \\ L &= L_b - L_0 \end{aligned} \quad (23)$$

Sendo a equação de observação para cada ponto dada por:

$$\text{POS}(i)_{\text{Est}} = s \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i\text{Esp}} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (24)$$

e) Cálculo dos elementos da matriz design, matriz  $A$ , matriz das derivadas parciais no ponto:

As derivadas parciais das equações de observações em relação aos parâmetros foram calculadas usando a função *jacobian* do MATLAB. A matriz Jacobiana é matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial. Se uma função é diferenciável num ponto, a sua derivada é dada em coordenadas pela jacobiana, mas uma função não precisa de ser diferenciável para a existência da jacobiana; basta que as derivadas parciais existam.

f) Cálculo do vetor  $(x)$  das correções aos valores aproximados dos parâmetros:

$$x = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot L \quad (25)$$

g) Cálculo dos parâmetros, vetor  $X_a$ :

$$X_a = X_0 + x \quad (26)$$

Caso a correção a algum parâmetro seja maior que 0,00001 (independente da unidade) retorna-se ao passo d.

Após a convergência do processamento realiza-se os cálculos das informações estatísticas

h) Cálculo do vetor dos resíduos  $V$  das observações:

$$V = Ax - L \quad (27)$$

i) Cálculo da variância de referencia *posteriori*  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{GL} \quad (28)$$

j) Cálculo da MVC e dos desvios dos parâmetros

$$C_{par} = \sigma^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \quad (29)$$
$$desvio = (diagonal(C_{par}))^{0,5}$$

Estimados os parâmetros que relacionam os dois sistemas, o passo seguinte foi transformar as coordenadas dos alvos virtuais, medidas no sistema da estação, para o sistema do espelho, propagando as covariâncias dos parâmetros e das coordenadas medidas.

#### **4.2.3. Transformação das coordenadas dos alvos virtuais, no sistema da estação, para o sistema do espelho, propagando as covariâncias**

Com os parâmetros estimados, empregando o modelo isogonal inverso transformou-se as coordenadas dos alvos virtuais, no sistema da estação, para o sistema do espelho. Assim as coordenadas dos alvos virtuais no sistema do espelho foram determinadas empregando o modelo matemático expresso pela equação 30.

$$P_{vir_{esp}} = \frac{1}{s} \cdot R \cdot \begin{bmatrix} X_{Vir\_Est} \\ Y_{Vir\_Est} \\ Z_{Vir\_Est} \end{bmatrix} - \frac{1}{s} \cdot R \cdot \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{bmatrix} \quad (30)$$

Sendo  $R$  a inversa da matriz  $M$  calculada empregando os ângulos estimados.

Nesta equação são variáveis aleatórias os parâmetros de transformação e as coordenadas dos alvos virtuais no sistema da estação.

A MVC dos parâmetros de transformação é  $C_{par}$ , calculados com a equação (29). Para as coordenadas dos alvos virtuais, no sistema da estação, foram admitidas observações não correlacionadas e com incertezas de 1 mm ou 0,1 mm.

Juntando a MVC dos parâmetros com a das coordenadas medidas, tem-se:

$$C_{par_{XYZ}(10 \times 10)} = \begin{bmatrix} C_{par(7 \times 7)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_{XYZ(3 \times 3)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias à equação (30), tem-se:

$$C_{XYZ_{vir}} = J \cdot C_{par_{XYZ}} \cdot J^T \quad (32)$$

Onde  $J$  é a matriz das derivadas parciais da Equação (30), em relação às variáveis aleatórias nela contidas, que foi calculada empregando a função *jacobian* do MATLAB.

Calculadas as coordenadas dos alvos virtuais no sistema do espelho e estimadas suas covariâncias, o passo seguinte foi refletir estas coordenadas e transformá-las no sistema da estação, propagando novamente as covariâncias.

#### **4.2.4. Reflexão das coordenadas dos alvos virtuais, no sistema do espelho**

Como as coordenadas foram refletidas apenas no eixo  $y$ , bastou multiplicar por  $-1$  as coordenadas nesse eixo para todos os pontos.

Refletidas as coordenadas em relação ao eixo  $y$ , as mesmas foram transformadas para o sistema de estação.

#### **4.2.5. Transformação das coordenadas dos alvos virtuais, refletidas, para o sistema da estação, com propagação das covariâncias**

Empregando o modelo isogonal representado pela Equação (6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} X_{Est} \\ Y_{Est} \\ Z_{Est} \end{bmatrix} = S \cdot M \cdot \begin{bmatrix} X_{Esp} \\ y_{refeltido_{Esp}} \\ Z_{Esp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (33)$$

1.

Ou seja, as coordenadas dos alvos reais no sistema da estação.

Para propagar as covariâncias dos parâmetros e das coordenadas virtuais utilizou-se uma nova matriz jacobiana ( $D$ ) das equações (33), também determinadas pela função *jacobian* do MATLAB.

A matriz das covariâncias dos parâmetros, e das coordenadas virtuais, empregada foi:

$$C_{par\_xyz\_virtuais} (10 \times 10) = \begin{bmatrix} C_{par(7 \times 7)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{xyz\_virtuais} (3 \times 3) \end{bmatrix} \quad (34)$$

A matriz das covariâncias das coordenadas dos alvos reais no sistema da estação, é dada por:

$$C_{XYZ_{Est}} = D \cdot C_{par\_xyz\_virtuais} \cdot D^T \quad (35)$$

E os desvios por:

$$desvio_{reais} = raiz(diagonal(C_{XYZ_{Est}})) \quad (36)$$

O primeiro teste, utilizado para a validação do programa, foi feito utilizando dados de Gonçalves (2009) do teste 3 posição 3 do espelho. Utilizou-se um espelho de aproximadamente 10 centímetros de distância entre as marcas fiduciais, sendo as suas coordenadas e a dos alvos virtuais, no sistema da estação, com precisão de milímetro.

A variância de referência da trilateração com as observações de Gonçalves (2009), admitindo os desvios da Tabela 1, foi de 2,3; levando a um desvio máximo na coordenada  $z_{F2}$  de 0,015 mm, ou seja, 15  $\mu$ m.

As coordenadas dos alvos reais estimadas usando a metodologia de processamento proposta estão na Tabela 6.

**Tabela 6: Coordenadas dos Alvos reais processando os dados das Tabelas 1, 2 e 3, com o software desenvolvido**

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
A1	109615	77727	100387
A2	109481	77645	100380
A3	109324	77550	100380
A4	109838	77869	100386

Na tabela 7 estão as distâncias entre os alvos reais calculadas a partir das coordenadas aqui estimadas e as determinadas e observadas, empregando interferômetro, por Gonçalves (2009).

**Tabela 7: Distâncias entre os alvos reais (mm)**

Segmentos	Estimadas pela metodologia proposta	Determinadas por Gonçalves (2009)	Medidas usando Interferômetro
AA-A1	264	264	263
A1-A2	157	158	157
A2-A3	183	184	184

Verifica-se pelos dados da Tabela 7 que praticamente não há diferença entre as distâncias estimadas e as determinadas e observadas por GONÇALVES (2009) validando, portanto a metodologia de processamento aqui proposta. Constata-se também que o parâmetro de escala foi bem recuperado e o que o uso de espelho não trouxe nenhum problema na estimativa das distâncias entre os alvos.

Comparando as coordenadas da Tabela 6 com as medidas diretamente por Gonçalves (2009), Tabela 4, tem-se os dados da Tabela 8;

**Tabela 8: Diferenças entre as coordenadas da Tabela 4, calculadas por Gonçalves, e as da Tabela 6.**

	$d_x(\text{mm})$	$d_y(\text{mm})$	$d_z(\text{mm})$
A1	200	110	-359
A2	200	109	-358
A3	200	108	-356
AA	200	110	-361

Portanto, as diferenças entre as coordenadas estimadas e determinadas por GONÇALVES (2009) estão na casa dos centímetros, chegando a mais de 36 cm, como mostra a Tabela 8. Como as diferenças em X, Y e Z são praticamente as mesmas para os diferentes alvos, GONÇALVES (2009) resolveu este problema medindo, sem apoio do espelho, as coordenadas de um alvo tomado como referência, determinando as diferenças nas coordenadas e corrigindo as demais adicionando estas componentes vetoriais.

Verificadas estas diferenças, os dados e observações de Gonçalves (2009) foram processados admitindo-se precisões de décimo de milímetro e centésimo de milímetro para as coordenadas observadas com a estação.

Com a precisão de centésimo de milímetro, encontrou-se um valor para a variância de referência na trilateração de aproximadamente 3 e na transformação isogonal de 48.000, revelando que assim se está superestimando a precisão das coordenadas observadas com estação total.

Os resultados do processamento dos mesmos dados considerando décimo de milímetro estão nas Tabelas 9 e 10.

**Tabela 9: Coordenadas dos alvos reais, processando os dados das tabelas 1, 2 e 3, considerando as coordenadas medidas com estação com precisão de décimo de milímetro**

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
A1	109757	77806	100145
A2	109623	77724	100139
A3	109467	77627	100140
AA	109978	77949	100143

**Tabela 10: Diferença entre as coordenadas da Tabela 4, medidas por Gonçalves (2009), e as da Tabela 9.**

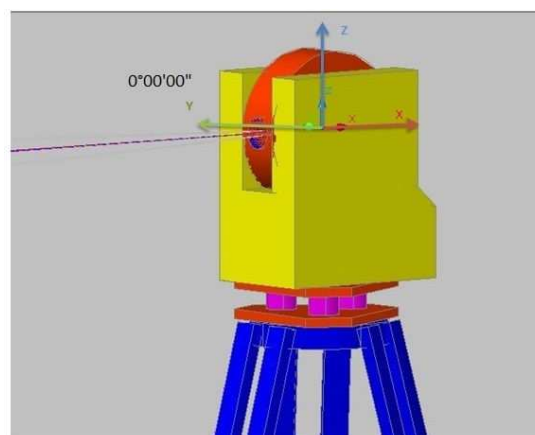
	$d_x(\text{mm})$	$d_y(\text{mm})$	$d_z(\text{mm})$
A1	34	16	-203
A2	34	16	-202
A3	33	16	-201
AA	36	14	-204

Observa-se então, que as discrepâncias entre as coordenadas medidas e estimadas dos alvos reais diminuíram significativamente, quando se considera as coordenadas medidas com a estação total, tanto das marcas fiduciais como dos alvos virtuais, com precisão de décimo de milímetro.

Validado o programa com os dados de Gonçalves (2009), deu-se o início a simulação de diversas situações empregando um software de CAD, onde outros tamanhos de espelhos foram testados.

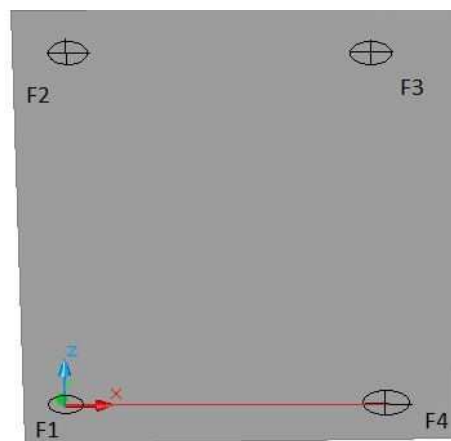
#### **4.3. SIMULAÇÃO DO EXPERIMENTO EM UM CAD**

Para a realização das simulações, uma Estação Total em três dimensões foi desenhada, com a origem do Sistema de Coordenadas (X,Y,Z) no ponto cardam da luneta da Estação, o eixo Y coincide com sua linha de visada quando está colimada em  $0^\circ$  (direção horizontal) positivo no sentido do operador para o objeto e o eixo Z coincide com a vertical local, sendo positivo para cima. O eixo X, perpendicular a estes, torna o sistema dextrogiro, Figura 24.



**Figura 24: Sistema da Estação Total em ambiente CAD**  
**Fonte: A autora**

Logo após, com as coordenadas medidas por Gonçalves (2009), empregando a estação total, foi desenhado um espelho e nele quatro marcas fiduciais, para então obter o plano do espelho, sendo a primeira marca no canto inferior esquerdo e as demais seguindo o sentido horário, ficando as quatro marcas nos cantos do espelho. Sendo o sistema do espelho arbitrado da seguinte forma: o eixo x na direção horizontal passando pelas marcas 1 e 4, positivo neste sentido; o eixo z no plano do espelho, perpendicular a x e apontado para cima e o eixo y entrando no papel, tornando o sistema dextrogiro, como mostra a Figura 25.



**Figura 25: Marcas fiduciais e sistema do espelho em ambiente CAD**

**Fonte: A autora**

Desenhadas as quatro marcas fiduciais, com as coordenadas medidas por Gonçalves, observou-se que as quatro marcas não definiam um mesmo plano, mesmo assim deu-se prosseguimento à simulação.

Foram desenhados os alvos virtuais também com as coordenadas medidas por Gonçalves (2009), e a partir de então, esses alvos foram refletidos utilizando o comando de espelhamento do CAD, tendo como referência as marcas fiduciais F1, F3 e F4, gerando assim os Alvos Reais cujas coordenadas, medidas no CAD, estão na Tabela 11:

**Tabela 11: Coordenada dos Alvos Reais com espelho não plano medidas com o CAD**

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
A1	109590	77712	100301
A2	109456	77630	100294
A3	109299	77535	100294
A4	109812	77853	100299

O passo seguinte foi desenhar um espelho completamente plano. A marca fiducial de número quatro, no canto inferior direito, foi corrigida cerca de 0,7mm, na coordenada  $y$ , e colocada no plano definido pelas outras três marcas. Novamente os alvos virtuais foram refletidos tendo como referência as marcas fiduciais F1, F3 e F4. As coordenadas dos novos Alvos Reais estão na Tabela 12.

**Tabela 12: Coordenada dos Alvos Reais com espelho plano, medidas com o CAD**

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
A1	109905	77893	99986
A2	109772	77810	99981
A3	109616	77713	99982
A4	110125	78038	99983

A Tabela 13 mostra as diferenças entre as coordenadas refletidas, em planos com uma ligeira diferença, 0,7 mm na marca F4. Tais diferenças mostram a importância de se ter um espelho perfeitamente plano

**Tabela 13: Diferença entre as coordenadas dos Alvos Reais através de um espelho plano e um espelho não plano**

	$d_x$ (mm)	$d_y$ (mm)	$d_z$ (mm)
A1	314	181	-315
A2	315	180	-314
A3	317	177	-313
A4	312	185	-317

A etapa seguinte desse trabalho foi à simulação dos diferentes tamanhos de espelhos no CAD.

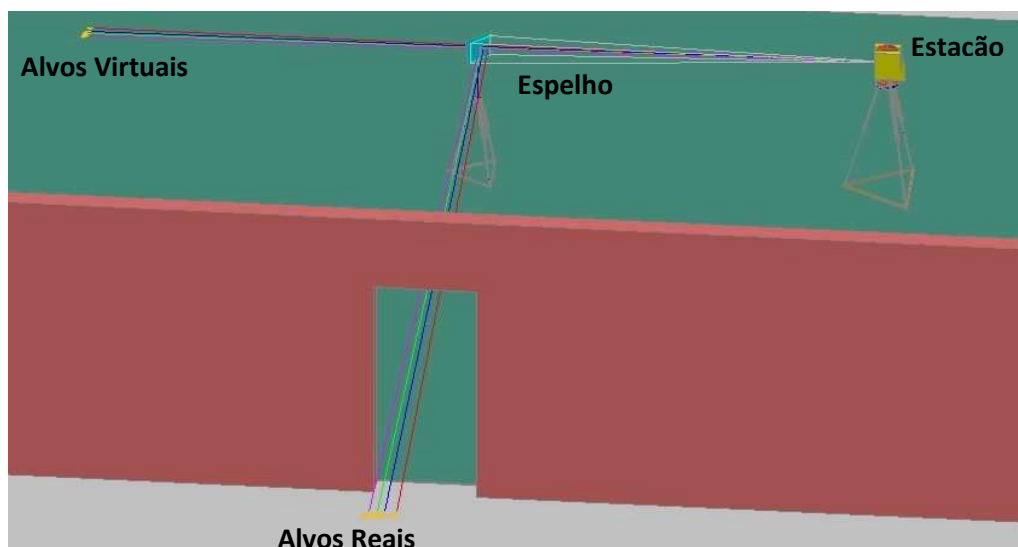
Medindo as distâncias entre as marcas fiduciais no CAD e atribuindo a elas os mesmos resíduos das distâncias medidas por Gonçalves (2009) e ajustadas na trilateração. Estes resíduos são apresentados na Tabela 14

**Tabela 14: Resíduos das distâncias medidas com interferômetro e ajustadas por trilateração**

Marcas	Resíduos (mm)
E1-E2	0,00979
E1-E3	-0,00045
E1-E4	0,003865
E2-E3	0,003904
E2-E4	-0,00554
E3-E4	0,001297

Foram desenhados também espelhos planos com distâncias entre as marcas fiduciais de aproximadamente 20 e 100 centímetros, sendo à distância da estação ao espelho de 3,2 metros. As distâncias dos espelhos aos alvos virtuais foi de aproximadamente 25,6 metros. Para cada tamanho de espelho, foram feitas as mesmas simulações anteriores, com precisões de milímetro e décimo de milímetros, das coordenadas medidas com estação total para então se obter um melhor tamanho de espelho com melhor precisão dos resultados.

A Figura 26 esquematiza o posicionamento da estação total, espelho e do alvo desenhados no CAD para a obtenção de suas coordenadas.



**Figura 26: Simulação em ambiente CAD de levantamento topográfico utilizando Estação Total e espelho**  
**Fonte: A autora**

Para cada tamanho de espelho testado, as coordenadas dos alvos virtuais foram às mesmas, modificando apenas as distâncias entre as marcas fiduciais que foram medidas no CAD no próprio espelho, e com a reflexão dos virtuais, alterando os alvos reais no sistema da Estação.

## **5. RESULTADOS**

As distâncias entre as marcas fiduciais do espelho foram medidas no CAD e estas subtraídas os resíduos da Tabela 14. A seguir, estas foram ajustadas e em seguida foram calculados os parâmetros que relacionam os sistemas do espelho e da estação pela transformação isogonal, para então serem calculadas as coordenadas dos alvos reais e seus desvios padrão.

As distâncias medidas no CAD e subtraídas dos resíduos, para os diferentes tamanhos de espelho, são mostradas na Tabela 15. Foi admitida precisão de micron na medida destas distâncias. Esta precisão foi empregada para formar a matriz dos pesos na trilateração.

**Tabela 15: Distâncias entre as marcas fiduciais medidas no CAD, subtraídas dos resíduos**

L <sup>2</sup> (mm)	Marcas Fiduciais	Distâncias (mm)
100	F <sub>1</sub> -F <sub>2</sub>	100,658
	F <sub>1</sub> -F <sub>3</sub>	141,645
	F <sub>1</sub> -F <sub>4</sub>	99,631
	F <sub>2</sub> -F <sub>3</sub>	99,372
	F <sub>2</sub> -F <sub>4</sub>	141,459
	F <sub>3</sub> -F <sub>4</sub>	100,680
200	F <sub>1</sub> -F <sub>2</sub>	201,983
	F <sub>1</sub> -F <sub>3</sub>	283,221
	F <sub>1</sub> -F <sub>4</sub>	198,558
	F <sub>2</sub> -F <sub>3</sub>	196,616
	F <sub>2</sub> -F <sub>4</sub>	281,667
	F <sub>3</sub> -F <sub>4</sub>	201,651
1000	F <sub>1</sub> -F <sub>2</sub>	1002,707
	F <sub>1</sub> -F <sub>3</sub>	1414,950
	F <sub>1</sub> -F <sub>4</sub>	989,648
	F <sub>2</sub> -F <sub>3</sub>	993,265
	F <sub>2</sub> -F <sub>4</sub>	1405,857
	F <sub>3</sub> -F <sub>4</sub>	1003,541

Empregando a trilateração, as coordenadas das marcas fiduciais, dos três tamanhos diferentes dos espelhos, foram ajustadas e seus desvios padrão estimados. Os valores encontrados estão na Tabela 16:

**Tabela 16: Coordenadas das marcas fiduciais ajustadas por trilateração**

L <sup>2</sup> (mm)	Pontos	Coordenadas ajustadas (mm)	Desvio padrão (mm)
100	X <sub>2</sub>	0,257	0,009
	Z <sub>2</sub>	100,666	0,010
	X <sub>3</sub>	99,632	0,006
	Z <sub>3</sub>	100,681	0,005
	X <sub>4</sub>	99,634	0,008
200	X <sub>2</sub>	2,253	0,011
	Z <sub>2</sub>	201,980	0,013
	X <sub>3</sub>	198,873	0,017
	Z <sub>3</sub>	201,652	0,016
	X <sub>4</sub>	198,562	0,010
1000	X <sub>2</sub>	4,252	0,012
	Z <sub>2</sub>	1002,698	0,014
	X <sub>3</sub>	997,520	0,007
	Z <sub>3</sub>	1003,511	0,006
	X <sub>4</sub>	989,652	0,010

A seguir, calculou-se os parâmetros que relacionam os sistemas do espelho e da estação, assim como seu desvio padrão, admitindo precisão de milímetro e décimo de milímetro nas coordenadas obtidas com estação. Os parâmetros estimados encontram-se nas Tabela 17 e 18.

---

<sup>2</sup> Distância aproximada entre as marcas fiduciais desconsiderando as diagonais

**Tabela 17: Parâmetros que relacionam o sistema do espelho com sistema da estação - precisão de milímetro**

L <sup>2</sup> (mm)	Parâmetros		Unidade	Desvios	unidade
100	w	4	min	12	min
	fi	-53	min	8	min
	k	-61	graus	12	min
	tx	96799	mm	0,29	mm
	ty	99892	mm	0,26	mm
	tz	99946	mm	0,25	mm
	e	1	mm	0,002	
	Variância de Referência	0,12			
200	w	6	min	5	min
	fi	-1	min	4	min
	k	-45	graus	5	min
	tx	96775	mm	0,24	mm
	ty	99848	mm	0,24	mm
	tz	99898	mm	0,22	mm
	e	1		0,001	
	Variância de Referência	0,09			
1000	w	1	min	1	min
	fi	-1	min	1	min
	k	-45	graus	1	min
	tx	96578	mm	0,31	mm
	ty	99496	mm	0,31	mm
	tz	99504	mm	0,28	mm
	e	1		0,0003	
	Variância de Referência	0,16			

**Tabela 18: Parâmetros que relacionam o sistema do espelho com sistema da estação - precisão de décimo de milímetro**

L <sup>2</sup> (mm)	Parâmetros	Unidade	Desvios	unidade	
100	w	-4	min	32	seg
	fii	-49	min	23	seg
	k	-61	graus	32	seg
	tx	96799	mm	0,01	mm
	ty	99892	mm	0,01	mm
	tz	99946	mm	0,01	mm
	e	1,0		0,0001	
	Variância de Referência	1,13			
200	w	0,5	seg	38	seg
	fi	12	seg	27	seg
	k	-45	graus	38	seg
	dx	96775	mm	0,03	mm
	dy	99849	mm	0,03	mm
	dz	99898	mm	0,03	mm
	e	1,0		0,0001	
	Variância de Referência	0,14			
1000	w	7	seg	5	seg
	fi	1	seg	4	seg
	k	-45	graus	5	seg
	tx	96578	mm	0,02	mm
	ty	99497	mm	0,02	mm
	tz	99503	mm	0,02	mm
	e	1,0		0,00002	
	Variância de Referência	0,06			

Com os parâmetros que relacionam os sistemas do espelho e da estação, foram calculadas as coordenadas dos alvos reais no sistema da estação e seus desvios padrão admitindo precisão de milímetro e décimo de

milímetro para as coordenadas medidas. Os resultados estão nas Tabelas 19 e 20.

**Tabela 19: Coordenadas dos alvos reais no sistema da estação, admitindo precisão de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total**

L <sup>2</sup> (mm)	Alvos reais	X(mm)	Desvio de X (mm)	Y(mm)	Desvio de Y (mm)	Z(mm)	Desvio de Z (mm)
100	A1	109724	104	77788	113	100112	116
	A2	109591	104	77705	113	100106	116
	A3	109435	104	77610	113	100107	116
	AA	109946	104	77931	113	100109	116
200	A1	96505	48	74269	48	100126	47
	A2	96348	48	74267	48	100120	47
	A3	96165	48	74265	48	100121	47
	AA	96769	48	74277	48	100124	48
1000	A1	96550	16	74115	16	100077	16
	A2	96393	16	74114	16	100071	16
	A3	96210	16	74113	16	100072	16
	AA	96814	16	74121	16	100074	16

**Tabela 20: Coordenadas dos alvos reais, no sistema da estação, admitindo precisão de décimo de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total**

L <sup>2</sup> (mm)	Alvos reais	X(mm)	Desvio de X (mm)	Y(mm)	Desvio de Y (mm)	Z(mm)	Desvio de Z (mm)
100	A1	109915	4,7	77899,1	5,1	100015,4	5,2
	A2	109782	4,7	77815,9	5,1	100010,2	5,2
	A3	109626	4,7	77718,4	5,1	100011,3	5,2
	A4	110135	4,7	78044,0	5,1	100012,5	5,3
200	A1	96395	5,8	74269,9	5,8	100063,6	5,7
	A2	96238	5,8	74269,1	5,8	100058,3	5,7
	A3	96055	5,8	74268,1	5,8	100059,2	5,7
	A4	96659	5,8	74277,1	5,8	100061,0	5,7
1000	A1	96567,2	0,8	74113,9	0,8	100064,8	0,8
	A2	96410,3	0,8	74113,1	0,8	100059,5	0,8
	A3	96226,6	0,8	74112,0	0,8	100060,4	0,8
	A4	96830,7	0,8	74121,4	0,8	100062,2	0,8

Através do CAD, as coordenadas dos alvos reais no sistema da estação foram obtidas pela reflexão dos alvos virtuais e tendo como referência três pontos no plano do espelho, sendo estes pontos as marcas fiduciais de número 1, 4 e 3 para então calcular as discrepâncias entre as coordenadas dos alvos reais estimadas e as medidas no CAD. As Tabelas 21 e 22 mostram as discrepâncias entre essas coordenadas admitindo medidas com precisão de milímetro e décimo de milímetro, respectivamente.

**Tabela 21: Discrepância entre as coordenadas dos alvos reais calculadas e as medidas com CAD, admitindo precisão de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total**

L <sup>2</sup> (mm)	Alvos	dX(mm)	dY(mm)	dZ(mm)
100	A1	-181	-105	126
	A2	-181	-105	125
	A3	-181	-103	125
	A4	-181	-107	127
200	A1	92	-1	63
	A2	92	-2	62
	A3	92	-2	61
	A4	92	0	63
1000	A1	-19	1	13
	A2	-19	1	12
	A3	-18	1	12
	A4	-18	0	13

**Tabela 22: Discrepância entre as coordenadas dos alvos reais estimadas e as medidas com CAD, admitindo precisão de décimo de milímetro nas observações realizadas com a Estação Total**

Largura média do espelho (mm)	Alvos	dX(mm)	dY(mm)	dZ(mm)
100	A1	10,0	5,9	29,6
	A2	10,1	5,9	29,5
	A3	10,0	5,8	29,5
	A4	9,9	6,0	29,9
200	A1	-18,4	0,3	0,0
	A2	-18,4	0,4	0,0
	A3	-18,4	0,6	0,1
	A4	-18,4	0,1	0,1
1000	A1	-1,8	0,0	1,2
	A2	-1,8	0,0	1,2
	A3	-1,9	0,0	1,3
	A4	-1,8	0,0	1,3

## 6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com os resultados apresentados nas Tabelas 17 a 22 nesse trabalho, observa-se que os menores desvios e as menores discrepâncias ocorrem nos espelhos maiores e com precisões de décimo de milímetro nas coordenadas medidas com estação total. Ao se trabalhar com espelhos maiores, ou seja, quanto mais distantes forem as marcas fiduciais melhores resultados, mas existem alguns inconvenientes, como a total planicidade do mesmo e o transporte para o local do levantamento a ser realizado.

Os desvios encontrados nos sete parâmetros que relacionam os sistemas do espelho e da estação dependem do tamanho do espelho e se devem principalmente as incertezas das coordenadas das marcas fiduciais medidas com a estação total.

Medindo as coordenadas das marcas fiduciais com precisão de milímetro, chega-se a uma precisão nos ângulos de atitude do espelho de dez minutos para o espelho de dez centímetros, cinco minutos para o espelho de vinte centímetros e um minuto para espelho de cem centímetros.

Para todos os tamanhos de espelho estudados, verificou-se que o maior efeito na propagação dos desvios ocorre na transformação das coordenadas dos alvos virtuais no sistema da estação para o sistema do espelho, empregando os parâmetros estimados com as coordenadas das marcas fiduciais nestes dois sistemas.

Para contornar este problema sugere-se adicionar limbos graduados para leituras dos ângulos de atitude do espelho, principalmente os ângulos de rotação dos eixos horizontal e vertical.

Com precisão de um minuto nos ângulos de atitude do espelho de um metro, e precisão de milímetro nas coordenadas dos alvos virtuais medidas com a estação total, obteve-se precisão de aproximadamente dois centímetros nas coordenadas dos alvos reais.

Com precisão de meio minuto nos ângulos de atitude nos espelhos de dez e vinte centímetros e precisão de milímetro nas coordenadas medidas dos alvos virtuais obteve-se uma precisão de meio centímetro nas coordenadas dos alvos reais.

Com precisão de cinco segundos nos ângulos de atitude do espelho, independente de seu tamanho, e coordenadas dos alvos virtuais medidas com precisão de milímetro, chegou-se a uma precisão de milímetro nas coordenadas dos alvos reais.

Os desvios encontrados foram praticamente os mesmos para todos os alvos reais, possivelmente devido à proximidade entre eles e por estarem alinhados.

Sugere-se a realização de testes com os alvos virtuais visualizados em todas as regiões do espelho.

A simulação utilizada no CAD foi importante para a conclusão do trabalho, pois esta é uma ferramenta exata na obtenção das coordenadas dos alvos reais e com isso concluiu-se que é sim possível realizar experimentos virtualmente empregando-o.

Num cenário em que haja pontos que possam ser visualizados diretamente e indiretamente através do espelho, recomenda-se o estudo de modelos matemáticos que possam realizar as correções nas coordenadas dos pontos visualizados somente através do espelho.

Recomenda-se converter o software desenvolvido no MATLAB para um programa que segue a filosofia do software livre, adaptá-lo para situações em que os ângulos de atitude do espelho são medidos diretamente e aprimorar o seu desenvolvimento, tornando amigáveis a entrada e saída de dados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAGNATO, V. S. **Os Fundamentos da Luz Laser**, Física na Escola, v. 2, n. 2, 2001 – Instituto de Física de São Carlos – Universidade de São Paulo

CABRAL, A., REBORDÃO, J.M., **Metrologia absoluta de comprimento por interferometria de varrimento de frequência**. Disponível em:<  
[http://www.spmet.pt/comunicacoes\\_2\\_encontro/Alexandre\\_Cabral.pdf](http://www.spmet.pt/comunicacoes_2_encontro/Alexandre_Cabral.pdf)>  
Acessado em: 11/01/2012:

CASACA, J.; MATOS, J.; BAILO, M. **Topografia Geral**. 4ª edição – Atualizada e Aumentada, pag. 114-115. Rio de Janeiro 2007.

CEZAR JUNIOR, K. 2009 - **Notas de aula de CIV 180** – introdução ao AutoCAD, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa

COMASTRE, J.A.; GRIPP, Jr., **Topografia Aplicada, Medição, Divisão e Demarcação**, Editora UFV, 2002, 203 pag.

CORDINI, J., 2009 **Topografia 1 – planimetria**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <<http://www.topografia.ufsc.br/cap9-5.html>> Acesso em: 02/02/2012

CORRÊA, I. C. S., 2006 - Curador do Museu de Topografia Prof. Laureano Ibrahim Chaffe. Departamento de Geodésia - Instituto de Geociências-UFRGS, Porto Alegre Brasil. Disponível em:  
[http://www.ufrgs.br/museudetopografia/Artigos/Instrumentos\\_de\\_topografia.pdf](http://www.ufrgs.br/museudetopografia/Artigos/Instrumentos_de_topografia.pdf).  
pdf,  
Acesso em 18/01/2012

CRUZ, W., **Impacto causado pela evolução dos medidores eletrônicos de distâncias nos processos de calibração**, 2010. Dissertação (Dissertação em

Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná.

FAGGION, P. L., **Obtenção dos Elementos de Calibração e Certificação de Medidores Eletrônicos de Distância em Campo e Laboratório**. Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR, Curitiba, 2001. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/52670548/Geodesia>, acesso em 19/03/2012.

FONTE, C. M. P. C., 2008. **Texto de apoio à topografia** – Mestrado Integrado em Engenharia civil 2007/2008 – Departamento de Matemática – Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade de Coimbra. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/64165399/Textos-Topografia>. Acesso em: 18/01/2012

FRAGNITO, H. L., COSTA. A. C., **Interferência de Michelson** – Unicamp – IFGW, Março de 2010. Disponível em: [www.ifi.unicamp.br/~hugo/apostilas/michelson.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~hugo/apostilas/michelson.pdf). Acesso em 23/09/2013.

GAVINHO, L. G. **Novo método de caracterização de ondulações em superfícies por difração de raios X**. Curitiba, 2005. Dissertação, Universidade Federal do Paraná. Disponível em <http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/bitstream/handle/1884/8153/teste.pdf?sequence=1>. Acessado em: 02/02/2012

GHILANI, C. D., WOLF, P. R. – **Adjustment Computations Spatial Data Analysis** – Fourth Edition – pag. 356 - 359

GONÇALVES, M. L. A. M., **Determinação indireta de Coordenadas Topográficas utilizando estação total e espelho**, 2009. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. **Fundamentos de física: ótica e física moderna**. 4ª edição. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: Livros Técnico e Científicos, 2007. 407 p.

IBGE, disponível em <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/pmrg/faq.shtm#1> Acesso em 21/03/2012

LAROCCA, A. P. C., **O uso do GPS como instrumento de controle de deslocamento acadêmico de obras civis – aplicação na área de transportes**. Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004

LOCH, C.; CORDINI, J. **Topografia Contemporânea, Planimetria**, 2ª edição revisada, Editora da UFSC, 2000. Pag.20-21.

KING II, G., EIKLENBORG, M., VILCHECK, M., IOANNOU, S. **Quality control of high precisi-** Project 2: Quality Control, 1998. San Francisco State University. Disponível em: <<http://online.sfsu.edu/~gtarakji/engr801/wordoc/quality1.htm>> Acesso em: 19/09/2007

MAGALHÃES, R. C. A. **Sistema para erro de medição de planicidade**. São Carlos, 2006. 128 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MCCORMAC, J. **Topografia**, 5ª Edição, p. 161, 2007.

MARTINI, L. **Calibração de prismas de reflexão total em forma de fita adesiva, em acrílico e sua aplicação no controle de deslocamento de estruturas**. Curitiba, PR 2005. 133 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Paraná.

MATOS, J. **Geodésia e Sistemas de Referência**, Notas de aula de Cartografia, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Versão 1.1, Março 2007, Instituto Superior Técnico, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Extraído de: [http://pessoal.utfpr.edu.br/ligia/material/cartografia/aula5\\_sistemas\\_referencia.pdf](http://pessoal.utfpr.edu.br/ligia/material/cartografia/aula5_sistemas_referencia.pdf). Acesso em: 03/06/2013.

MENDONÇA F. J. B. , GARNÉS S. J dos A., PEREIRA C. M ., BARROSO NETO J .A., . Melo W. D. A, 2010. **III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação**, Recife – PE, p. 003 – 009. Extraído de: [http://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOIII/IIISIMGEO\\_CD/artigos/Cad\\_Geod\\_Agrim/Geodesia%20e%20Agrimensura/A\\_109.pdf](http://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOIII/IIISIMGEO_CD/artigos/Cad_Geod_Agrim/Geodesia%20e%20Agrimensura/A_109.pdf). Acesso em: 23/04/2013

MURPHY, W. S. and HEREMAN W. **Statistical Methods in Surveying by Trilateration**. Colorado, 1999. Department of Mathematical and Computer Sciences. Colorado School of Mines Golden, Colorado, U S Army TRADOC Analysis Center, Monterey, Naval Post graduate School – Monterey, California. Extraído de: <http://inside.mines.edu/~whereman/papers/Navidi-Murphy-Hereman-CSDA-27-1998.pdf>. Acesso em: 09/05/2013.

OLIVEIRA, J. C., **Conceitos básicos sobre posicionamento por satélites artificiais. XIV curso de uso escolar de sensorimento remoto no estudo do meio ambiente** (INPE), Julho 2011. Disponível em: [www.dsr.inpe.br/vcsr/files/Apresentacao\\_GPS.Pdf](http://www.dsr.inpe.br/vcsr/files/Apresentacao_GPS.Pdf). Acesso em: 20/09/2013

PINO, L. M. e FIRKOWSKI, H – Bol. Ciênc. Geod., sec. Artigos, Curitiba, v. 15, nº 2, p. 259 – 276, abr-jun, 2009

Programa Educar CDCC – USP SC; **Ótica para alunos do Ensino Médio**. Reflexão / Espelhos planos: Fundamentos teóricos. Extraído de: [educar.sc.usp.br/ótica/reflexão.htm](http://educar.sc.usp.br/ótica/reflexão.htm). Acesso em: 06/02/2012

RAMOS, F. F, RODRIGUES, D. D, ANDRADE, R. J. O – **Avaliação da precisão de posicionamento por interseção angular a ré.** II Simpósio Brasileiro de geomática, V Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas – Presidente Prudente, 24-27 de julho de 2007, pag. 263-268. Disponível em: docs.fct.unesp.br/departamentos/cartografia/eventos/2007\_II\_SGB/artigos/A\_039.pdf. Acesso em 22/09/2013

RIBEIRO, C. A. A. S. **Introdução ao Sistema de Informação Geográfica** – Notas de aula – ENF 612 UFV, 1º Semestre 2012

RODRIGUES, D.D – **Transformações geométricas: Aplicações na Engenharia de Agrimensura e Cartográfica** – Notas de aula, 2009 – EAM 313 – Topografia IV, UFV

SALLES, F. **Apostila de Cinematografia** – Capítulo 8. Disponível em: [http://www.mnemocine.art.br/index.php?option=com\\_docman&task=cat\\_view&gid=52&Itemid=72](http://www.mnemocine.art.br/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=52&Itemid=72). Acesso em: 9/01/2012.

SANTOS, D., 2009 Notas de aula de Fotogrametria II Curso de Engenharia cartográfica UFPR, disponível em: [http://people.ufpr.br/~danielsantos/Fotoll\\_CapIII\\_A5.pdf](http://people.ufpr.br/~danielsantos/Fotoll_CapIII_A5.pdf). Acesso em 27/06/2013

SCHOENKNECHT, E., 2010 **Medição de distância com o uso de laser.** (Projeto de Diplomação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Elétrica. Disponível em: [www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/33069/000788109.pdf?sequence=1](http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/33069/000788109.pdf?sequence=1). Acesso em:01/01/2012.

SEGANTINE, P. C. L. ; SILVA, Irineu da ; ERWES, H. . **Introdução à Geomática.** 1. ed. São Carlos: , 2001. v. 1. 110 p.

SILVA, A. G. de O.; AZEVEDO, V. W. B.; SEIXAS A. de. **Métodos topográficos para o georreferenciamento de imóveis rurais**. Anais 1º simpósio de Geotecnologias no Pantanal, Campo Grande, Brasil 11-15 novembro 2006 – Embrapa Informática Agropecuária / INPE, p. 939-948. Disponível em [mtc-m17.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m17e80/2006/12.12.13.39/doc.p1111.pdf](http://mtc-m17.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m17e80/2006/12.12.13.39/doc.p1111.pdf). Acesso em 21/09/2013

SMITH, J. NASCARELLA, J. EDM – Introduction. Disponível em <http://www.geom.unimelb.edu.au/kealyal/edms/edm-intro.html>. Acesso em 19/03/2013.

VEIGA, L. A. K., ZANETTI M. A. Z., FAGGION. P. L. **Fundamentos de topografia** – Curitiba, PR 2007.

VOLSEMAN, HELLMAYER *et al*, XIII SBSR – **Curso – Sensoriamento Remoto por LIDAR (LIDAR REMOTE SENSING)**. Disponível em <http://www.dsr.inpe.br/sbsr2007/pdf/curso10/Centeno/centeno.pdf>. Acesso em 14/09/2013.

VOLPI, E. M. 2007 – **Geodésia aplicada ao georreferenciamento**- Pós – Graduação em geoprocessamento para gestão urbana e cadastramento rural – UNILINS – Centro Universitário Fundação Paulista de Tecnologia e Educação – Lins – SP.

## **APÊNDICE**

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS TOPOGRÁFICAS A PARTIR DE
%%MEDIDAS REALIZADAS ATRAVES DE UM ESPELHO COM PROPAGAÇÃO DE
VARIANCIAS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%
```

```
clc
clear
format long g
syms x2 z2 x3 z3 x4
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%PROGRAMA ZERO, TRILATERAÇÃO%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Trilateração
%Critério de convergência: 0.0001 mmm
eps = 0.0001;
varref=1.0^2;
num_observacoes=6;
num_parametros=5;% Parâmetros: [x2;z2;x3;z3;x4]em milímetros. O
TERCEIRO EIXO É y.
```

```
%Dados: coordenadas dos pontos de apoio
```

```
x1 = 0;
z1 = 0;
y1 = 0;
y2=0;
y3=0;
z4 = 0; y4=0;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ALTERAR OS
DADOS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%vetor Lb[d12; d13; d14; d23; d24; d34]: distâncias entre as marcas
fiduciais, em milímetros, medidos com
%interferômetro. Precisão de microm
```

```
%lb=[99.372; 100.659; 141.464; 141.645; 100.683; 99.628]
```

```
%lb = [100.659; 141.645; 99.628; 99.372; 141.464; 100.683]; % Dists da
Tab 3, pág 86
```

```
%lb = [100.659; 141.645; 99.628; 99.372; 141.464; 100.683]; % Dist da
Tab. 2
```

```
%%ESPELHO DE 10 CM NO PLANO
```

```
%lb=[100.668; 141.645; 99.632; 99.144; 141.459; 100.684]; %% EXATAS
DO CADO
```

```
%lb=[100.658; 141.645; 99.631; 99.372; 141.459; 100.680]; %%
subtraídas dos resíduos
```

```
%distancias entre as marcas fiduciais medidas no cad ( aproximadamente
5
% cm)
```

```
% lb=[50.981; 71.165; 48.560; 49.261; 70.234; 51.129];%exatas do CAD
```

```
%lb=[50.971; 71.166; 48.559; 49.256; 70.240; 51.125]; %% CERTAS
```

```
% distancias entre as marcas fiduciais medidas no cad (  
aproximadamente 20  
% cm)
```

```
%lb=[201.993; 283.221; 198.562; 196.620; 281.661; 201.652];
```

```
%lb=[201.983;283.221;198.558;196.616;281.667;201.651]; % distancias  
subtraídas dos resíduos encontrados no de malu
```

```
% distancias entre as marcas fiduciais medidas no cad (  
aproximadamente  
% 100 cm)
```

```
%lb=[1002.707; 1414.950; 989.652; 993.269; 1405.851; 1003.542];
```

```
lb=[1002.697;1414.950;989.648;993.265;1405.857;1003.541]; % distancias  
subtraídas dos resíduos encontrados no de malu
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%desvios padrões das distâncias medidas em milímetros. Tabela 3  
dpd12=0.011; dpd13=0.002; dpd14=0.007; dpd23=0.007; dpd24=0.007;  
dpd34=0.004;% distancias subtraídas dos resíduos encontrados no de  
malu
```

```
%matriz clb dpdd^2  
clb(1,1)=varref*dpd12^2;  
clb(2,2)=varref*dpd13^2;  
clb(3,3)=varref*dpd14^2;  
clb(4,4)=varref*dpd23^2;  
clb(5,5)=varref*dpd24^2;  
clb(6,6)=varref*dpd34^2;
```

```
%matriz dos pesos  
p=varref*inv(clb);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
DADOS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%parâmetros aproximados :  
%x0=[0;50;50;50;50];  
% x0=[0;100;100;100;100];  
%x0=[0;200;200;200;200];  
x0=[0;1000;1000;1000;1000];
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%
sig=1;
while (sig > eps)
    x2 = x0(1);
    z2 = x0(2);
    x3 = x0(3);
    z3 = x0(4);
    x4 = x0(5);

%Cálculo de L0 e L
d12=( (x1-x2)^2+(z1-z2)^2)^0.5;
d13=( (x1-x3)^2+(z1-z3)^2)^0.5;
d14=( (x1-x4)^2+(z1-z4)^2)^0.5;
d23=( (x2-x3)^2+(z2-z3)^2)^0.5;
d24=( (x2-x4)^2+(z2-z4)^2)^0.5;
d34=( (x4-x3)^2+(z4-z3)^2)^0.5;

l0=[d12;d13;d14;d23;d24;d34];
l = lb - l0;

%Montando a matriz A

% %derivada de d12
a(1,1)=- (x1-x2)/d12;
a(1,2)- (z1-z2)/d12;
a(1,3)=0;
a(1,4)=0;
a(1,5)=0;

%
% %derivada de d13
a(2,1)=0;
a(2,2)=0;
a(2,3)- (x1-x3)/d13;
a(2,4)- (z1-z3)/d13;
a(2,5)=0;

%
% %derivada de d14
a(3,1)=0;
a(3,2)=0;
a(3,3)=0;
a(3,4)=0;
a(3,5)- (x1-x4)/d14;

% %derivada de d23
a(4,1)= (x2-x3)/d23;
a(4,2)= (z2-z3)/d23;
a(4,3)- (x2-x3)/d23;
a(4,4)- (z2-z3)/d23;
a(4,5)=0;

% %derivada de d24
a(5,1)= (x2-x4)/d24;
a(5,2)= (z2-z4)/d24;
a(5,3)=0;
a(5,4)=0;
a(5,5)- (x2-x4)/d24;

%
% %derivada de d34

```

```

a(6,1)=0;
a(6,2)=0;
a(6,3)=(x3-x4)/d34;
a(6,4)=(z3-z4)/d34;
a(6,5)=-(x3-x4)/d34;

% Calculo de N e U
n = (a'*p*a);
u = a'*p*1;

%calculo dos parâmetros ajustados
ni = inv(n);
x = ni*u;
xa = x0 + x;

x0 = xa;

%condição de parada: o maior valor de x deve ser menor que
%0.0001 mm
sig = abs(x(1));
cont=0;
for j=2:num_parametros

    %%%CONTADOR%%
    cont=cont + 1;
    if ( abs(x(j))>sig ) sig=abs(x(j));

end

end

end
input ('coordenadas ajustadas por trilateração')

%%
cont
x0

%vetor dos resíduos
v = a*x - 1
input ('sigma a posteriori')
%determinação do sigma a posteriori
sigma = (v'*p*v)/(num_observacoes-num_parametros)

input ('mvc dos parametros da trilateração')
%MVC Parametros
mvc_par = sigma*ni;
desvio=sqrt(diag(mvc_par))

%%
%%

%PROGRAMA 1 = OBTENÇÃO DOS PARAMETROS, E SUA MVC, QUE RELACIONAM O
SISTEMA
%DA ESTAÇÃO COM O SISTEMA DO ESPELHO

syms w fii k s tx ty tz

```

```

eps=0.00000000001;
% 1) DADOS:
%coordenadas ESTIMADAS, por trilateração, das 04 marcas fiduciais no
sistema do espelho em mm
% xp=[0; 0.253; 99.629; 99.632];% Dist da TAB. 2
% yp=[0.; 0.; 0.; 0.];
% zp=[0; 100.669; 100.684; 0.];

%precisão de Micron
%xp=[0; 0.264; 99.638; 99.635]; %Dist da TAB. 3
%yp=[0.; 0.; 0.; 0.];
%zp=[0; 100.671; 100.682; 0.];

%coordenadas das marcas fiduciais no sistema do espelho de distancia
de 20
%cm com precisão de milímetro

% xp=[0; 2.253; 198.873; 198.562];
% yp=[0; 0; 0; 0];
% zp=[0; 201.980; 201.652; 0];

%coordenadas das marcas fiduciais no sistema do espelho de distancia
de 100
%cm
% xp=[0; 4.252; 997.521; 989.652];
% yp=[0; 0; 0; 0];
% zp=[0; 1002.698; 1003.511; 0];

x1 = 0;
z1 = 0;
y1 = 0;
y2=0;
y3=0;
z4 = 0; y4=0;
    x2 = x0(1);
    z2 = x0(2);
    x3 = x0(3);
    z3 = x0(4);
    x4 = x0(5);

% x1=xp(1);
% y1=yp(1);
% z1=zp(1);
% x2=xp(2);
% y2=yp(2);
% z2=zp(2);
% x3=xp(3);
% y3=yp(3);
% z3=zp(3);
% x4=xp(4);
% y4=yp(4);
% z4=zp(4);

% 2) VETORES dos parametros (par) e das observações (lb- coordenadas
das marcas fiduciais no sistema da estação em mm)

num_obs=12;

```

```
num_param=7; % w, fii, k, dx, dy, dz, s. CONSIDERANDO 1 ÚNICO FATOR DE
ESCALA PARA X,Y e Z
gl= num_obs-num_param;
```

```
par=[w,fii,k,tx,ty,tz,s];
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ALTERAR OS
DADOS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%COORDENADAS DAS MARCAS FIDUCIAIS NO SISTEMA DA ESTAÇÃO%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% DADOS MALU%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% X=[96799; 96800; 96848; 96849];
% Y=[99892; 99894; 99980; 99979];
% Z=[99946; 100047; 100046; 99945];
```

```
%MARCAS FIDUCIAIS COM 1 CASA DECIMAIS
```

```
% X=[96799.3;96800.1;96848.4;96848.5];
% Y=[99892.4;99893.6;99980.1;99979.3];
% Z=[99946.4;100047.1;100045.9;99945.2];
```

```
%MARCAS FIDUCIAIS COM 3 CASAS DECIMAIS
```

```
% X=[96799.257; 96800.116; 96848.398; 96848.545];
% Y=[99892.376; 99893.554; 99980.106; 99979.267];
% Z=[99946.444; 100047.082; 100045.934; 99945.204];
```

```
%coordenadas das marcas fiduciais no sistema da estação distancia de 5
cm
```

```
%entre elas com precisão de milímetro
```

```
% X=[98992; 98992; 99027; 99026];
% Y=[99963; 99964; 99998; 99998];
% Z=[99968; 100019; 100019; 99968];
```

```
%coordenadas das marcas fiduciais no sistema da estação distancia de 5
cm
```

```
%entre elas com precisão de decimo de milímetro
```

```
% X=[98991.8; 98992.0; 99026.8; 99026.1];
% Y=[99963.4; 99963.6; 99998.4; 99997.8];
% Z=[99967.9; 100018.9; 100019.0; 99967.9];
```

```
%ESPELHO DE 10 CM PLANO MEDIDO NO CAD
%%PRECISÃO DE MILIMETRO
```

```
% X=[96799; 96800; 96849; 96848];
% Y=[99892; 99894; 99981; 99979];
% Z=[99946; 100047; 100046; 99945];
```

```
% PRECISÃO DE DECIMO DE MILIMETRO
```

```
% X=[ 96799.3; 96800.2; 96848.6; 96847.8];
% Y=[ 99892.4; 99893.8; 99980.6; 99979.4];
% Z=[99946.4; 100047.1; 100045.7; 99945.0];
```

```
%coordenadas das marcas fiduciais no sistema da estação distancia de
20 cm
%entre elas com precisão de milímetro
```

```
% X=[96775; 96776; 96915;96915];
% Y=[99848; 99850; 99989; 99989];
% Z=[99898;100100; 100099; 99898 ];
```

```
%coordenadas das marcas fiduciais no sistema da estação distancia de
20 cm
%entre elas com precisão de decimo de milímetro
```

```
% X=[96774.6; 96776.2; 96915.3; 96915.1 ];
% Y=[99848.5; 99850.1; 99989.1; 99988.9 ];
% Z=[99897.7; 100099.6; 100099.3; 99897.7 ];
```

```
%coordenadas das marcas fiduciais no sistema da estação distancia de
100 cm
%entre elas com precisão de milímetro
```

```
% X=[96578; 96581; 97283; 97278];
% Y=[99497; 99500; 100202; 100196];
% Z=[99503; 100507; 100507; 99504];
```

```
%coordenadas das marcas fiduciais no sistema da estação distancia de
100 cm
%entre elas com precisão de decimo de milímetro
```

```
X=[96578.2; 96581.2; 97283.5; 97278.0];
Y=[99496.5; 99499.5; 100201.8; 100196.2];
Z=[99503.7; 100506.4; 100507.2; 99503.7 ];
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
X1=X (1);
Y1=Y (1);
Z1=Z (1);
X2=X (2);
Y2=Y (2);
Z2=Z (2);
X3=X (3);
Y3=Y (3);
Z3=Z (3);
X4=X (4);
Y4=Y (4);
Z4=Z (4);
```

```

%vetor das observações coord. das marcas fiduciais no sistema da
estação (12x1)
lb= [X1;Y1;Z1;X2;Y2;Z2;X3;Y3;Z3;X4;Y4;Z4];

% 3) MODELO FUNCIONAL

r1=[1 0 0; 0 cos(w) sin(w); 0 -sin(w) cos(w)];
r2=[cos(fii) 0 -sin(fii);0 1 0; sin(fii) 0 cos(fii)];;
r3=[cos(k) sin(k) 0; -sin(k) cos(k) 0; 0 0 1];
m=r3*r2*r1;

%Equações de observação para cada ponto
% for i=1:4
%     p(i)=s*(m*[xp(i);yp(i);zp(i)])+[tx;ty;tz]);
%     eq=[p(i)];
%end

p1=s*(m*[x1;y1;z1])+[tx;ty;tz];
p2=s*(m*[x2;y2;z2])+[tx;ty;tz];
p3=s*(m*[x3;y3;z3])+[tx;ty;tz];
p4=s*(m*[x4;y4;z4])+[tx;ty;tz];
eq=[p1;p2;p3;p4];
A=jacobian(eq,par);

% 4) MODELO ESTOCÁSTICO

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%OBSERVAR O NUMERO DE CASAS DECIMAIS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%MVC das OBSERVAÇÕES: matriz diagonal com 1 mm2 de variância
%mvc_obs = 1*eye(12,12);

%MVC das OBSERVAÇÕES: matriz diagonal com 0,01 mm2 de variância
mvc_obs = 0.01*eye(12,12);

%MVC das OBSERVAÇÕES: matriz diagonal com 0,000001 mm2 de variância
%mvc_obs = 0.000001*eye(12,12);

% MATRIZ DOS PESOS: DEVE SER A INVERSA DA MVC DAS OBSERVAÇÕES!!!!

p = inv(mvc_obs);

%5) VETOR XO (parametros aproximados: [w, fii, k, dx, dy, dz, e] )
%
x0= [0.0; 0.; 0.0; X1; Y1; Z1; 1.0];

x1 = 0;
z1 = 0;
y1 = 0;
y2=0;
y3=0;
z4 = 0; y4=0;
x2 = x0(1);
z2 = x0(2);
x3 = x0(3);
z3 = x0(4);
x4 = x0(5);

```

```

% x1=xp(1);
% y1=yp(1);
% z1=zp(1);
% x2=xp(2);
% y2=yp(2);
% z2=zp(2);
% x3=xp(3);
% y3=yp(3);
% z3=zp(3);
% x4=xp(4);
% y4=yp(4);
% z4=zp(4);

%INICIO DAS ITERAÇÕES
sig=1;
iteracoes=0;
while (sig > eps & iteracoes < 20 )
    cont=cont+1;

    % 6) CALCULO DOS ELEMENTOS DA MATRIZ A

    w = x0(1);
    fii = x0(2);
    k = x0(3);
    tx = x0(4);
    ty = x0(5);
    tz = x0(6);
    s = x0(7);

    A1=eval(A);

%7) VETOR L0
    l0=eval(eq);

%8) CALCULO DE L
    l=lb-l0;

%9) x=inv(A'*p*A)*(A'*p*l)
    n=(A1'*p*A1);
    u=(A1'*p*l);

%Calculo dos parametros ajustados
    ni=inv(n);
    x=ni*u;
    xa=x0+x;
    x0=xa;

% condição de parada: sig = maior valor de x que deve ser menor que
% 0.0001 mm
    sig = abs(x(1));
    for j=1:num_param
        if ( abs(x(j))>sig ) sig=abs(x(j));
    end
end

end % final iterações
input('parametros ajustados pela transformação isogonal')
cont
x0

```

```

%ANÁLISE ESTATÍSTICA:

%10) vetor dos resíduos
V=A1*x-1;

% 11) SIGMA ZERO A POSTERIORI
sigma=V'*p*V/gl%variancia de referencia a posteriori

%12) MATRIZ MVC DOS PARAMETROS E DESVIOS
mvc_par=sigma*ni;

input ('mvc_parametros')
desvio=sqrt(diag(mvc_par))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FIM ISOGONAL %%%%%%%%%%%%%%%

%PROGRAMA 2 = TRANSFORMA AS COORDENADAS DOS ALVOS VIRTUAIS MEDIDAS NO
%SISTEMA DA ESTAÇÃO PARA O SISTEMA DO ESPELHO PROPAGANDO AS
VARIANCIAS DAS
%MEDIDAS E DOS PARAMETROS

% 1)OBSERVAÇÕES: vetor das coordenadas dos alvos virtuais no sistema
da estação em mm

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ALTERAR OS
DADOS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%COORDENADAS DOS ALVOS VIRTUAIS SEM AS CASAS DECIMAIS COM PRECISÃO DE
%MILIMETRO

XVEST=[71196; 71195; 71194; 71203];
YVEST=[99487; 99330; 99147; 99751];
ZVEST=[100064; 100058; 100059; 100061];

%COORDENADAS DOS ALVOS VIRTUAIS COM UMA CASA DECIMAL

% XVEST=[71195.6; 71194.8; 71193.7; 71203.1];
% YVEST=[99487.3; 99330.4; 99146.7; 99750.8];
% ZVEST=[100063.5; 100058.2; 100059.1; 100060.9];

%COORDENADAS DOS ALVOS VIRTUAIS COM TRES CASAS DECIMAIS

% XVEST=[71195.633; 71194.841; 71193.695; 71203.143];
% YVEST=[99487.300; 99330.391; 99146.726; 99750.788];
% ZVEST=[100063.550; 100058.250; 100059.101; 100060.873];

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% 2) TRANSFORMAÇÃO DAS Coordenadas dos alvos virtuais, para o sistema
do espelho      x = 1/s * inv(M) * (XVEST - tx)
```

```
r1=[1 0 0; 0 cos(xa(1)) sin(xa(1)); 0 -sin(xa(1)) cos(xa(1))];
r2=[cos(xa(2)) 0 -sin(xa(2));0 1 0; sin(xa(2)) 0 cos(xa(2))];
r3=[cos(xa(3)) sin(xa(3)) 0; -sin(xa(3)) cos(xa(3)) 0; 0 0 1];
M=r3*r2*r1;
R=inv(M);
```

```
XM1=XVEST(1);
YM1=YVEST(1);
ZM1=ZVEST(1);
XM2=XVEST(2);
YM2=YVEST(2);
ZM2=ZVEST(2);
XM3=XVEST(3);
YM3=YVEST(3);
ZM3=ZVEST(3);
XM4=XVEST(4);
YM4=YVEST(4);
ZM4=ZVEST(4);
```

```
p1_vir_esp=1/xa(7)*R*[XM1;YM1;ZM1]-1/xa(7)*R*[tx;ty;tz]; % x,y,z do
ponto virtual p1
p2_vir_esp=1/xa(7)*R*[XM2;YM2;ZM2]-1/xa(7)*R*[tx;ty;tz];
p3_vir_esp=1/xa(7)*R*[XM3;YM3;ZM3]-1/xa(7)*R*[tx;ty;tz];
p4_vir_esp=1/xa(7)*R*[XM4;YM4;ZM4]-1/xa(7)*R*[tx;ty;tz];
```

```
% PROPAGAÇÃO DAS VARIANCIAS
```

```
syms w fii k tx ty tz s XM YM ZM R
```

```
R1=[1 0 0; 0 cos(w) -sin(w); 0 sin(w) cos(w)];
R2=[cos(fii) 0 sin(fii);0 1 0; -sin(fii) 0 cos(fii)];
R3=[cos(k) -sin(k) 0; sin(k) cos(k) 0; 0 0 1];
R=R1*R2*R3;
```

```
p_vir_esp=1/s*R*[XM;YM;ZM]-1/s*R*[tx;ty;tz];
```

```
parametros=[w,fii,k,tx,ty,tz,s, XM, YM, ZM];
```

```
J=jacobian(p_vir_esp,parametros);
```

```
% 3) MODELO ESTOCÁSTICO: blkdiag(mvc_par,mvc das coordenadas medidas)
%C_par (10x10). Mesma variância para as coordenadas medidas de p1 p2
p3 e
%p4: 1mm2
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ALTERAR OS DADOS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5
CXYZ=1*eye(3,3);
%CXYZ=0.01*eye(3,3);
%CXYZ=0.000001*eye(3,3);
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

C_par_XYZ = blkdiag(mvc_par, CXYZ);

% CALCULO DOS VALORES DAS DERIVADAS E DA MVC DE x y z (coordenadas
dos
% alvos virtuais no sistema do espelho)

% p1_vir_esp=1/xa(7)*RF*[XM1;YM1;ZM1]-1/xa(7)*RF*[tx;ty;tz];
% p2_vir_esp=1/xa(7)*R*[XM2;YM2;ZM2]-1/xa(7)*R*[tx;ty;tz];
% p3_vir_esp=1/xa(7)*R*[XM3;YM3;ZM3]-1/xa(7)*R*[tx;ty;tz];
% p4_vir_esp=1/xa(7)*R*[XM4;YM4;ZM4]-1/xa(7)*R*[tx;ty;tz];
%

w=xa(1);
fii=xa(2);
k=xa(3);
tx=xa(4);
ty=xa(5);
tz=xa(6);
s=xa(7);

%PONTO 1
XM=XVEST(1);
YM=YVEST(1);
ZM=ZVEST(1);

val_J=eval(J);
Cxyz_vir_1 = val_J*C_par_XYZ*val_J';

desvio_vir_1=sqrt(diag(Cxyz_vir_1))

%PONTO 2
XM=XVEST(2);
YM=YVEST(2);
ZM=ZVEST(2);

val_J=eval(J);
Cxyz_vir_2 = val_J*C_par_XYZ*val_J';

desvio_vir_2=sqrt(diag(Cxyz_vir_2))

%PONTO 3
XM=XVEST(3);
YM=YVEST(3);
ZM=ZVEST(3);

val_J=eval(J);
Cxyz_vir_3 = val_J*C_par_XYZ*val_J';

desvio_vir_3=sqrt(diag(Cxyz_vir_3))

%PONTO 4
XM=XVEST(4);
YM=YVEST(4);
ZM=ZVEST(4);

val_J=eval(J);

```

```

Cxyz_vir_4 = val_J*C_par_XYZ*val_J';;

desvio_vir_4=sqrt(diag(Cxyz_vir_4))

%%%%%%%% FIM DOS CALCULOS DAS COORDENADAS DOS ALVOS VIRTUAIS NO
SISTEMA DO
%%%%%%%% ESPELHO COM PROPAGAÇÃO

%PROGRAMA 3 = TRANSFORMA AS COORDENADAS DOS ALVOS VIRTUAIS REFLETIDAS
PARA
%O SISTEMA DA ESTAÇÃO

% 1) Coordenadas dos alvos virtuais, no sistema do espelho refletidas
em y
% xvr1 = p1_vir_esp(1,1)

p1_ref_esp=[p1_vir_esp(1,1);-1*p1_vir_esp(2,1);p1_vir_esp(3,1)];
p2_ref_esp=[p2_vir_esp(1,1);-1*p2_vir_esp(2,1);p2_vir_esp(3,1)];
p3_ref_esp=[p3_vir_esp(1,1);-1*p3_vir_esp(2,1);p3_vir_esp(3,1)];
p4_ref_esp=[p4_vir_esp(1,1);-1*p4_vir_esp(2,1);p4_vir_esp(3,1)];

% 2) TRANSFORMAÇÃO DAS Coordenadas refletidas dos alvos virtuais, para
o
% sistema da estação      X = s * M * x_ref + tx

r1=[1 0 0; 0 cos(w) sin(w); 0 -sin(w) cos(w)];
r2=[cos(fii) 0 -sin(fii);0 1 0; sin(fii) 0 cos(fii)];;
r3=[cos(k) sin(k) 0; -sin(k) cos(k) 0; 0 0 1];
M=r3*r2*r1;

% Coordenadas dos alvos REAIS no sistema da Estação

input ('coordenadas dos alvos REAIS no sistema da ESTAÇÃO')

P1_reais=xa(7)*M*p1_ref_esp+[tx;ty;tz]
P2_reais=xa(7)*M*p2_ref_esp+[tx;ty;tz]
P3_reais=xa(7)*M*p3_ref_esp+[tx;ty;tz]
P4_reais=xa(7)*M*p4_ref_esp+[tx;ty;tz]

% 3) Propagação de variâncias

syms R w fii k tx ty tz s xvr yvr zvr

r1=[1 0 0; 0 cos(w) sin(w); 0 -sin(w) cos(w)];
r2=[cos(fii) 0 -sin(fii);0 1 0; sin(fii) 0 cos(fii)];;
r3=[cos(k) sin(k) 0; -sin(k) cos(k) 0; 0 0 1];
M=r3*r2*r1;

p_ref_esp=[xvr;yvr;zvr];
P_reais=s*M*p_ref_esp+[tx;ty;tz];

parametros=[w,fii,k,tx,ty,tz,s,xvr,yvr,zvr];

D=jacobian(P_reais,parametros);

```

```

% 4) CALCULO DOS VALORES DAS DERIVADAS E DA MVC DE X Y Z (coordenadas
dos
% alvos reais no sistema da estação)

w=xa(1);
fii=xa(2);
k=xa(3);
tx=xa(4);
ty=xa(5);
tz=xa(6);
s=xa(7);

input ('MVC das coordenadas dos alvos reais no sistema da estação')
% PONTO 1
xvr=p1_ref_esp(1);
yvr=p1_ref_esp(2);
zvr=p1_ref_esp(3);
d=eval(D);
Cxyz_virtuais = blkdiag(mvc_par,Cxyz_vir_1);
Cxyz_reais1=d*Cxyz_virtuais*d' ;

desvio_reais_1=sqrt(diag(Cxyz_reais1))

% PONTO 2
xvr=p2_ref_esp(1);
yvr=p2_ref_esp(2);
zvr=p2_ref_esp(3);
d=eval(D);
Cxyz_virtuais = blkdiag(mvc_par,Cxyz_vir_2) ;
Cxyz_reais2=d*Cxyz_virtuais*d' ;

desvio_reais_2=sqrt(diag(Cxyz_reais2))

% PONTO 3
xvr=p3_ref_esp(1);
yvr=p3_ref_esp(2);
zvr=p3_ref_esp(3);
d=eval(D);
Cxyz_virtuais = blkdiag(mvc_par,Cxyz_vir_3) ;
Cxyz_reais3=d*Cxyz_virtuais*d' ;

desvio_reais_3=sqrt(diag(Cxyz_reais3))

% PONTO 4
xvr=p4_ref_esp(1);
yvr=p4_ref_esp(2);
zvr=p4_ref_esp(3);
d=eval(D);
Cxyz_virtuais = blkdiag(mvc_par,Cxyz_vir_4);
Cxyz_reais4=d*Cxyz_virtuais*d' ;

desvio_reais_4=sqrt(diag(Cxyz_reais4))

```