

EDSON DANILO DA PAIXÃO TEIXEIRA

SOLUÇÃO E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA UMA EQUAÇÃO
DO TIPO ALLEN-CAHN COM COEFICIENTE SINGULAR

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Anderson Luis Albuquerque
de Araujo

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

T266s
2022
Teixeira, Edson Danilo da Paixão, 1995-
Solução e estabilização exponencial para uma equação do
tipo Allen-Cahn com coeficiente singular / Edson Danilo da
Paixão Teixeira. – Viçosa, MG, 2022.
1 dissertação eletrônica (63 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Anderson Luís Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2022.

Referências bibliográficas: f. 62-63.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.106>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Allen-Cahn, Equação
de. 3. Galerkin, Método de. I. Araujo, Anderson Luís
Albuquerque de, 1981-. II. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 515.353

EDSON DANILO DA PAIXÃO TEIXEIRA

SOLUÇÃO E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA UMA EQUAÇÃO
DO TIPO ALLEN-CAHN COM COEFICIENTE SINGULAR

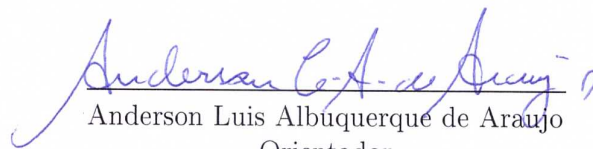
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 20 de dezembro de 2022.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente
gov.br EDSON DANILO DA PAIXÃO TEIXEIRA
Data: 13/03/2023 08:32:22-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Edson Danilo da Paixão Teixeira
Autor


Anderson Luis Albuquerque de Araujo
Orientador

Dedico este trabalho a Deus e a minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre ao meu lado principalmente nos momentos mais difíceis, por sempre me dar forças e jamais permitir que eu desistisse de concluir este trabalho.

A minha família, em especial aos meus pais que sempre me incentivaram a nunca desistir do curso devidos as dificuldades.

Ao professor Dr. Anderson L. A. de Araújo por ter orientado este trabalho, pela sua dedicação e profissionalismo durante toda a realização deste trabalho, sempre disposto a esclarecer as duvidas que surgiram.

A minha amada, amiga e futura esposa Dielle Costa que sempre esteve ao meu lado me ajudando, apoiando e me cobrando quando foi preciso.

A todos os professores da UFV/DMA pelos ensinamentos e incentivos.

A todos os colegas de mestrado.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Se você não puder se destacar pelo
talento, vença pelo esforço.

Dave Weinbaum

Resumo

TEIXEIRA, Edson Danilo da Paixão, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Dezembro de 2022. **Solução e Estabilização Exponencial Para Uma Equação do Tipo Allen-Cahn Com Coeficiente Singular.** Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

Neste trabalho fizemos um estudo analítico sobre a existência de solução para a equação de Allen Cahn com coeficiente singular.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \xi^2 \Delta u = u - \frac{u^3}{k(x)} + y & em \quad Q = \Omega \times (0, T). \\ u(x, 0) = u_0 & em \quad \Omega \\ u(x, t) = 0 & S = \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

em que $\Omega \subset R^n$ $n = (1, 2$ e $3)$ é um domínio de classe C^2 , onde $k(x) > 0$ é o coeficiente de reação. A equação de Allen-Cahn tem sido amplamente estudada em diversas áreas da ciência e principalmente na evolução de microestruturas durante o processo de solidificação de um metal puro ou liga metálica. Para o desenvolvimento deste trabalho usamos como ferramenta o método de Galerkin.

Também realizamos o estudo do decaimento exponencial da energia total associado a equação (2). Sobre o coeficiente $k(x) > 0$, encontramos condições e hipóteses abstratas de forma a garantir a existência de solução, além de fornecer exemplos, de funções que satisfazem tais hipóteses, nos casos em que $n = 1, 2$ ou 3 .

Palavras-chave: EDP. Equação de Allen-Cahn. Método de Galerkin.

Abstract

TEIXEIRA, Edson Danilo da Paixão, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2022. **Solution and Exponential Stabilization for an Allen-Cahn-Type Equation With Singular Coefficient.** Adviser: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

In this work we made an analytical study on the existence of a solution to the Allen Cahn equation with singular coefficient.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \xi^2 \Delta u = u - \frac{u^3}{K(x)} + y & \text{in } Q = \Omega \times (0, T). \\ u(x, 0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{on } S = \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2)$$

in that $\Omega \subset R^n$ $n = (1, 2 \text{ and } 3)$ is a domain of class C^2 , where $k(x) > 0$ is the reaction coefficient. The Allen-Cahn equation has been widely studied in several areas of science and mainly in the evolution of microstructures during the solidification process of a pure metal or metallic alloy. For the development of this work, we used the Galerkin method as a tool.

We also carried out the study of the exponential decay of the total energy associated with the equation (2). On the coefficient $k(x) > 0$, we find conditions and abstract hypotheses in order to guarantee the existence of a solution, in addition to providing examples of functions that satisfy such hypotheses, in cases where $n = 1, 2$ or 3 .

Keywords: PDE. Allen-Cahn equation. Galerkin's method.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	13
1.1 Espaços de Sobolev	13
1.2 Espaços à valores vetoriais	16
1.3 Desigualdades notáveis e fórmulas de integração	18
1.4 Regularidade de Soluções Fracas	20
1.5 Resultados de Convergência e Imersões	20
1.6 Identidades Importantes	21
1.7 Teorema de Prolongamento de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias	22
1.8 Teorema Espectral para Operadores Compactos e Auto-Adjuntos	23
2 Equação de Allen-cahn Abstrata	25
2.1 Teorema de Existência	25
2.1.1 Demonstração da Existência:	26
2.2 Abordagem Energética	37
2.2.1 Energia Total do Sistema	37
2.2.2 Energia de Transição de fase	38
2.3 Estabilidade Exponencial	39
3 Solução Exata Para as Equações de Allen Cahn Bidimensional e Tridimensional	42
3.1 Equação de Allen-Cahn Bidimensional	42

3.1.1	Solução Exata do Problema	43
3.1.2	Problema de Valor de Contorno	44
3.1.3	Problema de Valor Inicial	47
3.2	Equação de Allen-Cahn Tridimensional	48
3.2.1	Solução Exata	49
3.2.2	Problema de valor de contorno	50
3.2.3	Problema de valor inicial	51
4	Simulação computacional	53
4.1	Solução exata - Caso: $n = 2$	53
4.2	Solução exata - Caso: $n = 4$	55
4.3	Solução exata e energia total - Caso abstrato	57
	Considerações Finais	61
	Referências Bibliográficas	62

Introdução

A evolução de microestruturas durante o processo de solidificação de um metal puro ou liga metálica, pode ser estudada com o auxílio de modelos matemáticos de campo de fase “*phase-field*”, que considera a transição entre uma fase e outra através de uma interface e ocorre de forma contínua e gradual em uma região reduzida chamada interface difusa ver [13]. Dentre os modelos que utilizam o método campo de fase, destacamos o modelo de Allen-Cahn ver [2]. A equação abaixo, postulada por Allen e Cahn

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -M \frac{\delta G}{\delta \phi}, \quad (3)$$

em que $\phi = \phi(x, t)$ é a variável de fase, $\delta G/\delta \phi$ é a derivada funcional da energia livre em relação à variável de fase e M denominada mobilidade da interface ou a facilidade com que ϕ varia com o tempo, garante a evolução do sistema [3]. Em certas ocasiões, a mobilidade é considerada anisotrópica, como adotado por [12], mas também pode ser considerada como uma constante (isotrópica), como adotado por [13].

Usando o modelo de Allen-Cahn, Xinfu Chen ver [7] considerou o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = \varepsilon^2 u_{xx}^\varepsilon - f(u^\varepsilon), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4)$$

relacionado com o estudo de movimentos no limite de fase de materiais cristalinos, genética de população e também com a propagação de pulsos nervosos, onde $\varepsilon > 0$ é um pequeno parâmetro e $f(\cdot)$ é uma função suave tendo exatamente três zeros em $\{-1, 0, 1\}$ e satisfazendo $f'(\pm 1) > 0$, $f'(0) < 0$ e $\int_{-1}^1 f(s) ds = 0$. Um exemplo típico de f é a função $f(s) = s^3 - s$. Na dinâmica do problema, existem quatro estágios observados. No primeiro temos, a *fase de separação* de $O(|\ln \varepsilon|)$, no segundo, a geração de padrões *metaestáveis* de $O(\varepsilon^{-1})$, no terceiro, a propagação em movimento *super-câmera lenta* de interfaces de $O(e^{1/\varepsilon})$ e por último, a fase de *aniquilação* de interfaces de $O(1)$. O autor faz um estudo analítico desses estágios com maior rigor para o segundo e o quarto estágio, fornecendo uma análise full-time para o comportamento da dinâmica.

Em [23], os autores consideraram a equação de Allen-Cahn dada por

$$u_t = \xi \Delta u - f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (5)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2$) é um domínio limitado. A norma em L^2 é induzida por

$$u_t = -\frac{\delta \mathcal{E}(u)}{\delta u}, \quad (6)$$

que é caracterizada pela minimização da energia funcional de Ginzburg-Landau

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\xi}{2} |\Delta u|^2 + F(u) \right) dx, \quad (7)$$

com potencial $F(u)$. Segundo os autores a principal característica da equação de Allen-Cahn (5) é a rápida formação das camadas transientes e a formação exponencialmente lenta das camadas terminais para valores muito pequenos de ξ . Isto é interessante porque nos faz pensar na possibilidade de existir um limite inferior para ξ .

Portanto, baseado nesta afirmação em [21] foi feita a seguinte pergunta “*Existe uma constante $c > 0$ tal que a taxa do decaimento exponencial da energia da equação de Allen-Cahn (5) enfraquece quando $\xi \rightarrow c$?*” Para entender o comportamento assintótico da equação foi feita uma análise baseada em argumentos de energia. Para isto foi considerado o domínio compacto $[0, 1]$, e a energia total é dada por:

$$E(t) = \int_0^L |u|^2 dx, \quad (8)$$

foi provado que a mesma satisfaz a taxa de variação

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\xi \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^L |u|^2 dx - \int_0^L \frac{u^3}{\cos x} dx. \quad (9)$$

Em [21], os autores tentaram responder a pergunta fazendo um estudo da solução exata da equação de Allen-Cahn unidimensional.

$$\begin{cases} u_t - \xi^2 u_{xx} - u \left(1 - \frac{1}{K(x)} u^2 \right) = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u_x(0, T) = 0, u_x(1, T) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Onde $K(x) > 0$ é o coeficiente de reação. Com o estudo de tal solução, outro fato abordado foi como o valor limite de ξ afeta o decaimento exponencial da energia total associada a equação de Allen-Cahn. Tal análise foi realizada através de simulações numéricas das soluções exatas, quando $K(x) = \cos(x)$.

Baseado nos trabalhos citados anteriormente, consideramos a equação do tipo

Allen-Cahn com coeficiente singular, dada por.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \xi^2 \Delta u = u - \frac{u^3}{K(x)} + y & \text{em } Q = \Omega \times (0, T). \\ u(x, 0) = u_0 & \text{em } \Omega \\ u(x, t) = 0 & S = \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (11)$$

em que $\Omega \subset R^N$ $N = (2, 3)$ é um domínio de classe C^2 onde $K(x) > 0$ é o coeficiente de reação. A equação introduzida por Allen e Cahn [2], descreve a fase de uma mistura binária. A variável de fase $u = u(x, t)$ denota a concentração da mistura e o parâmetro $\xi > 0$ está relacionado à largura da interface capturando o efeito dominante da cinética de reação.

Diferentemente do estudo realizado em [21], fizemos um estudo analítico sobre a existência de solução para a equação (11), usando como ferramenta o método de Galerkin. Também realizamos o estudo do decaimento exponencial da energia total associado a equação (11). Sobre o coeficiente $k(x) > 0$, encontramos condições e hipóteses abstratas de forma a garantir a existência de solução, além de fornecer exemplos, de funções que satisfazem tais hipóteses, nos casos em que $n = 1, 2$ ou 3 . Note que a presença do Termo singular $\frac{1}{K(x)}$ em (11), impôs uma dificuldade não trivial ao problema, e até o presente momento, não encontramos na literatura algum trabalho sobre o estudo analítico para tal modelo, e isto de certa forma demonstra originalidade aos resultados obtidos na presente dissertação.

Como em [21], apresentamos o estudo numérico, no caso unidimensional, para o problema abstrato (11) que nos permitiu comparar as simulações obtidas com os resultados de [21].

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, temos as preliminares onde mostramos as ferramentas utilizadas para o desenvolvimento desse trabalho. Algumas delas são: os Espaços de Sobolev, regularidade de soluções fracas e o teorema (1.49) que se resume a garantir existência de uma única solução local.

No Capítulo 2, provaremos a existência de solução fraca para uma equação abstrata do tipo Allen-Cahn (11) com coeficiente singular, e para isso utilizaremos como ferramenta o método de Galerkin. Em seguida fazemos uma análise do problema baseada em argumentos de energia e provamos o decaimento exponencial da energia total.

No Capítulo 3, vamos explicitar a solução exata das equações e Allen-Cahn Bidimensional (3.1) e tridimensional (3.31) e para isso usaremos como ferramenta o método de separação de variáveis.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados os espaços e as ferramentas principais para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev

Nesta e na próxima seção apresentaremos os espaços funcionais que serão utilizados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes sobre tais espaços consultar [6], [1], [5] e [15].

Definição 1.1. *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u , que será denotado por $\text{supp}(u)$, é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se $\text{supp}(u)$ for um compacto dizemos que u possui suporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ o espaço das funções contínuas com suporte compacto.*

Definição 1.2. *Denotemos por $C^j(\Omega)$, j um número inteiro não-negativo ou infinito, o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas parciais contínuas até ordem j .*

Definição 1.3. *Denotemos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens e que têm suporte compacto.*

Definição 1.4. *Uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que*

- $\text{supp } \varphi_\nu \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N};$
- *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0$ uniformemente em K ,*

onde D^α denota o operador derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Definição 1.5. O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω .

Definição 1.6. Denotemos por $C_B^j(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi \in C^j(\Omega)$ tais que $D^\alpha \varphi$ é limitada em Ω para $|\alpha| \leq j$. $C_B^j(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|\varphi\|_{C_B^j(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha(x)|.$$

Definição 1.7. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das (classes de equivalência das) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω . $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com as normas

$$\|u\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Definição 1.8. Denotemos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições de Ω em \mathbb{R} .

Definição 1.9. Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos a derivada de ordem α da distribuição T , $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.10. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L_{loc}^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que para todo compacto $K \subset \Omega$, $u|_K \in L^p(\Omega)$.

Proposição 1.11. Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi$$

define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração. Ver [6], p. 42. □

Proposição 1.12. Se $1 \leq p \leq \infty$. Então, $L^p(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [6], p. 42. □

Definição 1.13. Seja $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo o conjunto

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada de u no sentido das distribuições. $W_p^m(\Omega)$ é um espaço de Banach com as normas

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u(x)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty; \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$, denotamos $W_p^m(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Proposição 1.14. *Seja $1 < p < \infty$. Se $u \in W_p^1(\Omega)$ então $u_+, u_- \in W_p^1(\Omega)$ e temos as expressões*

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

e

$$\nabla u_- = \begin{cases} 0, & \text{se } u \geq 0 \\ -\nabla u, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [10], p. 292. □

Vamos precisar de alguns resultados sobre espaços de Sobolev na reta.

Definição 1.15. *Consideremos o espaço de Hilbert $H^1((a, b)) = W_2^1(a, b)$ definido por*

$$H^1(a, b) = \{u \in L^2(a, b) : u' \in L^2(a, b)\},$$

com a norma definida por

$$\|u\|_{H^1(a,b)} = \int_a^b \left(|u(t)|^2 + |u'(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (1.1)$$

Lema 1.16. *Seja (a, b) um intervalo limitado da reta. A imersão $H^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$ é contínua e compacta.*

Demonstração. Ver [4], p. 129. □

Proposição 1.17 (Fórmula de Green). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $f, g \in H^2(\Omega)$. Então:*

$$\int_{\Omega} (\Delta f)g \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} g \, dS. \quad (1.2)$$

Demonstração. Ver [4], p. 316. □

1.2 Espaços à valores vetoriais

Para esta seção, consideremos $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach.

Apesar da semelhança entre as definições dessa seção e da anterior, devemos nos precaver com os conceitos de mensurabilidade e integrabilidade em espaços de Banach quaisquer.

Definição 1.18. *Uma função $f : I \rightarrow X$ é mensurável se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0(I, X)$ tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p., quando $n \rightarrow \infty$.*

Proposição 1.19. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de I para X e $f : I \rightarrow X$. Se $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em I , então f é mensurável.*

Demonstração. Ver [5], p. 4. □

Definição 1.20. *Uma função mensurável $f : I \rightarrow X$ é integrável se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0(I, X)$ tal que*

$$\int_I \|f_n(t) - f(t)\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Proposição 1.21 (Teorema de Bochner). *Seja $f : I \rightarrow X$ mensurável. Então f é integrável se, e somente se, $\|f\|$ é integrável. Mais ainda,*

$$\left\| \int_I f \right\| \leq \int_I \|f\|.$$

Demonstração. Ver [5], p. 7. □

Definição 1.22. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(I, X)$ o conjunto das (classes de equivalência das) funções mensuráveis $f : I \rightarrow X$ tais que $t \mapsto \|f(t)\|$ pertence ao $L^p(I)$. $L^p(I, X)$ é um espaço de Banach com as normas*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_I \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{t \in I} \|f(t)\|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, $L^p(I, X)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(I, X)} = \int_I \langle u(x), v(x) \rangle_X dx, \quad \forall u, v \in L^2(I, X).$$

Definição 1.23. Denotemos por $\mathcal{D}'(I, X)$ o espaço $\mathcal{L}(\mathcal{D}(I), X)$. Tal conjunto é chamado o espaço das distribuições de I em X .

Definição 1.24. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L_{loc}^p(I, X)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : I \rightarrow X$ tais que para todo intervalo compacto $J \subset I$, $f|_J \in L^p(I, X)$.

Definição 1.25. Seja $T \in \mathcal{D}'(I, X)$. Definimos a derivada da distribuição T , $T' \in \mathcal{D}'(I, X)$, por

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle,$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

Proposição 1.26. Seja $f \in L_{loc}^1(I, X)$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, então

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_I f \varphi$$

define uma distribuição em $\mathcal{D}'(I, X)$.

Demonstração. Ver [5], p. 10. □

Proposição 1.27. Se $1 \leq p \leq \infty$. Então, $L^p(I, X) \hookrightarrow L_{loc}^1(I, X)$.

Demonstração. Ver [5], p. 10. □

O próximo espaço a ser definido terá suma importância no desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.28. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $L^p(Q) = L^p(0, T; L^p(\Omega))$. Denotemos por $W_p^{2,1}(Q)$ o conjunto das (classes de equivalências das) funções mensuráveis $u \in L^p(Q)$ tais que $u_t \in L^p(Q)$ e $D^\alpha u \in L^p(Q)$, para todo $1 \leq |\alpha| \leq 2$, onde $D^\alpha u$ é a derivada de u no sentido das distribuições. $W_p^{2,1}(Q)$ é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} = \left(\|u\|_{L^p(Q)}^p + \|u_t\|_{L^p(Q)}^p + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u\|_{L^p(Q)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 1.29. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. Então, $W_p^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^q(Q)$ para q satisfazendo:

$$(i) \quad 1 \leq q \leq \frac{p(n+2)}{n+2-2p}, \text{ se } p < \frac{n+2}{2};$$

$$(ii) \quad 1 \leq q < \infty, \text{ se } p = \frac{n+2}{2};$$

$$(iii) \quad q = \infty, \text{ se } p > \frac{n+2}{2}.$$

Em particular, para qualquer função $u \in W_p^{2,1}(Q)$, existe uma constante C dependendo de Ω, T, p, q e n tal que

$$\|u\|_{L^q(Q)} \leq C \|u\|_{W_p^{2,1}(Q)}. \quad (1.3)$$

Nos casos (ii) e (iii) a imersão é compacta, e em (i) teremos imersão compacta para q satisfazendo $1 \leq q < \frac{p(n+2)}{n+2-2p}$.

Demonstração. Ver [15], p. 20. □

Em particular, no caso unidimensional (quando $n = 1$) e considerando $p = 2$, segue da Proposição 1.29 - (iii) que

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq C \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}.$$

1.3 Desigualdades notáveis e fórmulas de integração

Nesta seção, seguem algumas desigualdades e fórmulas de integração conhecidas que serão utilizadas ao longo do texto. Para mais detalhes consultar [10].

Proposição 1.30. *Sejam números reais $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \geq 0$ e $p \geq 1$. Então*

$$(a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n)^p \leq 2^{(n-1)p} (a_1^p + \dots + a_{n-1}^p + a_n^p) \quad (1.4)$$

Proposição 1.31. *[Desigualdade de Young] Se $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (1.5)$$

Demonstração. Ver [10], p. 622. □

Lema 1.32. *Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p > 1$, então*

$$(a + b)^p \leq 2^p (a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo, obtemos

$$\begin{aligned} (a + b)^p &\leq (2 \max\{a, b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leq 2^p (a^p + b^p). \end{aligned}$$

□

Definição 1.33. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada convexa se

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e cada $0 \leq \theta \leq 1$.

Proposição 1.34. Seja E um espaço de Banach e $\phi : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente (na topologia forte). Então ϕ é semicontínua inferiormente na topologia fraca. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente, então

$$\phi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n)$$

Proposição 1.35. [Desigualdade de Jensen] Seja Ω um conjunto aberto mensurável então para toda função convexa e toda função $u \in L^1(\Omega)$, temos

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u(x)) dx.$$

Demonstração. Ver [10], p. 705. □

Proposição 1.36. [Desigualdade de Hölder] Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Demonstração. Ver [4], p. 92. □

Teorema 1.37. (Desigualdade de Poincaré). Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do \mathbb{R}^N . Então para todo $1 \leq p \leq \infty$, existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p) tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (1.6)$$

Demonstração. Ver H. Brezis [4], Lema p.218.

Observação 1.38. Se $a, b \geq 0$ e $p \geq 1$ então, $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$.

Demonstração. Ver [10]

Proposição 1.39. [Desigualdade de Gronwall - forma diferencial] Seja $f(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$, que satisfaz para cada t a desigualdade diferencial

$$f'(t) \leq \phi(t)f(t) + \psi(t),$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas, integráveis em $[0, T]$. Então

$$f(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left(f(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right),$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se

$$f' \leq \phi f \text{ em } [0, T] \text{ e } f(0) = 0,$$

então

$$f \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

Demonstração. Ver [10], p. 624. □

1.4 Regularidade de Soluções Fracas

O resultado dessa seção pode ser encontrado no livro de Ver [4]. Este resultado é importante para mostrarmos a linearidade do operador Laplaciano negativa, definido por $-\Delta : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio suave, com fronteira $\partial\Omega$ suave. E também para mostrar que dada uma função em $u \in L^2(\Omega)$ com $\Delta u \in L^2(\Omega)$, segue que $u \in H^2(\Omega)$.

Teorema 1.40 (Agmon-Douglis-Nirenberg). *Suponha que Ω seja de classe C^2 com $\partial\Omega$ limitada. Tome $1 < p < \infty$. Então para todo $f \in L^p(\Omega)$, existe uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ($m \geq 1$ um inteiro), então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C \|f\|_{W^{m,p}}.$$

Demonstração. Ver [4], Teorema 9.32, p.316.

1.5 Resultados de Convergência e Imersões

Lema 1.41. *Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^{N+1} , N um inteiro positivo, g_m e g funções de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, tais que*

$$\|g_m\|_{L^q(\Omega)} \leq c \quad (c > 0 \text{ constante}) \quad (1.8)$$

$$g_m \rightarrow g \text{ quase sempre em } \Omega. \quad (1.9)$$

Então,

$$g_m \rightarrow g, \text{ fracamente em } L^q(\Omega). \quad (1.10)$$

Demonstração. Ver J. L. Lions [14], p.12.

Proposição 1.42. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E . Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente em E .*

Demonstração. Ver [4], Teorema 3.18, p.69.

Sejam X, B e Y três espaços de Banach reflexivos tais que:

$$X \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow Y. \quad (1.11)$$

Teorema 1.43. *Tome $T, \alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{R}$, tais que $T > 0$ e $\alpha_i > 1$, $i = 0, 1$.*

Considere o espaço

$$W = \left\{ u \in L^{\alpha_0}(0, T; X), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\alpha_1}(0, T; Y) \right\}. \quad (1.12)$$

Então a imersão de W em $L^{\alpha_0}(0, T; B)$ é compacta ($W \xhookrightarrow{c} L^{\alpha_0}(0, T; B)$).

Demonstração. Ver [22], Capítulo 3, Teorema 2.1, p.271.

Teorema 1.44. *Considere o conjunto F limitado em $L^p(0, T; X)$, com $1 < p < \infty$, e o conjunto $\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} : f \in F \right\}$, limitado em $L^1(0, T; Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0, T; B)$.*

Agora, considere o conjunto F limitado em $L^\infty(0, T; X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ limitado em $L^r(0, T; Y)$, com $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C(0, T; B)$.

Demonstração. Ver [20], Corolário 4, p.21.

1.6 Identidades Importantes

Os próximos resultados, apresentam importantes identidades.

Teorema 1.45. *Sejam V, H e V' três espaços de Hilbert, onde V' é o dual de V , tal que valem as seguintes inclusões densas e contínuas:*

$$V \subset H \subset V'.$$

Se $u \in W(0, T) = \{v \in L^2(0, T; H); v' \in L^2(0, T; H')\}$, então u coincide quase sempre com uma função $C([0, T]; H)$. Além disso,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = \langle u'(t), u(t) \rangle_{V', V} \quad (1.13)$$

Demonstração. Ver [22], Lema 1.2, p.260.

1.7. TEOREMA DE PROLONGAMENTO DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS O

Teorema 1.46. *Sejam E um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de E . Então:*

(a) *E é soma direta de M e M^\perp , isto é, cada $x \in E$ admite uma única representação na forma*

$$x = x_M + x_{M^\perp} \text{ com } x_M \in M \text{ e } x_{M^\perp} \in M^\perp.$$

Além disso

$$\|x - x_M\| = \text{dist}(x, M)$$

e x_M é chamado de projeção ortogonal de x sobre M .

(b) *Se definirmos $P(x) = x_M$ e $Q(x) = x_{M^\perp}$ para $x \in E$, então temos $P, Q \in \mathcal{L}(E, E)$. O operador P é chamado de operador projeção de E sobre M , ou simplesmente projeção.*

(c) $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ e $P \circ Q = Q \circ P = 0$.

Demonstração. Ver [19], Teorema 3.2.9, p.44 e p.45.

Teorema 1.47 (Teorema da Representação de Riesz). *Sejam $1 < p < \infty$, p' o conjugado de p , isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}, \quad (1.14)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o par de dualidade de $(L^p(\Omega))'$ e $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [4], Teorema 4.11, p.97.

Proposição 1.48 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que a distribuição Tu satisfaz*

$$\langle Tu, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração. Ver [6], Proposição 4, p.12.

1.7 Teorema de Prolongamento de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias

Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [17], p.17, mais detalhes encontra-se em [8] e [11]. Com esses resultados temos a existência de solução para um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias, isso é um importante passo no método que será aplicado.

Teorema 1.49. [Teorema de Caratheodory] *Sejam Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{N+1} cujos elementos são denotados por (t, x) , $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função que satisfaz as condições de Caratheodory sobre Ω , isto é:*

- (i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;
- (ii) $f(t, x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;
- (iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$ integrável tal que

$$|f(t, x)|_{\mathbb{R}^N} \leq m_K(t); \quad \forall (t, x) \in K.$$

Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Então, existem $\beta > 0, t_0$ e $x : (t_0 - \beta, t_0 + \beta) \rightarrow \Omega$ solução de (1.15).

Proposição 1.50. *Seja $\Omega = [0, T) \times B$ com $T > 0$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Caratheodory sobre Ω . Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.15) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I , onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então x possui um prolongamento em $[0, T]$.*

1.8 Teorema Espectral para Operadores Compactos e Auto-Adjuntos

Nesta seção apresentamos um importante Teorema da Análise Funcional, que é uma das principais ferramentas na aplicação do Método de Faedo-Galerkin, método com o qual obtemos a existência de solução das Equações Diferenciais Parciais deste trabalho. O Teorema e a demonstração apresentados nessa seção são baseados em Mujica [16] e Pellegrino [19]. No final da seção, apresentamos alguns resultados que caracterizam conjuntos ortonormais em espaços de Hilbert.

Proposição 1.51. *Seja E um espaço de Hilbert, e seja $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e auto-adjunto, com $T \neq 0$. Então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é um autovalor de T , e existe um autovetor correspondente $x \in S_E$ tal que $(Tx, x) = \|T\|$.*

Demonstração. Pellegrino [19], Proposição 6.3.1, p.95.

Teorema 1.52 (Teorema Espectral para operadores compactos e auto-adjuntos em espaços de Hilbert). *Seja E um espaço de Hilbert, com produto interno (\cdot, \cdot) e norma $\|\cdot\|$, e seja $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e auto-adjunto, com $T \neq 0$. Então:*

- (a) *Existem uma seqüência finita ou infinita (λ_n) de autovalores distintos de zero de T , e uma seqüência correspondente (x_n) de autovetores tais que, T admite uma representação da forma,*

$$Tx = \sum \lambda_n (x, x_n) x_n = \sum (Tx, x_n) x_n \quad (1.16)$$

para todo $x \in E$. A seqüência (x_n) é ortogonal.

- (b) Se a sequência (λ_n) é infinita, então $\lambda_n \rightarrow 0$.
- (c) Cada autovalor $\lambda \neq 0$ de T aparece na sequência (λ_n) um número finito de vezes, que coincide com a dimensão do subespaço $E_\lambda = \{v \in E \mid Tv = \lambda v\}$ de autovetores correspondente.

Demonstração. Pellegrino [19].

Teorema 1.53. *Sejam E um espaço de Hilbert, e $S = \{x_i; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em E . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $x = \sum_{i \in I} (x, x_i)_E x_i$, para cada $x \in E$;
- (b) S é completo;
- (c) $\overline{[S]} = E$;
- (d) Identidade de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} (x, x_i)_E^2, \quad \forall x \in E; \quad (1.17)$$

- (e) $(x, y)_E = \sum_{i \in I} (x, x_i)_E \overline{(y, x_i)_E}$ para qualquer $x, y \in E$.

Demonstração. Pellegrino [19], Teorema 3.3.12, p. 49.

Observação 1.54 (Pellegrino [19], Observação 3.3.6, p.47.). *A expressão $\sum_{i=1}^n (x, x_i) x_i$ é chamada de **melhor aproximação** de x em $M = [x_1, \dots, x_n]$.*

Teorema 1.55 (Desigualdade de Bessel). *Seja E um espaço com produto interno e $S = \{x_i; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em E . Então, se $x \in E$, temos*

$$\sum_{i \in J} (x, x_i)_E^2 \leq \|x\|_E^2,$$

com $J = \{i \in I; (x, x_i)_E \neq 0\}$.

Demonstração. Pellegrino [19], Teorema 3.3.9, p.47.

Capítulo 2

Equação de Allen-cahn Abstrata

Neste capítulo provaremos a existência de solução para uma equação do tipo Allen-Cahn com coeficiente singular, e para isso utilizaremos como ferramenta o método de Galerkin.

2.1 Teorema de Existência

Vamos investigar a existência de solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \xi^2 \Delta u = u - \frac{u^3}{K(x)} + y & \text{em } Q \\ u(x, 0) = u_0 & \text{em } \Omega \\ u(x, t) = 0 & S = \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $\Omega \subset R^n$ é um domínio de classe C^2 .

Vamos considerar as seguintes hipóteses

$$H : \begin{cases} \Omega \subset R^n \quad (n = 1, 2, 3) \text{ é um dominio de classe } C^2 \\ 0 < T < \infty, \quad Q = \Omega \times (0, T), S = \partial\Omega \times (0, T) \\ y \in L^2(Q) \quad e \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega). \end{cases} \quad (2.2)$$

Teorema 2.1. *Supondo (2.41), $0 < K(x) \leq 1$ tal que $\frac{1}{K(x)} \in L^4(\Omega)$, então existe uma solução fraca do problema (2.1) tal que $u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); L^2(\Omega))$, $u' \in L^2(Q)$ e satisfaz*

$$(u'(t), v) + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v dx = \int_{\Omega} \left(u - \frac{u^3}{K(x)} \right) v dx + \int_{\Omega} y(t) v dx \quad (2.3)$$

$$u(0) = u_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Primeiramente, os seguintes exemplos satisfazem a condição $\frac{1}{K(x)} \in L^4(\Omega)$.

Exemplo 2.2. ($n=1$). Se $\Omega = (0, 1)$, então se $K(t) = t^\alpha$, com $\alpha < \frac{1}{4}$, tem-se que $\frac{1}{K(t)} \in L^4(\Omega)$.

De fato

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t^\alpha}\right)^4 dt = \int_0^1 t^{-4\alpha} dt = \frac{t^{-4\alpha+1}}{-4\alpha+1} \Big|_{t=0}^{t=1} \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{-4\alpha+1} - 0 = \frac{1}{-4\alpha+1} < +\infty, \quad (2.5)$$

se, $-4\alpha + 1 > 0$, ou seja $\alpha < \frac{1}{4}$.

O seguinte exemplo foi provado em [9], Lemma B1 e fornece uma classe importante de exemplos.

Exemplo 2.3. Supondo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) é um domínio de classe C^k , $k \geq 1$. Então $K(x) = (\text{dist}(x, \partial\Omega))^\alpha$ satisfaz $\frac{1}{K} \in L^4(\Omega)$ se $0 < \alpha < \frac{1}{4}$. Em particular, quando $n = 1$ e $\Omega = (0, 1)$, tem-se

$$K(x) = (\text{dist}(x, \{0, 1\}))^\alpha = \left(\frac{1 - |2x - 1|}{2}\right)^\alpha.$$

2.1.1 Demonstração da Existência:

Seja $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e $V_m = [w_1, \dots, w_m]$ o espaço gerado pelas primeiras m funções da base. Assim,

$$(w_i, w_j) = \int_\Omega w_i w_j dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$(\nabla w_i, \nabla w_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j. \quad (2.7)$$

Problema Aproximado: O problema aproximado consiste em encontrar $u_m \in V_m$, $u_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) w_j$ tal que,

$$(u'_m(t), \varphi) + \xi^2 \int_\Omega \nabla u_m(t) \nabla \varphi dx = \int_\Omega \left(u_m(t) - \frac{u_m^3(t)}{K(x)}\right) \varphi dx + \int_\Omega y(t) \varphi dx \quad (2.8)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \in V_m, \quad u_{0m} \rightarrow u_0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega) \quad \forall \varphi \in V_m.$$

Primeiramente, note que

$$(u'_m(t), w_j) = \sum_{i=1}^m \alpha'_i(t) (w_i, w_j) = \alpha'_j(t). \quad (2.9)$$

Analogamente,

$$(\nabla u'_m(t), \nabla w_j) = \sum_{i=1}^m \alpha'_i(t) (\nabla w_i, \nabla w_j) = \alpha_j (\nabla w_j, \nabla w_j) = \alpha_j(t) \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Fazendo $\varphi = w_j$ em (2.8) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem,

$$\alpha'_j + \xi^2 \alpha_j(t) \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(u_m(t) - \frac{u_m^3(t)}{K(x)} \right) w_j dx + \int_{\Omega} y(t) w_j dx.$$

Escrevendo $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t))^T$ obtemos o seguinte sistema de EDO's de 1ª ordem

$$\begin{cases} \alpha'(t) = F(t, \alpha(t)) \\ \alpha(0) = \alpha_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

em que,

$$F(t, \alpha) = \left[\int_{\Omega} y(t) w_j dx \right]_{m \times 1} - \xi^2 \left[\alpha_j(t) \|\nabla w_j\|^2 \right]_{m \times 1} + \left[\int_{\Omega} \left(u_m(t) - \frac{u_m^3(t)}{K(x)} \right) w_j dx \right]_{m \times 1}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} F(t, \alpha) - F(t, \beta) &= \xi^2 \left[(\alpha_j - \beta_j) \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]_{m \times 1} \\ &+ \left[\left(u_{m\alpha} - \frac{u_{m\alpha}^3}{K(x)} \right) w_j \right]_{m \times 1} - \left[\int_{\Omega} \left(u_{m\beta} - \frac{u_{m\beta}^3}{K(x)} \right) w_j \right]_{m \times 1}, \end{aligned}$$

com,

$$u_{m\alpha} = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \quad e \quad u_{m\beta} = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i.$$

No que segue provaremos que $F(t, \alpha)$ satisfaz as condições do Teorema de Caratheodory, ver Teorema 1.49 ou seja, existe solução local para o sistema de equações diferenciais (2.10).

Para t fixo, $F(t, \alpha)$ é continua em α (localmente Lipschitz) pois,

$$\begin{aligned} \left| \left[(\alpha_j - \beta_j) \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]_{m \times 1} \right| &\leq |\alpha_1 - \beta_1| \|\nabla w_1\|^2 + |\alpha_2 - \beta_2| \|\nabla w_2\|^2 + \dots + \\ |\alpha_m - \beta_m| \|\nabla w_m\|^2 &\leq |\alpha - \beta| \sum_{j=1}^m \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Usando a Desigualdade de Holder Proposição [1.36](#), temos

$$\begin{aligned}
\left| \left[\int_{\Omega} (u_{m\alpha} - u_{m\beta}) w_j dx \right]_{m \times 1} \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |u_{m\alpha} - u_{m\beta}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^m 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^m (\alpha_j - \beta_j) w_j \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} (m)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m (\alpha_j - \beta_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (m)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\alpha - \beta| (m)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \left[\int \left(\frac{u_{m\alpha}^3 - u_{m\beta}^3}{K(x)} \right) w_j dx \right]_{m \times 1} \right| \\
&= \left| \left[\int \frac{1}{K(x)} (u_{m\alpha} - u_{m\beta}) (u_{m\alpha}^2 + u_{m\alpha} u_{m\beta} + u_{m\beta}^2) w_j dx \right]_{m \times 1} \right|. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder Proposição [1.36](#), com $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u_{m\alpha} - u_{m\beta}| |u_{m\alpha}^2 + u_{m\alpha} u_{m\beta} + u_{m\beta}^2| |w_j| dx \\
&\leq \|u_{m\alpha} - u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |u_{m\alpha}^2 + u_{m\alpha} u_{m\beta} + u_{m\beta}^2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_j\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{1}{K} \right\|_{L^4(\Omega)},
\end{aligned}$$

e usando que

$$|u_{m\alpha}^2 + u_{m\alpha} u_{m\beta} + u_{m\beta}^2|^2 \leq 3^2 \left(|u_{m\alpha}|^4 + |u_{m\alpha}|^2 |u_{m\beta}|^2 + |u_{m\beta}|^4 \right),$$

concluimos que

$$\int_{\Omega} |u_{m\alpha}^2 + u_{m\alpha} u_{m\beta} + u_{m\beta}^2|^2 dx \leq 9 \left(\|u_{m\alpha}\|_{L^4(\Omega)}^4 + \int_{\Omega} |u_{m\alpha}|^2 |u_{m\beta}|^2 dx + \|u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)}^4 \right).$$

Usando a desigualdade de Holder Proposição [1.36](#), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_{m\alpha}^2 + u_{m\alpha} u_{m\beta} + u_{m\beta}^2|^2 dx &\leq 9 \left(\|u_{m\alpha}\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|u_{m\alpha}\|_{L^4(\Omega)}^2 \|u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) \\
&\leq 9 \left(\|u_{m\alpha}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\int_{\Omega} |u_{m\alpha}^2 + u_{m\alpha} u_{m\beta} + u_{m\beta}^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 3 \left(\|u_{m\alpha}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)}^2 \right).$$

Das estimativas anteriores e (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \left[\int_{\Omega} \left(\frac{u_{m\alpha}^3 - u_{m\beta}^3}{K(x)} \right) w_j dx \right]_{m \times 1} \right| \\ & \leq 3 \|u_{m\alpha} - u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)} \left(\|u_{m\alpha}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m \|w_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \left\| \frac{1}{K(x)} \right\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pela identidade de Parseval,

$$\|u_{m\alpha} - u_{m\beta}\|_{L^4(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^m (\alpha_j - \beta_j) w_j \right|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \leq |\alpha - \beta| \left(\sum_{j=1}^m \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^4 \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Tomando α e β tais que $|\alpha|, |\beta| \leq R$ para algum $R > 0$, obtemos

$$|F(t, \alpha) - F(t, \beta)| \leq M(m) |\alpha - \beta|.$$

Agora mostraremos que para cada α fixo $F(t, \alpha)$ é mensurável em t .

$$\left| \left[\int_{\Omega} y(t) w_j dx \right]_{m \times 1} \right| \leq \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^m \|w_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

como $y \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$\int_{\Omega} y(t) w_j dx \in L^2(0, t), \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Logo mensurável, portanto $F(t, \alpha)$ é mensurável em t .

Considere o conjunto $E = \{\alpha \in \mathbb{R}^n; |\alpha| \leq C\}$ e a aplicação $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Mostramos anteriormente que $F(t, \alpha)$ é localmente Lipschitz em α e mensurável em t , logo do Teorema de Caratheodory (1.49) existe uma única solução, local $u_m(t)$ com $u_m(t) \in [0, t_m], t_m < T$.

Agora mostraremos que a solução é global ou seja, que $t_m = T$. Para isso, precisaremos provar algumas estimativas.

Estimativa I

Tomando $\varphi = u_m$ em (2.8) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(u_m^2(t) - \frac{u_m^4(t)}{K(x)} \right) dx + \int_{\Omega} y(t) u_m(t) dx,$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} u_m^4(t) dx = \|(u_m(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} y(t) u_m(t) dx.$$

Observe que,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} u_m^4(t) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{u_m}{K(x)^{\frac{1}{4}}} \right)^4 dx = \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^4(\Omega)}^4,$$

logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^4(\Omega)}^4 = \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} y(t) u_m(t) dx.$$

Aplicando as desigualdades de Holder Proposição [1.36](#) e Young Proposição [1.31](#) temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^4(\Omega)}^4 &\leq \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{3}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 3 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall Proposição [1.39](#), concluimos que

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{3T} \left[\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right] \leq K_0 \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y\|_{L^2(Q)}^2 \right],$$

com K_0 uma constante que independe de m , portanto, podemos estender a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$, além disso

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K_0 \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y\|_{L^2(Q)}^2 \right]. \quad (2.14)$$

Integrando em $(0, T)$ a expressão [\(2.13\)](#) e usando [\(2.14\)](#), obtemos

$$\frac{1}{2} \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^4(\Omega)}^4 dt \leq M_1 \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y\|_{L^2(Q)}^2 \right],$$

onde M_1 é uma constante que depende de Ω, T e independe de m .

Das estimativas obtidas e do teorema de imersão segue que,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ u_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_m(T) \text{ é limitada em } L^2(\Omega), \\ \frac{u_m}{(K(x))^{\frac{1}{4}}} \text{ é limitada em } L^4(Q), \\ \text{em particular } \nabla u_m \text{ é limitada em } L^2(Q). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Estimativas II

Façamos agora $\varphi = u_m^3$ em (2.8), usando o Teorema 1.49, e as seguintes identidades:

$$(u'_m(t), u_m^3(t)) = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u_m(t) u_m^3(t) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{4} \frac{d}{dt} (u_m(t))^4 dx = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4,$$

e

$$(\nabla u_m(t), \nabla u_m^3(t)) = \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla (u_m^3(t)) dx = 3 \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 u_m^2(t) dx,$$

temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + 3\xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 u_m^2(t) dx + \int_{\Omega} \frac{u_m^6(t)}{K(x)} dx &\leq \int_{\Omega} u_m^4(t) dx \\ &+ \int_{\Omega} |y(t)| |u_m(t)|^3, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Young 1.31

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |y(t)| |u_m(t)|^3 dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{K(x)^{\frac{1}{2}} |y(t)| |u_m(t)|^3}{K(x)^{\frac{1}{2}}} \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} K(x) |y(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|u_m(t)|^6}{K(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|u_m(t)|^6}{K(x)} dx, \end{aligned}$$

com $0 < K(x) \leq 1$ portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + 3\xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 u_m^2(t) dx + \frac{1}{2} \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{6}}} \right\|_{L^6(\Omega)}^6 \\ \leq \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall Proposição 1.39, obtemos,

$$\|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq e^{4T} \left[\|u_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + 2 \int_0^1 \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right] \leq M_2 \left[\|u_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|y\|_{L^2(Q)}^2 \right].$$

Logo,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq M_2 \left[\|u_0\|_{L^4(Q)}^4 + \|y\|_{L^2(Q)}^2 \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (2.17)$$

Integrando (2.16) em $(0, T)$ e usando (2.17), obtemos

$$\left\| \frac{u_m}{K^{\frac{1}{6}}} \right\|_{L^6(Q)} \leq M_2 \left(\|u_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|y\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (2.18)$$

Estimativas III

Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (|\nabla u_m(t)|^2) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2 \nabla u_m(t) \nabla u'_m(t) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla u'_m(t) dx. \end{aligned}$$

Tomando $\varphi = u'_m$ em (2.8) e usando Teorema (1.45) tem-se que

$$\begin{aligned} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} y(t) u'_m(t) dx. \end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades de Holder Proposição (1.35) e Young Proposição (1.31) e usando (2.13) podemos concluir que,

$$\frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^4(\Omega)}^4 \quad (2.19)$$

$$\leq \frac{3}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.20)$$

Integrando (2.19) em $(0, t)$, com $0 < t < T$ e utilizando a estimativa (2.14) obtemos

$$\frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \|u_m(t)\|^2 + \left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq M_1 \left[\|u_0\|^2 + \|y\|_{L^2(Q)}^2 \right],$$

e portanto,

$$\|u'_m\|_{L^2(Q)} + \|u_m\|_{L^\infty(0, T; H_0^1)} \leq M_1 \left[\|u_0\| + \|y\|_{L^2(Q)} \right]. \quad (2.21)$$

Logo, por (2.15) e (2.21) temos que u_m é uniformemente limitada no espaço

$$W = \{u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); u' \in L^2(Q)\}$$

como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta e $L^2 \subset H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ é contínua pelo Teorema (1.5).

$$W \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{é compacta.} \quad (2.22)$$

Portanto por (2.15), (2.21) e (2.22) temos que existem $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T :$

$H_0^1(\Omega)$), $\eta \in L^2(\Omega)$ e uma subsequência de u_m (a qual denotamos por u_m) tais que,

$$\begin{cases} u_m \rightarrow u & \text{em } L^2(Q), \quad \text{em q.t.p.} \\ u_m \rightharpoonup u & \text{em } L^2(0, T : H_0^1(\Omega)), \\ u_m(T) \rightharpoonup \eta & \text{em } L^2(\Omega), \\ u'_m \rightharpoonup u' & \text{em } L^2(Q), \\ \frac{u_m}{K^{\frac{1}{6}}} \rightharpoonup \frac{u}{K^{\frac{1}{6}}} & \text{em } L^6(Q). \end{cases} \quad (2.23)$$

A última convergência de (2.23) segue do fato que, por (2.18)

$$\left\| \frac{u_m(t)}{K^{\frac{1}{6}}} \right\|_{L^6(\Omega)} \leq M_3.$$

Agora da primeira convergência de (2.23), tem-se

$$\frac{u_m}{K^{\frac{1}{6}}(x)} \rightarrow \frac{u}{K^{\frac{1}{6}}(x)} \quad \text{q.t.p.,}$$

e, pela Proposição 1.41 obtemos,

$$\frac{u_m}{K^{\frac{1}{6}}(x)} \rightarrow \frac{u}{K^{\frac{1}{6}}(x)} \quad \text{fracamente em } L^6(Q).$$

Em particular,

$$\left\| \frac{u}{K^{\frac{1}{6}}} \right\|_{L^6(Q)} \leq \liminf_{m \rightarrow 1} \left\| \frac{u - m}{K^{\frac{1}{6}}} \right\|_{L^6(Q)} \leq M_3.$$

Usaremos as convergências (2.23) para passar o limite no problema aproximado (2.8). Detalharemos apenas o limite do termo cúbico, pois os outros seguem de (2.23), para isto, considere $\varphi = w_j, j = 1, \dots, m$ queremos mostrar que,

$$\int_{\Omega} \left(u_m(t) - \frac{1}{K(x)} u_m^3(t) \right) w_j dx \quad \rightarrow \quad \int_{\Omega} \left(u(t) - \frac{1}{K(x)} u^3(t) \right) w_j dx \quad \text{em } D'(0, T).$$

Note que pela convergência (2.23) é suficiente mostrar que,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} u_m^3(t) w_j dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} u^3(t) w_j dx.$$

Tomando $\psi \in D(0, T)$ tem-se,

$$\int_Q \left[\frac{1}{K(x)} u_m^3(t) w_j - \frac{1}{K(x)} u^3(t) w_j \right] \psi dx dt = \int_Q \frac{d_m(u_m, u)}{K(x)} (u_m(t) - u(t)) \psi w_j dx dt \quad (2.24)$$

$$\int_Q \left[\left(u_m(t) - \frac{1}{K(x)} u_m^3(t) \right) w_j - \left(u(t) - \frac{1}{K(x)} u^3(t) \right) w_j \right] \psi dx dt = \int_Q d_m(u_m, u) (u_m(t) - u(t)) \psi dx dt, \quad (2.25)$$

com,

$$d_m(u_m, u) = (u^2(t) + u_m(t)u(t) + u_m^2(t)).$$

Daí resulta que,

$$\int_{\Omega} (u_m(t) - u(t)) \frac{(u_m^2(t) + u_m(t)u(t) + u^2(t))}{K(x)} w_j \psi dx dt.$$

Note que,

$$\begin{aligned} |u_m^2 + u_m u + u^2| &\leq u_m^2 + |u_m||u| + u^2 \\ &\leq u_m^2 + 2|u_m||u| + u^2 \\ &= (|u_m| + |u|)^2 \\ &\leq 4(|u_m|^2 + |u|^2). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder Proposição [1.36](#), com $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, ficamos com,

$$\int_Q \left| (u_m - u)(u_m^2 + u_m u + u^2) \frac{1}{K(x)} w_j \psi \right| dx dt \quad (2.26)$$

$$\leq 4 \int_Q |u_m - u| \left(\frac{|u_m|^2}{K^{\frac{1}{3}}} + \frac{|u|^2}{K^{\frac{1}{3}}} \right) \frac{1}{K(x)^{\frac{2}{3}}} |w_j| |\psi| dx dt \quad (2.27)$$

$$\leq C \|w_j \psi\|_{L^\infty(Q)} \|u_m - u\|_{L^2(Q)} \left\| \frac{u_m^2}{K^{\frac{1}{3}}} + \frac{u^2}{K^{\frac{1}{3}}} \right\|_{L^3(Q)} \times \left\| \frac{1}{K^{\frac{2}{3}}} \right\|_{L^6(\Omega)}. \quad (2.28)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_m^2 + u^2}{K^{\frac{1}{3}}} \right\|_{L^3(Q)}^3 &= \int_Q \frac{(u_m^2 + u^2)^3}{K(x)} dx dt \\ &\leq 2^3 \int_Q \left(\frac{u_m^6}{K} + \frac{u^6}{K} \right) dx dt \\ &= 8 \left(\left\| \frac{u_m}{K^{\frac{1}{6}}} \right\|_{L^6(Q)}^6 + \left\| \frac{u}{K^{\frac{1}{6}}} \right\|_{L^6(Q)}^6 \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left\| \frac{1}{K^{\frac{2}{3}}} \right\|_{L^6(\Omega)}^6 = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{K^{\frac{2}{3}}(x)} \right)^6 dx = \int_{\Omega} \frac{1}{K^4(x)} dx = \left\| \frac{1}{K} \right\|_{L^4(\Omega)}^4,$$

e conseqüentemente,

$$\left\| \frac{1}{K^{\frac{2}{3}}} \right\|_{L^6(\Omega)} = \left\| \frac{1}{K} \right\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{2}{3}} < \infty,$$

onde aplicamos que $\frac{1}{K} \in L^4(\Omega)$.

Das estimativas acima, obtemos

$$\left| \int_{\Omega} (u_m(t) - u(t)) d_m(u_m, u) w_j \psi dx dt \right| \quad (2.29)$$

$$\leq \|d_m(u_m, u)\|_{L^3(Q)} \|u_m(t) - u(t)\|_{L^2(Q)} \|w_j \psi\|_{L^\infty(Q)} \left\| \frac{1}{K(x)} \right\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{2}{3}}. \quad (2.30)$$

Portanto,

$$\left| \int_{\Omega} (u_m(t) - u(t)) d_m(u_m, u) w_j \psi dx dt \right| \leq K \|u_m - u\|_{L^2(Q)} \|w_j \psi\|_{L^\infty(Q)} \rightarrow 0.$$

Multiplicando (2.8) por $\psi(t) \in D(0, T)$ e integrando em $[0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u'_m(t), \varphi) \psi(t) dt + \xi^2 \int_{\Omega} (\nabla u_m(t), \nabla \varphi) \psi(t) dt \\ &= \int_Q (u_m(t) - u_m^3(t)) \varphi \psi dx dt + \int_Q y(t) \varphi \psi dx dt, \end{aligned}$$

por passagem ao limite e usando as convergências anteriores temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u'(t), \varphi) \psi(t) dt + \xi^2 \int_{\Omega} (\nabla u(t), \nabla \varphi) \psi(t) dt \\ &= \int_Q (u(t) - u^3(t)) \varphi \psi dx dt + \int_Q y(t) \varphi \psi dx dt. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Como o espaço $V_{m,m=1}^\infty$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, então a equação acima vale para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, logo se $\psi \in D(0, T)$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u'(t), \varphi) \psi(t) dt + \xi^2 \int_{\Omega} \langle -\Delta u(t), \varphi \rangle \psi dt \\ &= \int_Q (u(t) - u^3(t)) \varphi \psi(t) dx dt + \int_Q y(t) \varphi \psi(t) dx dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u' - \xi^2 \Delta u = u - u^3 + y \quad \text{em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

aqui usamos $-\Delta : H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$, é definido por $\langle -\Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$, está bem definido pois,

$$\left| \langle -\Delta u, v \rangle \right| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\| \cdot \|v\|.$$

Agora, como $u - u^3 + y \in L^2(Q)$ e $u' \in L^2(Q)$ e

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = \frac{1}{\xi^2}(u - u^3 + y - u') \in L^2(Q), \\ u(t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.32)$$

Pelo Teorema (1.40) de regularidade, temos que $u(t) \in H^2(\Omega)$, ou seja, $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ portanto,

$$u' - \xi^2 \Delta u = u - u^3 + y \quad \text{em} \quad L^2(Q). \quad (2.33)$$

Usando integração por partes em (2.31), com $\psi \in C^2([0, T])$, temos

$$(u_m(T), \varphi)\psi(T) - (u_m(0), \varphi)\psi(0) - \int_0^T (u_m(t), \varphi\psi'(t))dt \quad (2.34)$$

$$+ \xi^2 \int_{\Omega} (\nabla u_{mt}, \nabla \varphi)\psi(t)dt = \int_Q (u_m(t) - u^3(t))\varphi\psi(t)dxdt + \int_Q y(t)\varphi\psi dxdt. \quad (2.35)$$

Passando o limite na igualdade anterior quando $m \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} (\eta, \varphi)\psi(T) - (u_0, \varphi)\psi(0) & - \int_0^T (u(t), \varphi, \psi(t))dt + \xi^2 \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi)\psi(t)dt \\ & = \int_Q (u - u^3)\varphi\psi(t)dxdt + \int_Q y(t)\varphi\psi(t)dxdt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por outro lado, para qualquer $\psi \in C^1([0, T])$ e $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tem-se,

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u'(t), \varphi\psi(t))dt + \xi^2 \int_{\Omega} (\nabla u(t), \nabla \varphi)\psi dt \\ & = \int_Q (u(t) - u^3(t))\varphi\psi dxdt + \int_Q y(t)\varphi\psi(t)dxdt, \end{aligned}$$

e novamente integrando por partes obtemos,

$$\begin{aligned} (u(T), \psi)\psi(T) - (u(0), \varphi)\psi(0) & - \int_0^T (u(t), \varphi\psi'(t))dt + \xi^2 \int_0^T (\nabla u(t), \varphi)\psi(t)dt \\ & = \int_Q (u - u^3)\varphi\psi(t)dxdt + \int_Q y\varphi\psi(t)dxdt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Comparando as equações (2.36) e (2.37) concluímos que,

$$(u(T) - \eta, \psi)\psi(T) - (u(0) - u_0, \psi)\psi(0) = 0. \quad (2.38)$$

Como $\psi \in C^1([0, T])$ é arbitrária podemos escolher $\psi(0) = 0$ e $\psi(T) \neq 0$ e obter $\eta = u(T)$. Analogamente para $\psi(0) \neq 0$ e $\psi(T) = 0$ temos que,

$$u(0) = u_0. \quad (2.39)$$

Logo, provamos que

$$\begin{cases} u' - \xi^2 \Delta u = u - u^3 + y & \text{em } L^2(Q) \\ u(0) = u_0 \\ u = 0 & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.40)$$

ou seja, u é uma solução forte da equação de Allen Cahn.

2.2 Abordagem Energética

Esta seção é dedicada as questões referentes à estabilização assintótica da equação de Allen-Cahn (2.1). Para mostrarmos a abordagem energética vamos, considerar $y = 0$ na equação (2.1), assim ficamos com,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \xi^2 \Delta u = u - \frac{u^3}{K(x)} & \text{em } Q \\ u(x, 0) = u_0 & \text{em } \Omega \\ u(x, t) = 0 & S = \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.41)$$

usamos o método multiplicativo para construir dois funcionais energia, o primeiro denominado energia total, é responsável pela dinâmica global do sistema, o segundo é denominado energia de Ginzburg-Landau e é responsável pela dinâmica de transição entre as fases. estes resultados são tratados nas duas proposições seguintes.

2.2.1 Energia Total do Sistema

Proposição 2.4. *A energia total do problema (2.41) com $0 < K(x) \leq 1$ é dada por,*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad (2.42)$$

e satisfaz a lei de dissipação,

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq - \left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1 \right) \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u|^4 dx \quad (2.43)$$

desde que $\xi \geq \sqrt{C_p}$, onde $C_p > 0$ é a constante de Poincaré.

Demonstração. Multiplicando a equação (2.41) por u e integrando por partes em Ω , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[u_t - \xi^2 (\Delta u) - u + \frac{1}{K(x)} u^3 \right] u dx &= 0 \\ \int_{\Omega} u_t u dx - \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u|^4 dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Considerando a identidade,

$$\int_{\Omega} u_t u dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.45)$$

e a fórmula de Grenn ver Proposição 1.2 tem - se,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u|^4 dx = 0.$$

Definindo a energia total do problema por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx,$$

e levando em consideração que $0 \leq K(x) \leq 1$ temos que,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u|^4 dx.$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré ver Teorema 1.37 ficamos com,

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1\right) \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u|^4 dx,$$

onde C_p é a constante de Poincaré, portanto encontramos a energia total do problema (1)-(6) e desde que $\xi > \sqrt{C_p}$ garantimos a lei de dissipação do problema. \square

2.2.2 Energia de Transição de fase

Proposição 2.5. *A energia de Ginzburg-Landau associada ao problema (2.41) é dada por,*

$$\mathcal{G}(t) = \int_{\Omega} \left[\frac{\xi^2}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} |u|^2 + \frac{1}{4K(x)} |u|^4 \right] dx, \quad (2.46)$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \quad (2.47)$$

Demonstração. Para encontramos a energia de transição de fase vamos usar o método multiplicativo, isto é, vamos multiplicar a equação (2.41) por u_t e integrar por partes em Ω .

$$\int_{\Omega} \left[u_t - \xi^2 (\Delta u) - u + \frac{1}{K(x)} u^3 \right] u_t dx = 0$$

$$\int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u u_t dx - \int_{\Omega} u_t u dx + \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} u^3 u_t dx = 0, \quad (2.48)$$

Usando a fórmula de Green ver Proposição (1.2) e usando o fato de $u = 0$ no bordo, temos

$$\int_{\Omega} \Delta u u_t dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (2.49)$$

Substituindo (2.49) em (2.48) temos,

$$\int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} u_t u dx + \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} u^3 u_t dx = 0, \quad (2.50)$$

onde usamos a identidade

$$\int_{\Omega} u u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx. \quad (2.51)$$

Substituindo a identidade (2.51) em (2.50) ficamos com,

$$\int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u|^4 dx = 0.$$

Com isso podemos definir a energia de transição de fase por,

$$\mathcal{G}(t) = \int_{\Omega} \left[\frac{\xi^2}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} |u|^2 + \frac{1}{4K(x)} |u|^4 \right] dx,$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx.$$

□

2.3 Estabilidade Exponencial

Aqui estudamos a estabilização das soluções do problema (2.41) através da energia total. Mais precisamente, provamos o decaimento exponencial quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.6. *A energia total associada ao problema (2.41) com $0 < K(x) \leq 1$ possui decaimento exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, isto é,*

$$E(t) \leq \frac{2|\Omega|E(0)(\xi^2 - C_p)e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)}}{2|\Omega|(\xi^2 - C_p) + 4C_pE(0)(1 - e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)}), \quad (2.52)$$

em que $\xi^2 > C_p$ e $C_p > 0$ é a constante de Poincaré.

Demonstração. Inicialmente consideramos a lei de dissipação dada na Proposição 2.4

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq - \left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1 \right) \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{K(x)} |u|^4 dx. \quad (2.53)$$

Por outro lado usando que $-\frac{1}{K(x)} \leq -1$, temos,

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1\right) \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} |u|^4 dx.$$

Aplicando a desigualdade de Jensen Proposição [1.35](#), obtemos,

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -2\left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1\right) \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{4}{|\Omega|} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx\right)^2,$$

e relacionando com a energia total dada Proposição [2.4](#) temos a desigualdade,

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -2\left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1\right)E(t) - \frac{4}{|\Omega|}[E(t)]^2. \quad (2.54)$$

Multiplicando a equação [\(2.54\)](#) por $[E(t)]^{-2}$ resulta,

$$\frac{d}{dt}E(t)[E(t)]^{-2} \leq -2\left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1\right)[E(t)]^{-1} - \frac{4}{|\Omega|}. \quad (2.55)$$

Fazendo uma mudança de variável

$$u(t) = -[E(t)]^{-1}, \quad \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}E(t)[E(t)]^{-2}, \quad (2.56)$$

e substituindo [\(2.56\)](#) em [\(2.55\)](#) ficamos com,

$$\frac{d}{dt}u(t) \leq 2\left(\frac{\xi^2}{C_p} - 1\right)u(t) - \frac{4}{|\Omega|}, \quad (2.57)$$

multiplicando a equação [\(2.57\)](#) por $e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)}$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt} \left(u(t) e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)} \right) \leq -\frac{4}{|\Omega|} e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)},$$

integrando de 0 a t , com $t \leq T$, obtemos

$$u(t) e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)} - u(0) \leq \frac{4C_p}{2|\Omega|(\xi^2 - C_p)} e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)} - \frac{4C_p}{2|\Omega|(\xi^2 - C_p)},$$

logo,

$$-E(t)^{-1} e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)} \leq -E(0)^{-1} + \frac{4C_p e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)}}{2|\Omega|(\xi^2 - C_p)} - \frac{4C_p}{2|\Omega|(\xi^2 - C_p)},$$

multiplicando por -1 tem-se,

$$\frac{e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)}}{E(t)} \geq \frac{1}{E(0)} + \frac{4C_p}{2|\Omega|(\xi^2 - C_p)} \left(1 - e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)} \right),$$

assim, concluímos que

$$E(t) \leq \frac{2|\Omega|E(0)(\xi^2 - C_p)e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)}}{2|\Omega|(\xi^2 - C_p) + 4C_pE(0)(1 - e^{-2t(\frac{\xi^2}{C_p}-1)})}, \quad (2.58)$$

em que $\xi^2 > C_p$ e $C_p > 0$ é a constante de Poincaré. Assim fica provado que a energia total do problema [\(2.41\)](#) decaí exponencialmente para zero com $t \rightarrow \infty$. \square

Capítulo 3

Solução Exata Para as Equações de Allen Cahn Bidimensional e Tridimensional

Neste capítulo mostraremos a solução exata e o decaimento exponencial para as equações de Allen-Cahn Bidimensional e Tridimensional para um coeficiente de reação escolhido convenientemente, essa escolha foi feita de tal forma que torne possível o problema de resolver uma equação diferencial parcial não linear, no problema de resolver duas equações diferenciais ordinárias sendo uma delas um problema de contorno e a outra um problema de valor inicial. A ideia por trás desse método é fazer com que o problema de valor de contorno seja uma equação linear e o problema de valor inicial seja uma equação não linear do tipo Bernoulli.

3.1 Equação de Allen-Cahn Bidimensional

Considere a equação de Allen-cahn bidimensional dada por

$$u_t - \xi^2(u_{xx} + u_{yy}) - u \left(1 - \frac{1}{K(x, y)} \right) u^2 = 0 \quad em \quad [0, L_x] \times [0, L_y] \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad y \in [0, L_y], \quad t \in [0, \infty), \quad (3.2)$$

$$u(L_x, y, t) = 0, \quad y \in [0, L_y], \quad t \in [0, \infty), \quad (3.3)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad x \in [0, L_x], \quad t \in [0, \infty), \quad (3.4)$$

$$u(x, L_y, t) = 0, \quad x \in [0, L_x], \quad t \in [0, \infty), \quad (3.5)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (3.6)$$

3.1.1 Solução Exata do Problema

Para calcularmos a solução exata do problema (3.1)-(3.6) usaremos o método de separação de variáveis, vamos considerar a função u definida da seguinte forma,

$$u(x, y, t) = F(x)G(y)H(t). \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) em (3.1) temos que,

$$F(x)G(y)H'(t) + \frac{1}{k(x, y)}F^3(x)G^3(y)H^3(t) = F(x)G(y)H(t) \left[\xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} \right) + 1 \right], \quad (3.8)$$

segue daí que,

$$\frac{F(x)G(y) \left[H'(t) + \frac{1}{k(x, y)}F^2(x)G^2(y)H^3(t) \right]}{F(x)G(y)H(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} \right) + 1, \quad (3.9)$$

assim,

$$\frac{H'(t) + \frac{1}{k(x, y)}F^2(x)G^2(y)H^3(t)}{H(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} \right) + 1, \quad (3.10)$$

escolhendo $K(x, y) = F^2(x)G^2(y)$ temos,

$$\frac{H'(t) + H^3(t)}{H(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} \right) + 1. \quad (3.11)$$

Podemos observar que o lado esquerdo depende apenas de t enquanto que o lado direito depende de x e y , logo podemos concluir que ambos os lados são independentes de x , y e t logo existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\frac{H'(t) + H^3(t)}{H(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} \right) + 1 = \sigma.$$

Com isso temos

$$\begin{cases} \frac{H'(t) + H^3(t)}{H(t)} = \sigma \\ \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} \right) + 1 = \sigma \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} H'(t) + H^3(t) - \sigma H(t) = 0 \\ \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{\sigma - 1}{\xi^2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Segue daí que, usando as condições de contorno e as condições iniciais temos um problema de valor de contorno e um problema de valor inicial.

$$\begin{cases} H'(t) + H^3(t) - \sigma H(t) = 0 \\ H(0) = h_0 \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} F''(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma}{\xi^2}\right)F(x) = 0 \\ F(0) = F(L_x) = 0, \\ G''(y) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma}{\xi^2}\right)G(y) = 0 \\ G(0) = G(L_y) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.1.2 Problema de Valor de Contorno

O problema de valor de contorno será resolvido em duas etapas:

1ª Etapa: vamos resolver o seguinte problema

$$\begin{cases} F''(x) + \frac{1-\sigma}{\xi^2}F(x) = 0 \\ F(0) = F(L_x) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Supondo que o problema tenha solução da forma $F(x) = e^{\mu x}$ temos que

$$\mu^2 e^{\mu x} + \left(\frac{1-\sigma}{\xi^2}\right)e^{\mu x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu^2 + \frac{1-\sigma}{\xi^2} = 0$$

$$\mu^2 = -\frac{1-\sigma}{\xi^2} \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm \frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}.$$

Então a solução do problema é dada por

$$F(x) = ae^{\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)x} + be^{-\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)x}, \quad (3.17)$$

onde a,b são constantes. Temos que analisar três casos: i) **Primeiro caso**, $\sigma = 1$. Para $\sigma = 1$ temos,

$$F(x) = ae^{\left(\frac{\sqrt{1-1}}{\xi}\right)x} + be^{-\left(\frac{\sqrt{1-1}}{\xi}\right)x}$$

$$F(x) = a + b.$$

Pelas condições de contorno temos,

$$F(0) = a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b.$$

Neste caso temos uma solução trivial que não nos interessa. ii) **Segundo caso**, $\sigma > 1$. Para $\sigma > 1$ temos,

$\sqrt{\sigma - 1} \in \mathbb{R}$ e usando as condições de contorno, $F(0) = F(L_x) = 0$ temos

$$\begin{aligned} F(0) &= ae^{\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)0} + be^{-\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)0} = 0, \\ a + b &= 0 \quad \Rightarrow a = -b. \end{aligned}$$

Neste caso temos uma solução trivial que não nos interessa. iii) **Terceiro caso** $\sigma < 1$
Para $\sigma < 1$, temos que $\sqrt{\sigma - 1} \in \mathbb{C}$, assim

$$\mu = \pm i \frac{\sqrt{\sigma - 1}}{\xi}.$$

Neste caso, ficamos com

$$F(x) = ae^{i\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)x} + be^{-i\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)x}.$$

Usando a relação de Euler temos,

$$F(x) = a\cos(\theta x) + b\sen(\theta x), \quad \text{para } \theta = \left(\frac{\sqrt{\sigma - 1}}{\xi}\right)x.$$

Usando as condições de contorno

$$F(0) = a\cos(\theta \cdot 0) + b\sen(\theta \cdot 0) = 0 \quad \Longrightarrow a = 0, \quad (3.18)$$

assim,

$$F(L_x) = a\cos(\theta \cdot L_x) + b\sen(\theta \cdot L_x) = 0, \quad (3.19)$$

desta forma,

$$\sen(\theta \cdot L_x) = 0 \quad \Longrightarrow \theta = \frac{n\pi}{L_x},$$

e substituindo a expressão de θ encontramos

$$\sigma_n = \frac{\xi^2 n^2 \pi^2}{L_x^2} - 1.$$

Com isso podemos concluir que a solução de (3.17) será dada por

$$F(x) = b\sen\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)x. \quad (3.20)$$

Consequentemente teremos,

$$F_n(x) = b\sen\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)x.$$

2ª Etapa: Agora vamos resolver o seguinte problema,

$$\begin{cases} G'''(y) + \frac{1-\sigma}{\xi^2}G(y) = 0 \\ G(0) = G(L_y) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Suponha que o problema tenha solução da forma $G(y) = e^{\mu y}$ temos que

$$\mu^2 e^{\mu y} + \frac{(1-\sigma)e^{\mu y}}{\xi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm \frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}.$$

Então a solução do problema é dada por,

$$G(y) = ce^{\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)y} + de^{-\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)y},$$

onde c,d são constantes. Novamente teremos que analisar três casos, dos quais, $\sigma = 1$, e $\sigma > 1$ é análogo a primeira etapa e teremos soluções triviais, que não nos interessam, já no caso onde $\sigma < 1$ temos,

$$G(y) = ce^{i\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)y} + de^{-i\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right)y}, \quad (3.22)$$

usando a relação de Euler temos,

$$G(y) = c \cos\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}y\right) + d \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}y\right).$$

Usando as condições de contorno $G(0) = G(L_y) = 0$ temos,

$$G(0) = c \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}0\right) + d \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}0\right) = 0 \quad c + 0 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

$$G(L_y) = c \cos\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}L_y\right) + d \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}L_y\right),$$

assim

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}L_y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_m = \frac{\xi^2 m^2 \pi^2}{L_y^2} - 1.$$

Com isso temos que a solução da $G(y)$ será da forma

$$G_m(y) = d \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right), \quad (3.23)$$

3.1.3 Problema de Valor Inicial

Para o problema de valor inicial PVI temos,

$$\begin{cases} H'(t) + H^3(t) - \sigma H(t) = 0 \\ H(0) = h_0 \in \mathbb{R} - \{0\}, \end{cases} \quad (3.24)$$

desta forma segue a seguinte EDO do tipo Bernoulli

$$H'(t) = \sigma H(t) - H^3(t), \quad (3.25)$$

a qual é equivalente a,

$$H^{-3}H'(t) = \sigma H^{-2}(t) - 1. \quad (3.26)$$

Fazendo uma mudança de variável,

$$u = H^{-2} \quad \Rightarrow \quad u'(t) = -2H^{-3}(t)H'(t). \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.25) temos

$$u'(t) = -2\sigma u + 2,$$

cuja solução geral é

$$u = e^{\int f(t)dt} \left[K + \int g(t)e^{-\int f(t)dt} dt \right],$$

daí ficamos com,

$$u = e^{-2\int dt} \left[K + 2 \int e^{2\int dt} dt \right] \quad \Rightarrow \quad u = \frac{K\sigma e^{-2\sigma t} + 1}{\sigma}, \quad (3.28)$$

substituindo (3.27) em (3.28)

$$H(t) = \sqrt{\frac{\sigma}{K\sigma e^{-2\sigma t} + 1}}, \quad (3.29)$$

definindo $\sigma_n = \beta$ e $\sigma_m = \alpha$ temos que,

$$\sigma_{mn} = \alpha + \beta, \quad (3.30)$$

substituindo (3.30) em (3.29) ficamos com,

$$H(t) = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\left(\frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha + \beta}\right)(\alpha + \beta)e^{-2\sigma t} + 1}},$$

assim temos que a solução de $H(t)$ será dada por

$$H(t) = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)e^{-2\sigma t} - e^{-2\sigma t} + 1}},$$

logo, pelo principio da superposição de soluções temos,

$$U(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} u_{mn}(x, y, t),$$

onde C_{mn} são os coeficientes de Fourier

$$U_{mn}(x, y, t) = F_n(x)G_m(y)H_{mn}(t),$$

assim ficamos com

$$U(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)e^{-2\sigma t} - e^{-2\sigma t} + 1}},$$

Portanto,

$$U(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{e^{-2\sigma t} \left[(\alpha + \beta)e^{-2\sigma t} - e^{-2\sigma t} + 1 \right]}}.$$

3.2 Equação de Allen-Cahn Tridimensional

Considere a equação de Allen-cahn tridimensional dada por

$$u_t - \xi^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u \left(1 - \frac{1}{K(x, y, z)} \right) u^2 = 0 \quad (3.31)$$

em $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z] \times (0, \infty)$

$$u(0, y, z, t) = 0, \quad y \in [0, L_y], \quad z \in [0, L_z] \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(L_x, y, z, t) = 0, \quad y \in [0, L_y], \quad z \in [0, L_z] \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, 0, z, t) = 0, \quad x \in [0, L_x], \quad z \in [0, L_z] \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, L_y, z, t) = 0, \quad x \in [0, L_x], \quad z \in [0, L_z] \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, y, 0, t) = 0, \quad x \in [0, L_x], \quad y \in [0, L_y] \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, y, L_z, t) = 0, \quad x \in [0, L_x], \quad y \in [0, L_y] \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega} \quad (3.32)$$

3.2.1 Solução Exata

Proposição 3.1. A solução exata do problema (3.31)-(3.32) com $0 < K(x) \leq 1$ é dada em série de fourier por

$$U(x, y, z, t) = \sum_{n,m,k=0}^{\infty} C_{mnk} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L_z}z\right) \frac{e^{-\tau t}}{\sqrt{e^{-2\tau t} \left[(\alpha + \beta + \gamma)e^{-2\tau t} - e^{-2\tau t} + 1 \right]}}$$

onde C_{mnk} é o coeficiente de Fourier.

Demonstração. Para calcularmos a solução exata do problema (3.31)-(3.32) usaremos o método de separação de variáveis, vamos considerar a função u definida da seguinte forma

$$u(x, y, z, t) = F(x)G(y)H(z)V(t). \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.31) temos,

$$F(x)G(y)H(z)V'(t) - \xi^2 \left(F''(x)G(y)H(z)V(t) + F(x)G''(y)H(z)V(t) + F(x)G(y)H''(z)V(t) \right) - F(x)G(y)H(z)V(t) + \frac{1}{K(x, y, z)} F^3(x)G^3(y)H^3(z)V^3(t) = 0, \quad (3.34)$$

segue daí que,

$$\frac{F(x)G(y)H(z) \left[V'(t) + \frac{1}{K(x, y, z)} F^2 G^2 H^2 V^3(t) \right]}{F(x)G(y)H(z)V(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{H''(z)}{H(z)} \right) + 1, \quad (3.35)$$

assim,

$$\frac{V'(t) + \frac{1}{K(x, y, z)} F^2(x)G^2(y)H^2(z)V^3(t)}{V(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{H''(z)}{H(z)} \right) + 1.$$

Escolhendo,

$$K(x, y, z) = F^2(x)G^2(y)H^2(z),$$

ficamos com,

$$\frac{V'(t) + V^3(t)}{V(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{H''(z)}{H(z)} \right) + 1.$$

Podemos observar que o lado esquerdo depende apenas de t enquanto que o lado direito depende de x , y e z logo podemos concluir que ambos os lados são independentes de x , y , z e t logo existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\frac{V'(t) + V^3(t)}{V(t)} = \xi^2 \left(\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{H''(z)}{H(z)} \right) + 1 = \tau,$$

com isso temos,

$$\begin{cases} V'(t) + V^3(t) - \tau V(t) = 0 \\ \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{H''(z)}{H(z)} = \frac{\tau-1}{\xi^2}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Usando as condições de contorno e as condições iniciais temos o seguintes problema de valor inicial,

$$\begin{cases} V'(t) + V^3(t) - \tau V(t) = 0 \\ V(0) = v_0 \in \mathbb{R} - 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

e problema de valor de contorno

$$\begin{cases} F''(x) + \frac{1}{3} \left(\frac{1-\tau}{\xi^2} \right) F(x) = 0 \\ F(0) = F(L_x) = 0 \\ G''(y) + \frac{1}{3} \left(\frac{1-\tau}{\xi^2} \right) G(y) = 0 \\ G(0) = G(L_y) = 0 \\ H''(z) + \frac{1}{3} \left(\frac{1-\tau}{\xi^2} \right) H(z) = 0 \\ H(0) = H(L_z) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

3.2.2 Problema de valor de contorno

Semelhante ao caso bidimensional mostra-se que as soluções das equações (3.38) são dadas por

$$F_n(x) = b \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_x} \right) x, \quad \text{onde } b > 0 \text{ constante.}$$

$$G_m(x) = c \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_y} \right) y \quad \text{onde } c > 0 \text{ constante}$$

$$H_m(x) = d \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L_z} \right) z \quad \text{onde } d > 0 \text{ constante}$$

3.2.3 Problema de valor inicial

Para o problema de valor inicial PVI temos,

$$\begin{cases} V'(t) + V^3(t) - \tau V(t) = 0 \\ H(0) = h_0 \in \mathbb{R}^*, \end{cases} \quad (3.39)$$

a qual se transforma na seguinte EDO do tipo Bernoulli

$$Y'(t) = \tau Y(t) - Y^3(t). \quad (3.40)$$

Multiplicando a equação (3.40) por $Y^{-3}(t)$ ficamos com,

$$Y^{-3}(t)Y'(t) = \tau Y^{-2}(t) - 1. \quad (3.41)$$

Fazendo uma mudança de variável

$$u = Y^{-2}(t) \quad \Rightarrow \quad u'(t) = -2Y^{-3}(t)Y'(t), \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.41) temos,

$$u'(t) = -2\tau u + 2.$$

Cuja solução geral é

$$u = e^{\int f(t)dt} \left[K + \int g(t)e^{-\int f(t)dt} dt \right].$$

Assim,

$$u = e^{-2\int dt} \left[K + 2 \int e^{2\int dt} dt \right] \quad \Rightarrow \quad u = \frac{K\tau e^{-2\sigma t} + 1}{\tau}, \quad (3.43)$$

substituindo (3.42) em (3.43)

$$V(t) = \sqrt{\frac{\tau}{K\tau e^{-2\sigma t} + 1}}, \quad (3.44)$$

definindo $\tau_n = \beta$, $\tau_m = \alpha$ e $\tau_k = \gamma$ temos,

$$\tau_{mnk} = \alpha + \beta + \gamma, \quad (3.45)$$

substituindo (3.45) em (3.44) ficamos com

$$V(t) = \sqrt{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 1}{\alpha + \beta + \gamma}\right)(\alpha + \beta + \gamma)e^{-2\sigma t} + 1}},$$

assim temos que a solução de $V(t)$ será dada por

$$V(t) = \sqrt{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)e^{-2\sigma t} - e^{-2\sigma t} + 1}},$$

assim pelo principio da superposição de soluções temos,

$$U(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{mnk} u_{mnk}(x, y, z, t),$$

onde C_{mnk} são os coeficientes de Fourier

$$U_{mnk}(x, y, z, t) = F_n(x)G_m(y)H_k(z)V_{mnk}(t),$$

assim ficamos com

$$U(x, y, z, t) = \sum_{n,m,k=0}^{\infty} C_{mnk} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L_z}z\right) \sqrt{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)e^{-2\tau t} - e^{-2\tau t} + 1}},$$

portanto,

$$U(x, y, z, t) = \sum_{n,m,k=0}^{\infty} C_{mnk} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L_z}z\right) \frac{e^{-\tau t}}{\sqrt{e^{-2\tau t} \left[(\alpha + \beta + \gamma)e^{-2\tau t} - e^{-2\tau t} + 1 \right]}}, \quad (3.46)$$

onde C_{mnk} é o coeficiente de Fourier. □

Capítulo 4

Simulação computacional

Neste capítulo vamos comparar as simulações computacionais da solução exata e da energia total para a equação de Allen-Cahn unidimensional obtida em [21] e para a equação de de Allen-CAhn abstrata (11). Para realizarmos as simulações computacionais usamos o MatLab.

4.1 Solução exata e energia total obtida em [21] - Caso: $n = 2$

Consideramos os dados $T = 0.1$, $G_0 = 1$, $n = 2$ e assumimos os valores de $\xi = 1$ e $\xi = 0.15$.

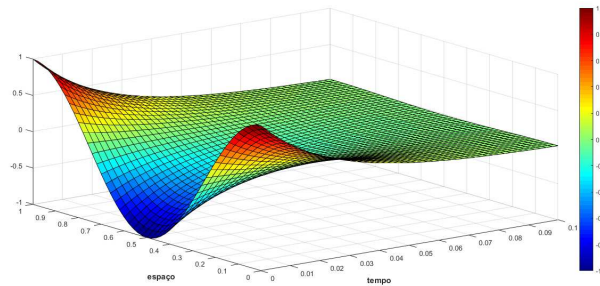


Figura 4.1: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 1$

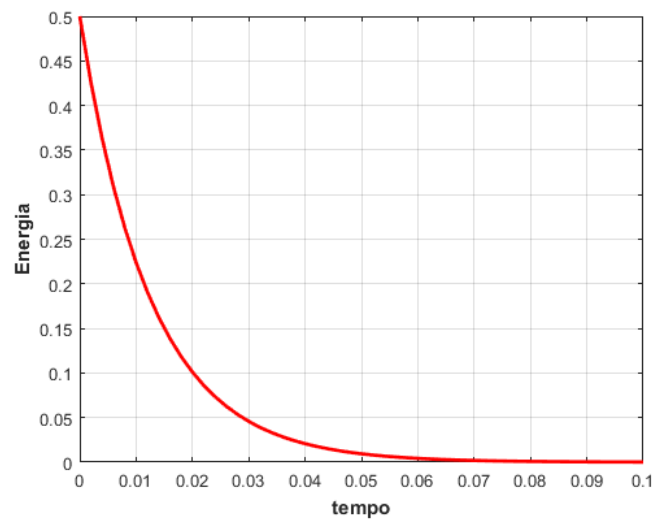


Figura 4.2: Energia total: escala decimal

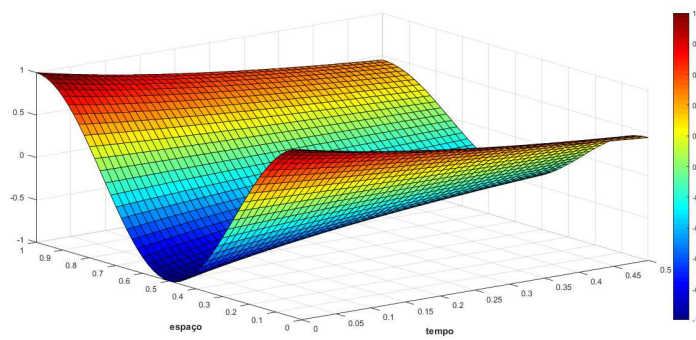
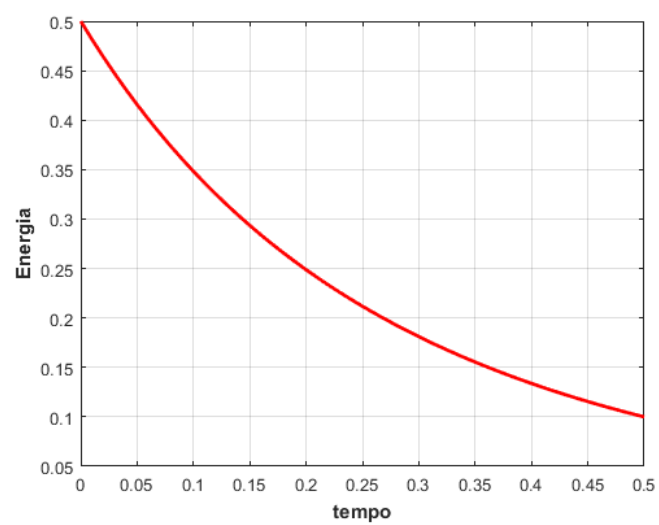
Figura 4.3: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 0.15$.

Figura 4.4: Energia total: escala decimal.

4.2 Solução exata e energia total obtida em [21] - Caso: $n = 4$

Consideramos os dados $T = 0.1$, $G_0 = 1$, $n = 4$ e assumimos os valores de $\xi = 1$ e $\xi = 0.15$.

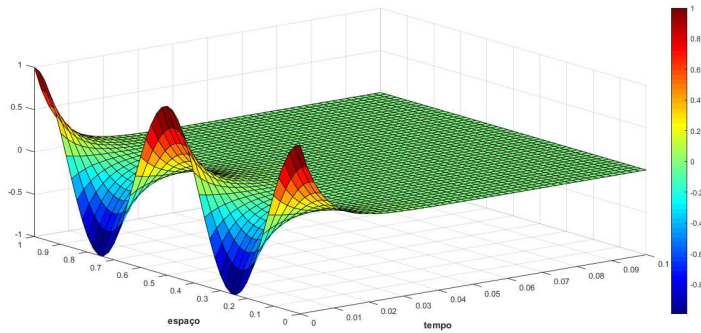


Figura 4.5: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 1$.

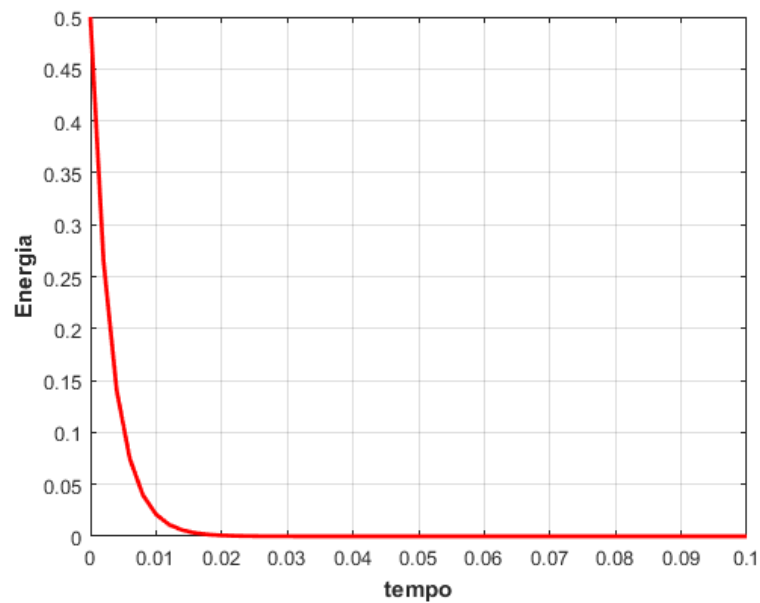


Figura 4.6: Energia total: escala decimal.

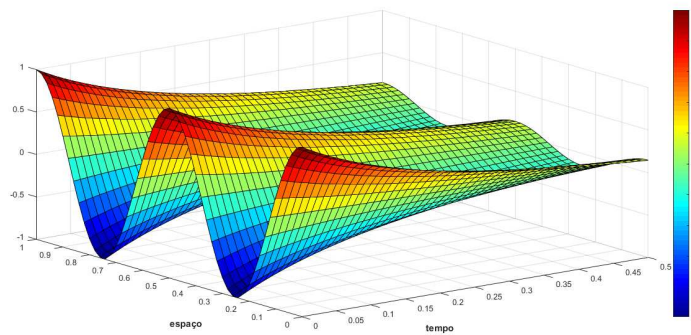
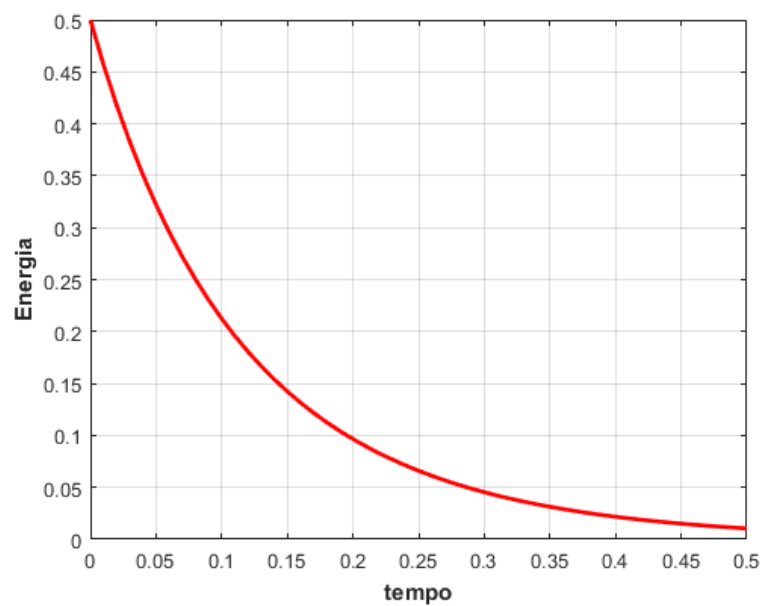
Figura 4.7: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 0.15$.

Figura 4.8: Energia total: escala decimal.

Comentário: Nas simulações realizadas acima percebemos que a solução exata possui comportamentos bem distintos dependendo do valor que se escolha para o coeficiente ξ . Nas Figuras [4.16](#) e [4.5](#) percebemos que a solução decai muito rápido para zero sem oscilação enquanto que nas Figuras [4.3](#) e [4.7](#) notamos a presença oscilações espaciais, ou seja, o sistema não possui homogeneidade espacial. No entanto, em ambos os casos ($\xi = 1$, $\xi = 0.15$), percebemos pelas Figuras [4.2](#), [4.4](#), [4.6](#) e [4.8](#) que o problema continua exponencialmente estável.

4.3 Solução exata e energia total - Caso abstrato

Vamos considerar os seguintes dados $T = 0, 1$, $\xi = 1$ e $K(x) = \frac{1}{x^5}$

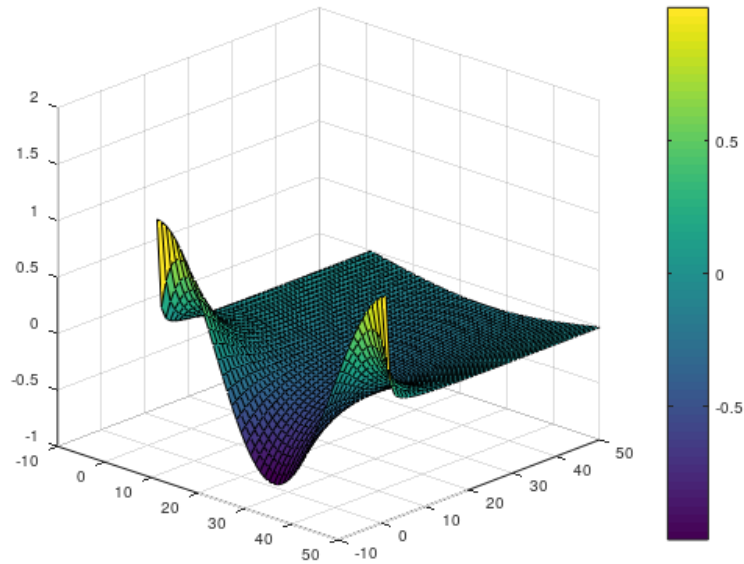


Figura 4.9: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 1$

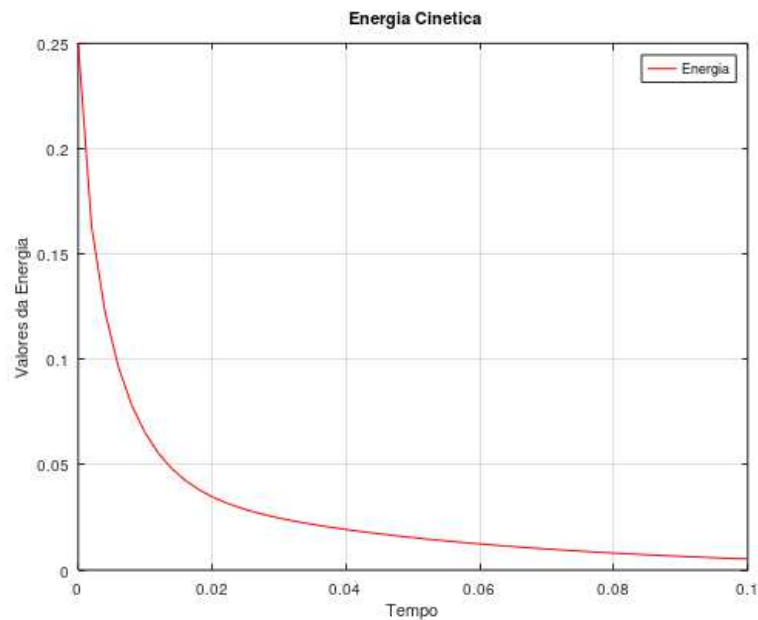


Figura 4.10: Energia Total

Vamos considerar os seguintes dados $T = 0, 1$, $\xi = 0.15$ e $K(x) = \frac{1}{x^5}$.

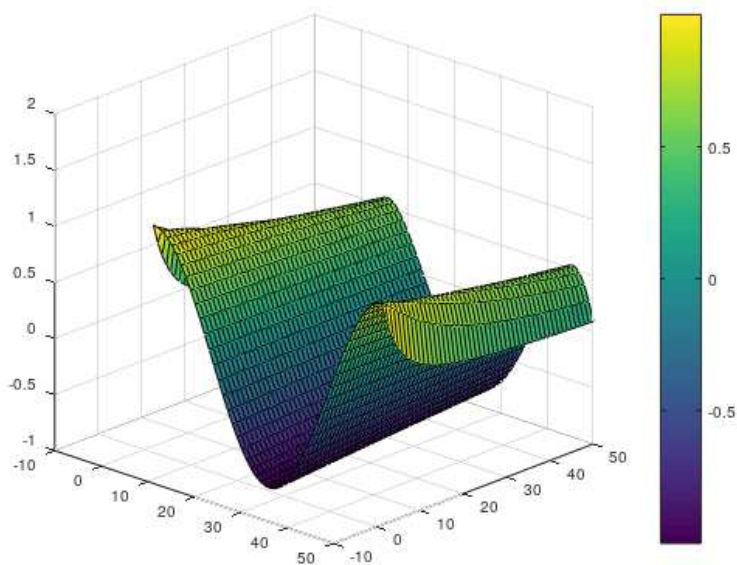


Figura 4.11: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 0.15$

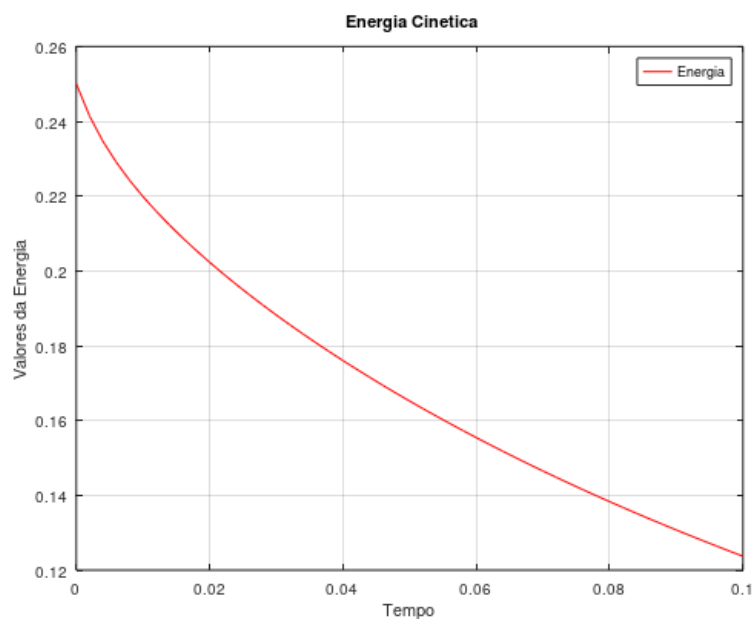


Figura 4.12: Energia Total

Vamos considerar os seguintes dados $T = 0, 1$, $\xi = 1$ e $K(x) = (\text{dist}(x, \{0, 1\}))^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1-|2x-1|}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

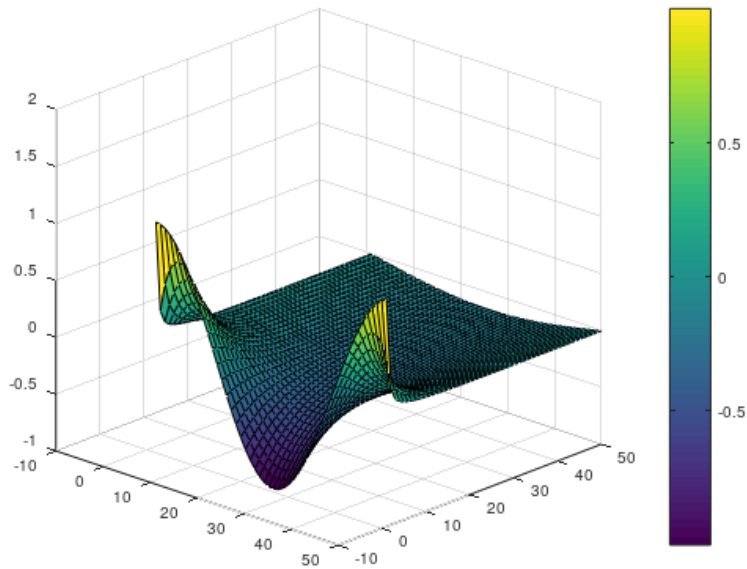


Figura 4.13: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 1$

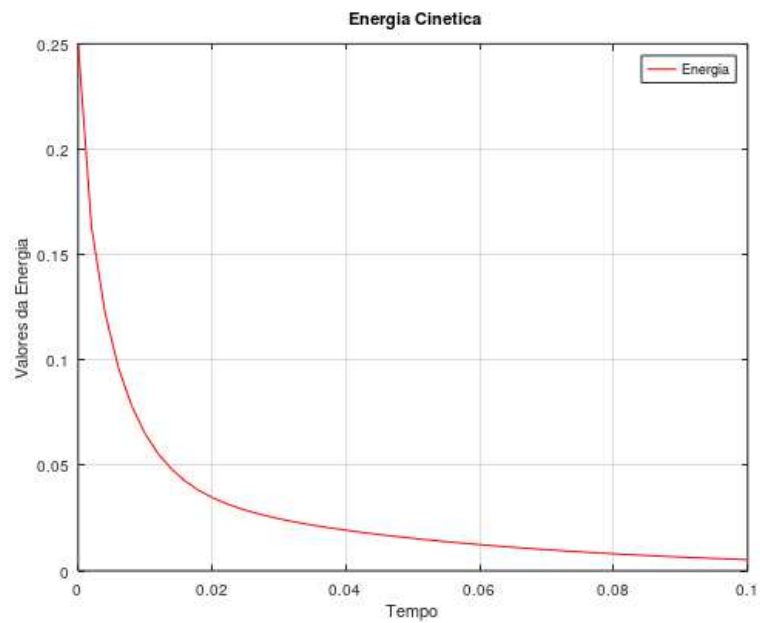


Figura 4.14: Energia Total

Vamos considerar os seguintes dados $T = 0, 1$, $\xi = 0.15$ e $K(x) = (\text{dist}(x, \{0, 1\}))^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1-|2x-1|}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$.

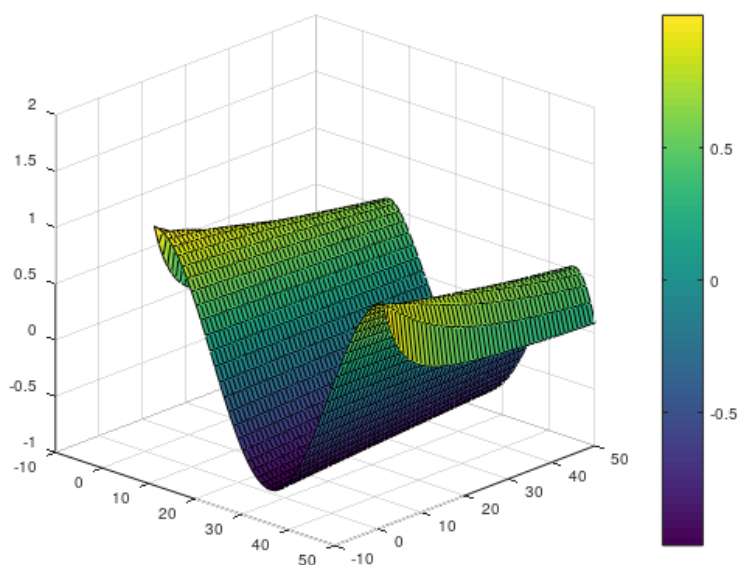
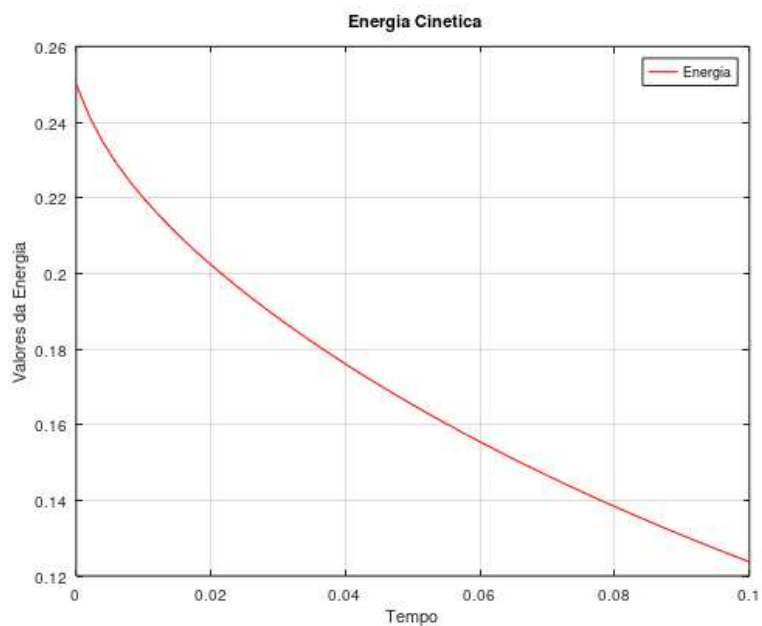
Figura 4.15: Solução exata $u(x, t)$ com $\xi = 0.15$ 

Figura 4.16: Energia Total

Nas simulações realizadas da solução exata e da energia total das equações de Allen-Cahn unidimensional e da equação de Allen-Cahn abstrata podemos observar que temos um comportamento diferente de acordo com os valores atribuídos a ξ .

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos a existência de solução para uma equação do tipo Allen-Cahn abstrata, usamos como ferramenta o método de Galerkin. Também realizamos o estudo do decaimento exponencial da energia total associada ao problema. também foi apresentado um estudo numérico, no caso unidimensional, permitindo comparar os nossos resultados com os presentes na literatura.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.
- [2] Allen, S.; Cahn, J. **A Microscopic Theory For Antiphase Boundary Motion and Its Application to Antiphase Domain Coarsening** . Acta Metall, 1979.
- [3] Alexeév, V., Fomine, S., Tikomirov, V., **Commande Optimale**. Moscou, Mir, 1982.
- [4] Brezis, H. **Function Analysis, Sobolev Spaces e Partial Differential Equations**. Springer, 2011.
- [5] Casenave, Thierry; Haraux, Alain. **An Introduction to Semilinear Evolution Equations**. New York: Oxford University, 1998.
- [6] Cavalcanti, M.M.; Cavalcanti, V.N.D. **Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2011.
- [7] Chen, X. **Generation, Propagation, and Annihilation of Metastable Patterns..** Journal of Differential Equations, 2004.
- [8] Coddington, E.A.; Levinson, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York:McGraw-Hill book Company. Inc,1955.
- [9] Estapenhorst, M. F. **A Classe Of Singular Elliptic Equations**. Tese de Doutorado em matemática, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brazil, 2022.
- [10] Evans, L. C. **Partial Differential Equations**. Berkeley: University of California, 1998.
- [11] Figueiredo, D.G.; Neves, A.F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.
- [12] Karma, A., Rappel, W. **Quantitative Phase-Field Modeling of Dendritic Growth in Two and Three Dimensions** . Physical Review E Physics, 1998.
- [13] Kobaiashi, R. **Modeling and Numerical Simulations of Dendritic Crystal Growth**. Physica D, 1993.

- [14] Lions, J.L. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Gautier-Villars, 1969.
- [15] Lions, J.L. **Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers**. Méthodes Mathématiques de L'informatique, Gautier-Villars, 1983.
- [16] Mujica, J. **Notas de Análise Funcional** . Campinas: UNICAMP/IMECC, 2008.
- [17] Narciso, V. **Sobre o Sistema de Equações do Tipo Timoshenko, Baseado na Equação de Carrier**. Maringá: UEM, Dissertação de Mestrado 2003.
- [18] Niculescu, C.P.; Persson, L.E. **Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach**; Springer: New York, NY, USA, 2006.
- [19] Pellegrino, D. **Introdução a Análise Funcional**. João Pessoa: UFPB/Departamento de Matemática, 2007.
- [20] Simon, J. **Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$** . ann. Mat. Pura Appl., 146, 65-96(1987).
- [21] Teixeira, E.D.P., Almeida Junior, D.S., Ramos, A.J.A., Ribeiro, L.M. **Solução Exata e Estabilização Exponencial Para a equação de Allen-Cahn**. Trends in Computational and Applied Mathematics, 2021.
- [22] Teman, R. **Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis**. Springer: New York:American Mathematical Society, NY, USA, 2001.
- [23] Uzunca, M., Karasozen, B **Energy Stable Model Order Reduction For the Allen-Cahn Equation. In Model Reduction of Parametrized Systems**. Springer, 2017.
- [24] Zemskov, E. P., Loskutov, A. **Exact Analytical Solutions For Nonlinear Waves in the Inhomogeneous Fisher-Kolmogorov Equation** . The European Physical Journal B, 2010.