

RAFAEL IRIA RODRIGUES

**MODELAGEM ARX COMO FERRAMENTA COMPLEMENTAR AOS ESTUDOS DE
ESTACIONARIEDADE DA VAZÃO EM BACIAS HIDROGRÁFICAS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Meteorologia Aplicada, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

Orientador: Roberto Avelino Cecílio

Coorientadores: Rodolpho Vilela Alves Neves
Maria Camila Alves Ramos

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2023**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

R696m
2023
Rodrigues, Rafael Iria, 1989-
Modelagem ARX como ferramenta complementar aos
estudos de estacionariedade da vazão em bacias hidrográficas /
Rafael Iria Rodrigues. – Viçosa, MG, 2023.
1 tese eletrônica (43 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Roberto Avelino Cecílio.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Engenharia Agrícola, 2023.
Referências bibliográficas: f. 40-43.
DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.718>
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Precipitação (Meteorologia) - Variabilidade.
2. Meteorologia - Processamento de dados. 3. Análise de séries
temporais. 4. Modelagem estocástica. 5. Função de transferência.
I. Cecílio, Roberto Avelino, 1976-. II. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Engenharia Agrícola. Programa de
Pós-Graduação em Meteorologia Aplicada. III. Título.

CDD 22. ed. 551.577


RAFAEL IRIA RODRIGUES

MODELAGEM ARX COMO FERRAMENTA COMPLEMENTAR AOS ESTUDOS DE ESTACIONARIEDADE DA VAZÃO EM BACIAS HIDROGRÁFICAS


Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Meteorologia Aplicada, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

APROVADA: 06 de setembro de 2023.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente
 **RAFAEL IRIA RODRIGUES**
Data: 16/11/2023 10:46:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Rafael Iria Rodrigues
Autor

Documento assinado digitalmente
 **ROBERTO AVELINO CECILIO**
Data: 16/11/2023 11:51:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Roberto Avelino Cecílio
Orientador

Aos meus pais, por não medirem esforços para que seus filhos se tornassem profissionais capacitados, bem-sucedidos, felizes e realizados. Aos senhores, com carinho, dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder a graça de concluir mais uma etapa na carreira e pela força e sabedoria para chegar até aqui.

Aos meus pais, por construírem uma base familiar sólida, regrada em princípios e caráter. Pela educação, dedicação, amor e todos os ensinamentos formadores da pessoa e profissional que sou hoje.

A minha esposa, por apoiar minhas decisões, por estar comigo em todos os caminhos que decidimos seguir, pelo ombro carinhoso e sincero e por fazer parte da minha vida de uma forma muito que especial.

As minhas irmãs, pelo apoio em diversos momentos durante a pós-graduação, em especial à Lorena pelo tempo dedicado em ajudar a construir minha pesquisa de doutorado.

Ao professor Fernando Pruski – “in memoriam”, pelo companheirismo e pela amizade construída durante o período de estágio acadêmico, projetos extracurriculares, mestrado e parte do doutorado. Ao senhor, amigo Pruski, meus sinceros agradecimentos.

Ao meu orientador Roberto Cecílio por ter embarcado nessa jornada, por todo suporte, orientação e apoio no tocante da minha pesquisa de doutorado.

Aos meus coorientadores, Maria Camila e Rodolpho Neves, que estiveram comigo desde o início do doutorado, e foram um suporte técnico fundamental para essa conquista.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a pós-graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

À coordenação do programa de pós-graduação em Meteorologia Aplicada por todo o suporte necessário para que eu conseguisse concluir meu doutorado e, principalmente, pelo apoio em todos os momentos conturbados durante e pós pandemia da COVID.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pela concessão da bolsa de estudos.

A todos que de alguma forma contribuíram para meu sucesso, dedico!

“Seja você quem for, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá”.

(Ayrton Senna)

RESUMO

RODRIGUES, Rafael Iria, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, setembro de 2023. **Modelagem ARX como ferramenta complementar aos estudos de estacionariedade da vazão em bacias hidrográficas.** Orientador: Roberto Avelino Cecílio. Coorientadores: Rodolpho Vilela Alves Neves e Maria Camila Alves Ramos.

Para uma adequada gestão dos recursos naturais, busca-se a análise temporal das variáveis hidroclimatológicas, as quais podem apresentar tendências ou comportamento estacionário. Quando a variável selecionada para análise de estacionariedade é a vazão, o teste de Mann-Kendall pode induzir a uma interpretação equivocada por não considerar a influência da variabilidade da precipitação para explicar o comportamento particular da vazão em determinado período. A dificuldade em interpretar Mann-Kendall está em compreender se um sistema hidrológico proporciona uma vazão de escoamento em condição não-estacionária ou se ela está passando por uma transição de estado em decorrência da variabilidade da precipitação. Nesse contexto, as técnicas de análise de sistemas dinâmicos possibilitam incorporar o comportamento temporal da precipitação dentro da análise de estacionariedade do regime de vazões em bacias hidrográficas, as quais passam a ser tomadas como sistemas dinâmicos. Um sistema dinâmico pode ser representado por funções matemáticas que podem ser obtidas a partir da modelagem estocástica autorregressiva com entrada exógena (ARX), para tempo discreto. Baseado na necessidade de um método que auxilie na interpretação dos testes de Mann-Kendall, o objetivo desse trabalho foi desenvolver uma metodologia baseada na modelagem e análise de sistemas dinâmicos (MASD) como ferramenta complementar aos estudos da estacionariedade da série de vazão de escoamento em uma bacia hidrográfica. Como objetivo específico, apresenta-se uma técnica, utilizando a modelagem ARX, para representar o comportamento dinâmico do sistema chuva-vazão a partir dos dados temporais. Para a realização desse trabalho utilizaram-se os dados temporais de chuva e vazão da bacia hidrográfica do rio Grande, na base mensal. Os modelos ARX foram ajustados a partir do método matricial dos mínimos quadrados e a escolha do melhor modelo foi em função dos parâmetros estatísticos RMSE, MBE e μ . A partir do modelo representativo a cada um dos sistemas chuva-vazão, aplicou-se a transformada Z para tempo discreto, seguido da representação em função de transferência e da análise dos polos do polinômio característico (raízes do

denominador da função de transferência). Os polos indicam se os sistemas dinâmicos são estáveis ou instáveis e essa estabilidade está associada a capacidade do sistema chuva-vazão em alcançar uma condição estacionária (equilíbrio), dada a variabilidade da precipitação. Para a modelagem ARX, os resultados mostraram que os modelos tendem a estimar com maior erro relativo percentual as vazões de pico que as vazões mínimas, o que foi explicado pelos erros e incertezas evidenciados nos processos na obtenção da vazão pela curva-chave e na metodologia de interpolação espacial da precipitação. Já na análise de estacionariedade, os resultados mostraram que, embora o teste de Mann-Kendall tenha indicado a não-estacionariedade para seis das dez séries de vazão Q_A , esse comportamento foi explicado pelo MASD e associada a não-estacionariedade à condição transitória dos sistemas chuva-vazão em busca de um novo equilíbrio. O método MASD indicou que todos os dez sistemas chuva-vazão são estáveis e, portanto, dado um equilíbrio (estacionariedade) na precipitação P_A , a vazão Q_A obrigatoriamente será estacionária em algum momento no tempo, mesmo que ainda não tenham atingido essa condição para o período analisado.

Palavras-chave: Modelagem estocástica. Sistema dinâmico. Mann-Kendall, sistema chuva-vazão. Função de transferência. Variáveis hidroclimáticas.

ABSTRACT

RODRIGUES, Rafael Iria, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, September, 2023. **ARX modelling as a complementary tool for stationary streamflow studies in a basin.** Adviser: Roberto Avelino Cecílio. Co-advisers: Rodolpho Vilela Alves Neves and Maria Camila Alves Ramos.

To aid the sustainable management of natural resources, the temporal analysis of hydroclimatic variables is often sought to verify trends or stationary behavior. When analyzing streamflow, the use of the Mann-Kendall test can lead to a misinterpretation due to not considering the influence of rainfall variability to explain particular streamflow events from a given period. The difficulty in interpreting Mann-Kendall's results lies in understanding whether the streamflow of a hydrological system (basin) is in a non-stationary condition, or it is undergoing a transition due to rainfall variability. In this context, dynamic systems analysis techniques make it possible to incorporate the temporal behavior of rainfall within the stationary analysis of the streamflow regime in basins, which are now considered as dynamic systems. A dynamic system can be represented by mathematical functions that can be obtained from autoregressive stochastic modeling with exogenous input (ARX), for discrete time. Considering the need for a method to assist in the interpretation of the Mann-Kendall tests, this work aimed to develop a methodology based on dynamic systems modeling and analysis (MASD), as a complementary tool to assess the stationarity of streamflow series in a basin. The specific goal shows a technique using ARX modeling to represent the dynamic behavior of the rainfall-streamflow system based on temporal data. To develop MASD, temporal data on rainfall and streamflow from the Grande River basin were used monthly basis. The ARX models were adjusted using the matrix method of least squares and the choice of the best model was based on the statistical parameters RMSE, MBE and μ . From the representative model to each of the rainfall-streamflow systems, the Z transform was applied for discrete time, followed by the transfer function representation and the analysis of the poles of the characteristic polynomial (roots of the so-called transfer function). The poles indicate whether the dynamic systems are stable or unstable and this stability is associated with the ability of the rainfall-streamflow system to reach a stationary condition (equilibrium), given the variability of precipitation. For the ARX modeling, the results showed that the models tend to estimate with a higher percentage relative error the peak flows than the minimum flows,

which was explained by the errors and uncertainties evidenced in the processes in obtaining the flow by the key curve and in the methodology of spatial interpolation of precipitation. In the stationarity analysis, the results showed that, although the Mann-Kendall test indicated that six of the ten Q_A flow series are non-stationarity, this behavior was explained by the MASD and associating non-stationarity with the transient condition of rainfall-streamflow systems in search of a new equilibrium. The MASD method indicated that all ten rainfall-streamflow systems are stable and, therefore, given an equilibrium (stationarity) of P_A , the Q_A streamflow will necessarily be stationary at some point in time, even if they have not yet reached this condition.

Keywords: Stochastic modeling. Dynamic system. Mann-Kendall, rainfall-streamflow system. Transfer function. Hydroclimatic variables.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Localização da bacia hidrográfica do rio Grande (A) e a indicação das estações fluviométricas (B) e pluviométricas (C).....	17
Figura 2 – Organização dos dados e definição do tamanho da parcela referente a modelagem (70%) e validação (30%) para o sistema chuva-vazão.....	19
Figura 3 – Plano Z (A) e as condições de estabilidade de um sistema dinâmico. (B) Sistema estável; (C) Sistema criticamente estável; e, (D) Sistema instável.....	25
Figura 4 – Erro relativo percentual (A) e o intervalo de confiança (B) para cada modelo Q_{ARX} ajustado.	29
Figura 5 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61100000.....	29
Figura 6 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61230000.....	30
Figura 7 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61830000.....	30
Figura 8 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61520000.....	30
Figura 9 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61879000.....	31
Figura 10 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61960000.....	31
Figura 11 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61795000.....	31
Figura 12 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61895000.....	32
Figura 13 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61320000.....	32
Figura 14 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61770000.....	32
Figura 15 – Aplicação do método do lugar das raízes.....	34
Figura 16 – Identificação dos reservatórios a montante das estações fluviométricas.	35

Figura 17 – Exemplo das condições estacionárias e transitórias para o sistema Gz1_61100000 em decorrência da elevação dos níveis de P_A37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Característica dos dados de vazão e precipitação para cada área de drenagem das estações fluviométricas selecionadas.	19
Tabela 2 – Modelagem ARX e os resultados estatísticos por modelo.	27
Tabela 3 – Melhor modelos ARX para cada estação fluviométrica e suas equações.	28
Tabela 4 – Resultados obtidos pelo teste de Mann-Kendall.	36

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. MÉTODOS	17
2.1. Caracterização da área de estudo	17
2.2. Obtenção dos dados e organização das séries temporais.....	18
2.3. Modelagem autorregressiva com entrada exógena - ARX.....	20
2.4. Obtenção da transformada Z e determinação das funções de transferência.....	23
2.5. Método – O lugar das raízes de $G(z)$	24
2.6. Teste de Mann-Kendall	25
3. RESULTADOS E DISCUSSÕES	27
3.1. Resultado do método MASD	27
3.2. Resultado do teste de Mann-Kendall	36
3.3. Interpretação do teste de Mann-Kendall com base no MASD.....	36
4. CONCLUSÕES	39
REFERÊNCIAS	40

1. INTRODUÇÃO

Para contribuir com a gestão sustentável dos recursos naturais, no que diz respeito aos estudos envolvendo mudanças climáticas, busca-se frequentemente a análise temporal das variáveis hidroclimatológicas, as quais podem apresentar tendências ou comportamento estacionário (RASHID; BEECHAM; CHOWDHURY, 2015; MUMO; YU; AYUGI, 2019). Dentre as variáveis hidroclimáticas de maior interesse para a gestão de recursos naturais, podem-se destacar a precipitação e a vazão dos cursos d'água, bem como a relação chuva-vazão, a qual afeta diretamente a disponibilidade hídrica de bacias hidrográficas e que pode acarretar conflitos locais e, ou globais pelo uso da água (GLEICK; SHIMABUKU, 2023).

Para a análise da estacionariedade de variáveis hidroclimáticas, é recomendado pela Organização Meteorológica Mundial – (OMM) (LOPES; SILVA, 2013) a utilização do teste não paramétrico proposto por Mann-Kendall (MANN, 1945; KENDALL, 1975). A suposição original do teste de Mann-Kendall é de que as séries temporais das variáveis de interesse devem ser aleatórias e distribuídas de forma idêntica, o que raramente ocorre em séries temporais naturais, especialmente de chuva e vazão. Ademais, na maioria dos casos em que o teste de Mann-Kendall vem sendo utilizado, os dados observados são auto correlacionados, o que pode resultar em uma má interpretação dos resultados de tendência (HAMED; RAMACHANDRA RAO, 1998).

Quando a variável selecionada para análise é a vazão, a aplicação do teste de Mann-Kendall também pode induzir a uma interpretação equivocada pelo fato de não ser considerada a influência da variabilidade da precipitação para explicar comportamentos particulares da vazão ocorridas durante determinado período. Tomando como exemplo a ocorrência de eventos climáticos extremos em uma bacia hidrográfica, seja por um volume de precipitação extremamente elevado ou um período prolongado de estiagem (eventos não habituais para a região estudada), o teste de Mann-Kendall pode retornar uma condição não-estacionária de vazão para o período analisado (CARVALHO; JONES; LIEBMANN, 2002; LI et al., 2019). Todavia, o teste não é capaz de explicar se a bacia hidrográfica irá atingir uma condição de

estabilidade proporcionando, em algum momento futuro, um novo regime de escoamento em condições estacionárias.

A dificuldade em interpretar os resultados obtidos por Mann-Kendall está em compreender se um sistema hidrológico (bacia hidrográfica) proporciona uma vazão de escoamento em condição não-estacionária ou se, de fato, ela está passando por uma transição em decorrência da variabilidade da precipitação. Nesse contexto, as técnicas de análise de sistemas dinâmicos, bastante utilizados na modelagem e controle de processos (CHEN, 2012; LJUNG; GLAD, 1994), possibilitam incorporar o comportamento temporal da precipitação dentro da análise estacionária do regime de vazões em bacias hidrográficas, as quais passam a ser tomadas como sistemas dinâmicos.

Um sistema dinâmico é aquele cujo comportamento da vazão de escoamento pode ser representado por funções matemáticas que descrevem, de maneira aproximada, o seu estado em determinado momento no tempo. Como os dados de precipitação e vazão são obtidos de forma discreta (não contínua), uma maneira de representar a dinâmica desse sistema é através das equações de diferenças, que são representações matemáticas equivalentes às equações diferenciais em tempo contínuo. Essas equações podem ser obtidas a partir da modelagem estocástica autorregressiva com entrada exógena (ARX), assumindo a premissa que, para pequenas variações, o sistema se comporte de forma linear, invariante no tempo à parâmetros concentrados (Sistema LIT a parâmetros concentrados). O termo “autorregressivo” indica que o modelo é ajustado utilizando informações passadas da própria variável dependente (vazão), formando estados no sistema. Já o termo “exógena” indica que a vazão sofre influência de uma ou mais variáveis externas (precipitação).

A modelagem ARX vem sendo utilizada na hidroclimatologia para compreender a dinâmica da vazão a partir da ocorrência da precipitação (KEESMAN; JAKEMAN, 1997; KWIN et al., 2016; SUMAN; MAITY, 2019), para estimar a resposta natural de séries temporais (YOON; KIM; KIM, 2004) e, em algumas aplicações, como alternativa à modelagem não-linear (RAVI SRINIWAS; ARKUN, 1997). Esses modelos também podem ser utilizados para predições, como em Kessman e Jakeman (1997), os quais realizaram o ajuste de um modelo ARX para estimar a longo prazo a vazão de escoamento a partir da ocorrência de um regime de precipitações. Já Pinault e Dubus

(2008) ajustaram um modelo ARX para prever a estacionariedade da qualidade da água.

Quando um modelo ARX é ajustado, adquirem-se informações sobre a dinâmica temporal que rege o sistema (AGUIRRE, 2007). A dinâmica temporal pode ser dividida em dois estados: o transitório (transiente) e o permanente (estacionário). O estado transitório é uma região de transição entre duas condições permanentes e ele ocorre sempre que um evento exógeno, como a precipitação, muda abruptamente seu estado nominal, levando a vazão de escoamento a uma nova condição de permanência. Já o estado permanente é aquele que a vazão se comporta de forma cíclica e periódica no tempo, em torno de uma assíntota, normalmente representada pela média das vazões no período. Quando um sistema responde de forma limitada a um evento abrupto da entrada exógena, pode-se dizer que esse é um sistema estável.

Assumindo a necessidade de um método que auxilie na interpretação dos testes de Mann-Kendall, o objetivo principal desse trabalho foi desenvolver uma metodologia baseada na modelagem e análise de sistemas dinâmicos, como ferramenta complementar aos estudos da estacionariedade da série de vazão de escoamento em uma bacia hidrográfica. Como objetivo específico, apresenta-se uma técnica, utilizando a modelagem ARX, para representar o comportamento dinâmico do sistema chuva-vazão a partir dos dados temporais.

2. MÉTODOS

A metodologia proposta nesse trabalho se baseou nas técnicas de modelagem e análise de sistemas dinâmicos - (**MASD**) (CHEN, 2012; LJUNG; GLAD, 1994). O **MASD** é composto por estratégias e processos de modelagem e validação, transformada Z, representação da função de transferência e a análise do lugar das raízes de $G(z)$. Para o desenvolvimento do **MASD**, foram utilizados dados temporais de precipitação e vazão da bacia hidrográfica do rio Grande (devido a disponibilidade e facilidade para obtenção dos dados).

2.1. Caracterização da área de estudo

A bacia hidrográfica do rio Grande (**Figura 1**), localizada na região hidrográfica do Paraná, possui área de 143.255 km² dos quais 39,8% encontram-se no Estado de São Paulo e 60,2% em Minas Gerais. As principais classes de uso e ocupação do solo dessa bacia são pastagem e agricultura, representando 56,2% e 36,10%, respectivamente. A maior demanda de água (43,51%) é destinada aos setores que agregam irrigação e aquicultura, seguida pelo uso industrial (37,37%) e o abastecimento público (16,78%) (IPT, 2008).

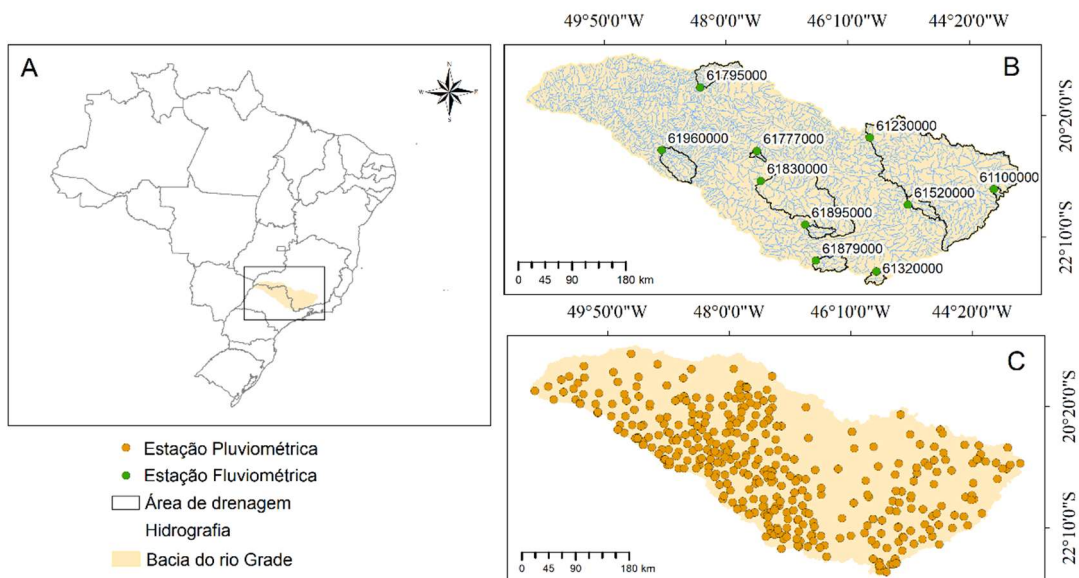


Figura 1 – Localização da bacia hidrográfica do rio Grande (A) e a indicação das estações fluviométricas (B) e pluviométricas (C).

2.2. Obtenção dos dados e organização das séries temporais

Para caracterização do comportamento hidrológico da área de estudo, foram consideradas séries históricas de vazões diárias obtidas de 10 estações fluviométricas inseridas na bacia do rio Grande (**Figura 1B** e **Tabela 1**), apresentando o mínimo de 10 anos de extensão. Essas séries foram obtidas da rede hidrometeorológica nacional, disponibilizada pela Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA). A partir da localização geográfica foram delimitadas as áreas de drenagem à montante de cada uma das estações (**Figura 1B**). Calcularam-se, ainda, as vazões médias para cada mês (Q_A) das séries históricas, em m^3s^{-1} .

Como o **MASD** propõe estudar a estabilidade do sistema chuva-vazão, foram selecionadas as estações pluviométricas que estivessem localizadas dentro dos contornos das áreas de drenagem (**Figura 1C**) e, a partir do total precipitado diário disponíveis no sistema HidroWeb (ANA, 2021), foram calculadas as séries de precipitação total mensal (P_A) representativa a cada uma das áreas de drenagem. Para tanto, fez-se uso da interpolação espacial, por intermédio do inverso de uma potência da distância (**Equação 1**), (CECÍLIO; PRUSKI, 2003; MELLO; SILVA, 2013; LU; WONG, 2008).

$$\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{h_i^m} \right) \cdot P_i \right\}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{h_i^m} \right)} \quad (1)$$

em que: \bar{P} = Valor estimado de precipitação a partir da interpolação; P_i = Valor do posto pluviométrico conhecido; h_i = distância euclidiana (em linha reta) entre \bar{P} e P_i ; m = expoente da distância; e n = número de estações utilizadas.

Nesse trabalho avaliaram-se os expoentes de distância (m) de 1 a 6, por já terem sido utilizados e discutidos em outros trabalhos (CECÍLIO; PRUSKI, 2003; MIRANDA, 2010; MELLO; SILVA, 2013). A escolha da interpolação mais representativa foi realizada usando-se o método *leave-one-out* (MEDEIROS et al., 2019), sendo selecionada aquela que apresentou a menor raiz do erro quadrático médio. Após interpolação e validação, foi obtido o valor médio dos totais mensais para

cada área de drenagem de estação fluviométrica, em mm, e então foi feita a conversão dos dados para m^3s^{-1} , pelo fato do método **MASD** exigir que as bases modeladas estejam no mesmo dimensional, visto que Q_A é apresentada em m^3s^{-1} .

A organização do banco de dados para a modelagem seguiu a lógica exemplificada na **Figura 2**. Na prática, quando se analisa o tamanho dos dados de precipitação e vazão obtidos, observa-se que eles não possuem o mesmo tamanho, tampouco começam e terminam na mesma data. Dessa forma, foi necessário colocá-las no mesmo tamanho e intervalo temporal, extraíndo da série principal uma série secundária (mesmo tamanho, início e fim), representativos a cada área de drenagem.

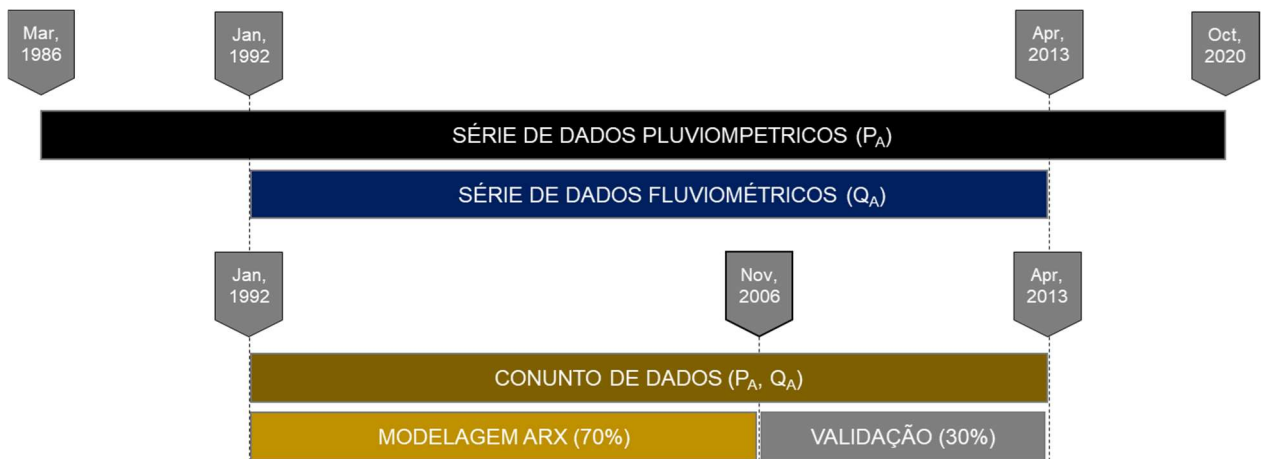


Figura 2 – Organização dos dados e definição do tamanho da parcela referente a modelagem (70%) e validação (30%) para o sistema chuva-vazão.

Tabela 1 – Característica dos dados de vazão e precipitação para cada área de drenagem das estações fluviométricas selecionadas.

NOME (Fluviométrico)	CÓDIGO	ÁREA km ²	DADOS		
			TAMANHO	MODEL.	VALID.
Ibertioga	61100000	185	996	697	299
Porto Capetinga	61230000	25400	998	698	300
São Bendo do Sapucaí	61320000	468	697	487	210
Chácara Santana	61520000	854	998	698	300
Fazenda Carvalhais	61770000	225	1001	700	301
Conceição das Alagoas	61795000	1980	945	661	284
UHE Marimbondo Faz.	61830000	8490	1001	700	301
Lindóia	61879000	1130	1001	700	301
São João da Boa Vista	61895000	619	1001	700	301
São Benedito	61960000	2070	1001	700	301

A partir da obtenção da série secundária, com tamanho e base temporal equivalentes, foram separados 70% dos dados para a modelagem e os 30% restante para a validação. A **Tabela 1** mostra o tamanho das séries e as respectivas parcelas destinadas para modelagem e validação dos modelos ajustados, para cada área de drenagem das estações fluviométricas.

2.3. Modelagem autorregressiva com entrada exógena - ARX

Quando se trabalha com modelagem de sistemas dinâmicos, dois fatos devem ser levados em consideração. O primeiro é que o modelo matemático é apenas uma representação aproximada e, conseqüentemente, não existe um único modelo, mas sim uma família de modelos com características e desempenhos aproximados. O segundo é que o modelo é uma aproximação de apenas algumas características do sistema real (AGUIRRE, 2007; OPPENHEIM; WILLISKI, 2010).

Os modelos dinâmicos, diferentemente dos estáticos, possuem dependência temporal e, por conta disso, podem ser diferenciados pelos tempos contínuo e discreto, onde os modelos dinâmicos em tempo contínuo são representados por equações diferenciais e os discretos por equações de diferenças. Como as séries de precipitação e vazão foram obtidas na base temporal mensal, a representação mais apropriada é por equações de diferenças (tempo discreto), como mostrado na **Equação 2**.

$$\theta_0 y[k - n] + \theta_1 y[k - n - 1] + \dots + \theta_n y[k] = \beta_0 x[k - m] + \dots + \beta_m x[k] \quad (2)$$

em que: “k” é o instante no tempo discreto, θ_0 , θ_1 , a θ_n são os coeficientes das derivações da resposta (y) do sistema e β_0 a β_n são os coeficientes da entrada (x).

Para determinar os coeficientes (θ e β) que acompanham os regressores (**Equação 2**), foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados (MQ), onde a **Equação 3** representa a forma matricial das equações de diferença e a **Equação 4** representa o método MQ.

$$\mathbf{y}[\mathbf{k}] = \boldsymbol{\psi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} = [\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}]^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{y} \quad (4)$$

em que: $\boldsymbol{\psi}$ é a matriz de regressores e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ}$ é a matriz de parâmetros que se deseja obter.

A **Equação 2** é um modelo matemático que depende de informação ocorridas no passado para estimar posições futuras e, por conta disso, é uma representação particular dos modelos ARX. A modelagem ARX vem sendo utilizada na hidroclimatologia para modelar a dinâmica da vazão a partir da ocorrência da precipitação (KEESMAN; JAKEMAN, 1997; KWIN et al., 2016; SUMAN; MAITY, 2019), para a estimativa da resposta natural de séries temporais (YOON; KIM; KIM, 2004; SARWAR et al., 2017) e, em algumas aplicações, como alternativa à modelagem não-linear (RAVI SRINIWAS; ARKUN, 1997). O termo “autorregressivo” indica que o modelo é ajustado utilizando informações passadas da própria variável dependente (vazão), formando assim uma “memória” no sistema. Já o termo “exógena” indica que a vazão sofre influência de uma ou mais variáveis externas (precipitação).

Um modelo ARX particular que representa a relação causal entre a vazão média mensal (\mathbf{Q}_A) e a precipitação total mensal (\mathbf{P}_A) é apresentado na **Equação 5**. Como \mathbf{Q}_A é a média das vazões medidas na estação fluviométrica dos dias do mês “k”, considerou-se que a precipitação ocorrida dentro do mês “k” é suficiente para explicar a vazão ocorrida no mesmo mês, desconsiderando a necessidade de aplicar regressores [k-n] para \mathbf{P}_A . Já para \mathbf{Q}_A , quanto mais informações passadas [k-n] utilizadas no modelamento, mas refinado ficaria o modelo, todavia, maior o número de variáveis e maior o processamento das operações matriciais da **Equação 4**.

$$\theta_n \mathbf{Q}_A[k] = \theta_0 \mathbf{Q}_A[k-1] + \dots + \theta_m \mathbf{Q}_A[k-1-m] + \beta_0 \mathbf{P}_A[k] \quad (5)$$

A partir da **Equação 5**, foram ajustados 3 modelos ARX, de 1ª, 2ª e 3ª ordem, para cada um dos dez sistemas selecionados, representados pelas estações fluviométricas. A escolha do melhor modelo, o mais representativo, foi a partir da análise simultânea entre o erro relativo percentual (μ), *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Bias Error* (MBE) e o intervalo de confiança.

O μ foi calculado para mensurar a magnitude da diferença existente entre os valores de vazão média mensal (Q_A) e a vazão média mensal estimada pelo modelo ARX (Q_{ARX}), conforme **Equação 6**.

$$\mu = \frac{Q_A - Q_{ARX}}{Q_A} \cdot 100 \quad (6)$$

Os intervalos de confiança (**Equação 7**) foram determinados para indicar a confiabilidade das estimativas pelo modelo ARX, em que \bar{X} é a média das amostras, n é o número de amostras, σ é o desvio padrão e $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ é o nível de confiança.

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

O RMSE foi calculado para medir o desvio médio entre os valores medidos e estimados (**Equação 8**). Esse indicador está associado à precisão do modelo e é adimensional.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Q_{ARX} - Q_A)^2}{N}} \quad (8)$$

O MBE foi calculado para medir a tendência do erro médio entre os valores medidos e preditos, podendo ser positiva ou negativa (**Equação 9**). Esse indicador está associado à exatidão do modelo e possui unidade dimensional, m^3s^{-1} .

$$MBE = \frac{\sum_{i=1}^N (Q_{ARX} - Q_A)}{N} \quad (9)$$

2.4. Obtenção da transformada Z e determinação das funções de transferência

O passo seguinte foi a aplicação da transformada Z nos modelos ARX, conforme a **Equação 10**, para obter a função de transferência do sistema $Q_{ARX}(z)$, em que $Q_{ARX}[k]$ é o modelo ARX ajustado (**Equação 5**), “k” é o instante no tempo discreto na base mensal e “z” é uma variável complexa representada por $z = e^{-j\omega}$, onde $j\omega$ é um número complexo. A **Equação 11** é a representação do modelo ARX no domínio da frequência “z”.

$$Q_{ARX}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_{ARX}[k]z^{-k} \quad (10)$$

$$\theta_0 Q_{ARX}(z)z^{k-n} + \theta_1 Q_{ARX}(z)z^{k-n-1} + \dots + \theta_n Q_{ARX}(z) = \beta_0 P_A(z) \quad (11)$$

A função de Transferência $G(z)$, que representa a relação de causa e efeito do sistema chuva-vazão, é escrita pela **Equação 12**.

$$G(z) = \frac{Q_{ARX}(z)}{P_A(z)} = \frac{\beta_0}{\theta_0 z^{-n} + \theta_1 z^{-(n-1)} + \dots + \theta_n} \quad (12)$$

O denominador da função de transferência $G(z)$, chamado de polinômio característico, carrega as informações sobre a dinâmica do sistema. As raízes do polinômio característico são chamadas de “pólos” de $G(z)$. Os “pólos” são os valores para os quais o denominador de $G(z)$ é zero, ou seja, é a condição em que a função de transferência tende a infinita. Para se obter os pólos, basta igualar o polinômio característico a zero e calcular as raízes da equação, conforme a **Equação 13**.

$$\theta_0 z^{-n} + \theta_1 z^{-(n-1)} + \dots + \theta_n = 0 \quad (13)$$

2.5. Método – O lugar das raízes de $G(z)$

No geral, a transformada Z de uma série tem associada a ela uma faixa de valores de “z” para os quais $Q_{ARX}(z)$ converge, sendo essa faixa de valores denominada *região de convergência* (RDC). Note que a **Equação 13** admite qualquer valor de “z” e, como o polinômio característico é uma soma de exponenciais, a função $Q_{ARX}(z)$ pode ser crescente ou decrescente dependendo do valor de “z”. Quando $z = 1$, a exponencial de “z” sempre será igual a 1. Para valores de $z > 1$, o polinômio característico decresce fazendo com que $Q_{ARX}(z)$ tenda ao infinito (diverge). Já para valores de $z < 1$, o polinômio característico é crescente e $Q_{ARX}(z)$ converge a zero. A partir desse conhecimento, pode-se desenhar um plano z e delimitar a região de convergência (RDC), conforme a **Figura 3**.

Quando se trabalha com funções de transferência no domínio de “z”, conhecer o RDC é importante pois permite avaliar se o sistema converge ou diverge sem a necessidade de conhecer a entrada P_A . Com outras palavras, conhecer o lugar onde as raízes do polinômio característico se encontram no plano z é conhecer a estabilidade que o sistema proporciona a resposta Q_A e, por consequência, se o sistema proporciona, em algum instante de tempo, um regime de vazões em condição de estacionariedade.

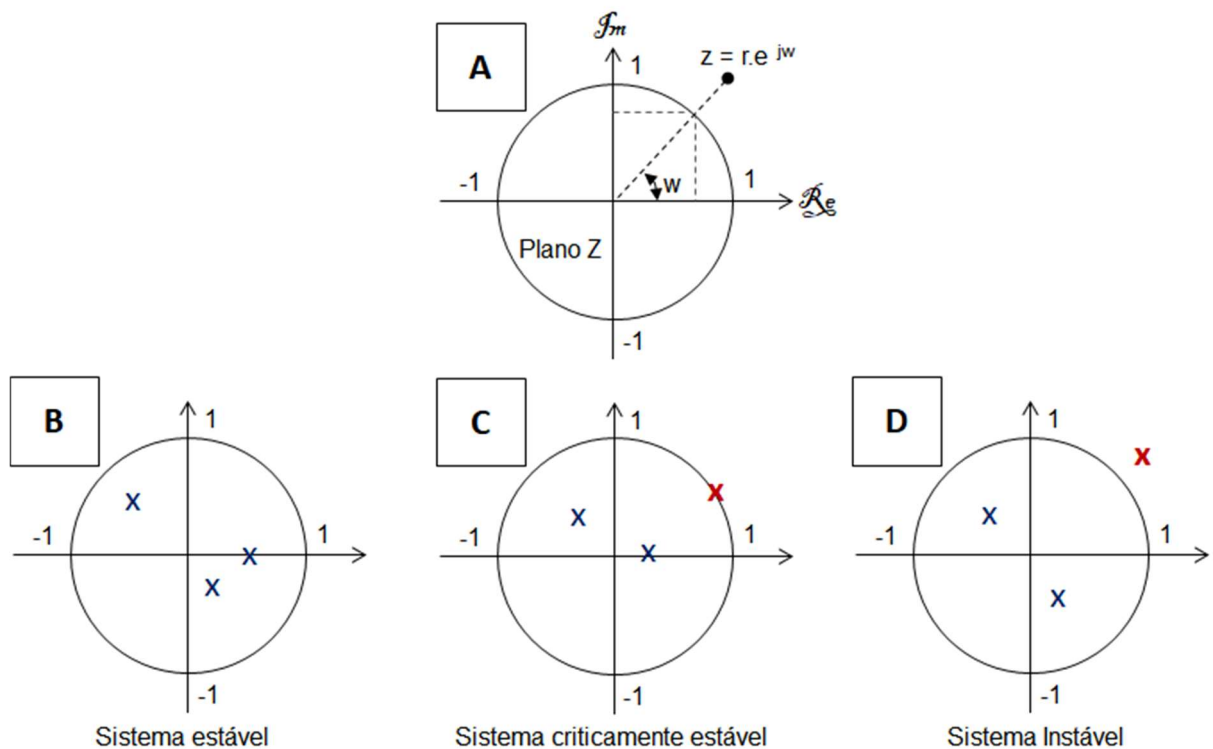


Figura 3 – Plano Z (A) e as condições de estabilidade de um sistema dinâmico. (B) Sistema estável; (C) Sistema criticamente estável; e, (D) Sistema instável.

Quando as raízes se encontram dentro do semicírculo (**Figura 3B**), tem-se que o sistema é estável e possui características estacionárias em regime permanente. Quando pelo menos um polo se encontra sobre a linha do semicírculo (**Figura 3C**), o sistema é criticamente estável ou criticamente estacionário. Já quando, pelo menos, um pólo se encontra fora da região do semicírculo unitário (**Figura 3D**), o sistema proporciona resposta Q_{ARX} instável e não estacionária.

2.6. Teste de Mann-Kendall

O teste de Mann-Kendall é um teste não-paramétrico onde sua estatística de teste é representada nas **Equações 14 a 17**.

$$S = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \text{sgn}(x_i - x_j) \quad (14)$$

$$\text{sgn} = \begin{cases} 1 & (x_i > x_j) \\ 0 & (x_i = x_j) \\ -1 & (x_i < x_j) \end{cases} \quad (15)$$

É estabelecida uma hipótese para determinar a tendência crescente ou decrescente (HAMED; RAMACHANDRA RAO, 1998; HAMED, 2009). A hipótese nula afirma que não há tendência dos dados enquanto a hipótese alternativa indica existência de tendência. Se o conjunto de dados tiver uma média igual a zero, então a variância de “S” será calculada conforme e **Equação 16**.

$$\text{Var}(S) = \frac{n(n-1)(2n+5) - \sum_{p=1}^q t_p(t_p-1)(2t_p+5)}{18} \quad (16)$$

em que: q é o total de grupos empatados e t_p é a soma da estatística na p^{th} classe. Para $n > 10$, o valor de “Z” do teste de distribuição normal padrão é calculado a partir da **Equação 17**.

$$Z = \begin{cases} \frac{S-1}{\sqrt{\text{Var}(S)}} & \text{se } S > 0 \\ 0 & \text{se } S = 0 \\ \frac{S+1}{\sqrt{\text{Var}(S)}} & \text{se } S < 0 \end{cases} \quad (17)$$

Os valores inteiros de “Z” retratam se a tendência está aumentando ou diminuindo, para sinais de “Z” positivos e negativos respectivamente e se o valor de “Z” é maior ou menor que o índice de significância tabelado (α).

A utilização do teste de Mann-Kendall para determinação da estacionariedade das séries é retratada da seguinte forma: A hipótese H_0 , sugere que não há uma tendência na série enquanto, a hipótese H_a indica que há uma tendência. Dessa maneira, aceitar uma hipótese H_0 indica que os dados devem ser estacionários enquanto rejeitar H_0 e aceitar H_a , indica que os dados são não estacionários.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1. Resultado do método MASD

A **Tabela 2** mostra os parâmetros obtidos do processo de modelagem e os resultados estatísticos referente a cada modelo, seguido da **Tabela 3** que mostra os melhores modelos ajustados com base nos parâmetros estatísticos.

Tabela 2 – Modelagem ARX e os resultados estatísticos por modelo.

CÓDIGO (Fluviométrico)	MODELO*	PARÂMETROS ARX				PARÂMETROS ESTATÍSTICOS				
		θ_1	θ_2	θ_3	β_0	RMSE	MBE	μ	Inf. L	Up. L.
61100000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.59	-	-	0.16	0.86	0.01	-0.3%	-3.3%	2.7%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.48	0.12	-	0.17	0.83	0.05	1.6%	-1.3%	4.4%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.47	0.07	0.05	0.17	0.81	0.06	2.5%	-0.3%	5.2%
61230000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.60	-	-	0.16	111.57	-9.03	-1.7%	-4.3%	0.9%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.52	0.08	-	0.16	109.02	-6.00	-0.7%	-3.3%	1.9%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.52	0.00	0.08	0.16	107.63	-2.59	0.6%	-1.9%	3.1%
61320000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.61	-	-	0.18	2.95	0.48	16.3%	9.2%	23.5%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.56	0.05	-	0.18	2.93	0.53	17.1%	10.0%	24.3%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.56	0.01	0.04	0.18	2.94	0.58	18.0%	10.7%	25.2%
61520000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.55	-	-	0.16	4.08	0.34	3.6%	0.4%	6.8%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.47	0.09	-	0.16	4.00	0.44	5.2%	2.1%	8.3%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.46	0.01	0.08	0.16	3.96	0.56	7.0%	4.0%	10.1%
61770000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.55	-	-	0.19	1.37	0.44	18.3%	14.0%	22.7%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.49	0.06	-	0.20	1.37	0.48	20.2%	15.9%	24.5%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.49	0.08	-0.01	0.20	1.37	0.48	19.9%	15.6%	24.2%
61795000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.66	-	-	0.13	8.67	1.04	13.8%	10.0%	17.6%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.68	-0.02	-	0.12	8.68	0.96	13.2%	9.4%	16.9%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.67	0.05	-0.06	0.12	8.63	0.76	11,4%	7.6%	15.2%
61830000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.65	-	-	0.12	40.89	0.71	2.1%	-0.4%	4.7%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.65	0.00	-	0.12	40.93	0.83	2.2%	-0.3%	4.8%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.65	-0.03	0.03	0.12	40.96	1.19	2.7%	0.1%	5.2%
61879000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.59	-	-	0.18	6.29	0.29	5.8%	3.0%	8.6%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.52	0.08	-	0.18	6.17	0.47	7.3%	4.6%	10.0%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.52	0.05	0.03	0.18	6.18	0.55	8.1%	5.3%	10.8%
61895000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.56	-	-	0.19	4.27	0.56	12.5%	8.9%	16.2%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.53	0.02	-	0.19	4.24	0.60	13.2%	9.6%	16.9%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.53	0.02	0.01	0.19	4.26	0.62	13.6%	9.9%	17.2%
61960000	Q _{ARX} [1,1,0]	0.58	-	-	0.09	7.40	-0.04	6.8%	3.1%	10.5%
	Q _{ARX} [2,1,0]	0.53	0.05	-	0.09	7.28	0.08	7.9%	4.3%	11.6%
	Q _{ARX} [3,1,0]	0.53	0.01	0.05	0.09	7.31	0.18	9.2%	5.6%	12.9%

em que: $*Q_{ARX}[m,n,p]$ é a sintaxe utilizada para descrever o modelo ARX de Q_A , m é o número de regressores de Q_A (ordem da equação de diferenças), n é a variável independente P_A (igual a 1, sem regressão) e p é o atraso temporal de Q_A e P_A (igual a zero, sem atraso temporal).

Tabela 3 – Melhor modelos ARX para cada estação fluviométrica e suas equações.

CÓDIGO (Fluviométrico)	MODELO	MELHOR MODELO ARX
61100000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.59 Q[k-1] + 0.16 P[k]$
61230000	$Q_{ARX}[3,1,0]$	$Q[k] = 0.52 Q[k-1] + 0.002 Q[k-2] + 0.08 Q[k-3] + 0.16 P[k]$
61320000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.61 Q[k-1] + 0.18 P[k]$
61520000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.55 Q[k-1] + 0.16 P[k]$
61770000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.55 Q[k-1] + 0.19 P[k]$
61795000	$Q_{ARX}[3,1,0]$	$Q[k] = 0.67 Q[k-1] + 0.05 Q[k-2] - 0.06 Q[k-3] + 0.12 P[k]$
61830000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.65 Q[k-1] + 0.12 P[k]$
61879000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.59 Q[k-1] + 0.18 P[k]$
61895000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.56 Q[k-1] + 0.19 P[k]$
61960000	$Q_{ARX}[1,1,0]$	$Q[k] = 0.58 Q[k-1] + 0.09 P[k]$

Observa-se que, dos dez modelos, oito são representação de 1ª ordem e dois de 3ª ordem, onde, para as equações de 1ª ordem admite-se raízes positivas ou negativas e, as de 3ª ordem, admite-se raízes complexas. A opção por ajustar os modelos Q_{ARX} até a 3ª ordem foi, unicamente, para reduzir o tempo de processamento das informações, uma vez que o cálculo dos parâmetros que compõe a **Equação 5** seguiu o método dos mínimos quadrados (**Equação 4**), que fica cada vez mais complexo quanto maior a ordem das matrizes. Por outro lado, o cálculo estatístico apresentado na **Tabela 1** mostrou que o aumento da ordem do modelo Q_{ARX} não influenciou significativamente no RMSE, MBE e μ , o que justifica a não obrigatoriedade em ajustar modelos Q_{ARX} superiores a 3ª ordem.

Na **Figura 4** são apresentados o erro relativo percentual e o respectivo intervalo de confiança para cada Q_{ARX} . A disposição apresentada permite comparar as margens de erro de estimativa, visto que o menor erro obtido foi para o sistema chuva-vazão da estação fluviométrica 61100000 (-0.3%) e o maior erro para 61770000 (18.3%), com intervalos de confiança entre -3.26% e 2.68% a 14.04% e 22.66%, respectivamente.

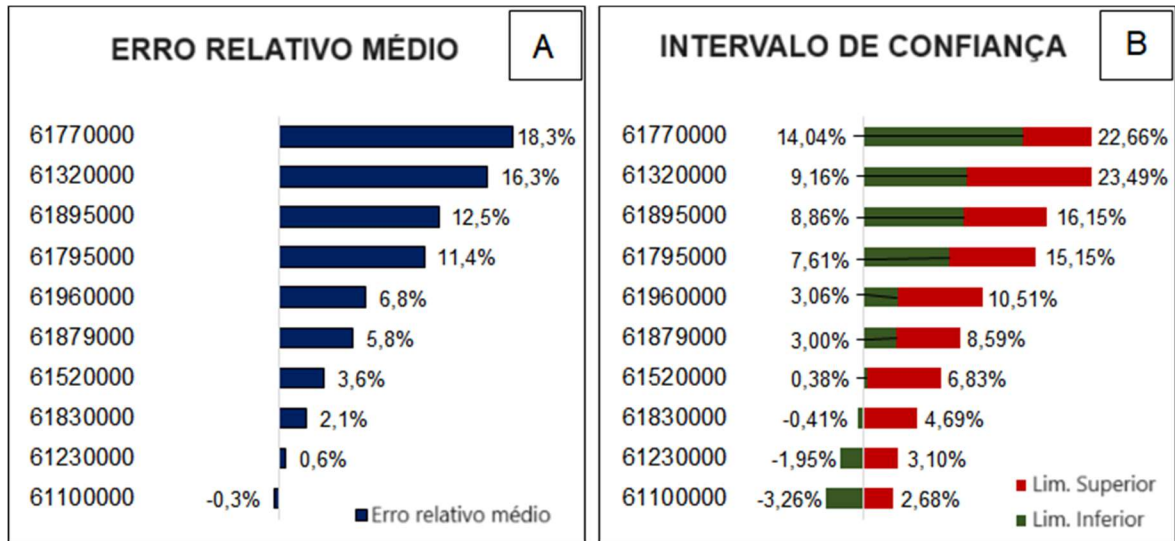


Figura 4 – Erro relativo percentual (A) e o intervalo de confiança (B) para cada modelo Q_{ARX} ajustado.

As **Figuras 5 a 14** mostram os dados reais Q_A versus os dados estimados Q_{ARX} (para os melhores modelos, **Tabela 3**) e a validação temporal do respectivo sistema chuva-vazão.

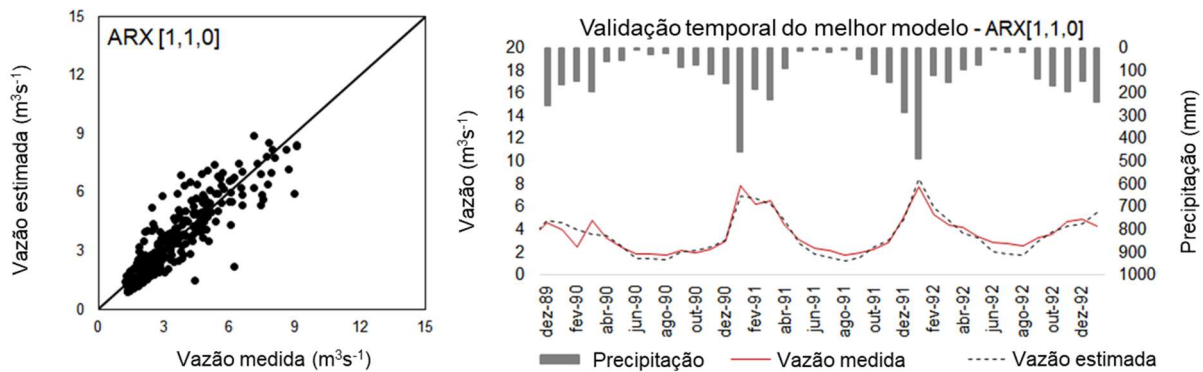


Figura 5 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61100000.

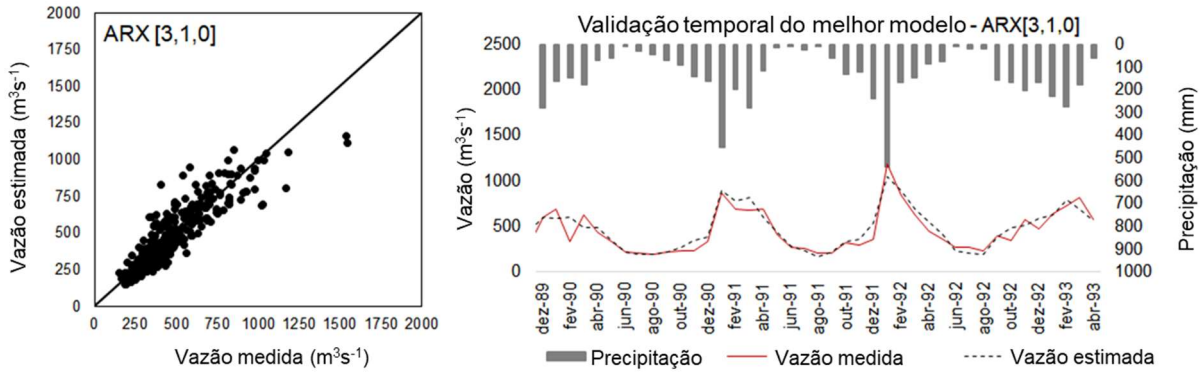


Figura 6 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61230000.

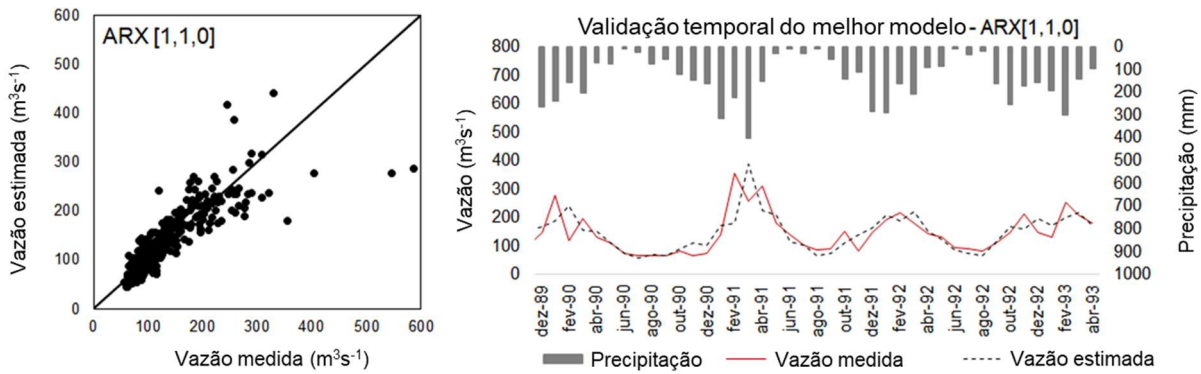


Figura 7 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61830000.

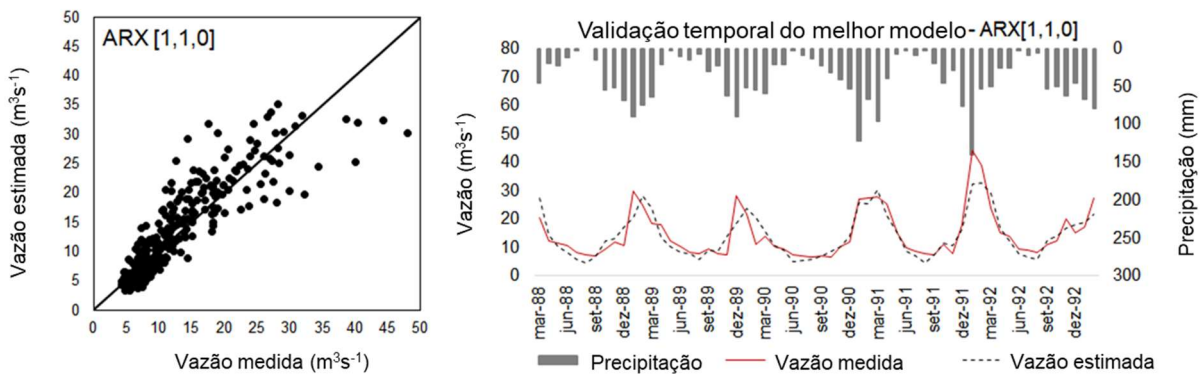


Figura 8 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61520000.

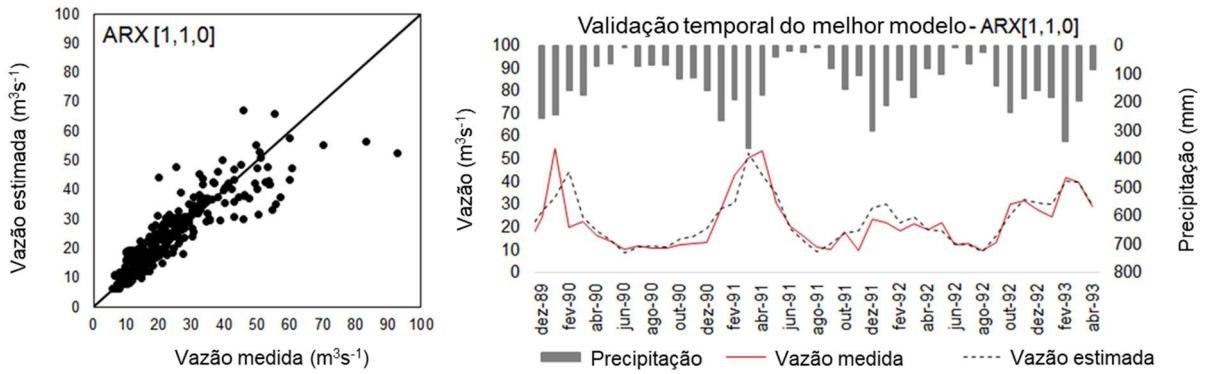


Figura 9 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61879000.

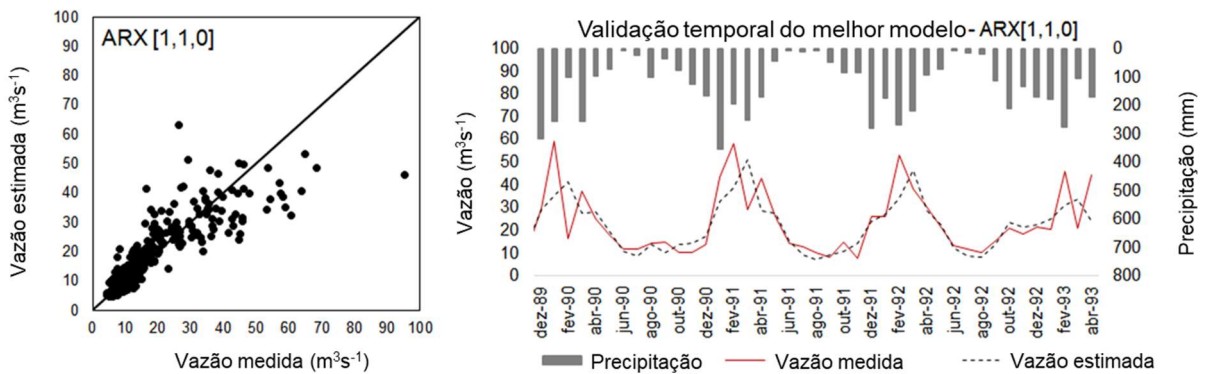


Figura 10 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61960000.

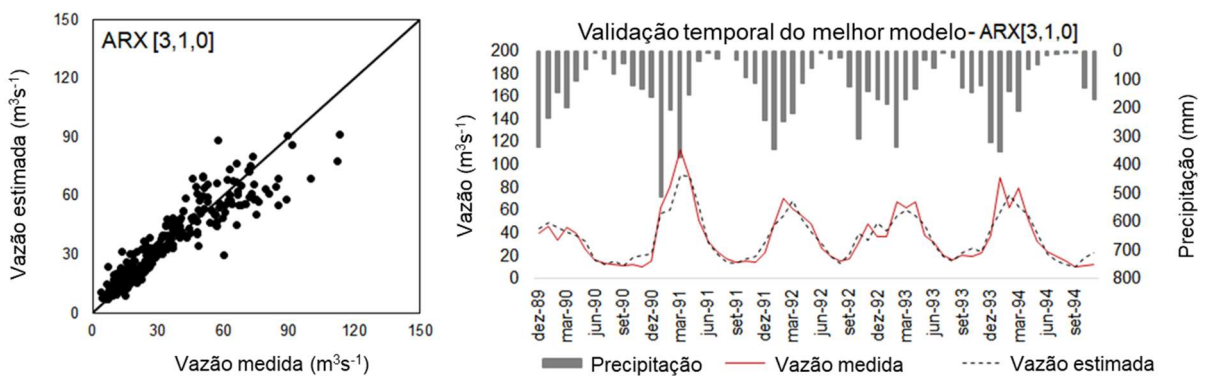


Figura 11 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61795000.

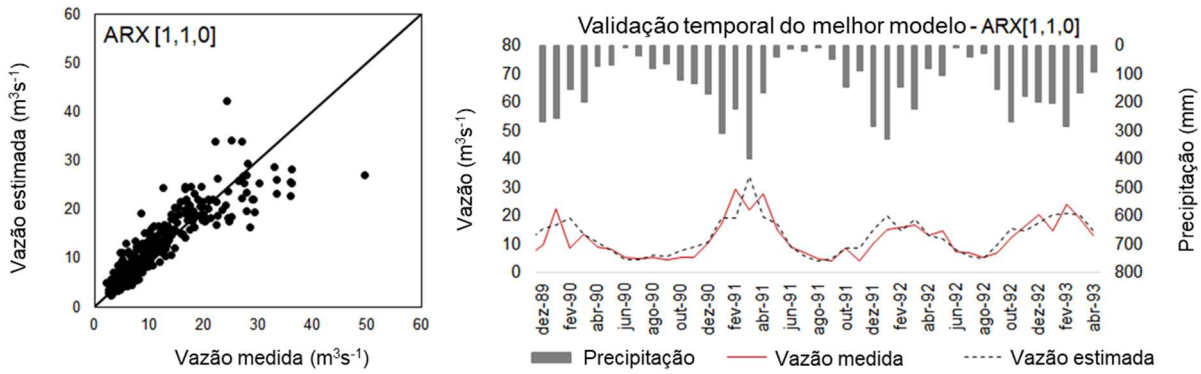


Figura 12 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61895000.

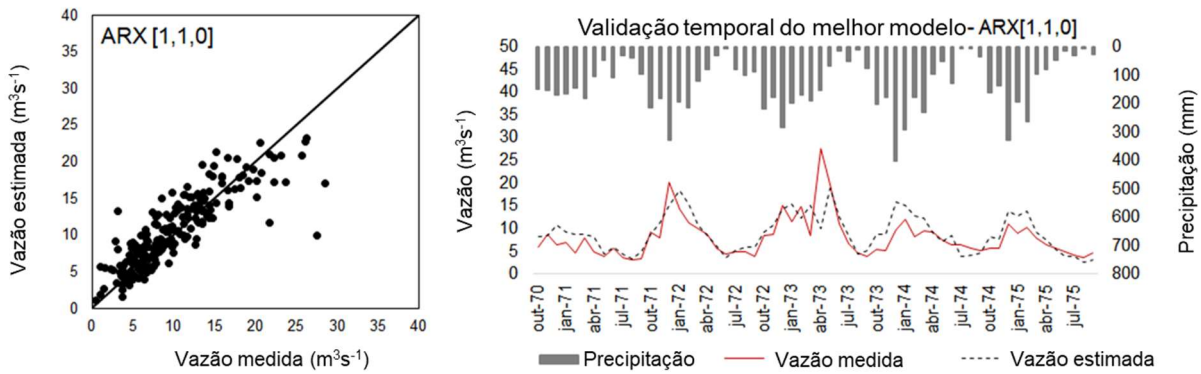


Figura 13 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61320000.

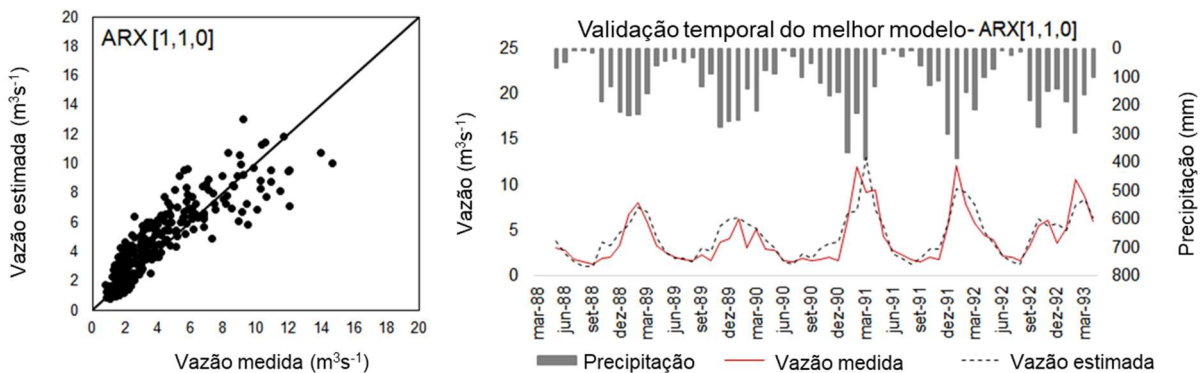


Figura 14 – Comparação entre os valores medidos e estimados e a validação temporal do melhor modelo Q_{ARX} da estação 61770000.

A diferença entre as amplitudes do erro relativo percentual observada na **Figura 4A** não está associada ao tamanho da área de drenagem tampouco ao tamanho dos dados da série chuva-vazão (**Tabela 2**). Acredita-se que essa diferença tenha ocorrido, principalmente, devido a qualidade dos dados uma vez que incertezas são evidenciadas durante a estimativa das vazões de escoamento e das séries de precipitação. Para a vazão, a qualidade dos dados pode estar associada ao processo de estimativa pela curva-chave, principalmente em decorrência da extrapolação da curva, como em eventos de cheias (COZ et al., 2014; REITZ; DIAS, 2014; GRISON; KOBAYAMA, 2009; BRUSA; CLARKE, 1999). Já a precipitação, pode estar associada ao processo de interpolação espacial para determinação das séries, que é um fator preponderante e evidenciado na subestimativa das vazões de pico (BÁRDOSSY; ANWAR, 2023). Observa-se também, para a área de drenagem 61795000, menor densidade de estações pluviométricas, o que interfere diretamente na estimativa da precipitação da área.

Outro fator que pode ter contribuído é a variabilidade das condições de uso e ocupação do solo durante os meses selecionados para a modelagem, visto que pode interferir diretamente no balanço hídrico da região (COE et al., 2011; KHANNA et al., 2017; SPERA et al., 2016; YAO et al., 2015). Se as condições do uso do solo influenciarem significativamente a parcela do escoamento superficial dentro da escala mensal, então será significativo os picos mensais de Q_A , culminando em maiores erros de estimativa de Q_{ARX} .

A **Figura 15** apresenta o plano Z do lugar das raízes dos sistemas chuva-vazão, em que G_z é a função de transferência para cada um dos dez sistemas selecionados. Observa-se que todos os dez sistemas chuva-vazão analisados possuem raízes do polinômio característico dentro do círculo unitário do plano Z, o que é uma condição de estabilidade dos sistemas. Para tanto, qualquer variação finita na precipitação P_A a vazão Q_A irá responder de maneira assintótica, encontrando uma nova região de estabilidade e, por sua vez, o conjunto de dados se comportará com características estacionária.

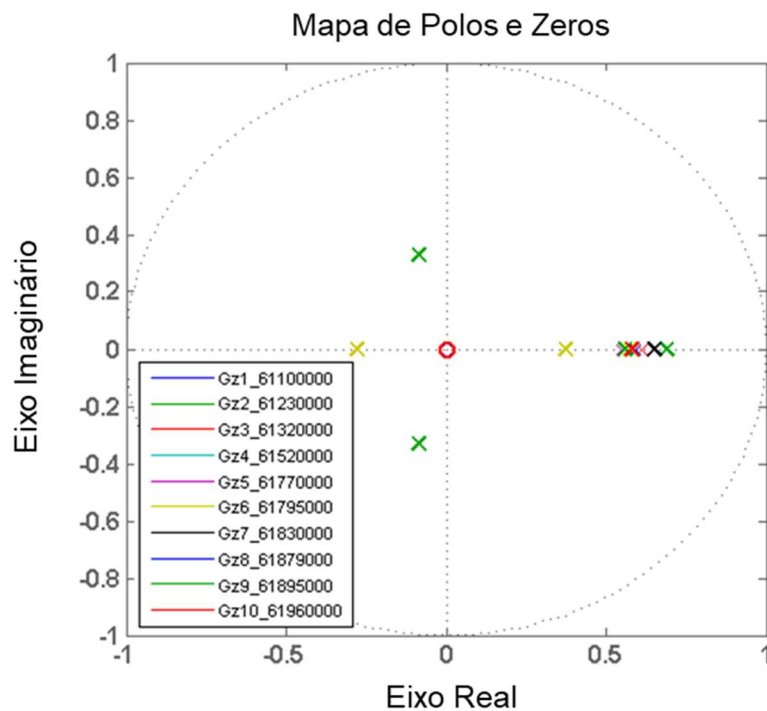


Figura 15 – Aplicação do método do lugar das raízes.

Os sistemas $G_{z2_}(61230000)$ e $G_{z6_}(61795000)$, que estão representadas por modelos Q_{ARX} de 3ª ordem (**Tabela 2**), podem fornecer raízes reais ou complexas. Observa-se na **Figura 15** que apenas o modelo Q_{ARX} do sistema $G_{z2_}(61230000)$ retornou um par de raízes complexas $-0.085 \pm 0.33j$, indicando a existência de um subsistema armazenador de energia significativo na região, o que não ocorre em $G_{z6_}(61795000)$. Esse subsistema seria um reservatório de água que estaria operando na região e regularizando a vazão Q_A no curso d'água e esse armazenamento e descarga de Q_A , quando significativo, proporciona polos complexos nos modelos dinâmicos (CHEN, 2012; LJUNG; GLAD, 1994). A **Figura 16** mostra que a área de drenagem da estação fluviométrica 61230000 possui um importante reservatório em operação, que é a Usina Hidrelétrica de Furnas.

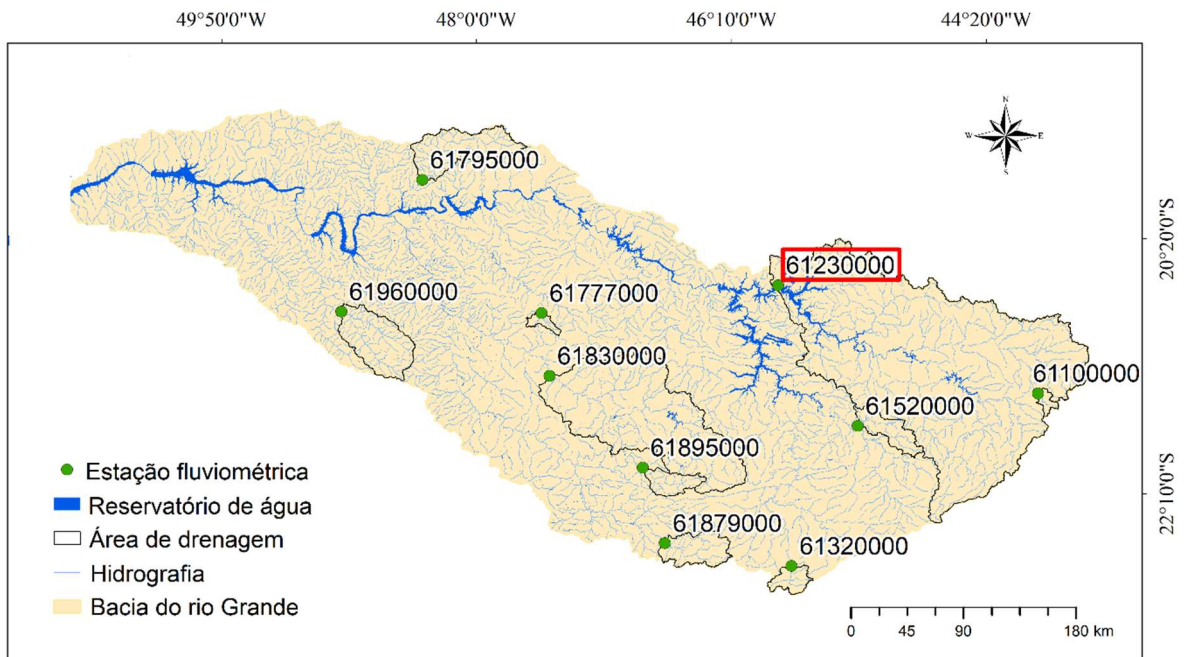


Figura 16 – Identificação dos reservatórios a montante das estações fluviométricas.

Por fim, o lugar das raízes também indicou em quais sistemas a resposta é mais rápida em decorrência da precipitação P_A e quais aqueles que a resposta é mais lenta. Observa-se que o pólo de G_{z6} (61795000) igual a -0.28 e está mais próxima da origem do plano Z quando comparado a G_{z2} (61230000), que possui polo igual a $+0.69$, o que indica que a resposta da vazão Q_A é mais rápida em G_{z6} (61795000) e mais lenta G_{z2} (61230000). Todavia, ambos são sistemas estáveis capazes de proporcionar uma vazão Q_A em condições estacionárias, dado um equilíbrio em P_A .

A velocidade com que o sistema chuva-vazão transita de uma região estacionária para outra está associada ao coeficiente de recessão (CHOW, 1959; GUERRERO et al., 2012), que relacionada a condutividade hidráulica, a espessura efetiva do aquífero, a porosidade efetiva e o comprimento do percurso de escoamento (não será apresentado o cálculo do coeficiente de recessão nesse trabalho, deixando indicado para trabalhos futuros). Dessa maneira, quanto menor o coeficiente de recessão, mais lenta é a resposta do sistema e, quanto maior esse coeficiente, mais rápida a resposta de carga e descarga.

3.2. Resultado do teste de Mann-Kendall

Com base nas **Equações 14 a 17**, aplicou-se o teste de Mann-Kendall para determinação da estacionariedade Q_A em cada uma das séries. Os resultados dos testes estão apresentados na **Tabela 4**.

Tabela 4 – Resultados obtidos pelo teste de Mann-Kendall.

CÓDIGO (Fluviométrico)	TESTE DE MANN KENDALL				RESULTADOS
	Kendal τ	S	Var(S)	p-value	
61100000	0,020	378	925238,67	0,688	Não rejeitar hipótese H_0
61230000	0,157	3110	898289,33	0,001	Rejeitar hipótese H_0 e aceitar H_a .
61320000	0,135	1264	330745,33	0,028	Rejeitar hipótese H_0 e aceitar H_a
61520000	0,116	2300	989527,00	0,021	Rejeitar hipótese H_0 e aceitar H_a
61770000	0,071	1415	959670,66	0,149	Não rejeitar hipótese H_0
61795000	0,149	2650	814088,00	0,003	Rejeitar hipótese H_0 e aceitar H_a
61830000	0,166	3294	1033638,67	0,001	Rejeitar hipótese H_0 e aceitar H_a
61879000	0,088	1750	944520,00	0,072	Não rejeitar hipótese H_0
61895000	0,080	1588	905120,67	0,095	Não rejeitar hipótese H_0
61960000	0,176	3481	991541,67	0000	Rejeitar hipótese H_0 e aceitar H_a

A aplicação do teste de Mann-Kendall mostrou que, para as séries de vazão Q_A das estações 61100000, 61770000, 61879000 e 61895000, não se deveria rejeitar a hipótese nula H_0 e, portanto, sugerido que os dados de Q_A fossem estacionários. Por outro lado, para a demais séries (61230000, 61320000, 61520000, 61795000, 61830000, 61960000), deve-se rejeitar da hipótese H_0 e aceitar a hipótese H_a e, portanto, sugerido que Q_A fosse não-estacionário.

3.3. Interpretação do teste de Mann-Kendall com base no MASD

O teste de Mann-Kendall sugeriu que seis das dez estações analisadas fossem não-estacionárias, todavia, não se pôde afirmar se a vazão Q_A atingiria uma nova condição de estacionariedade ou se de fato o sistema se comportaria de forma não-estacionária ao longo do tempo. Dessa forma, o método MASD buscou interpretar a não-estacionariedade à uma condição em que a vazão estivesse partindo de uma região estacionária em direção à uma nova condição de estacionariedade, onde somente irá ocorrer se o sistema chuva-vazão da região analisada for estável. Analisar o sistema chuva-vazão nessa ótica é importante para compreender melhor os

resultados obtidos por Mann-Kendall, visto que o teste indicou as condições de momento de Q_A , mas não explicou se seria uma condição de não-estacionariedade definitiva ou momentânea.

Apenas para exemplificar essa narrativa, a **Figura 17** ilustra as regiões estacionárias e transitórias do sistema $G_{z1_61100000}$, dado um incremento total de 300% (50% em 50%) na série de precipitação para que se possa simular o comportamento de Q_A no tempo. Observa-se que o sistema vinha se comportando de forma estacionária e, quando inserido o incremento na precipitação, levou-se um tempo (alguns meses) para que a vazão Q_A alcance-se uma nova região estacionária, ou seja, um novo ponto de equilíbrio. Caso fosse aplicado o teste de Mann-Kendall em toda a série Q_A , ou somente no período em que Q_A estivesse em transição de equilíbrio, a resposta do teste indicaria a não-estacionariedade de Q_A .

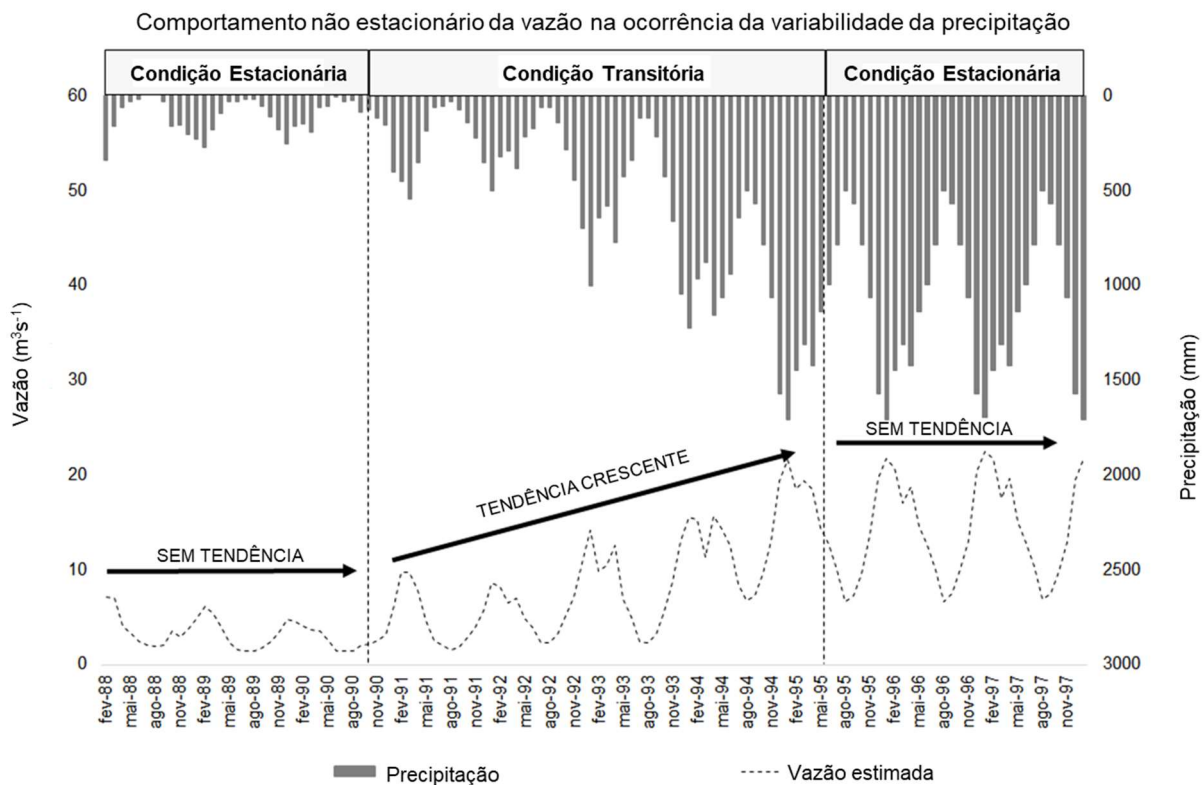


Figura 17 – Exemplo das condições estacionárias e transitórias para o sistema $G_{z1_61100000}$ em decorrência da elevação dos níveis de P_A .

De maneira geral, para entender o comportamento estacionário ou não-estacionário de Q_A deve-se trazer para análise o comportamento de P_A , visto que ela é a responsável pela formação de Q_A nas regiões hidrográficas e, quaisquer

ocorrências de eventos extremos ou em decorrência de mudanças climáticas, a variabilidade de P_A será observada em Q_A em uma escala temporal.

Fazendo uso das informações obtidas pelo MASD e dos resultados dos testes de Mann-Kendall apresentados na **Tabela 3**, pode-se sugerir que os seis sistemas em que o teste de Mann-Kendall indicou a não-estacionariedade, certamente, a vazão Q_A estaria em uma região de transição. Dessa maneira, pode-se afirmar que em algum momento futuro os dados de Q_A serão obrigatoriamente estacionários porque todos esses sistemas são estáveis, segundo MASD.

4. CONCLUSÕES

O método baseado na análise de sistemas dinâmicos **MASD** é uma ferramenta que pode ser utilizada para determinar as condições de estabilidade dos sistemas e para predições de evento a partir dos modelos ARX ajustados. Utilizando os modelos ARX, pode-se estimar os valores de vazão futuros a partir do conhecimento da própria vazão em instantes passados e da série de precipitação, real ou sintética.

Os resultados obtidos por Mann-Kendall indicaram que seis das dez séries de vazão Q_A são não-estacionárias, mas o teste não explicou o comportamento que poderia justificar a não estacionariedade. Esse comportamento foi explicado pelo MASD, associando a não-estacionariedade a condição transitória dos sistemas chuva-vazão em busca de um novo equilíbrio.

O método MASD indicou que todos os dez sistemas chuva-vazão são estáveis e, portanto, dado um equilíbrio (estacionariedade) de P_A , a vazão Q_A obrigatoriamente será estacionária em algum momento no tempo, mesmo que ainda não tenham atingido essa condição. Ressalta-se que a estabilidade dos modelos ARX indicam que estes terão capacidade de estimar valores de vazão futuros, com boa precisão, mesmo que ocorra a não estacionariedade das séries, como indicado em mann-kendall.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas** (Técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais). Editora UFMG, 2007.
- BÁRDOSSY, A.; ANWAR, F. Why do our rainfall–runoff models keep underestimating the peak flows. **Hydrology and Earth System Science**, v.27, p. 1987 – 2000, 2023. DOI: 10.5194/hess-27-1987-2023.
- BROMSSEN, C. V.; BETNÉR, S.; FOLSTER, J.; EKLOF, K. A toolbox for visualizing trends in large-scale environmental data. **Environmental Modelling & Software**, V. 136, 2021. DOI: 10.1016/j.envsoft.2020.104949.
- BRUSA, E. M.; CLARKE, R. T. Erros envolvidos na estimativa da vazão máxima utilizando curva-chave. Caso de estudo: Bacia do Rio Ibicuí, RS. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v.4, n.3, p.91-95, 1999.
- CARVALHO, L. M. V.; JONES, C.; LIEBMANN, B. Extreme Precipitation Events in Southeastern South America and Large-Scale Convective Patterns in the South Atlantic Convergence Zone. **Journal of Climate**, v. 15, p. 2377-2394, 2002.
- CECÍLIO, R. A.; PRUSKI, F. F. Interpolação dos parâmetros da equação de chuvas intensas com uso do intervalo de potência da distância. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v.7, n.3, p.501 – 504, 2003. DOI: 10.1590/S1415-43662003000300016.
- CHEN, C, T. **Linear System Theory and Design**. Oxford University Press, 4ª ed, 2012.
- CHOW, V. T. **Open-Channel Hydraulics**. McGraw-Hill Book Company, P.109 – 113, 1959.
- COE, M. T. et al. The effect of deforestation and climate variability on the streamflow of the Araguaia River, Brazil. **Biogeochemistry**, v.105, n.1, p119 – 131, 2011.
- COZ, J. L.; RENARD, B.; BONNIFAIT, L.; BRANGER, F.; BOURSICAUD, R. L. Combining hydraulic knowledge and uncertain gauging in the estimation of hydrometric rating curves: a Bayesian approach. **Journal of Hydrology**, v.509, p.573 – 587, 2014.

GRISON, F.; KOBIYAMA, M. Erros e incertezas na estimativa de vazões e no traçado de curvas-chave. In: **XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos**, 2009, Campo Grande: ABRH, 2009.

GLEICK, P. H; SHIMABUKU, M. Water-related conflicts: definitions, data, and trends from the water conflict chronology. **Environmental Research Letters**, v. 18, n. 3, p. 034022, 2023. DOI: 10.1088/1748-9326/acbb8f.

GUERRERO, J. L; WESTERBERG, I. K.; HALLADIN, S.; XU, C. Y.; LUNDIN, L. C. Temporal variability in stage-discharge relationships. **Journal of Hydrology**, v.446 – 447, p. 90 – 102, 2012.

HAMED, K. H. Exact distribution of the Mann-Kendall trend test statistic for persistent data. **Journal of Hydrology**, v. 365, n. 1–2, p. 86–94, 2009.

HAN, D.; QUILTY, J. M; SENONER, A. E. Ensemble and stochastic conceptual data-driven approaches for improving streamflow simulations: Exploring different hydrological and data-driven models and a diagnostic tool. **Environmental Modelling & Software**, v.157, 2022. DOI: 10.1016/j.envsoft.2022.105474.

HAMED, K. H.; RAMACHANDRA RAO, A. A modified Mann-Kendall trend test for autocorrelated data. **Journal of Hydrology**, v. 204, n. 1–4, p.182 – 196, 1998.

IPT - Instituto de Pesquisa Tecnológica. **Diagnóstico da situação dos recursos hídricos na Bacia Hidrográfica do Rio Grande (BHRG) - SP/MG**. Secretaria do meio ambiente. São Paulo. 2008.

KEESMAN, K.; JAKEMAN, T. Identification for Long-Term Prediction of Rainfall-Streamflow Systems. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 30, n. 11, p. 1445–1450, 1997.

KENDALL, M. G. **Rank correlation measures**. Charles Griffin: London, U.K, p200, 1975.

KHANNA, J. et al. Regional dry-season climate changes due three decades of Amazonian deforestation. **Natural Climate Change**, v.7, p. 200 – 204, 2017.

KWIN, C. T. et al. Rainfall-runoff Modeling Using Dynamic Evolving Neural Fuzzy Inference System with Online Learning. **Procedia Engineering**, v. 154, p. 1103–1109, 2016.

LI, H. et al. Non-stationary frequency analysis of annual extreme rainfall volume and intensity using Archimedean copulas: A case study in eastern China. **Journal of Hydrology**, v. 571, n. May 2018, p. 114–131, 2019.

LJUNG, L.; GLAD, T. **Modelling of dynamic systems**. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Englewood Cliffs, NJ: PTR Prentice Hall, 1994.

LOPES, J. R. F.; SILVA, D. F. Aplicação do teste de Mann-Kendall para análise de tendência pluviométrica no estado do Ceará. **Revista Geográfica (UFGP)**, v. 30, nº 3, 2013.

LU, G. Y.; WONG, D. W. Na adaptative inverse-distance weighting spatial interpolation technique. **Computer & Geosciences**, v.34, n.9, p.1044 – 1055, 2008. DOI: 10.1016/j.cageo.2007.07.010.

MANN, H. B. Econometrica. **The econometric Society**, v13, n.3, p.245 – 259, 1945.

MELLO, C. R.; SILVA, A. M. **Hidrologia: Princípios e aplicações em sistemas agrícolas**. Lavras: Ed. UFLA, 2013.

MEDEIROS, E. S.; LIMA, R. R; OLINDA, R. A; *et al.* Modeling Spatiotemporal Rainfall Variability in Paraíba, Brazil. **Water**, v. 11, n. 9, p. 1843, 2019. DOI: 10.339/w11091843.

MIRANDA, J. I. **Fundamentos de sistemas de informações geográficas**. 2ª ed. Brasília, DF: Embrapa, Informações tecnológicas, 2010.

MUMO, L.; YU, J.; AYUGI, B. Evaluation of spatiotemporal variability of rainfall over Kenya from 1979 to 2017. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, v. 194, n. December 2018, p. 105097, 2019.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKI, A. S. **Signal and Systems**. Prentice-Hall, 2010.

PINAULT, J. L.; DUBUS, I. G. Stationary and non-stationary autoregressive processes with external inputs for predicting trends in water quality. **Journal of Contaminant Hydrology**, v. 100, n. 1–2, p. 22–29, 2008.

RASHID, M. M.; BEECHAM, S.; CHOWDHURY, R. K. Assessment of trends in point rainfall using Continuous Wavelet Transforms. **Advances in Water Resources**, v. 82, p. 1–15, 2015.

RAVI SRINIWAS, G.; ARKUN, Y. A global solution to the nonlinear model predictive control algorithms using polynomial ARX models. **Computers and Chemical Engineering**, v. 21, n. 4, p. 431 – 439, 1997.

REITZ, K.; DIAS, S. F. Análise comparativa da aplicação de métodos de calibragem de curvas-chave de estações instáveis na análise de consistência de dados fluviométricos da estação Barreirinha, no rio Anti-Paraná, na Bacia Hidrográfica do Rio Amazonas. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v.19, n.1, p.155 – 163, 2014.

SARWAR, R. et al. Field validation study of a time and temperature indexed autoregressive with exogenous (ARX) model for building thermal load prediction. **Energy**, v. 119, p. 483–496, 2017.

SPERA, S. A. et al. Land-use change affects water recycling in Brazil's last agricultural frontier. **Global Change Biology**, v.22, n.10, p.3405 – 3413, 2016.

SUMAN, M.; MAITY, R. Hybrid Wavelet-ARX approach for modeling association between rainfall and meteorological forcings at river basin scale. **Journal of Hydrology**, v. 577, n. February, p. 123918, 2019.

VILLA, D. L.; SCHOSTEK, T.; GOVERTSEN, K.; MACMILLAN, M. A stochastic model of future extreme temperature events for infrastructure analysis. **Environmental Modelling & Software**, v. 163, 2023. DOI: 10.1016/j.envsoft.2023.105663.

YAO, Y. et al. Effect of reforestation on annual water yield in a large watershed in northeast China. **Journal of Forestry Research**, v.26, n.3, p.697-702, 2015.

YOON, M. C.; KIM, B. T.; KIM, K. H. Natural mode estimation of cutting dynamics with time series modelling. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 155–156, n. 1–3, p. 1373–1382, 2004.