NAYARA NEGRÃO PEREIRA

MODELOS NÃO LINEARES MISTOS NA ANÁLISE DE CURVAS DE CRESCIMENTO DE BOVINOS DA RAÇA TABAPUÃ

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T

P436m
2014

Pereira, Nayara Negrão, 1988-

Modelos não lineares mistos na análise de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã / Nayara Negrão Pereira. – Viçosa, MG, 2014.

x, 39f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Antônio Policarpo Souza Carneiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.34-39.

1. Bovino - Melhoramento genético. 2. Bovino - Curva de crescimento. 3. Coeficientes aleatórios. 4. Máxima verossimilhança marginal. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Estatística. Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria. II. Título.

CDD 22. ed. 636.21

NAYARA NEGRÃO PEREIRA

MODELOS NÃO LINEARES MISTOS NA ANÁLISE DE CURVAS DE CRESCIMENTO DE BOVINOS DA RAÇA TABAPUÃ

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de fevereiro de 2014.

Paulo César Emiliano
(Coorientador)
(UFV)

Joel Camilo Souza Carneiro
(UFES)

Antonio Policarpo Souza Carneiro
(Orientador)
(UFV)

Dedico a Deus
e à minha família.

Louvem a Deus, todas as nações! Que todos os povos o louvem! O seu amor por nós é forte, e a sua fidelidade dura para sempre. (Salmo 117)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me dado força para concluir mais uma etapa da vida, por todas as coisas boas que ele tem feito por mim, pois sem Deus eu não seria nada.

À toda a minha família, que mesmo longe conseguiu se fazer tão presente. Minha mãe Iraci Negrão e padrasto Léo Valois, e meu pai Manoel Narcizo e madrasta Valcenira Pereira, que sempre estiveram ao meu lado, me incentivando e me cercando de carinho e amor e a meus irmãos Renata, Marcos e Dani.

Aos demais familiares que sempre me incentivaram, em especial aos meus tios Tânia Braga e Rinaldo Braga, que me tratam como filha. Aos meus avós Florentina Gomes e Henrique Gomes, que sempre estiveram ao meu lado me apoiando em qualquer decisão.

A Igreja Pentecostal Arca do Concerto que me recebeu de braços abertos com tanto carinho e amor, foi como uma família para mim, a todos os irmãos e irmãs que ganhei, em especial aos pastores Emerson Douglas e Renata Alves que foram como pais para mim, vou sentir muita saudade de todos.

Ao professor Antônio Policarpo Souza Carneiro que me ajudou na conclusão deste trabalho, se mostrando sempre disposto para o que eu precisasse.

Aos amigos Diego, Bruno, Márcio, Guilherme, Édimo, Leandro, Fátima, Vinicius e Ana que passaram pela minha vida nesses dois anos, me trazendo alegria e momentos de extrema felicidade. Em especial ao Wagner e a Pâmela com quem dividia meus momentos diários.

Ao professor Héliton Ribeiro Tavares que acreditou em mim na graduação e sempre ajudou em minhas decisões acadêmicas.

À ABCZ (Associação Brasileira dos Criados de Zebu) pela disponibilização dos dados.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro durante todo o curso.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de desenvolver esse trabalho e concluir a pós-graduação.

A todos que acreditaram em mim e contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desse curso.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

RESUMO

PEREIRA, Nayara Negrão, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2014. M**odelos não lineares mistos na análise de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã.** Orientador: Antônio Policarpo Souza Carneiro. Coorientadores: Fabyano Fonseca e Silva, Paulo Luiz Souza Carneiro e Paulo César Emiliano.

A análise de curvas de crescimento de animais tem sido muito utilizada para aumentar a eficiência da pecuária de corte. Estudos relacionados a curvas de crescimento com modelos não lineares mistos podem ter aplicações estratégicas em programas de melhoramento genético na definição de critérios de seleção para precocidade e ganho de peso, tendo em vista, que para cada indivíduo é estimado um coeficiente aleatório, facilitando a identificação e seleção de animais mais eficientes com base nos coeficientes. Essa metodologia considera a variabilidade entre e dentro de indivíduos. O objetivo deste trabalho foi avaliar a eficiência do ajuste de curvas de crescimento através de modelos não lineares mistos. Foram ajustados os modelos não lineares Michaelis-Menten Modificado, Logístico, von Bertalanffy, Gompertz, Richards e Brody, com e sem a incorporação de efeitos aleatórios para análise de curva de crescimento de bovinos de corte da raça Tabapuã. Para comparação entre modelos fixos e mistos foram utilizados os seguintes avaliadores de qualidade de ajuste: critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação bayesiano (BIC), desvio médio absoluto (DMA), erro quadrático médio (EQM) e coeficiente de determinação (R^2). A utilização de modelos não lineares mistos foi eficiente para descrever curvas de crescimento de bovinos.

ABSTRACT

PEREIRA, Nayara Negrão, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2014. **Nonlinear mixed models in the analysis of growth curves of cattle breed Tabapuã.** Advisor: Antônio Policarpo Souza Carneiro. Co-Advisors: Fabyano Fonseca e Silva, Paulo Luiz Souza Carneiro and Paulo César Emiliano.

The analysis of growth curves of animals has been widely used to increase the efficiency of beef cattle ranching. Related to growth curves with nonlinear mixed models strategic, studies have strategic applications in genetic improving programs in defining selection criteria for earliness and weight gain, aimed at, that for each individual is estimated a random coefficient, facilitating identification and selection of more efficient animals based on the coefficients. This methodology considers the variability between and within individuals. The objective of this study was to evaluate the efficiency of the adjustment of growth curves by nonlinear mixed models. Nonlinear models, Michaelis-Menten Modified, Logistic, von Bertalanffy, Gompertz, Richards and Brody, were fitted, with and without the incorporation of random effects for analysis of growth in beef cattle Tabapuã race. For comparison between fixed and mixed models were used the following adjustment quality evaluators: Akaike's information criterion (AIC), Bayesian information criterion (BIC), mean absolute deviation (DMA), mean square error (MSE) and coefficient of determination (R^2). The use of nonlinear mixed model was efficient to describe bovine growth curves.

1. INTRODUÇÃO

A região Nordeste abrange grande área do território nacional, apresentando uma grande diversidade de ambientes. Esta diversidade tem reflexos diretos e importantes nas características da pecuária de corte desenvolvida na região, de modo que a avaliação do crescimento dos animais torna-se cada vez mais importante para aumentar a eficiência da atividade.

O crescimento dos animais apresenta relação direta com a quantidade e qualidade de carne produzida. Estudos relacionados a curvas de crescimento que levam em consideração dados de peso-idade, com a utilização de modelos não lineares, têm aplicações estratégicas em programas de melhoramento genético na definição de critérios de seleção para precocidade e ganho de peso. Além disso, podem auxiliar na definição de sistemas de produção mais adequados para cada raça e região quanto ao manejo, programas alimentares, bem como na definição de cruzamentos.

Na análise de curvas de crescimento utilizam-se medidas repetidas de peso-idade. As medidas de peso dos animais distribuem-se ao longo do tempo de forma semelhante a curvas exponenciais e podem ser descritas por modelos que consideram as relações não lineares entre peso e idade (SANTORO et al., 2005).

Diferentes modelos não lineares são apresentados na literatura para descrever curvas de crescimento, e assim há uma busca pelo modelo que se ajuste melhor aos dados. Para definição desse melhor ajuste são utilizados avaliadores de qualidade de ajuste, os quais indicam estatisticamente qual o melhor modelo.

Os modelos não lineares, geralmente fornecem um bom ajuste com menos parâmetros do que modelos lineares, além de apresentar parâmetros ou funções de parâmetros com interpretação biológica, facilitando o estudo acerca do peso adulto, velocidade de crescimento, pontos críticos de mudanças na velocidade de crescimento, etc.

Dentre as técnicas estatísticas utilizadas para o ajuste de curvas de crescimento, os modelos não lineares mistos, tem tido aplicação prática para identificação de animais mais eficientes (CRAIG e SCHINCKEL, 2001; AGGREY, 2009; MILANI et al., 2013), sendo que, além de permitirem a utilização de funções não lineares para melhor explicação dos fenômenos, consideram também a variabilidade entre e dentro dos indivíduos, permitindo com isso, estimativas mais confiáveis e mais precisas.

O uso de modelos não lineares mistos possibilita a utilização de diferentes tipos de estrutura para as matrizes de variâncias-covariâncias, optando-se por aquela que melhor representa a estrutura de correlação dos dados, e também permite descrever o comportamento dos perfis médios através de curvas.

O modelo misto considera a existência de efeitos fixos e aleatórios, em que os efeitos são considerados fixos quando se deseja inferir somente para as categorias das variáveis independentes que são incluídas no ajuste do modelo. Os efeitos são considerados aleatórios quando as categorias das variáveis utilizadas no ajuste do modelo constituem uma amostra aleatória de uma população, ou seja, um conjunto de categorias com uma distribuição de probabilidade, e se deseja inferir para a população inteira (HAUSER et al., 2009).

Modelos não lineares mistos são compostos por efeitos fixos e aleatórios, podendo ser ajustados a dados desbalanceados em relação ao tempo e por conter efeitos aleatórios, além do ajuste de curvas médias, permitem também o ajuste de curvas individuais para cada indivíduo, facilitando com isso, o critério de seleção dos melhores indivíduos, tendo em vista que, para cada animal, é gerado um efeito aleatório.

O objetivo deste trabalho foi avaliar a eficiência de modelos não lineares mistos para análise de curva de crescimento de bovinos de corte da raça Tabapuã.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Esta seção está assim dividida: na seção 2.1 são apresentados alguns conceitos básicos de regressão não linear, enquanto que na seção 2.2 são apresentados alguns modelos não lineares, na seção 2.3 são apresentados conceitos de modelos não lineares mistos, bem como a utilização dos mesmos para o ajuste de curvas de crescimento e finalmente na seção 2.4 alguns conceitos e a importância dos avaliadores de qualidade de ajuste para comparação de modelos.

2.1 Modelo não linear

Na regressão não linear os dados são modelados por uma função que é uma combinação não linear de parâmetros, em que se tem a relação entre uma variável dependente e uma, ou mais, variáveis independentes.

Um modelo é classificado como não linear se, pelo menos uma das derivadas parciais da função esperança em relação aos parâmetros é função de parâmetros desconhecidos (PRUDENTE, 2009).

Os modelos não lineares nos parâmetros são da forma:

$$Y = f(X, \beta) + e \qquad (1)$$

em que $f(X, \beta)$ é uma função não linear, com constantes conhecidas (X_i) e parâmetros desconhecidos (β) e e são os erros associados ao modelo que são independentes e apresentam distribuição normal com média zero e variância constante.

Os modelos não lineares são aplicados nas mais diversas áreas tais como farmacologia, biologia, agronomia e zootecnia. Uma das vantagens na utilização desses modelos é a obtenção de parâmetros que são facilmente interpretáveis. Por terem uma base teórica, os parâmetros dos modelos fornecem um maior conhecimento acerca do fenômeno em estudo.

Modelos não lineares, geralmente fornecem um bom ajuste, com menos parâmetros do que os modelos lineares. A transformação de um modelo não linear em um modelo linear nos parâmetros, se por um lado facilita o processo de ajuste, em alguns casos implica em fazer suposições não realísticas sobre o termo dos erros (distribuição normal com variância constante) e perde-se informação sobre os erros padrão dos parâmetros originais. Além disso, existem modelos que são intrinsecamente não lineares, isto é, não podem ser linearizados por transformação (AMARAL, 2008).

Vonesh e Chinchili (1996) afirmam que, a maioria dos experimentos nas áreas agrárias e biológicas exigem um modelo não linear, destacando-se os modelos sigmoidais e as curvas de crescimento assintóticas. Eles são muito utilizados, por exemplo, para descrever curvas de crescimento de animais, considerando a existência de relações não lineares entre peso e idade. Dentre os modelos não lineares usuais para descrição do crescimento de animais estão: Brody, Gompertz, Logístico, Richards e von Bertalanffy.

Nos modelos não lineares não é possível encontrarmos formas analíticas para a estimação dos parâmetros. Sendo que, métodos numéricos podem ser utilizados juntamente com os métodos de estimação, o que requer cálculos computacionais intensivos.

2.2 Curvas de crescimento

O uso de modelos não lineares tem apresentado uma vasta aplicação em diversas áreas do conhecimento científico. Dentre essas aplicações, destacam-se as curvas de crescimento de animais, que permitem descrever a evolução do peso em função da idade do animal, bem como alternâncias entre ganho e perda de peso, que podem ocorrer devido à diversidade do ambiente de produção, diversidade genética dos animais, etc.

O ajuste de curvas de crescimento por meio de modelos não lineares tem tornado mais eficiente a definição de estratégias de melhoramento genético, nutrição e manejo dos animais, tendo em vista que os modelos não-lineares são bastante flexíveis para serem utilizados com dados de peso-idade e seus parâmetros possuem interpretação biológica.

Em vários estudos, curvas de crescimento de bovinos de raças zebuínas foram ajustadas com utilização de modelos não lineares (LÔBO et al., 2002; SAKAGUTI et al., 2003; SANTORO et al., 2005; DIAS et al., 2006; FORNI, 2007; SOUSA JÚNIOR et al., 2010; LOPES et al., 2011). Dentre os modelos não lineares utilizados para descrever curvas de crescimento de bovinos, os principais são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1- Principais modelos não lineares mistos utilizados para descrever curvas de crescimento de bovinos

Modelo	Componente sistemático	Referência
Brody	$\beta_1(1-\beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})$	Brody (1945)
Gompertz	$\beta_1 \exp(-\beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})$	Gompertz (1825)
Logístico	$\beta_1(1+\beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})^{-1}$	Ratkowski (1983)
MMM	$\frac{\beta_2 \beta_3^{\beta_4} + \beta_1 x_{ij}^{\beta_4}}{\beta_3^{\beta_4} + x_{ij}^{\beta_4}}$	Lopez et al. (2000)
Richards	$\beta_1(1 \pm \beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})^{\beta_4}$	Richards (1959)
von Bertalanffy	$\beta_1(1-\beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})^3$	von Bertalanffy (1957)

MMM: Michaelis-Menten Modificado

Nos modelos apresentados na Tabela 1, x_{ij} é a idade do animal *i* no tempo *j*, o parâmetro β_1 representa o valor assintótico, interpretado como peso adulto do animal ou peso à maturidade; β_2 é um parâmetro de escala, sendo uma constante de integração, geralmente sem interpretação biológica; β_3 é o parâmetro mais importante, pois é interpretado como índice de maturidade ou de precocidade, e é um indicativo da velocidade de crescimento do animal, quanto maior o valor de β_3 maior a velocidade de crescimento do animal.

No modelo MMM o parâmetro β_2 representa o peso ao nascer. Os modelos que apresentam o parâmetro β_4 possuem ponto de inflexão variável, como é o caso dos modelos Michaelis-Menten Modificado (MMM) e Richards. O modelo Brody não apresenta ponto de inflexão, enquanto os outros modelos Gompertz, Logístico e von Bertalanffy possuem ponto de inflexão fixo.

2.3 Modelos não lineares mistos

2.3.1 Conceitos básicos

Os modelos não lineares mistos são definidos como modelos não lineares de efeitos fixos e aleatórios. Tais modelos são de efetivo interesse, sendo apropriados para análise de medidas repetidas ao longo do tempo se adequando bem a dados desbalanceados ou incompletos.

Segundo Lindstrom e Bates (1990), os modelos não lineares mistos para dados com repetição tornaram-se bastante conhecidos devido a sua flexibilidade na escolha de estruturas de covariância, que levam em consideração a correlação e a heterogeneidade de variâncias na mesma unidade experimental, e também pela flexibilidade de tratamento de dados desbalanceados e/ou incompletos.

Nos modelos mistos, o ajuste é feito em duas etapas, para a parte aleatória tem-se a predição dos efeitos aleatórios e a estimação dos componentes de variância, enquanto que, para a parte fixa tem-se a estimação dos efeitos fixos bem como a realização de testes de hipóteses sobre funções estimáveis dos efeitos fixos. Em geral, tanto a predição dos efeitos aleatórios como a estimação dos efeitos fixos dependem da estimação dos componentes de variância (PEREIRA e FERREIRA, 2008).

No modelo não linear misto considera-se a estrutura não linear para a média, a variabilidade entre indivíduos, além da correlação e heterogeneidade de variâncias entre medidas do mesmo indivíduo. Como as medidas são repetidas de modo sistemático, nas mesmas unidades experimentais, espera-se que exista uma correlação não nula entre as medidas e uma heterocedasticidade das variâncias nas diversas ocasiões (ALCARDE, 2010).

Segundo Pinheiro e Bates (2000), a mais comum aplicação dos modelos não lineares mistos ocorre para dados com medidas repetidas, em particular, dados longitudinais.

O modelo não linear misto tem a seguinte forma geral:

$$y_{ij} = f(A, \beta, B, b_i, x_{ij}) + e_{ij}, \quad b_i \sim N(0, \sigma^2 D) \tag{2}$$

sendo

y_{ij}: j-ésima observação do i-ésimo indivíduo ou unidade experimental;

β é o vetor de parâmetros de efeitos fixos;

b_i é o vetor de parâmetros dos efeitos aleatórios;

A: matriz de incidência para efeitos fixos;

B: matriz de incidência para efeitos aleatórios,

D é a matriz de variâncias e covariâncias para os efeitos aleatórios e,

e_{ij} : são erros independentes e identicamente distribuídos com média dada por um vetor de zeros e matriz de variâncias $\sigma^2 I$, em que I é a matriz identidade.

2.3.2 Aplicação para análise de curvas de crescimento

Os modelos não lineares mistos tem tido vasta aplicação, sendo uma delas a análise de curvas de crescimento. Como citado anteriormente, o modelo de efeitos aleatórios considera tanto a variabilidade entre indivíduos quanto a correlação e heterogeneidade dentro de cada indivíduo.

Os modelos com efeitos fixos e aleatórios podem ser utilizados quando se deseja ajustar uma curva média para a população e curvas individuais, que consideram o desvio em relação à curva média, podendo ser utilizadas para a identificação dos melhores indivíduos ou unidades experimentais.

Dentre os modelos da Tabela 1, para exemplificação, é apresentado na expressão (1) a seguir o modelo logístico com efeitos fixos e aleatórios. Os efeitos aleatórios incluídos no modelo não linear misto podem ser definidos de acordo com o interesse do pesquisador verificando a eficiência de estimação e facilidade na convergência.

Modelo logístico com efeitos fixos e aleatórios:

$$y_{ij} = \beta_1 + b_{1i}(1 + \beta_2 e^{x_{ij}(\beta_3 + b_{3i})})^{-1} \quad (3)$$

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{31} \\ \sigma_{31} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{3i} \end{bmatrix} \sim N(0, \sigma^2 D)$$

Este modelo para ajuste de curvas de crescimento possui três parâmetros de efeitos fixos a serem estimados (β_1, β_2 e β_3) e dois parâmetros de efeito aleatório (b_{1i} e b_{3i}), em que cada parâmetro de efeito aleatório segue distribuição normal com média dada por um vetor de zeros e estrutura de covariância dada pela matriz D, em que σ_1^2 e σ_3^2 são as variâncias e σ_{31} a covariância.

Alguns trabalhos utilizaram o ajuste de curvas de crescimento com modelos não lineares mistos:

Karaman et al. (2013) que utilizaram uma abordagem de modelagem mista para estudos de crescimento de codornas japonesas e com a incorporação de efeitos aleatórios aos modelos, houve uma redução na variância residual e uma melhor qualidade de ajuste.

Carvalho (2010) que apresentou modelos não lineares mistos como uma nova metodologia, para descrever crescimento de produção de *Eucalyptus*, comparando o ajuste dos modelos não lineares mistos, com os obtidos pelos modelos de efeito fixo. Em que foi possível conseguir melhorias nas estimativas em torno de 50%. Vale destacar que para bovinos não foram encontrados trabalhos deste tipo.

2.4 Avaliadores de qualidade de ajuste

Quando diferentes modelos de regressão são ajustados para um mesmo conjunto de dados é necessário a avaliação desses modelos, afim de selecionar aquele que melhor se ajusta aos dados. Na literatura existem critérios que fornecem estatísticas que auxiliam na decisão de qual modelo escolher.

Ao selecionarmos modelos, é preciso ter em mente que não existem modelos verdadeiros. Há apenas modelos aproximados da realidade que, causam perda de informações. Deste modo, é necessário fazer a seleção do "melhor" modelo, dentre aqueles que foram ajustados, para explicar o fenômeno sob estudo (EMILIANO, 2010).

Existem vários critérios utilizados para seleção do melhor modelo, dentre os métodos existentes na literatura encontram-se o critério de informação de Akaike (AIC), proposto por Akaike (1974), o critério de informação bayesiano (BIC), proposto por Schwarz (1978), o erro quadrático médio (EQM), o desvio médio absoluto (DMA) e o coeficiente de determinação (R^2).

Emiliano et al. (2014) por meio de simulação Monte Carlo verificaram a eficiência dos critérios AIC e BIC para diferentes situações, dentre elas, o ajuste de curvas de crescimento utilizando modelos não lineares. E para o ajuste de curvas de crescimento com um pequeno tamanho da amostra N = 13 o AIC apresentou melhor desempenho em comparação com o BIC.

O critério de informação de Akaike pode ser definido como um critério que dá uma pontuação para o modelo, baseado em sua adequação aos dados e na ordem do modelo. O

AIC não se destina para comparação de resultados com diferentes conjuntos de observações (AKAIKE, 1974).

De acordo com Seghouane e Bekara, *apud* SOBRAL (2011), o BIC é definido como o critério que escolhe o modelo de ordem correta com probabilidade um, à medida que o número de amostras tende ao infinito, desde que o modelo mais adequado esteja no conjunto de modelos a ser verificado.

A ideia de se explorar vários avaliadores com o intuito de selecionar os melhores modelos de regressão vem perpetuando no decorrer da última década (SILVEIRA, 2010). Silveira et al. (2011), trabalhando com modelos não lineares para análise de curva de crescimento de ovinos cruzados, utilizaram o AIC e BIC como critérios para escolha do melhor modelo.

Mais recentemente em estudo para seleção de modelos não lineares que descrevem o acúmulo de matéria seca em plantas de alho, Puiatti et al. (2013) utilizaram os seguintes avaliadores de qualidade de ajuste: AIC, BIC, DMA e R^2.

Além dos trabalhos citados existem diversos trabalhos que utilizaram os avaliadores de qualidade de ajuste AIC, BIC, EQM, DMA e R^2, para a seleção do melhor modelo (MAIA et al., 2009; SILVA NA et al., 2011; SOBRAL et al., 2011; SOUSA et al., 2012; NASCIMENTO et al., 2013), tendo em vista, que os mesmos tem se mostrado eficientes como critério de seleção.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Descrição dos dados

Neste trabalho foram utilizados dados provenientes da Associação Brasileira de Criadores de Zebu (ABCZ), referentes a 52.756 observações de peso-idade de 7.931 animais da raça Tabapuã da região Nordeste. O conjunto de dados consiste de informações relativas a peso corporal em diferentes idades de 4.236 fêmeas e 3.695 machos da raça Tabapuã pertencentes a cinco regiões de produção do Nordeste, de acordo com a classificação de Arruda e Sugai, (1994) (Figura 1).

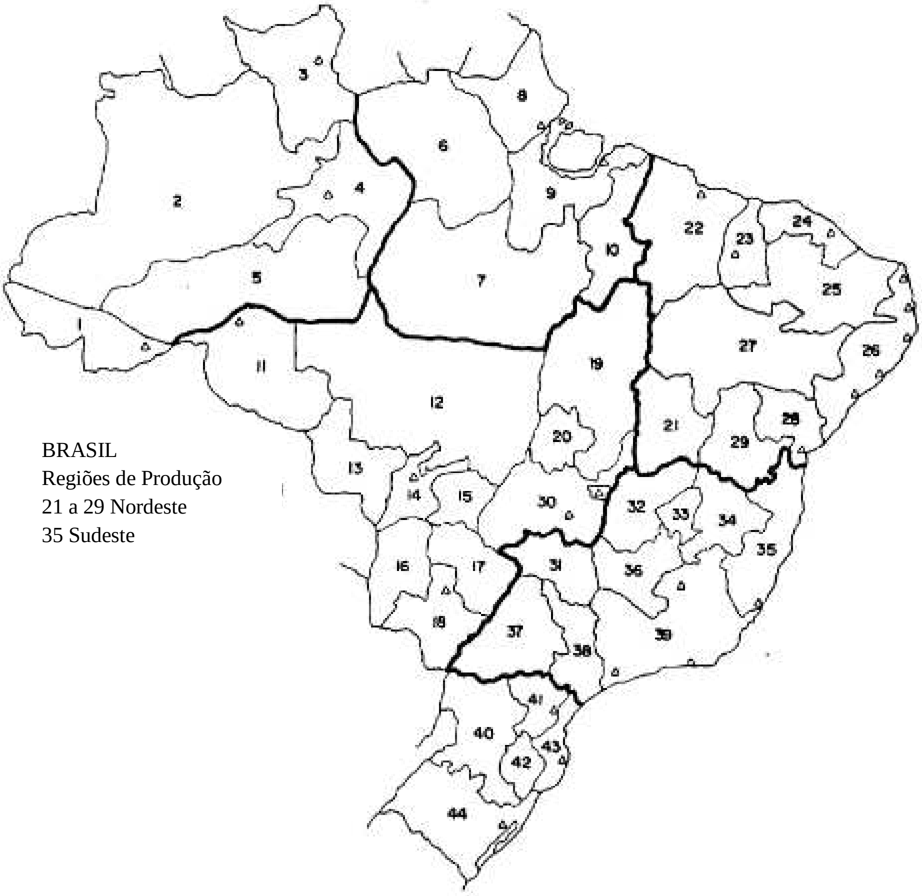

Figura 1- Distribuição das regiões de produção da pecuária bovina no Nordeste: Maranhão[22], Gado Algodão[25], Mata-Agreste[26], Sertão[27] e Itapetinga-Valadares[35]
Fonte: ARRUDA e SUGAI (1994).

Neste estudo, consideraram-se apenas animais com pelo menos seis pesagens, as demais regiões de produção do Nordeste (Figura 1) não foram incluídas nas análises em função do reduzido número de animais por região. Na Tabela 2 são apresentados os números de animais por sexo e região de produção.

Tabela 2- Número de animais por sexo e Região de Produção (RP) da raça Tabapuã no Nordeste brasileiro com restrição de seis a oito pesagens/animal

RP	Fêmeas	Machos	Total
MA	191	29	220
GA	88	105	193
AG	536	415	951
SE	39	31	70
IT	3382	3115	6497
Total	4236	3695	7931

MA: Maranhão; GA: Gado Algodão; AG: Mata-Agreste; SE: Sertão; IT: Itapetinga- Valadares.
Dados originais, sem restrição: 25920 animais.

3.2 Estimação dos parâmetros

Foram ajustados os modelos não lineares Michaelis-Menten Modificado, Logístico, von Bertalanffy, Gompertz, Richards e Brody, considerando modelo fixo e modelo misto com um ou dois coeficientes aleatórios.

O software utilizado para realização das análises estatísticas foi o SAS 9.3 (SAS, 2013), por meio do procedimento PROC NLMIXED. Os métodos de estimação e aproximação numérica, descritos a seguir estão disponíveis no PROC NLMIXED dos SAS: Método da máxima verossimilhança marginal, quadratura gaussiana adaptativa, método Bayes empírico.

Os métodos de estimação e aproximação numérica, disponíveis no PROC NLMIXED do SAS, são descritos em diversos estudos (PINHEIRO e BATES, 2000; ESQUIVEL et al., 2010; LOBOS, 2010; RIZZATO, 2011; CARDOSO, 2012)

3.2.1 Estimador de máxima verossimilhança marginal

Os métodos de máxima verossimilhança são mais flexíveis, não exigindo delineamentos balanceados e geralmente conduzindo a maior eficiência que o método de quadrados mínimos (RESENDE, 1996).

Para estimar os parâmetros do modelo não linear misto, foi utilizado o método da máxima verossimilhança marginal. Segundo Pinheiro e Bates (2000), devido aos efeitos aleatórios serem quantidades não observadas, a estimação pelo método da máxima verossimilhança de modelos mistos é baseada na densidade marginal.

Considerando o modelo não linear misto:

$$y_{ij} = f(A, \beta, B, b_i, x_{ij}) + e_{ij}, \quad b_i \sim N(0, \sigma^2 D) \qquad (4)$$

sendo

y_{ij}: j-ésima observação do i-ésimo indivíduo ou unidade experimental;

β: vetor de parâmetros de efeitos fixos;

b_i: vetor de parâmetros dos efeitos aleatórios;

A: matriz de incidência para efeitos fixos;

B: matriz de incidência para efeitos aleatórios;

D: matriz de variâncias e covariâncias para os efeitos aleatórios e,

e_{ij}: são erros independentes e identicamente distribuídos com média dada por um vetor de zeros e matriz de variâncias $\sigma^2 I$, em que I é a matriz identidade.

A forma da densidade marginal de *y*, considerando o *i*-ésimo indivíduo, se apresenta da seguinte maneira:

$$p(y_i \mid \beta, \sigma^2, D) = \int p(y_i \mid b_i, \beta, \sigma^2) p(b_i \mid D) db_i \qquad (5)$$

em que $p(y_i \mid \beta, \sigma^2, D)$ é a densidade marginal de *y*, $p(y_i \mid b_i, \beta, \sigma^2)$ é a densidade condicional de *y* dados os parâmetros e $p(b_i \mid D)$ a distribuição marginal de b_i.

Desse modo a função de verossimilhança é dada por

$$L(\beta, \sigma^2, D) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i \mid \beta, \sigma^2, D) \qquad (6)$$

e substituindo (5) em (6) temos:

$$L(\beta, \sigma^2, D) = \prod_{i=1}^{N} \int p(y_i \mid b_i, \beta, \sigma^2) p(b_i \mid D) db_i \qquad (7)$$

Um problema que surge nas integrações em relação a b_i, é que as resoluções das integrais não possuem uma forma analítica e, para resolver esse problema, há a necessidade da utilização de métodos numéricos para aproximação das integrais, tal como a método da quadratura gaussiana adaptativa.

3.2.2 Quadratura gaussiana adaptativa

Uma parte importante do método da máxima verossimilhança marginal é o cálculo da integral sobre os efeitos aleatórios. A quadratura Gaussiana é usada para aproximar integrais de funções com um determinado núcleo por meio de pesos ponderados e abscissas pré-determinadas (PINHEIRO e BATES, 1995).

O método padrão no PROC NLMIXED do SAS 9.3 (SAS, 2013) para aproximação é a integração numérica gaussiana adaptativa.

O método da quadratura gaussiana é utilizado para aproximar integrais na forma de:

$$I = \int p(z) w(z) dz, \qquad (8)$$

em que *p(z)* é uma função densidade condicional e *w(z)* uma função densidade marginal.

Estando a integral na forma apresentada anteriormente a aproximação pela quadratura gaussiana é:

$$\int p(z)w(z)dz \approx \sum_{q=1}^{Q} w_q p(z_q), \qquad (9)$$

em que Q é a ordem da aproximação, z_q são os pontos ou abcissas ou nós da quadratura no qual a função será avaliada e w_q são os pesos escolhidos apropriadamente, podendo ser obtidos de estudos anteriores, conhecimentos teóricos, etc.

No método da quadratura gaussiana adaptativa supõe-se que $p(z)w(z)$ segue, aproximadamente, distribuição normal com média igual à moda $\hat{z}$ de $\ln[p(z)w(z)]$ e variância dada por

$$\left[\frac{-\partial^2}{\partial z^2}\ln\left[p(z)w(z)\right]\big| z=\hat{z}\right]^{-1} \qquad (10)$$

Com isso os pontos do método gaussiano adaptativo ficam na seguinte forma

$$z_q^{+} = \hat{z} + \left[\frac{-\partial^2}{\partial z^2}\ln\left[p(z)w(z)\right]\big| z=\hat{z}\right]^{-1/2} z_q \qquad (11)$$

e com pesos dados por

$$w_q^{+} = \left[\frac{-\partial^2}{\partial z^2}\ln\left[p(z)w(z)\right]\big| z=\hat{z}\right]^{-1/2} \frac{w(z_q^{+})}{w(z_q)} w_q \qquad (12)$$

Substituindo (11) e (12) em (9), a aproximação da integral é dada por

$$\int p(z)w(z)dz \approx \sum_{q=1}^{Q} w_q^{+} p(z_q^{+}) \qquad (13)$$

Usualmente, o método da quadratura gaussiana adaptativa necessita de um número bem menor de pontos de quadratura, quando comparado ao método de Gauss-Hermite (RIZZATO, 2011).

O método da quadratura gaussiana adaptativa usa as estimativas de Bayes empírico dos efeitos aleatórios como ponto central para a quadratura e os atualiza para cada iteração (LITTELL et al., 2006).

3.2.3 Método Bayes empírico

Estimar os valores dos parâmetros da distribuição marginal de Y_i, na prática, é o interesse principal, além disso, é necessário fazer a predição dos efeitos aleatórios b_i, considerando a variabilidade entre os indivíduos, que é importante tanto na predição quanto para a análise de diagnóstico. A inferência sobre b_i é baseada em sua distribuição a *posteriori*, dada por

$$p(b_i \mid y_i, \beta, D, \sigma^2) = \frac{p(y_i \mid b_i, \beta, \sigma^2) f(b_i \mid D)}{\int p(y_i \mid b_i, \beta, \sigma^2) f(b_i \mid D) db_i} \qquad (14)$$

É conveniente ressaltar que a distribuição a *posteriori* de b_i depende da estimação dos parâmetros (β, σ^2 e D). Assim, a predição de b_i pelo método Bayes empírico, será o valor que maximiza a função $p(b_i \mid y_i, \beta, D, \sigma^2)$ quando as estimativas de β, σ^2 e D obtidas pelo método da máxima verossimilhança marginal, são substituídas na função descrita acima. Desse modo, a inferência sobre b_i pode ser baseada em uma distribuição a posteriori estimada, $p(b_i \mid y_i, \hat{\beta}, \hat{D}, \hat{\sigma}^2)$.

3.3 Modelos mistos ajustados

Os modelos não lineares utilizados neste trabalho para o ajuste de curvas de crescimento, foram os mesmos mostrados da Tabela 1, porém reparametrizou-se o parâmetro β_3, que foi inserido em todos os modelos, exceto o MMM, como 1/ β_3. As análises foram realizadas considerando 1) modelos não lineares de efeito fixo, 2) modelos com a incorporação de um efeito aleatório em β_1, 3) um efeito aleatório em β_3, 4) por fim com dois efeitos aleatórios incorporados aos parâmetros β_1 e β_3, de acordo com a descrição apresentada a seguir para o modelo von Bertalanffy.

Modelo von Bertalanffy com um parâmetro aleatório em β_1:

$$y_{ij} = (\beta_1 + b_{1i})(1 - \beta_2 e^{-x_{ij}/\beta_3})^3 \qquad (15)$$

Modelo von Bertalanffy com a incorporação de um efeito aleatório em β_3:

$$y_{ij} = \beta_1(1 - \beta_2 e^{-x_{ij}/(\beta_3 + b_{3i})})^3 \qquad (16)$$

Modelo von Bertalanffy com a incorporação de dois efeitos aleatórios em β_1 e β_3:

$$y_{ij} = (\beta_1 + b_{1i})(1 - \beta_2 e^{-x_{ij}/(\beta_3 + b_{3i})})^3 \qquad (17)$$

Aos modelos, Brody, MMM, Richards, Logístico e Gompertz, também foram incorporados efeitos aleatórios, semelhantemente ao apresentado para o modelo von Bertalanffy.

Devido a problemas de convergência foi utilizada a reparametrização do modelo Richards apresentada por Silveira et al. (2011):

$$y_i = \frac{\beta_1}{(1+e^{(\beta_2-\beta_3 x_i)})^{\frac{1}{\beta_4}}} + e_i \qquad (18)$$

3.4 Avaliadores de qualidade de ajuste

Para comparação entre modelos fixos e mistos foram utilizados os seguintes avaliadores de qualidade de ajuste: critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação bayesiano (BIC), desvio médio absoluto (DMA), erro quadrático médio (EQM) e coeficiente de determinação (R^2) calculado como o quadrado da correlação entre o valor observado e o valor estimado pela regressão.

3.4.1 Critério de informação de Akaike

O critério de Informação de Akaike (AIC), proposto por Akaike (1974), é definido por:

$$AIC = -2\ln L(\hat{\theta}) + 2p \qquad (19)$$

em que L($\hat{\theta}$) é o máximo da função de verossimilhança do modelo, e o segundo termo é uma penalização, que é maior à medida que se aumenta a ordem *p*, em que *p* é o número de parâmetros a serem estimados no modelo.

Dado um conjunto de modelos candidatos para os dados, o modelo que apresentar o menor valor AIC é o que apresenta melhor qualidade de ajuste. O AIC não só premia bondade de ajuste, mas também inclui uma penalidade que é uma função crescente do número de parâmetros estimados

3.4.2 Critério de informação bayesiano

O critério de informação bayesiano (BIC), proposto por Schwarz (1978), é definido por:

$$BIC = -2\ln L(\hat{\theta}) + p\ln n \qquad (20)$$

em que $L(\hat{\theta})$ é o máximo da função de verossimilhança do modelo, p é o número de parâmetros a serem estimados no modelo e n é o número de observações da amostra. Para seleção de modelos, quanto menor o valor de BIC, melhor a qualidade de ajuste, e consequentemente, a escolha do modelo que apresentar o menor valor.

3.4.3 Desvio médio absoluto

O desvio médio absoluto é a soma dos desvios absolutos em relação à média, dividido pelo número de observações da amostra.

$$DMA = \frac{\sum_{i=1}^{n} | y_i - \hat{y}_i |}{n}, \qquad (21)$$

em que y_i são os valores observados, $\hat{y}_i$ são os valores estimados e n é o número de observações da amostra. O desvio médio absoluto é uma medida importante de dispersão, ou variabilidade, que é menos afetado por observações extremas.

O valor do DMA é muito importante, pois, indica não somente o valor mais provável, bem como a incerteza com a qual a medida é afetada.

3.4.4 Erro quadrático médio

O erro quadrático médio (EQM) é uma forma de avaliar a diferença entre um estimador e o valor observado. O EQM é a média dos quadrados dos erros.

$$EQM = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}, \qquad (22)$$

em que y_i são os valores observados, $\hat{y}_i$ são os valores estimados e n é o número de observações da amostra.

Os valores do EQM podem ser utilizados para fins comparativos. Dois ou mais modelos estatísticos podem ser comparados usando seus EQMs como uma medida de quão bem eles explicam um determinado conjunto de observações, ou seja, é uma ferramenta útil para decidir se um determinado modelo é apropriado para os dados.

3.4.5 Coeficiente de determinação

O coeficiente de determinação foi calculado como o quadrado do coeficiente de correlação de Pearson que é uma medida do grau de associação entre duas variáveis. De acordo com Gujarati (2006) o R^2 é o indicador mais utlizado para medir a qualidade do ajustamento de uma linha de regressão aos dados. Verbalmente, R^2 mede a proporção ou percentual da variação total de Y, explicada pelo modelo de regressão.

$$R^2 = (r_{y,\hat{y}})^2 \tag{23}$$

em que y_i : valores observados; $\hat{y}_i$: valores estimados.

Todos os avaliadores de qualidade de ajuste apresentados anteriormente tem sido muito utilizados em trabalhos na área científica. Deve-se levar em conta que, quanto menor os valores de AIC, BIC, EQM, DMA, mais propensa será a escolha de determinado modelo, quanto ao R^2, quanto maior, melhor o ajuste do modelo aos dados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos pela estimação dos parâmetros dos modelos não lineares Brody, Gompertz, Richards, Logístico, von Bertalanffy e Michaelis-Menten Modificado (MMM) e os avaliadores de qualidade de ajuste, utilizados para comparação entre modelos fixos e mistos. São apresentadas as estimativas dos parâmetros obtidas por meio de modelos não lineares mistos, com a incorporação de um efeito aleatório b_{1i} no parâmetro β_1, com a incorporação de um efeito aleatório b_{3i} no parâmetro β_3 e com a incorporação de dois efeitos aleatórios b_{1i} e b_{3i}. Os resultados do ajuste de curva de crescimento única para os dois sexos (4.1) e uma curva de crescimento para cada sexo (4.2).

4.1 Curva de crescimento única

Na Tabela 3 são apresentados os avaliadores de qualidade de ajuste para os modelos fixos de curva de crescimento. O modelo MMM e Brody obtiveram melhor qualidade de ajuste, com menores valores de AIC, BIC, DMA, EQM e maior valor de R^2, respectivamente. O modelo logístico foi o que apresentou os maiores valores para avaliadores de qualidade de ajuste AIC (551.678), BIC (551.714), DMA (34,12) , EQM (2037) e menor valor de R^2 (76,05). O modelo logístico foi o que apresentou desempenho pior para todos os avaliadores de qualidade de ajuste utilizados.

Tabela 3- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo fixo

Modelo	AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	549.413	549.448	32,57	1951	77,04
Gompertz	550.533	550.569	33,37	1993	76,55
Logístico	551.678	551.714	34,12	2037	76,05
MMM	549.388	549.432	32,43	1950	77,05
Richards	550. 521	550.565	33,36	1993	76,56
von Bertalanffy	550.140	550.175	33,10	1978	76,72

MMM: Michaelis-Menten Modificado; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

Com incorporação de efeito aleatório em β_1 (Tabela 4), houve uma redução nos valores de AIC e BIC, nos valores de DMA em aproximadamente 50% e 78% nos valores de EQM, quando comparados aos resultados obtidos pelo modelo fixo, indicando melhora na qualidade de ajuste com uso do modelo misto. Pode-se também verificar um aumento do coeficiente de determinação (R^2) para todos os modelos mistos. Nas análises realizadas com modelos fixos, o modelo MMM obteve melhor qualidade de ajuste; enquanto que com a incorporação do efeito aleatório em β_1, o modelo Richards apresentou os melhores resultados para qualidade de ajuste, seguido do modelo MMM.

Silva FL et al. (2011) ajustaram curvas de crescimento para vacas Nelore utilizando o modelo Brody e obtiveram melhor qualidade de ajuste quando incorporaram ao modelo apenas um efeito aleatório no parâmetro β_1, mostrando que a incorporação de efeitos aleatórios pode levar a bons resultados.

Tabela 4- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeito aleatório (b_{1i}) em β_1

Modelo	AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	500.091	500.126	15,67	414,75	95,12
Gompertz	504.385	504.420	16,66	456,87	94,63
Logístico	508.510	508.545	17,56	501,40	94,12
MMM	499.770	499.812	15,53	407,34	95,22
Richards	499.211	499.253	15,43	407,05	95,21
von Bertalanffy	502.908	502.943	16,33	441,91	94,80

MMM: Michaelis-Menten Modificado; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

Os resultados apresentados na Tabela 5 mostram os avaliadores de qualidade de ajuste, quando incorporado efeito aleatório em β_3. Houve uma diminuição, em relação ao modelo fixo, nos valores dos avaliadores de qualidade de ajuste, indicando melhor qualidade de ajuste dos modelos de curva de crescimento.

Com a incorporação do efeito aleatório em β_3, o modelo Brody foi o que apresentou melhor qualidade de ajuste, com menores valores de AIC (499.597), BIC (499.632), EQM (414,28) e DMA (15,83) e maior valor de coeficiente de determinação R^2 (95,13).

Tabela 5- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeito aleatório (b_{3i}) em β_3

Modelo	AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	499.597	499.632	15,83	414,28	95,13
Gompertz	505.732	505.767	17,14	476,87	94,42
Logístico	511.081	511.116	18,19	538,86	93,72
MMM	509.823	509.865	17,60	514,15	93,96
Richards	506.102	506.144	17,21	480,86	94,37
von Bertalanffy	503.713	503.748	16,72	455,34	94,66

MMM: Michaelis-Menten Modificado; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

Pelos resultados apresentados na Tabela 6, pode-se verificar que seus valores diminuíram, quando comparados ao modelo fixo (Tabela 3), com a incorporação de dois efeitos aleatórios aos modelos, em β_1 e β_3.

O modelo (MMM) foi o que apresentou menor valor de AIC, considerando que foram estimados apenas dois parâmetros e os outros dois foram mantidos constantes no modelo, seguido do modelo Brody com valores de AIC (499.948) e BIC (499.997).

Comparando os resultados obtidos com a incorporação de dois efeitos aleatórios em β_1 e β_3, aos resultados obtidos com a incorporação de um efeito aleatório em β_1 (Tabela 4),nota-se que os valores de AIC e BIC aumentaram, com exceção do modelo Brody e MMM.

Com a incorporação de dois efeitos aleatórios, houve uma redução nos valores de AIC e BIC, com exceção do modelo Brody, quando comparados aos resultados obtidos com a incorporação de um efeito aleatório em β_3 (Tabela 5).

O mais indicado seria a utilização de modelos com a incorporação de um efeito aleatório, devido à dificuldade de convergência de alguns modelos, quando se incorpora dois efeitos aleatórios.

Tabela 6- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeito aleatório (b_{1i} e b_{3i}) em β_1 e β_3, respectivamente

Modelo	AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	499.948	499.997	15,72	415,81	95,11
Gompertz	504.562	504.611	16,80	460,91	94,59
Logístico	508.993	509.042	17,56	498,30	94,17
MMM	499.611	499.653	13,77	319,85	96,26
Richards	500.738	500.794	15,82	422,89	95,03
von Bertalanffy	502.941	502.990	16,46	445,52	94,76

MMM: Michaelis-Menten Modificado; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

Na Tabela 7 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e da variância residual para os modelos fixos de curva de crescimento Brody, Gompertz, Logístico, MMM, Richards, von Bertalanffy. Observam-se valores altos de variância residual, quando realizado o ajuste para modelos com efeito fixo em relação aos mistos (Tabelas 8, 9 e 10). O modelo MMM apresentou maior estimativa de peso à maturidade e menor valor de variância residual, seguido pelo modelo Brody e von Bertalanffy, respectivamente (Tabela 7). Resultados similares foram obtidos por Lopes et al. (2011), que ajustaram curvas de crescimento para bovinos Nelore, usando os modelos Brody, von Bertalanffy, Logístico e Gompertz.

Tabela 7- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo fixo

Modelo	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	559,24	0,9217	764,10		1951,18
Gompertz	411,61	0,6358	291,25		1999,57
Logístico	374,54	4,1303	183,55		2036,79
MMM	760,58	38,1486	916,29	1,0222	1949,64
Richards	412,27	0,0225	293,23	83,3082	1992,25
von Bertalanffy	436,34	0,4916	364,41		1978,25

MMM: Michaelis-Menten Modificado; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual estimada; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Após o ajuste com modelos de efeito fixo foram ajustados modelos com a incorporação de um efeito aleatório em β_1. Pelos resultados apresentados na Tabela 8, nota-se que com a incorporação do efeito aleatório houve grande redução nos valores da variância residual para todos os modelos ajustados. O modelo MMM misto foi o que apresentou menor valor de variância residual, com uma redução de 75%, quando comparado ao resultado obtido utilizando modelo fixo. Ao comparar os resultados obtidos pelo ajuste realizado com modelos fixos ao realizado com modelos de efeitos aleatórios, pode-se perceber que o modelo MMM fixo superestimou o peso à maturidade em aproximadamente 172 Kg e os modelos fixos Richards e Brody subestimaram o peso à maturidade em aproximadamente 344 Kg e 19 Kg, respectivamente.

Tabela 8- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeito aleatório (b_{1i}) em β_1

Modelo	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	578,75	0,9268	797,94		484,09
Gompertz	414,63	0,6529	290,63		532,80
Logístico	375,47	4,2593	181,43		584,21
MMM	588,22	49,6773	589,54	1,2262	473,72
Richards	746,71	0,9865	1535,20	0,7560	474,59
von Bertalanffy	441,26	0,4980	366,28		515,52

MMM: Michaelis-Menten Modificado; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual estimada; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Com efeito aleatório incorporado ao parâmetro β_3, obteve-se os resultados apresentados na Tabela 9, ao compararmos com os da Tabela 7, pode-se verificar que a incorporação de efeito aleatório em β_3, contribuiu para melhores estimativas de parâmetros e diminuição da variância residual, ressaltando a melhora na precisão das estimativas dos parâmetros. Ao observarmos os resultados apresentados na Tabela 7 percebe-se que o modelo MMM fixo superestimou o parâmetro β_3 em aproximadamente 288, quando comparado ao resultado apresentado na Tabela 9 para o modelo MMM.

Os modelos Brody, Gompertz, Logístico, Richards e von Bertalanffy fixos subestimaram os valores de β_3 em aproximadamente 705, 141, 71, 121 e 198, respectivamente, quando comparados aos resultados obtidos pelo ajuste de modelos mistos (Tabela 9).

Tabela 9- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeito aleatório (b_{3i}) em β_3

Modelo	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	845,00	0,9361	1469,62		480,55
Gompertz	531,43	0,6884	432,86		552,23
Logístico	471,55	4,6649	255,27		622,87
MMM	599,01	61,6759	627,81	1,3838	587,20
Richards	525,34	-2,0362	414,74	0,0623	555,62
von Bertalanffy	574,79	0,5100	563,34		527,61

MMM: Michaelis-Menten Modificado; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual estimada; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Foram realizadas análises com a incorporação de dois efeitos aleatórios (b_{1i} e b_{3i}), sendo os parâmetros estimados e a variância residual apresentados na Tabela 10. O modelo MMM apresentou grandes dificuldades de convergência, por isso foram mantidos constantes os valores de β_2 e β_4. Para os demais modelos a convergência foi alcançada sem grandes dificuldades.

Ao compararmos os resultados obtidos pelo ajuste realizado com modelo fixo (Tabela 7) ao realizado com modelo de efeito aleatório em β_1 e β_3, percebe-se que o modelo Brody subestimou os parâmetros β_1 e β_3 em aproximadamente 51 e 112, respectivamente. Para o modelo Richards essa diferença foi ainda maior, os parâmetros β_1 e β_3 foram subestimados em aproximadamente 136 e 435, respectivamente.

Tabela 10- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com incorporação de efeito aleatório (b_{1i} e b_{3i}) em β_1 e β_3, respectivamente

Modelo	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	610,84	0,9266	877,08		484,56
Gompertz	455,18	0,6545	344,02		537,60
Logístico	415,69	4,3458	216,43		584,15
MMM	543,71	30**	468,56	1,22**	413,13
Richards	549,17	0,9161	728,31	1,0328	492,31
von Bertalanffy	483,98	0,4981	432,54		519,36

MMM: Michaelis-Menten Modificado; **mantidos constantes: β_2=30 e β_4=1,22; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual estimada; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Em todos os resultados obtidos pode-se perceber que a incorporação de efeitos aleatórios aos modelos Brody, Gompertz, Logístico, von Bertalanffy, MMM e Richards, contribuíram para a melhora na qualidade de ajuste.

Milani et al. (2013) avaliaram o crescimento diamétrico em função da idade de árvores de *Podocarpus lambertii* e concluíram que a inclusão do efeito aleatório foi decisiva para diminuir o erro associado às medições retrospectivas do crescimento em diâmetro, tendo aumentado a acurácia dos testes e estimações para os efeitos fixos.

Alguns trabalhos utilizaram modelos não lineares mistos para descrever curvas de crescimento de animais, como por exemplo, Gómez et al. (2008) que ajustaram curvas de crescimento aplicadas a produção animal, com dados simulados, utilizando modelos não lineares mistos, Strathe et al. (2010) ajustaram curvas de crescimento para suínos. Embora nenhum dos trabalhos apresentados sejam para curvas de crescimento de bovinos, os autores concluíram que a utilização de modelos não lineares mistos foi uma alternativa eficiente para a descrição de curvas de crescimento.

4.2 Curva de crescimento com separação por sexo

Na verificação dos avaliadores de qualidade de ajuste para os modelos de curvas de crescimento (Tabela 11), pode-se verificar que o modelo Brody ajustado para machos, obteve o menor valor de AIC (243.002), BIC (243.035), DMA (32,29), EQM (1877) e maior coeficiente de determinação R^2 (89,92). E para fêmea o modelo Michaelis-Menten Modificado (MMM) foi o que apresentou menores valores de avaliadores de qualidade de ajuste AIC (300.089), BIC (300.131), DMA (29,09), EQM (1622) e maior coeficiente de determinação (R^2= 88,06).

Ao verificarmos os valores apresentados na tabela 3 referentes aos avaliadores de qualidade de ajuste para curva única, nota-se que o ajuste com a separação por sexo (Tabela 11) apresentou menores valores de erro quadrático médio (EQM), para machos e fêmeas e um aumento no valor do coeficiente de determinação (R^2) para todos os modelos fixos, indicando que o ajuste com a separação por sexo, foi o mais apropriado para descrever curva de crescimento de bovinos.

Tabela 11- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo fixo

Modelo		AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	Macho	243.002	243.035	32,29	1877	89,92
	Fêmea	300.198	300.231	29,32	1628	88,01
Gompertz	Macho	243.569	243.601	33,15	1922	89,66
	Fêmea	300.933	300.966	30,12	1669	87,69
Logístico	Macho	244.111	244.143	33,93	1968	89,41
	Fêmea	301.670	301.703	30,85	1711	87,36
MMM	Macho	243.103	243.143	32,28	1885	89,87
	Fêmea	300.089	300.131	29,09	1622	88,06
Richards	Macho	243.544	243.585	33,13	1921	89,67
	Fêmea	300.920	300.961	30,09	1668	87,70
von Bertalanffy	Macho	243.361	243.393	32,86	1906	89,75
	Fêmea	300.678	300.711	29,85	1655	87,80

MMM: Michaelis-Menten Modificado; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

Na tabela 12 são apresentados os avaliadores de qualidade de ajuste, considerando o modelo misto com coeficiente aleatório no parâmetro peso à maturidade β_1. Nota-se que o coeficiente de determinação R^2 foi maior para todos os modelos, quando comparado aos resultados mostrados na Tabela 11, em que se considerou o modelo sem a incorporação de efeitos aleatórios. De modo geral, valores maiores de R^2 indicam que os modelos estudados se ajustaram bem aos dados.

Com a incorporação de efeito aleatório em β_1 houve redução nos avaliadores de qualidade de ajuste para machos e fêmeas de aproximadamente 8% nos valores de AIC e BIC, 48% nos valores de DMA e 75% nos valores de EQM, quando comparados aos resultados obtidos pelo modelo fixo, indicando melhor qualidade de ajuste.

Comparando os valores de erro quadrático médio (EQM), desvio médio absoluto (DMA), critério de informação de Akaike (AIC) e critério de informação bayesiano (BIC), com os avaliadores de qualidade de ajuste apresentados na Tabela 11, em que são considerados modelos sem a incorporação de efeito aleatório, nota-se que com a incorporação do efeito aleatório b_{1i}, os modelos de efeito misto se ajustaram melhor do que os modelos de efeito fixo para análise de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã.

Tabela 12- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de machos e fêmeas, de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com coeficiente aleatório (b_{1i}) em β_1

Modelo		AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	Macho	223.116	223.147	16,30	443,00	95,48
	Fêmea	274.303	274.335	14,76	370,55	94,87
Gompertz	Macho	225.058	225.089	17,34	489,10	95,02
	Fêmea	276.803	276.835	15,74	409,85	94,33
Logístico	Macho	226.906	226.937	18,29	537,47	94,54
	Fêmea	279.205	279.237	16,62	451,64	93,77
MMM	Macho	223.661	223.698	16,43	450,06	95,42
	Fêmea	273.486	273.524	14,47	357,13	95,07
Richards	Macho	225.065	225.108	17,34	489,15	95,02
	Fêmea	276.806	276.844	15,74	409,85	94,33
von Bertalanffy	Macho	224.392	224.423	16,99	472,77	95,18
	Fêmea	275.944	275.976	15,42	395,89	94,52

MMM: Michaelis-Menten Modificado; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

Os resultados apresentados na Tabela 13 mostram os avaliadores de qualidade de ajuste, quando incorporado efeito aleatório em β_3. Com a incorporação de efeito aleatório em β_3 houve redução nos avaliadores de qualidade de ajuste para machos e fêmeas de aproximadamente 8% nos valores de AIC e BIC, 45% nos valores de DMA e 75% nos valores de EQM, quando comparados aos resultados obtidos pelo modelo fixo (Tabela 11), indicando melhor qualidade de ajuste.

Dos modelos mistos apresentados na Tabela (13), com coeficiente aleatório no parâmetro taxa de maturidade (β_3), o modelo Brody, ajustado para machos, apresentou o menor valor de AIC (222.832), BIC (222.863), DMA (16,28) e EQM (435,83) e maior coeficiente de determinação R^2 (95,56). Para fêmea o modelo Brody também apresentou os melhores resultados de avaliadores de qualidade de ajuste, com menores valores de AIC

(274.500), BIC (274.531), DMA (15,17) e EQM (383,08) e maior coeficiente de determinação R^2 (94,70).

Considerando apenas modelos de efeito fixo, o modelo Brody foi o que apresentou melhor qualidade de ajuste para bovinos machos e o Michaelis-Menten Modificado para fêmea (Tabela 11). Com a incorporação de efeito aleatório em β_3 o modelo Brody foi o que apresentou melhor qualidade de ajuste tanto para machos como para fêmeas, vale ressaltar que, com a incorporação do efeito aleatório os resultados dos avaliadores do modelo Brody diminuíram significativamente, mostrando que quando se incorporou efeitos aleatórios ao modelo, obteve-se melhor ajuste.

Karaman et al. (2013) utilizaram uma abordagem de modelagem mista para estudos de crescimento de codornas japonesas. Houve uma redução da variância residual de 60% e 65%, com a utilização de modelos não lineares mistos, com a incorporação de um e dois efeitos aleatórios, respectivamente, indicando uma melhor qualidade de ajuste quando se utiliza modelos não lineares mistos.

Percebe-se que, em geral, a incorporação de efeitos aleatórios aos modelos melhora a qualidade do ajuste, ao observarmos o coeficiente de determinação R^2 para cada modelo, exposto na Tabela 13, os valores foram bem próximos de um, indicando que, de um modo geral, os modelos propostos se ajustaram bem aos dados.

Tabela 13- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de machos e fêmeas, de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelos mistos com efeito aleatório (b_{3i}) em β_3

Modelo		AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	Macho	222.832	222.863	16,28	435,83	95,56
	Fêmea	274.500	274.531	15,17	383,08	94,70
Gompertz	Macho	225.194	225.225	17,52	493,28	94,99
	Fêmea	278.434	278.466	16,53	449,89	93,81
Logístico	Macho	227.377	227.408	18,55	552,63	94,41
	Fêmea	281.742	281.774	17,62	515,08	92,95
MMM	Macho	226.471	226.508	17,89	524,14	94,66
	Fêmea	279.003	279.041	16,39	455,47	93,70
Richards	Macho Fêmea	NC	NC	NC	NC	NC
von Bertalanffy	Macho	224.396	224.427	17,12	473,13	95,19
	Fêmea	277.155	277.187	16,11	426,98	94,11

MMM: Michaelis-Menten Modificado; NC: não convergiu; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

A incorporação de dois coeficientes aleatórios aos modelos (Tabela 14) melhorou a qualidade de ajuste em relação aos modelos fixos (Tabela 11), com menores valores de AIC, BIC, DMA, EQM e maiores de R^2. Entretanto, quando comparados aos resultados apresentados nas Tabelas 12 e 13, com apenas um coeficiente aleatório em β_1 e β_3, respectivamente, apenas alguns modelos apresentaram melhora na qualidade de ajuste.

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 14, para modelos com efeitos aleatórios em β_1 e β_3, a incorporação de dois coeficientes aleatórios melhora a qualidade de ajuste em relação ao modelo fixo (Tabela 11). Porém, não houve melhora de qualidade de ajuste em relação aos modelos com apenas um coeficiente aleatório.

Os modelos MMM para fêmeas (Tabela 12) e o modelo Brody para machos (Tabela 13) ambos com apenas um coeficiente aleatório apresentaram melhor ajuste em relação a estes mesmos modelos com dois coeficientes aleatórios (Tabela 14). Além disso, o ajuste de modelos mistos com dois coeficientes aleatórios levou a maiores problemas de convergência.

Tabela 14- Avaliadores de qualidade de ajuste para modelos de curva de crescimento de machos e fêmeas, de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeitos aleatórios (b_{1i} e b_{3i}) em β_1 e β_3, respectivamente

Modelo		AIC	BIC	DMA	EQM	R^2
Brody	Macho	223.200	223.243	16,33	446,24	95,45
	Fêmea	274.267	274.311	14,83	372,77	94,84
Gompertz	Macho	224.909	224.952	17,34	485,59	95,06
	Fêmea	276.996	277.040	15,84	412,66	94,30
Logístico	Macho	226.816	226.859	18,11	523,76	94,68
	Fêmea	278.421	278.466	15,52	388,85	94,63
MMM	Macho	NC	NC	NC	NC	NC
	Fêmea	275.008	275.046	14,76	366,71	94,97
Richards	Macho Fêmea	NC	NC	NC	NC	NC
von Bertalanffy	Macho	224.223	224.266	17,00	470,10	95,21
	Fêmea	276.081	276.125	15,54	400,37	94,46

MMM: Michaelis-Menten Modificado; NC: não convergiu; AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação bayesiano; DMA: desvio médio absoluto; EQM: erro quadrático médio; R^2: coeficiente de determinação.

De acordo com os resultados apresentados nas tabelas 11, 12, 13 e 14, para machos o modelo com melhor qualidade de ajuste foi o Brody com coeficiente aleatório no parâmetro taxa de maturidade (β_3). Enquanto para fêmeas a melhor qualidade de ajuste foi obtida com o modelo MMM com coeficiente aleatório no parâmetro peso à maturidade (β_1).

Na Tabela 15 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e a variância residual para os modelos de crescimento Brody, Gompertz, Logístico, MMM, Richards, von Bertalanffy, considerando apenas efeito fixo.

Dentre os modelos de efeito fixo apresentados na Tabela 15, o modelo MMM ajustado para fêmea foi o que apresentou menor valor de variância residual $\hat{\sigma}_e^2$ (1621,54) e maior valor de peso assintótico. E o modelo fixo Brody ajustado para machos foi o que apresentou menor valor de variância residual $\hat{\sigma}_e^2$ (1877,38).

Tabela 15- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de machos e fêmeas, de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo fixo

Modelo		$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	Macho	741,55	0,9372	1033,64		1877,38
	Fêmea	477,68	0,9105	656,81		1627,74
Gompertz	Macho	474,91	0,6844	317,32		1994,41
	Fêmea	374,27	0,5987	279,39		1669,01
Logístico	Macho	420,08	4,5168	190,21		1968,35
	Fêmea	345,41	3,8542	181,39		1711,41
MMM	Macho	833,56	46,4825	913,58	1,11	1884,39
	Fêmea	714,62	32,4345	936,71	0,96	1621,54
Richards	Macho	475,28	0,0367	319,94	53,29	1920,98
	Fêmea	373,43	0,0377	279,90	47,60	1665,90
von Bertalanffy	Macho	512,96	0,5100	409,50		1894,83
	Fêmea	392,94	0,4781	343,29		1654,59

MMM: Michaelis-Menten Modificado; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Os resultados apresentados na Tabela 16 são referentes aos parâmetros estimados para modelos não lineares mistos com a incorporação de efeito aleatório em β_1 e valores de variância residual. Com a incorporação de efeito aleatório (b_{1i}) em β_1, aos modelos ajustados, houve grande redução de aproximadamente 70% no valor da variância residual para todos os modelos apresentados. Também houve redução de mesma magnitude na estimativa da variância residual para os modelos mistos com efeito aleatório no parâmetro taxa de maturidade (Tabela 17) e com efeito aleatório em dois parâmetros (Tabela 18).

Aggrey (2009) realizou estudo utilizando o modelo logístico fixo e misto para avaliar o crescimento de codornas japonesas. No estudo foram considerados modelos não lineares mistos com um efeito aleatório. A variância residual estimada com a incorporação de efeito aleatório foi reduzida em cerca de 38%, em comparação com o modelo fixo para machos. Resultados semelhantes foram encontrados para curva de crescimento de fêmeas, atestando que, quando se utiliza modelos mistos para análise de curva de crescimento, se obtém melhores resultados, quando comparado aos modelos de efeito fixo.

Para fêmeas, considerando o modelo com melhor ajuste, modelo MMM com efeito aleatório no parâmetro peso à maturidade (Tabela 16), as estimativas para peso adulto (584,46 kg) e para taxa de maturidade (651,33 dias) estão adequadas para fêmeas da raça Tabapuã. Salienta-se que no modelo MMM, a taxa de maturidade é interpretada como tempo para o animal atingir 50% do peso adulto. Utilizando o modelo MMM fixo (Tabela 15), o peso adulto e a taxa de maturidade foram superestimadas, respectivamente, 714,62 kg e 936,71 dias. Assim, o modelo MMM misto com efeito aleatório no parâmetro peso assintótico é o mais adequado para descrição do crescimento de fêmeas da raça Tabapuã.

Tabela 16- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de machos e fêmeas, de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelos mistos com efeito aleatório (b_{1i}) em β_1

Modelo		$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	Macho	756,00	0,9411	1050,01		516,76
	Fêmea	474,12	0,9138	645,06		431,95
Gompertz	Macho	473,32	0,6988	311,31		569,97
	Fêmea	370,48	0,6097	272,45		477,33
Logístico	Macho	418,60	4,6382	186,38		625,68
	Fêmea	341,82	3,9291	176,57		525,47
MMM	Macho	666,05	53,1876	633,39	1,2637	522,26
	Fêmea	584,46	41,6915	651,31		415,30
Richards	Macho	473,27	-5,7677	337,04	0,0016	570,03
	Fêmea	370,48	-9,7604	272,45	0,00003	477,33
von Bertalanffy	Macho	512,78	0,5156	403,84		551,16
	Fêmea	389,09	0,4821	335,19		461,22

MMM: Michaelis-Menten Modificado; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Considerando o modelo de melhor ajuste para machos, modelo Brody com efeito aleatório no parâmetro taxa de maturidade (Tabela 17), a estimativa para peso adulto foi muito alta (1.028,84 kg), assim como a taxa de maturidade (1.669,53 dias), não sendo coerente com resultados apresentados por outros autores. Estimativas mais adequadas de 756,00 kg para peso adulto e de 1.050,01 dias para taxa de maturidade de machos da raça Tabapuã foi obtida pelo modelo Brody com efeito aleatório no parâmetro peso à maturidade (Tabela 16). Sendo este modelo o mais adequado para descrição do crescimento de machos em função da coerência das estimativas e por ser o melhor modelo considerando os avaliadores de qualidade de ajuste (Tabela 12).

Tabela 17- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de machos e fêmeas, de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeito aleatório (b_{3i}) em β_3

Modelo		$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	Macho	1028,84	0,949	1669,53		505,98
	Fêmea	662,58	0,9196	1160,10		443,41
Gompertz	Macho	564,93	0,7255	408,79		571,86
	Fêmea	481,54	0,6422	424,96		519,61
Logístico	Macho	492,20	4,9574	235,56		639,59
	Fêmea	436,79	4,2991	259,94		593,61
MMM	Macho	671,33	64,2632	655,91	1,4048	609,23
	Fêmea	559,88	54,2885	625,30	1,2769	520,07
Richards	Macho Fêmea	NC	NC	NC	NC	NC
von Bertalanffy	Macho	620,30	0,5251	542,98		548,80
	Fêmea	511,24	0,4920	537,24		493,55

MMM: Michaelis-Menten Modificado; NC: não convergiu; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Os valores contidos na Tabela 18 são referentes aos parâmetros estimados e variância residual para cada modelo, com a incorporação de dois efeitos aleatórios b_{1i} e b_{3i}. Quando se incorpora mais efeitos aleatórios aos modelos, a convergência para os modelos que apresentam mais parâmetros se torna mais difícil, evidenciando a dificuldade em se trabalhar com modelos que possuem mais parâmetros.

O modelo Michaelis-Menten Modificado (MMM) e o Richards possuem quatro parâmetros a serem estimados e a predição dos dois efeitos aleatórios incorporados aos modelos em questão. Ambos apresentaram dificuldade de convergência na estimação dos parâmetros, o modelo Richards não atingiu a convergência para a estimação dos parâmetros de curva de crescimento para machos e nem para fêmeas.

Para o ajuste do modelo MMM foram mantidos constantes os valores de β_2 (30) e β_4 (1,22), em que β_4 é o parâmetro que representa o ponto de inflexão variável do modelo, dessa forma não alcançada a convergência para a estimação dos parâmetros de curva de crescimento para bovinos machos, apenas para fêmeas, enquanto que para os demais modelos a convergência foi alcançada.

Com a incorporação de dois efeitos aleatórios aos modelos ajustados, houve uma diminuição significativa no valor da variância residual, para todos os modelos apresentados, resultado similar foi apresentado por Vitezica et al. (2010), que realizaram a comparação de modelos não lineares mistos com o modelo de regressão linear *spline*, em que a variância residual foi reduzida em cerca de 55%.

Aggrey (2009) comparou modelos fixos com modelos de efeito aleatório para avaliar o crescimento de codornas japonesas. Com a incorporação de dois efeitos aleatórios, houve uma redução de aproximadamente 72% no valor da variância residual, em comparação ao modelo fixo, para machos e resultados semelhantes também foram encontrados para fêmea. Wang e Zuidhof (2004) ajustaram curvas de crescimento para aves e recomendaram a utilização de modelos não lineares mistos para a análise de dados de crescimento, pois além de diminuir o valor da variância residual, diminui o viés de estimação.

Tabela 18- Estimativas para parâmetros dos modelos de curva de crescimento de machos e fêmeas, de bovinos da raça Tabapuã, considerando modelo misto com efeitos aleatórios (b_{1i} e b_{3i}) em β_1 e β_3, respectivamente

Modelo		$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_e^2$
Brody	Macho	695,99	0,9391	938,34		518,26
	Fêmea	501,47	0,9125	718,77		434,32
Gompertz	Macho	513,64	0,7046	356,54		565,98
	Fêmea	394,19	0,6070	308,90		481,67
Logístico	Macho	457,70	4,7643	214,59		614,21
	Fêmea	339,56	4,1043	169,88		477,89
MMM	Macho	NC	NC	NC	NC	NC
	Fêmea	467,24	30**	408,10	1,22**	431,87
Richards	Macho Fêmea	NC	NC	NC	NC	NC
von Bertalanffy	Macho	555,62	0,5172	461,10		547,61
	Fêmea	415,12	0,4805	381,80		466,76

MMM: Michaelis-Menten Modificado; NC: não convergiu; **mantidos constantes: β_2=30 e β_4=1,22; $\hat{\sigma}_e^2$: variância residual; $\hat{\beta}_1$: peso adulto estimado; $\hat{\beta}_2$: constante de integração estimada; $\hat{\beta}_3$: taxa de maturidade estimada; $\hat{\beta}_4$: ponto de inflexão estimado.

Craig e Schinckel (2001) ajustaram modelos não lineares mistos para crescimento de suínos e mostraram que a utilização de modelos não lineares mistos permite uma avaliação mais precisa e estimativas mais precisas das funções de crescimento animal, do que os tradicionais modelos de efeitos fixos. Os modelos mistos de efeitos aleatórios também podem reduzir o impacto de potenciais vieses de amostragem seletiva e podem proporcionar um parâmetro adicional que descreve variação de cada animal.

5 CONCLUSÕES

A utilização de modelos não lineares mistos foi eficiente para descrever curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã.

A incorporação de efeitos aleatórios nos parâmetros peso assintótico, taxa de maturidade ou em ambos, melhorou a qualidade de ajuste em relação a modelos fixos.

Os modelos recomendados para análise de curva de crescimento de machos e fêmeas foram Brody e Michaelis-Menten Modificado, respectivamente, sendo ambos com efeito aleatório no parâmetro peso assintótico.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGGREY, S. E. Logistic nonlinear mixed effects model for estimating growth parameters. **Poultry science**, v. 88, n. 2, p. 276-280, 2009.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. ***IEEE Transactions on Automatic Control***, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.

ALCARDE, R. et al. Comparação de duas abordagens utilizando modelos mistos para um experimento de cana-de-açúcar. 19º Sinape. Anais, São Pedro-SP, 2010.

AMARAL, M. T. R. Abordagem bayesiana para curva de crescimento com restrições nos parâmetros. 2008. 109 f. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada). Universidade Federal de Pernambuco. Recife-PE, 2008.

ARRUDA, Z. J.; SUGAI, Y. **Regionalização da pecuária bovina no Brasil. Campo Grande: Embrapa-CNPGC**; Brasília: Embrapa-SPI. 144 p. (Embrapa-CNPGC. Documentos, 58), 1994.

BRODY, S. Bioenergetics and Growth. **Rheinhold Publishing**, New York. 1945.

CARDOSO, A. S. C. Modelos não lineares de efeitos mistos na farmacocinética da ciclosporina em doentes transplantados renais. Dissertação (Mestrado em Bioestatística), Universidade de Lisboa, Departamento de Estatística e Investigação Operacional, 2012.

CARVALHO, S. P. C. Uma nova metodologia de avaliação do crescimento e da produção de Eucalyptus sp clonal para fins energéticos. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal), Universidade Federal de Lavras, 2010.

CRAIG, B. A.; SCHINCKEL, A. P. Nonlinear mixed effects model for swine growth. **The Professional Animal Scientist**, v. 17, n. 4, p. 256-260, 2001.

DIAS, L.T.; ALBUQUERQUE, L.G.; TONHATI, H.; TEIXEIRA, R.A. Estimação de parâmetros genéticos para peso do nascimento aos 550 dias de idade para animais da raça

Tabapuã utilizando-se modelos de regressão aleatória. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 35, n. 5, p. 1915-1925, 2006.

EMILIANO, P. C.; VEIGA, E. P.; VIVANCO, M. J.; MENEZES, F. S. Critérios de Informação de Akaike Versus Bayesiano: Análise Comparativa. 19º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 2010.

EMILIANO, P. C.; VIVANCO, M. J. F.; MENEZES, F. S. Information criteria: How do they behave in different models?. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 69, p. 141-153, 2014.

ESQUIVEL R. M.; AMORIM L. D. A. F.; FIACCONE R. L. Comparação de métodos de estimação em modelos logísticos multiníveis para dados longitudinais: Um estudo de simulação. In: 19º Sinape. São Pedro-SP.Anais, São Paulo, 2010.

FORNI, S. Análise da curva de crescimento de bovinos da raça nelore utilizando funções não lineares em análises bayesianas. 75f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal, 2007.

GÓMEZ, D. A. A.; MUÑOZ, M. F. C.; BETANCUR, L. F. R. Modelación de las funciones de crecimiento aplicadas a la producción animal. **Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias**, v. 21, n. 1, enero-marzo, p. 39-58, Universidad de Antioquia Colombia, 2008.

GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new method of determining the value of life contingencies. ***Philos. Trans. R. Soc. London*****,** London, v. 115, n. 1825, p. 513-585, 1825.

GUJARATI, D. N. **Econometria básica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

HAUSER, et al. Curva de crescimento usando modelo misto: Uma aplicação na progressão da doença de Machado-Joseph. **Revista do Hospital de Clínicas de Porto Alegre**, v. 29, n. 1, p 5-17, 2009.

KARAMAN, E.; NARINC, D.; FIRAT, M. Z.; AKSOY, T. Nonlinear mixed effects modeling of growth in Japanese quail. **Poultry science**, v. 92, n. 7, p. 1942-1948, 2013.

LINDSTROM, M. J.; BATES, D. M. Nonlinear mixed effects models for repeated measures data, **Biometrics**, v. 46, p. 673–687. 1990.

LITTELL, R. C; MILLIKEN, G. A.; STROUP, W. W.; and WOLFINGER, R. D. **SAS System for Mixed Models (second edition)**, Cary, NC: SAS Institute Inc., 2006.

LÔBO, R. N. B.; MARTINS FILHO, R. Avaliação de curvas de crescimento de bovinos da raça Nelore. In: REUNIÃO ANUAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ZOOTECNIA, 2002, Recife. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Zootecnia, 2002.

LOBOS, C. V. Modelos log-Birnbaum-Saunders mistos. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2010.

LOPES, F. B.; SILVA, M. C.; MARQUES, E. G.; FERREIRA J. L. Ajustes de curvas de crescimento em bovinos Nelore da região Norte do Brasil. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 12, p. 607-617, 2011.

LOPEZ, S.; FRANCE, J.; GERRITS, W. J.; DHANOA, M. S.; HUMPHRIES, D. J.; DIJKSTRA, J. A generalized Michaelis-Menten equation for the analysis of growth. **Journal of Animal Science**, v. 78, p. 1816-1828, 2000.

MAIA, E.; SIQUEIRA, D. L.; SILVA, F. F.; PETERNELLI, L. A.; SALOMÃO, L. C. C. Método de comparação de modelos de regressão não-lineares em bananeiras. **Ciência Rural**, v. 39, n. 5, p. 1380-1386, 2009.

MILANI, E. J.; SCHNEIDER, P. R.; CUNHA T. A. Crescimento em diâmetro de árvores de Podocarpus lambertii em duas regiões fitogeográficas no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. **Revista Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 23, n. 2, p. 443-448, abr.-jun., 2013.

NASCIMENTO, M. S.; MUNIZ, J. A.; PAMPLONA, A. K. A. Comparação entre os modelos Logístico e Gompertz no crescimento de frangos de corte. **Matemática e Estatística em Foco**, v. 1, n. 2, 2013.

PEREIRA, L.; FERREIRA L. Estimação de modelos lineares gerais mistos utilizando o SAS®. **Revista dos Algarves**. v. 17. p. 44-51, 2008.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. Approximations to the Log-likelihood function in Nonlinear Mixed-Effects Models, **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v 4, n. 1, p. 12-35, 1995.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-Plus**. New York: Springer-Verlag. 2000. 528 p.

PRUDENTE, A. A. Modelos não lineares de regressão: alguns aspectos da teoria assintótica. 108p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada), Universidade Federal Rural de Pernambuco - Departamento de Estatística e Informática, Recife, 2009.

PUIATTI, G. A.; CECON, P. R.; NASCIMENTO, M.; PUIATTI, M.; FINGER, F. L.; SILVA, A. R.; NASCIMENTO, A. C. C. Análise de agrupamento em seleção de modelos de regressão não lineares para descrever o acúmulo de matéria seca em plantas de alho. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 337-351, jul.-set., 2013.

RATKOWSKI, D. A. **Nonlinear regression modeling: a unified practical approach**. Marcel Dekker, New York, 1983.

RESENDE, M. D. V.; PRATES, D. F.; YAMADA, C. K.; JESUS, A. Estimação de componentes de variância e predição de valores genéticos pelo método da máxima verossimilhança restrita (REML) e melhor predição linear não-viciada (BLUP) em *Pinus*. Boletim de Pesquisas Florestais, Colombo, n. 32/33, p. 23-42, jan./dez. 1996.

RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v. 10, p. 290-300, 1959.

RIZZATO, F. B. Modelos para análise de dados discretos longitudinais com superdispersão. 2011. 143 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2011.

SAKAGUTI, E. S.; SILVA, M. A.; QUAAS, R. L. et al. Avaliação do crescimento de bovinos jovens da raça Tabapuã, por meio de análises de funções de covariâncias. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 32, n. 4, p. 864-874, 2003.

SANTORO, K. R. et al. Estimativas de parâmetros de curvas de crescimento de bovinos zebu, criados no estado de Pernambuco. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 34, n. 06, p. 2262-2279, 2005.

SAS Institute Inc. Statistical Analysis System user’s guide. Version 9.3 ed. Cary: SAS Institute USA, 2008. Licenciado pela Universidade Federal de Viçosa, 2013.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, v. 6, n. 2, p. 461-464, 1978.

SILVA, N. A.; LANA, A. M.; SILVA, F. F.; SILVEIRA, F. G.; BERGMANN, J. A., SILVA, M. A.; TORAL, F. L. Seleção e classificação multivariada de modelos de crescimento não lineares para bovinos Nelore; Selection and multivariate classification of nonlinear growth model for Nelore cattle. Arq. bras. med. vet. zootec, v. 63, n. 2, p. 364-371, 2011.

SILVA, F. L. ; HOUNGYU, K. ; ALENCAR, M. M. ; FREITAS, A. R. ; MOURAO, G. B. Curva de crescimento em vacas da raça Nelore utilizando modelos não-lineares mistos. In: 56ª RBRAS, juntamente com o 14º SEAGRO, Maringá. Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica, 2011.

SILVEIRA, F. G. Classificação multivariada de modelos de crescimento para grupos genéticos de ovinos de corte. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Viçosa, 2010.

SILVEIRA, F. G.; FONSECA, F.; CARNEIRO, P. L. S.; MALHADO, C. H. M.; MUNIZ, J. A. Análise de agrupamento na seleção de modelos de regressão não-lineares para curvas de crescimento de ovinos cruzados. **Revista Ciência Rural**, v. 41, n. 4, 692-698, 2011.

SOBRAL, T. E. L.; BARRETO, G. Análise dos critérios de informação para a seleção de ordem em modelos auto-regressivos. 10ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2011.

SOUSA JÚNIOR, S. C. S.; OLIVEIRA S. M. P.; ALBUQUERQUE, L. G.; BOLIGON A. A.; MARTINS FILHO, R. Estimação de funções de covariância para características de crescimento da raça Tabapuã utilizando modelos de regressão aleatória. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 39, n. 5, p. 1037-1045, 2010.

SOUSA, I. F. Ajuste de modelos não lineares na descrição de germinação de sementes de café (coffea arábica L.) cv. Catuaí. 72p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária), Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2012.

STRATHE, A. B.; DANFAER, A.; SORENSEN, H.; KEBREAB, E. A multilevel nonlinear mixed-effects approach to model growth in pigs. **Journal of animal science**, v. 88, n. 2, p. 638-649, 2010.

VITEZICA, Z. G.; MARIE-ETANCELIN, C.; BERNADET, M. D.; FERNANDEZ, X.; ROBERT-GRANIE, C. Comparison of nonlinear and spline regression models for describing mule duck growth curves. **Poultry science**, v. 89, n. 8, p. 1778-1784, 2010.

VON BERTALANFFY, L. Quantitative laws for metabolism and growth. **Q. Rev. Biol.** p. 217−231, 1957.

VONESH, E. F.; CHINCHILLI, V. M. **Linear and nonlinear models for the analysis of repeated measurements**. New York: Marcel Dekker, 412 p., 1996.

WANG, Z.; ZUIDHOF, M. J. Estimation of growth parameters using a nonlinear mixed Gompertz model. **Poultry science**, v. 83, n. 6, p. 847-852, 2004.