

CRISTIANE DUARTE NASCIMENTO ARAÚJO

SOBRE PONTOS PERIÓDICOS DE FUNÇÕES DO INTERVALO E DO
DISCO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

A663 Araújo, Cristiane Duarte Nascimento, 1989-
2015 Sobre pontos periódicos de funções do intervalo e do disco
/ Cristiane Duarte Nascimento Araújo. – Viçosa, MG, 2015.
x, 96f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Walter Teófilo Huaraca Vargas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.95-96.

1. Matemática. 2. Entropia topológica algébrica.
3. Sarkovskii, Teorema de. I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em
Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514

CRISTIANE DUARTE NASCIMENTO ARAÚJO

SOBRE PONTOS PERIÓDICOS DE FUNÇÕES DO INTERVALO E DO DISCO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de março de 2015.

Enoch Humberto Apaza Calla

Kennedy Martins Pedroso

Walter Teofilo Huaraca Vargas
(Orientador)

Dedico este trabalho aos meus amados pais.

*”O valor de nossas expectativas
sempre significa algo entre o melhor
que podemos esperar e o pior que
podemos temer”.*

Jacob Bernoulli

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus, por ter me dado saúde no decorrer desses anos. Aos meus pais, Roseclair e Antônio, por terem me apoiado nas escolhas da minha vida, começando pela graduação longe de casa e agora por mais essa etapa. À minha irmã, Priscilla, que mesmo de longe conseguiu ser aquela amiga que sempre que precisava estava lá. Ao meu primo Luiz Gustavo que incentivou minha 'vida matemática'. E a toda a minha família, que em todos esses anos me fizeram falta, em especial, minha avó Luzia.

Ao professor Walter pela forma com qual me orientou, dando-me autonomia para realizar este trabalho, e além disso, o apoio em momentos pessoais.

Aos professores de graduação pelo incentivo dado para que eu ingressasse no mestrado, em especial, Jorge e Sílvio.

Aos professores do DMA-UFV, em especial ao Rogério e ao Enoch, que participaram do início ao fim dessa etapa.

À minha turma, que com o passar do tempo se tornou mais do que isso; meus amigos, minha família. Ao Flávio pelo companheirismo durante esses dois anos, que tornou-se indispensável nos estudos e durante esta caminhada. Ao clube da Luluzinha: Sabrina, Lizeth, Priscila, pelos encontros de sextas e as sessões de terapia. Ao Lázaro e Gleison por todas gargalhadas. Ao João, que aguentou muitas reclamações e sempre ajudou a melhorar o humor, seja com piadinhas ruins ou com chocolates/doces. E a todos os meus amigos, àqueles que torceram por mim de perto e de longe.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido durante o mestrado.

Enfim, a todos que contribuíram e compartilharam para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	3
1.1 Sistemas Dinâmicos	3
1.1.1 Órbita	4
1.1.2 Pontos Periódicos	5
1.1.3 ω -limite e α -limite	8
1.1.4 Conjunto Estável	12
1.1.5 Resultados Básicos de Cálculo	15
1.1.6 Propriedades de Pontos Periódicos	19
1.1.7 Análise Gráfica	21
1.1.8 Período três e o caos	25
1.2 Entropia Topológica	28
1.2.1 Definição via coberturas	28
1.2.2 Definição de Dinaburg e Rufus Bowen	37
1.2.3 Equivalência entre as Definições	37
2 TEOREMA DE SARKOVSKII	41
2.1 Questionamentos iniciais	41

2.2	Ordenação de Sarkovskii	47
2.3	O Teorema	50
2.4	Exemplo	59
3	ENTROPIA TOPOLÓGICA E PONTOS PERIÓDICOS	68
3.1	Primeiros resultados	68
3.2	Entropia topológica e pontos periódicos	77
4	SOBRE UMA CONJECTURA DE SMALE	82
4.1	Sobre a conjectura	82
4.2	O Exemplo	83
	Referências Bibliográficas	95

Lista de Figuras

1.1	$f(x) = -x^3$	7
1.2	Pontos entre -1 e 1 são assintoticamente fixos e o restante tendem ao infinito.	8
1.3	$f(x) = x - 1 $	14
1.4	$f([a, b]) \supset [a, b]$	17
1.5	$f([a, b]) \subset [a, b]$	17
1.6	Aplicação Tenda, T	20
1.7	T^2	21
1.8	Análise Gráfica.	22
1.9	$f(x) = x^3$	23
1.10	$f(x) = \sqrt{x}$	23
1.11	Gráfico preto representa f e o azul f^2	24
1.12	Órbita periódica de período 2.	24
1.13	Órbitas tendendo para órbita periódica de período 2.	25
1.14	Subcobertura.	29
2.1	Gráfico de f	45
2.2	O grafo de Markov associado à um ponto periódico de período 3.	52
2.3	O grafo de Markov associado à um ponto periódico de período ímpar.	54
2.4	$f(I_1) \supset I_2$	59
2.5	$f(I_2) \supset I_1 \cup I_2$	59
2.6	Grafo de Markov de f	60
2.7	Órbita periódica de período 2 do ponto $\frac{1}{3}$	62

2.8	Órbita periódica de período 3 do ponto 0.	62
2.9	Órbita periódica de período 4 do ponto $\frac{2}{9}$	63
2.10	Órbita periódica de período 5 do ponto $\frac{2}{15}$	63
2.11	Órbita periódica de período 6 do ponto $\frac{2}{11}$	63
2.12	Órbita periódica de período 6 do ponto $\frac{3}{5}$	63
2.13	Gráfico de f	64
2.14	Gráfico de f	66
2.15	$f(x) = -x + 3$	67
4.1	Disco D_n^i	84
4.2	Disco D_n^i com eixo diametral orientado.	84
4.3	Disco D_n^i com eixo diametral orientado com discos deletados.	84
4.4	Disco D_n^i com o círculo de raio $\frac{2}{3}r_n$	85
4.5	Disco D_n^i com o anel A_n^i representdo.	85
4.6	Disco D_n^i com os dois discos removidos, ou seja, B_n^i	85
4.7	D_0^1	86
4.8	D_1^1 e D_1^2 no 'buracos' de B_0^1	86
4.9	$D_1^1, D_1^2, D_2^1, D_2^2, D_2^3$ e D_2^4 nos respectivos 'buracos' de B_0^1, B_1^1 e B_1^2	87
4.10	D_2^1	87
4.11	D_2^2	87
4.12	D_2^3	88
4.13	D_2^4	88
4.14	D_0^1	88
4.15	Gráfico de Φ_n	89
4.16	Representação de C_2^1, C_3^1 e C_3^2 . Rotações irracionais.	90
4.17	Representação de $\tilde{B}_0^1$	90

RESUMO

ARAÚJO, Cristiane Duarte Nascimento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2015. **SOBRE PONTOS PERIÓDICOS DE FUNÇÕES DO INTERVALO E DO DISCO**. Orientador: Walter Teofilo Huaraca Vargas.

O objetivo deste trabalho é apresentar a prova de um resultado importante, conhecido como Teorema de Sarkovskii, que afirma: *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua que possui um ponto periódico com período n . Se $n \triangleleft m$, na ordenação de Sarkovskii, então f tem um ponto periódico de período m .* E a prova do seguinte resultado devido a Bowen e Franks, [3]: *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua que possui um ponto periódico de período $n = 2^d m$, onde m é ímpar e $m > 1$. Então, a entropia topológica $h(f) > \frac{1}{n} \log 2$, e existe um K_n (independente de f) tal que, se $r = 2^d k$ e $k \geq K_n$, então f tem, pelo menos, $2^{\frac{r}{n}}$ pontos de período primo r ,* que nos dará uma cota inferior para o número de pontos periódicos. Além disso, apresentar a construção de um difeomorfismo que não possui fontes ou poços periódicos.

ABSTRACT

ARAÚJO, Cristiane Duarte Nascimento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2015. **ABOUT PERIODIC POINTS OF FUNCTIONS OF INTERVAL AND OF DISK.** Adviser: Walter Teofilo Huaraca Vargas.

The objective of this work is to present the proof of an important result known as Sarkovskii's theorem which states: *Let $f : [0.1] \rightarrow [0.1]$ be continuous and have a periodic point with period n . If $n \triangleleft m$, in the Sarkovskii ordering then f has a periodic point of period m .* And the proof the following result due to Bowen and Franks, [3]: *Let $f : [0.1] \rightarrow [0.1]$ be continuous and have a periodic point of period $n = 2^d m$, where m is odd and $m > 1$. Then the topological entropy $h(f) > \frac{1}{n} \log 2$, and there is a K_n (independent of f) such that, if $r = 2^d k$ and $k \geq K_n$, then f has at least $2^{\frac{r}{n}}$ points of prime period r ,* that will give us a lower bound for the number of periodic points. Also, to present build of a diffeomorphism that has no periodic sources or sinks.

INTRODUÇÃO

Sistema é um conjunto de objetos agrupados por alguma interação em que existem relações de causa e efeito entre os elementos do conjunto. O sistema é dito dinâmico quando algumas grandezas variam no tempo, grandezas essas que caracterizam seus elementos constituintes. Não se trata de encontrar soluções exatas para as equações que definem este sistema dinâmico (que normalmente é difícil), mas sim para responder a perguntas como "Ao longo do tempo, o sistema vai se estabilizar e se isso acontecer, o que será possível afirmar?" ou "Vai variar o estado do sistema ao longo do tempo, se as condições iniciais mudarem, o que acontece?"

Considere o sistema dinâmico definido por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, digamos que um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto periódico de período n se $f^n(x) = x$ e $f^k(x) \neq x$, para $k = 1, 2, \dots, n-1$, onde f^n é a composição de f com ela mesma n vezes. Alguns questionamentos interessantes são 'será que dada uma função contínua sempre possui ponto periódico?' e 'será que a existência de um ponto periódico de um período qualquer, implica a existência de outro ponto periódico de outro período?'. Para responder o primeiro basta tomarmos o exemplo da função $f(x) = x + 1$, onde $f^n(x) = x + n$, daí podemos concluir que f não possui nenhum ponto periódico. Já o segundo e outros questionamentos em relação a existência de pontos periódicos foram respondidos por Sarkovskii, no ano de 1964, quando apresentou um importante teorema, em [21], que afirma se uma função contínua possui um ponto periódico de período n , então possui um ponto periódico de período m , onde m é maior que n em uma certa ordem que recebe o nome de Ordenação de Sarkovskii, que basicamente é da seguinte forma reordenando os números naturais, primeiro listam os números ímpares em ordem crescente, exceto o 1; depois listam os ímpares vezes 2, exceto 1; novamente listam todos os ímpares vezes 2^2 , exceto 1; listam todos os ímpares vezes 2^3 , exceto 1, e assim por diante, depois listam todas as potências de 2 em ordem decrescente, finalizando com o $1 = 2^0$.

Apesar do Teorema de Sarkovskii nos dar a existência de pontos periódicos, somente com o resultado não podemos identificar quantos pontos periódicos de cada período a função possui. Em [3], Bowen e Franks apresentaram um resultado que representa uma cota superior para a entropia topológica de uma classe de funções do intervalo e uma cota para a quantidade de pontos periódicos da função de um certo período.

Smale, em 1962, em [22], fez a seguinte conjectura se: *f é um difeomorfismo Kupka-Smale sobre S^2 sem fontes ou poços periódicos, então f possui pelo menos um ponto elíptico.* A resposta a esta conjectura é negativa e será dada usando dois discos como no Teorema do Capítulo 4 e tomando um disco com um fluxo, outro com o inverso

desse fluxo e os colando pela fronteira, produzindo um difeomorfismo Kupka-Smale sobre S^2 sem fontes ou poços periódicos. A construção desse exemplo foi apresentada por Bowen e Franks, [3].

A seguir, descreveremos o roteiro de nossa dissertação.

No Capítulo 1 estudaremos algumas definições e teoremas importantes que utilizaremos no restante do trabalho, tanto para o entendimento quanto para o desenvolvimento. Primeiramente, definiremos e provaremos algumas propriedades de Sistema Dinâmicos relacionadas com pontos periódicos. Posteriormente, apresentaremos o conceito de Entropia Topológica.

No Capítulo 2, apresentaremos uma prova que realmente é uma ordenação total a ordenação definida por Sarkovskii e provaremos o *Teorema de Sarkovskii*.

No Capítulo 3, apresentaremos a prova do teorema, que enunciaremos a seguir, devido a Bowen e Franks em [3].

Teorema: *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua que possui um ponto periódico de período $n = 2^d m$, onde m é ímpar e $m > 1$. Então,*

- (1) *a entropia topológica $h(f) > \frac{1}{n} \log 2$,*
- (2) *existe um K_n (independente de f) tal que, se $r = 2^d k$ e $k \geq K_n$, então f tem, pelo menos, $2^{\frac{r}{n}}$ pontos de período primo r .*

No Capítulo 4, estudaremos a construção de um C^1 -difeomorfismo de D^2 para responder à conjectura de Smale citada acima. A construção desse difeomorfismo também é devida a Bowen e Franks, em [3].

Este trabalho foi baseado no artigo escrito por Rufus Bowen e John Franks, publicado em 1976, intitulado The periodic points of maps of the disk and the interval, [3].

Capítulo 1

PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é expor alguns conceitos básicos e resultados conhecidos que usaremos como ferramentas nos capítulos seguintes. Nas definições a seguir, consideremos funções definidas em um espaço métrico, tal que a imagem da função é um subconjunto do seu domínio, para podermos fazer várias iterações, ou seja, composta com ela mesma. As principais referências deste capítulo são: [1], [5], [6], [7], [8], [10], [15], [16], [17], [18], [19], [20] e [25].

1.1 Sistemas Dinâmicos

Um **sistema dinâmico** consiste em um conjunto de componentes interconectadas que variam no tempo e que possui propriedades descritivas do sistema. Em linguagem matemática, é uma função $f : X \rightarrow X$, cuja a dinâmica (a passagem do tempo) é vista como sendo a composição dessa função. Em geral, X é um espaço métrico e f uma função contínua.

A descrição da evolução de um sistema pode ser feita por um conjunto de equações discretas ou contínuas, que assim constituirá a lei que determinará o comportamento futuro, global ou parcial a partir do estado inicial (Moreira, 1992, em [18]).

Podemos classificar os sistemas dinâmicos pelo parâmetro de evolução, em:

- **Discretos no tempo:** Seja $x_1 = f(x_0)$, o estado x_1 é o resultado obtido a partir do estado inicial x_0 . Assim, a função que descreve isto é chamada de *aplicação* e o processo de cálculo de um sistema discreto chama-se *iteraões*;
- **Contínuos no tempo:** O fluxo gerado pelo campo vetorial $x(t) = f(x_0, t)$, que determina o estado seguinte no instante t caracteriza o caso contínuo, onde as variáveis dependentes e o tempo são contínuas. E o que descreve isto é um conjunto de *equações diferenciais*, caso não tenha variáveis independentes, são chamadas as equações diferenciais ordinárias, caso possua, são chamadas as equações diferenciais parciais.

Em nosso trabalho iremos trabalhar com *Sistema Dinâmico Discreto no tempo: aplicação*.

Um sistema dinâmico discreto $f : X \longrightarrow X$, onde X é um espaço métrico, pode ser definido por

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Ou seja, com a equação a cima temos o estado x_{n+1} do sistema no tempo $n + 1$, uma vez que seu estado x_n no tempo n é conhecido.

1.1.1 Órbita

Seja uma função $f : X \longrightarrow X$, onde X é um espaço métrico. As *iterações* de $x \in X$ sob a função f são:

$$\begin{aligned} f^0(x) &= x \\ f^1(x) &= f(x) \\ f^2(x) &= (f \circ f)(x) \\ f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) \\ &\vdots \\ f^n(x) &= \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x) = (f \circ f^{n-1})(x) = f(f^{n-1}(x)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde $f^n(x)$ denota a n -ésima iteração de x sob a função f e o conjunto

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

descreve toda a evolução do estado x no tempo.

Um **sistema dinâmico discreto** é definido pelo par (X, f) .

Definição 1.1.1. *Sejam um espaço métrico X e $f : X \longrightarrow X$. A **órbita** de $x_0 \in X$ em relação a f é o conjunto que descreve a evolução de x , ou seja, $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} = \{f^n(x_0); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, e o denotaremos por $O_f(x_0)$.*

A órbita de x_0 descreve as diferentes posições de x_0 com o passar do tempo, ou seja, inicia-se no ponto x_0 e depois de percorrer n unidades de tempo teremos $f^n(x_0)$.

Exemplo 1.1.2. *Seja*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

Temos em $x = 0$, a seguinte evolução

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f^2(0) &= f(f(0)) = f(1) = 3 \\
f^3(0) &= f(f^2(0)) = f(3) = 7 \\
f^4(0) &= f(f^3(0)) = f(7) = 15 \\
f^5(0) &= f(f^4(0)) = f(15) = 31 \\
f^6(0) &= f(f^5(0)) = f(31) = 63 \\
f^7(0) &= f(f^6(0)) = f(63) = 127 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, a órbita de $x = 0$ sob f é $O_f(0) = \{1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots\}$.

1.1.2 Pontos Periódicos

Algumas vezes um ponto $x_0 \in X$ depois de um número de iterações volta a ser ele mesmo, ou seja, depois de n unidades de tempo x_0 volta a sua posição inicial, falando matematicamente, $f^n(x_0) = x_0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Acontecendo isto, o movimento da órbita de x_0 começa a repetir. Assim, podemos definir pontos periódicos e fixos, que são muito importantes no estudo dos sistemas dinâmicos.

Definição 1.1.3. *Sejam um espaço métrico X e $f : X \rightarrow X$. Dizemos que $x_0 \in X$ é:*

- (a) **Ponto fixo** de f se $f(x_0) = x_0$;
- (b) **Ponto periódico** de f com período n , se

$$\begin{cases} f^n(x_0) = x_0 \\ f^k(x_0) \neq x_0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Exemplo 1.1.4. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$.*

Assim, para $f(x) = x$, temos $x^2 - 2 = x$, consequentemente, $x^2 - x - 2 = 0$.

Logo, $x = -1$ e $x = 2$ são os únicos pontos fixos de f .

De fato, $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ e $f(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.

E ainda, para $f^2(x) = x$, temos $(x^2 - 2)^2 - 2 = x$, consequentemente, $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$.

Logo, $x = -1$, $x = 2$, $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ são pontos fixos de f^2 , e consequentemente, pontos periódicos de período 2 de f , mas -1 e 2 já são pontos fixos de f .

De fato, como $f^2(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ temos,

$$\begin{aligned} f^2\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 2 \\ &= \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 2 \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Para confirmar que os pontos $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ são realmente pontos periódicos de período 2, verifiquemos que $f(x) \neq x$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{-\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Observação 1.1.5. Pontos fixos são pontos periódicos de período 1, já os pontos periódicos de f de período n são pontos fixos da função f^n .

Definição 1.1.6. Sejam um espaço métrico X e $f : X \rightarrow X$. Dizemos que a órbita de $x \in X$ é uma **órbita periódica** se x é um ponto periódico.

Exemplo 1.1.7. Analisando a mesma função do Exemplo 1.1.4, temos que os pontos $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ são pontos periódicos de período 2 de f .

Então, temos as seguintes órbitas periódicas:

$$O_f\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) = \left\{ \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\},$$

e

$$O_f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right\}.$$

Definição 1.1.8. *Sejam um espaço métrico X e $f : X \rightarrow X$. Dizemos que $x \in X$ é:*

(a) **Ponto assintoticamente fixo** se existe um ponto fixo $x_0 \in X$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0.$$

(b) **Ponto assintoticamente periódico** se existe um ponto periódico p de período k , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p.$$

Da Definição 1.1.8 temos que se a órbita de x converge para um ponto fixo, então, x é um ponto assintoticamente fixo e, se x é um ponto assintoticamente periódico com período k , sua órbita tem k subsequências convergentes.

Exemplo 1.1.9. *Seja*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = -x^3. \end{aligned}$$

E o gráfico de f é

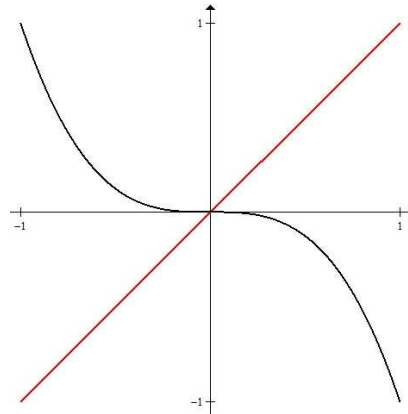


Figura 1.1: $f(x) = -x^3$.

Verifiquemos quais são os pontos fixos e periódicos de f .

Para encontrarmos os pontos fixos, fazemos $f(x) = x$, então $-x^3 = x$, consequentemente, $-x^3 - x = 0$.

Logo, $x = 0$ é um ponto fixo de f , e assim, temos $O_f(0) = \{0\}$.

Iterando a função f , temos

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 \\ f^2(x) &= -(-x^3)^3 = x^9 \\ f^3(x) &= -(x^9)^3 = -x^{27} \\ &\vdots \\ f^n(x) &= (-1)^n x^{3^n} \end{aligned}$$

Para $f^2(x) = x$, ou seja, $x^9 = x$, temos que os pontos $x = 1$ e $x = -1$ são pontos fixos de f^2 , logo, pontos periódicos de período 2, assim, $O_f(1) = \{1, -1\}$ e $O_f(-1) = \{-1, 1\}$.

E ainda,

- Se $|x| < 1$, então $|f^n(x)| \rightarrow 0$, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n x^{3^n}| = 0$, ou seja, os pontos x , tal que $-1 < x < 1$, são assintoticamente fixos, e
- Se $|x| > 1$, então $|f^n(x)| \rightarrow \infty$.

O que podemos observar na Figura 1.2.

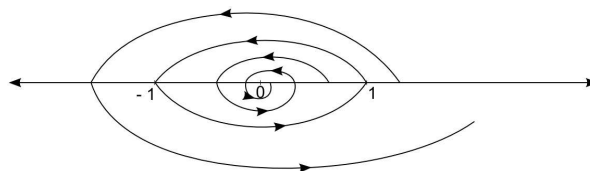


Figura 1.2: Pontos entre -1 e 1 são assintoticamente fixos e o restante tendem ao infinito.

1.1.3 ω -limite e α -limite

Seja uma órbita $O_f(x)$, então podemos procurar os seus pontos de acumulação, ou seja, aqueles pontos que a órbita passará em torno deles uma infinidade de vezes. O conjunto formado por esses pontos de acumulação é conhecido como o ω -limite de x e é denotado por $\omega(x)$. Dizemos que $z \in \omega(x)$ se existe uma sequência infinita e crescente de números naturais $n_1, n_2, \dots$, ou simplesmente $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tal que limite de $d(f^{n_i}(x), z)$ quando i tende ao ∞ é nulo, ou seja, $\omega(x) = \{z ; f^{n_i}(x) \rightarrow z\}$.

Podemos falar também no ω -limite de um conjunto,

$$\omega(X) := \{\omega(x) \text{ para todo } x \in X\}.$$

Se a função f for uma bijeção, assim tem uma inversa, podendo então pensar na órbita de um ponto voltando no tempo e, de forma análoga à ω -limite, procuremos saber quais são os pontos de acumulação de uma órbita quando o tempo caminha no sentido contrário. O conjunto desses pontos é o que chamamos de α -limite de um ponto, denotado por $\alpha(x)$. Dizemos que $y \in X$ está em $\alpha(x)$ se existe uma sequência infinita e decrescente de números inteiros negativos $m_1, m_2, \dots$ tal que limite de $d(f^{m_i}(x), y)$ quando i tende ao ∞ , ou seja, $\alpha(x) = \{y ; f^{m_i}(x) \rightarrow y\}$.

E, novamente, podemos falar no α -limite de um conjunto,

$$\alpha(X) := \{\alpha(x) \text{ para todo } x \in X\}.$$

Agora, definiremos uma ferramenta para estudarmos as propriedades dos conjuntos limites.

Definição 1.1.10. *Sejam $x \in \mathbb{R}^m$ e S subconjunto de $\mathbb{R}^m$.*

Definimos ρ da seguinte maneira:

$$\rho(x, S) := \inf\{|y - x| ; y \in S\}.$$

Dizemos que x_n aproxima-se de S se $\rho(x_n, S)$ tende a 0, quando n tende ao ∞ , onde x_n é uma sequência de $\mathbb{R}^m$.

Proposição 1.1.11. *Seja $x \in \mathbb{R}^m$. Então,*

$$\omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}.$$

Demonstração:

Se $z \in \omega(x)$, então existe uma sequência infinita e crescente $n_i \in \mathbb{N}$ tal que f^{n_i} tende a z , quando i tende ao ∞ .

Logo, existe $n_{i_0} \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $i_0 > j$, para $j \in \mathbb{N}$.

Assim, $f^{n_i}(x)$, com $n_i \geq n_{i_0}$, converge para z e é uma subsequência de $f^n(x)$, com $n \geq j$.

Logo, $z \in \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então, $z \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}$, ou seja, $\omega(x) \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}$.

Provemos então, a outra inclusão.

Sejam $A_j = \bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)$ e $z \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{A_j}$.

Então, $z \in \overline{A_0}$.

Logo, existe uma sequência em A_0 que converge para z .

Seja $z_0 = f^{n_0}(x)$ um termo desta sequência tal que $|z - z_0| < 1$, para algum $n_0 \geq 0$.

Como $z \in \overline{A_{n_0+1}}$, existe uma sequência em A_{n_0+1} que converge para z .

Seja $z_1 = f^{n_1}(x)$ um termo desta sequência tal que $|z - z_1| < \frac{1}{2}$, para algum $n_1 \geq n_0 + 1 > 0$.

Como $z \in \overline{A_{n_1+1}}$, existe uma sequência em A_{n_1+1} que converge para z .

Seja $z_2 = f^{n_2}(x)$ um termo desta sequência tal que $|z - z_2| < \frac{1}{2^2}$, para algum $n_2 \geq n_1 + 1 > 0$.

E prosseguindo este processo, criamos uma sequência $z_k \in \mathbb{R}^m$ tal que $|z - z_k| < \frac{1}{2^k}$, onde $z_k = f^{n_k}(x)$ e $n_k > n_{k-1}$, pois $n_k \geq n_{k-1} + 1$, logo, n_k é estritamente crescente.

Então, $z_k = f^{n_k}(x)$ tende a z e n_k tende ao ∞ quando k tende ao ∞ , ou seja, $z \in \omega(x)$, o que significa que $\omega(x) \supset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}$.

Portanto, $\omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}$.

□

As propriedades a seguir também podem ser definidas para $\alpha(x) = \bigcap_{j=0}^{-\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{-\infty} f^n(x)}$ e suas demonstrações são análogas.

Definição 1.1.12. *Seja H um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ e seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. H é dito **positivamente invariante** (com respeito ao operador T) se $T(H) \subset H$, isto é, se $x \in H$ então $T(x) \in H$. E H é dito **negativamente invariante** (com respeito ao operador T) se $T(H) \supset H$, isto é, para todo $y \in H$ existe $x \in H$ tal que $T(x) = y \in H$.*

Teorema 1.1.13. *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, então $\omega(x)$ é fechado e positivamente invariante.*

Demonstração:

Como $\omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}$, então $\omega(x)$ é fechado, pois o fecho de qualquer conjunto de $\mathbb{R}^n$ é fechado.

Mostremos agora, que $\omega(x)$ é invariante positivamente, ou seja, $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$.

$$\begin{aligned}
 f(\omega(x)) &= f\left(\bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}\right) \\
 &\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} f\left(\overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)}\right) \\
 &\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{f\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x)\right)} \\
 &\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f(f^n(x))} \\
 &\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} f^{n+1}(x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j+1}^{\infty} f^n(x)} \\
&\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} f^n(x) = \omega(x)
\end{aligned}$$

□

Propriedade 1.1.14. *Se existe $W \subset \mathbb{R}^m$ compacto tal que $f^n(x) \in W$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, se $f^n(x)$ for limitada, então $\omega(x)$ tem as seguintes propriedades:*

- (i) $\omega(x)$ é não vazio;
- (ii) $\omega(x)$ é compacto;
- (iii) $\omega(x)$ é invariante;
- (iv) $\omega(x)$ é o menor conjunto fechado que $f^n(x)$ se aproxima quando n tende ao ∞ .

Demonstração:

- (i) Como $f^n(x)$ é limitada, existe uma subsequência convergente de $f^n(x)$, então $\omega(x) \neq \emptyset$.

- (ii) Seja $z \in \omega(x)$.

Então, existe uma sequência infinita e crescente $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_i}(x)$ tende a z , quando i tende ao ∞ .

Como $f^n(x)$ é limitada, existe $\delta > 0$, tal que $|f^n(x)| \leq \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

E ainda, como $|f^n(x)| \leq \delta$, temos que, $\lim_{n_i \rightarrow \infty} |f^{n_i}(x)| = |\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x)| \leq \delta$.

Daí, $|z| \leq \delta$.

Assim, $\omega(x)$ é limitado.

Pelo Teorema 1.1.13, $\omega(x)$ é fechado.

Portanto, $\omega(x)$ é compacto.

- (iii) Pelo Teorema 1.1.13 já sabemos que $\omega(x)$ é positivamente invariante, então nos resta mostrar que $\omega(x)$ é negativamente invariante, ou seja, $\omega(x) \subset f(\omega(x))$.

Seja $y \in \omega(x)$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_i}(x)$ tende a y .

Como $f^n(x)$ é limitada, então $f^{n_i-1}(x)$ também é limitada, logo, existe $f^{n_{i_k}-1}(x)$ tende a $z \in \omega(x)$.

Por f ser contínua, temos

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_{i_k}}(x) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} f(f^{n_{i_k}-1}(x)) \\
&= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_{i_k}-1}(x)\right) \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

Logo, $\omega(x) \subset f(\omega(x))$.

Portanto, $\omega(x)$ é invariante.

(iv) Como $\omega(x)$ é limitado, então $\rho(f^n(x), \omega(x))$ é limitada.

Seja $r_n := \rho(f^n(x), \omega(x))$.

Suponhamos, por absurdo, que $f^n(x)$ não se aproxima de $\omega(x)$ quando n tende ao ∞ .

Então, existe uma sequência $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que r_{n_i} não converge para 0.

Como r_n é limitada, assumimos que r_{n_i} tende a r , onde $r > 0$.

Mas, $f^n(x)$ é limitada, então existe uma sequência convergente $f^{n_{i_j}}(x)$ que tende a $z \in \omega(x)$.

Logo, como $\lim_{j \rightarrow \infty} r_{n_{i_j}} = r$, temos que, $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f^{n_{i_j}}(x), \omega(x)) = r$.

Daí, $\rho(z, \omega(x)) = r > 0$. O que é uma contradição, pois se $z \in \omega(x)$, então deveríamos ter $\rho(z, \omega(x)) = 0$.

Então, $f^n(x)$ se aproxima de $\omega(x)$ quando n tende ao ∞ .

Agora, nos resta mostrar que $\omega(x)$ é o menor conjunto fechado que $f^n(x)$ se aproxima quando n tende ao ∞ .

Seja $E \subset \mathbb{R}^m$ fechado tal que $f^n(x)$ tende a E , quando n tende ao ∞ .

Seja $z \in \omega(x)$, então existe uma sequência infinita crescente $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_i}(x)$ tende a z .

Logo, $\rho(f^{n_i}(x), E)$ tende a $\rho(z, E)$, mas $\rho(f^{n_i}(x), E)$ tende a 0, pois $f^n(x)$ tende a E quando n tende ao ∞ .

Assim, $\rho(z, E) = 0$, o que implica $z \in E$, pois E é fechado.

Portanto, $\omega(x)$ é o menor conjunto fechado que f^n se aproxima quando n ao ∞ .

□

Exemplo 1.1.15. *Um exemplo simples de um ω -limite é uma órbita periódica.*

Qualquer órbita periódica de uma aplicação é um ω -limite de qualquer um dos pontos na órbita para essa aplicação.

1.1.4 Conjunto Estável

Definição 1.1.16. *Seja um espaço métrico X e $f : X \rightarrow X$. O conjunto estável de um ponto periódico $p \in X$ com período k é*

$$W^s(p) = \{x \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p\}.$$

Observação 1.1.17. Em particular, quando $X = \mathbb{R}$ e se $|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, \dots$ não é limitado superiormente, então dizemos que x converge assintoticamente para ∞ . Neste caso, o conjunto estável é

$$W^s(\infty) = \{x \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty\}.$$

Proposição 1.1.18. Seja um espaço métrico X com a métrica d e $f : X \rightarrow X$. Sejam $p, q \in X$ pontos periódicos de f , com $p \neq q$. Então, $W^s(p) \cap W^s(q) = \emptyset$.

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que $W^s(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$.

Assim, queremos mostrar que $p = q$.

Seja $x \in W^s(p) \cap W^s(q)$, então existe constantes c_1 e c_2 tal que

$$\begin{aligned} d(f^{nk_p}(x), p) &< \frac{\epsilon}{2}, \text{ se } n > c_1 \text{ e} \\ d(f^{nk_q}(x), q) &< \frac{\epsilon}{2}, \text{ se } n > c_2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(p, q) \\ &\leq d(p, f^{nk_q k_p}(x)) + d(q, f^{nk_p k_q}(x)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

se $n > c$, onde $c = \max\{c_1, c_2\}$.

Então, $0 \leq d(p, q) < \epsilon$ e assim, $p = q$, o que contradiz a hipótese.

Portanto, $W^s(p) \cap W^s(q) = \emptyset$.

□

Exemplo 1.1.19. Seja a aplicação $f(x) = |x - 1|$, assim, temos que o gráfico de f é como na Figura 1.3.

O único ponto fixo de f é o ponto $x = \frac{1}{2}$, pois $|x - 1| = x$, implica que, $x - 1 = -x$, e daí, $x = \frac{1}{2}$.

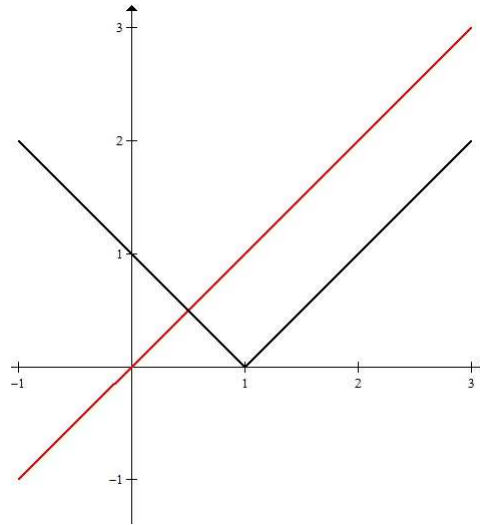
E ainda, $f(0) = 1$ e $f^2(0) = f(f(0)) = f(1) = 0$, assim, $O_f(0) = \{1, 0\}$ e, analogamente, $O_f(1) = \{0, 1\}$.

Logo, 0 e 1 são pontos periódicos de período 2.

Se analisarmos o ponto $x = 2$, temos que $O_f(2) = \{2, 1, 0, 1, 0, \dots\}$.

Agora, $x = 3$, temos que $O_f(3) = \{3, 2, 1, 0, 1, 0, \dots\}$.

E $x = 4$, temos que $O_f(4) = \{4, 3, 2, 1, 0, 1, 0, \dots\}$.

Figura 1.3: $f(x) = |x - 1|$.

Fazendo isso sucessivamente temos que as órbitas dos números inteiros sempre caem na órbita de $\{0, 1\}$ depois de um número de iterações.

Como 0 e 1 são pontos periódicos de período 2, podemos calcular os conjuntos estáveis deles, ou seja,

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \{x \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x) = 0\} \text{ e} \\ W^s(1) &= \{x \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x) = 1\}. \end{aligned}$$

Assim, tomando a subsequência $f^{2n}(x) = \{x, f^2(x), f^4(x), f^6(x), \dots\}$ para analisar os conjuntos estáveis, temos que para os números inteiros ímpares esta subsequência converge para $x = 1$, por exemplo, para $x = 15$, $x = 7$ e $x = 5$ temos,

$$\begin{aligned} f^{2n}(15) &= \{15, f^2(15), f^4(15), f^6(15), f^8(15), \dots\} = \{15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 1, \dots\} \rightarrow 1 \\ f^{2n}(7) &= \{7, f^2(7), f^4(7), f^6(7), \dots\} = \{7, 5, 3, 1, 1, 1, \dots\} \rightarrow 1, \\ f^{2n}(5) &= \{5, f^2(5), f^4(5), f^6(5), \dots\} = \{5, 3, 1, 1, 1, \dots\} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

e para os números inteiros pares a subsequência converge para $x = 0$, por exemplo, para $x = 16$, $x = 8$ e $x = 6$ temos

$$\begin{aligned} f^{2n}(16) &= \{16, f^2(16), f^4(16), f^6(16), f^8(16), \dots\} = \{16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, 0, \dots\} \rightarrow 0 \\ f^{2n}(8) &= \{8, f^2(8), f^4(8), f^6(8), f^8(8), \dots\} = \{8, 6, 4, 2, 0, 0, 0, \dots\} \rightarrow 0. \\ f^{2n}(6) &= \{6, f^2(6), f^4(6), f^6(6), f^8(6), \dots\} = \{6, 4, 2, 0, 0, 0, \dots\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} W^s(0) &\supseteq \{\text{os números inteiros pares}\} \\ W^s(1) &\supseteq \{\text{os números inteiros ímpares}\}. \end{aligned}$$

1.1.5 Resultados Básicos de Cálculo

Em quase todos os casos consideramos funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) .

Primeiramente, relembremos um teorema que usaremos a seguir.

Teorema 1.1.20. *Teorema do Valor Intermediário*

Suponhamos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Seja y_0 um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$, tal que $f(x_0) = y_0$.

Demonstração:

Seja $S = \{x \in [a, b] ; f(x) < y_0\}$. Logo, S é não vazio, pois $a \in S$ e é limitado superiormente, pois b é cota superior de S .

Sejam $x_0 = \sup S$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que x_n tende a x_0 .

Assim, $f(x_n) = y_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e como f é contínua em x_0 , temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Logo, $f(x_0) \leq y_0$ e $x_0 < b$.

Suponhamos que $f(x_0) < y_0$, então, pela continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $x \in [a, b]$ e $|x - x_0| < \delta$, então $f(x) < y_0$.

Como $x_0 < b$ podemos tomar $x \in [a, b]$ com $x_0 < x < x_0 + \delta$ para obter $f(x) < y_0$. Isto implica que $x \in S$ e $x > x_0 = \sup S$, o que é um absurdo.

Portanto, $f(x_0) = y_0$.

□

O Teorema 1.1.20 afirma que a função contínua assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ no intervalo $[a, b]$. Uma consequência imediata é:

Teorema 1.1.21. *Teorema do Ponto Fixo*

Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ contínua. Então f tem um ponto fixo em $[a, b]$.

Demonstração:

Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, então não temos nada a mostrar.

Então, suponhamos que $f(a) > a$ e $f(b) < b$.

Agora, consideremos a função $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ definida por $g(x) = x - f(x)$, que é contínua, pois é uma soma de duas funções contínuas.

Assim,

$$g(a) = a - f(a) < 0 \text{ e } g(b) = b - f(b) > 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.1.20), então existe um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$.

O que implica que $g(x_0) = 0$, assim, $x_0 - f(x_0) = 0$, e daí, $f(x_0) = x_0$.

Portanto, f tem um ponto fixo em $[a, b]$.

□

O Teorema do Ponto Fixo garante a existência de pelo menos um ponto fixo no intervalo, podendo existir outros.

Exemplo 1.1.22. Repare que a função $f(x) = x$, todos os pontos no intervalo $[a, b]$ são fixos.

Exemplo 1.1.23. Seja a função $f(x) = x^2$, repare que f leva o intervalo $(0, 1)$ nele mesmo, mas não possui nenhum ponto fixo, pois se $x^2 = x$, temos que, $x^2 - x = 0$, logo, os pontos $x = 0$ e $x = 1$ são pontos fixos da função f , mas estão fora do intervalo $(0, 1)$.

Observação 1.1.24. É importante que o intervalo $[a, b]$ seja fechado, pois podemos ter casos como do Exemplo 1.1.23.

Deste modo temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.25. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se a imagem de f contém $[a, b]$, ou seja, $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f tem um ponto fixo em $[a, b]$.

Demonstração:

Seja f contínua em $[a, b]$.

Como, por hipótese, $f([a, b]) \supset [a, b]$, então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) = a \quad \text{e} \quad f(x_2) = b.$$

Então, se $x_1 = a$ ou $x_2 = b$, ou a ou b são pontos fixos.

Mas, se $x_1 \neq a$ e $x_2 \neq b$, temos $a < x_1 < b$ e $a < x_2 < b$.

Agora, consideremos a função $g(x) = f(x) - x$.

Logo,

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(x_1) - x_1 \\ g(x_2) &= f(x_2) - x_2 \end{aligned} \quad .$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(x_1) &= a - x_1 < 0 \\ g(x_2) &= b - x_2 > 0 \end{aligned} \quad .$$

Como $g(x_1) < 0$ e $g(x_2) > 0$ e g é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x \in [x_1, x_2] \subset [a, b]$ tal que $g(x) = 0$, logo, $f(x) - x = 0$, consequentemente, $f(x) = x$.

Portanto, x é um ponto fixo de f .

□

Na Proposição 1.1.25 a condição $f([a, b]) \supset [a, b]$ pode ser mudada para $f([a, b]) \subset [a, b]$ e a conclusão continua sendo válida. Veja Figuras 1.4 e 1.5.

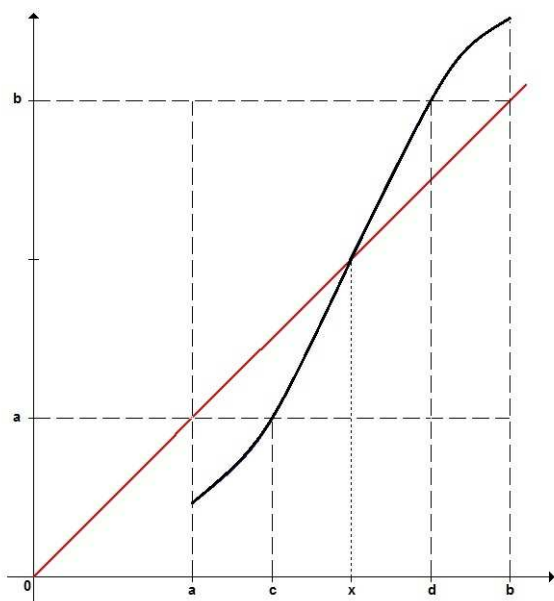


Figura 1.4: $f([a, b]) \supset [a, b]$.

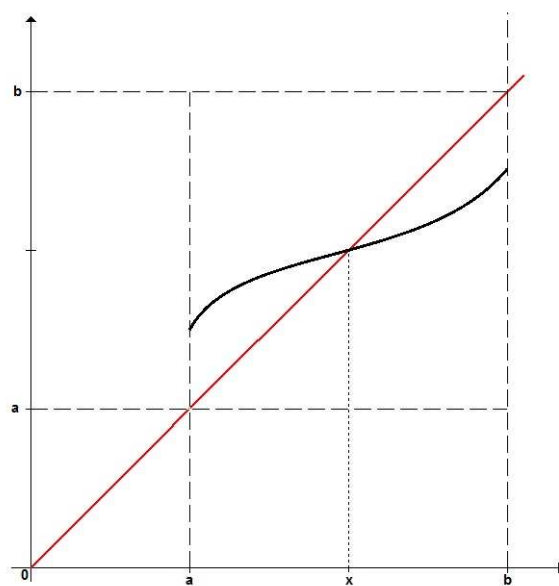


Figura 1.5: $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Uma importante propriedade das funções diferenciáveis é que se encaixem no Teorema do Valor Médio, que segue.

Teorema 1.1.26. *Teorema do Valor Médio*

Seja uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em (a, b) . Então, existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração:

Definamos as funções $S(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, para $x \in [a, b]$, cujo o gráfico é a reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e $g(x) = f(x) - S(x)$, para $x \in [a, b]$, assim, g mede a distância vertical entre os pontos $(x, f(x))$ no gráfico de f e $(x, g(x))$ na reta secante S , para cada $x \in [a, b]$.

- *Afirmção:* $g(a) = g(b) = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - S(a) \\ &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \right] \\ &= f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - S(b) \\ &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right] \\ &= f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] \\ &= f(b) - f(b) = 0. \end{aligned}$$

E como g satisfaz as condições do Teorema de Rolle (g contínua em $[a, b]$, g é diferenciável em (a, b) e $g(a) = g(b)$), então existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, mas $g'(x) = f'(x) - S'(x)$, onde $S'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$\text{Logo, } g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

E para $c \in (a, b)$ temos que $g'(c) = 0$, assim, $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, logo, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$\text{Portanto, } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

□

Pela Proposição 1.1.25 existe pelo menos um ponto fixo, a proposição a seguir, garante a existência de um único ponto fixo em $[a, b]$ quando f for diferenciável.

Proposição 1.1.27. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função diferenciável. Se $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$, então existe um único ponto fixo em $[a, b]$. E mais, para todo $x, y \in [a, b]$ com x e y distintos, temos $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.*

Demonstração:

Seja $x, y \in [a, b]$, com x e y distintos, pelo Teorema do Valor Médio (Teorema 1.1.26), existe um $c \in [x, y]$ tal que $|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x|$.

E, por hipótese, $|f'(c)| < 1$.

Então,

$$|f(y) - f(x)| < |y - x|,$$

demonstrando, assim, a segunda parte da proposição.

Agora, como f é, por hipótese, diferenciável, é contínua e pela Proposição 1.1.25, tem pelo menos um ponto fixo em $[a, b]$.

Seja $x \in [a, b]$ e p um ponto fixo de f em $[a, b]$, com x e p distintos, então,

$$\begin{aligned} |p - f(x)| &= |f(p) - f(x)| \\ &< |p - x|. \end{aligned}$$

Note que, se $f(x) = x$ for outro ponto fixo de f , teríamos $|p - x| < |p - x|$, o que é uma contradição. Logo, $f(x) \neq x$.

Portanto, p é o único ponto fixo de f em $[a, b]$

□

1.1.6 Propriedades de Pontos Periódicos

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um espaço métrico. Agora, consideremos a aplicação $f : X \rightarrow X$ diferenciável.

Definição 1.1.28. Um ponto fixo $p \in X$ de f é chamado de **hiperbólico** se $Df(p)$, onde $Df : TX_p \rightarrow TX_p$, não possui nenhum autovalor no círculo unitário, ou seja, de módulo igual a 1. E então,

- (a) Se todos os autovalores de $Df(p)$ são menores que 1, ou se $\|f'(p)\| < 1$, dizemos que p é um **ponto fixo atrator**;
- (b) Se todos os autovalores de $Df(p)$ são maiores que 1, ou se $\|f'(p)\| > 1$, dizemos que p é um **ponto fixo repulsor**

Definição 1.1.29. Seja p um ponto periódico de f de período n , então p é **hiperbólico** se $Df^n(p)$ não possui autovalores de módulo igual a 1.

Podemos classificar o ponto p hiperbólico tal que $f^n(p) = p$ por:

- (a) **Poço ou ponto periódico atrator:** Se todos os autovalores de $Df^n(p)$ forem menores que 1 em valor absoluto, ou se $\|(f^n(p))'\| < 1$;
- (b) **Fonte ou ponto periódico repulsor:** Se todos os autovalores de $Df^n(p)$ forem maiores que 1 em valor absoluto, ou se $\|(f^n(p))'\| > 1$;
- (c) **Sela:** Se alguns dos autovalores de $Df^n(p)$ forem maiores e alguns forem menores que 1 em valor absoluto.

Exemplo 1.1.30. No Exemplo 1.1.9 tínhamos que 0 é ponto fixo e 1 e -1 são pontos periódicos de período 2.

Então, como $f(x) = -x^3$ temos que $|f'(x)| = 3x^2$.

Logo, $|f'(0)| = 0 < 1$, então 0 é ponto fixo atrator.

Ainda $|f'(1)| = 3$ e $|f'(-1)| = 3$, logo, 1 e -1 são pontos periódicos repulsores, ou simplesmente poços.

Exemplo 1.1.31. *Seja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

*Cuja função é chamada de **Tenda**, a qual o gráfico é a Figura 1.6.*

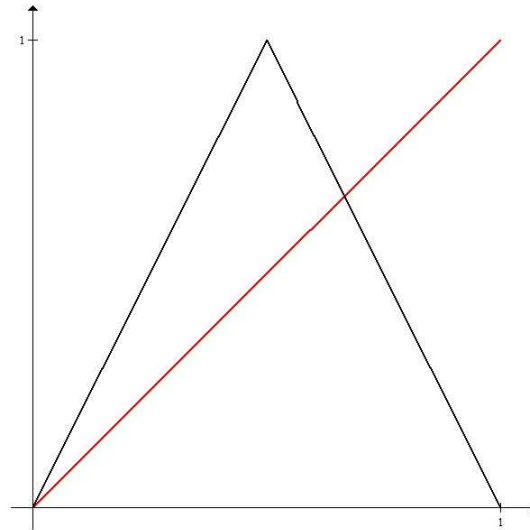


Figura 1.6: Aplicação Tenda, T .

Os pontos 0 e $\frac{2}{3}$ são pontos fixos, pois quando $2x = x$, temos, $x = 0$ e quando $2(1-x) = x$, temos, $2 - 2x = x$, ou seja, $x = \frac{2}{3}$.

E ainda,

$$T'(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2 & , \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

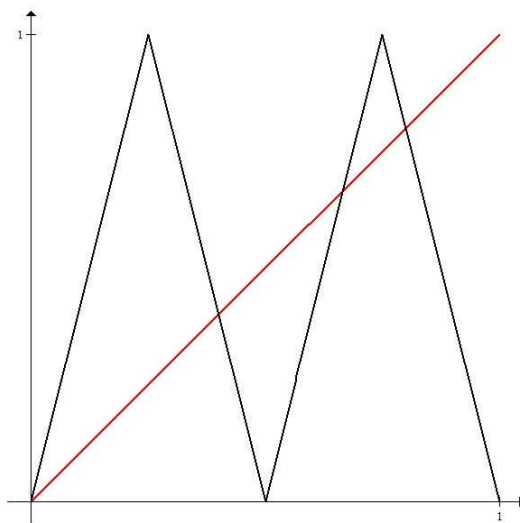
ou seja, $|T'(0)| = 2$ e $|T'(\frac{2}{3})| = -2$.

Logo, os pontos 0 é ponto fixo repulsor e $\frac{2}{3}$ é ponto fixo atrator.

Para encontrarmos os pontos periódicos de período 2, analisamos T^2 , que é dada por

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & , \text{ se } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2(1-2x) & , \text{ se } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(x - \frac{1}{2}) & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & , \text{ se } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Que tem como gráfico a seguinte Figura 1.7.

Figura 1.7: T^2 .

Assim, T^2 tem quatro pontos fixos quando

$$\begin{aligned} 4x &= x \\ 2(1 - 2x) &= x \\ 4(x - \frac{1}{2}) &= x \\ 4(1 - x) &= x \end{aligned},$$

e eles são: $x = 0$, $x = \frac{2}{5}$, $x = \frac{3}{5}$ e $x = \frac{4}{5}$, mas 0 e $\frac{2}{5}$ são pontos fixos de T , então $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$ são pontos periódicos de período 2 de T .

E como,

$$(T^2(x))' = \begin{cases} 4 & , \text{ se } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ -4 & , \text{ se } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4 & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ -4 & , \text{ se } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

temos que $|(T^2(\frac{2}{5}))'| = 4$ e $|(T^2(\frac{4}{5}))'| = 4$, logo, $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$ são pontos periódicos repulsores, ou fonte.

1.1.7 Análise Gráfica

Agora, vamos apresentar um procedimento geométrico que ajudará a entender a dinâmica de funções unidimensionais, que é chamado de *Análise Gráfica* e que permite usarmos o gráfico de uma função para determinarmos o comportamento das órbitas em muitos casos.

O procedimento é dado por: *Seja gráfico de uma função f que tenha uma órbita de um ponto x_0 . Então, no mesmo plano cartesiano onde está o gráfico de f desenhemos a função identidade (ou diagonal) $y = x$. Assim, as interseções do gráfico de f com o gráfico da função identidade são os pontos fixos de f .*

Para desenharmos a órbita de x_0 no gráfico, marcamos primeiramente o ponto (x_0, x_0) na diagonal e, em seguida, desenhamos uma linha vertical ao eixo x em direção ao gráfico de f até intersectá-lo, obtendo, assim, o ponto $(x_0, f(x_0))$. Então, a partir desse ponto que encontramos desenhamos mais uma linha, agora horizontal ao eixo x , até chegar novamente à diagonal, obtendo um novo ponto, que é $(f(x_0), f(x_0))$ e esse é o segundo do ponto da órbita. E assim, continuando esse procedimento, desenhamos mais uma linha vertical a partir do ponto $(f(x_0), f(x_0))$ até intersectar o gráfico de f novamente, encontrando o ponto $(f(x_0), f^2(x_0))$, depois desenhamos uma linha horizontal até alcançar a diagonal, no ponto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ que é próximo ponto da órbita.

Deste modo, continuando o procedimento conseguimos exibir a órbita de x_0 geometricamente.

Resumindo, primeiro desenhamos uma linha vertical a partir da diagonal do gráfico, em seguida, uma linha horizontal a partir do gráfico de volta a diagonal e, assim por diante. A 'escada' resultante fornece uma imagem ilustrativa da órbita de x_0 .

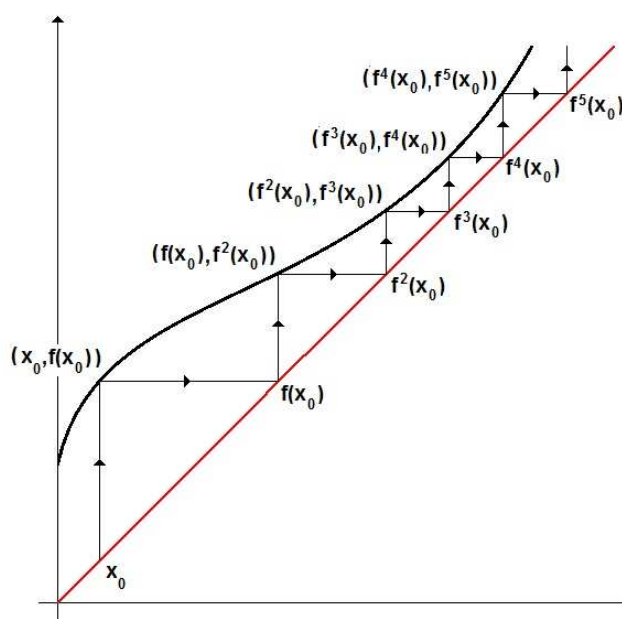


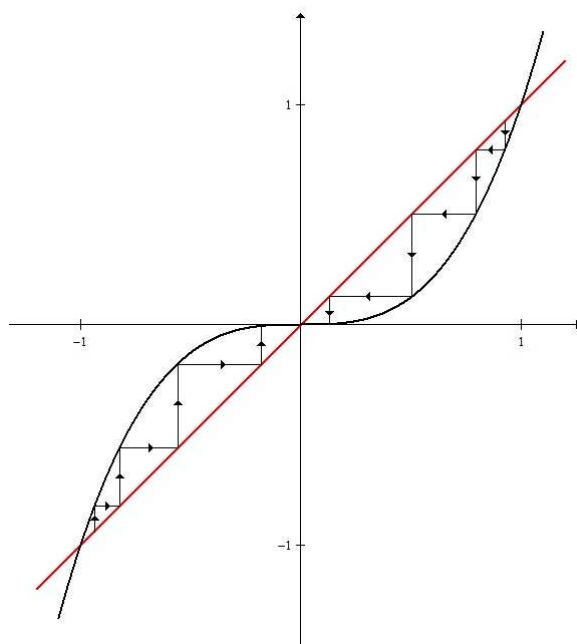
Figura 1.8: Análise Gráfica.

A Figura 1.8, mostra uma aplicação típica da análise gráfica.

Podemos usar a análise gráfica para descrever alguns comportamentos dinâmicos.

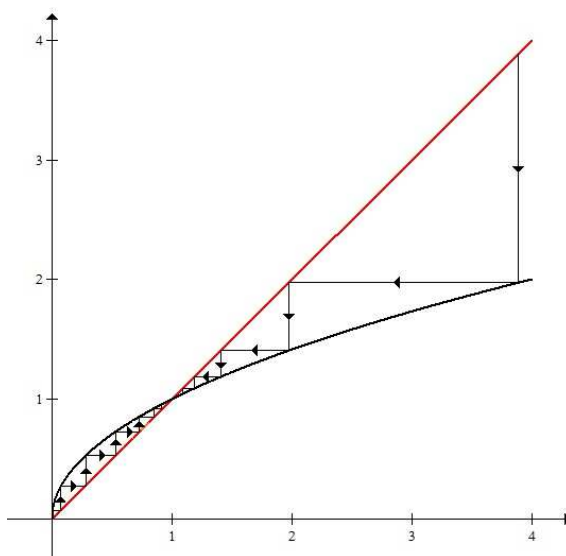
Exemplo 1.1.32. Seja $f(x) = x^3$.

Assim, a análise gráfica de f é como na Figura 1.9.

Figura 1.9: $f(x) = x^3$.

O que podemos concluir que os pontos $-1, 0$ e 1 são pontos fixos de f .

Exemplo 1.1.33. Realizando a análise gráfica da função $f(x) = \sqrt{x}$, temos

Figura 1.10: $f(x) = \sqrt{x}$.

Logo, os pontos 0 e 1 são pontos fixos de f .

Sabemos que os pontos periódicos de período n de f são tais que $f^n(x_0) = x_0$, o que significa que na análise gráfica os segmentos de linha voltam para o ponto de partida, ou seja, (x_0, x_0) na diagonal. Produzindo, assim, uma órbita fechada.

Exemplo 1.1.34. A Figura 1.11 mostra os gráficos de $f(x) = x^2 - 1,1$ (preto) e de f^2 (azul).

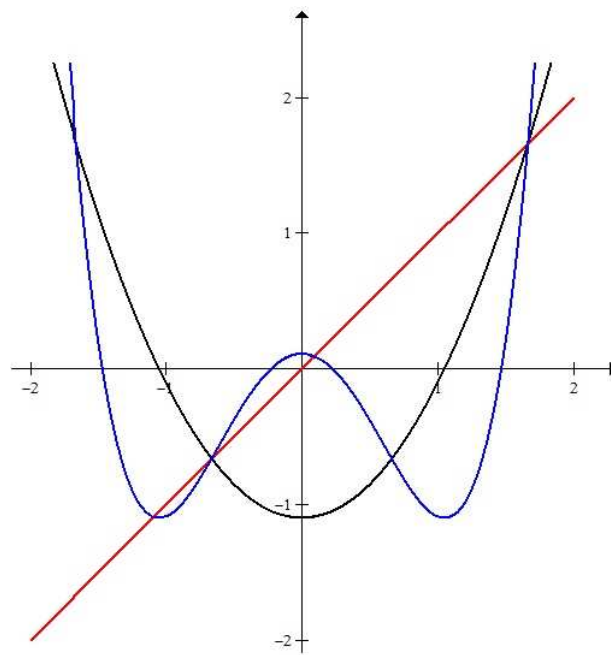


Figura 1.11: Gráfico preto representa f e o azul f^2 .

Logo, f tem os pontos $\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{15}}{10}$ e $\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{15}}{10}$ como pontos fixos e admite dois pontos periódicos de período 2, a saber, são $x \approx -1,0916$ e $x \approx 0,0916$, que são duas soluções de $f^2(x) = x$ diferente dos pontos fixos de f .

Assim, o quadrado na figura abaixo representa a órbita periódica de período 2.

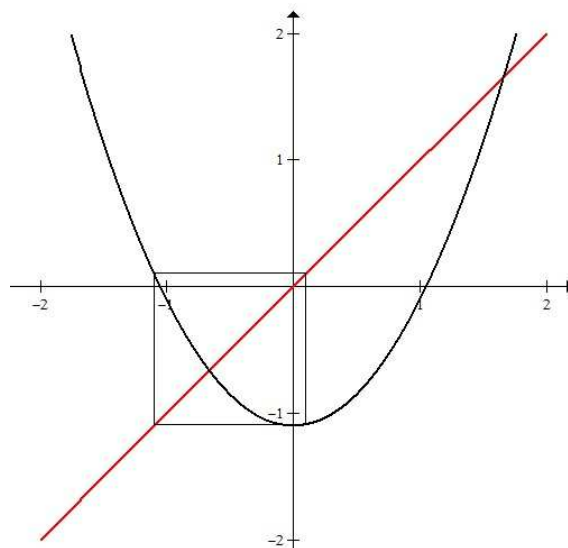


Figura 1.12: Órbita periódica de período 2.

Já na Figura 1.13, mostra que muitas órbitas tendem para a órbita de período 2.

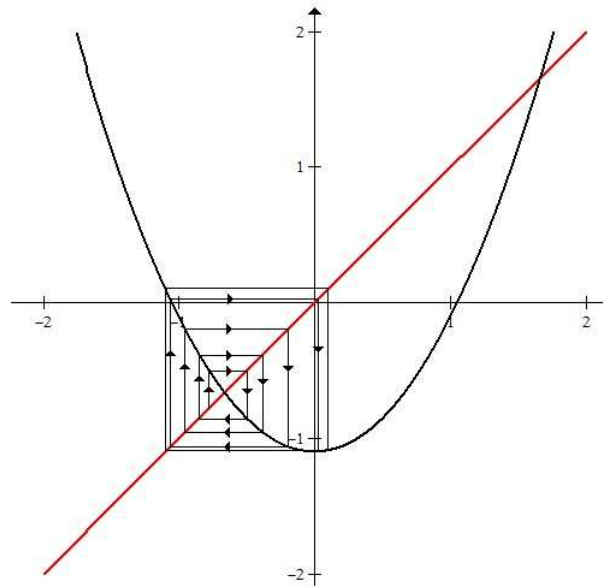


Figura 1.13: Órbitas tendendo para órbita periódica de período 2.

Mas não podemos decifrar o comportamento de todas as órbitas por meio de análise gráfica, essas funções possuem órbitas que tem um comportamento complicado, esse comportamento é conhecido como **caótico**.

1.1.8 Período três e o caos

A teoria de Sistemas Dinâmicos com comportamento caótico ainda está em desenvolvimento. Li e York apresentaram uma noção de *caos* em 1975 ([15]), que é válida para funções definidas em intervalos.

Definição 1.1.35. (Li-York, [15])

Seja J um intervalo e uma função $f : J \rightarrow J$ contínua. Dizemos que f é **caótica** em J se:

- (a) para todo $k = 1, 2, \dots$ existem pontos periódicos em J de período k ;
- (b) existe um subconjunto enumerável $S \subset J$ (que não contém pontos periódicos), tal que
 - (i) para todo $x, y \in S$ distintos, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \text{ e}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0;$$

- (ii) para qualquer $x \in S$ e qualquer ponto periódico $z \in J$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(z)| > 0.$$

Proposição 1.1.36. *Seja J um intervalo e uma função $f : J \rightarrow J$ contínua. Se existe um ponto $a \in J$, para que os pontos $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ e $d = f^3(a)$ satisfazem*

$$d \leq a < b < c \quad (\text{ou} \quad d \geq a > b > c).$$

Então, f é caótica segundo a Definição 1.1.35 de Li-York.

Note que, se a função f tem um ponto periódico de período 3, temos que se $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ e $d = f^3(a)$, então

$$\begin{aligned} f(a) &= b \\ f^2(a) &= f(f(a)) = f(b) = c \\ f^3(a) &= f(f^2(a)) = f(c) = d. \end{aligned}$$

Logo, $d = a$, e a $O_f(a) = \{a < b < c\}$ ou $O_f(a) = \{a > b > c\}$, então a hipótese da Proposição 1.1.36 é satisfeita, e portanto, f é caótica segundo a Definição de Li - York, logo, por (a) da definição, f tem pontos periódicos de todos os períodos. Assim, pela Definição de Li-York, tem-se uma implicação, que *se uma função f tem um ponto periódico de período 3, então tem pontos periódicos de qualquer período.*

Exemplo 1.1.37. *No Exemplo 1.1.31 definimos a aplicação*

$$\begin{aligned} T : \quad [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto T(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Então, o ponto $x = \frac{2}{7}$ é um ponto periódico de período 3, pois

$$\begin{aligned} T\left(\frac{2}{7}\right) &= 2\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7} \\ T^2\left(\frac{2}{7}\right) &= T\left(T\left(\frac{2}{7}\right)\right) = T\left(\frac{4}{7}\right) = 2\left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7} \\ T^3\left(\frac{2}{7}\right) &= T\left(T^2\left(\frac{2}{7}\right)\right) = T\left(\frac{6}{7}\right) = 2\left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 1.2.9, T é caótica segundo a Definição de Li-York. Logo, T possui pontos periódicos de todos os períodos.

Verifiquemos a existências dos outros pontos periódicos. Por questões práticas, verificaremos somente se T possui pontos periódicos de período 4 e 5. Lembrando que no Exemplo 1.1.31 já concluímos que T possui dois pontos periódicos de período 2.

Da mesma maneira que fizemos para encontrar os pontos de período 2 faremos para 3, 4 e 5.

Então, analisemos T^3 que é dada por

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x & , \text{ se } 0 \leq x < \frac{1}{8} \\ 4\left(\frac{1}{2} - 2x\right) & , \text{ se } \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4} \\ 4\left(2x - \frac{1}{2}\right) & , \text{ se } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{8} \\ 4(1 - 2x) & , \text{ se } \frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(2x - 1) & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4\left(\frac{3}{2} - 2x\right) & , \text{ se } \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8} \\ 4\left(2x - \frac{3}{2}\right) & , \text{ se } \frac{7}{8} \leq x < 1 \\ 8(1 - x) & , \text{ se } \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Logo, no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$, T^3 tem um ponto fixo, pois quando $4(2x - \frac{1}{2}) = x$, temos que, $-2 = -7x$, e consequentemente, $x = \frac{2}{7}$.

Concluindo que $x = \frac{2}{7}$ é ponto periódico de período 3, como tínhamos já verificado anteriormente.

Agora, analisemos T^4 , que é dada por

$$T^4(x) = \begin{cases} 16x & , \text{ se } 0 \leq x < \frac{1}{16} \\ 4\left(\frac{1}{2} - 4x\right) & , \text{ se } \frac{1}{16} \leq x < \frac{1}{8} \\ 4\left(4x - \frac{1}{2}\right) & , \text{ se } \frac{1}{8} \leq x < \frac{3}{16} \\ 4(1 - 4x) & , \text{ se } \frac{3}{16} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(4x - 1) & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{16} \\ 4\left(\frac{3}{2} - 4x\right) & , \text{ se } \frac{5}{16} \leq x < \frac{3}{8} \\ 4\left(4x - \frac{3}{2}\right) & , \text{ se } \frac{3}{8} \leq x < \frac{7}{16} \\ 4(2 - 4x) & , \text{ se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(4x - 2) & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{9}{16} \\ 4\left(\frac{5}{2} - 4x\right) & , \text{ se } \frac{9}{16} \leq x < \frac{5}{8} \\ 4\left(4x - \frac{5}{2}\right) & , \text{ se } \frac{5}{8} \leq x < \frac{11}{16} \\ 4(3 - 4x) & , \text{ se } \frac{11}{16} \leq x < \frac{3}{2} \\ 4(4x - 3) & , \text{ se } \frac{3}{2} \leq x < \frac{13}{16} \\ 4\left(\frac{7}{2} - 4x\right) & , \text{ se } \frac{13}{16} \leq x < \frac{7}{8} \\ 4\left(4x - \frac{7}{2}\right) & , \text{ se } \frac{7}{8} \leq x < \frac{15}{16} \\ 16(1 - x) & , \text{ se } \frac{15}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Logo, no intervalo $[\frac{1}{16}, \frac{1}{8})$, T^4 tem um ponto fixo, pois quando $4(\frac{1}{2} - 4x) = x$, temos que, $2 - 16x = x$, e consequentemente, $x = \frac{2}{17}$.

Então, $x = \frac{2}{17}$ é ponto periódico de período 4 de T .

De fato,

$$\begin{aligned} T\left(\frac{2}{17}\right) &= 2\left(\frac{2}{17}\right) = \frac{4}{17} \\ T^2\left(\frac{2}{17}\right) &= T\left(T\left(\frac{2}{17}\right)\right) = T\left(\frac{4}{17}\right) = 2\left(\frac{4}{17}\right) = \frac{8}{17} \\ T^3\left(\frac{2}{17}\right) &= T\left(T^2\left(\frac{2}{17}\right)\right) = T\left(\frac{8}{17}\right) = 2\left(\frac{8}{17}\right) = \frac{16}{17} \\ T^4\left(\frac{2}{17}\right) &= T\left(T^3\left(\frac{2}{17}\right)\right) = T\left(\frac{16}{17}\right) = 2\left(1 - \frac{16}{17}\right) = \frac{2}{17}. \end{aligned}$$

E, por fim, $T^5(x)$ no intervalo $[\frac{1}{32}, \frac{1}{16})$ é definida por $T^5(x) = 4(\frac{1}{2} - 8x)$, logo, quando $T^5(x) = x$, temos que, $4(\frac{1}{2} - 8x) = x$, e assim, $2 - 32x = x$, então, $x = \frac{2}{33}$ é um ponto fixo de T^5 .

Então, $x = \frac{2}{33}$ é ponto periódico de período 5 de T .

De fato,

$$\begin{aligned} T\left(\frac{2}{33}\right) &= 2\left(\frac{2}{33}\right) = \frac{4}{33} \\ T^2\left(\frac{2}{33}\right) &= T\left(T\left(\frac{2}{33}\right)\right) = T\left(\frac{4}{33}\right) = 2\left(\frac{4}{33}\right) = \frac{8}{33} \\ T^3\left(\frac{2}{33}\right) &= T\left(T^2\left(\frac{2}{33}\right)\right) = T\left(\frac{8}{33}\right) = 2\left(\frac{8}{33}\right) = \frac{16}{33} \\ T^4\left(\frac{2}{33}\right) &= T\left(T^3\left(\frac{2}{33}\right)\right) = T\left(\frac{16}{33}\right) = 2\left(\frac{16}{33}\right) = \frac{32}{33} \\ T^5\left(\frac{2}{33}\right) &= T\left(T^4\left(\frac{2}{33}\right)\right) = T\left(\frac{32}{33}\right) = 2\left(1 - \frac{32}{33}\right) = \frac{2}{33}. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação Tenda é um exemplo de que se uma função tem um ponto periódico de período 3, então tem pontos periódicos de qualquer período, no caso da Tenda encontramos pontos periódicos de período 2, 3, 4 e 5.

1.2 Entropia Topológica

Em um dado sistema dinâmico podemos caracterizar sua complexidade ou caoticidade analisando suas órbitas periódicas. A *Entropia Topológica* é o número real não negativo que representa esta complexidade, que basicamente nos informa quantas 'órbitas distintas' existem neste sistema.

O conceito de entropia topológica foi introduzida por Adler, Konheim e McAndrew ([1]) em 1965.

1.2.1 Definição via coberturas

Os conceitos a seguir foram retirados de [1] e [19].

A entropia topológica, aqui, é dada a uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$, onde X é um espaço topológico compacto.

Definição 1.2.1. *Seja X um subconjunto de um espaço topológico M . Uma família $\alpha = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é chamada de **cobertura** de X . Uma cobertura é aberta se cada A_λ , com $\lambda \in L$, é aberto em M .*

*Se $\beta \subset \alpha = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é também uma cobertura de X , então dizemos que β é uma **subcobertura** de X .*

Desde que X seja compacto e α uma cobertura aberta, sempre existe uma *subcobertura finita*.

Definição 1.2.2. Uma subcobertura de uma cobertura é **minimal** se não há outra subcobertura que contém menos membros.

Definição 1.2.3. Para qualquer cobertura α de X , onde X é um espaço topológico compacto. Definimos $N(\alpha)$ sendo o número de conjuntos de uma subcobertura de α de cardinalidade mínima. Ou seja,

$$N(\alpha) = \inf\{\#\beta ; \beta \subset \alpha \text{ subcobertura de } X\}.$$

Assim, chamamos de **Entropia** de α o número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha).$$

Exemplo 1.2.4. Seja $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Considere a cobertura $\alpha = \{(-1, \frac{1}{2}); (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}); (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}); (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})\}$.

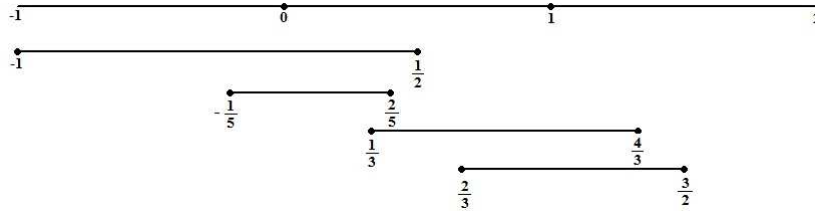


Figura 1.14: Subcobertura.

Logo, α possui duas subcoberturas, $\beta_1 = \{(-1, \frac{1}{2}); (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})\}$ e $\beta_2 = \{(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}); (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})\}$. Assim, $N(\alpha) = 2$.

Portanto, $H(\alpha) = \log N(\alpha) = \log 2$.

Agora, definamos duas 'operações' para coberturas.

Definição 1.2.5. Para quaisquer duas coberturas α e β de X , onde X é um espaço topológico compacto, definimos a **união** ou **junção** delas como

$$\alpha \vee \beta := \{ A \cap B ; A \in \alpha \text{ e } B \in \beta \}.$$

Onde $\alpha \vee \beta$ é uma nova cobertura de X .

Definição 1.2.6. Uma cobertura β é um **refinamento** de uma cobertura α se, para todo $B \in \beta$, existir $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$, ou seja, se cada elemento de β está contido em algum elemento de α . E denotamos por $\alpha \prec \beta$.

A seguir, algumas propriedades das operações acima definidas.

E consideraremos X é um espaço topológico compacto e α, α', β e β' coberturas abertas de X .

Propriedade 1.2.7. Se $\alpha \prec \alpha'$ e $\beta \prec \beta'$, então, $\alpha \vee \beta \prec \alpha' \vee \beta'$.

Demonstração:

Consideremos $A' \cap B' \in \alpha' \vee \beta'$, onde $A' \in \alpha'$ e $B' \in \beta'$.

Então, por hipótese, existem $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ tais que $A' \subset A$, $B' \subset B$, por hipótese.

Assim, $A' \cap B' \subset A \cap B$, onde $A \cap B \in \alpha \vee \beta$.

Portanto, $\alpha \vee \beta \prec \alpha' \vee \beta'$.

□

Em particular, se considerarmos a cobertura $\{X\}$ e adequando a Propriedade 1.2.7, temos $\alpha \prec \alpha \vee \beta$ e $\beta \prec \alpha \vee \beta$

Propriedade 1.2.8. *Se $\alpha \prec \beta$, então, $N(\alpha) \leq N(\beta)$ e $H(\alpha) \leq H(\beta)$.*

Demonstração:

Seja $\{B_1, B_2, \dots, B_{N(\beta)}\}$ a subcobertura minimal de β .

Como $\alpha \prec \beta$, então para cada $B_k \in \beta$ existe $A_k \in \alpha$ tal que $B_k \subset A_k$, com $k = 1, 2, \dots, N(\beta)$.

Então $\{A_1, A_2, \dots, A_{N(\beta)}\}$ é uma subcobertura de α , que não necessariamente seja minimal, tal que $\{B_1, B_2, \dots, B_{N(\beta)}\} \subset \{A_1, A_2, \dots, A_{N(\beta)}\}$.

Portanto, $N(\alpha) \leq N(\beta)$ e, como $H(\alpha) = \log N(\alpha)$, segue que $H(\alpha) \leq H(\beta)$.

□

Propriedade 1.2.9. *Se $\alpha \prec \beta$, então, $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$ e $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta)$.*

Demonstração:

Segue da Propriedade 1.2.8 que se $\beta \prec \alpha \vee \beta$, então, $N(\beta) \leq N(\alpha \vee \beta)$.

Uma consequência da hipótese é $\alpha \vee \beta \prec \beta$, então, $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\beta)$.

Portanto, $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$ e, consequentemente, $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta)$.

□

Propriedade 1.2.10. *$N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha) \cdot N(\beta)$ e $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.*

Demonstração:

Sejam $\{A_1, A_2, \dots, A_{N(\alpha)}\}$ a subcobertura minimal de α e $\{B_1, B_2, \dots, B_{N(\beta)}\}$ a subcobertura minimal de β .

Então, $\{A_i \cap B_j \ ; \ i = 1, 2, \dots, N(\alpha) \text{ e } j = 1, 2, \dots, N(\beta)\}$ é uma subcobertura de $\alpha \vee \beta$, não necessariamente minimal e tem no máximo $N(\alpha) \cdot N(\beta)$ elementos.

Portanto, $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha) \cdot N(\beta)$ e, como

$$\begin{aligned} \log N(\alpha \vee \beta) &\leq \log N(\alpha) \cdot N(\beta) \\ &\leq \log N(\alpha) + \log N(\beta), \end{aligned}$$

então $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

□

A partir de agora, consideremos $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e X um espaço topológico compacto.

Observação 1.2.11. *Seja α uma cobertura aberta de X . Como f é contínua temos que a família $f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A); A \in \alpha\}$ também é uma cobertura de X .*

Propriedade 1.2.12. *Se $\alpha \prec \beta$, então, $f^{-1}(\alpha) \prec f^{-1}(\beta)$.*

Demonstração:

Temos que $f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A); A \in \alpha\}$ e $f^{-1}(\beta) = \{f^{-1}(B); B \in \beta\}$.

Seja $\{B_1, B_2, \dots, B_{N(\beta)}\}$ a subcobertura minimal de β .

Como $\alpha \prec \beta$, então para cada $B_k \in \beta$ existe $A_k \in \alpha$ tal que $B_k \subset A_k$, com $k = 1, 2, \dots, N(\beta)$.

Então $\{A_1, A_2, \dots, A_{N(\beta)}\}$ é uma subcobertura de α , que não necessariamente seja minimal, tal que $\{B_1, B_2, \dots, B_{N(\beta)}\} \subset \{A_1, A_2, \dots, A_{N(\beta)}\}$.

Logo, $\{f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2), \dots, f^{-1}(B_{N(\beta)})\} \subset \{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \dots, f^{-1}(A_{N(\beta)})\}$.

Portanto, $f^{-1}(\alpha) \prec f^{-1}(\beta)$.

□

Propriedade 1.2.13. $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$.

Demonstração:

Por definição, temos que $\alpha \vee \beta = \{A \cap B; A \in \alpha \text{ e } B \in \beta\}$, então

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha \vee \beta) &= \{f^{-1}(A \cap B); A \in \alpha \text{ e } B \in \beta\} \\ &= \{f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B); A \in \alpha \text{ e } B \in \beta\} \\ &= \{f^{-1}(A); A \in \alpha\} \cap \{f^{-1}(B); B \in \beta\}. \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$.

□

Propriedade 1.2.14. $N(\alpha) \geq N(f^{-1}(\alpha))$ e $H(\alpha) \geq H(f^{-1}(\alpha))$.

Demonstração:

Seja $\{A_1, A_2, \dots, A_{N(\alpha)}\}$ uma subcobertura minimal de α .

Assim, $\{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \dots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ é uma cobertura de $f^{-1}(\alpha)$, e pode ser não minimal.

Portanto, $N(\alpha) \geq N(f^{-1}(\alpha))$ e, conseqüentemente, $H(\alpha) \geq H(f^{-1}(\alpha))$.

□

Observação 1.2.15. Quando f é sobrejetiva, então, $N(\alpha) = N(f^{-1}(\alpha))$.

De fato, se supormos, por absurdo, que $\{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \dots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ não é uma subcobertura minimal de $f^{-1}(\alpha)$, podemos encontrar $\{f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2), \dots, f^{-1}(B_n)\}$ que seja subcobertura de $f^{-1}(\alpha)$, onde $B_k \in \alpha$ com $k = 1, 2, \dots, n$, tal que $n < N(\alpha)$. Mas f é sobrejetiva, então,

$$\begin{aligned} X = f(X) &= f\left(\bigcup_{k=1}^n f^{-1}(B_k)\right) \\ &= f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^n f^{-1}(B_k)\right)\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^n B_k, \end{aligned}$$

daí, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ é uma subcobertura minimal de α com $n < N(\alpha)$ elementos, o que é uma contradição. Logo, $\{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \dots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ é uma cobertura minimal de $f^{-1}(\alpha)$.

Propriedade 1.2.16. Se α é uma cobertura de X e $f : X \rightarrow X$ é contínua e X um espaço topológico compacto, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\alpha)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)),$$

existe.

Demonstração:

Seja $H_n = H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))$.

$$\begin{aligned} H_{m+n} &= H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m-n+1}(\alpha)) \\ &= H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha) \vee f^{-m}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))) \\ &\leq H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha)) + H(f^{-m}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))) \\ &\leq H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha)) + H(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \\ &\leq H_m + H_n. \end{aligned}$$

Logo, $H_{m+n} \leq H_m + H_n$ e $H_n \geq 0$, para todo inteiro positivo m, n . E assim, H_n é subaditiva.

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_n$ existe.

□

Definição 1.2.17. A **entropia** de uma aplicação f a respeito a uma cobertura α é definido por $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))$, e a denotamos por $h(f, \alpha)$. Isto é,

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)).$$

Exemplo 1.2.18. Seja a função

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = 2x. \end{aligned}$$

Tomemos a cobertura $\alpha = \{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$.

Calculemos $h(f, \alpha)$.

Primeiramente, devemos encontrar a cobertura $\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)$.

Então, devemos achar $f^{-1}(\alpha), f^{-2}(\alpha), \dots, f^{-n+1}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha) &= f^{-2+1}(\alpha) \\ &= \left\{ \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right] \right\} \\ &= \left\{ \left[\frac{\ell}{4}, \frac{\ell+1}{4}\right]; \ell = 0, 1, 2, 3 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-2}(\alpha) &= f^{-3+1}(\alpha) \\ &= \left\{ \left[0, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right], \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right], \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], \left[\frac{7}{8}, 1\right] \right\} \\ &= \left\{ \left[\frac{\ell}{8}, \frac{\ell+1}{8}\right]; \ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-3}(\alpha) &= f^{-4+1}(\alpha) \\ &= \left\{ \left[0, \frac{1}{16}\right], \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right], \left[\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right], \left[\frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right], \left[\frac{3}{8}, \frac{7}{16}\right], \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right], \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right], \left[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right], \left[\frac{11}{16}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right], \left[\frac{13}{16}, \frac{7}{8}\right], \left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right], \left[\frac{15}{16}, 1\right] \right\} \\ &= \left\{ \left[\frac{\ell}{16}, \frac{\ell+1}{16}\right]; \ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \right\}, \end{aligned}$$

e continuando esse processo, achamos

$$f^{-n+1}(\alpha) = \left\{ \left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]; \ell = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \right\}.$$

E desta forma, temos que $N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) = 2^n$.

Logo, $H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) = \log 2^n$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log 2^n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n \log 2) \\
 &= \log 2.
 \end{aligned}$$

Segue algumas propriedades da entropia topológica de f a respeito a uma cobertura.

Propriedade 1.2.19. $h(f, \alpha) \leq H(\alpha)$.

Demonstração:

Por definição, $h(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))$, então

$$\begin{aligned}
 h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (H(\alpha) + H(f^{-1}(\alpha)) + \dots + H(f^{-n+1}(\alpha))), \quad \text{por 1.2.10} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (H(\alpha) + H(\alpha) + \dots + H(\alpha)), \quad \text{por 1.2.14} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n H(\alpha)) \\
 &\leq H(\alpha).
 \end{aligned}$$

□

Propriedade 1.2.20. Se $\alpha \prec \beta$, então $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

Demonstração:

Como $\alpha \prec \beta$, temos que $\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha) \prec \beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\beta)$, pois $f^{-1}(\alpha) \prec f^{-1}(\beta)$ e $f^{-k}(\alpha) \prec f^{-k}(\beta)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Então, $H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \leq H(\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\beta))$, pela Propriedade 1.2.8.

Logo,

$$\begin{aligned}
 h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\beta)) \\
 &\leq h(f, \beta)
 \end{aligned}$$

□

Propriedade 1.2.21. Se f é um difeomorfismo, então $h(f, \alpha) = h(f^{-1}, \alpha)$.

Demonstração:

Como f é um difeomorfismo, temos que $N(\alpha) = N(f^{-1}(\alpha))$ e, conseqüentemente, $H(\alpha) = H(f^{-1}(\alpha))$.

Então,

$$\begin{aligned} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) &= H(f^{n-1}(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))) \\ &= H(f^{n-1}(\alpha) \vee f^{n-1}(f^{-1}(\alpha)) \vee \dots \vee f^{n-1}(f^{-n+1}(\alpha))) \\ &= H(f^{n-1}(\alpha) \vee f^{n-2}(\alpha) \vee \dots \vee \alpha) \\ &= H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee (f^{-n+1})^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee (f^{-n+1})^{-1}(\alpha)) \\ &= h(f^{-1}, \alpha). \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.22. A *entropia de uma aplicação* f é definida como $\sup h(f, \alpha)$ quando o supremo é tomado sobre todas as coberturas abertas α , e denotamos por $h(f)$, ou seja,

$$h(f) = \sup h(f, \alpha).$$

Definição 1.2.23. Uma sequência de coberturas $\{\alpha_n; n = 1, 2, \dots\}$ é um **refinamento** de coberturas abertas que satisfaz:

- (1) $\alpha_n \prec \alpha_{n+1}$;
- (2) Para toda cobertura aberta β de X existe α_n tal que $\beta \prec \alpha_n$, onde X é um espaço topológico compacto.

Uma sequência de refinamento simplifica o cálculo da entropia, conforme podemos verificar na proposição abaixo.

Propriedade 1.2.24. Se $\{\alpha_n\}$ é uma sequência de cobertura é um refinamento, então, $h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(f, \alpha_n)$.

Demonstração:

Dada uma cobertura α de X existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \prec \alpha_n$, e conseqüentemente, $h(f, \alpha) \leq h(f, \alpha_n)$.

$$\text{Então, } h(f) = \sup h(f, \alpha) \leq \sup h(f, \alpha_n).$$

Mas, $\sup h(f, \alpha_n) \leq h(f)$ e se α_n é uma sequência de refinamento, então $h(f, \alpha_n)$ é uma sequência de números reais e crescente.

$$\text{Portanto, } h(f) = \sup h(f, \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(f, \alpha_n).$$

□

Teorema 1.2.25. *Entropia é um invariante, no sentido de que $h(gfg^{-1}) = h(f)$, onde $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e $g : X \rightarrow X'$ é um homeomorfismo e X um espaço topológico compacto.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 h(gfg^{-1}, f(\alpha)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(g(\alpha) \vee (gfg^{-1})^{-1}g(\alpha) \vee \dots \vee (gfg^{-1})^{-n+1}g(\alpha)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(g(\alpha) \vee gf^{-1}g^{-1}g(\alpha) \vee \dots \vee gf^{-n+1}g^{-1}g(\alpha)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(g(\alpha) \vee gf^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee gf^{-n+1}(\alpha)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(g(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \\
 &= h(f, \alpha)
 \end{aligned}$$

Como α varia em todas as coberturas abertas de X , $g(\alpha)$ varia em todas as coberturas abertas de X' , ou seja, dado β uma cobertura aberta de X' temos $g^{-1}(\beta)$ é uma cobertura aberta de X , e fazendo $\alpha = g^{-1}(\beta) \Rightarrow \beta = g(\alpha)$, e por hipótese, g é um homeomorfismo.

Portanto, $h(gfg^{-1}) = h(f)$.

□

Teorema 1.2.26. $h(f^k) = kh(f)$, para $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demonstração:

Temos

$$\begin{aligned}
 h(f^k) &\geq h(f^k(\alpha), \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-k+1}(\alpha)) \\
 &= k \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-k+1}(\alpha) \vee f^{-k}(\alpha) \\
 &\quad \vee \dots \vee f^{-2k+1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\alpha)) \\
 &= kh(f, \alpha)
 \end{aligned}$$

para qualquer cobertura aberta α .

Assim, $h(f^k) \geq kh(f)$.

Por outro lado, temos que

$$\alpha \vee (f^k)^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\alpha) \prec \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\alpha),$$

então

$$\begin{aligned}
 h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \\
 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} H(\alpha \vee (f^k)^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\alpha)) \\
 &\geq \frac{1}{k} h(f^k, \alpha)
 \end{aligned}$$

para qualquer cobertura aberta α .

Logo, $h(f^k) \leq kh(f)$.

Portanto, $h(f^k) = kh(f)$.

□

1.2.2 Definição de Dinaburg e Rufus Bowen

A entropia topológica introduzida por Adler, Kohein e McAndrew ([1]) foi definida sobre um espaço topológico compacto. E em 1970, Rufus Bowen e Dinaburg ([4]) apresentaram uma definição diferente, mas que são equivalentes.

Apresentaremos uma parte da definição que utilizaremos no Capítulo 3.

Definição 1.2.27. *Seja $f : X \rightarrow X$ contínua e X um espaço métrico com a métrica d . Um conjunto $S \subset X$ é chamado de (n, ϵ) -separado para f , se para todos $x, y \in S$ distintos, existe algum inteiro k , onde $0 \leq k \leq n - 1$, tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$, onde $n \geq 0$ inteiro e $\epsilon > 0$,*

Assim, a quantidade de tais pontos é dada por

$$r(n, \epsilon, f) = \max\{\#S ; S \subset X \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado para } f\},$$

onde $\#S$ é a cardinalidade de S .

A taxa de crescimento exponencial desse número, quando n tende ao ∞ é dado por

$$h_r(\epsilon, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon, f)).$$

*E então, a **entropia topológica** de f é definida por*

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_r(\epsilon, f),$$

pois $h_r(\epsilon, f)$ não decresce com ϵ .

1.2.3 Equivalência entre as Definições

A equivalência entre as definições que apresentaremos foi estudada por Wagner Silva e está demonstrada em [24].

A respeito a equivalência, ou até mesmo coincidência entre as definições de entropia topológica via coberturas e de Bowen e Dinaburg, vem de que se α é uma cobertura aberta, com todos elementos de diâmetro de ϵ e o número de Lebesgue δ então $r(n, \epsilon, f) \leq N(\alpha_n) \leq s(n, \epsilon, f)$, onde $s(n, \epsilon, f)$ será definido adiante e

$N(\alpha_n) = N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))$. Então apresentaremos os conceitos e resultados necessários para podermos entender e chegar na desigualdade acima.

Definição 1.2.28. *Seja $A \subset X$ um conjunto não vazio e X um espaço métrico compacto com a métrica d . Para cada $x \in X$ definimos a **distância** de x a A por*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$

O número $\sup\{d(x, y); x, y \in A\}$ é chamado de **diâmetro** de A e denotamos por $\text{diam}(A)$.

O **diâmetro** de uma cobertura α , $\text{diam}(\alpha)$ é definido por

$$\text{diam}(\alpha) = \sup_{A \in \alpha} \text{diam}(A).$$

Definição 1.2.29. *Quando todo subconjunto $A \subset X$ com diâmetro menor que $\delta > 0$ está contido em algum elemento de uma abertura α , dizemos que δ é o **número de Lebesgue** de α .*

Na seção anterior apresentamos parte da Definição que Rufus e Dinaburg apresentou para (n, ϵ) -separado. A seguir apresentaremos a definição sobre um outro conjunto.

Definição 1.2.30. *Seja $f : X \rightarrow X$ contínua e X um espaço métrico com a métrica d . Um conjunto $R \subset K$, onde K é um subconjunto compacto de X , é chamado (n, ϵ) -**gerador** de K para F , se para todo $x \in X$, existe $y \in R$, existe algum inteiro k , onde $0 \leq k \leq n - 1$, tal que $d(f^k(x) - f^k(y)) \leq \epsilon$, onde $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$.*

Assim, a quantidade desses pontos é dada por

$$s(n, \epsilon, f) = \min\{\#R; R \subset K \text{ é } (n, \epsilon)\text{-gerador para } K\},$$

onde $\#R$ é a cardinalidade de R .

E a taxa de crescimento exponencial desse número, quando n tende ao ∞ é dado por

$$h_s(\epsilon, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon, f)).$$

E então, a **entropia topológica** de f é também definida por

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_s(\epsilon, f).$$

No nosso trabalho utilizaremos somente a definição de entropia topológica por (n, ϵ) -separado, mas para fazermos a relação entre as definições precisamos da definição por (n, ϵ) -gerador.

Observação 1.2.31. *Para $\epsilon > 0$ e $n \geq 1$ temos que $s(n, \epsilon, f) \leq r(n, \epsilon, f) \leq s(n, \frac{\epsilon}{2}, f)$, pois um conjunto (n, ϵ) -separado de maior cardinalidade é também um (n, ϵ) -gerador, e daí, $s(n, \epsilon, f) \leq r(n, \epsilon, f)$. E se considerarmos um conjunto R , $(n, \frac{\epsilon}{2})$ -gerador de menor*

cardinalidade, e um conjunto S , (n, ϵ) -separado conseguimos uma aplicação $\phi : S \rightarrow R$ injetiva, e daí, $r(n, \epsilon, f) \leq s(n, \frac{\epsilon}{2}, f)$.

$$E \text{ assim, } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon, f)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon, f)).$$

No lema a seguir limitaremos superiormente a quantidade dos pontos do conjunto (n, ϵ) -separado pelo menor número de conjuntos de uma subcobertura.

Lema 1.2.32. *Seja $f : X \rightarrow X$ contínua e X um espaço métrico compacto. Seja $\epsilon > 0$ e $\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ uma cobertura aberta com $\max_{1 \leq i \leq k} \text{diam } A_i < \epsilon$, então*

$$r(n, \epsilon, f) \leq N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)).$$

Demonstração:

Seja S um (n, ϵ) -separado, onde $r(n, \epsilon, f)$ é a cardinalidade de S .

Cada elemento do conjunto S pertence a diferentes elementos da cobertura $\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)$.

Assim,

$$\begin{aligned} x, y &\in A_{i_0} \cap f^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(A_{i_{n-1}}) \\ &\in \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha), \end{aligned}$$

daí, $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \text{diam } A_i < \epsilon$.

Portanto, em particular, $r(n, \epsilon, f) \leq N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))$.

□

Já no lema a seguir limitaremos inferiormente a quantidade dos pontos do conjunto (n, ϵ) -gerador pelo menor número de conjuntos de uma subcobertura.

Lema 1.2.33. *Seja $f : X \rightarrow X$ contínua e X um espaço métrico compacto. Seja α uma cobertura aberta de X com o número de Lebesgue $\delta > 0$, então para todo $n \geq 1$,*

$$N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \leq s(n, \epsilon, f).$$

Demonstração:

Seja R um conjunto (n, ϵ) -gerador, onde $s(n, \epsilon, f)$ é a cardinalidade de R .

Seja $D(x, n, \delta) = B(x, \delta) \cap f^{-1}(B(f(x), \delta)) \cap \dots \cap f^{-n+1}(B(f^{n-1}(x), \delta))$ uma cobertura de X .

Então, $X = \bigcup_{x \in R} D(x, n, \delta)$.

Assim, para todo $x \in R$, $B(f^i(x), \delta) \subset A_{k_i}$, onde $A_{k_i} \in \alpha$, $0 \leq i \leq n-1$, ou seja,

$$\begin{aligned} D(x, n, \delta) &\subset A_{i_0} \cap f^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(A_{i_{n-1}}) \\ &\in \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha) \end{aligned}$$

Logo, em particular, $\bigcup_{x \in R} (A_{i_0} \cap f^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(A_{i_{n-1}}))$ é uma cobertura de X .

Portanto, $N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)) \leq s(n, \epsilon, f)$.

□

Com estas ferramentas, podemos falar realmente sobre a equivalência. Agora, quando escrevermos $h_\alpha(f)$ estaremos nos referindo a entropia topológica de f sobre a definição via coberturas.

Seja $f : X \rightarrow X$ contínua e X espaço métrico compacto. Como $h_\alpha(f) = \sup h(f, \alpha)$, então para qualquer $\sigma > 0$, existe uma cobertura aberta α de X , tal que $h(f, \alpha) + \sigma \geq h_\alpha(f)$, mas $h_\alpha(f) \geq h(f, \alpha)$, então

$$h(f, \alpha) + \sigma \geq h_\alpha(f) \geq h(f, \alpha).$$

Assim, analisando a entropia topológica do (n, ϵ) -gerador, temos

$$\begin{aligned} h(f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_s(\epsilon, f) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon, f)) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon, f)) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))) \\ &\geq h(f, \alpha) \\ &\geq h_\alpha(f) - \sigma. \end{aligned}$$

Mas, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher uma cobertura aberta $\beta = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ de X com $\text{diam} B_i < \epsilon$, então pela entropia topológica do (n, ϵ) -separado, temos

$$\begin{aligned} h(f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_r(\epsilon, f) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon, f)) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon, f)) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\beta))) \\ &\leq h(f, \beta) \\ &\leq h_\beta(f). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h_\beta(f) &\geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon, f)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon, f)) \\ &\geq h_\alpha(f) - \sigma. \end{aligned}$$

E assim, temos a equivalência das definições.

Capítulo 2

TEOREMA DE SARKOVSKII

Alexander Nikolaevich Sarkovskii, nascido dia 7 de dezembro de 1936. Formou-se na Universidade local de Kiev em 1958, onde passou a lecionar a partir de 1967. Hoje é um matemático proeminente e membro da Academia Nacional de Ciências da Ucrânia. Sua principal área de interesse é a teoria de sistemas dinâmicos, da estabilidade e das oscilações, mas também trabalha com teoria funcional e equações diferenciais funcionais, bem como equações de diferenças e suas aplicações.

Em 1964, publicou um artigo ([21]) no *Ukrainian Mathematical Journal*, mas o mesmo foi submetido quando tinha apenas 25 anos. Neste artigo, ele perguntou se existia alguma relação entre órbitas periódicas de períodos diferentes. Como por exemplo, se uma função $f : I \rightarrow I$ contínua, onde $I \subset \mathbb{R}$ que tem um ponto periódico de período 2 implica a existência de um ponto periódico de período 3, ou o contrário.

Assim, seu objetivo neste artigo ([21]) foi provar que existia essa relação, e ficou conhecida como *Teorema de Sarkovskii*.

2.1 Questionamentos iniciais

Inicialmente estudaremos alguns questionamentos, para entendermos o Teorema de Sarkovskii, sobre a implicação de períodos, ou seja, períodos que implicam em outros períodos. Os questionamentos são do tipo:

Questões:

- 1) Se f tem ponto periódico de período 2, então tem ponto periódico de período 1?
- 2) Se f tem ponto periódico de período n , então tem ponto periódico de período 1?
- 3) Se f tem ponto periódico de período 3, então tem ponto periódico de período 2?
- 4) Se f tem ponto periódico de período 1, então tem ponto periódico de período 2?
- 5) Se f tem ponto periódico de período 2, então tem ponto periódico de período 3?

6) Se f tem ponto periódico de período 4, então tem ponto periódico de período 3?

Em todos os questionamentos, f é uma aplicação contínua definida de um intervalo nele mesmo.

A seguir, os resultados e exemplos responderão aos questionamentos.

A Proposição 2.1.1 responderá nosso primeiro questionamento.

Proposição 2.1.1. *Se f tem um ponto periódico de período 2, então f tem um ponto periódico de período 1, onde f está definida em $I \subset \mathbb{R}$ e é contínua.*

Demonstração:

Seja $O_f(x_1) = \{x_1, x_2\}$ uma órbita periódica de período 2, ou seja, x_1 é um ponto periódico de período 2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2$.

Como $f(x_1) = x_2$ e $f(x_2) = x_1$, então

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &> 0 \\ x_1 - x_2 &< 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x_1) - x_1 &> 0 \\ f(x_2) - x_2 &< 0. \end{aligned}$$

Agora, considerando $g(x) = f(x) - x$ e aplicando o Teorema do Valor Intermediário, temos que existe um ponto x_0 entre x_1 e x_2 , tal que $g(x_0) = 0$. Então, $g(x_0) = 0$, assim, $f(x_0) - x_0 = 0$, o que implica que $f(x_0) = x_0$.

Portanto, x_0 é um ponto periódico de período 1.

□

Assim, temos que período 2 implica 1.

Depois disso, para responder a questão 2, vamos generalizar a proposição anterior.

Proposição 2.1.2. *Seja uma função $f : I \rightarrow I$, contínua e onde $I \subset \mathbb{R}$. Se f tem um ponto periódico de período $n > 1$, então f tem um ponto periódico de período 1.*

Demonstração:

Seja x_1 o ponto periódico de período n que f possui.

Logo, sua órbita ou é $\{x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n\}$ ou $\{x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n\}$. Suponhamos que aconteça o segundo, ou seja, $x_1 < f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n)$.

Como $f(x_1) > x_1$ e $f(x_n) < x_n$, temos

$$\begin{aligned} f(x_1) - x_1 &> 0 \\ f(x_n) - x_n &< 0. \end{aligned}$$

Considerando a função $g(x) = f(x) - x$ e aplicando o Teorema do Valor Intermediário, temos que existe um ponto $x_0 \in (x_1, x_n)$ tal que $g(x_0) = 0$.

Então, $g(x_0) = 0$, assim, $f(x_0) - x_0 = 0$, o que implica que, $f(x_0) = x_0$.

Portanto, x_0 é um ponto periódico de período 1.

□

Então, ponto periódico de qualquer período implica a existência de ponto fixo.

Respondendo a questão 3, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.3. *Se f tem um ponto periódico de período 3, então f tem um ponto periódico de período 2, onde f está definida em $\mathbb{R}$ e é contínua.*

Demonstração:

Seja a é um ponto periódico de período 3, então $O_f(a) = \{a, b, c\}$. E pode acontecer de duas maneiras, ou $f(a) = b, f(b) = c$ e $f(c) = a$, ou $f(a) = c, f(c) = b$ e $f(b) = a$, onde $a < b < c$.

Suponhamos que aconteça o primeiro caso. Assim, podemos pensar na seguinte partição da órbita de a , $I = [a, b]$ e $J = [b, c]$.

Então $f(I) \supset J$ e $f(J) \supset I \cup J$.

Como $f(J) \supset I \cup J = [a, c]$, seja $x_n = \inf\{x_i; f(x_i) = a\}$ e $x_m = \inf\{x_i; f(x_i) = c\}$, sendo $A_1 = [x_n, x_m]$, assim, $f(A_1) = [a, b] = I$, pois f é contínua e A_1 é conexo e fechado, por isso a imagem de $f(A_1)$ é um intervalo, deste modo, existe $A_1 \subset J$ tal que $f(A_1) = I$.

E por $f(I) \supset J \supset A_1$ existe um intervalo $A_2 \subset I$ tal que $f(A_2) = A_1$, pelo mesmo argumento anterior.

Logo, $f^2(A_2) = f(f(A_2)) = f(A_1) = I$ e $f^2(A_2) \supset A_2$.

Pela Proposição 1.1.25, do Capítulo 1, existe $x \in A_2$ tal que $f^2(x) = x$, então este é um ponto fixo de f^2 , ou seja, pode ser o ponto periódico de período 2 de f que estamos procurando.

Como $x \in A_2 \subset I$ e $f(x) \in f(A_2)$, implica que $f(x) \in A_1 \subset J$, então $x \neq f(x)$ ou $x = b = f(x)$, o que é uma contradição, pois b é um ponto de período 3. Logo, $f(x) \neq x$ e $f^2(x) = x$, ou seja, x é ponto periódico de período 2 e não é ponto fixo.

Portanto, f tem um ponto periódico de período 2.

□

A partir de agora exibiremos três contra-exemplos para responder os últimos questionamentos.

O exemplo a seguir responde que período 1 não implica período 2.

Exemplo 2.1.4. *Seja*

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow I \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{x}, \end{aligned}$$

onde $I = [0, 1]$.

Assim, quando $f(x) = x$, temos que, $\sqrt{x} = x$, assim, $x - x^2 = 0$, e daí, $x = 0$ e $x = 1$.

Logo, os pontos $x = 0$ e $x = 1$ são pontos fixos de f .

E ainda, $f^2(x) = \sqrt{(\sqrt{x})}$, assim, $\sqrt[4]{x} = x$, consequentemente, $x - x^4 = 0$, e daí, $x = 0$ e $x = 1$.

Logo, os pontos $x = 0$ e $x = 1$ são pontos periódicos de período 2, mas já são pontos fixos, ou pontos periódicos de período 1.

Deste modo, f possui pontos periódicos de período 1, mas não tem nenhum ponto de periódico de período 2.

E mais, $f^3(x) = \sqrt{(\sqrt{(\sqrt{x})})}$, assim, $((x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x$, consequentemente, $x^{\frac{1}{8}} = x$, e daí, $x = 0$ e $x = 1$.

Ou seja, f também não tem pontos periódicos de período 3.

O próximo exemplo responde negativamente a questão 5.

Exemplo 2.1.5. *Seja $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = -x$.*

Deste modo, $f^2(x) = -(-x) = x$.

Logo, todos os pontos $x \in [0, 1]$ são pontos periódicos de período 2.

Mas,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) \\ &= f(x) \\ &= -x, \end{aligned}$$

daí, o ponto $x = 0$ é um ponto de período 3, mas já é ponto fixo de f , pois $f(0) = -0 = 0$.

Então, f tem ponto periódico de período 2, mas não tem pontos periódicos de período 3.

Período 4 não implica período 3, como mostra o próximo contraexemplo, para responder a questão 6.

Exemplo 2.1.6. *Seja $f : I \longrightarrow I$ contínua e $I = [0, 3]$, definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 5 & , \quad 1 < x \leq 2 \\ -x + 3 & , \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

E seu gráfico é:

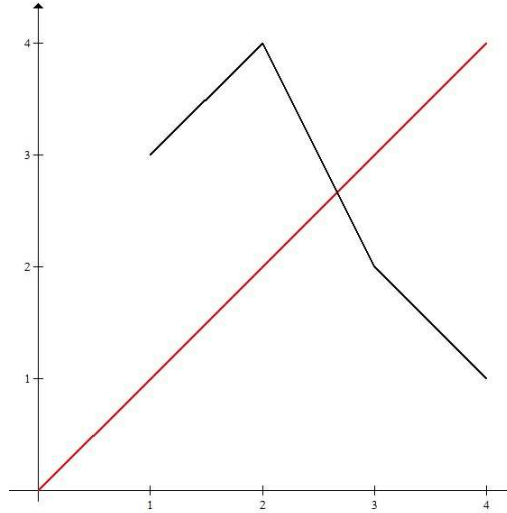


Figura 2.1: Gráfico de f .

Temos que $f(0) = 2, f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 0$.

Os pontos 0, 1, 2 e 3 são pontos periódicos de período 4, que pode ser facilmente verificado.

O ponto $x = \frac{5}{3}$ é ponto fixo de f , pois quando $f(x) = x$ temos que, $-2x + 5 = x$, e daí, $x = \frac{5}{3} \in (1, 2]$.

E de fato, $f\left(\frac{5}{3}\right) = -2\left(\frac{5}{3}\right) + 5 = \frac{-10+15}{3} = \frac{5}{3}$.

Consideremos a partição $I_1 = [0, 1], I_2 = [2, 3], I_3 = [1, 2]$ do intervalo I .

Então,

$$\begin{aligned} f(I_1) &= I_2 \\ f(I_2) &= I_1 \\ f(I_3) &= I_3 \cup I_2 . \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} f^2(I_1) &= f(f(I_1)) = f(I_2) = I_1 \\ f^2(I_2) &= f(f(I_2)) = f(I_1) = I_2 . \end{aligned}$$

Assim, definamos f^2 em I_1 e I_2 . Primeiramente para I_1 :

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(x + 2) = -(x + 2) + 3 = -x + 1.$$

Logo, quando $f^2(x) = x$, temos que $-x + 1 = x$, e assim, $x = \frac{1}{2} \in I_1$.

Agora para I_2 :

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(-x + 3) = (-x + 3) + 2 = -x + 5.$$

Logo, $f^2(x) = x$, temos que, $-x + 5 = x$, e assim, $x = \frac{5}{2} \in I_2$.

Daí, $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$ são pontos periódicos de período 2.

E ainda, como

$$\begin{aligned} f^2(I_1) &= I_1 \\ f^2(I_2) &= I_2 \end{aligned} \quad ,$$

temos

$$\begin{aligned} f^3(I_1) &= f(f^2(I_1)) = f(I_1) = I_2 \\ f^3(I_2) &= f(f^2(I_2)) = f(I_2) = I_1 \end{aligned} ,$$

ou seja, f não possui pontos periódicos de período 3.

De fato, verifiquemos primeiramente para I_1 :

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(-x + 1) = (-x + 1) + 2 = -x + 3,$$

logo, quando $-x + 3 = x$, temos que, $x = \frac{3}{2} \notin I_1$.

Agora, para I_2 :

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(-x + 5) = -(-x + 5) + 3 = x - 2,$$

logo, quando $x - 2 = x$, temos que $0x = 2$, o que é um absurdo.

Mas para I_3 temos que alguns pontos de I_3 depois de algumas iterações de f caem ou no intervalo I_2 ou no I_3 , e alguns são atraídos para órbitas de período 2 e 4 e alguns são pontos fixos de f .

Portanto, este exemplo tem pontos periódicos de período 1, 2 e 4, mas nenhum de período 3.

Do Exemplo 2.1.6 temos que período 4 não implica 3, mas podemos concluir que 4 implica 2.

E sabemos também que pela Propriedade 1.1.36 o período 3 implica todos os outros.

O teorema a seguir, resume os questionamentos que fizemos anteriormente.

Teorema 2.1.7. *Seja f uma função que possui um ponto periódico de período n .*

- (i) *Se $n > 1$, então f tem ponto fixo, ou seja, ponto periódico de período 1.*
- (ii) *Se $n = 3$, então f tem pontos periódicos de períodos 4 e 2.*
- (iii) *Se $n = 1$, então não podemos concluir a existência de outros pontos periódicos.*
- (iv) *Se $n = 2$, não implica a existência de ponto periódico de período 3.*
- (v) *Se $n = 4$, não implica a existência de ponto periódico de período 3.*

Foi o que incentivou Sarkovskii estudar sobre a ordem desses números.

2.2 Ordenação de Sarkovskii

Sarkovskii definiu uma nova ordem para os números naturais, onde o 3 é o primeiro número.

Definição 2.2.1. *Considere a seguinte ordem do conjunto dos números naturais, chamada a **ordenação de Sarkovskii**:*

$$\begin{aligned} 3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 2n+1 \triangleleft \dots \triangleleft 6 \triangleleft 10 \triangleleft 14 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \times (2n+1) \triangleleft \dots \\ \triangleleft 2^m \times 3 \triangleleft 2^m \times 5 \triangleleft 2^m \times 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^m \times (2n+1) \triangleleft \dots \\ \triangleleft \dots \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \triangleleft 2 \triangleleft 1. \end{aligned}$$

Onde $m \triangleleft n$ significa que m aparece antes de n , ou é 'menor'.

Uma pergunta interessante é se a ordenação de Sarkovskii é uma ordenação parcial ou total.

Podemos definir uma relação para a ordenação de Sarkovskii e assim, pensarmos se é uma ordenação parcial ou total.

Sejam

$$\begin{aligned} x &= 2^n p, \text{ onde } n \geq 0 \text{ e } p = 2^k + 1, k \geq 0, \\ y &= 2^m q, \text{ onde } m \geq 0 \text{ e } q = 2^{k_1} + 1, k_1 \geq 0, \\ z &= 2^{n_1} p_1, \text{ onde } n_1 \geq 0 \text{ e } p_1 = 2^{k_2} + 1, k_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A relação pode ser definida por: $x \triangleleft y$ se, e somente se,

$$\begin{cases} 1^a) & \text{se } p > 1, q > 1 \text{ e } n < m \text{ ou } (n = m \text{ e } p \leq q) \\ 2^a) & \text{se } p > 1 \text{ e } q = 1 \\ 3^a) & \text{se } p = q = 1 \text{ e } n \geq m \end{cases}$$

Proposição 2.2.2. *A ordenação de Sarkovskii é uma ordenação total.*

Demonstração:

Primeiramente, queremos mostrar que relação definida acima é realmente uma ordem, ou seja, provemos que é Reflexiva, Antissimétrica e Transitiva.

Então,

- *Reflexiva* ($x \triangleleft x$)

- Se $p > 1$, como $n \geq n$, então, $x \triangleleft x$, pela primeira parte da relação;
- Se $p = 1$, como $n \geq n$, então, $x \triangleleft x$, pela terceira parte da relação.

Note que a segunda parte da relação não acontece, pois se $p > 1$ então não podemos ter $p = 1$.

- *Antissimétrica* ($x \triangleleft y$ e $y \triangleleft x$ então $x = y$)

Então temos as hipóteses de que $x \triangleleft y$ e $y \triangleleft x$, assim,

$$\begin{cases} 1^a) & p > 1, q > 1 \text{ e } n < m \text{ ou } (n = m \text{ e } p \leq q) \\ 2^a) & p > 1 \text{ e } q = 1 \\ 3^a) & p = q = 1 \text{ e } n \geq m \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 1^a) & q > 1, p > 1 \text{ e } m < n \text{ ou } (m = n \text{ e } q \leq p) \\ 2^a) & q > 1 \text{ e } p = 1 \\ 3^a) & q = p = 1 \text{ e } m \geq n \end{cases}$$

Logo, acontece somente quando $p > 1$ e $q > 1$ ou $p = q = 1$, pois se $p > 1$ e $q = 1$, então, $y \not\triangleleft x$ e se $p = 1$ e $q > 1$, então, $x \not\triangleleft y$.

Assim, se $p > 1$ e $q > 1$, segue, de $x \triangleleft y$ e $y \triangleleft x$, que $n = m$ e $p = q$, então, pela primeira parte da relação $x = y$, e se $p = q = 1$, segue, de $x \triangleleft y$ e $y \triangleleft x$, que $n = m$, então, pela terceira parte da relação, $x = y$.

- *Transitiva* ($x \triangleleft y$ então $y \triangleleft z \Rightarrow x \triangleleft z$)

Temos as hipóteses de que $x \triangleleft y$ e $y \triangleleft z$, assim,

$$\begin{cases} 1^a) & p > 1, q > 1 \text{ e } n < m \text{ ou } (n = m \text{ e } p \leq q) \\ 2^a) & p > 1 \text{ e } q = 1 \\ 3^a) & p = q = 1 \text{ e } n \geq m \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 1^a) & q > 1, p_1 > 1 \text{ e } m < n_1 \text{ ou } (m = n_1 \text{ e } q \leq p_1) \\ 2^a) & q > 1 \text{ e } p_1 = 1 \\ 3^a) & q = p_1 = 1 \text{ e } m \geq n_1 \end{cases}$$

Se $p > 1$ e $q > 1$, então ou $p_1 > 1$ ou $p_1 = 1$.

Quando $p_1 > 1$ temos $n \leq m \leq n_1$, o que nos leva aos casos:

- $n = m = n_1$ que implica que $p \leq q \leq p_1$, logo, pela primeira parte da relação, $x \triangleleft z$;
- $n < m = n_1$, logo, pela primeira parte da relação, $x \triangleleft z$;
- $n = m < n_1$, logo, pela primeira parte da relação, $x \triangleleft z$;
- $n < m < n_1$ logo, pela primeira parte da relação, $x \triangleleft z$.

Quando $p_1 = 1$ temos, pela segunda parte da relação, $x \triangleleft z$.

Se $p > 1$ e $q = 1$, então $p_1 = 1$, logo, pela segunda parte da relação, $x \triangleleft z$.

Se $p = q = 1$, então $p_1 = 1$, o que implica que $n \geq m \geq n_1$, logo, pela terceira parte da relação, $x \triangleleft z$.

Assim, a relação é uma relação de ordem.

Agora nos resta mostrar que todos os elementos da ordem são comparáveis, ou seja, $x \triangleleft y$ ou $y \triangleleft x$.

Suponhamos que $x \not\triangleleft y$, onde x e y quaisquer distintos, então

1^a) $p = 1$ ou $q = 1$ ou $n > m$ e $(n \neq m$ ou $p > q)$

- se $p = 1$, então $n \neq m$, disso
 - $q > 1$, daí, ou $n < m$, logo, pela terceira parte da relação, $y \triangleleft x$, ou $n > m$, não acontece, pois $x \not\triangleleft y$, ou
 - $q = 1$, logo, pela segunda parte da relação, $y \triangleleft x$.
- se $q = 1$, então
 - $p = 1$, daí, $n \neq m$, assim, ou $n < m$, logo, pela terceira parte da relação, $y \triangleleft x$, ou $n > m$, não acontece, pois $x \not\triangleleft y$, ou
 - $p > 1$, não acontece, pois $x \not\triangleleft y$.
- $n > m$, então
 - $p > 1$ e $q > 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela primeira parte da relação, ou
 - $p > 1$ e $q = 1$, não acontece, pois $x \not\triangleleft y$, ou
 - $p = 1$ e $q > 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela segunda parte da relação, ou
 - $p = 1$ e $q = 1$, não acontece, pois $x \not\triangleleft y$.

2^a) $p = 1$ ou $q > 1$

- se $p = 1$, então
 - $q > 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela segunda parte da relação, ou
 - $q = 1$, e como $x \not\triangleleft y$, temos que $m > n$, logo, $y \triangleleft x$ pela terceira parte da relação.
- se $q > 1$, então
 - $p > 1$, e como $x \not\triangleleft y$, temos que $m > n$, logo, $y \triangleleft x$ pela primeira parte da relação, ou
 - $p = 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela segunda parte da relação.

3^a) $p > 1$ ou $q > 1$ ou $m > n$

- se $p > 1$, então
 - $q = 1$, e como $x \not\triangleleft y$, implica que $q \neq 1$, ou
 - $q > 1$, e como $x \not\triangleleft y$, temos que $m > n$, logo, $y \triangleleft x$ pela primeira parte da relação.
- se $q > 1$, então
 - $p = 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela segunda parte da relação, ou
 - $p > 1$, e como $x \not\triangleleft y$, temos que $m > n$, logo, $y \triangleleft x$ pela primeira parte da relação.
- se $m > n$, então
 - $p > 1$ e $q > 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela primeira parte da relação, ou
 - $p > 1$ e $q = 1$, não acontece, pois $x \not\triangleleft y$, ou
 - $p = 1$ e $q > 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela segunda parte da relação, ou
 - $p = 1$ e $q = 1$, logo, $y \triangleleft x$ pela terceira parte da relação.

Então, todos os elementos da ordem são comparáveis.

Portanto, a ordenação de Sarkovskii é uma ordenação total.

□

2.3 O Teorema

Teorema 2.3.1. Teorema de Sarkovskii

Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua que possui um ponto periódico com período n . Se $n \triangleleft m$, na ordenação de Sarkovskii, então f tem um ponto periódico de período m .

Observação 2.3.2. (i) Se f tem um ponto periódico de onde o período é uma potência de 2, então f tem um número finito de pontos periódicos. Agora, se f tem um ponto periódico que não é uma potência de 2, então f tem uma infinidade de pontos periódicos.

(ii) O número 3 na ordenação de Sarkovskii é o 'menor', ou seja, é o 'menor' período que f pode ter e o que implica a existência de todos os outros períodos.

Da Propriedade 1.1.36, de *Li-York*, do Capítulo 1, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e tem um ponto periódico de período 3, então existe pontos periódicos de todos os períodos e esta implicação é conhecida como um Corolário do Teorema de Sarkovskii, que recebe o nome de *Teorema de Li-Yorke*.

A partir de agora, apresentaremos algumas definições e resultados necessários para a demonstração do Teorema de Sarkovskii.

Proposição 2.3.3. *Seja $f : I \rightarrow I$ uma função contínua, onde I é um intervalo.*

- a) *Se $J \subset I$ é um intervalo tal que $f(J) \supset J$, então f tem um ponto fixo no fecho de J .*
- b) *Se $\{I_i \subset I; i = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma família de intervalos fechados tal que $f(I_i) \supset I_{i+1}$, então existe uma sequência encaixada e decrescente de intervalos J_n em I_0 tal que $f^n(J_n) = I_n$. Em particular, existe $x \in I_0$ tal que $f^i(x) \in I_i$ para cada $i \geq 0$.*

Demonstração:

- a) Seja $a < b$ pontos da fronteira de J .

Como $f(J) \supset J$, existe $z, w \in J$ tal que $f(z) \leq a$ e $f(w) \geq b$.

Então, se $g(x) = f(x) - x$, temos

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - z \leq f(z) - a \leq a - a \leq 0 \quad \text{e} \\ g(w) &= f(w) - w \geq f(w) - b \geq b - b \geq 0, \end{aligned}$$

pelo Teorema do Valor Intermediário, existe x_0 pertencente ao intervalo limitado por z e w tal que $g(x_0) = 0$.

Logo, $g(x_0) = 0$, então, $f(x_0) - x_0 = 0$.

Assim, $f(x_0) = x_0$.

Agora, considere o intervalo aberto X centrado em x_0 . Como $X \cap J \neq \emptyset$, pois $x_0 \in X \cap J$, temos x_0 é ponto aderente a J .

Portanto, f tem um ponto fixo no fecho de J .

- b) Como $f(I_0) \supset I_1$, por hipótese, existe um intervalo fechado $J_1 \subset I_0$ tal que $f(J_1) = I_1$.

De fato, seja $I_1 = [a, b]$, onde $f(I_0) \supset I_1$. E $x_n = \inf\{x_i; f(x_i) = a\}$ e $x_m = \inf\{x_i; f(x_i) = b\}$, sendo $J_1 = [x_n, x_m]$. Logo, $f(J_1) = [a, b] = I_1$, pois f é contínua e J_1 é conexo e fechado, por isso a imagem de $f(J_1)$ é um intervalo. Portanto, existe $J_1 \subset I_0$ tal que $f(J_1) = I_1$.

Suponhamos, por indução, que existam intervalos fechados $J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n$ tal que $f^i(J_i) = I_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Como, por hipótese, $f(I_n) \supset I_{n+1}$, existe um intervalo fechado $\tilde{I}_n \subset I_n$ tal que $f(\tilde{I}_n) = I_{n+1}$.

Mas, pela hipótese de indução, $f^n(J_n) = I_n \supset \tilde{I}_n$, existe um intervalo $J_{n+1} \subset J_n$ tal que $f^n(J_{n+1}) = \tilde{I}_n$.

Logo, $f(f^n(J_{n+1})) = f(\tilde{I}_n) = I_{n+1}$, o que implica que $f^{n+1}(J_{n+1}) = I_{n+1}$.

Então, existem intervalos fechados $J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n$ tal que $f^i(J_i) = I_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Como os intervalos J_i são encaixados, existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$ e, portanto, $f^n(J_n) = I_n$, para todo $n \geq 0$, cada um desses x satisfazem as propriedades necessárias, ou seja, $J_n \subset I_0$.

□

Com o intuito de uma melhor visualização dos dados e ideias usaremos uma ferramenta bastante eficaz que definiremos a seguir.

Definição 2.3.4. Dizemos que uma coleção de subintervalos fechados $\{I_k\}$ do intervalo I formam uma **partição** se o interior dos intervalos I_k são disjuntos dois a dois, ou seja, sendo I_i e I_j os respectivos sem os extremos, temos $I_i \cap I_j = \emptyset$

A cada uma dessas partições associamos um **Grafo de Markov** de $f : I \rightarrow I$ que é o gráfico cujo os vértices são intervalos da partição e as arestas são os pares (I_i, I_k) tal que $f(I_i) \supset I_k$.

Denotaremos tais arestas por $I_i \rightarrow I_k$. Em algumas partições, o número de arestas pode ser zero.

Da Proposição 2.3.3 podemos concluir que de todo caminho no grafo de Markov de uma partição, associamos um ponto cujo itinerário é exatamente a sequência de vértices neste caminho.

Se o caminho é um caminho fechado, isto é, um caminho do tipo $I_{i_0} \rightarrow I_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{i_{n-1}} \rightarrow I_{i_0}$, então, existe um ponto periódico $x \in I_{i_0}$ tal que $f^j(x) \in I_{i_j}$ e $f^n(x) = x$. Mas o período desse ponto periódico pode ser menor que n , pois os intervalos da partição não são disjuntos (somente o interior dos intervalos são disjuntos dois a dois), mesmo se os vértices $I_{i_0}, \dots, I_{i_{n-1}}$ são distintos.

Exemplo 2.3.5. *Sejam $1 < p_1 < p_2 < p_3 < 5$, onde $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 4$.*

Seja $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ tal que $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_3$ e $f(p_3) = p_1$, ou seja, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 2$.

Ou seja, f tem 2 como ponto 3-periódico, pois $f(2) = 3$ e,

$$\begin{aligned} f^2(2) &= f(f(2)) = f(3) = 4 \\ f^3(2) &= f(f^2(2)) = f(4) = 2. \end{aligned}$$

Considere uma partição $I_1 = [3, 4]$, $I_2 = [2, 3]$. Como $f(I_1) = f([3, 4]) = [2, 4]$ e $f(I_2) = f([2, 3]) = [3, 4]$, então, $f(I_1) \supset I_1 \cup I_2$ e $f(I_2) \supset I_1$, deste modo, $I_1 \rightarrow I_1$, $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_2 \rightarrow I_1$.

Assim, o grafo de Markov de f é:

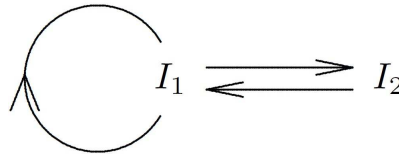


Figura 2.2: O grafo de Markov associado à um ponto periódico de período 3.

Vamos considerar o caminho fechado $I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$, com m arestas, onde $m > 3$.

Existe um intervalo $J \subset I_1$ tal que $f^i(J) \subset I_1$ para $0 \leq i < m - 1$, $f^{m-1}(J) \subset I_2$ e $f^m(J) = I_1$, pela Proposição 2.3.3, b).

E como $J \subset I_1$, existe $x \in J \subset I_1$ tal que $f^m(x) = x$, pela Proposição 2.3.3, a).

Logo, $f^i(x) \in I_1$ se $0 \leq i < m - 1$ e $f^{m-1}(x) \in I_2$.

- **Afirmção:** x é um ponto periódico de período m . Então, não há nenhum inteiro $0 < i < m$ com $f^i(x) = x$.

Com efeito, se $f^i(x) = x$ com $0 < i < m$, então $f^m(x) = f^i(x)$, logo, $f^{m-1}(x) = f^{i-1}(x) \in I_1$, pois $x = f^m(x)$.

Assim, $f^{m-1}(x) \in I_1 \cap I_2 = \{3\}$ e, portanto, $x = f^m(x) = f(f^{m-1}(x)) = f(3) = 4$. O que é impossível, pois $f(4) = 2 \notin I_1$.

Portanto, f tem um ponto periódico de todo período maior que 3.

Considerando o caminho $I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2$, temos também um ponto periódico de período 2, ou seja, seja $x \in I_2$ e $y \in I_1$, tal que $f(x) = y$ e $f(y) = x$ temos

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = x.$$

Para generalizarmos o caso anterior, seja x um ponto periódico de período n de uma função contínua $f : I \rightarrow I$. Sejam $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ os pontos da órbita de x definindo uma partição do intervalo $J = [x_0, x_{n-1}]$ em $n - 1$ intervalos fechados.

O grafo de Markov será uma ferramenta muito útil na demonstração do teorema, então, descreveremos algumas propriedades do grafo de Markov de f associado a esta partição, para podermos usá-las mais adiante.

Proposição 2.3.6. *Se f tem um ponto periódico de período ímpar n , então f tem pontos periódicos de todos os períodos maiores que n , bem como todos períodos pares menores que n .*

A Proposição 2.3.6 é um caso em particular da Proposição 2.3.7, mas supondo que exista os dois caminhos da Proposição 2.3.7, segue a demonstração da proposição a cima.

Demonstração da Proposição 2.3.6:

Se m é um número inteiro maior que n , ao olhar para o caminho de comprimento m ,

$$I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1,$$

concluimos, então, usando a Proposição 2.3.3, que existe um ponto periódico de período m .

Portanto, f tem pontos periódicos de todos os períodos maiores que n .

Se $m = 2i < n$ (par), o caminho

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-2i} \rightarrow I_{n-2i+1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1}$$

nos dá um ponto periódico de período m .

Portanto, f tem pontos periódicos de todos os períodos pares menos que n .

□

Resta mostrar que realmente acontece os dois casos de caminhos da proposição a seguir.

Proposição 2.3.7. *Suponha que f tenha pontos periódicos com período ímpar. Seja $n > 1$ o menor desses períodos e x um ponto periódico com período n . Então, o grafo de Markov correspondente contém os seguintes caminhos*

- i) $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$;
 ii) $I_{n-1} \rightarrow I_{2i+1}$ para todo i tal que $2i + 1 < n$.

Além disso, não há nenhuma aresta do tipo $I_j \rightarrow I_{j+k}$ se $k > 1$.

Ou seja, serão da forma:

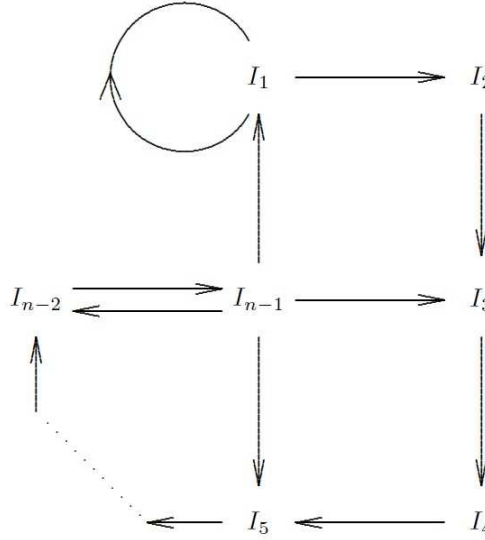


Figura 2.3: O grafo de Markov associado à um ponto periódico de período ímpar.

Para demonstrarmos da Proposição 2.3.7 necessitamos de mais alguns resultados envolvendo grafo de Markov.

Lema 2.3.8. *Existe um vértice $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$ do grafo de Markov de f tal que $f(I_1) \supset I_1$ e, de fato,*

$$f(x_{a+1}) \leq x_a < x_{a+1} \leq f(x_a).$$

Demonstração:

Como $O_f(x) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \in [x_0, x_{n-1}]$, onde x é um ponto n -periódico, temos $f(x_0) > x_0$ e $f(x_{n-1}) < x_{n-1}$.

Assim, existe um inteiro $0 < a < n - 1$ tal que $x_a = \max\{x_i; f(x_i) > x_i\}$.

Tomemos $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$.

Então, $f(x_a) > x_a$ e $f(x_{a+1}) < x_{a+1}$.

Assim, $f(x_a) \geq x_{a+1}$, $f(x_{a+1}) \leq x_a$ e $f(I_1)$ é um intervalo.

Portanto, $f(I_1) \supset I_1$.

□

A partir de agora, consideraremos I_1 como no Lema 2.3.8, ou seja, $f(I_1) \supset I_1$ e $f(x_{a+1}) \leq x_a < x_{a+1} \leq f(x_a)$.

O próximo lema, nos diz que se temos a condição acima do Lema 2.3.8, então existem arestas conectando I_1 a todos os outros vértices.

Lema 2.3.9. *Seja I_1 um vértice do grafo de Markov tal que $f(I_1) \supset I_1$, ou seja $I_1 \rightarrow I_1$. Então para qualquer vértice K do grafo de Markov existe uma partição conectando I_1 a K .*

Demonstração:

Seja V_i o conjunto de vértices que são pontos de extremidade de algum caminho de tamanho i iniciando em I_1 .

Assim, $K' \in V_i$ se existe um caminho $I_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_i$, com $K_i = K'$, logo, tem tamanho i .

Daí, $I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_i$ é caminho de tamanho $i + 1$, conectando I_1 a K' .

Portanto, $V_i \subset V_{i+1}$, onde V_{i+1} é o conjunto de vértices que são pontos de extremidade de algum caminho de tamanho $i + 1$ iniciando em I_1 .

Seja U_i o conjunto dos pontos contidos em algum $K' \in V_i$, isto é, $U_i = \bigcup \{K'; K' \in V_i\}$.

Assim, $U_{i+1} = \bigcup \{K'; K' \in V_{i+1}\}$.

Temos $U_i \subset U_{i+1}$.

- *Afirmção:* Se existe $K' \in V_i$ tal que $f(\partial K') \notin U_i$, então $V_{i+1} \neq V_i$.

De fato, se $f(z) \notin U_i$ para algum $z \in \partial K'$ então $f(K')$ contém um vértice (intervalo), digamos V_{i+1} , que tem $f(z)$ como extremidade e este vértice não está contido em V_i , ou seja, $V_{i+1} \not\subset V_i$. Portanto, $V_{i+1} \neq V_i$.

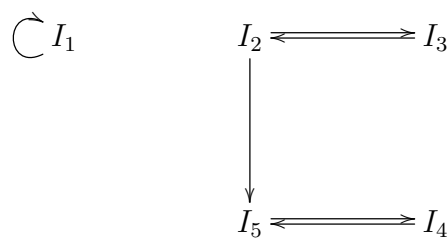
Como o número de vértice é igual a $n - 1$, existe um inteiro $i \leq n - 1$ tal que $V_i = V_{i+1}$.

Da afirmação acima, podemos concluir que $U_i \cap O_f(x)$ é invariante por f .

Portanto, $U_i = [x_0, x_n]$ e V_i é o conjunto de todos os vértices.

□

Já o lema a seguir, afirma que o grafo de Markov de uma função que tem um ponto periódico de período par e que I_1 é conectado somente a I_1 , será da seguinte forma.



Lema 2.3.10. *Suponhamos que não há nenhum vértice, diferente de I_1 , que podem ser conectados a I_1 por um caminho no grafo de Markov. Então, f mapeia os elementos da órbita de x que estão a esquerda do interior de I_1 para os elementos que estão à direita e vice-versa. Além disso, neste caso, o período de x é par e f tem um ponto periódico de período 2.*

Demonstração:

Se $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$ é como no Lema 2.3.8, então $f(x_a) \geq x_{a+1}$ e $f(x_{a+1}) \leq x_a$ e $f(I_1) \supset I_1$, satisfazendo a hipótese.

Se existe $x_i < x_a$ tal que $f(x_i) \leq x_a$, então, tomando $x_b = \max\{x_i < x_a; f(x_i) \leq x_a\}$, temos que $f(x_b) \leq x_a$ e $f(x_{b+1}) \geq x_{a+1}$, pois $f(x_{b+1}) > x_a$.

Daí, $f([x_b, x_{b+1}]) \supset I_1$, o que contradiz a hipótese.

Portanto, se $x_i < x_a$, temos que $f(x_i) \geq x_{a+1}$ e $f(x_i) \leq x_a$ para $x_i \geq x_{a+1}$.

Logo, o período de x é par.

Seja $J_0 = [x_0, x_a]$ e $J_1 = [x_{a+1}, x_{n-1}]$.

Assim, $f(J_0) \supset J_1$ e $f(J_1) \supset J_0$.

Logo, existe $z \in J_0$ tal que $f^2(z) = z$ e $f(z) \in J_1$, pois

$$f^2(J_0) = f(f(J_0)) \supset f(J_1) \supset J_0.$$

Portanto, z é um ponto periódico de período 2.

□

Agora que já temos as propriedades necessárias, provemos que realmente existem os caminhos da Proposição 2.3.7.

Demonstração da Proposição 2.3.7:

Pelos Lemas 2.3.8, 2.3.9 e 2.3.10, existem vértices $I_1, \dots, I_k$ tal que $f(I_k) \supset I_1$ e tal que existe um caminho $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k$.

Seja $k > 1$ o menor inteiro tal que exista um caminho $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$.

- *Afirmção:* $k = n - 1$. (par)

De fato, se $k < n - 1$, podemos concluir, considerando o caminho $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ (se k é ímpar) ou o caminho $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ (se k é par), a existência de um ponto periódico de período ímpar menor que n . O que contradiz a hipótese que n é o menor deles. Logo, $k = n - 1$.

Pela minimalidade de $n - 1$, não há nenhuma aresta do tipo $I_j \rightarrow I_{j+k}$ se $k > 1$, pois, caso contrário, teríamos um pequeno caminho conectando I_1 a ele mesmo.

Seja $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$.

Do Lema 2.3.8, $f(x_a) \geq x_{a+1}$ e $f(x_{a+1}) \leq x_a$. Uma vez que x não é um ponto periódico de período 2, pois $f^2(x_a) = f(f(x_a)) \geq f(x_{a+1}) \leq x_a$, devemos ter ou $f(x_{a+1}) < x_a$ ou $f(x_a) > x_{a+1}$.

Suponhamos que $f(x_{a+1}) < x_a$. Então, $f(x_a) = x_{a+1}$ e $f(x_{a+1}) = x_{a-1}$, uma vez que, de outro modo, $f(I_1)$ conteria não somente I_1 e I_2 mas, também outro vértice e contradizendo a propriedade que provamos (Lema 2.3.9).

Daí, $I_2 = [x_{a-1}, x_a]$, então I_2 é o primeiro intervalo da partição a esquerda de I_1 .

Uma vez que $f(x_a) = x_{a+1}$ e $f(x_{a-1}) \geq x_{a+1}$, devemos ter que $f(x_{a-1}) = x_{a+2}$ uma vez que, de outro modo, $f(I_2)$ poderia conter mais que um vértice, o que, de novo, contradiz a propriedade.

Assim, $I_3 = [x_{a+1}, x_{a+2}]$ e, portanto, I_3 é o primeiro intervalo da partição a direita de I_1 .

Usando este argumento, sucessivamente, temos que os intervalos com índices pares estão à esquerda de I_1 , enquanto os intervalos com índices ímpares estão à direita de I_1 . E estes intervalos estão ordenados no intervalo da seguinte maneira:

$$I_{n-1}, \dots, I_2, I_1, I_3, \dots, I_{n-2}.$$

Uma vez que para $i = 1, \dots, \frac{n-3}{2}$, $f(I_{2i})$ contém I_{2i+1} (Lema 2.3.3, b)) e não outro vértice, $f(x_1) = x_{n-1}$ e, portanto, $x_{n-1} \in f(I_{n-1})$.

Por outro lado, uma vez que $f(I_{n-1}) \supset I_1$, temos $f(I_{n-1}) \supset [x_a, x_{n-1}]$.

Portanto, $f(I_{n-1})$ contém todos os vértices que estão à direita de I_1 , que como vimos são os de índices ímpares.

□

A proposição a seguir, é um caso particular do Teorema de Sarkovskii, pois analisando a ordenação de Sarkovskii temos que o número 2 é o penúltimo dela, ou seja, o número 2, a menos do 1, é 'maior' que todos os números, inclusive os pares.

Proposição 2.3.11. *Se f tem um ponto periódico de período par, então, f tem um ponto periódico de período 2.*

Demonstração:

Seja $n \geq 2$ o menor inteiro tal que f tenha um ponto periódico de período n .

Suponhamos, por contradição, que $n > 2$.

Pela Proposição 2.3.6, n é par uma vez que, caso contrário, ou seja, ímpar, f teria um ponto periódico de período 2, pois teria todos os períodos pares menores que n .

Pelo Lema 2.3.10 existe um vértice I_k tal que $f(I_k) \supset I_1$, pois f não tem pontos periódicos de período 2.

Seja k o menor inteiro tal que o grafo de Markov tenha um caminho $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$.

Como f não tem pontos periódicos de período menor que n , temos, como na prova do Lema 2.3.7, $k = n - 1$ e não existe aresta do tipo $I_i \rightarrow I_{i+j}$ se $j > 1$.

Usando os mesmos argumentos como na prova do Proposição 2.3.7, temos que existe arestas conectando I_{n-1} a todos os vértices com índices pares.

Portanto, pelo caminho $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$ e pelo Proposição 2.3.3, f tem um ponto periódico de período 2, pois $f(I_{n-1}) \supset I_{n-2}$ e $f(I_{n-2}) \supset I_{n-1}$ o que implica que $f^2(I_{n-1}) = f(f(I_{n-1})) \supset f(I_{n-2}) \supset I_{n-1}$.

□

Agora, resumidamente, dividiremos a ordenação de Sarkovskii em dois casos, quando $n = 2^k$, que com as Proposições 2.3.3 e 2.3.11, e algumas manipulações algébricas conseguimos concluir a existência do ponto periódico de período m , e quando $n = p2^k$, com p ímpar, que assim teremos 3 subcasos, que conseguimos, com a Proposição 2.3.6 e, novamente, algumas manipulações algébricas, que tem ponto periódico de período m , onde $n \triangleleft m$.

Vamos a demonstração do **Teorema de Sarkovskii**:

Demonstração: Para demonstrarmos o Teorema, vamos dividir em dois casos, analisando a ordenação de Sarkovskii:

1) Suponha que f tem um ponto periódico de período $n = 2^k$.

Se $n \triangleleft m$, então, $m = 2^l$ com $l < k$.

Se $l = 0$, f teria um ponto periódico de período 1, ou seja, ponto fixo, o que sai da Proposição 2.3.3.

Se $l \neq 0$, então, $g = f^{\frac{m}{2}}$ tem um ponto periódico de período 2^{k-l+1} , pois como $g = f^{\frac{m}{2}}$, temos que, $f = g^{\frac{2}{m}}$, consequentemente, $f^{2^k}(x) = g^{(\frac{2}{m}) \cdot (2^k)}(x) = x$, assim, como $m = 2^l$, temos que, $f^{2^k}(x) = g^{(\frac{2}{2^l}) \cdot (2^k)}(x) = x$, então, $f^{2^k}(x) = g^{2^{1-l+k}}(x) = x$.

Logo, pela Proposição 2.3.11, g tem um ponto periódico de período 2, pois 2^{k-l+1} é par.

Assim, este seria um ponto periódico de período m para f , pois $g^2(x) = f^{2(\frac{m}{2})}(x) = x$, então, $g^2(x) = f^m(x) = x$.

Portanto, se $n \triangleleft m$, então, f tem um ponto periódico de período m .

2) Seja $n = p2^k$, onde p é ímpar e $k \geq 0$.

Se $n \triangleleft m$, temos três casos:

- a) $m = q2^k$, com $q > p$;
- b) $m = q2^k$, com q par;
- c) $m = 2^l$, com $l \leq k$.

Nos casos a) e b), $g = f^{2^k}$ tem um ponto periódico de período ímpar igual a p , pois como $g = f^{2^k}$, temos que, $f = g^{\frac{1}{2^k}}$, e assim, $f^{p2^k}(x) = g^{\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot (p2^k)}(x) = x$, e daí, $f^{p2^k}(x) = g^p(x) = x$.

Como $q > p$ no caso a), onde p é ímpar, ou q é par no caso b), temos, pela Proposição 2.3.6, g tem um ponto periódico de período q .

Assim, f tem um ponto periódico de período $q2^k$, que é precisamente m .

No caso c) temos, do caso b), que f tem um ponto periódico de período 2^{k+1} .

Uma vez que $l \leq k$, segue de 1) que f tem um ponto periódico de período m .

Portanto, se $n \triangleleft m$, então, f tem um ponto periódico de período m .

□

2.4 Exemplo

Para exemplificar o Teorema de Sarkovskii, apresentaremos uma função f tal que tenha pontos periódicos em cada parte da ordenação de Sarkovskii.

Então, seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} .$$

Logo, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$ e $f(1) = 0$.

Assim, como $f(0) = \frac{1}{2}$, então,

$$\begin{aligned} f^2(0) &= f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f^3(0) &= f(1) = 0 \end{aligned} ,$$

ou seja, 0 é ponto periódico de período 3.

Agora, fazendo $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ e $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ partições do intervalo $I = [0, 1]$ temos que $f(I_1) \supset I_2$ e $f(I_2) \supset I_1 \cup I_2$.

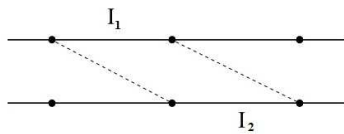


Figura 2.4: $f(I_1) \supset I_2$.

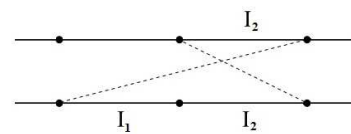


Figura 2.5: $f(I_2) \supset I_1 \cup I_2$.

Daí, o grafo de Markov de f , é:

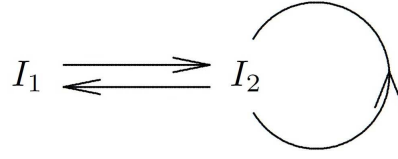


Figura 2.6: Grafo de Markov de f .

Queremos encontrar outros pontos periódicos, como já sabemos um ponto periódico de período 3, devemos encontrar outros períodos das outras duas partes da ordenação de Sarkovskii.

Seja $x \in I_1$, então, $f(x) = x + \frac{1}{2} \in I_2$.

$$\begin{aligned} f^2(x) = f(f(x)) &= 2 - 2(x + \frac{1}{2}) \\ &= 2 - 2x + \frac{1}{2} \\ &= 1 - 2x \in I_1 \cup I_2 . \end{aligned}$$

Se $f^2(x) \in I_1$, então, $1 - 2x = x$, conseqüentemente, $3x = 1$, e daí, $x = \frac{1}{3} \in I_1$.

Logo, $\frac{1}{3}$ é ponto periódico de período 2.

De fato,

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{3}) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \in I_2 \\ f^2(\frac{1}{3}) &= f(\frac{5}{6}) = 2 - 2(\frac{5}{6}) = \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Agora, se $f^2(x) \in I_2$, temos,

$$\begin{aligned} f^3(x) = f(f^2(x)) &= f(1 - 2x) \\ &= 2 - 2(1 - 2x) \\ &= 4x \in I_1 \cup I_2 . \end{aligned}$$

Se $f^3(x) \in I_1$, então, $4x = x$, e daí, $x = 0 \in I_1$.

Logo, 0, é ponto periódico de período 3, o que já sabíamos.

E se $f^3(x) \in I_2$, temos

$$\begin{aligned} f^4(x) = f(f^3(x)) &= f(4x) \\ &= 2 - 2(4x) \\ &= 2 - 8x \in I_1 \cup I_2 . \end{aligned}$$

Se $f^4(x) \in I_1$, então, $2 - 8x = x$, conseqüentemente, $9x = 2$, e daí, $x = \frac{2}{9} \in I_1$.

Logo, $\frac{2}{9}$ é ponto periódico de período 4.

De fato,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{9}\right) &= \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18} \in I_2 \\ f^2\left(\frac{3}{9}\right) &= f\left(\frac{13}{18}\right) = 2 - 2\left(\frac{13}{18}\right) = \frac{5}{9} \in I_2 \\ f^3\left(\frac{3}{9}\right) &= f\left(\frac{5}{9}\right) = 2 - 2\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{8}{9} \in I_2 \\ f^4\left(\frac{3}{9}\right) &= f\left(\frac{8}{9}\right) = 2 - 2\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{2}{9} . \end{aligned}$$

E se $f^4(x) \in I_2$, temos,

$$\begin{aligned} f^5(x) = f(f^4(x)) &= f(2 - 8x) \\ &= 2 - 2(2 - 8x) \\ &= -2 + 16x \in I_1 \cup I_2 . \end{aligned}$$

Se $f^5(x) \in I_1$, então, $-2 + 16x = x$, consequentemente, $15x = 2$, e daí, $x = \frac{2}{15} \in I_1$.

Logo, $\frac{2}{15}$ é ponto periódico de período 5.

De fato,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{15}\right) &= \frac{2}{15} + \frac{1}{2} = \frac{19}{30} \in I_2 \\ f^2\left(\frac{2}{15}\right) &= f\left(\frac{19}{30}\right) = 2 - 2\left(\frac{19}{30}\right) = \frac{11}{15} \in I_2 \\ f^3\left(\frac{2}{15}\right) &= f\left(\frac{11}{15}\right) = 2 - 2\left(\frac{11}{15}\right) = \frac{8}{15} \in I_2 \\ f^4\left(\frac{2}{15}\right) &= f\left(\frac{8}{15}\right) = 2 - 2\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{14}{15} \in I_2 \\ f^5\left(\frac{2}{15}\right) &= f\left(\frac{14}{15}\right) = 2 - 2\left(\frac{14}{15}\right) = \frac{2}{15} . \end{aligned}$$

E se $f^5(x) \in I_2$, temos

$$\begin{aligned} f^6(x) = f(f^5(x)) &= f(-2 + 16x) \\ &= 2 - 2(-2 + 16x) \\ &= 6 - 32x \in I_1 \cup I_2 . \end{aligned}$$

Se $f^6(x) \in I_1$, então, $6 - 32x = x$, consequentemente, $33x = 6$, e daí, $x = \frac{2}{11} \in I_1$.

Logo, $\frac{2}{11}$ é ponto periódico de período 6.

De fato,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{11}\right) &= \frac{2}{11} + \frac{1}{2} = \frac{15}{22} \in I_2 \\ f^2\left(\frac{2}{11}\right) &= f\left(\frac{15}{22}\right) = 2 - 2\left(\frac{15}{22}\right) = \frac{7}{11} \in I_2 \\ f^3\left(\frac{2}{11}\right) &= f\left(\frac{7}{11}\right) = 2 - 2\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{8}{11} \in I_2 \\ f^4\left(\frac{2}{11}\right) &= f\left(\frac{8}{11}\right) = 2 - 2\left(\frac{8}{11}\right) = \frac{6}{11} \in I_2 \\ f^5\left(\frac{2}{11}\right) &= f\left(\frac{6}{11}\right) = 2 - 2\left(\frac{6}{11}\right) = \frac{10}{11} \in I_2 \\ f^6\left(\frac{2}{11}\right) &= f\left(\frac{10}{11}\right) = 2 - 2\left(\frac{10}{11}\right) = \frac{2}{11} . \end{aligned}$$

E assim, se continuarmos este processo, encontraremos outros pontos periódicos de outros períodos.

Se começarmos o processo com $x \in I_2$ também encontraremos pontos periódicos.

Como, por exemplo $x = \frac{3}{5} \in I_2$ que é um ponto periódico de período 6, pois

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{5}\right) &= 2 - 2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \in I_2 \\ f^2\left(\frac{3}{5}\right) &= f\left(\frac{4}{5}\right) = 2 - 2\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} \in I_1 \\ f^3\left(\frac{3}{5}\right) &= f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10} \in I_2 \\ f^4\left(\frac{3}{5}\right) &= f\left(\frac{9}{10}\right) = 2 - 2\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{1}{5} \in I_1 \\ f^5\left(\frac{3}{5}\right) &= f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} \in I_2 \\ f^6\left(\frac{3}{5}\right) &= f\left(\frac{7}{10}\right) = 2 - 2\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Como o nosso objetivo era exemplificar o Teorema de Sarkovskii, escolhemos uma função tal que

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 2 \times 3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2.$$

Mas claro, como f tem ponto periódico de período 3, f tem pontos periódicos de todos os períodos.

As figuras abaixo representam as órbitas dos pontos periódicos que calculamos anteriormente no gráfico de f .

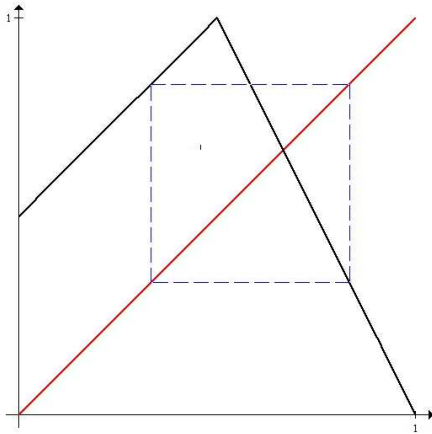


Figura 2.7: Órbita periódica de período 2 do ponto $\frac{1}{3}$.

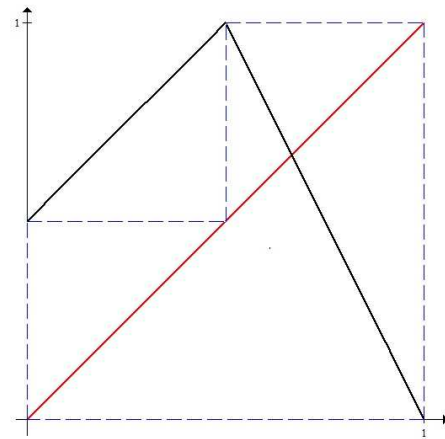


Figura 2.8: Órbita periódica de período 3 do ponto 0.

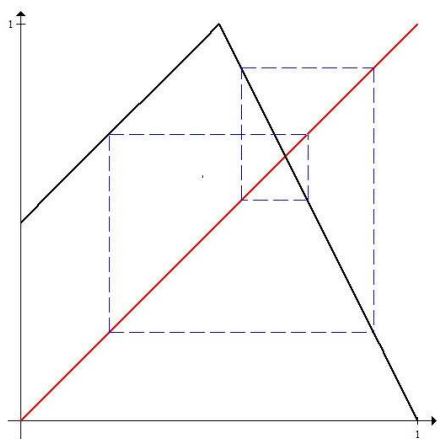


Figura 2.9: Órbita periódica de período 4 do ponto $\frac{2}{9}$.

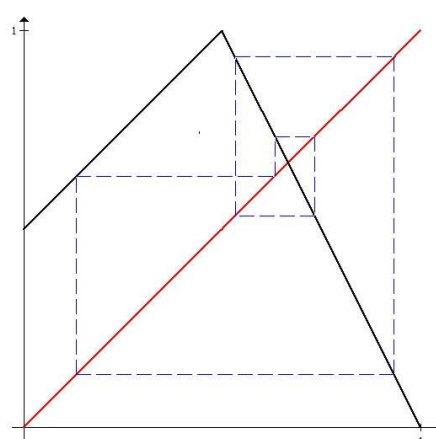


Figura 2.10: Órbita periódica de período 5 do ponto $\frac{2}{15}$.

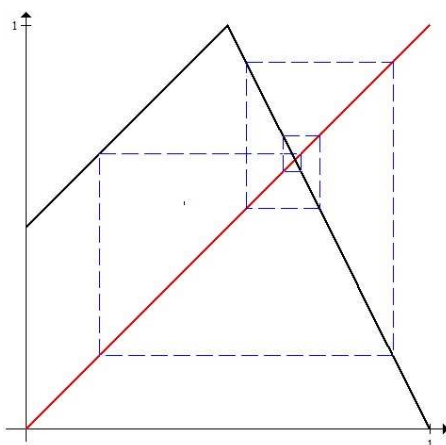


Figura 2.11: Órbita periódica de período 6 do ponto $\frac{2}{11}$.

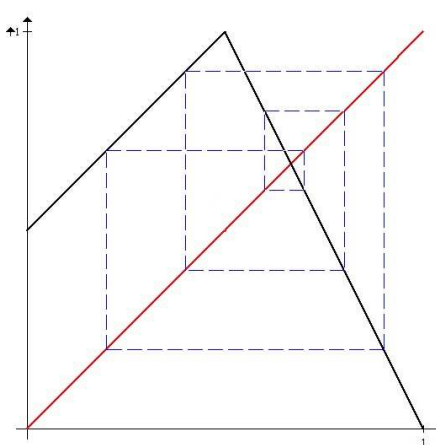


Figura 2.12: Órbita periódica de período 6 do ponto $\frac{3}{5}$.

Observação 2.4.1. O Teorema de Sarkovskii garante a existência de um ponto periódico de período m de uma função contínua f se f tem um ponto periódico de período n , onde $n \triangleleft m$.

A pergunta agora é se a inversa do teorema também é válida. A inversa é:

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $f : I \rightarrow I$ contínua tal que f tem ponto periódico de período n , mas não pontos periódicos de período m , para todo número natural m tal que $m \triangleleft \dots \triangleleft n$.

Dividiremos a ordenação de Sarkovskii em três casos:

Caso 1) Períodos ímpares;

Caso 2) Períodos da forma $2 \times p$, onde p é ímpar;

Caso 3) *Períodos da forma 2^n .*

Apresentaremos três exemplos de funções que tenham pontos periódicos de período n , mas não tem pontos periódicos de período m , onde $m \triangleleft n$, respondendo nosso questionamento.

Caso 1) *Períodos ímpares*

Exemplo 2.4.2. Escolhemos uma função f que tem ponto periódico de período 5, mas não tem ponto periódico de período 3, lembrando que na ordenação de Sarkovskii $3 \triangleleft 5$.

Seja $f : [0, 5] \longrightarrow [0, 5]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 3x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 7 - 2x & , \quad 1 < x \leq 3 \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x & , \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}.$$

Assim, $f(0) = 2, f(1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 1$ e $f(5) = 0$.

Cujo o gráfico é a Figura 2.13.

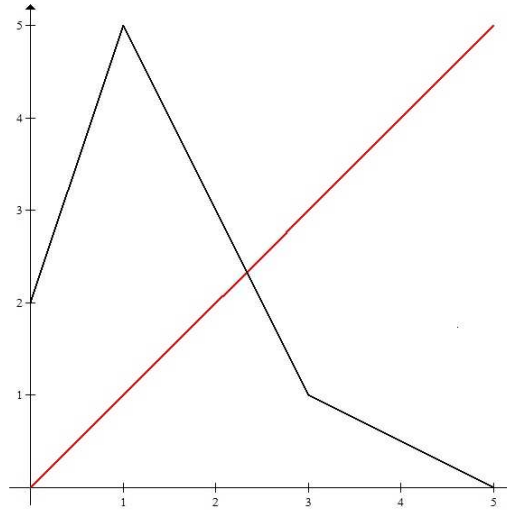


Figura 2.13: Gráfico de f .

Note que, 0, 1, 2, 3 e 5 são pontos periódicos de período 5 e que $\frac{7}{3}$ é o único ponto fixo de f .

Queremos mostrar que f não tem ponto periódico de período 3.

Considerando $[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 5]$ como uma partição de $[0, 5]$, temos que $f([0, 1]) = [2, 5]$, $f([1, 2]) = [3, 5]$, $f([2, 3]) = [1, 3]$ e $f([3, 5]) = [0, 1]$, assim,

$$\begin{aligned} f^2([0, 1]) &= [0, 3] & e & \quad f^3([0, 1]) = [1, 2] \\ f^2([1, 2]) &= [0, 1] & e & \quad f^3([1, 2]) = [2, 5] \\ f^2([2, 3]) &= [1, 5] & e & \quad f^3([2, 3]) = [0, 5] \supset [2, 3] \\ f^2([3, 5]) &= [2, 5] & e & \quad f^3([3, 5]) = [0, 3]. \end{aligned}$$

Então, podemos concluir que nos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[3, 5]$ f não tem pontos periódicos de período 3, já no intervalo $[2, 3]$ é mais complicado, pois $f^3([2, 3]) = [0, 5] \supset [2, 3]$, mas pela Proposição 1.1.25, do Capítulo 1, existe um ponto fixo de f^3 em $[2, 3]$.

Então, seja $x \in [2, 3]$ o ponto fixo de f^3 , assim, $f(x) \in f([2, 3]) = [1, 3]$.

Se $f(x) \in [1, 2]$ temos que $f^2(x) \in f([1, 2]) = [3, 5]$ e $f^3(x) \in f([3, 5]) = [0, 1]$. Deste modo, x não é ponto fixo de f^3 . Então, $f(x) \in [2, 3]$, o que implica, $f^2(x) \in f([2, 3]) = [1, 3]$ e $f^3(x) \in f([1, 3]) = [3, 5]$. Logo, x não é ponto fixo de f^3 .

Mas, em $[2, 3]$ f está definida por $f(x) = 7 - 2x$. Então, $f(x) = 7 - 2x$, assim,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = 7 - 2(7 - 2x) = -7 + 4x \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = 7 - 2(-7 + 4x) = 21 - 8x. \end{aligned}$$

Assim, $x = 21 - 8x$, então, $9x = 21$, e daí, $x = \frac{7}{3}$ que já é ponto fixo de f .

Portanto, f não tem ponto periódico de período 3.

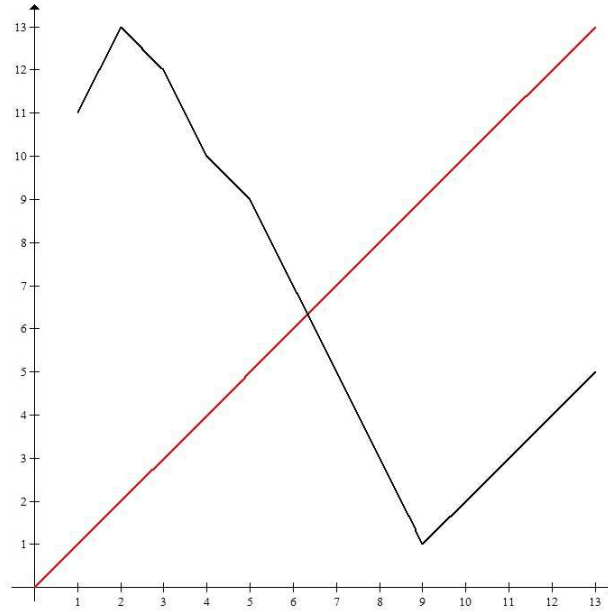
Caso 2) Períodos da forma $2 \times p$, onde p é ímpar

Exemplo 2.4.3. Uma função que f que tenha ponto periódico de período 2×5 , mas não tem ponto periódico de período 2×3 , que na ordenação de Sakovskii $2 \times 3 \triangleleft 2 \times 5$.

Seja $f : [1, 13] \longrightarrow [1, 13]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -x + 15 & , \quad 2 < x \leq 3 \\ -2x + 18 & , \quad 3 < x \leq 4 \\ -x + 14 & , \quad 4 < x \leq 5 \\ -2x + 19 & , \quad 5 < x \leq 9 \\ x - 8 & , \quad 9 < x \leq 13 \end{cases}.$$

Cujo gráfico é:

Figura 2.14: Gráfico de f .

Assim, temos $f(1) = 11, f(2) = 13, f(3) = 12, f(4) = 10, f(5) = 9, f(6) = 7, f(7) = 5, f(8) = 3, f(9) = 1, f(10) = 2, f(11) = 3, f(12) = 4$ e $f(13) = 5$.

Note que os pontos $1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12$ e 13 são pontos periódicos de período 10 e $\frac{19}{3}$ é o único ponto fixo de f .

Queremos mostrar que f não tem ponto periódico de período 6 , ou até mesmo outro período 'menor' que 10 na ordenação de Sarkovskii.

Particionando o intervalo $[1, 13]$ em $[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 9]$ e $[9, 13]$, temos que, $f([1, 2]) = [11, 13], f([2, 3]) = [12, 13], f([3, 4]) = [10, 12], f([4, 5]) = [9, 10]$ e $f([9, 13]) = [1, 5]$, assim,

$$\begin{array}{llllll}
 f^2([1, 2]) = [3, 5] & e & f^3([1, 2]) = [9, 12] & e & f^4([1, 2]) = [1, 4] & e & f^5([1, 2]) = [10, 11] & e & f^6([1, 2]) = [2, 3] \\
 f^2([2, 3]) = [4, 5] & e & f^3([2, 3]) = [9, 10] & e & f^4([2, 3]) = [1, 2] & e & f^5([2, 3]) = [11, 13] & e & f^6([2, 3]) = [3, 5] \\
 f^2([3, 4]) = [2, 4] & e & f^3([3, 4]) = [10, 13] & e & f^4([3, 4]) = [2, 5] & e & f^5([3, 4]) = [9, 13] & e & f^6([3, 4]) = [1, 5] \\
 & & & & & & & & \supset [3, 4] \\
 f^2([4, 5]) = [1, 2] & e & f^3([4, 5]) = [11, 13] & e & f^4([4, 5]) = [3, 5] & e & f^5([4, 5]) = [9, 12] & e & f^6([4, 5]) = [1, 4] \\
 f^2([9, 13]) = [9, 11] & e & f^3([9, 13]) = [1, 3] & e & f^4([9, 13]) = [11, 12] & e & f^5([9, 13]) = [3, 4] & e & f^6([9, 13]) = [10, 12] \\
 & & & & & & & & \subset [9, 13].
 \end{array}$$

Assim, nos intervalos $[1, 2], [2, 3]$ e $4, 5$, f não tem pontos periódicos de período 6 , nos intervalos $[3, 4]$ e $[9, 13]$ usamos o mesmo argumento do exemplo do Caso 1) para concluirmos que f também não tem pontos periódicos de período 6 .

Agora, já no intervalo $[5, 9]$ temos que $f([5, 9]) = [1, 9] \supset [5, 9]$, então pela Proposição 1.1.25, existe um ponto fixo de f em $[5, 9]$.

Sabemos que em $[5, 9]$, f está definida por $f(x) = -2x + 19$, então,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= -2(-2x + 19) + 19 = 4x - 19 \\ f^3(x) &= -2(4x - 19) + 19 = -8x + 57 \\ f^4(x) &= -2(-8x + 57) + 19 = 16x - 95 \\ f^5(x) &= -2(16x - 95) + 19 = -32x + 209 \\ f^6(x) &= -2(-32x + 209) + 19 = 64x - 399. \end{aligned}$$

Logo, $x = f^6(x)$, assim, $x = 64x - 399$, e daí, $x = \frac{19}{3}$ que já é ponto fixo de f .

E ainda, note que em todas as conclusões acima, podíamos ter feito para o período 5, que é $5 \triangleleft 6 \triangleleft 10$.

Portanto, f tem pontos periódicos de período 10, mas não tem de período 5 ou 6.

Caso 3) Períodos da forma 2^n

Exemplo 2.4.4. Uma função f que tenha ponto periódico de período 2, mas não tem ponto periódico de período 2^2 , ou qualquer outro 'menor' que 2 segundo a ordenação de Sarkovskii.

Seja

$$\begin{array}{ccc} f : [1, 2] & \longrightarrow & [1, 2] \\ x & \longmapsto & f(x) = -x + 3 \end{array}.$$

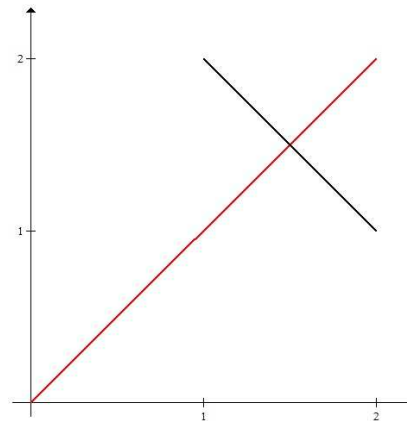


Figura 2.15: $f(x) = -x + 3$.

Assim, $x = f(x) \Rightarrow x = -x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, ou seja, $\frac{3}{2}$ é o único ponto fixo de f .

E, $x = f^2(x)$, assim, $x = -(-x + 3) + 3$, consequentemente, $x = x - 3 + 3$, e daí, $x = x$.

O que quer dizer que todos os pontos de $[1, 2]$ são pontos periódicos de período 2.

Portanto, não tem pontos periódicos de período 2^2 .

Capítulo 3

ENTROPIA TOPOLÓGICA E PONTOS PERIÓDICOS

Em [21] foi mostrado por Sarkovskii que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua com um ponto periódico n e $n \triangleleft m$, então f tem um ponto periódico de período m , que foi o nosso objeto de estudo do Capítulo 2. Já o Teorema que apresentaremos na Seção 3.2 nos dá uma cota inferior para o número de pontos periódicos da função.

3.1 Primeiros resultados

Nesta secção apresentaremos algumas definições e resultados que utilizaremos durante a demonstração do Teorema principal do capítulo. E tais resultados e suas demonstrações podem ser encontrados nas seguintes referências [11], [12], [14] e [23].

A proposição e o teorema a seguir serão usados durante a demonstração da Proposição 3.1.6.

Proposição 3.1.1. (*Proposition 2.8, [12]*)(*Proposition 1.4, [23]*)

Se $\mathcal{X}$ é um ponto, então $H_n(\mathcal{X}) = 0$ para $n > 0$ e $H_0(\mathcal{X}) \approx \mathbb{Z}$.

Se $\mathcal{X}$ é não vazio conexo por caminhos, então $H_0(\mathcal{X}) \approx \mathbb{Z}$.

Na proposição anterior, $H_n(\mathcal{X})$ refere-se ao grupo de homologia¹ n -dimensional de $\mathcal{X}$.

Teorema 3.1.2. (*Theorem 3.7, [14]*)

Seja K um anel comutativo e seja o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow A' & & \downarrow A & & \downarrow A'' \\ 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

¹Sobre o assunto indicamos as referências [9], [12] e [23].

onde as linhas são sequências exatas de módulos livres sobre K de dimensão finita e as aplicações verticais são aplicações K -lineares que fazem o diagrama comutar. Então,

$$\det(A - tI) = \det(A' - tI) \cdot \det(A'' - tI).$$

A definição a seguir pode ser encontrada em [11].

Definição 3.1.3. Uma matriz não negativa B é chamada de **irredutível** se para qualquer i, j tem-se $(B_{i,j})^r > 0$ para algum $r > 0$.

Observação 3.1.4. Na Definição 3.1.3, $(B_{i,j})^r$ significa o elemento b_{ij} da matriz B^r , ou seja, da potência r de B .

A proposição a seguir será usada na demonstração do item a) da Proposição 3.1.8.

Proposição 3.1.5. (p. 74, [11])

Consideremos uma matriz A redutível. Por uma permutação da base de A , podemos deixá-la da forma

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

onde B e D são matrizes quadradas.

Se as matrizes B ou D forem redutíveis, então podemos fazer o mesmo procedimento anterior e a matriz A assume a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ H & L & 0 \\ F & G & M \end{pmatrix}.$$

Se uma das matrizes K , L , M for redutível, então podemos continuar o processo. E finalmente, por uma permutação adequada, podemos reduzir A em blocos na forma triangular

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

onde os blocos da diagonal são matrizes quadradas irredutíveis.

O Teorema da Seção 3.2 apresenta uma cota superior para a entropia topológica de uma classe de funções do intervalo e uma cota para a quantidade de pontos periódicos de um certo período e foi provado por Bowewn e Franks, em 1970, em [3].

Inicialmente apresentaremos alguns resultados que utilizaremos para a demonstração do teorema.

Proposição 3.1.6. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua que possui um ponto periódico de período $n = 2^d m$, onde m é ímpar e $m > 1$. Então,*

$$h(f) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log \text{Tr}|A|^{Nk} - k \log 3),$$

onde N é fixo.

Demonstração:

Seja $T = \{x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}\}$ uma órbita de f , e seja $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, uma partição desta órbita.

Os intervalos $I_1, \dots, I_{n-1}$ podem ser vistos como um conjunto de geradores do grupo de homologia $H_1([0, 1], T, \mathbb{Z})$, pois $H_1([0, 1], T, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$.

Seja $A = (a_{ij})$, onde cada elemento a_{ij} da matriz A é o número algébrico de vezes que $f(I_i)$ intercepta I_j , que deve ser 0 ou 1 e $f_*(I_i) = \sum_j a_{ij} I_j$ é o homeomorfismo induzido².

Consideremos, agora, a sequência exata curta de Homologia:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1([0, 1], T) & \xrightarrow{g_1} & H_0(T) & \xrightarrow{g_0} & H_0([0, 1]) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_* = A & & \downarrow f_* = B & & \downarrow f_* = C \\ 0 & \longrightarrow & H_1([0, 1], T) & \xrightarrow{g_1} & H_0(T) & \xrightarrow{g_0} & H_0([0, 1]) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Assim, da sequência ser exata, o núcleo do homomorfismo g_0 é igual a imagem do homomorfismo g_1 , e ainda, por ser curta, g_1 é injetivo e g_0 é sobrejetivo.

Analisando os grupos de Homologia $H_0(T)$ e $H_0([0, 1])$, temos que $H_0(T) = \mathbb{Z}^n$, pois $H_0(T) = H_0\left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} H_0(\{x_j\}) = \mathbb{Z}^n$, pela Proposição 3.1.1 e $H_0([0, 1]) \simeq \mathbb{Z}$, por $[0, 1]$ ser conexo por caminhos e também pela Proposição 3.1.1.

Desde modo, B , a matriz da transformação f_* em relação aos geradores de $H_0(T)$ em $H_0(T)$ é uma matriz de permutação³ cíclica de ordem $n \times n$, significa que é uma matriz quadrada binária que depois de um certo número de potência torna-se a matriz identidade, logo,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

²Sobre o assunto indicamos as referências [9], [12] e [23].

³Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada binária que tem o efeito de gerar uma permutação dos elementos de um vetor ou entre linhas e colunas de uma matriz.

Então,

$$\begin{aligned}
\det(B - tI) &= \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -t \end{vmatrix} \\
&= (-t) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -t \end{vmatrix} \\
&\quad + (1) \cdot (-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & -t & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-t) \cdot (-t)^{n-1} + (-1)^{1+n} \cdot (1)^n \\
&= (-t)^n + (-1)^{1+n},
\end{aligned}$$

pois as matrizes são triangulares inferior e superior, respectivamente, e como n é ímpar temos que $\det(B - tI) = 1 - t^n$.

E ainda, $C = I$, logo, $\det(C - tI) = (1 - t)^n$, mas como $f_* = C = Id_{\mathbb{Z}}$ temos que C tem dimensão 1, logo, $\det(C - tI) = 1 - t$.

Como a sequência exata tem dimensão finita e o diagrama comuta, temos a seguinte igualdade $\det(B - tI) = \det(A - tI) \cdot \det(C - tI)$, do Teorema 3.1.2.

Então, substituindo os polinômios característicos conhecidos, temos, $1 - t^n = \det(A - tI) \cdot (1 - t)$ e, conseqüentemente, $\det(A - tI) = \frac{1 - t^n}{(1 - t)}$.

Assim, tomando $r = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}$, temos que $tr = t + t^2 + t^3 + \dots + t^n$.

Logo, $r - tr = 1 + t^n$, o que implica que, $r(1 - t) = 1 + t^n$, e daí, $r = \frac{1 + t^n}{(1 - t)}$.

Portanto, $\det(A - tI) = r = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}$.

Uma sequência finita $\underline{I} = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})$ de tamanho $k + 1$, é uma sequência **admissível** se $|a_{i_r, i_{r+1}}| = 1$, para $0 \leq r \leq k$, onde $|a_{i_r, i_{r+1}}|$ é o elemento da linha i_r e da coluna i_{r+1} da matriz A .

Definimos essas sequências, definindo uma aplicação F tal que $F(I_{i_1}) = I_{i_1}$ e escolhendo repetidamente $F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})$ tal que

- (a) $F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})$ é subintervalo fechado de I_{i_1} , e
- (b) $f(\text{interior } F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})) = \text{interior } F(I_{i_2}, \dots, I_{i_{k+1}})$

Deste modo, temos $f^r(\text{interior } F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})) = \text{interior } F(I_{i_{r+1}}, \dots, I_{i_{k+1}})$, para $0 \leq r \leq k$.

De fato, provemos por indução,

- para $n = 1$ temos da definição

$$f^1(\text{interior } F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})) = \text{interior } F(I_{i_2}, \dots, I_{i_{k+1}})$$

- suponhamos válido para $n = r - 1$, então

$$f^{r-1}(\text{interior } F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})) = \text{interior } F(I_{i_r}, \dots, I_{i_{k+1}})$$

- agora, verifiquemos para $n = r$

$$\begin{aligned} f^r(\text{interior } F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})) &= f(f^{r-1}(\text{interior } F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}}))) \\ &= f(\text{interior } F(I_{i_r}, \dots, I_{i_{k+1}})) \\ &= \text{interior } F(I_{i_{r+1}}, \dots, I_{i_{k+1}}) \end{aligned}$$

E ainda, $f^r(F(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})) = F(I_{i_{r+1}}, \dots, I_{i_{k+1}})$, pois, por hipótese, f é contínua.

Consideremos os valores absolutos de cada um dos elementos da matriz A , anteriormente definida, obtendo assim uma nova matriz, $|A| = (|a_{ij}|)$.

Assim, $(|A|_{i,j})^k$ é o número de seqüências admissíveis $(I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})$ onde $i_1 = i$ e $i_{k+1} = j$, ou seja, que começam em i e terminam em j .

Note que a diagonal principal de $|A|^k$ representa as seqüências que começam e terminam no mesmo intervalo, ou seja, quando $i_1 = i_{k+1}$ ou $i = j$, essas seqüências são **periódicas**. E o $Tr|A|^k$ é a quantidade dessas seqüências.

Para obter uma seqüência admissível periódica $\underline{I} = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})$, faremos f^k que levará o intervalo fechado $F(\underline{I}) \subset I_{i_1}$ em $I_{i_{k+1}}$ e, desta forma, $p(\underline{I}) \in F(\underline{I})$ com $f^k(p(\underline{I})) = p(\underline{I})$, onde $p(\underline{I})$ é um ponto.

Consideremos uma outra seqüência admissível periódica que $\underline{I}' = (I'_{i_1}, \dots, I'_{i_{k+1}})$ com $p(\underline{I}') = p(\underline{I})$, mas $\underline{I}'$ e $\underline{I}$ são distintas. Então, para algum $0 \leq r \leq k$,

- $i'_r \neq i_r$, assim $I_{i_r} \neq I'_{i_r}$;
- $f^r(p(\underline{I}')) = f^r(p(\underline{I})) \in I_{i_r} \cap I'_{i_r} \subset T$, pois a interseção dos intervalos acontece somente nos pontos da órbita; e

•

$$\begin{aligned}
f^r(\text{interior } F(\underline{I}) \cap \text{interior } F(\underline{I}')) &\subset f^r(\text{interior } F(\underline{I})) \cap f^r(\text{interior } F(\underline{I}')) \\
&\subset \text{interior } F(I_{r+1}, \dots, I_{k+1}) \cap \text{interior } F(I'_{r+1}, \dots, I'_{k+1}) \\
&\subset \text{interior } I_{i_{r+1}} \cap \text{interior } I'_{i_{r+1}} = \emptyset,
\end{aligned}$$

pois o interior dos intervalos da órbita são disjuntos.

Logo, $q = p(\underline{I}') = p(\underline{I})$ deve ser um ponto de extremidade de $F(\underline{I})$ e $F(\underline{I}')$, pois $\text{interior } F(\underline{I}) \cap \text{interior } F(\underline{I}') = \emptyset$ como visto a cima, e

$$\begin{aligned}
q &= f^k(q), \text{ pois é periódica} \\
&= f^{k-r+r}(q) \\
&= f^{k-r}(f^r(q)) \in f^{k-r}(T), \text{ pois } f^r(q) \in T.
\end{aligned}$$

Mas $f^{k-r}(T) = T$, então, $q \in T$.

Deste modo, qualquer repetição que fizermos na lista de $p(\underline{I})$'s com k fixo, devemos ter pontos de T , pois como vimos anteriormente, $q \in T$.

Seja $P_k = \{p(\underline{I}) ; \underline{I} = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}}) \text{ admissível e } i_1 = i_{k+1}\}$ o conjunto dos pontos das sequências admissíveis periódicas de tamanho $k + 1$.

Logo, a cardinalidade de P_k é, de pelo menos, $Tr|A|^k - n$, o que significa, $P_k \geq Tr|A|^k - n$, pois $p(\underline{I}) \in T$, e como são n pontos pertencentes à órbita, temos, $-n$.

Seja $F_N = \{F(\underline{I}) ; \underline{I} = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{N-1}}) \text{ admissível}\}$ uma família de intervalos fechados intersectando apenas os pontos de extremidade, como visto anteriormente, e $\epsilon_N > 0$, o menor dos comprimentos desses intervalos fechados, onde N é fixo.

Agora, podemos definir a relação $\mathcal{R}$ em P_{Nk} por $q\mathcal{R}q'$ se $d(f^{Nr}(q), f^{Nr}(q')) \leq \epsilon_N$, para todo $r \in [0, k]$.

Como $f^{Nr}(p(\underline{I})) \in F(I_{i_{Nr+1}}, \dots, I_{i_{k+Nr-1}})$ e $f^{Nr}(p(\underline{I}')) \in F(I'_{i_{Nr+1}}, \dots, I'_{i_{k+Nr-1}})$, usando a relação $\mathcal{R}$ em P_{Nk} definida anteriormente, temos que $p(\underline{I})\mathcal{R}p(\underline{I}')$ implica que $F(I_{i_{Nr+1}}, \dots, I_{i_{k+Nr-1}})$ e $F(I'_{i_{Nr+1}}, \dots, I'_{i_{k+Nr-1}})$ não tem nenhum intervalo de F_N entre eles, pois $d(f^{Nr}(p(\underline{I})), f^{Nr}(p(\underline{I}')) \leq \epsilon_N$.

Isto é, dado $\underline{I}$, existe, no máximo três escolhas possíveis de que $(I'_{i_{Nr+1}}, \dots, I'_{i_{k+Nr-1}})$ pode ser $\underline{I}'$ por $p(\underline{I})\mathcal{R}p(\underline{I}')$, assim, $p(\underline{I})$ pode ser $\mathcal{R}$ -relacionado, no máximo, com 3^k outros pontos de P_{Nk} .

Assim, encontramos um subconjunto $Q_k \subset P_{Nk}$ tal que não tenha dois pontos de Q_k que não são $\mathcal{R}$ -relacionados, ou seja, que não satisfazem $d(f^{Nr}(q), f^{Nr}(q')) \leq \epsilon_N$, para $0 \leq r < k$.

E ainda, a cardinalidade deste subconjunto multiplicada por 3^k , que é a quantidade de pontos de P_{Nk} que podem ser $\mathcal{R}$ -relacionado, é maior ou igual a cardinalidade de P_{Nk} , ou seja, $(3^k)\text{card } Q_k \geq \text{card } P_{Nk} \Rightarrow \text{card } Q_k \geq (\frac{1}{3^k})\text{card } P_{Nk}$.

Segundo a Definição 1.2.27 o conjunto Q_k é (Nk, ϵ_N) -separado por f , ou seja, existe um j tal que $0 \leq j < Nk - 1$ e $d(f^j(x), f^j(y)) > \epsilon_N$ para todo $x, y \in Q_k$ distintos.

Assim, podemos utilizar a definição de entropia topológica de Dinaburg e Rufus para conjunto (n, ϵ) -separado.

Então,

$$\begin{aligned}
h(f) &\geq h_r(\epsilon_k, f) \\
&= \lim_{\epsilon_N \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} \log(r(k, \epsilon_k, f)) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} \log(\text{card } Q_k) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} \log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k \text{card } P_{Nk}\right) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} \log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k \text{Tr}|A|^{Nk}\right) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} \left(\log \frac{1}{3^k} + \log \text{Tr}|A|^{Nk}\right) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log \text{Tr}|A|^{Nk} + \log 1 - \log 3^k) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log \text{Tr}|A|^{Nk} - \log 3^k) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log \text{Tr}|A|^{Nk} - k \log 3).
\end{aligned}$$

□

Observação 3.1.7. Como A é uma matriz redutível, podemos reordenar a base $\{I_1, \dots, I_{n-1}\}$, por uma permutação adequada, de tal forma que a matriz A terá a forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_t \end{pmatrix},$$

onde cada $|A_q|$ é irredutível, como na Proposição 3.1.5.

Usando as notações, para as matrizes A e A_q , da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.8. Consideremos a matriz A da Proposição 3.1.6. Então,

- a) $\det(A - tI) = \prod_{q=1}^t \det(A_q - tI)$;
- b) existe q tal que o termo linear de $p_q(t)$ é não nulo (onde $p_q(t)$ é o polinômio característico de A_q);
- c) $p_q(t)$ tem, pelo menos, grau 2;

- d) o grafo G é fortemente conectado, ou seja, para cada vértice existe caminhos para todos os outros vértices.

Demonstração:

- a) Já que A pode ser escrita como na Observação 3.1.7. Note que é uma matriz triangular e, assim, $\det(A) = \prod_{q=1}^t (A_q)$.

Logo,

$$\begin{aligned} t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1 &= \det(A - tI) \\ &= \prod_{q=1}^t \det(A_q - tI). \end{aligned}$$

Portanto, $\det(A - tI) = \prod_{q=1}^t \det(A_q - tI)$.

- b) Como $\det(A - tI) = 1 + t + \dots + t^{n-1}$ tem termo constante não nulo, então os termos constantes dos polinômios característicos $p_q(t) = \det(A_q - tI)$ devem ser ± 1 .

E ainda, alguns $p_q(t)$ devem ter um termo linear não nulo, pois suponhamos, por contradição, que todos os $p_q(t)$ tenham termo linear nulo, logo, $\prod_{q=1}^t p_q(t)$ também terá termo linear nulo, o que é uma contradição, pois

$$\prod_{q=1}^t p_q(t) = \prod_{q=1}^t \det(A_q - tI) = \det(A - tI),$$

que possui termo linear não nulo.

Portanto, algum $p_q(t)$ deverá ter termo linear não nulo.

- c) Suponhamos, por contradição, que seja de grau 1, já que de grau 0 sai de imediato do item b).

Então, $p_q(t)$ deve ser da forma $p_q(t) = c_1 + c_2 t$, com $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

Deste modo, $-\frac{c_1}{c_2}$ é uma raiz de $t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1$, pois pode ser escrito como o produto dos $p_q(t)$'s, ou seja,

$$t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1 = p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot \dots \cdot (c_1 + c_2 t) \cdot \dots \cdot p_t(t)$$

e, assim, teríamos,

$$\left(-\frac{c_1}{c_2}\right)^{n-1} + \dots + \left(-\frac{c_1}{c_2}\right)^2 + \left(-\frac{c_1}{c_2}\right) + 1 = p_1\left(-\frac{c_1}{c_2}\right) \cdot p_2\left(-\frac{c_1}{c_2}\right) \cdot \dots \cdot (c_1 + c_2 \left(-\frac{c_1}{c_2}\right)) \cdot \dots \cdot p_t\left(-\frac{c_1}{c_2}\right) = 0,$$

mas $t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1$, pelo Critério de Eisenstein e por n ser ímpar, é um polinômio irredutível, logo, não possui raízes reais.

Então, $p_q(t)$ deve ter grau maior que 1.

Daí, $p_q(t) = c_1 + c_2t + g(t)t^2$, com $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ e $g(t) \neq 0$ (onde $g(t)$ tem grau maior ou igual a zero), pois os $p_q(t)$'s tem termo constante não nulo, termo linear não nulo e devem ter grau maior que 1.

Portanto, $p_q(t)$ tem, pelo menos, grau 2.

d) Seja $s = \deg p_q(t) > 1$, ou seja, seja s o grau do polinômio $p_q(t)$.

Formemos o grafo direcionado G com vértices $\{1, \dots, s\}$ e uma aresta $i \rightarrow j$ se $|A_q|_{i,j} > 0$.

Então, grafo G é fortemente conectado, pois $|A_q|$ é uma matriz irredutível, ou seja, $(A_q)_{i,j}^r > 0$ para todo $r > 0$.

Suponhamos, por contradição, que G não seja fortemente conectado, que seja simplesmente um s -circuito (ou um circuito de tamanho s).

Então, reordenando a base A_q teríamos a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_3 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \epsilon_{s-1} \\ \epsilon_s & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\epsilon_i = \pm 1$ e todas as outras entradas são nulas.

Então, teríamos

$$\begin{aligned} \det(A_q - tI) &= \begin{vmatrix} -t & \epsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -t & \epsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -t & \epsilon_3 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \epsilon_{s-1} \\ \epsilon_s & 0 & 0 & 0 & \cdots & -t \end{vmatrix} \\ &= (-t) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -t & \epsilon_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -t & \epsilon_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -t & \epsilon_4 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \epsilon_{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -t \end{vmatrix} \\ &\quad + \epsilon_s \cdot (-1)^{1+s} \cdot \begin{vmatrix} \epsilon_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -t & \epsilon_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -t & \epsilon_4 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \epsilon_{s-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

como as duas matrizes são matrizes triangulares inferior e superior, temos que

seus determinantes são o produto da diagonal, então

$$\begin{aligned}\det(A_q - tI) &= (-t) \cdot (-t)^{s-1} + \epsilon_s \cdot (-1)^{1+s} \prod_{i=1}^{s-1} \epsilon_i \\ &= (-t)^s + (-1)^{1+s} \prod_{i=1}^s \epsilon_i \\ &= (-t)^s \pm \prod_{i=1}^s \epsilon_i,\end{aligned}$$

como $\epsilon_i = \pm 1$ temos $\det(A_q - tI) = (-t)^s \pm 1$, o que é uma contradição, pois $\det(A_q - tI)$ tem termo linear não nulo, logo, G não é simplesmente um s -circuito.

E, além disso, $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(Tr|A|^k)} > \sqrt[n]{2}$, o que implica que $\sqrt[k]{(Tr|A|^k)} > \sqrt[n]{2}$, o que será provado na Proposição 3.2.2.

□

3.2 Entropia topológica e pontos periódicos

Teorema 3.2.1. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua que possui um ponto periódico de período $n = 2^d m$, onde m é ímpar e $m > 1$. Então,*

- (1) *a entropia topológica $h(f) > \frac{1}{n} \log 2$,*
- (2) *existe um K_n (independente de f) tal que, se $r = 2^d k$ e $k \geq K_n$, então f tem, pelo menos, $2^{\frac{r}{n}}$ pontos de período primo r .*

Demonstração:

É suficiente mostrarmos o resultado para $d = 0$, ou seja, $n = 2^0 m = m$, assim, n é ímpar, pois se $d = 0$ temos que, se $h(f) > \frac{1}{n} \log 2 = \frac{1}{m} \log 2$ e $2^d m > m$, assim, $\frac{1}{m} > \frac{1}{2^d m}$, e consequentemente, $\frac{1}{m} \log 2 > \frac{1}{2^d m} \log 2$.

Sabemos que $h(f^{2^d}) = 2^d h(f)$ pelo Teorema 1.2.26.

Logo,

$$\begin{aligned}h(f) &> \frac{1}{m} \log 2 \\ &> \frac{1}{2^d m} \log 2 \\ &= \frac{1}{n} \log 2.\end{aligned}$$

E se $r = 2^d k$, onde $k \geq K_n$ (independente de f), então f tem pelo menos $2^{\frac{r}{n}}$ pontos de período primo r , mas

$$2^{\frac{r}{n}} = 2^{\frac{2^d k}{2^d m}} = 2^{\frac{k}{m}}.$$

Logo, se $d = 0$, então f tem pelo menos $2^{\frac{k}{m}}$ pontos de período primo k .

Usando as notações das Proposições 3.1.6 e 3.1.8, consideremos o ponto $p = p(\underline{I})$ um circuito em G , onde $\underline{I} = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{k+1}})$ é periódica, ou seja, $i_1 = i_{k+1}$.

Queremos contar o número, chamemos de $N_k^*(G)$, de pontos obtidos desta forma que tem período primo k .

Se p tem período l , com $l < k$, então, $l|k$ e $f^{r+l}(p) = f^r(f^l(p)) = f^r(p) \in I_{i_{r+l}} \cap I_{i_r}$.

Assim, ou $\underline{I}$ é uma sequência de período l , isto é, $I_{i_{r+l}} = I_{i_r}$, para todo r , ou $p \in T$.

Excluindo os dois casos anteriores, temos, pelo menos,

$$(Tr|A_q|^k - n) - n - \sum_{l|k} Tr|A_q|^l,$$

o que implica que

$$Tr|A_q|^k - 2n - \sum_{l|k} Tr|A_q|^l,$$

que são k -caminhos de $\underline{I}$ em G com $p(\underline{I}) \notin T$ e $p(\underline{I})$ com período k .

Subtraímos $\sum_{l|k} Tr|A_q|^l$, pois todos os pontos de período l , com $l|k$, já foram incluídos em $Tr|A_q|^k$.

Como anteriormente, a condição $p(\underline{I}) \notin T$ implica que $p(\underline{I})$'s são distintos para estes caminhos diferentes.

Assim,

$$N_k^*(G) \geq Tr|A_q|^k - 2n - \sum_{l|k} Tr|A_q|^l.$$

O Teorema Perron-Frobenius diz que existe um autovalor $\lambda > 0$ de $|A_q|$ tal que $\lambda \geq |\lambda_i|$ para todos os outros autovalores λ_i de $|A_q|$. Além disso, ou

- a) λ é simples e $\lambda > |\lambda_i|$ para $\lambda_i \neq \lambda$, ou
- b) existe uma k -ésima raiz ξ de l ($k > l$) tal que $\lambda_i \rightarrow \xi \lambda_i$ permuta os autovalores de $|A_q|$ ([11]).

Então, se acontece b), $k|s$, pois $u \rightarrow \xi u$ permuta o conjunto de s autovalores de $|A_q|$ e

$$\begin{aligned}
p_q(t) &= \prod_{i=1}^s (u_i - t) \\
&= \prod_{i=1}^s \left(\frac{u_i}{\xi} - t \right) \\
&= \prod_{i=1}^s \left(\frac{u_i - \xi t}{\xi} \right) \\
&= \prod_{i=1}^s \xi^{-1} (u_i - \xi t) \\
&= \xi^{-s} \prod_{i=1}^s (u_i - \xi t) \\
&= p_q(\xi t),
\end{aligned}$$

o que contradiz $p_q(t)$ ter o termo linear diferente de zero, como mostrado no item *b*) da Proposição 3.1.8.

Daí, o caso *a*), garante a existência de um $c > 1$, tal que

$$c\lambda^k \leq Tr|A_q|^k = \sum_{i=1}^s \lambda_i^k \leq s\lambda^k, \quad (3.1)$$

para k grande.

Então,

$$\begin{aligned}
N_k^*(G) &\geq Tr|A_q|^k - 2n - \sum_{l|k} Tr|A_q|^l \\
&\geq c\lambda^k - 2n - \sum_{l|k} Tr|A_q|^l \\
&\geq c\lambda^k - 2n - s \sum_{l|k} \lambda^l \\
&\geq c\lambda^k - 2n - s \sum_{j \leq 2} \lambda^j \\
&\geq c\lambda^k - 2n - \frac{s\lambda^{\frac{k}{2}}}{\lambda - 1}.
\end{aligned}$$

E ainda, pela Proposição 3.2.2 e pela desigualdade 3.1, temos que $\lambda > Tr|A_q|^k > \sqrt[n]{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
N_k^*(G) &\geq c\lambda^k - 2n - \frac{s\lambda^{\frac{k}{2}}}{\lambda - 1} \\
&\geq c(2^{\frac{1}{n}})^k - 2n - \frac{s(2^{\frac{1}{n}})^{\frac{k}{2}}}{(2^{\frac{1}{n}}) - 1} \\
&\geq c2^{\frac{k}{n}} - 2n - \frac{s2^{\frac{k}{2n}}}{(2^{\frac{1}{n}}) - 1} \\
&\geq c2^{\frac{k}{n}} \\
&\geq 2^{\frac{k}{n}},
\end{aligned}$$

para $k \geq$ a algum K_G , provando (2) do Teorema, onde $K_n > K_G$ para um número finito de G , que pode ocorrer para um n fixo.

Para provar (1), temos

$$\begin{aligned}
h(f) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log \text{Tr}|A|^{Nk} - k \log 3) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log (c\lambda^{Nk}) - k \log 3) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log c + \log \lambda^{Nk} - k \log 3) \\
&\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{Nk} (\log c + Nk \log \lambda - k \log 3) \\
&\geq \log \lambda - \frac{1}{N} \log 3 \\
&> \log \lambda \\
&> \log 2^{\frac{1}{n}} \\
&> \frac{1}{n} \log 2,
\end{aligned}$$

para todo $N > 0$.

□

Para concluir, segue a prova do resultado apresentado no final do item *d*) da Proposição 3.1.8.

Proposição 3.2.2. *Temos a seguinte consequência $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(\text{Tr}|A|^k)} > \sqrt[n]{2}$. Logo, $\sqrt[k]{(\text{Tr}|A|^k)} > \sqrt[n]{2}$.*

Demonstração:

Seja C_1 um circuito de comprimento mínimo em G . Seja o comprimento de C_1 igual a a , onde $a < s$, pois pelo item *d*) da Proposição 3.1.8, G é fortemente conectado e não apenas um circuito.

Escolhamos P um caminho de G , tal que P seja de comprimento mínimo e suas extremidades estão em C_1 e o restante dos vértices estão fora.

Então, ou $P = C_2$ é um novo circuito, ou temos um circuito C_2 passando por todo P e partindo de C_1 .

Assim, em ambos os casos, temos um circuito $C_2 \neq C_1$, onde o comprimento de C_2 é igual a b e $b \leq s$, e ainda v é um vértice comum a C_1 .

Agora, sejam todos os circuitos C_t partindo de e chegando em v . Daí, formemos todos os caminhos da forma $C_{j_1}C_{j_2}C_{j_3} \dots C_{j_r}$, onde $j_r = 1$ ou 2 .

Logo, cada um desses caminhos que formamos anteriormente é uma sequência admissível sendo distintas, para $j_1, j_2, \dots, j_r$ distintos.

Denotemos por L_r o número de sequências de comprimento r obtidas da forma

anterior. Esse número satisfaz,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} L_r t^r &= \sum_{k=1}^{\infty} (t^a + t^b)^k \\ &= \frac{t^a + t^b}{1 - t^a - t^b}\end{aligned}$$

Se α é raiz positiva de $1 - t^a - t^b = 0$, então a série de potência $\sum_{r=1}^{\infty} L_r t^r$ tem raio de convergência de no máximo α , ou seja, $\sqrt[r]{L_r} \geq \frac{1}{\alpha}$.

Como $Tr|A_q|^r \geq L_r$, fazendo $\alpha < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, e $a, b < n$, temos

$$\begin{aligned}Tr|A_q|^r \geq L_r \Rightarrow \sqrt[r]{Tr|A_q|^r} &\geq \sqrt[r]{L_r} \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \\ &> \sqrt[n]{2}.\end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt[k]{(Tr|A|^k)} > \sqrt[n]{2}$.

□

Capítulo 4

SOBRE UMA CONJECTURA DE SMALE

O resultado do Capítulo 3 com o exemplo apresentado na Seção 4.2 estão relacionados da seguinte maneira: o Teorema do Capítulo 3 nos dá uma limitação da existência de pontos periódicos da função, nos permitindo concluir o número de pontos periódicos de um certo período e existem funções do intervalo com número finito de pontos periódicos, todos com período de potência de 2 e o difeomorfismo do exemplo é obtido como um limite de tais funções.

4.1 Sobre a conjectura

Os conteúdos a seguir foram retirados do artigo [22], apresentado por Smale.

Seja $T : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com ponto fixo $p \in M$. A DT em p é um automorfismo linear do espaço tangente M_p de M em p .

Definição 4.1.1. *O ponto fixo p chamaremos de elementar de T se $DT(p)$ não tem autovalor de valor absoluto igual a 1.*

Definimos T , em um conjunto $\mathcal{C}_M$ de $\mathcal{D}_M$ se, e somente se, T tem as seguintes propriedades:

- a) Todo ponto periódico de T é elementar.
- b) Seja β_1, β_2 órbitas periódicas elementares de T , W_1^u, W_2^s variedades instável de β_1 e estável de β_2 , respectivamente. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de β_1 com a seguinte propriedade: cada componente de $\mathcal{U} \cap W_2^s$ é uma célula que tem uma interseção transversal não-vazia com W_1^u . E o mesmo acontece com W_1^u, W_2^s quando substituído por W_1^s, W_2^u , respectivamente.

- c) (i) Seja Ω o fecho do conjunto dos pontos periódicos de T em M . Então, para todo $x \in M$, $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} T_x^m \subset \Omega$.
- (ii) A união das variedades estáveis de todas as órbitas periódicas de T é um subconjunto denso de M . O mesmo é verdade para as variedades instáveis.

Observação 4.1.2. $\mathcal{D}_M$ é um conjunto de C^r -difeomorfismo de M na C^r topologia, onde M é um compacto.

Definição 4.1.3. Um ponto periódico elementar p é chamado *elíptico*, se todos os autovalores de $DT(p)$ tem valor absoluto inferior a 1, ou todos maiores.

Assim, Smale em 1962 conjecturou, em [22], que se $T \in \mathcal{C}_M$, então T terá um número finito de pontos elípticos. E ainda, se $T \in \mathcal{C}_M$, onde M é a S^2 , deve ter pelo menos um ponto elíptico.

Em 1975, Rufus Bowen e John Franks construíram um exemplo respondendo a esta pergunta.

O exemplo a seguir foi construído um C^1 difeomorfismo de S^2 com nenhum ponto elíptico.

4.2 O Exemplo

Teorema 4.2.1. Existe uma C^1 -imersão de um disco bidimensional em si mesmo, que é Kupka-Smale e não tem fontes ou poços periódicos. Esta imersão tem exatamente uma órbita hiperbólica de período 2^n , para cada $n \geq 0$ e não outros pontos periódicos.

Antes de apresentarmos a construção desse difeomorfismo, lembremos o que é um difeomorfismo Kupka-Smale.

Definição 4.2.2. Um difeomorfismo f é chamado de difeomorfismo Kupka-Smale se:

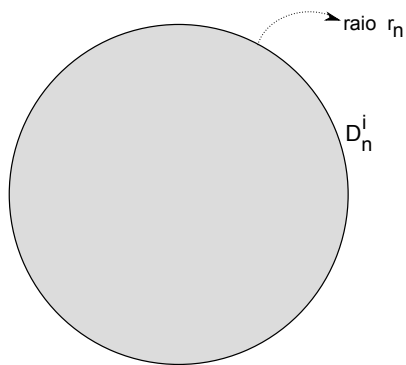
- i) todos os pontos periódicos de f são hiperbólicos; e
- ii) para cada par de pontos periódicos p, q de f a interseção entre a variedade estável de p e a variedade instável de q é transversal.

Agora podemos iniciar a construção.

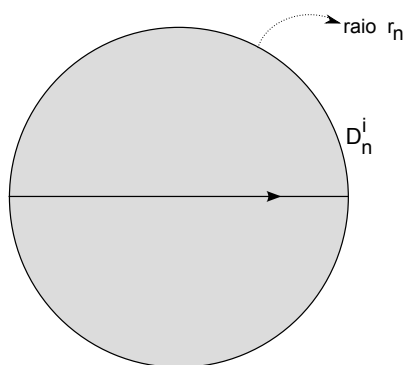
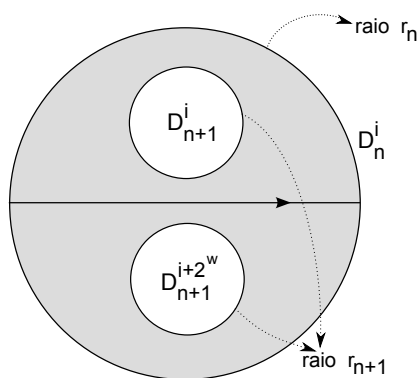
Demonstração:

Escolhamos uma sequência de números reais positivos $\{r_n\}_{n=0}^\infty$, tal que $r_{i+1} < \frac{1}{4}r_i$.

Para cada n , formemos uma família de 2^n discos de raio r_n , que denotaremos por $D_n^1, D_n^2, D_n^3, \dots, D_n^{2^n}$.

Figura 4.1: Disco D_n^i .

Em cada um desses discos, escolhemos e orientamos um eixo diametral e então, deletamos dois discos colocados simetricamente de raio r_{n+1} .

Figura 4.2: Disco D_n^i com eixo diametral orientado.Figura 4.3: Disco D_n^i com eixo diametral orientado com discos deletados.

Os discos que deletaremos estão contidos no interior do círculo de raio $\frac{2}{3}r_n$.

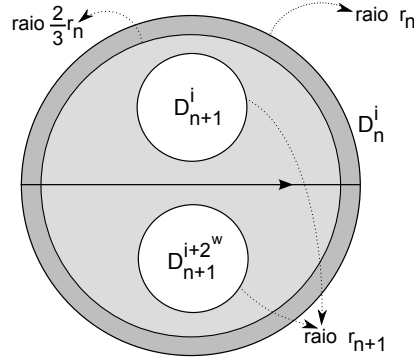


Figura 4.4: Disco D_n^i com o círculo de raio $\frac{2}{3}r_n$.

Seja também, $A_n^i = \{X \in D_n^i ; \frac{2}{3}r_n \leq X \leq r_n\}$, como mostrado na Figura 4.5.

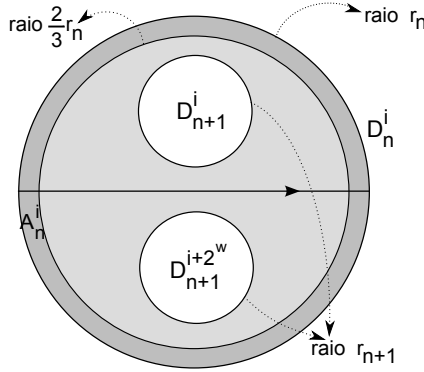


Figura 4.5: Disco D_n^i com o anel A_n^i representado.

Denotaremos por B_n^i o disco D_n^i com os dois discos menores removidos.

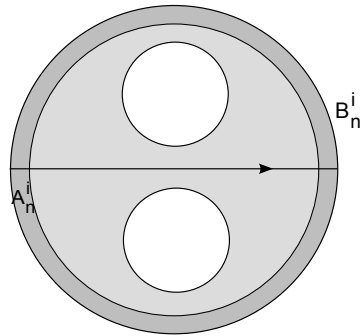


Figura 4.6: Disco D_n^i com os dois discos removidos, ou seja, B_n^i .

Agora, indutivamente, colocaremos os discos $\{D_{n+1}^i\}$ nos 2^{n+1} "buracos" em $\{B_n^i\}$, de tal maneira que o eixo de D_{n+1}^1 faça um ângulo de $\frac{(i-1)\pi}{2^{n+1}}$ com o eixo x positivo (assumimos que D_0^1 é o disco unitário em $\mathbb{R}^2$ e seu eixo orientado positivamente na direção x).

Vejamos como acontece no D_0^1 , como mostra as figuras a seguir.

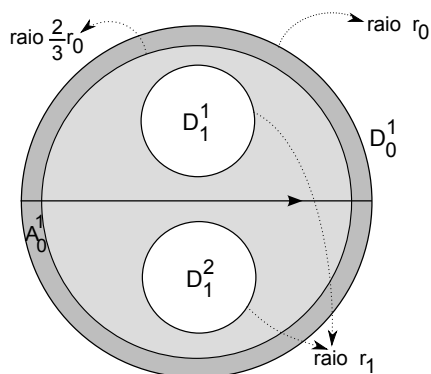


Figura 4.7: D_0^1 .

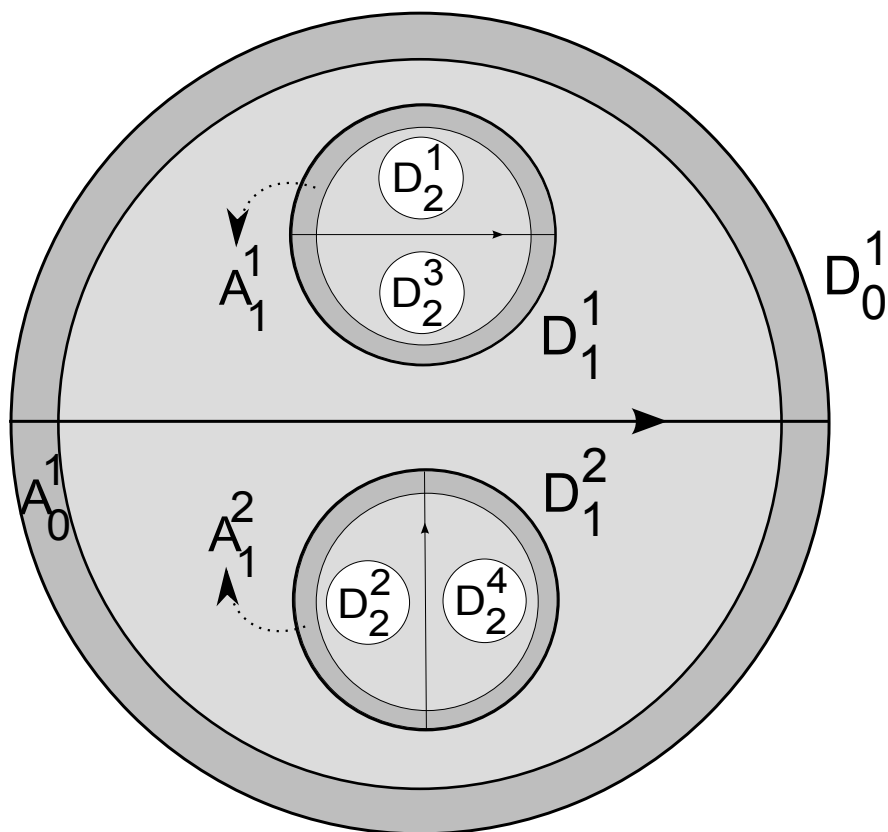


Figura 4.8: D_1^1 e D_1^2 no 'buracos' de B_0^1 .

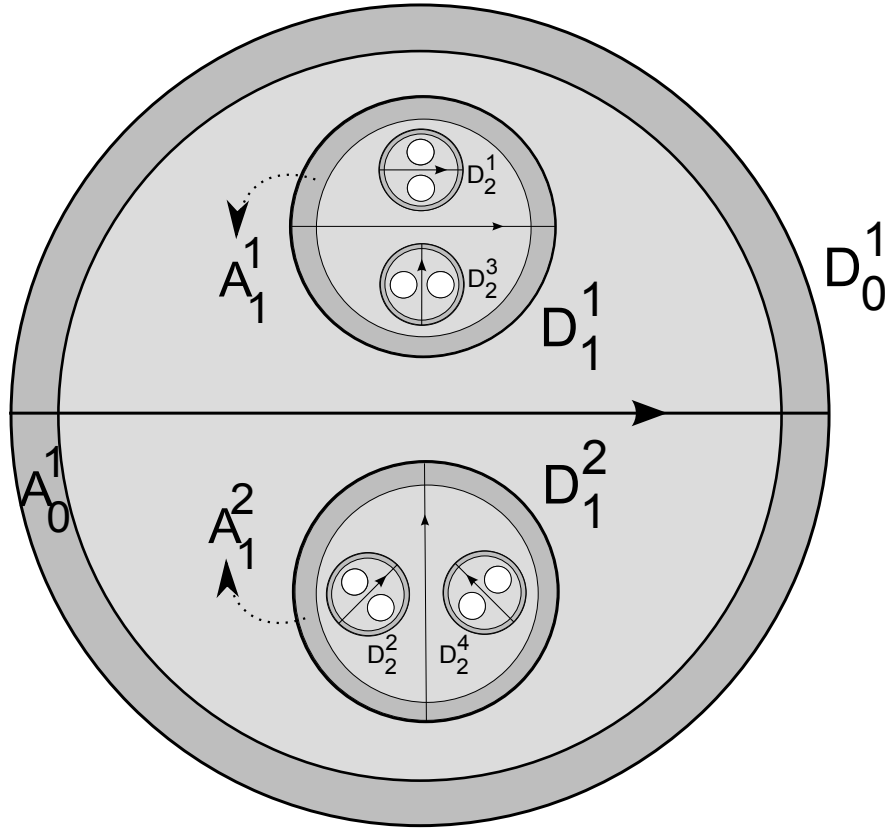


Figura 4.9: $D_1^1, D_1^2, D_2^1, D_2^2, D_2^3$ e D_2^4 nos respectivos 'buracos' de B_0^1, B_1^1 e B_1^2 .

E se continuarmos esse processo, colocar no 'buracos' de B_2^1, B_2^2, B_2^3 e B_2^4 , teremos $D_3^1, D_3^2, D_3^3, D_3^4, D_3^5, D_3^6, D_3^7, D_3^8$. E serão da seguinte maneira:

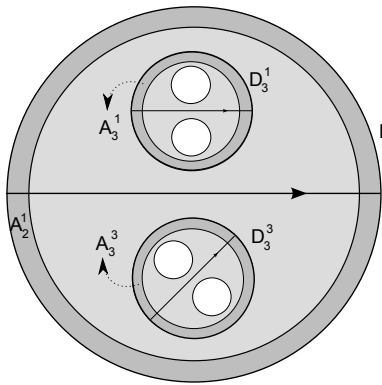


Figura 4.10: D_2^1 .

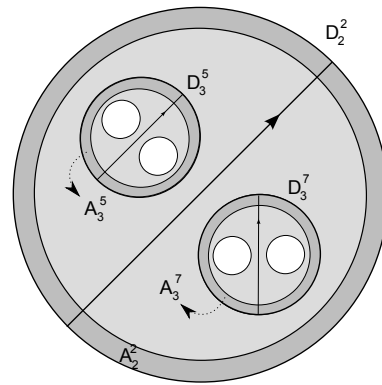
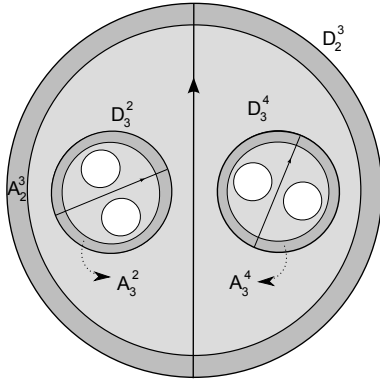
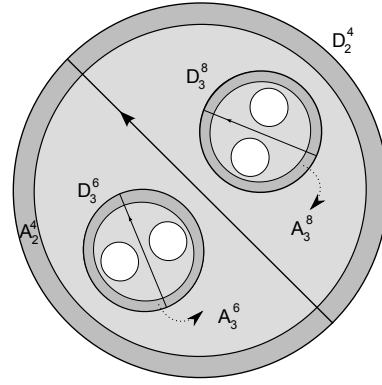
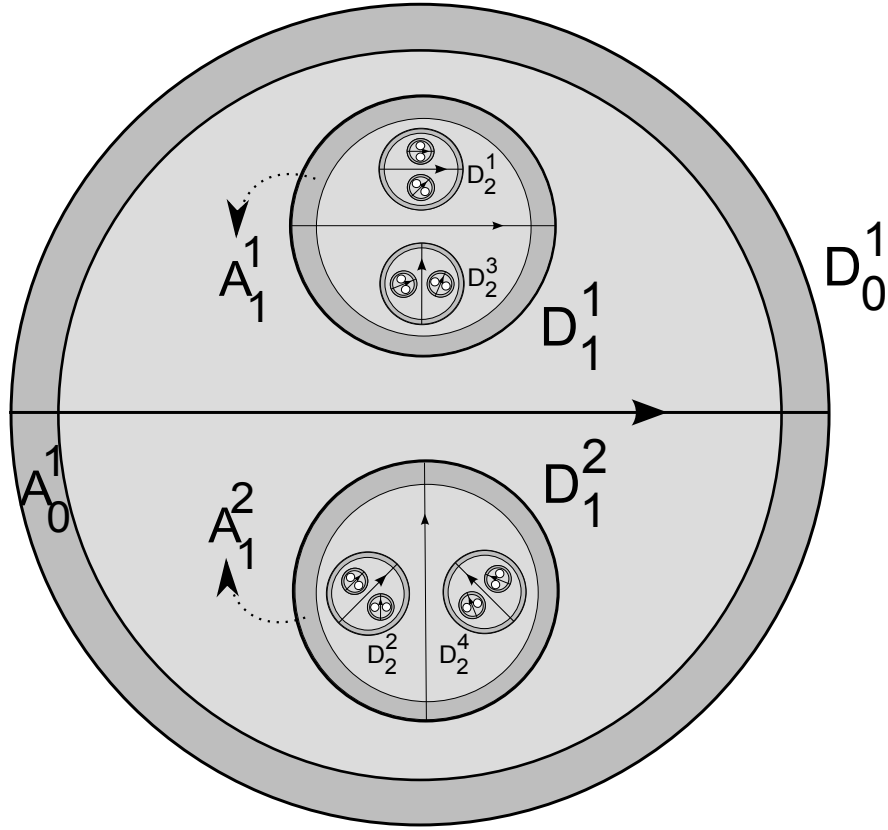


Figura 4.11: D_2^2 .

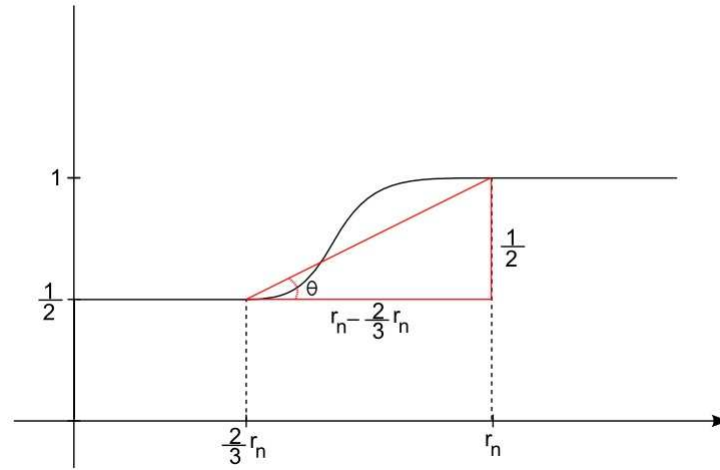
Figura 4.12: D_2^3 .Figura 4.13: D_2^4 .

Em D_0^1 ficará da seguinte maneira:

Figura 4.14: D_0^1 .

Definamos agora, uma aplicação $h_n : D_n^i \rightarrow D_n^i$, onde na fronteira de D_n^i é uma rotação de um ângulo de $\frac{\pi}{2^n}$, mas no interior do anel A_n^i é uma rotação menor que esse ângulo, ou seja, $\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Primeiro, escolhamos uma função C^∞ , digamos Φ_n , cujo o gráfico é:

Figura 4.15: Gráfico de Φ_n .

Agora, notemos que isto pode ser feito de modo que $|\Phi'_n(r)| < \frac{4}{r_n}$, pois

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\frac{1}{2}}{r_n - \frac{2}{3}r_n} < \frac{1}{r_n - \frac{2}{3}r_n} = \frac{3}{r_n} \\ &< \frac{4}{r_n}. \end{aligned}$$

Então, passemos $h_n : D_n^i \longrightarrow D_n^i$ para coordenadas polares centradas no centro de D_n^i , sendo

$$(r, \theta) \longmapsto (r, \theta + (\frac{\pi}{2^n} \Phi_n(r))).$$

Agora, definamos $g_n : \bigcup_i D_n^i \hookrightarrow$, ou $g_n : D_n^i \longrightarrow D_n^{i+1}$, ou $g_n : D_n^{2n} \longrightarrow D_n^1$, dizendo que é uma translação seguida por de h_n .

A aplicação g_n foi definida de modo que:

- (1) g_n coincide com g_{n-1} , onde ambas são definidas, isto é, em $\{\delta D_n^i\}$ (fronteira de D_n^i);
- (2) dentro de A_n^i a aplicação g_n é uma translação seguida por uma rotação de alinhar o eixo com o eixo de D_n^{i+1} ;
- (3) $g_n^{2n} : D_n^i \longrightarrow D_n^i$ é uma rotação de π dentro de A_n^i .

Denotemos D_0^1 por D e definamos

$$\begin{aligned} G_n : D &\longrightarrow D \\ x &\longmapsto G_n(x) = \begin{cases} g_i(x) & , \ x \in B_j \ , \ 0 \leq j \leq n \\ g_n(x) & , \ x \in D_{n+1}^i \ , \ \text{para algum } i \end{cases} . \end{aligned}$$

Por g_n coincidir com g_{n+1} onde estão definidas, por (1), G_n está bem definida.

A sequência G_n converge uniformemente para um C^1 -difeomorfismo G de D , o que mostraremos depois, no Lema 4.2.3, agora continuemos com a construção do Teorema 4.2.1.

Para cada $n > 1$ escolhemos um círculo C_n^i em A_n^i tal que $G^{2^n}|_{C_n^i} = g_n^{2^n}|_{C_n^i}$ é uma rotação e seja $C_n^i = G^{i-1}(C_n^1)$.

Estes C_n^i serão círculos que definimos rotações irracionais.

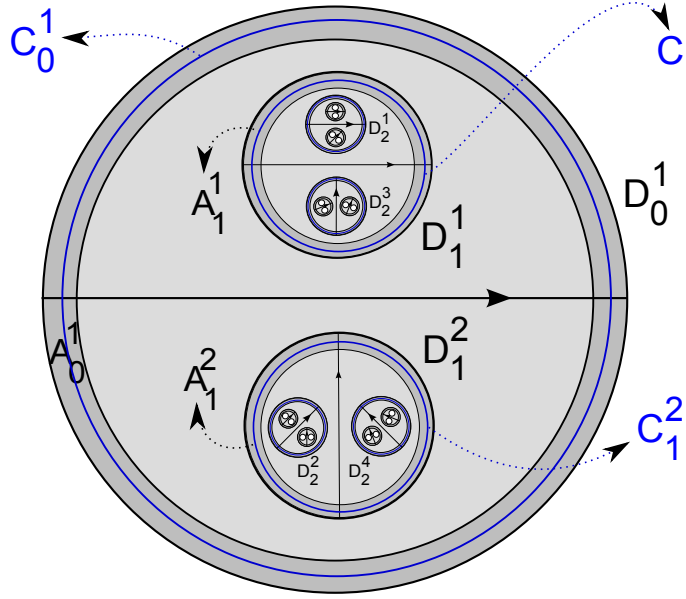


Figura 4.16: Representação de C_2^1 , C_3^1 e C_3^2 . Rotações irracionais.

Agora, seja $\tilde{B}_n^i$ a região entre C_n^i e os dois círculos C_{n+1}^i e $C_{n+1}^{i+2^n}$.

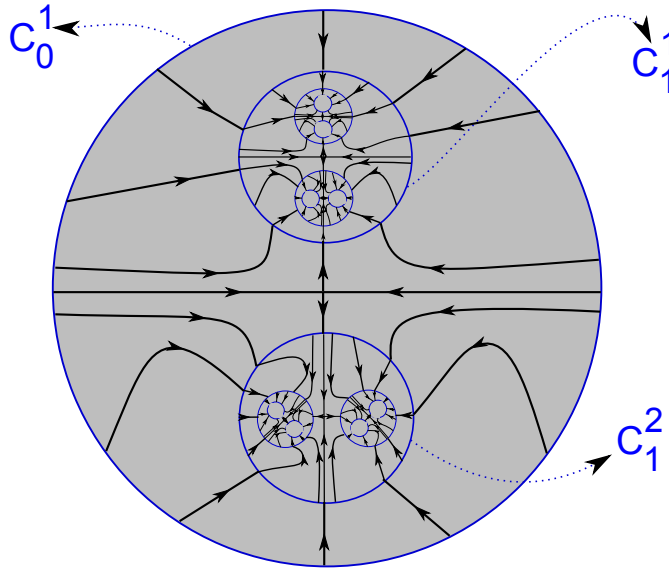


Figura 4.17: Representação de $\tilde{B}_0^1$.

Agora, escolhemos uma C^∞ -função, digamos ρ_n , que é positiva no interior de $\tilde{B}_n^i$ e é constante em cada um dos componentes da fronteira, que tem todas as derivadas nulas na fronteira, e que tem as propriedades adicionais:

- (a) O gradiente de ρ_n gera um fluxo, como na Figura 4.17, e em particular, existe um único ponto crítico hiperbólico no centro de D_n^1 e a partir deste ponto os conjuntos α e ω -limite do fluxo é o conjuntos de pontos da fronteira de $\tilde{B}_n^1$;
- (b) Exigimos que $\rho_n \circ G^{2^n} = \rho_n$ em $\tilde{B}_n^1$. Isto é feito fazendo ρ_n uma função de apenas o raio r em A_n^1 e semelhante as partes de A_{n+1}^1 e $A_{n+2}^{2^n+1}$, que se encontram em $\tilde{B}_n^1$ e fazendo-se simétrica em relação ao eixo de D_n^1 ;
- (c) Estendemos ρ_n a todos D definindo $\rho_n(x) = \rho_n \circ G^{1-i}(x)$ para $x \in B_n^i$ e fazendo ρ_n constante em cada componente de $D - \bigcup_i B_n^i$. Segue-se, então, $\rho_n \circ G = \rho_n$.
- (d) Multiplicando por uma constante podemos assumir que as normas de ρ_n e suas duas primeiras derivadas são uniformemente inferior a $\frac{1}{2^n}$.

Podemos, então, definir a C^2 -função em D , $\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$, e definir também, o difeomorfismo, $L : D \rightarrow D$, a ser no momento uma aplicação do fluxo do $\text{grad} \rho$.

Como $\rho \circ G = \rho$, temos que

$$L \circ G = G \rho L.$$

Nosso difeomorfismo final é definido por $F = L \circ G$. E para verificarmos os seus pontos periódicos consideremos $\tilde{B}_n^i$.

Primeiro, notemos que

$$F^k(\tilde{B}_n^i \cap B_n^i) = \emptyset, \quad 0 < k < 2^n,$$

então, basta considerarmos $F^{2^n} : \tilde{B}_n^i \rightarrow \tilde{B}_n^i$ e este tem apenas o ponto fixo no centro de D_n^i e não há outros pontos periódicos, e lembrando que $F = L \circ G$, então,

$$F^{2^n} = L^{2^n} \circ G^{2^n}.$$

Assim, os centros de D_n^i formam uma órbita hiperbólica de período 2^n .

Observe que há variedades estáveis e instáveis que podem se cruzar, pois elas nunca podem cruzar C_n^i ou C_{n+1}^i e assim as variedades estável e instável do centro de D_n^i estão contidos em $\tilde{B}_n^i$.

Por fim, não existem outros pontos periódicos, pois se $x \notin \tilde{B}_n^i$ para qualquer i e n , então, x está no conjunto Cantor

$$K = \bigcap_n \left(\bigcup_i D_n^i \right),$$

e $x \in D_n^i$, o que implica que $x \neq F^k(x)$, para $0 < k < 2^n$.

Uma vez que isto é válido para qualquer n , nenhum ponto em K pode ser periódico. Verifica-se facilmente o fato que toda órbita de F em K é densa em K , isto é, F é minimal em K .

□

Provemos, agora, que a sequência G_n converge uniformemente para um C^1 -difeomorfismo G de D .

Lema 4.2.3. *A sequência G_n converge no C^1 -topologia para um difeomorfismo $G : D \rightarrow D$.*

Demonstração:

Primeiramente, provemos que G_n é uma sequência de Cauchy em $C^1(D, D)$.

Como, para $x \in A_1^1$ temos $G_n(x) = G_m(x)$, para todo n, m , basta mostrarmos que,

dado $\epsilon > 0$, $\sup_{x \in D} |dG_n(x) - dG_m(x)| < \epsilon$, para n, m suficientemente grande.

Suponhamos que $n \geq m$, e consideremos o valor de $|dG_n(x) - dG_m(x)|$ para diferentes valores de x .

Fora de $\bigcup_i D_m^i$, as funções G_n e G_m coincidem, assim, precisamos considerar apenas $x \in D_m^i$.

Agora, seja $x \in D_m^i$, mas $x \notin A_p^j$ para qualquer j e $m < p \leq n$, então, perto de x , G_m é uma translação seguida por uma rotação de $\frac{\pi}{(2^{m-1})}$ e G_n é uma translação seguida por uma rotação de um ângulo menor.

Logo, para estes x 's,

$$|dG_n(x) - dG_m(x)| < \frac{\pi}{(2^{m-1})}.$$

Agora, seja $x \in A_p^j$, com $m < p \leq n$, usando coordenadas polares r, θ centradas no centro de D_p^k e coordenadas polares r', θ' centradas no centro de D_p^{k+1} .

Nestas coordenadas G_n (que é igual a g_n em A_p^i) é dada por

$$r = r' \quad , \quad \theta' = \theta + \alpha \Phi_p(r) \quad , \quad \text{onde } \alpha = \frac{\pi}{2^p}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 |dG_n(x) - dG_m(x)| &= |dG_n(x) - dG_m(x) - id + id| \\
 &= |dG_n(x) - id - dG_m(x) + id| \\
 &= |dG_n(x) - id - (dG_m(x) - id)| \\
 &\leq |dG_n(x) - id| + |-(dG_m(x) - id)| \\
 &\leq |dG_n(x) - id| + |dG_m(x) - id|.
 \end{aligned}$$

E G_m é, ainda, uma translação seguida por uma rotação de $\frac{\pi}{2^m}$, de modo que $|dG_m(x) - id| < \frac{\pi}{2^m}$.

Para calcularmos o outro termo, $|dG_n(x) - id|$, notemos que nessas coordenadas polares a matriz Jacobiana de $dG_n(x)$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\Phi'_p(r) & 1 \end{pmatrix},$$

e a chamaremos de J .

Para encontrarmos a matriz Jacobiana em coordenadas cartesianas, calculemos $M = P^{-1}JQ$, onde

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & -r \sin \theta' \\ \sin \theta' & r \cos \theta' \end{pmatrix},$$

são respectivamente, matrizes para mudança de cartesiana para polar r, θ e a mudança de polar r', θ' para cartesiana.

Então,

$$\begin{aligned}
 M &= P^{-1}JQ \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta' & -r \sin \theta' \\ \sin \theta' & r \cos \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\Phi'_p(r) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta' - \alpha r \Phi'_p(r) \sin \theta' & -r \sin \theta' \\ \sin \theta' + \alpha r \Phi'_p(r) \cos \theta' & r \cos \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta' \cos \theta - \alpha r \Phi'_p(r) \sin \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta & \cos \theta' \sin \theta - \alpha r \Phi'_p(r) \sin \theta' \sin \theta - \sin \theta' \cos \theta \\ \sin \theta' \cos \theta + \alpha r \Phi'_p(r) \cos \theta' \cos \theta - \cos \theta' \sin \theta & \sin \theta' \sin \theta + \alpha r \Phi'_p(r) \cos \theta' \sin \theta + \cos \theta' \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta' - \theta) - \alpha r \Phi'_p(r) \sin \theta' \cos \theta & \sin(\theta' - \theta) - \alpha r \Phi'_p(r) \sin \theta' \sin \theta \\ \sin(\theta' - \theta) + \alpha r \Phi'_p(r) \cos \theta' \cos \theta & \cos(\theta' - \theta) + \alpha r \Phi'_p(r) \cos \theta' \sin \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como $\theta' - \theta < \frac{\pi}{2^m}$, então,

$$|m_{11} - 1| \leq \frac{\pi}{2^m} + \alpha |r \Phi'_p(r)|,$$

mas Φ_p foi construída de modo que $|r \Phi_p(r)| < 4$, e como $\alpha \leq \frac{\pi}{2^m}$, temos

$$\begin{aligned} |m_{11} - 1| &\leq \frac{\pi}{2^m} + \frac{3\pi}{2^m} \\ &\leq \frac{4\pi}{2^m} \\ &\leq \frac{\pi}{2^{m-2}} . \end{aligned}$$

Analogamente, $|m_{12}|, |m_{21}|$ e $|m_{22} - 1|$ são menores ou igual a $\frac{\pi}{2^{m-2}}$.

Logo, a sequência G_n é de Cauchy e, portanto, tem um limite G que é um C^1 -aplicação.

O mesmo argumento mostra que isto é verdade para G^{-1} e, portanto, G é um difeomorfismo.

□

Bibliografia

- [1] ADLER, R.; KONHEIN, A.; MC ANDREW, M. **Topological entropy**. Trans. AMS, vol 114, 309-319, Fevereiro, 2002.
- [2] BOWEN, R. **Entropy for group endomorphisms and homegeneios spaces..** Trans. A. M. S, vol 153, 1971.
- [3] BOWEN, R.; FRANKS, J. **The periodic points of maps of the disk and the interval**. Pergamon Press, Topology, vol 15, 337-342, 1976.
- [4] BOWEN, R. **Topological entropy and axiom A**. Global Analysis, Amer. Math. Soc., 23-41, 1970.
- [5] BRIN, M.; STUCK, G. **Introduction to Dynamical Systems**. Cambrigde University Press, Nova York, 2002.
- [6] BRONZI, , M. A. **Tangências homoclínicas, entropia e medidas de SRB**. Tese de Doutorado - ICMC/USP, Fevereiro, 2010.
- [7] BONOMO, W. **Sistemas dinâmicos discretos: estabilidade, comportamento assistótico e sincronização**. Dissertação de Mestrado - ICMC/USP, Abril, 2008.
- [8] DEVANEY, R. L. **A first course in choatic dynamical systems: theory and experiment**. Addison-Wesley studies, Massachusetts, 1992.
- [9] LIMA, E. L. **Homologia básica**. IMPA, Rio de Janeiro, 2.ed., 2012.
- [10] FRANKS, J. **Some smooth maps with infinitely many hyperbolic points**. Trans. AMS, vol 226, 175-179, Novembro, 1975.
- [11] GANTMACHER, F. **Matrix Theory** Chelsea Publising Company, New York, vol 2, 1960.
- [12] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. p. 110, 2001.
- [13] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos**. Elsevier, 2ª edição, 2004.
- [14] LANG, S. **Algebra**, Springer, New York, 3ª edição , 564-565, 2002.

-
- [15] LI T.; YORK J. **Period three implies chaos**. The American Mathematical Monthly Vol. 82, pp 985-992, Dezembro, 1975.
 - [16] KATOK, A.; HASSELBLATT, B.. **A Moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos**, Trad. Luis Barreira, Cambridge University Press, 1999.
 - [17] MELO, W.; STRIEN, S. V. **One-Dimensional**. Amsterdam, Rio de Janeiro, p 77-184, 1992.
 - [18] MOREIRA, I. C. **Sistemas Caóticos em Física - Uma introdução**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol 15, 1993.
 - [19] OLIVEIRA, K; VIANA, M., D. **Fundamentos da Teoria Ergódica**.
 - [20] PENA, C. M. A.; CORONEL, A. L. V. **Definiciones de caos**. Tesis Profesional - Universidad de Sonora, Outubro, 2001.
 - [21] SARKOVSKII, A. N. **Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself**. Ukrainian Math Zh., 16(1), 61-71, 1964.
 - [22] SMALE, S. **Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms**. Proc. Int. Congr., 490-495, 1962.
 - [23] VICK, J. W. **Homology Theory**. Pure and Applied Mathematics, Eilenberg, Vol 53, Academic Press, p. 9-10, 1973.
 - [24] SILVA, W. R. G, da. **Existência e Unicidade de Medidas Maximizantes para Classes Robustas de Difeomorfismos Locais**. Dissertação de Mestrado - IM/UFAL, Março, 2013.
 - [25] WALTERS, P. **An introduction to ergodic theory**. Graduate texts in mathematics, Springer, 1975.
 - [26] XUN-CHENG, H. **From Intermediate Value Theorem to chaos**. Mathematics Magazine, Vol 65, 91-103, 1992.