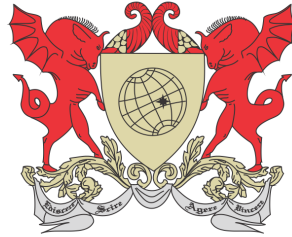


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
Dissertação de Mestrado



SARA BELMONTE RESENDE

UM ESTUDO SOBRE A PARIDADE DE NÚMEROS  
INTEIROS

FLORESTAL – MINAS GERAIS  
2024

**SARA BELMONTE RESENDE**

**UM ESTUDO SOBRE A PARIDADE DE NÚMEROS INTEIROS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Danielle Franco Nicolau

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal**

T

R433e  
2024 Resende, Sara Belmonte, 1994-  
Um estudo sobre a paridade de números inteiros / Sara Belmonte Resende. – Florestal, MG, 2024.  
1 dissertação eletrônica (82 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Danielle Franco Nicolau.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2024.

Referências bibliográficas: f. 82.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2024.006>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Aritmética. 2. . I. Nicolau, Danielle Franco , 1984-.  
II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 23. ed. 513


**SARA BELMONTE RESENDE**

**UM ESTUDO SOBRE A PARIDADE DE NÚMEROS INTEIROS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.


APROVADA: 15 de abril de 2024.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente  
 **SARA BELMONTE RESENDE**  
Data: 11/07/2024 18:22:31-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Sara Belmonte Resende  
Autora

Documento assinado digitalmente  
 **DANIELLE FRANCO NICOLAU**  
Data: 11/07/2024 18:33:55-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Danielle Franco Nicolau  
Orientadora

# Dedicatória

---

Dedico este trabalho à minha família, que sempre me apoiou e me incentivou. Aos meus professores da UFV - Florestal, tanto da minha graduação, quanto do Mestrado, especialmente à minha orientadora Danielle Franco Nicolau em quem me inspiro e que tanto me ajudou nessa jornada.

# Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir vivenciar e concluir esse sonho, por me sustentar ao longo dessa jornada, me dando forças para vencer os desafios enfrentados.

Aos meus pais, irmãos, familiares e amigos, agradeço por todo auxílio, por estarem ao meu lado e não me deixarem desistir, além de compreenderem a minha ausência nesse período.

Aos meus colegas de curso, agradeço por compartilharem seus conhecimentos durante as aulas e nas longas horas de estudos. Vocês tornaram esse “fardo” mais leve.

Deixo aqui um agradecimento especial à minha orientadora, professora Dra. Danielle Franco Nicolau, por todo apoio, incentivo, dedicação e disponibilidade. Certamente esse trabalho não seria possível sem sua grandiosa orientação. Muito obrigada!

A todos os professores do PROFMAT da UFV - Florestal (instituição da qual tenho orgulho de ter cursado minha graduação e agora estar concluindo o mestrado), agradeço pelos ensinamentos transmitidos e por muito contribuírem para o meu crescimento profissional.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização do mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

---

RESENDE, Sara Belmonte, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2024.  
**Um estudo sobre a paridade de números inteiros.** Orientadora: Danielle Franco Nicolau.

Este trabalho será um estudo sobre os números inteiros desde a sua construção. Trabalharemos com temas de aritmética, em especial paridade de números inteiros. Dizemos que um número par tem paridade par e que um número ímpar tem paridade ímpar. Este conceito, apesar de sua simplicidade, aparece na resolução de uma variedade de questões, além de ser útil na solução de muitos problemas matemáticos e do cotidiano. O interessante sobre a simplicidade do tema é que é possível trabalharmos até mesmo com estudantes nos anos iniciais de ensino, com pouco conhecimento matemático, apresentando uma aritmética fascinante. Iniciaremos com o estudo histórico do surgimento dos Números, nos baseando em Livros de História da Matemática. Apresentaremos vários problemas que podem ser resolvidos com paridade, a fim de mostrar um certo padrão nas soluções e tornar possível a aplicação em problemas semelhantes. O trabalho ainda apresentará um produto técnico da dissertação voltado para o Ensino Básico, aplicando a paridade na resolução de problemas e jogos.

Palavras-chave: Paridade. Números Inteiros. Resolução de Problemas. Problemas com Paridade.

# Abstract

---

RESENDE, Sara Belmonte, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, April, 2024. **A study on the parity of integers.** Adviser: Danielle Franco Nicolau.

This work will be a study of integers since their construction. We will work with arithmetic topics, especially parity of integers. We say that an even number has even parity and an odd number has odd parity. This concept, despite its simplicity, appears in solving a variety of questions, in addition to being useful in solving many mathematical and everyday problems. The interesting thing about the simplicity of the topic is that it is possible to work even with students in the initial years of education, with little mathematical knowledge, presenting fascinating arithmetic. We will start with the historical study of the emergence of Numbers, based on Books on the History of Mathematics. We will present several problems that can be solved with parity, in order to show a certain pattern in the solutions and make application to similar problems possible. The work will also present a technical product of the dissertation aimed at Basic Education, applying parity in problem solving and games.

Keywords: Parity. Integers Numbers. Problem solving. Problems with Parity.

# Lista de Figuras

---

4.1	Engrenagens . . . . .	66
4.2	Possíveis movimentos do cavalo . . . . .	66
4.3	Esquema dos movimentos do cavalo . . . . .	67
4.4	Jogo dos botões luminosos . . . . .	67
4.5	Cartas do jogo . . . . .	74
4.6	Configuração inicial do jogo . . . . .	74
4.7	Jogo das Torres: distribuição inicial das peças . . . . .	76
4.8	O primeiro jogador vence . . . . .	77
4.9	O segundo jogador vence . . . . .	77
4.10	Tampinhas de garrafa PET - peças do jogo “Par ou ímpar?” . . . . .	78
4.11	Dividindo 6 tampinhas . . . . .	79
4.12	Dividindo 9 tampinhas . . . . .	79

# Lista de Tabelas

---

1.1	Dissertações do PROFMAT envolvendo Números Inteiros . . . . .	13
4.1	Paridade do número de cada face ao final de cada jogada . . . . .	75

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
1.1	Justificativa . . . . .	11
1.2	Objetivos . . . . .	12
1.3	Metodologia . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Elementos teóricos</b>	<b>14</b>
2.1	O que é Número? . . . . .	14
2.2	Construção dos Números Naturais . . . . .	15
2.2.1	Adição em $\mathbb{N}$ . . . . .	18
2.2.2	Multiplicação em $\mathbb{N}$ . . . . .	21
2.2.3	Relação de Ordem em $\mathbb{N}$ . . . . .	24
2.2.4	Lei da Tricotomia em $\mathbb{N}$ . . . . .	27
2.3	Números Inteiros . . . . .	29
2.3.1	Construção dos Números Inteiros . . . . .	30
2.3.2	Adição em $\mathbb{Z}$ . . . . .	31
2.3.3	Subtração em $\mathbb{Z}$ . . . . .	34
2.3.4	Multiplicação em $\mathbb{Z}$ . . . . .	34
2.3.5	Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$ . . . . .	37
2.3.6	Imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ . . . . .	44
2.4	Módulo de um número inteiro . . . . .	46
2.5	Divisão Euclidiana . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Paridade de um número inteiro</b>	<b>54</b>
3.1	Paridade da soma de inteiros . . . . .	55
3.2	Paridade do produto de números inteiros . . . . .	58
3.3	Alguns Exemplos Interessantes . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Estudando a Paridade de Números Inteiros na Educação Básica</b>	<b>64</b>
4.1	Considerações Pedagógicas . . . . .	64
4.2	Problemas . . . . .	65
4.3	Propostas Pedagógicas: Aplicação na sala de aula . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>81</b>

# Introdução

---

O presente trabalho destina-se ao estudo de números inteiros, com foco no tema paridade. Para tal, apresentaremos um breve relato sobre a origem dos números inteiros, a evolução dos símbolos e, em seguida, trataremos sobre a construção axiomática dos Números Naturais e Números Inteiros. Neste contexto, estudaremos algumas propriedades dos números inteiros, como a divisibilidade, tema importante para a compreensão do conceito de paridade. Feito isso, sugeriremos a abordagem da resolução de problemas, como metodologia de ensino, para o processo de ensino-aprendizagem de números inteiros. O intuito é a aquisição da flexibilidade numérica pelos alunos, habilidade importante e necessária que, de acordo com a BNCC, deve ser desenvolvida na educação básica.

A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2018, [2], p. 268.)

A Paridade de Números Inteiros é um conceito amplamente utilizado em nossas vidas. Desde a nossa infância já temos contato com este tema, em jogos tradicionais, como o “Par ou ímpar”, por exemplo. Já no Ensino Fundamental aprendemos que os números pares são terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8, enquanto os números ímpares têm terminação 1, 3, 5 ou 7, ou melhor ainda, os números pares são aqueles que deixam resto 0 na divisão por 2 e os números ímpares deixam resto 1 nesta divisão. O que às vezes não é muito destacado no ensino básico é o fato de que a paridade também pode ser utilizada para solucionar diversos problemas matemáticos. Neste trabalho, veremos que a simplicidade desse tema torna possível a colocação de problemas interessantes até mesmo para estudantes que detêm pouco conhecimento em Matemática. E, a partir desse tema, acreditamos que o aluno conseguirá um

aprendizado satisfatório dos números, além de construírem um sentimento positivo com relação à Matemática.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. O primeiro é a introdução. O segundo capítulo traz os elementos teóricos necessários para a compreensão do tema. Nele serão apresentados alguns conceitos aritméticos, como a construção dos números naturais e dos números inteiros, abordando as operações numéricas de cada conjunto, relação de ordem, tricotomia e divisibilidade. A principal bibliografia deste capítulo é o livro Fundamentos de Aritmética, de Hygino Domingues [5], que assume que o número 0 pertence ao conjunto dos Números Naturais, e assim será feito também no nosso trabalho. Mas vale ressaltar que diversos autores não consideram o 0 como número natural, como é o caso do Abramo Hefez em seu livro Artmética [8], por exemplo. O terceiro capítulo traz o tema principal do nosso trabalho: a paridade de números inteiros. Neste capítulo estão as propriedades da paridade da soma e do produto, além de alguns problemas interessantes envolvendo paridade. O quarto capítulo apresenta considerações pedagógicas, embasadas na BNCC [2] e em alguns artigos, sobre a importância da resolução de problemas como metodologia de ensino e no desenvolvimento da flexibilidade numérica. Além disso, também contém problemas envolvendo paridade e propostas pedagógicas visando a aplicação da paridade na sala de aula. Por fim, no quinto e último capítulo, são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho.

## 1.1 Justificativa

Os números inteiros estão presentes no dia a dia de todos. Ao fazer compras, escolher roupas para usar, verificar a idade de alguém, olhar a bateria do celular, verificar quantidade de alunos em sala, entre outros exemplos, estamos lidando com esses números. Assim, sua compreensão é muito importante. Visando este estudo, escolhemos o tópico paridade de números inteiros para nosso trabalho. Essa escolha se dá por sua grande utilidade na solução de diversos tipos de questões matemáticas. A paridade, associada com um pouco de imaginação, é uma poderosa ferramenta que possibilita a resolução de problemas envolvendo números inteiros. A invariância da paridade é utilizada principalmente para mostrar que é impossível encontrar um certo valor como resultado de algum tipo de contagem.

Além disso, com base em uma pesquisa realizada no site do PROFMAT [16], em fevereiro de 2024, foi possível perceber que havia 38 dissertações envolvendo números inteiros, das quais, 15 apresentam a história e/ou a construção dos números inteiros e 8 falam da divisibilidade desses números, conforme a Tabela (1.1). E, apesar de algumas dessas dissertações apresentarem o conceito de par ou ímpar dentro do conteúdo de divisibilidade, nenhuma aborda a paridade como será feito neste trabalho: com o estudo de suas propriedades e de sua aplicação na resolução de problemas e na sala de aula. Voltando às dissertações disponíveis no site do PROFMAT, apenas uma apresenta a palavra Paridade já no título, porém tal dissertação tem foco em jogos matemáticos. Percebe-se então, que o presente trabalho traz um diferencial e

contribuirá para o planejamento de atividades do professor leitor.

## 1.2 Objetivos

Nosso trabalho tem por objetivo oportunizar ao aluno o encontro com definições e questões importantes sobre a Paridade de Números Inteiros. Visando aprimorar no aluno o prazer pela descoberta, pela colocação de questões não elementares e pela busca de suas soluções, além de proporcionar uma visão da Matemática como uma disciplina única, utilizando ferramentas de diversas áreas para a solução de problemas.

## 1.3 Metodologia

Para realizarmos esse trabalho, nos pautamos em uma pesquisa bibliográfica, realizando uma revisão da literatura, buscando apontamentos, informações, estudos e uma descrição teórica sobre o assunto a ser estudado. Esse trabalho foi crucial para termos uma base teórica sólida. A pesquisa bibliográfica está inserida nas pesquisas acadêmicas e é muito importante. Ao usarmos uma definição é necessário que ela esteja bem fundamentada, bem descrita e correta. Para tanto, a escolha do material de referência é um passo crucial para o desenvolvimento da dissertação. Desta maneira, escolhemos como base do nosso trabalho os livros: Fundamentos de Aritmética - Hygino [5], Aritmética - Abramo [7] e Círculos Matemáticos - Fomim [6], textos já consagrados na Matemática e que muito contribuíram na realização deste trabalho.

**Tabela 1.1:** Dissertações do PROFMAT envolvendo Números Inteiros

Conteúdo envolvido	Título da Dissertação	Ano de Publicação
Divisibilidade	Uma Proposta de jogo para o ensino de Congruências de Números Inteiros	2021
	Um breve comentário sobre números inteiros - Equações Diofantinas e Aplicações	2021
	Subsunçores para Resolução de Problemas de Divisão de Números Inteiros: o Caso do Teorema Chinês do Resto	2021
	Divisibilidade e Congruência de Números Inteiros no Ensino Básico	2020
	Resolução de algumas equações em números inteiros	2013
	Números Inteiros, Congruências e Somas de quadrados	2013
	Números Inteiros que podem ser escritos como soma de dois quadrados	2015
	Números Inteiros de Eisesntein	2017
História dos Números	Assimilando as quatro operações com os números inteiros através de jogos em Rotação por Estações	2021
	Plataforma Wordwall: Uma Proposta de Ferramenta Pedagógica na Aprendizagem de Números Inteiros	2022
	Ensino de operações com números inteiros por meio de um objeto digital de aprendizagem	2021
	Motivando a Aprendizagem de Números Inteiros por Meio de Materiais Manipuláveis: uma Experiência no Sétimo ano do Ensino Fundamental	2020
	Uma trajetória de ensino e aprendizagem para o estudo de números inteiros	2019
	A Sequência Fedathi como proposta de mediação do professor no ensino dos números inteiros	2018
	Números inteiros no Ensino Fundamental: Uma abordagem pedagógica prática conciliando o passado e o futuro	2018
	Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros	2018
Construção dos Números Inteiros	Números inteiros: uma proposta de tratamento para o ensino fundamental a partir das ideias de Descartes e Hilbert	2016
	Uma intervenção no ensino de operações com números inteiros	2017
	Os números inteiros: construção histórica e as dificuldades atuais em sala de aula	2017
	Construção de conjuntos numéricos: dos Números Inteiros aos Hiperreais	2016
	Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos números inteiros	2016
Paridade	A construção dos Números Inteiros e Racionais pelo Método da Simetrização e Aplicações	2016
	Operações com Números Inteiros e Racionais de forma lúdica	2016
	Versões digitais para jogos matemáticos: Invariantes em Paridade, Congruência Modular, Frações e PG	2020

## Elementos teóricos

---

O presente trabalho tem como foco principal discorrer sobre a paridade dos Números Inteiros.

Sabemos que paridade é algo bem simples e até mesmo intuitivo, mas é crucial que se entenda sobre os Números Inteiros, que por sua vez, dependem dos Números Naturais. Por esse motivo, na seção a seguir, discorreremos sobre os números, desde sua ideia inicial, até sua abstração.

### 2.1 O que é Número?

Pelo ponto de vista histórico, quando pensamos na origem dos Números Naturais, logo vem à mente a ideia de que eles surgiram naturalmente, pela necessidade de contar. Podemos até ilustrar essa situação com o exemplo do pastor de ovelhas que associava cada pedra a um animal, a fim de ter o controle do rebanho ao final do dia. Mas, de acordo com Roque, em [15], essa narrativa não é muito segura.

Na verdade, os primeiros registros numéricos datam em meados do quarto milênio antes da era comum, mesma época do surgimento da escrita. Tais registros se fizeram necessários para se ter o controle de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência e à organização da sociedade. Isso aconteceu na Baixa Mesopotâmia, onde hoje está o Iraque.

De acordo com as descobertas, no quarto milênio não se utilizavam símbolos como  $1, 2, \dots$ , mas usavam-se instrumentos particulares para cada tipo de insumo. Por exemplo, pequenas quantidades de grãos eram contadas com esferas, enquanto ovoides eram utilizados para contar jarras de óleos.

A evolução dos números está intimamente relacionada com a evolução da escrita, pois os primeiros registros de escrita referem-se a toquens marcados na argila para se ter o controle dos bens e dos insumos de tal sociedade, dita escrita cuneiforme.

Com a complexificação da sociedade, fez-se necessário a abstração dos números, pois utilizar instrumentos distintos para objetos diferentes, tornou-se cada vez mais inviável, visto que, o número de objetos distintos aumentou progressivamente. Foi então que deu-se início o uso de símbolos iguais, para representar a mesma quantidade de objetos distintos. Por exemplo, dois homens e dois jarros de óleos, poderiam ser representados por dois traços verticais.

Após várias evoluções desses registros, por volta de 2000 a.C, é que foram criados alguns símbolos que representavam certas quantidades. Era o sistema sexagesimal posicional da antiga babilônia.

Mas é necessário formalizar tudo isso e chegarmos ao sistema de numeração que conhecemos hoje. De acordo com Mol (2013), a definição rigorosa de número demorou muito a existir. “O tema, que ganhara a última contribuição efetiva no Livro V dos Elementos de Euclides, permaneceu negligenciado por séculos” (Mol, 2013, [11], p. 131). Este capítulo traz conceitos formais dos Números Naturais e dos Números Inteiros. iniciaremos pelos Axiomas de Peano, com a construção dos Números Naturais e, em seguida, falaremos das operações e divisibilidade.

Utilizaremos os seguintes livros como referência: Fundamentos de Aritmética do autor Hygino H. Domingues [5], Introdução à História da Matemática, do autor Rogério S. Mol [11], Fundamentos de Álgebra I, de Ana Cristina Vieira [17], Tópicos de História da Matemática, dos autores Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira [15] e Aritmética de Abramo Hefez [7], sendo os dois últimos da Coleção Profmat.

## 2.2 Construção dos Números Naturais

O primeiro contato que os estudantes têm com números é pelo conjunto dos Números Naturais. Tais números surgiram naturalmente com a necessidade do homem de contar. Seu entendimento é simples, a criança, na educação infantil, já aprende as operações e propriedades desse conjunto. Na Matemática é necessário formalizar os conceitos trabalhados, e é com este objetivo que este capítulo foi escrito.

A construção dos Números Naturais, ou seja, a formulação desse conceito, aqui descrita, foi desenvolvida pelo italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) em 1889, no livro “Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita”, muitos anos depois do conhecimento acerca desse conjunto. Para tal, Peano lançou mão de conceitos primitivos, que são elementos da teoria que não necessitam de uma explicação formal sobre seu significado, e de alguns axiomas, afirmações que são tomadas como verdadeiras, sem a necessidade de demonstrá-las.

Os conceitos primitivos são:

1. Número Natural,
2. zero e,
3. a relação de “ser sucessor de”.

Apesar de ser um conceito primitivo, podemos entender a relação “sucessor de” como algo que vem logo depois.

Peano formulou 5 axiomas que podem ser enunciados como:

**Axioma 2.1:** Zero é um número natural.

**Axioma 2.2:** Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

**Axioma 2.3:** Zero não é sucessor de nenhum número natural.

**Axioma 2.4:** Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

**Axioma 2.5:** Se uma coleção  $S$  de números naturais contém o zero e o sucessor de todos elementos de  $S$ , então  $S$  é o próprio conjunto dos números naturais.

A teoria de Peano foi muito importante para a consolidação da Teoria dos Números.

Estes axiomas, expostos aqui em forma literal, foram apresentados por Peano com uma formulação simbólica. A construção rigorosa de Peano estruturou as muitas construções em álgebra e em análise assentadas sobre a aritmética. (Mol, 2013 [11], p. 133)

O conjunto dos números naturais é indicado por  $\mathbb{N}$ .

Para facilitar a escrita, denotaremos o sucessor de  $a \in \mathbb{N}$  por  $a^+$ , mesma notação utilizada por Domingues em [5].

Tais axiomas são de extrema importância, pois toda a teoria dos Números Naturais é obtida a partir deles. Como exemplo, vejamos algumas propriedades.

A proposição abaixo apresenta uma propriedade interessante. Note que o Axioma (2.1) nos garante que o conjunto dos números naturais não é vazio, já que zero está neste conjunto. Mas poderia ser unitário. Veremos que não. O número natural zero tem um sucessor (Axioma (2.2)), que será diferente do próprio zero. Assim, há, pelo menos, dois números naturais.

**Proposição 2.6:** Seja  $a \in \mathbb{N}$ . Então  $a^+ \neq a$ .

*Demonstração.* Para provar essa proposição, consideraremos o seguinte conjunto,

$$S = \{a \in \mathbb{N} \mid a^+ \neq a\}.$$

Pelo Axioma (2.3) temos que  $0 \neq 0^+$ , logo  $0 \in S$ . Além disso, se  $a \in S$  então  $a^+ \neq a$ .

Por outro lado, o Axioma (2.4) nos garante que se  $a^+ \neq a$  então  $(a^+)^+ \neq a^+$ , isto é,  $a^+ \in S$ , sempre que  $a \in S$ .

Assim, pelo Axioma (2.5), concluímos que  $S = \mathbb{N}$ , ou seja, para todo  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a^+ \neq a$ . □

O Axioma (2.3) nos diz que 0 não é sucessor de nenhum número natural. Agora, temos também que nenhum número é igual ao seu sucessor. Assim, temos:

$$\begin{aligned} 0 &\text{ é natural} \\ 0^+ &\text{ é natural} \\ (0^+)^+ &\text{ é natural} \end{aligned}$$

e  $0^+ \neq (0^+)^+$ . Já temos, então, três naturais distintos.

Dentre os axiomas listados no início deste capítulo, destaco aqui o Axioma (2.5), dito **Axioma da Indução**, a partir do qual surge um método muito importante de demonstração referente aos números naturais: a Indução Matemática, enunciada e demonstrada a seguir:

**Princípio da Indução Matemática:** Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ . Suponhamos que:

- i)  $P(0)$  é válida;
- ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n^+)$ , onde  $n^+$  é o sucessor de  $n$ . Então  $P(n)$  é válida para qualquer que seja o número natural  $n$ .

*Demonstração.* Faremos esta demonstração utilizando o axioma da indução. Para isso, considere o conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}.$$

Pelo primeiro item da hipótese,  $0 \in S$ . Considere  $r \in S$ , logo  $P(r)$  é válida. Mas, pelo segundo item da hipótese, a validade de  $P(r)$  implica a validade de  $P(r^+)$ , então  $r^+ \in S$ . Assim, pelo Axioma (2.5),  $S = \mathbb{N}$ . Logo,  $P(n)$  é válida para todo número natural  $n$ .  $\square$

Com a Indução Matemática, provamos diversos problemas e propriedades fascinantes. Apresento aqui, um exemplo para ilustrar sua utilização. O leitor mais curioso pode verificar outros exemplos em Vieira [17].

**Exemplo 2.2.1:** Teria outro natural que também não representa o sucessor de algum número natural? Veremos, provando a afirmação abaixo.

Seja  $b \in \mathbb{N}$ , com  $b \neq 0$ . Então existe  $a \in \mathbb{N}$ , tal que  $b = a^+$ .

*Demonstração.* A prova dessa afirmação será feita utilizando o Princípio da Indução Matemática. Para isso, consideremos a propriedade

$P(n)$  : Se  $n$  é um número natural, então  $n = 0$  ou  $n = x^+$  para algum  $x \in \mathbb{N}$ .

- i) Claramente  $P(0)$  é verdadeira.
- ii) Suponha que  $P(n)$  seja válida para algum  $n$  natural e verifiquemos a verdade de  $P(n^+)$ .

Se  $n = 0$ ,  $n^+ = 0^+$  e  $0^+$  é sucessor de  $0$ , então  $P(0^+)$  é válida. Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \neq 0$  tal que  $P(n)$  é válida, temos que existe  $x \in \mathbb{N}$  tal que  $n = x^+$ .

Daí,  $n^+ = (x^+)^+$ , o que significa que  $n^+$  é o sucessor de  $x^+$ . Logo  $P(n^+)$  é válida.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática,  $P(n)$  é válida para todo  $n$  natural.  $\square$

### 2.2.1 Adição em $\mathbb{N}$

A adição é a primeira operação dos números naturais aprendida no Ensino Fundamental, logo é o primeiro contato que os alunos têm com a Aritmética. Apesar de ser uma operação familiar e bem intuitiva é necessário defini-la apropriadamente, como veremos a seguir.

A adição é representada pelo símbolo (+), sendo

$+$  :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por:

- $a + 0 = a$
- $a + b^+ = (a + b)^+$

para todos  $a$  e  $b$  naturais.

Para facilitar a escrita, adotaremos aqui a notação indo-arábica, para os sucessores:

- Sucessor de 0:  $0^+ = 1$ .
- Sucessor de 1:  $1^+ = 2$ .
- Sucessor de 2:  $2^+ = 3$ .

E assim por diante.

Desta forma, de acordo com a definição de adição, segue que:

$$1 + 1 = 1 + 0^+ = (1 + 0)^+ = 1^+ = 2;$$

$$2 + 1 = 2 + 0^+ = (2 + 0)^+ = 2^+ = 3;$$

$$3 + 1 = 3 + 0^+ = (3 + 0)^+ = 3^+ = 4;$$

e, conseqüentemente, por um argumento indutivo, temos:

$$r + 1 = r + 0^+ = (r + 0)^+ = r^+, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Assim, para encontrar o sucessor de um número natural, basta somá-lo com 1.

Falaremos agora das propriedades da adição, que são muito importantes, pois podem contribuir de maneira significativa para o cálculo mental e agilizar as resoluções de diversos exercícios.

Antes de iniciarmos, vale destacar que as propriedades da adição listadas a seguir são válidas para quaisquer números naturais  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

$a_1$  - **Associativa:**  $a + (b + c) = (a + b) + c$

*Demonstração.* Provaremos por indução sobre  $c$ , aqui  $a$  e  $b$  são fixados:

- i)* A propriedade vale para  $c = 0$ , pois  $a + (b + 0) = a + b = (a + b) + 0$
- ii)* Suponha que seja válido para  $c = r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$  e vamos mostrar que também é válido para  $r^+$ .

Por hipótese, temos que  $a + (b + r) = (a + b) + r$  e, usando a definição de adição,  $(a + b) + r^+ = [(a + b) + r]^+ = [a + (b + r)]^+ = a + (b + r)^+ = a + (b + r^+)$ .

Logo, a propriedade é válida para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**$a_2$  - Comutativa:**  $a + b = b + a$

*Demonstração.* Antes de provarmos a propriedade comutativa, precisaremos de duas afirmações:

**Afirmção 1:** Para todo  $a \in \mathbb{N}$  tem-se que  $a + 0 = 0 + a$ .

**Prova (afirmação 1):** Indução sobre  $a$ :

- i)* Vale para  $a = 0$ , pois  $0 + 0 = 0 + 0 = 0$ .
- ii)* Suponha válido para  $a = r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$  e vamos mostrar que também é válido para  $r^+$ .

Por hipótese,  $r + 0 = 0 + r$  e já sabemos que  $r^+ + 0 = r^+$ , por definição. Daí,

$$0 + r^+ = (0 + r)^+ = r^+ = r^+ + 0.$$

Logo,  $a + 0 = 0 + a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N}$ .

**Afirmção 2:** Para todo  $a \in \mathbb{N}$  tem-se que  $a + 1 = 1 + a$ .

**Prova (afirmação 2):** Indução sobre  $a$ :

- i)* Vale para  $a = 0$  pois, pela Afirmção 1,  $0 + 1 = 1 + 0$ .
- ii)* Suponha válido para  $a = r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$  e vamos mostrar que também é válido para  $r^+$ .

De fato,

$$\begin{aligned} 1 + r^+ &= (1 + r)^+, \\ &= (r + 1)^+ \text{ (por hipótese),} \\ &= r + 1^+, \\ &= r + (1 + 1) \text{ (equação (2.1)),} \\ &= (r + 1) + 1 \text{ (pela associatividade),} \\ &= r^+ + 1. \end{aligned}$$

Logo,  $a + 1 = 1 + a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N}$ .

Com essas afirmações, podemos provar a propriedade comutativa:  $a + b = b + a$  para todo  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Provaremos por indução sobre  $b$ :

- i)* A propriedade é válida para  $b = 0$ . De fato, pela Afirmção 1,  $a + 0 = 0 + a$ .
- ii)* Suponha válido para  $b = r$ , ou seja,  $a + r = r + a$  e verifiquemos para  $r^+$ .

Temos que,

$$\begin{aligned}
 a + r^+ &= (a + r)^+, \\
 &= (r + a)^+ \text{ (por hipótese),} \\
 &= r + a^+, \\
 &= r + (a + 1), \\
 &= r + (1 + a) \text{ (pela afirmação 2),} \\
 &= (r + 1) + a \text{ (pela associatividade),} \\
 &= r^+ + a.
 \end{aligned}$$

Logo, a propriedade é válida para todo  $a, b \in \mathbb{N}$ . □

**$a_3$  - Elemento neutro:** Existe  $e \in \mathbb{N}$  tal que  $a + e = e + a = a$  para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

É fácil ver que o zero satisfaz a propriedade  $a_3$ :  $a + 0 = 0 + a = a$ .

A propriedade acima garante a existência do elemento neutro da adição: o número 0. Mas, teria outro elemento neutro além do zero? Vamos mostrar que não, isto é:

O zero é o único elemento neutro da adição.

*Demonstração.* Para provarmos a unicidade do elemento neutro, vamos supor que exista algum  $k \in \mathbb{N}$ , diferente de zero que também é elemento neutro da adição. Desta forma, pela propriedade  $a_2$  temos

$$a + k = k + a = a,$$

para qualquer  $a$  natural. Podemos então considerar um caso particular em que  $a = 0$ , assim,

$$0 + k = k + 0 = 0$$

Mas, pela propriedade comutativa,  $0 + k = k + 0$  e, pela definição de adição,  $0 + k = k$ . Assim, segue que  $k = 0$ . Isto é, zero é o único elemento neutro da adição. □

**$a_4$  - Lei do cancelamento:**  $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

*Demonstração.* Provaremos por indução sobre  $a$ :

*i)* Vale para  $a = 0$ , pois se  $a + b = a + c$  tendo  $a = 0$ , segue que  $0 + b = 0 + c$ , o que, por  $a_3$ , implica que  $b = c$ .

*ii)* Suponha válido para  $a = r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$  e vamos mostrar que também é válido para  $r^+$ . Assim, nossa hipótese de indução é:

$$r + b = r + c \Rightarrow b = c.$$

E queremos mostrar que:

$$r^+ + b = r^+ + c \Rightarrow b = c.$$

De fato, se  $r^+ + b = r^+ + c$ , então temos:  $b + r^+ = c + r^+$  implica que  $(b + r)^+ = (c + r)^+$ . O Axioma (2.4) nos garante que  $(b + r) = (c + r)$  e, por  $a_2$

e pela hipótese de indução, segue que  $b = c$ . Logo, a lei do cancelamento vale para quaisquer  $a$ ,  $b$  e  $c$  naturais.  $\square$

Uma importante observação para compreendermos algumas propriedades dos números naturais, é que

$$a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \quad (2.2)$$

Fato que pode ser demonstrado supondo  $b \neq 0$ . Então  $b = u^+$  para algum  $u \in \mathbb{N}$ . Daí,  $0 = a + b = a + u^+ = a + u^+ = (a + u)^+$ . Absurdo, pelo Axioma (2.3). Logo  $b = 0$ , o que implica que  $a = 0$ .

### 2.2.2 Multiplicação em $\mathbb{N}$

A multiplicação é uma dentre as quatro operações básicas da Matemática. Para fazer a representação da multiplicação, utilizamos o símbolo  $(\cdot)$ . Assim, temos:

$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por:

- $a \cdot 0 = 0$ ,
- $a \cdot b^+ = a \cdot b + a$ ,

para todos  $a$  e  $b$  naturais.

Apesar de ser uma operação bem conhecida, vale lembrar que o resultado da multiplicação é chamado de produto, e os números que serão multiplicados são chamados de fatores. Assim, na igualdade  $a \cdot b = c$ ,  $a$  e  $b$  são os fatores, enquanto  $c$  é o produto.

Para melhor compreensão, vamos exemplificar algumas multiplicações:

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 0^+ = 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1,$$

$$1 \cdot 2 = 1 \cdot 1^+ = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Vimos que, por definição,  $a \cdot 0 = 0$ . Mas é possível mostrar por indução que  $0 \cdot a = 0$  para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

De fato, tomando  $a = 0$ , o resultado segue direto da definição. Vamos supor que  $0 \cdot r = 0$  para algum  $r \in \mathbb{N}$  e verifiquemos a igualdade para  $r^+$ . Bom, por hipótese,  $0 \cdot r = 0$ , então por definição,  $0 \cdot r^+ = 0 \cdot r + 0 = 0 + 0 = 0$ . Logo, mostramos por indução que igualdade

$$0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Assim como a adição, a multiplicação tem importantes propriedades, que serão enunciadas e demonstradas a seguir. Todas elas são válidas para quaisquer números naturais  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

$m_1$  - **Elemento Neutro:** Existe  $e \in \mathbb{N}$  tal que  $e \cdot a = a \cdot e = a$  para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

Note que o número natural 1 pode ser o elemento neutro da multiplicação, já que,

$$a \cdot 1 = a \cdot 0^+ = a \cdot 0 + a = 0 + a = a.$$

Mas, para ser, de fato, o elemento neutro, é necessário verificar a multiplicação pela esquerda. Portanto, provaremos que  $1 \cdot a = a$ , para todo  $a \in \mathbb{N}$ . Tal igualdade, também será demonstrada por indução sobre  $a$ .

A igualdade é válida para  $a = 0$ , pois, por definição,  $1 \cdot 0 = 0$ . Supondo  $1 \cdot r = r$  para algum  $r \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\begin{aligned} 1 \cdot r^+ &= 1 \cdot r + 1 \text{ (por definição de multiplicação)}, \\ &= r + 1, \text{ (Hipótese de indução)}, \\ &= r^+ \text{ (pela Equação 2.1)}. \end{aligned}$$

E assim concluímos que,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

O elemento neutro da multiplicação é único. De fato, se  $k \in \mathbb{N}$  é elemento neutro da multiplicação, então

$$k \cdot 1 = 1 \cdot k = 1, \quad (2.5)$$

por outro lado, como 1 é o elemento da multiplicação,

$$k \cdot 1 = 1 \cdot k = k. \quad (2.6)$$

Das igualdades (2.5) e (2.6) temos que  $k = 1$  e 1 é o único elemento neutro da multiplicação.

$m_2$  - **Distributividade da multiplicação em relação à adição:**  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

*Demonstração.* Fixando  $a$  e  $b$ , faremos a prova por indução sobre  $c$ : A propriedade é válida para  $c = 0$ , pois

$$\begin{aligned} a \cdot (b + 0) &= a \cdot b = a \cdot b + 0 \text{ (pela definição de adição)}; \\ &= a \cdot b + a \cdot 0 \text{ (pela definição de multiplicação)}. \end{aligned}$$

Supondo válido para  $c = r$ , isto é,  $a \cdot (b + r) = a \cdot b + a \cdot r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ ,

segue que

$$\begin{aligned}
 a \cdot (b + r^+) &= a \cdot [b + (r + 1)] \text{ (Equação (2.1))}; \\
 &= a \cdot [(b + r) + 1] \text{ (pela associatividade da adição)}; \\
 &= a \cdot (b + r)^+ \text{ (Equação (2.1))}; \\
 &= a \cdot (b + r) + a \text{ (definição de multiplicação)}; \\
 &= (a \cdot b + a \cdot r) + a \text{ (hipótese de indução)}; \\
 &= a \cdot b + (a \cdot r + a) \text{ (associativa da adição)}; \\
 &= a \cdot b + a \cdot r^+ \text{ (definição de multiplicação)}.
 \end{aligned}$$

□

Note que também temos a lei da distributividade pela esquerda, ou seja,  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ . A demonstração é feita de modo análogo, e deixaremos à cargo do leitor.

$m_3$  - **Comutativa:**  $a \cdot b = b \cdot a$

*Demonstração.* Faremos por indução sobre  $b$ .

Se  $b = 0$  temos  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$  por definição e pela Equação (2.3).

Supondo válido para  $b = r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ , temos  $a \cdot r = r \cdot a$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 a \cdot r^+ &= a \cdot r + a \text{ (por definição de multiplicação)}; \\
 &= r \cdot a + a \text{ (por hipótese de indução)}; \\
 &= r \cdot a + 1 \cdot a \text{ (pela Equação (2.4))}; \\
 &= (r + 1) \cdot a \text{ (pela propriedade } m_2); \\
 &= r^+ \cdot a.
 \end{aligned}$$

□

$m_4$  - **Associativa:**  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

*Demonstração.* A demonstração será feita usando indução sobre  $c$ . A propriedade é válida para  $c = 0$ , pois  $a \cdot (b \cdot 0) = a \cdot 0 = 0 = (a \cdot b) \cdot 0$ . Vamos supor que  $a \cdot (b \cdot r) = (a \cdot b) \cdot r$ . Agora, verifiquemos a igualdade para  $c = r^+$ . Provaremos que  $r^+ \cdot (b \cdot c) = (r^+ \cdot b) \cdot c$ .

Note que

$$\begin{aligned}
 a \cdot (b \cdot r^+) &= a \cdot (b \cdot r + b) \text{ (pela definição de multiplicação)}; \\
 &= a \cdot (b \cdot r) + a \cdot b \text{ (distributiva)}; \\
 &= (a \cdot b) \cdot r + (a \cdot b) \text{ (pela hipótese de indução)}; \\
 &= (a \cdot b) \cdot r^+ \text{ (definição de multiplicação)}.
 \end{aligned}$$

□

$m_5$  - **Lei do anulamento do produto:**  $a \cdot b = 0$  implica que  $a = 0$  ou  $b = 0$

*Demonstração.* Se  $b = 0$ , temos o que queríamos. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $b \neq 0$ . Dessa forma  $b$  é sucessor de algum número natural, isto é,  $b = r^+$  para algum  $r \in \mathbb{N}$ . Daí,  $0 = a \cdot b = a \cdot r^+ = a \cdot r + a = 0$ . Pela adição sabemos que se  $x + y = 0$ , então  $x = y = 0$ . Logo

$$ar + a = 0 \Rightarrow ar = 0 \text{ e } a = 0.$$

□

### 2.2.3 Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

A relação de ordem é algo bem intuitivo e está presente no nosso dia a dia. Podemos, por exemplo, ordenar as nossas tarefas diárias, colocar em ordem um grupo de pessoas de acordo com suas idades, tamanhos, dentre outros. No entanto, é importante definirmos formalmente esta relação, para compreendermos o sentido de maior, menor, anterior e posterior.

**Definição 2.7:** Dizemos que  $a \leq b$  (lê-se:  $a$  menor do que ou igual a  $b$ ), para  $a$  e  $b$  naturais, quando existe um número natural  $r$  tal que  $b = a + r$ . No caso em que  $r \neq 0$ , temos  $a < b$  ( $a$  menor que  $b$ ).

A partir da definição acima, podemos dizer que o número  $r$  é chamado de diferença entre os números naturais  $b$  e  $a$ , e é indicado por:  $r = b - a$ . E assim, temos mais uma relação no conjunto  $\mathbb{N}$ : a **subtração**, que não é uma operação em  $\mathbb{N}$ , pois não é fechada, uma vez que nem sempre o seu resultado será um número natural. Nessas condições, o número  $b$  é chamado minuendo e o  $a$  é o subtraendo. Podemos listar alguns exemplos:

- $5 = 15 - 10$ , pois  $15 = 10 + 5$ ;
- $12 = 30 - 18$ , pois  $30 = 18 + 12$ .

É fácil perceber, que a subtração ( $b - a$ ) só é bem definida em  $\mathbb{N}$ , quando  $a \leq b$ .

A relação “ $\leq$ ”, somente por nos auxiliar na definição da subtração já é muito útil. Porém, esta relação tem uma importância maior. Ela é uma relação de ordem.

Uma relação em um conjunto não vazio é dita relação de ordem se ela for reflexiva, antissimétrica e transitiva. Nosso intuito, agora, é mostrar que a relação “ $\leq$ ” é uma relação de ordem. Para isso mostraremos que tal relação satisfaz as três propriedades acima relatadas.

$O_1$  - “ $\leq$ ” é uma **Relação Reflexiva:** Isto é,  $a \leq a \forall a \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* De fato, tal propriedade segue da definição da relação “ $\leq$ ” uma vez que  $a = a + 0$ . □

$O_2$  - “ $\leq$ ” é uma **Relação Antissimétrica:** Isto é,  $a \leq b$  e  $b \leq a$  implica que  $a = b$ .

*Demonstração.* Pela definição da relação “ $\leq$ ”, se  $a \leq b$  e  $b \leq a$  existem  $u$  e  $v \in \mathbb{N}$ , tais que,

$$b = a + r \quad \text{e} \quad (2.7)$$

$$a = b + u. \quad (2.8)$$

Substituindo a Equação (2.7) em (2.8), temos:  $a = a + (r + u)$  e, pela lei do anulamento da adição,  $r + u = 0$ , logo  $r = u = 0$ . E assim,  $a = b$

□

**$O_3$  - “ $\leq$ ” é uma Relação Transitiva:** Isto é, se  $a \leq b$  e  $b \leq c$  implica que  $a \leq c$ .

*Demonstração.* Por definição temos:

$$a \leq b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N} \text{ tal que } a + r = b, \quad (2.9)$$

$$b \leq c \Rightarrow \exists v \in \mathbb{N} \text{ tal que } b + v = c. \quad (2.10)$$

Somando as Equações (2.10) e (2.9) teremos

$$a + r + b + v = b + c.$$

Pela lei do cancelamento da adição, temos que

$$a + (r + v) = c.$$

Assim, como  $u + v \in \mathbb{N}$ , concluímos que  $a \leq c$ .

□

Acabamos de mostrar que a relação “ $\leq$ ” em  $\mathbb{N}$  é uma relação de ordem. Assim temos, por exemplo,  $5 \leq 17$ , já que  $17 = 5 + 12$ . Mas será que podemos sempre comparar dois números naturais quaisquer? Dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , é verdade que  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ ? Caso essa afirmação seja verdadeira, diremos que a relação “ $\leq$ ” em  $\mathbb{N}$  é uma relação de ordem total, ou seja, dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , teremos sempre  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ . Essa propriedade é muito útil em conjuntos numéricos e, sua verificação, será provada na proposição abaixo.

**Proposição 2.8:** A relação “ $\leq$ ” em  $\mathbb{N}$  é uma relação de ordem total.

*Demonstração.* Seja  $b \in \mathbb{N}$  e considere o subconjunto de  $\mathbb{N}$ ,

$$S_b = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq b \text{ ou } b \leq n\}.$$

Ou seja,  $S_b$  é o conjunto dos elementos  $n \in \mathbb{N}$  tais que:

- i) existe  $u \in \mathbb{N}$  tal que  $b = n + u$ , ou
- ii) existe  $v \in \mathbb{N}$  tal que  $n = b + v$

Note que  $0 \in S_b$ , pois, se  $n = 0$  então  $b = u$ , o que satisfaz o item (i). Além disso,  $b$  também pertence a  $S_b$ , pois  $b = b + 0$ , ou seja,  $b \leq b$ , satisfazendo a condição (ii).

Agora, tomando  $r \neq b$  e supondo que  $r \in S_b$ , teremos que  $r$  satisfaz a condição (i) ou (ii).

Se  $r$  satisfaz a condição (i), então existe  $u \in \mathbb{N}$ , tal que  $b = r + u$  com  $u \neq 0$ . Temos, pelo Exemplo (2.2.1), que  $u = v^+$  para algum  $v \in \mathbb{N}$ , isto é,  $u = v + 1$  e assim,  $b = r + (v + 1) = r + (1 + v) = (r + 1) + v = r^+ + v$ . Então, por (i),  $r^+$  pertence a  $S_b$ .

Por fim, considerando que  $r$  satisfaz a condição (ii), existe  $v \in \mathbb{N}$  tal que  $r = b + v$ , com  $v \neq 0$ . Assim  $r^+ = (b + v)^+ = b + v^+$ , satisfazendo o item (ii) e, portanto  $r^+ \in S_b$ .

Desta forma, para qualquer um dos casos acima, se  $r \in S_b$  então  $r^+ \in S_b$ . Logo, pelo Axioma (2.5),  $S_b = \mathbb{N}$ . Portanto, a relação “ $\leq$ ” em  $\mathbb{N}$  é uma relação de ordem total.  $\square$

Na Subseção (2.2.1) vimos que o sucessor de um número  $n$  é  $n + 1$ . Pela definição,  $n < n + 1$ . Mas será que existe número natural  $m$ , entre  $n$  e  $n + 1$ ? Isto é, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n < m < n + 1$ ? A resposta é não, e a verificaremos no exemplo abaixo.

**Exemplo 2.2.2:** Não existe número natural  $m$  tal que  $n < m < n + 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De fato, suponha que exista. Então:

$$n < m \text{ implica que } n + u = m \text{ para algum } u \in \mathbb{N}, u \neq 0.$$

$$m < n + 1 \text{ implica que } m + v = n + 1 \text{ para algum } v \in \mathbb{N}, v \neq 0.$$

Assim,

$$(n + u) + v = n + 1 \Rightarrow n + (u + v) = n + 1 \Rightarrow u + v = 1.$$

O que nos dá que  $u = 0$  ou  $v = 0$ , em ambos os casos temos um absurdo.

Esse exemplo nos afirma a sensação que já tínhamos, ser “sucessor de” é, de fato, uma relação que apresenta o próximo número natural na sequência da ordenação (feita usualmente do menor para o maior). Assim, agora podemos escrever os números naturais em sua ordenação:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Um subconjunto interessante é o  $\mathbb{N}^*$ , conjunto dos Números Naturais não nulos, ou seja:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

**Proposição 2.9 (Princípio do menor natural):** Se  $L$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$ , então  $L$  possui um elemento  $m$  tal que  $m \leq x$  para todo  $x \in L$ . E este elemento  $m$  é chamado *mínimo* de  $L$  e será indicado por  $m = \min L$ .

*Demonstração.* Considere o conjunto  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x, \forall x \in L\}$ . Claramente  $0 \in S$ , pois  $\forall a \in L$ , temos  $a = 0 + a$ , isto é,  $0 \leq a$ . Sabendo que  $L$  é não vazio, fixemos um elemento  $b \in L$ . Pela igualdade (2.1) temos que  $b + 1 = b^+$ , ou seja,  $b + 1$  vem depois de  $b$ . Desta forma  $b < b + 1$  e, conseqüentemente,  $b + 1 \notin S$ , logo  $S \neq \mathbb{N}$ . Assim, existe um elemento  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $c \in S$  e  $c + 1 \notin S$ , caso contrário, pelo Axioma (2.5), teríamos  $S = \mathbb{N}$ . Vamos mostrar então que  $c = \min L$ . De fato,

- Como  $c \in S$  então  $c \leq x, \forall x \in L$ ;
- Supondo que  $c \notin L$ , teremos  $c < x$  para todo  $x \in L$  o que implica em  $c + 1 \leq x \forall x \in L$ . Assim,  $c + 1 \in S$ . Absurdo! Logo,  $c \in L$  e  $c$  é menor elemento de  $L$ .

□

O Princípio do menor natural é também conhecido como Princípio da Boa Ordenação em  $\mathbb{N}$ , e pode ser utilizado para demonstrar numerosas propriedades dos números naturais.

### 2.2.4 Lei da Tricotomia em $\mathbb{N}$

Na seção anterior, vimos que sempre é possível comparar dois números naturais quaisquer, pela relação “ $\leq$ ”. Será que podemos melhorar essa “comparação”? Veremos a seguir uma propriedade da relação de ordem, que garante que dados dois números naturais, há três possibilidades entre eles, duas quais, apenas uma deve ser satisfeita.

Essa propriedade é conhecida como Lei da Tricotomia, e podemos enunciá-la da seguinte forma:

**Teorema 2.10:** Para quaisquer  $a$  e  $b$  naturais vale uma, e somente uma, das relações:

- i)  $a = b$ ;
- ii)  $a < b$ ;
- iii)  $b < a$

*Demonstração.* Faremos a prova dessa Lei em duas partes:

**Parte 1: Duas dessas relações não podem ocorrer simultaneamente.**

De fato, se (i) e (ii) ocorressem ao mesmo tempo, isto é, se  $a = b$  e  $a < b$ , existiria  $p \in \mathbb{N}$ , diferente de zero, tal que  $b = a + p$ . Mas  $a = b$ , então podemos reescrever a igualdade anterior como

$$b = b + p \Rightarrow b + 0 = b + p \Rightarrow 0 = p.$$

Mas isso é absurdo, pois definimos  $b$  diferente de zero. Portanto as relações (i) e (ii) não podem acontecer simultaneamente.

De forma análoga, podemos mostrar que as relações (i) e (iii) também não ocorrem ao mesmo tempo.

E por fim, vamos mostrar que as relações (ii) e (iii) não podem ocorrer simultaneamente. De fato, supondo  $a < b$  e  $b < a$ , então existem  $m$  e  $n$  naturais não nulos e distintos entre si, tais que

$$b = a + m \text{ e } a = b + n$$

Assim, pelas equações acima temos

$$\begin{aligned} b &= a + m \Rightarrow \\ b &= (b + n) + m \Rightarrow \\ b &= b + (n + m) \Rightarrow \\ b + 0 &= b + (n + m) \Rightarrow \\ 0 &= (n + m) \Rightarrow \\ n &= 0 = m. \end{aligned}$$

Absurdo, pois  $n$  e  $m$  são não nulos.

**Parte 2: Dados dois números naturais, uma das relações deve ocorrer.**

Como “ $\leq$ ” é uma relação de ordem total em  $\mathbb{N}$ , dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , temos  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ . Assim, se  $a \neq b$ , teremos  $a < b$  ou  $b < a$ .

□

A Lei da Tricotomia em  $\mathbb{N}$  é muito importante. Várias propriedades podem ser demonstradas a partir dela. Para exemplificar, veremos as três propriedades abaixo.

**Exemplo 2.2.3 (Lei do cancelamento da multiplicação):** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{N}$  tais que  $c \neq 0$ . Se  $a \cdot c = b \cdot c$  então  $a = b$ .

*Demonstração.* Vamos supor que  $a \neq 0$ . Então, assumindo  $a < b$ , existe  $u \neq 0$ , tal que  $b = a + u$ . Assim,  $a \cdot c = b \cdot c = (a + u) \cdot c = a \cdot c + u \cdot c$ , o que implica que  $u \cdot c = 0$ , isto é,  $u = 0$  ou  $c = 0$ . Absurdo! De modo análogo, mostramos que não pode ocorrer  $b < a$ . Logo, pela Lei da Tricotomia,  $a = b$ . □

**Exemplo 2.2.4:** Sejam  $a, b$  números naturais tais que  $1 = a + b$ . Então  $a = 1$  ou  $b = 1$ .

Suponha  $a \neq 1$ . Se  $b > 1$ ,  $b = s + 1$ , com  $s \in \mathbb{N}^*$ . Daí,

$$1 = a + b \Rightarrow 1 = a + (s + 1) \Rightarrow 1 = (a + s) + 1 \Rightarrow 0 = a + s.$$

Logo, pela Observação (2.2),  $a = s = 0$ , absurdo pois  $s \in \mathbb{N}^*$ .

Se  $b < 1$ , teremos  $1 = b + t$ , com  $t \in \mathbb{N}^*$ , assim  $b = 1 - t$  (aqui a subtração faz sentido). Logo

$$1 = a + b = a + (1 - t) \Rightarrow 1 = (a - t) + 1 \Rightarrow 0 = a - t$$

e teremos  $a = t = 0$ . Absurdo, pois  $t \in \mathbb{N}^*$ .

Pela tricotomia,  $b = 1$ .

Observe que, no exemplo acima, poderíamos alterar o enunciado para  $1 = a + b$ , então  $a = 0$  ou  $b = 0$ . As duas afirmações são equivalentes.

**Exemplo 2.2.5:** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Se  $a \cdot b = 1$  então  $a = 1$  e  $b = 1$ .

*Demonstração.* Suponha que  $a \neq 1$ . Então, pela Lei da Tricotomia,  $a < 1$  ou  $1 < a$ .

Se  $a < 1$ , temos que  $a = 0$  (pois  $a \in \mathbb{N}$ ) e assim,  $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ , absurdo.

Se  $1 < a$ , temos  $a = 1 + u$ , para algum natural  $u \neq 0$ . Desta forma,  $a \cdot b = 1$  implica em  $(1 + u) \cdot b = b + u \cdot b = 1$ . Portanto,  $b = 0$  e  $u \cdot b = 1$  ou  $b = 1$  e  $u \cdot b = 0$ . No primeiro caso, se  $b = 0$ ,  $a \cdot b = 0$ , absurdo. E no segundo caso,  $u = 0$ , também é absurdo.

Portanto  $a = 1$ . Analogamente,  $b = 1$ .

□

## 2.3 Números Inteiros

Como vimos na Seção (2.1), a maneira de grafar os números passou por várias evoluções ao longo do tempo e o que se tem hoje, mal se assemelha à forma original. Mas o que importa para nós, aqui, é a origem dos Números Inteiros. De acordo com Hygino [5], foram os hindus quem introduziram os números negativos na matemática. Tais números, tinham o objetivo de apenas indicar débitos, assim, os hindus não se preocupavam com a ordem teórica ou com a formalidade.

Contudo os números negativos tiveram uma resistência para serem aceitos ou entendidos e, por isso, receberam alguns rótulos como: “números absurdos” (Stifel, matemático do século XV), “números fictícios” (Cardano, matemático do século XVI) e “falsas raízes negativas de uma equação” (Descartes, matemático do século XVII).

Na Subseção (2.2.3), vimos que a diferença entre dois números naturais  $b$  e  $a$ , está bem definida em  $\mathbb{N}$  somente se  $a \leq b$ . Seria interessante ampliarmos essa definição para todo o conjunto dos números naturais.

Para melhor compreensão, o professor do Ensino Básico apresenta a diferença entre dois naturais  $m, n$ , com  $m < n$ , como um débito, mas que não pertence a esse conjunto. Por exemplo, se uma pessoa compra um objeto de 12 reais, mas só possui 10 reais, ela ficará devendo 2 reais. Logo  $10 - 12$  seria esse débito de 2. Mas, como definir essa diferença? Podemos chamar o resultado de número? A que conjunto pertence? Sabemos que estas perguntas têm uma resposta simples, encontrada no conjunto dos Números Inteiros. Dessa maneira, a presente seção tem por objetivo apresentar a formalização do conceito de **número inteiro**.

### 2.3.1 Construção dos Números Inteiros

A diferença entre dois Naturais nem sempre pertencerá à  $\mathbb{N}$ . Por exemplo, se fizermos  $9 - 11$ , o resultado não faz sentido em  $\mathbb{N}$ . Para começarmos a elucidar a introdução dos números inteiros, vejamos que a diferença  $6 - 8$  tem o mesmo resultado que a anterior. Assim, sabemos que  $9 - 11$  é o mesmo que  $6 - 8$  em  $\mathbb{Z}$ , aqui consideraremos que o leitor esteja com a noção intuitiva do conjunto dos números inteiros. Note que  $9 - 11 = 6 - 8$  é equivalente a  $9 + 8 = 11 + 6$  e, esta última igualdade, faz sentido em  $\mathbb{N}$ . Partiremos, então, dessa ideia.

Vamos considerar pares de números naturais, como fizemos com 9 e 11 acima. Agora, em forma de par ordenado  $(9, 11)$ . Segue, portanto, a construção formal do conjunto dos números inteiros.

Considere em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  a relação  $\sim$  definida abaixo:

Para quaisquer pares ordenados  $(a, b)$  e  $(c, d)$  em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , dizemos que

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Seguem alguns exemplos para melhor compreensão:

**Exemplo 2.3.1:**  $(2, 3) \sim (7, 8)$ , pois  $2 + 8 = 3 + 7$ .

**Exemplo 2.3.2:**  $(4, 9) \sim (10, 15)$ , pois  $4 + 15 = 9 + 10$ .

**Exemplo 2.3.3:**  $(7, 12) \not\sim (1, 4)$ , pois  $7 + 4 \neq 12 + 1$ .

Uma relação binária é dita relação de equivalência quando é reflexiva, simétrica e transitiva. Será que a relação  $\sim$ , acima, é uma relação de equivalência? Vamos verificar!

**$\sim$  é uma Relação Reflexiva:** Isto é, para todo  $(a, b) \sim (a, b) \forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* A verificação é trivial e segue da definição da relação  $\sim$  e da comutatividade da adição em  $\mathbb{N}$ , pois, para todo  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $a + b = b + a$ .  $\square$

**$\sim$  é uma Relação Simétrica:** Isto é, para quaisquer  $(a, b)$  e  $(c, d)$  em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , se  $(a, b) \sim (c, d)$ , então  $(c, d) \sim (a, b)$ .

*Demonstração.* Como  $(a, b) \sim (c, d)$ , por definição,  $a + d = b + c$ . Mas essa igualdade é equivalente a

$$d + a = c + b \Rightarrow c + b = d + a.$$

Logo  $(c, d) \sim (a, b)$ .  $\square$

**$\sim$  é uma Relação Transitiva:** Isto é, dados  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  e  $(e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Se  $(a, b) \sim (c, d)$  e  $(c, d) \sim (e, f)$ , então  $(a, b) \sim (e, f)$ .

*Demonstração.* De fato, como  $(a, b) \sim (c, d)$  e  $(c, d) \sim (e, f)$ , temos  $a+d = b+c$  e  $c+f = d+e$ . Daí,  $a+d+f = b+c+f = b+d+e$  o que implica em  $a+f = b+e$ , isto é,  $(a, b) \sim (e, f)$ . (Nós omitimos os parênteses na demonstração pois a adição em  $\mathbb{N}$  é associativa).  $\square$

Portanto, verificamos que  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Uma relação de equivalência em um conjunto determina, neste conjunto, uma partição em classes de equivalência. Indicaremos por  $\overline{(a, b)}$ , cada classe de equivalência determinada por  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Desta forma:

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y) \sim (a, b)\}. \\ \overline{(a, b)} &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + b = y + a\}.\end{aligned}$$

Se tomarmos o conjunto de todas as classes  $\overline{(a, b)}$ , para qualquer  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , teremos o conjunto  $\mathbb{Z}$ .

**Observação:** Esse conjunto é também chamado de conjunto quociente de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  por  $\sim$ , indicado por  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ .

Então temos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{\overline{(a, b)} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Podemos ver abaixo algumas classes de equivalência em  $\mathbb{Z}$ :

**Exemplo 2.3.4:**

$$\begin{aligned}\overline{(2, 5)} &= \{(0, 3); (1, 4); (2, 5); (3, 6); (4, 7); \dots\}; \\ \overline{(8, 3)} &= \{(5, 0); (6, 1); (7, 2); (8, 3); (9, 4); \dots\};\end{aligned}$$

**Observação 2.11:** Observe que se  $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ , então

$$\overline{(a, b)} = \overline{(c, 0)} \text{ ou } \overline{(a, b)} = \overline{(0, c)} \text{ para algum } c \in \mathbb{N}.$$

Isso ocorre pois,

$$\overline{(a, b)} = \overline{(c, d)} \iff (a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Assim, existe  $c \in \mathbb{N}$  tal que,  $a + 0 = b + c$  ou  $a + c = b + 0$ . Basta tomar  $c = a - b$ , se  $b \leq a$  ou  $c = b - a$ , se  $a \leq b$ . Além disso, essa representação é única, pois se houver  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $\overline{(0, c)} = \overline{(0, d)}$ , então  $0 + d = c + 0$ . Logo  $d = c$ .

Caso o leitor queira se aprofundar no estudo de relação de equivalência, sugerimos o livro *Álgebra Moderna*, de Gelson Iezzi e Hygino Domingues, [9].

### 2.3.2 Adição em $\mathbb{Z}$

Sejam  $m = \overline{(a, b)}$  e  $n = \overline{(c, d)}$  elementos de  $\mathbb{Z}$ . Indicaremos por  $m + n$  a soma de  $m$  com  $n$ , definida por:

$$m + n = \overline{(a + c, b + d)}.$$

Uma operação está bem definida em um conjunto quando o seu resultado independe da forma particular dos operandos. Assim, temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.12:** A adição está bem definida em  $\mathbb{Z}$ , isto é, se  $\overline{(a, b)} = \overline{(a_1, b_1)}$  e  $\overline{(c, d)} = \overline{(c_1, d_1)}$ , então  $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a_1, b_1)} + \overline{(c_1, d_1)}$ .

*Demonstração.* De fato, se  $\overline{(a, b)} = \overline{(a_1, b_1)}$  então  $\overline{(a, b)} \sim \overline{(a_1, b_1)}$ , ou seja,

$$a + b_1 = b + a_1. \quad (2.11)$$

Assim também, se  $\overline{(c, d)} = \overline{(c_1, d_1)}$  então  $\overline{(c, d)} \sim \overline{(c_1, d_1)}$ , que implica que

$$c + d_1 = d + c_1. \quad (2.12)$$

Além disso,  $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$  e  $\overline{(a_1, b_1)} + \overline{(c_1, d_1)} = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}$ .

Assim, queremos mostrar que  $\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}$ .

Somando membro a membro as Igualdades (2.11) e (2.12), temos:

$$\begin{aligned} (a + b_1) + (c + d_1) &= (b + a_1) + (d + c_1) \stackrel{(1)}{\implies} \\ (a + c) + (b_1 + d_1) &= (b + d) + (a_1 + c_1) \stackrel{(2)}{\implies} \\ \overline{(a + c, b + d)} &= \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}. \end{aligned}$$

Sendo (1) pela associatividade da adição em  $\mathbb{N}$  e (2) pela definição da adição em  $\mathbb{Z}$ . □

A seguir veremos as propriedades que são válidas para a adição em  $\mathbb{Z}$ :

$a_1$  - **Associativa:**  $m + (n + r) = (m + n) + r, \forall m, n, r \in \mathbb{Z}$

*Demonstração.* Sejam  $m = \overline{(a, b)}$ ,  $n = \overline{(c, d)}$  e  $r = \overline{(e, f)}$  elementos quaisquer de  $\mathbb{Z}$ , temos que:

$$\begin{aligned} m + (n + r) &= \overline{(a, b)} + \overline{(c + e, d + f)} \\ &= \overline{(a + (c + e), b + (d + f))} \\ &= \overline{((a + c) + e, ((b + d) + f))} \text{ (pela associatividade em } \mathbb{N}) \\ &= \overline{((a + c), (b + d))} + \overline{(e, f)} \\ &= \overline{((a, b) + (c, d))} + \overline{(e, f)} \\ &= (m + n) + r. \end{aligned}$$

□

$a_2$  - **Comutativa:**  $m + n = n + m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

*Demonstração.* Consideremos em  $\mathbb{Z}$  os elementos  $m = \overline{(a, b)}$  e  $n = \overline{(c, d)}$ . Note que:

$$\begin{aligned} m + n &= \overline{(a + c, b + d)} \\ &= \overline{(c + a, d + b)} \text{ (pela comutatividade em } \mathbb{N}) \\ &= n + m. \end{aligned} \tag{2.13}$$

□

$a_3$  - **Elemento neutro:** Existe  $e \in \mathbb{Z}$  tal que  $a + e = e + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$

*Demonstração.* A classe  $\overline{(0, 0)}$  é o elemento neutro da adição em  $\mathbb{Z}$ . De fato, para qualquer  $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$  tem-se:

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a + 0, b + 0)} = \overline{(a, b)}.$$

Analogamente é fácil mostrar que  $\overline{(0, 0)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}$ .

Para simplificar a escrita, usaremos a notação  $0 = \overline{(0, 0)}$ .

Note que a classe  $\overline{(0, 0)} = \overline{(a, a)} \forall a \in \mathbb{N}$ , já que  $(0, 0) \sim (a, a)$ , pois  $0 + a = a + 0$ .

□

$a_4$  - **Simétrico aditivo:** Para todo  $m \in \mathbb{Z}$  existe  $m' \in \mathbb{Z}$  de modo que  $m + m' = 0$ .

**Notação:**  $m' = -m$ . O simétrico aditivo é também chamado de oposto.

*Demonstração.* A prova desta propriedade segue da definição de adição em  $\mathbb{Z}$ , pois, como

$$\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)} = \overline{(0, 0)} = 0,$$

segue que, se  $m = \overline{(a, b)}$  então  $-m = \overline{(b, a)}$ .

Note que o simétrico aditivo de  $m$  é único. De fato, suponha que exista  $k = \overline{(a_1, b_1)} \in \mathbb{Z}$ , com  $\overline{(a_1, b_1)} \neq \overline{(b, a)}$ , que seja um simétrico aditivo de  $m$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} m + k = 0 &\Rightarrow \\ \overline{(a, b)} + \overline{(a_1, b_1)} &= 0 \Rightarrow \\ \overline{(a + a_1, b + b_1)} &= 0. \end{aligned}$$

Assim,  $a + a_1 = b + b_1$ , o que significa que:

- $a = b$  e  $a_1 = b_1$  e  $m = k = \overline{(0, 0)}$ , ou
- $a = b_1$  e  $b = a_1$ , logo  $k = \overline{(a_1, b_1)} = \overline{(b, a)} = -m$ .

Portanto,  $-m$  é o único simétrico aditivo de  $m$ .

□

$a_5$  - **Lei do cancelamento:** Dados  $m, n, r \in \mathbb{Z}$ , tem-se  $m + r = n + r$  implica que  $m = n$

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} m &= m + 0 \\ &= m + [r + (-r)] \\ &= (m + r) + (-r) \\ &= (n + r) + (-r) \\ &= n + [r + (-r)] \\ &= n + 0 \\ &= n. \end{aligned}$$

□

### 2.3.3 Subtração em $\mathbb{Z}$

Dados dois números inteiros  $m$  e  $n$ , chama-se diferença entre  $m$  e  $n$  o elemento  $r \in \mathbb{Z}$  tal que,  $r = m + (-n)$ , em que  $-n$  é o simétrico aditivo de  $n$ . Essa diferença é chamada de subtração em  $\mathbb{Z}$  e indicada por  $m - n$ . Desta forma temos,

$$m - n = m + (-n).$$

Diferentemente da adição, a subtração não é comutativa, nem associativa e não admite elemento neutro. Podemos verificar tais informações apresentando alguns contraexemplos:

**A subtração não é comutativa:** Contraexemplo:  $3 - 5 = -2$  e  $5 - 3 = 2$ .

**A subtração não é associativa:** Contraexemplo:  $(5 - 2) - 1 = 3 - 1 = 2$  e

$$5 - (2 - 1) = 5 - 1 = 4.$$

**A subtração não admite elemento neutro:** Contraexemplo:  $10 - 0 = 10$  e

$$0 - 10 = -10.$$

### 2.3.4 Multiplicação em $\mathbb{Z}$

Para compreendermos a definição da multiplicação em  $\mathbb{Z}$ , apresentaremos um exemplo de uma forma prática de se multiplicar dois números naturais.

Note que podemos escrever  $7 = 9 - 2$  e  $2 = 6 - 4$ , por exemplo. Então,  $7 \cdot 2 = (9 - 2) \cdot (6 - 4) = (9 \cdot 6 + 2 \cdot 4) - (9 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = 62 - 48 = 14$ .

Definiremos a multiplicação em  $\mathbb{Z}$  a partir desse exemplo acima.

Sejam  $m = \overline{(a, b)}$  e  $n = \overline{(c, d)}$  elementos quaisquer de  $\mathbb{Z}$ , a multiplicação (ou produto) de  $m$  por  $n$  é o número inteiro, indicado por  $m \cdot n$  e definido por:

$$m \cdot n = \overline{(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)}.$$

Para simplificar a escrita, usaremos a notação  $mn$  para representar o produto  $m \cdot n$ , sendo  $m$  e  $n$ , elementos genéricos de  $\mathbb{Z}$ . Esta operação está bem definida, o leitor mais curioso pode verificar essa informação em Domingues[5].

Para todos  $m = (a, b)$ ,  $n = (c, d)$  e  $r = (e, f)$ , números inteiros, temos que são válidas as seguintes propriedades da multiplicação:

$m_1$  - **Associativa:**  $m(nr) = (mn)r$

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned} m(nr) &= \overline{(a, b) \cdot (ce + df, cf + de)} \\ &= \overline{(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df))} \\ &= \overline{(a(ce) + a(df) + b(cf) + b(de), a(cf) + a(de) + b(ce) + b(df))} \\ &= \overline{((ac)e + (ad)f + (bc)f + (bd)e, (ac)f + (ad)e + (bc)e + (bd)f)} \\ &\quad (\text{pela associatividade da multiplicação em } \mathbb{N}.) \\ &= \overline{(ac + bd, ad + bc) \cdot (e, f)} \\ &= (mn)r. \end{aligned}$$

□

$m_2$  - **Comutativa:**  $mn = nm$

*Demonstração.* Pela definição de multiplicação e pela comutatividade da multiplicação em  $\mathbb{N}$ , segue que

$$mn = \overline{(a, b) \cdot (c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(ca + db, da + cb)} = \overline{(c, d) \cdot (a, b)} = nm.$$

□

$m_3$  - **Elemento neutro:** Existe um elemento  $e \in \mathbb{Z}$ , tal que,  $me = em = m$ , para qualquer  $m \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Note que a classe  $\overline{(1, 0)}$  é o elemento neutro da multiplicação em  $\mathbb{Z}$ , pois:

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1)} = \overline{(a + 0, 0 + b)} = \overline{(a, b)}.$$

Analogamente,

$$\overline{(1, 0)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(1 \cdot b + 0 \cdot a, 1 \cdot a + 0 \cdot b)} = \overline{(a + 0, b + 0)} = \overline{(a, b)}.$$

□

Note que o elemento neutro é único, pois caso exista outro  $x \in \mathbb{Z}$  tal que para todo  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $xy = yx = y$ , poderíamos, em particular, tomar  $y = \overline{(1, 0)}$ . Assim,

por um lado  $x = \overline{(1, 0)} \cdot x$ , já que  $\overline{(1, 0)}$  é elemento neutro. Mas  $\overline{(1, 0)} \cdot x = \overline{(1, 0)}$  já que  $x$  é elemento neutro.

Logo,  $x = \overline{(1, 0)}$ .

$m_4$  - **Lei do anulamento do produto:** Se  $mn = 0$ , então  $m = 0$  ou  $n = 0$ .

*Demonstração.* Como vimos na Observação (2.11), qualquer elemento de  $\mathbb{Z}$  pode ser representado sob as formas  $\overline{(x, 0)}$  ou  $\overline{(0, x)}$ , para algum  $x \in \mathbb{N}$ . Considerando, por exemplo,  $m = \overline{(x, 0)}$  e  $n = \overline{(0, y)}$  (os outros casos são análogos), com  $x, y$  naturais, teremos que, como  $mn = 0$

$$\overline{(a, 0)} \cdot \overline{(0, b)} = \overline{(0, 0)} \text{ o que implica que } \overline{(0, ab)} = \overline{(0, 0)}.$$

Desta forma,  $0 + 0 = ab + 0$ , ou seja, em  $\mathbb{N}$ ,  $ab = 0$  o que implica que  $a = 0$  ou  $b = 0$  (pela lei do anulamento em  $\mathbb{N}$ ).

Portanto,  $m = 0$  ou  $n = 0$ . □

$m_5$  - **Distributividade em relação à adição:** Para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ , tem-se

$$r(m + n) = rm + rn.$$

*Demonstração.* Sejam  $m = \overline{(a, b)}$ ,  $n = \overline{(c, d)}$  e  $r = \overline{(e, f)}$  são elementos quaisquer de  $\mathbb{Z}$ , assim:

$$\begin{aligned} r(m + n) &= \overline{(e, f)} \cdot \overline{(a + c, b + d)} \\ &= \overline{(e(a + c) + f(b + d), e(b + d) + f(a + c))} \\ &= \overline{(ea + ec + fb + fd, eb + ed + fa + fc)} \\ &\hspace{15em} \text{(pela distributividade em } \mathbb{N}) \\ &= \overline{((ea + fb) + (ec + fd), (eb + fa) + (ed + fc))} \\ &\hspace{15em} \text{(pela comutatividade em } \mathbb{N}) \\ &= \overline{(ea + fb, eb + fa)} + \overline{(ec + fd, ed + fc)} \\ &\hspace{15em} \text{(pela definição de adição em } \mathbb{Z}) \\ &= \overline{(e, f)} \cdot \overline{(a, b)} + \overline{(e, f)} \cdot \overline{(c, d)} \\ &\hspace{15em} \text{(pela definição de multiplicação em } \mathbb{Z}) \\ &= rm + rn. \end{aligned}$$

□

Note também que temos a lei da distributividade pela esquerda, ou seja,  $(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$ . A demonstração é feita de modo análogo, e deixaremos à cargo do leitor. Além disso, a multiplicação em  $\mathbb{Z}$  também é distributiva em relação à subtração, isto é,

$$r(m - n) = rm - rn \text{ e } (m - n)r = mr - nr. \quad (2.14)$$

Tal propriedade pode ser demonstrada de modo análogo ao que foi feito para a adição.

$m_6$  - **Produtando por zero:** A multiplicação de qualquer número inteiro por zero resulta em zero. Por esse motivo, o zero é dito *elemento absorvente* da multiplicação. Assim,

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstração.* Note que, dado  $a \in \mathbb{Z}$ ,

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 - 0) = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0.$$

Analogamente,  $0 \cdot a = 0$ . □

### 2.3.5 Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$

Como visto em Observação (2.11), se  $m$  é um elemento de  $\mathbb{Z}$ , então podemos escrever  $m = \overline{(a, 0)}$  ou  $m = \overline{(0, a)}$ , para algum  $a \in \mathbb{N}$ .

Desta maneira, vamos adotar as seguintes notações:

$$\begin{array}{ll} \overline{(0, 0)} = 0 & \\ \overline{(1, 0)} = +1 & \overline{(0, 1)} = -1 \\ \overline{(2, 0)} = +2 & \overline{(0, 2)} = -2 \\ \overline{(3, 0)} = +3 & \overline{(0, 3)} = -3 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{(c, 0)} = +c & \overline{(0, c)} = -c \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

O número inteiro 0 é dito nulo. Para  $c \in \mathbb{N}$ ,  $c > 0$ , o inteiro  $+c$  é dito inteiro positivo, enquanto o inteiro  $-c$  é dito negativo.

Agora que notacionamos os números inteiros como números positivos, negativos e nulo, uma pergunta nos vem à mente. No Ensino Básico, os professores ensinam que multiplicar “menos com menos dá mais”, “menos com mais resulta em menos”. Como podemos verificar essa informação? O mais importante, o que significa o, por exemplo, “menos vezes menos”? Por exemplo, a expressão  $-(-4)$  tem como resultado  $+4$ , pois  $-(-4)$  significa o simétrico do inteiro  $-4$ .

**Proposição 2.13: (Regra dos Sinais):** Sejam  $a, b$  números inteiros quaisquer. Então vale:

- i)  $-(-a) = a$ .
- ii)  $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ .
- iii)  $(-a)(-b) = ab$ .

*Demonstração.* Considerando  $a, b$  números inteiros, temos:

- i) De acordo com a propriedade  $a_4$  da Subseção (2.3.2),  $m + (-m) = 0$ , donde  $-m$  é o oposto de  $m$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ . Sendo assim,  $a + (-a) = 0$ , que pela comutatividade da adição, pode ser escrito como  $(-a) + a = 0$ . Portanto,  $a$  é o oposto de  $-a$ , logo  $a = -(-a)$ .
- ii) De fato,  $a(-b) = a[0 + (-b)] = a(0 - b) = a \cdot 0 - (ab) = 0 - (ab) = -(ab)$ .  
(Note que, acima, utilizamos a distributividade da multiplicação em relação à subtração). Além disso,  $(-a)b = (0 - a)b = 0 \cdot b - (ab) = 0 - (ab) = -(ab)$ .
- iii) Pelo item anterior, temos  $(-a)(-b) = -[a(-b)]$  e ainda que  $a(-b) = -(ab)$ . Assim,  $(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab$ .

□

A proposição acima é amplamente utilizada na Educação Básica, desde o Ensino Fundamental II e também se faz necessária na demonstração de algumas propriedades no presente trabalho.

Registrar um número inteiro por  $m$  ou  $-m$ , para  $m \in \mathbb{N}$  é bastante útil e simplifica a escrita. Perceba, o leitor, que a definição abaixo, de ordem em  $\mathbb{Z}$ , redigida com a notação sugerida, facilita seu entendimento.

**Definição 2.14:** Dados dois números  $m, n \in \mathbb{Z}$ , dizemos que  $m \leq n$  (lê-se:  $m$  é menor que ou igual a  $n$ ), quando existe um número inteiro  $r$  positivo ou nulo, tal que

$$n = m + r$$

Caso  $r$  seja diferente de zero, temos  $m < n$  (lê-se:  $m$  é menor que  $n$ ).

Além disso, sendo  $m \leq n$  é equivalente dizer que  $n \geq m$  (lê-se:  $n$  é maior que ou igual a  $m$ ). Consequentemente, se  $m < n$ , então  $m > n$  ( $m$  é maior que  $n$ ). Essa forma de relacionar dois números inteiros será muito utilizada no decorrer do nosso trabalho.

**Exemplo 2.3.5:** Na seção anterior, vimos que não existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < m < 1$ .

Mostraremos que essa característica é, também válida, para  $\mathbb{Z}$ .

O conjunto  $\{x \in \mathbb{Z}; 0 < x < 1\}$  é vazio. Ou seja, não existe número inteiro entre os números 0 e 1. De fato, se tal inteiro existisse, digamos  $m$ , teríamos  $0 < m < 1$ .

- $0 < m$  implica que existe  $s \in \mathbb{N}^*$  tal que  $m = 0 + s$ .
- $m < 1$  implica que existe  $u \in \mathbb{N}^*$  tal que  $1 = m + u$ .

Mas, se  $1 = m + u$ , teremos  $m = 0$  ou  $u = 0$  (ver Exemplo (2.2.4)), como  $u \neq 0$ , teremos  $m = 0$ , absurdo.

Desta forma, se  $c \in \mathbb{Z}$  é tal que  $c > 0$ , então, obrigatoriamente,  $c \geq 1$ .

O exemplo acima poderia ser generalizado para: não existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $n < m < n + 1$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

A relação “ $\leq$ ” é muito importante neste conjunto, pois veremos a seguir, que, como em  $\mathbb{N}$ , ela descreve uma relação de ordem total em  $\mathbb{Z}$ . Dessa maneira, dados dois inteiros quaisquer  $a$  e  $b$ , sempre podemos compará-los, isto é, dizer que  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

**Proposição 2.15:** A relação “ $\leq$ ” definida acima, é uma relação de ordem total em  $\mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que  $\leq$  é uma relação de ordem.

$O_1$  - “ $\leq$ ” é uma **Relação Reflexiva:** Isto é,  $m \leq m \forall m \in \mathbb{Z}$ .

De fato, tal propriedade segue da definição da relação “ $\leq$ ” uma vez que  $m = m + 0$ .

$O_2$  - “ $\leq$ ” é uma **Relação Antissimétrica:** Isto é,  $m \leq n$  e  $n \leq m$  implica que  $m = n$ .

Pela definição da relação “ $\leq$ ”, se  $m \leq n$  e  $n \leq m$  existem  $u, v \in \mathbb{Z}$ , positivos ou nulos, tais que,  $n = m + u$  e  $m = n + v$ . Considere então  $u = \overline{(a, 0)}$ , para algum  $a \in \mathbb{N}$  e  $v = \overline{(b, 0)}$ , para  $b \in \mathbb{N}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} m &= n + v \\ &= (m + u) + v \\ &= m + (u + v) \\ &= m + \overline{(a + b, 0)}. \end{aligned}$$

que pela lei do cancelamento da adição, visto na Subseção (2.3.2), implica que

$$\overline{(a + b, 0)} = \overline{(0, 0)}.$$

Desta forma,  $(a + b) + 0 = 0 + 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = b$  (em  $\mathbb{N}$ ). Com isso,  $u = v \Rightarrow m = n$

$O_3$  - “ $\leq$ ” é uma **Relação Transitiva:** Isto é, se  $m \leq n$  e  $n \leq q$  então  $m \leq q$ .

Sejam  $m, n$  e  $q$ , elementos quaisquer de  $\mathbb{Z}$ .

Por hipótese, existem  $r_1, r_2$  inteiros positivos, tais que  $n = m + r_1$  e  $q = n + r_2$ .

Somando as duas igualdades, temos:

$$\begin{aligned} n + q &= m + r_1 + n + r_2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\ q &= m + r_1 + r_2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \\ q &= m + (r_1 + r_2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \\ & m \leq q. \end{aligned}$$

Sendo (1) pela lei do cancelamento da adição, (2) pela associatividade da adição e (3) pela definição da relação “ $\leq$ ”.

Agora, para mostrar que é uma relação de ordem total em  $\mathbb{Z}$ , tome  $m, n \in \mathbb{Z}$ , mostraremos que  $m \leq n$  ou  $n \leq m$ .

Como constatado em Observação (2.11), temos três casos, para  $a, b \in \mathbb{N}$ :

- $m = \overline{(a, 0)}$  e  $n = \overline{(b, 0)}$  ou,
- $m = \overline{(0, a)}$  e  $n = \overline{(0, b)}$  ou,
- $m = \overline{(0, a)}$  e  $n = \overline{(b, 0)}$ .

Como a relação  $\leq$  é total em  $\mathbb{N}$ , Proposição (2.8), temos que  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ . Dessa maneira, em todos os casos, teremos  $m \leq n$  ou  $n \leq m$ .

□

Os números inteiros possuem, então, uma relação de ordem total! Posto isso, podemos ordenar todos os seus elementos, do menor para o maior. Ordenando os elementos de  $\mathbb{Z}$ , lembrando do Exemplo (2.3.5), temos a seguinte escrita dos elementos de  $\mathbb{Z}$  em forma crescente.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Note que a escolha da representação de um número inteiro da forma  $\overline{(0, a)}$  por  $-a$  não foi aleatória. Na seção anterior vimos que dado um inteiro  $x$  seu simétrico é notacionado por  $-x$ . Assim, como  $\overline{(0, a)}$  é o simétrico de  $\overline{(a, 0)} = +a$ , faz sentido a representação feita.

### Subconjuntos importantes de $\mathbb{Z}$

Tomando elementos de  $\mathbb{Z}$  que possuem características comuns, formamos subconjuntos que são amplamente utilizados na educação básica e que são necessários para o conceito de Relação de Ordem. Destacaremos aqui, alguns deles:

- **Números inteiros não negativos  $\mathbb{Z}_+$ :**

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

- **Números inteiros não positivos  $\mathbb{Z}_-$ :**

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

- **Números inteiros estritamente positivos  $\mathbb{Z}_+^*$ :**

$$\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, +4, \dots\}$$

- **Números inteiros estritamente negativos  $\mathbb{Z}_-^*$ :**

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

Observe que, se  $m \in \mathbb{Z}_+$ , então,  $-m \in \mathbb{Z}_-$ .

De fato, seja  $m \in \mathbb{Z}_+$ , então  $m = \overline{(a, 0)}$ . E  $-m = \overline{(0, a)}$ , que está em  $\mathbb{Z}_-$ .

É fácil perceber que:

- $0 \leq r$  para todo  $r \in \mathbb{Z}_+$
- $s \leq 0$  para qualquer  $s \in \mathbb{Z}_-$

A relação de ordem “ $\leq$ ”, vista acima, é compatível com a soma e a multiplicação, como evidencia as duas próximas propriedades.

**$O_4$  - Compatibilidade com a adição:** Se  $m \leq n$  então  $m + p \leq n + p$ , para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Se  $m \leq n$ , então  $n = m + s$ , para algum  $s \in \mathbb{N}$ . Adicionando o número inteiro  $p$  nos dois lados da expressão, teremos

$$n + p = (m + s) + p = (m + p) + s.$$

Logo

$$m + p \leq n + p,$$

como queríamos demonstrar. □

**$O_5$  - Compatibilidade com a multiplicação:** Se  $m \leq n$  e  $p \in \mathbb{N}$  então  $mp \leq np$ .

*Demonstração.* Seja  $m \leq n$ , então  $n - m \in \mathbb{N}$ . Desta forma, para  $p \in \mathbb{N}$ , temos

$$np - mp = (n - m)p \in \mathbb{N},$$

logo  $mp \leq np$ . □

Há também a propriedade que nos ensina como é trabalhar com simétricos.

**$O_6$  - Desigualdade envolvendo simétricos:** Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Se  $-a < -b$  então  $b < a$ .

*Demonstração.* De fato, somando  $(a + b)$  a ambos os lados da desigualdade, temos:

$$-a + (a + b) < -b + (a + b) \Rightarrow (-a + a) + b < (-b + b) + a \Rightarrow b < a.$$

□

Diversas propriedades sobre essa relação podem ser mostradas. Aqui destacamos as mais importantes e que precisaremos mais para frente, na sequência deste trabalho.

Uma propriedade interessante e muito importante de  $\mathbb{Z}$  é o famoso Princípio da Boa Ordenação, equivalente ao Princípio da Indução Matemática. Mas, antes de

enunciá-lo, precisamos entender o que é o menor elemento de um subconjunto de números inteiros. Para isso, considere o subconjunto de  $\mathbb{Z}$ ,  $B = \{-3, -2, 4, 5, 19, 45\}$ . Note que  $-3 \in B$  é menor, ou igual, a qualquer elemento de  $B$ . Dessa forma, dizemos que  $-3$  é o menor elemento de  $B$ . Nem todo subconjunto de  $\mathbb{Z}$ , possui menor elemento, por exemplo,  $\mathbb{Z}_-$ . Veremos que, para isso ocorrer, é necessário que o subconjunto seja limitado inferiormente.

**Definição 2.16:** Um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{Z}$  é dito *limitado inferiormente*, se existir  $c \in \mathbb{Z}$  tal que

$$c \leq x, \forall x \in A.$$

Dizemos que  $a \in A$  é um *menor elemento* de  $A$  se  $a \leq x$ , para todo  $x \in A$ .

Estamos, agora, em condições de enunciar o Princípio da Boa Ordenação (PBO).

**Teorema 2.17 (Princípio da Boa Ordenação):** Todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}$ , limitado inferiormente, possui um menor elemento.

*Demonstração.* Seja  $B$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}$  e limitado inferiormente por  $a \in \mathbb{Z}$ , logo  $a \leq x$  para todo  $x \in B$ . Por definição de limitação inferior, Definição (2.16), se  $a \in B$ , teremos que  $a$  é o menor elemento do subconjunto  $B$ . Suponha, então, que  $a \notin B$ , e considere o conjunto

$$S = \{x - a; x \in B\}.$$

Observe que  $a \leq x, \forall x \in B$ , assim  $x - a \geq 0$ , desta forma,  $S \subset \mathbb{Z}_+$ , logo podemos dizer que  $S \subset \mathbb{N}$ . Aqui o leitor pode ficar um pouco confuso,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ? Ainda não falamos sobre isso. Pedimos desculpas por antecipar algo que explicaremos somente na próxima seção. Mas acredite, essa afirmação é verdadeira.

Assim, pela Proposição (2.9), podemos afirmar que  $S$  possui um menor elemento. Seja  $m'$  o menor elemento de  $S$ , tal que  $m' = m - a$ , para algum  $m \in B$ . Note que, se  $x \in B$  então  $x - a \in S$ , assim, como  $m'$  é o menor elemento de  $S$ ,  $m' \leq x - a$ , ou seja,  $m - a \leq x - a$ . Desta forma, pela propriedade  $O_4$ , vista acima, temos  $m \leq x, \forall x \in B$ . E assim, pela definição (2.16), concluimos que  $m$  é o menor elemento de  $B$ .  $\square$

O Princípio da Boa Ordenação é utilizado para provar diversas propriedades em  $\mathbb{Z}$ , como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.3.6:** Vamos mostrar que, para todo  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  temos

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para demonstrar essa afirmação, vamos utilizar o PBO e garantir que é vazio o conjunto dos inteiros estritamente positivos para os quais essa igualdade não é válida. Faremos isto por absurdo.

Considere o conjunto

$$B = \left\{ n \in \mathbb{Z}_+^* \mid 1 + 2 + 3 + \dots + n \neq \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

Vamos supor, por absurdo que,  $B \neq \emptyset$ . Assim, pelo PBO,  $B$  possui um menor elemento, ou seja, existe  $b \in B$ , tal que  $b \leq x$  para todo  $x \in B$ .

Podemos observar que  $1 \notin B$ , pois  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

Portanto,  $b \geq 2$  e daí,  $b - 1 \geq 1$  e como  $b$  é o menor elemento de  $B$ , temos  $b - 1 \notin B$ . E vale a igualdade:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (b - 1) = \frac{(b - 1)(b - 1 + 1)}{2}.$$

Fazendo alguns ajustes e somando  $b$  em ambos os membros dessa igualdade temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (b - 1) + b &= \frac{b(b - 1)}{2} + b \\ &= \frac{b^2 - b + 2b}{2} \\ &= \frac{b + b}{2} \\ &= \frac{b(b + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Absurdo! Pois, como  $b \in B$ , temos

$$1 + 2 + 3 + \dots + b \neq \frac{b(b + 1)}{2}.$$

Portanto, concluímos que  $B = \emptyset$  o que garante que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

No início deste capítulo, vimos o Princípio da Indução Matemática (PIM) em  $\mathbb{N}$ . O interessante é que o PBO é equivalente ao PIM, o leitor pode verificar esse fato em Vieira (2011),[17]. Além disso, o PIM apresenta uma variante muito útil em demonstrações. É o chamado Princípio da Indução Completa, ou Princípio da Indução - 2ª forma, que será enunciado abaixo e demonstrado pelo Princípio da Boa Ordenação.

**Teorema 2.18 (PIM-2ª forma):** Seja  $a$  um número inteiro. Suponha que, para cada inteiro  $n \geq a$ , se tenha uma afirmativa  $P(n)$  que satisfaça as seguintes propriedades:

- i)  $P(a)$  é verdadeira;

- ii) Para todo  $k > a$ , se  $P(m)$  for verdadeira para todo  $m$  com  $a \leq m \leq k$  então  $P(k + 1)$  é verdadeira.

Então  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq a$ .

*Demonstração.* Considere o conjunto  $H = \{r \in \mathbb{Z} \mid r \geq a \text{ e } P(r) \text{ é falsa}\}$ . Vamos mostrar que  $H$  é vazio.

Suponha, por absurdo, que  $H \neq \emptyset$ . Então, pelo Princípio da Boa Ordenação,  $H$  possui um menor elemento  $b$ , ou seja,  $b$  é o menor dos  $r \geq a$  para os quais  $P(r)$  é falsa.

Por (i),  $a \notin H$ , logo  $b > a$ . Assim, para todo  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq m \leq b - 1$ ,  $P(m)$  é verdadeira. Mas note que  $b = (b - 1) + 1$  então, pela hipótese (ii),  $P(b)$  também é verdadeira. Absurdo, pois  $b \in H$ .

Assim, concluímos que  $H$  é vazio e  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq a$ .  $\square$

A Segunda forma do Princípio da Indução Matemática é um importante instrumento de demonstração. Para exemplificar sua utilidade, apresentaremos o exemplo abaixo, uma releitura o Exemplo 1.2.6 de Hefez, 2009, [8], página 21.

**Exemplo 2.3.7:** Observe a afirmação abaixo:

A equação  $3x + 5y = n$  tem solução em  $(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ , para todo  $n \geq 8$ .

Dizer que a equação acima tem solução em  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$  é o mesmo que dizer que para todo inteiro  $n \geq 8$  existem  $x, y$  inteiros positivos tais que  $3x + 5y = n$ .

Vamos provar que essa afirmação é verdadeira. Para isso, usaremos o PIM-2<sup>a</sup> forma, dessa maneira, temos três passos para seguir:

- Passo 1: A afirmação é verdadeira para  $n = 8$ , note que  $(1,1)$  é solução de  $3x + 5y = 8$ .
- Passo 2: Hipótese de indução: Suponhamos que a equação  $3x + 5y = n$  tenha solução  $(a, b)$  para algum  $n \geq 8$ . Ou seja,  $3a + 5b = n$ .
- Vamos mostrar que  $3x + 5y = n + 1$  tem solução em  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ .

Para qualquer solução  $(a, b)$ , é necessário que  $a \geq 1$  ou  $b \geq 1$ , pois se ambos forem negativos,  $n$  será necessariamente negativo.

No caso de  $b \geq 1$ , teremos, se  $b = 1$ ,  $3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1$ . Dessa maneira,

$$3(a + 2) + 5(b - 1) = 3a + 5b + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 3a + 5b + 1 = n + 1,$$

o que nos mostra que a equação  $3x + 5y = n + 1$  tem solução.

### 2.3.6 Imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$

No Ensino Básico, durante as aulas de Conjuntos Numéricos, é comum dizermos que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Mas será isso verdade? Nas seções anteriores, vimos que o conjunto dos inteiros é formado por classes de equivalência, enquanto  $\mathbb{N}$  são números construídos

por axiomas. É fácil perceber que se tratam de elementos distintos. Então é falso dizer que  $\mathbb{N}$  é subconjunto de  $\mathbb{Z}$ ? Na verdade, o que fazemos é um abuso de notação. Mostraremos, formalmente, como podemos considerar o conjunto  $\mathbb{N}$  como parte do conjunto  $\mathbb{Z}$ . Fazemos isso, utilizando uma função injetiva, que permita a relação que queremos.

O leitor conseguiria pensar em uma função definida de  $\mathbb{N}$  para  $\mathbb{Z}$ ? Observe que pela definição de  $\mathbb{Z}$ , um número inteiro é uma classe  $\overline{(a, b)}$  tal que  $a, b \in \mathbb{N}$ . Assim é natural a função  $f$  definida como se segue:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ a &\mapsto \overline{(a, 0)} \end{aligned}$$

para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

Desta forma,  $f(a) = \overline{(a, 0)}$ , ou seja

$$\begin{aligned} f(0) &= \overline{(0, 0)} = 0 \\ f(1) &= \overline{(1, 0)} = +1 \\ f(2) &= \overline{(2, 0)} = +2 \\ f(3) &= \overline{(3, 0)} = +3 \\ &\vdots \\ f(n) &= \overline{(n, 0)} = +n \end{aligned}$$

Note que o conjunto imagem desta função é o conjunto do Números Inteiros não Negativos, isto é,

$$Im(f) = \{f(a) \mid a \in \mathbb{N}\} = \{0, +1, +2, +3, \dots\} = \mathbb{Z}_+.$$

Essa função possui propriedades importantes que veremos a seguir:

- A função  $f$  é injetiva

*Demonstração.* Sejam  $m, n$  números naturais, temos,

$$f(m) = f(n) \Leftrightarrow \overline{(m, 0)} = \overline{(n, 0)} \Leftrightarrow \overline{(m, 0)} \sim \overline{(n, 0)} \Leftrightarrow m + 0 = n + 0 \Leftrightarrow m = n.$$

□

- A função  $f$  preserva a adição, isto é,  $f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Sejam  $a$  e  $b$  naturais quaisquer, então

$$f(a + b) = \overline{(a + b, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)} = f(a) + f(b).$$

□

- A função  $f$  preserva o produto, isto é,  $f(ab) = f(a) \cdot f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , segue que

$$f(ab) = \overline{(ab, 0)} = \overline{(a, 0)} \cdot \overline{(b, 0)} = f(a) \cdot f(b).$$

□

- Dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , se  $a \leq b$ , então  $f(a) \leq f(b)$ .

*Demonstração.* De fato, se  $a$  e  $b$  são números naturais tais que  $a \leq b$ , então  $b = a + c$ , para algum  $c$  natural. Desta forma, temos

$$f(b) = \overline{(b, 0)} = \overline{(a + c, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(c, 0)} = f(a) + \overline{(c, 0)},$$

sendo  $\overline{(c, 0)} \in \mathbb{Z}_+$ . Logo,  $f(a) \leq f(b)$ . □

As propriedades vistas acima nos esclarecem que  $\mathbb{N}$  possui as mesmas propriedades aritméticas do conjunto imagem de  $f$ . E, por  $f$  ser injetiva, podemos dizer que  $Im(f)$  é uma “cópia” de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{Z}$ . Assim, podemos considerar o conjunto  $\mathbb{N}$  como uma cópia de  $\mathbb{Z}_+$  e como este último já é um subconjunto de  $\mathbb{Z}$ , abusamos da notação e dizemos que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Por esse motivo, a função  $f$  é chamada de *imersão* de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{Z}$ .

Note que, se um número inteiro é da forma  $\overline{(a, b)}$  com  $a, b \in \mathbb{N}$ , então podemos escrever

$$\overline{(a, b)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, 0)} + [-\overline{(b, 0)}].$$

Ou seja, com a imersão de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{Z}$ , concluímos que um número inteiro sempre será a diferença entre dois números naturais. Isto é, se  $x \in \mathbb{Z}$  então  $x = a - b$ , sendo  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Por outro lado, tomando a diferença entre dois números naturais quaisquer  $a$  e  $b$ , ainda considerando a imersão que acabamos de mostrar, temos

$$a - b = \overline{(a, 0)} - \overline{(b, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}.$$

E assim vemos que a subtração de dois números naturais é sempre possível em  $\mathbb{Z}$ . E foi este fato que motivou a construção dos Números Inteiros, como vimos no início da Subseção (2.3.1).

## 2.4 Módulo de um número inteiro

Continuando nossos estudos sobre o conjunto dos números inteiros, veremos uma relação que, aqui, possui grande importância.

No Capítulo 2, vimos que os números naturais não possuem simétrico aditivo. Diferente do que acontece em  $\mathbb{Z}$ . Além disso, lembrando da relação “ $\leq$ ”, podemos representar  $\mathbb{Z}$  em uma reta numérica, ordenando os números, do menor para o maior, como mostra a figura a seguir:



Em diversas situações, é interessante pensarmos na distância do número inteiro  $x$ , à origem, 0, na reta acima. Essa distância é dita o valor absoluto do número inteiro, ou o seu módulo.

**Definição 2.19:** Seja  $a \in \mathbb{Z}$ , o *módulo* ou *valor absoluto* de  $a$  é o número inteiro  $|a|$ , definido por:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

**Exemplo 2.4.1:** Vejamos alguns exemplos de módulo de um número inteiro:

- $|1| = 1$ , pois  $1 > 0$ ;
- $|-3| = -(-3) = 3$ , pois  $-3 < 0$ ;
- $|0| = 0$ , pois  $0 = 0$ ;
- $|-7| = -(-7) = 7$ , pois  $7 < 0$ .

Note que o módulo de um número é sempre um número não negativo.

A seguir, veremos algumas propriedades básicas de módulo, que serão de grande importância no estudo dos nossos próximos conteúdos. A demonstração se encontra em Hygino [5], 1991, página 97, Proposição 3 e Exemplo 2.

**Proposição 2.20:** Para quaisquer  $a, b \in \mathbb{Z}$ , temos:

- i)  $|a| = |-a|$
- ii)  $-|a| \leq a \leq |a|$ ;
- iii)  $|ab| = |a||b|$ ;
- iv)  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$  ou  $|a + b| \leq |a| + |b|$

A desigualdade da direita do item (iv) acima,  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , é dita **Desigualdade Triangular**.

A desigualdade triangular tem várias aplicabilidades na Matemática. Uma delas, muito conhecida é na geometria. Essa característica da Matemática, áreas distintas com aplicações umas nas outras torna o estudo de números inteiros ainda mais fascinante. Neste trabalho, a importância de se estudar módulos está, particularmente, em sua utilização na demonstração de uma propriedade que veremos logo a seguir, a dita, Propriedade Arquimediana.

**Propriedade Arquimediana de  $\mathbb{Z}$ :** Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$ , então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $nb > a$ .

*Demonstração.* De fato, vemos que  $b \neq 0$  implica que  $|b| > 0$  logo, pelo Exemplo (2.3.5),  $|b| > 1$ , assim

$$(|a| + 1)|b| \geq |a| + 1 > |a| \geq a.$$

Desta forma, basta tomarmos  $n = |a| + 1$ , se  $b > 0$ . E, caso  $b < 0$ , tomamos  $n = -(|a| + 1)$ , donde segue o resultado.  $\square$

## 2.5 Divisão Euclidiana

Muitos dos problemas envolvendo números inteiros falam sobre a questão de divisibilidade. Mas o que é uma divisão? Até aqui, observe o leitor, não fizemos menção alguma sobre a operação divisão. Embora seja uma operação inexistente em  $\mathbb{Z}$  (para todos os inteiros), podemos extrair informações importantes observando-a de perto.

A divisão, como intuitivamente conhecemos, é a operação inversa da multiplicação. Assim, ao efetuarmos  $a$  dividido por  $b$ , em  $\mathbb{Z}$ , nem sempre seu resultado é possível em  $\mathbb{Z}$ . Note que, por exemplo, não existe número inteiro que multiplicado por 2 dê 5. Nesse sentido, não é possível dividir 5 por 2.

Nesta seção, vamos definir formalmente a divisão entre os números inteiros.

**Definição 2.21:** Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , dizemos que  $a$  divide  $b$ , se existe  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ca$ . Nesse caso, também dizemos que  $a$  é um *divisor* de  $b$  ou que  $b$  é um *múltiplo* de  $a$ , ou ainda que  $b$  é *divisível* por  $a$ .

Usaremos a notação  $a \mid b$ , para indicar que  $a$  divide  $b$ . E caso contrário, usaremos  $a \nmid b$ , para indicar que  $a$  não divide  $b$ , isto é, não existe nenhum número inteiro  $c$  tal que  $b = ca$ .

A partir dessa definição é fácil ver, por exemplo, que:

- $3 \mid 15$ , pois  $15 = 5 \cdot 3$ ;
- $-4 \mid 20$ , pois  $20 = -5 \cdot (-4)$ ;
- $2 \nmid 7$ , pois não existe  $c \in \mathbb{Z}$ , tal que  $7 = c \cdot 2$ ;

Chamamos de *quociente* de  $b$  por  $a$ , o número  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ac$ . Tal quociente é indicado por  $c = \frac{b}{a}$ . Vale lembrar que  $\frac{b}{a}$  só está definido quando  $a \neq 0$  e  $a \mid b$ . Assim, podemos tomar alguns exemplos de quocientes em  $\mathbb{Z}$ :

- $\frac{8}{1} = 8$ ;
- $\frac{10}{-2} = -5$ ;
- $\frac{-20}{-5} = 4$ .

A relação de divisibilidade em  $\mathbb{Z}$  apresenta importantes propriedades, que serão de grande utilidade. Vejamos:

$d_1$  - **Reflexiva:** Se  $a \in \mathbb{Z}$ , então  $a \mid a$ .

*Demonstração.* A demonstração é trivial, uma vez que  $a = 1 \cdot a$ . Portanto  $a \mid a$ .  $\square$

$d_2$  - **Transitiva:** Dados  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ .

*Demonstração.* De fato, se  $a \mid b$ , então existe um elemento  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ka$ . E se  $b \mid c$ , então existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = qb$ . Substituindo  $b$  na segunda igualdade, chegamos em  $c = qka$ , que pela definição de divisibilidade, indica que  $a \mid c$ .  $\square$

$d_3$  - Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se  $a \mid b$  e  $b \mid a$  então  $a = b$  ou  $a = -b$ .

*Demonstração.* Por hipótese  $a \mid b$  e  $b \mid a$ , logo existem  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  tais que  $b = ak_1$  e  $a = bk_2$ . Substituindo  $b$  na segunda igualdade, obtemos  $a = a(k_1k_2)$ . Assim, obviamente se  $a = 0$  então  $b = 0$ . Considerando então  $a \neq 0$ , para que a igualdade  $a = a(k_1k_2)$  seja verdadeira, é necessário ter-se  $k_1 = k_2 = 1$  ou  $k_1 = k_2 = -1$ . E portanto,  $a = b$  ou  $a = -b$ .  $\square$

$d_4$  - Dados  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se  $a \mid b$  e  $a \mid c$  então  $a \mid (bx + cy)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Se  $a \mid b$  e  $a \mid c$  então,  $b = ak_1$  e  $c = ak_2$ , sendo  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Daí,

$$bx + cy = (ak_1)x + (ak_2)y = a(k_1x) + a(k_2y) = a(k_1x + k_2y),$$

o que prova o resultado.  $\square$

$d_5$  - Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a$  divide  $b$  se, e somente se,  $|a|$  divide  $|b|$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese,  $b = ac$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ . Daí  $|b| = |ac| = |a| \cdot |c|$ , o que implica que  $|a|$  divide  $|b|$ .

( $\Leftarrow$ ) Agora, por hipótese,  $|a|$  divide  $|b|$  e isso garante que  $|b| = |a|c$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ . Como  $|b| \geq 0$  e  $|a| \geq 0$ , concluímos que  $c \geq 0$  e, portanto,  $c = |c|$ . Assim,  $|b| = |a|c = |a||c| = |ac|$ , ou seja,  $|b| = |ac|$ .

Temos então 4 casos:

- $a > 0$  e  $b > 0$ ;
- $a > 0$  e  $b < 0$ ;
- $a < 0$  e  $b > 0$ ;
- $a < 0$  e  $b < 0$ .

Para  $a < 0$  e  $b > 0$ , temos  $|a| = -a$  e  $|b| = b$ . Assim  $|b| = |ac|$  implica que  $b = (-a)c$ , ou seja,  $b = a(-c)$ . Logo,  $a$  divide  $b$ .

Os demais casos, podem ser verificados de forma análoga e deixaremos a cargo do leitor.

□

$d_6$  - Sejam  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se  $a = b + c$  e  $d \mid c$ , então  $d \mid a \Leftrightarrow d \mid b$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese,  $d \mid c$ , então  $c = dl$ , para algum  $l \in \mathbb{Z}$ . Temos também que  $d \mid a$ , logo  $a = dk$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Como  $a = b + c$ , então

$$dk = b + dl.$$

Portanto

$$b = dk - dl = d(k - l), \text{ onde } k - l \in \mathbb{Z}.$$

Assim,  $d \mid b$ .

Observe o leitor que o outro lado é análogo.

□

Observe que a relação de divisibilidade não é uma relação de ordem em  $\mathbb{Z}$ , pois, apesar de ser reflexiva e transitiva, ela não é antissimétrica. Por exemplo,  $5 \mid -5$  e  $-5 \mid 5$ , mas  $5 \neq -5$ .

Dados dois inteiros  $a$  e  $b$ , mesmo não sendo possível determinar o quociente de  $a$  por  $b$ , há uma relação de divisibilidade entre os dois números. Por exemplo,  $5 \nmid 13$ , mas podemos escrever  $13 = 5 \cdot 2 + 3$ . Nesse sentido,  $5$  não é divisor de  $13$ , mas dizemos que  $13$  ao ser dividido por  $5$  deixa resto  $3$ . Seria, esse fato, algo geral em  $\mathbb{Z}$ ? Seria sempre possível efetuar uma “divisão”, que dizemos poder não ser exata, desde que “sobrem” algumas unidades? Pensemos na seguinte situação para nos ajudar na compreensão deste fato.

“Em uma gincana da escola, um grupo de 30 pessoas seria igualmente dividido em equipes de exatamente 4 pessoas.”

É fácil perceber que, com as condições dadas, seria possível formar 7 equipes, porém 2 pessoas não participariam da gincana, ou seja, restaria 2 pessoas. Explicando matematicamente essa situação, vemos que

$$30 = 4 \cdot 7 + 2.$$

A resposta para a indagação acima é sim, sempre é possível efetuar uma “divisão” em  $\mathbb{Z}$ , nem sempre exata (no sentido de  $a \mid b$ ). Esse fato é confirmado pelo Lema da Divisão Euclidiana, ou Algoritmo da Divisão de Euclides, definido no teorema a seguir.

**Teorema 2.22 (Lema da Divisão Euclidiana):** Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros com  $b \neq 0$ . Então, existem dois, únicos, números inteiros  $q$  e  $r$  tais que

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

*Demonstração.* Precisamos mostrar a existência e a unicidade dos inteiros  $q$  e  $r$ .

**Existência:** Dados  $a, b$  inteiros, queremos mostrar a existência de, também inteiros,  $q$  e  $r$ , tais que  $a = b \cdot q + r$ . Note que, se tais números existirem, teremos  $r = a - bq$ . Começaremos, então, a demonstração considerando o conjunto

$$S = \{a - by; y \in \mathbb{Z} \text{ e } a - by \geq 0\}.$$

Note que o conjunto  $S$  é não vazio, pois, pela Propriedade Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n(-b) > -a$ .

Assim, somando  $a$  nos dois membros da desigualdade temos,

$$a + n(-b) > a + (-a) \Rightarrow a - nb > 0.$$

Logo  $a - nb \in S$ .

Além disso, pela definição do conjunto,  $S$  é limitado inferiormente por 0. Portanto, pelo Princípio da Boa Ordenação (2.17),  $S$  possui um menor elemento  $r$ .

Como  $r \in S$ ,  $r = a - bq$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$ . Para  $r$  ser o número que queremos, precisamos ter  $0 \leq r < |b|$ . Pela construção de  $r$ , temos  $r \geq 0$ . Vamos mostrar que  $r < |b|$ . Para isso, suporemos por absurdo que  $r \geq |b|$ . Então existe  $s \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $r = |b| + s$ . Assim

$$r = a - bq = |b| + s \Rightarrow s = a - bq - |b|.$$

Temos duas possibilidades:

Se  $b < 0$ ,  $|b| = -b$ . Daí,  $s = a - bq + b \Rightarrow s = a - b(q - 1)$ .

Se  $b \geq 0$ ,  $|b| = b$  e  $s = a - bq - b \Rightarrow s = a - b(q + 1)$ .

Em ambos os casos  $s \in S$  e  $s < r$ . Absurdo, pois  $r$  é o menor elemento de  $S$ , portanto,  $r < |b|$ .

**Unicidade:** Suponha que possamos escrever o número inteiro  $a$  de duas formas:

$a = bq + r$  e  $a = bq' + r'$ , sendo  $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$  e  $0 \leq r' < |b|$ .

Como  $r < |b|$ , pela Propriedade  $O_6$ , vista na Subseção (2.3.5), teremos:

$$-|b| < -r.$$

Subtraindo  $r$  na primeira parte da desigualdade  $0 \leq r' < |b|$ , temos

$$-r \leq r' - r.$$

Além disso, como  $r \geq 0$ ,  $r' - r \leq r'$ . Assim,

$$-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|.$$

Logo,

$$|r' - r| < |b|.$$

Por outro lado,

$$bq + r = bq' + r',$$

assim,  $bq - bq' = r' - r \Rightarrow b(q - q') = r' - r$ . Aplicando o módulo nessa igualdade, obtemos:

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se  $q = q'$  e, conseqüentemente,  $r = r'$ .

Portanto, existem únicos inteiros  $q$  e  $r$  tais que  $a = b \cdot q + r$ , com  $0 \leq r < |b|$ . □

Dado o Lema da Divisão de Euclides, podemos dizer que existe uma divisão em  $\mathbb{Z}$ , dita, divisão Euclidiana.

No teorema acima,  $a$  é o *dividendo*,  $b$  é o *divisor*,  $q$  o *quociente* e  $r$  o *resto* da divisão.

Quando  $r = 0$ , dizemos que a divisão é exata e  $b \mid a$ , isto é,  $a$  é divisível por  $b$ . Por exemplo,  $50 = 2 \cdot 25 + 0$ , pois  $2 \mid 50$ , logo,  $50$  é divisível por  $2$ .

Além de ser um valioso instrumento na obra de Euclides, o teorema da Divisão Euclidiana, nos traz grandes resultados, dos quais podemos destacar os exemplos a seguir:

**Exemplo 2.5.1:** Dado um número inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ , qualquer, temos duas, e somente duas, possibilidades:

- i) o resto da divisão euclidiana de  $n$  por  $2$  é  $0$ , isto é, existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $n = 2q$ ; ou
- ii) o resto da divisão euclidiana de  $n$  por  $2$  é  $1$ , ou seja, existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $n = 2q + 1$ .

**Exemplo 2.5.2:** Dado um número inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ , tem-se que, o resto da divisão euclidiana por  $3$  pode ser  $0$ ,  $1$  ou  $2$ . Isto é, todo número inteiro  $n$  pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas:  $3q$ ,  $3q + 1$  ou  $3q + 2$ , sendo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 2.5.3:** Dado um número inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ , tem-se que, o resto da divisão euclidiana por  $4$  pode ser  $0$ ,  $1$ ,  $2$  ou  $3$ . Isto é, todo número inteiro  $n$  pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas:  $4q$ ,  $4q + 1$ ,  $4q + 2$  ou  $4q + 3$ , para  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 2.5.4:** Generalizando os exemplos anteriores, vemos que, dado um número inteiro  $n \in \mathbb{Z}$  qualquer e fixando um número natural  $m \geq 2$ , o resto  $r$  da divisão euclidiana de  $n$  por  $m$ , pertence ao conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, (m - 1)\}$ . Desta forma, qualquer número inteiro  $n$  pode ser escrito de modo único, sob a forma  $n = mq + r$ , para  $q, r \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r < m$ .

Os Exemplos acima são decorrentes do Teorema (2.22). Em especial, no Exemplo (2.5.1) o resto  $r$  da divisão por  $2$  está compreendido no intervalo  $0 \leq r < 2$ , portanto,

ou  $r = 0$ , ou  $r = 1$ . Com esse exemplo, podemos ver que os números inteiros se dividem em duas classes – números pares ou números ímpares – que detalharemos no próximo capítulo.

## Paridade de um número inteiro

---

Enfim, chegamos ao tema principal do nosso trabalho: a paridade. Esse tema está presente no nosso dia a dia e sua definição é bem intuitiva, mesmo assim, vamos deixar claro que a paridade é a qualidade do número inteiro ser par ou ser ímpar. Desde a nossa infância, lidamos com o conceito de paridade em jogos e brincadeiras tradicionais. Frequentemente, o par ou ímpar é usado para definir a ordem dos jogadores em uma partida, por exemplo. Aqui estudaremos sua definição, propriedades e aplicações. Então veremos que, embora pareça bem simples, a paridade é uma grande aliada para resolver problemas matemáticos e situações-problemas que enfrentamos no nosso cotidiano.

**Definição 3.1:** Dizemos que um inteiro  $n$  é *par* se ele puder ser expresso na forma  $2q$ , sendo  $q$  um número inteiro. Por outro lado, dizemos que um inteiro  $n$  é *ímpar*, se for expresso na forma  $2q + 1$ , para algum inteiro  $q$ .

Existem números inteiros que não são pares, nem ímpares? A resposta a essa pergunta é simples, não.

**Teorema 3.2:** Seja  $a \in \mathbb{Z}$ . Então  $a$  é par ou  $a$  é ímpar, não podendo ser os dois ao mesmo tempo. Consequentemente, o conjunto dos números inteiros fica particionado em dois subconjuntos: o dos números pares e o dos números ímpares.

Esse Teorema já foi discutido no Exemplo (2.5.1), no final do capítulo anterior.

**Definição 3.3:** Dizemos que dois inteiros possuem a *mesma paridade* quando ambos forem pares ou ambos forem ímpares.

**Exemplo 3.0.1:** Os números  $12 = 2 \cdot 6$  e  $4 = 2 \cdot 2$  são pares, enquanto  $15 = 2 \cdot 7 + 1$  e  $23 = 2 \cdot 11 + 1$  são ímpares.

É fácil ver, então, que um inteiro é par se, e somente se, é divisível por 2, e é ímpar caso contrário.

Dado um número inteiro  $n$  escrito em sua base decimal como

$$n = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$$

em que os  $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , podemos escrevê-lo como

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0. \quad (3.1)$$

Por exemplo,  $637 = 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7$ .

Note que  $10 = 2 \cdot 5$ , portanto é divisível por 2. Além disso, todas as potências de 10 são divisíveis por 2. Temos então, na Equação (3.1), que  $a_i \cdot 10^i$  é divisível por 2 para todo  $i \in \{0, \dots, k\}$ . Assim

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10$$

é divisível por 2. Logo, o número inteiro  $n = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$  é divisível por 2 se, e somente se,  $a_0$  for divisível por 2. Como  $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , teremos o seguinte resultado.

Um número inteiro é par se, e somente se, o algarismo das unidades for 0, 2, 4, 6 ou 8.

As próximas seções trarão algumas importantes propriedades que nos ajudarão na resolução de diversos problemas matemáticos.

### 3.1 Paridade da soma de inteiros

Estudaremos sobre a paridade da soma de números inteiros. Observe, o leitor, que toda subtração pode ser vista como uma soma. Por exemplo,  $14 - 9 = 14 + (-9)$ .

i) A soma de dois números inteiros pares é par.

De fato, sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$  pares. Assim

$$a = 2m \quad \text{e} \quad b = 2n,$$

com  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Efetuando a soma de  $a$  e  $b$ , temos

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n),$$

com  $m + n \in \mathbb{Z}$ , logo é par.

ii) A soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

Sem perda de generalidade, seja  $a$  um inteiro par e  $b$  um inteiro ímpar. Assim

$$a = 2m \quad \text{e} \quad b = 2n + 1,$$

com  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Temos

$$a + b = 2m + (2n + 1) = (2m + 2n) + 1 = 2(m + n) + 1.$$

Como  $m + n$  é um número inteiro, concluímos que  $a + b$  é um número ímpar.

**iii)** A soma de dois números inteiros ímpares é par.

De fato, tomando  $a$  e  $b$  inteiros ímpares. Teremos

$$a = 2m + 1 \quad \text{e} \quad b = 2n + 1,$$

sendo  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Temos

$$a + b = (2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1),$$

com  $m + n + 1 \in \mathbb{Z}$ . Portanto  $a + b$  é um número par.

**iv)** A soma de qualquer quantidade de inteiros pares é um inteiro par.

Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$  números inteiros pares. Então,

$$n_1 = 2q_1,$$

$$n_2 = 2q_2,$$

$$\vdots$$

$$n_k = 2q_k,$$

com  $q_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i$ . Desta forma, temos a soma

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_k &= 2q_1 + 2q_2 + \dots + 2q_k \\ &= 2(q_1 + q_2 + \dots + q_k), \end{aligned}$$

sendo  $q_1 + \dots + q_k \in \mathbb{Z}$ . Logo a soma de qualquer quantidade de inteiros pares é par.

**v)** A soma de uma quantidade par de inteiros todos ímpares é um inteiro par.

Sejam  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2q}\}$ , com  $q \in \mathbb{Z}$  uma coleção de  $2q$  números ímpares. Como a quantidade de elementos dessa coleção é um número par, podemos agrupá-los de dois em dois, da seguinte forma:

$$\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \dots, \{a_{2q-1}, a_{2q}\}.$$

Observe que, cada subcoleção, contém dois inteiros ímpares. Assim, generalizando cada subcoleção, teremos a  $ij$ -ésima descrita da seguinte forma

$$S_{ij} = \{a_i, a_j\}.$$

Observe que  $a_i + a_j$  é par. Logo, cada subcoleção terá a soma de seus elementos

resultando em um número par.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 = m_1 &\rightarrow \text{é par} \\ a_3 + a_4 = m_2 &\rightarrow \text{é par} \\ &\vdots \\ a_{2q-1} + a_{2q} = m_q &\rightarrow \text{é par} \end{aligned}$$

Somando cada resultados de todas as subcoleções, teremos uma soma de números pares, que é par.

$$m_1 + m_2 + \dots + m_q \text{ é um número par.}$$

Portanto, a soma dos elementos da coleção  $\{n_1, n_2, \dots, n_{2q}\}$  é par, com base no item **(iv)**.

**vi)** A soma de uma quantidade ímpar de inteiros todos ímpares é um inteiro ímpar.

Sejam  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{2q}, a_{2q+1}\}$ , com  $q \in \mathbb{Z}$  uma coleção de  $2q + 1$  números ímpares.

Note que, se tirarmos um elemento da coleção  $S$ , digamos  $a_{2q+1}$ , teremos uma coleção  $S'$  de  $2q$  elementos (quantidade par) de números ímpares.

$$S' = \{a_1, a_2, \dots, a_{2q}\}.$$

Pelo item anterior, a soma dos elementos da coleção  $S'$  é par. Chamemos o valor dessa soma de  $m$ .

Somando  $m$  a  $a_{2q+1}$  (o elemento retirado de  $S$ ), teremos uma soma de um número par com um número ímpar que é ímpar.

**vii)** A soma de uma mistura de inteiros pares e ímpares é um inteiro que tem a mesma paridade que a quantidade de elementos ímpares que foram somadas.

Pelo item **(iv)**, a soma das parcelas pares resultará em um número par, logo o que determinará a paridade do resultado é de fato a quantidade de parcelas ímpares.

Se tivermos uma quantidade par de inteiros ímpares, pelo item **(v)**, o resultado será par. Então, basta somar esse número par com o resultado das parcelas pares, que também é par, e obteremos uma soma par.

Se tivermos uma quantidade ímpar de inteiros ímpares, pelo item **(vi)**, o resultado será ímpar que, ao ser somado com o resultado das parcelas pares, resultará em um número ímpar.

**Exemplo 3.1.1:** Podemos exemplificar as propriedades acima, de forma simples:

**i)** A soma  $2 + 18 + 6 = 26$ , é par ou  $24 + 38 + 4 + 16 = 82$ , é par.

- ii) A soma  $3 + 17 + 5 + 29 + 11 + 31 = 96$ , é par.
- iii) A soma  $25 + 13 + 7 + 39 + 43 = 127$ , é ímpar.
- iv) A soma  $22 + 18 + 15 + 26 + 53 = 134$ , possui 2 parcelas ímpares e o resultado é par. Já a soma  $18 + 17 + 27 + 36 + 35 + 4 = 137$ , possui 3 parcelas ímpares e o resultado é ímpar.

## 3.2 Paridade do produto de números inteiros

Qual será a paridade do produto de números inteiros? Vamos analisar caso a caso.

- i) O produto de dois números inteiros pares é par

Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , números pares. Assim

$$a = 2m \text{ e } b = 2n,$$

com  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Daí,

$$a \cdot b = (2m) \cdot (2n) = 4mn = 2(2mn),$$

com  $2mn \in \mathbb{Z}$ . Logo  $a \cdot b$  é par.

- ii) O produto de um número inteiro par por um número inteiro ímpar é par.

Sejam  $a$  e  $b$  inteiros, tais que, um é par e o outro é ímpar. Sem perda de generalidade, vamos assumir

$$a = 2m \text{ e } b = 2n + 1,$$

com  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Multiplicando  $a$  por  $b$ , teremos

$$a \cdot b = (2m) \cdot (2n + 1) = 4mn + 2m = 2(2mn + m),$$

com  $2mn + m \in \mathbb{Z}$ . Logo  $a \cdot b$  é par.

- iii) O produto de dois números inteiros ímpares é ímpar.

Sejam  $a$  e  $b$  números inteiros ímpares, tais que

$$a = 2m + 1 \text{ e } b = 2n + 1,$$

com  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Temos,

$$a \cdot b = (2m + 1) \cdot (2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1,$$

com  $2mn + m + n \in \mathbb{Z}$ .

Portanto,  $a \cdot b$  é ímpar.

iv) O produto de uma quantidade qualquer de números inteiros é par, se e somente se, pelo menos um deles é par.

Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_k$  números inteiros. Suponha que pelo menos um deles seja par, digamos  $a_1$ . Assim  $a_1 = 2q$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$ .

Dessa forma, se  $m$  é o valor do produto desses números, teremos

$$m = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 2q \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 2(q \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k)$$

em que  $q \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \in \mathbb{Z}$ . Portanto  $m$  é par.

Reciprocamente, sejam  $a_1, a_2, \dots, a_k$  inteiros tais que o produto é um número par.

$$m = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \text{ é par.}$$

Suponha que todos os números  $a_i$  com  $i \in \{1, \dots, k\}$  sejam ímpares.

Multiplicando dois desses números, teremos, por **(iii)**, como resultado um número ímpar. Assim, pela associatividade do produto, concluímos que o produto de qualquer quantidade de inteiros ímpares é ímpar. Absurdo, já que  $m$  é um número par.

Portanto, não podemos ter todos os números ímpares e, pelo menos um deles, deve ser par.

Para representar a multiplicação de um número por ele mesmo, usamos a notação de potência, o que facilita a escrita.

**Definição 3.4:** Seja  $a \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , a  $n$ -ésima potência de  $a$  é o número inteiro definido e denotado por:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Sabemos que a potência é um produto de fatores iguais. Dessa forma, se esse número for ímpar, teremos um produto de fatores ímpares que, como visto anteriormente, tem por resultado um número ímpar. Caso este número seja par, teremos um produto de fatores pares, que resultará em um número par.

### 3.3 Alguns Exemplos Interessantes

No início deste capítulo, afirmamos que não há outra possibilidade para um número inteiro: ele tem que ser par ou ser ímpar. Mas, como esses números se distribuem ao longo do conjunto dos números inteiros? Será que ordenadamente encontramos dois números pares juntos?

Ao analisarmos o subconjunto, ordenado de  $\mathbb{Z}$ ,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

percebemos que não há inteiros de mesma paridade ao lado um do outro. Esse fato será verdadeiro em geral? O exemplo abaixo nos responde.

**Exemplo 3.3.1:** Números inteiros consecutivos têm paridade oposta.

De fato, seja  $a$  um número inteiro, então  $a + 1$  é o seu sucessor. Temos duas possibilidades:

Se  $a$  é par,  $a = 2k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$a + 1 = 2k + 1$$

é, portanto, ímpar.

Se  $a$  é ímpar, então  $a = 2s + 1$ , para algum  $s \in \mathbb{Z}$  e

$$a + 1 = (2s + 1) + 1 = 2s + 2 = 2(s + 1)$$

é, portanto par.

Até este momento, não discutimos sobre a paridade do número zero. Podemos adiantar que 0 é um número par. Mas isso pode ser um pouco confuso, principalmente para os estudantes, no primeiro contato com este conceito. Então, o exemplo abaixo esclarece melhor esse fato.

**Exemplo 3.3.2:** O zero é um número par.

Essa afirmação é verdadeira e é feita devido às seguintes razões:

- O zero é um múltiplo de 2, isto é, zero é da forma  $2n$ . Mais especificamente,  $0 = 2 \cdot 0$ ;
- O zero é cercado por números ímpares. De fato, vimos na Subseção (2.3.5) a forma ordenada do conjunto  $\mathbb{Z}$  e constatamos que os números  $-1, 0$  e  $1$  são consecutivos. Por definição, os números  $-1$  e  $1$  são ímpares e pelo exemplo anterior,  $0$  deve ser par.
- As regras aritméticas de paridade se encaixam para que  $0$  seja par. Por exemplo,  $0 + 3 = 3$  é ímpar e  $0 + 8 = 8$  é par. Pela paridade da soma é fácil perceber que  $0$  é par.

Assim temos várias evidências de que zero é realmente um número par.

Explorando ainda mais o conceito de paridade, destacamos aqui alguns exemplos que são de grande valia na compreensão de numerosos problemas envolvendo paridade.

**Exemplo 3.3.3:** Todo número inteiro e seu quadrado têm a mesma paridade.

Seja  $b$  um número inteiro.

Se  $b$  é par, então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = 2n$ . Assim,  $b^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$ , com  $2n^2 \in \mathbb{Z}$ . Logo  $b^2$  é par.

Se  $b$  é ímpar, então existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = 2m + 1$  e  $b^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ , com  $2m^2 + 2m \in \mathbb{Z}$ . Portanto  $b^2$  é ímpar.

**Exemplo 3.3.4:** Todo número inteiro e seu cubo têm a mesma paridade.

Tal exemplo pode ser verificado de forma semelhante ao exemplo anterior. Mas também é decorrência direta da paridade da potência de um número inteiro, vista na Subseção (3.2). De fato, esta propriedade nos diz que a potência de um número inteiro é par se, e somente se, esse número é par, assim dado  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a^3$  será par se, e somente se,  $a$  for par. Consequentemente, se  $a$  é ímpar, então  $a^3$  também é ímpar.

**Exemplo 3.3.5:** Todo inteiro ímpar é da forma  $4k + 1$  ou  $4k + 3$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Pelo Exemplo (2.5.3), todo número inteiro pode ser escrito de uma, e apenas uma, das seguintes formas:  $4k$ ,  $4k + 1$ ,  $4k + 2$  ou  $4k + 3$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Note que,

- $4k = 2(2k)$  é par;
- $4k + 1 = 2(2k) + 1$  é ímpar;
- $4k + 2 = 2(2k + 1)$  é par;
- $4k + 3 = 4k + 2 + 1 = 2(2k + 1) + 1$  é ímpar;

Donde segue o resultado.

**Exemplo 3.3.6:** O quadrado de qualquer inteiro ímpar é da forma  $8s + 1$ , com  $s \in \mathbb{Z}$ .

Pelo exemplo anterior, se um número inteiro é ímpar, então ele é da forma  $4k + 1$  ou  $4k + 3$ . Assim,

$$(4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8s + 1, \text{ com } s = 2k^2 + k, \text{ e}$$

$$(4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8s + 1, \text{ com } s = 2k^2 + 3k + 1.$$

**Exemplo 3.3.7:** Prove que, para quaisquer números inteiros  $a$  e  $b$ , se  $a$  for ímpar então  $b$  e  $a \cdot b$  têm a mesma paridade.

De fato, sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $a$  ímpar. Pelas propriedades de paridade do produto vemos que:

Se  $b$  é ímpar, então  $a \cdot b$  é um produto de dois inteiros ímpares, logo é ímpar.

Se  $b$  é par, então  $a \cdot b$  é um produto de um inteiro ímpar por um inteiro par, logo é par.

Na Matemática, encontramos diversos problemas envolvendo a paridade de números inteiros. Eles nos ajudam a entender melhor sobre a divisibilidade em  $\mathbb{Z}$  e auxiliam na aquisição da habilidade de flexibilidade numérica. Apresentamos abaixo, outros exemplos, um pouco mais contextualizados do que os anteriores, que o professor de

Educação Básica pode usar para fixar os conceitos trabalhados. No próximo capítulo, trabalharemos com outros exemplos, mais avançados.

**Exemplo 3.3.8:** É possível trocar uma nota de 50 reais em 9 notas de 1 ou 5 reais?

Note que, ao somarmos 9 notas de 1 ou 5 reais, obteremos um número ímpar, já que estamos somando uma quantidade ímpar de números ímpares.

Como 50 é um número par, não é possível realizar essa troca.

**Exemplo 3.3.9:** Se o produto de 2022 números inteiros é 1, então sua soma não pode ser 0.

Como os fatores são todos inteiros, cada um deles deve ser 1 ou  $-1$ , pois o produto é igual a 1. Agora, a quantidade de fatores iguais a  $-1$  não pode ser ímpar, senão o produto seria igual a  $-1$ , e não 1. Desse modo, as quantidades de fatores  $-1$  e 1 são ambas pares, pois a soma dessas quantidades é 2022 e a quantidade de fatores  $-1$ , como vimos, é par. Por outro lado, se a soma de todos esses fatores fosse 0, as quantidades de fatores  $-1$  e 1 deveriam ser iguais. Mas isso não pode acontecer, pois  $2022 : 2 = 1011$ , que é ímpar.

Os próximos exemplos foram retirados do site da Obmep, [13].

**Exemplo 3.3.10:** Em um quartel, existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

A resposta é não. Escolha um soldado, o chamaremos de  $x$ . Em cada noite em que trabalha, ele está em companhia de dois outros. De 100 soldados, restarão 99 para trabalhar com  $x$ .

$$99 = 2 \cdot 48 + 1, \text{ é um número ímpar.}$$

Note que, por ser ímpar, o soldado  $x$  trabalhará 48 vezes com pares distintos de soldados. Mas sobrará um, digamos  $y$ . Assim, quando  $x$  for trabalhar com  $y$ , deverá trabalhar com alguém que já trabalhara antes.

**Exemplo 3.3.11:** Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 10.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

É possível colocar os sinais de “+” ou “−” de modo que o valor da expressão resultante seja zero?

A propriedade do simétrico aditivo nos garante que  $m + (-m) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$ . Se fosse possível obter a soma igual zero, deveríamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma. Então colocaríamos sinais negativos nos números de um dos grupos e sinais positivos nos números do outro. Porém,  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ . Como este número é ímpar, não é possível separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma. Desta forma, o problema é impossível.

Observe que, alterando o intervalo numérico, o problema pode se tornar possível. Por exemplo, tomando os números naturais de 1 a 8, temos  $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$ . Sendo assim, é possível separá-los em dois grupos de soma igual a 18, como segue:

$$1 + 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 = 0.$$

# Estudando a Paridade de Números Inteiros na Educação Básica

---

Neste capítulo, abordaremos sobre o uso do tema Paridade de Números Inteiros na Educação Básica. Traremos alguns problemas envolvendo a temática. São problemas, diferentes dos exemplos apresentados no capítulo anterior, que auxiliam os professores de educação básica, no processo de ensino-aprendizagem. Como lembrado por Muller [12], “fazer matemática é resolver problemas”. Utilizando a metodologia Resolução de Problemas, o professor tem a oportunidade de ofertar um ensino diferenciado, ajudando o aluno a desenvolver a flexibilidade numérica.

Está dividido em três seções, sendo a primeira destinada à importância da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, com base na BNCC, a segunda seção traz diversos problemas que abrangem a paridade de números inteiros e a terceira, apresenta uma proposta pedagógica que poderá contribuir para a elaboração de uma aula diferenciada e atrativa na educação básica.

## 4.1 Considerações Pedagógicas

De acordo com a BNCC, Base Nacional Comum Curricular, [2], diversas habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”, como podemos observar na habilidade (EF07MA04) “Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros”, o que nos leva a entender que o processo de aprendizagem vai muito além do que simplesmente resolver meros exercícios, geralmente aplicados ao final de cada aula para “avaliar” se os estudantes aprenderam, ou não, o que lhes foi ensinado. Desta forma, o professor deve abordar não apenas a resolução do problema, mas também, estimular os alunos a refletirem e questionarem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, [3], nos dizem que a resolução de problemas deve ser uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Assim, os problemas podem ser um ponto de partida, em que o aluno procura resolvê-los utilizando estratégias já conhecidas ou desenvolvendo outras, construindo assim, uma

ligação entre um conhecimento adquirido e o novo que lhe é apresentado.

Mas, o que é um problema? Maior, [10], nos diz que problema é toda atividade que envolve investigação.

Considera-se como um problema toda situação que pode ser problematizada, tais como: jogos, em que se busca uma estratégia para vencer, qualquer tipo de atividade planejada, levantamento e seleção de informações, qualquer atividade que requeira uma atitude investigativa. (Maior [10], 2009, página 10)

A resolução de problemas é uma valiosa tendência de ensino de Matemática pois, permite que o aluno desenvolva seu raciocínio para encontrar a solução, elaborando estratégias a partir de seus conhecimentos prévios e ainda o leva a questionar se suas estratégias são válidas. Além disso, promove a interação entre aluno-professor e aluno-aluno.

Uma outra vantagem da resolução de problemas é a aquisição da flexibilidade numérica. De acordo com Boaler, no artigo Fluência sem Medo, [1], uma pessoa com senso numérico consegue utilizar os números com flexibilidade pois, em vez de apenas utilizar técnicas de memorização, ela explora uma profunda compreensão dos números e das maneiras como eles se relacionam entre si. O senso numérico, segundo Corso e Dornelas, [4], caracteriza uma forma de interagir com os números, explorando seus mais diversos usos, a fim de possibilitar que o enfrente as situações diárias que, desenvolvendo estratégias eficientes para lidar com problemas numéricos.

Pensando nisso, apresentaremos aqui uma série de problemas visando o desenvolvimento crítico e uma maior maturidade nos alunos para a utilização da paridade como resolução de problemas.

## 4.2 Problemas

Os problemas abaixo foram retirados dos livros Círculos Matemático, [6], Aritmética, [7], do artigo Paridade, [18] e do site Clubes de Matemática da OBMEP [13]. Estes problemas, com algumas adaptações, podem ser usados para resolvermos outros problemas envolvendo paridade. É, então, importante que guardemos tanto a essência de seus enunciados como os raciocínios envolvidos.

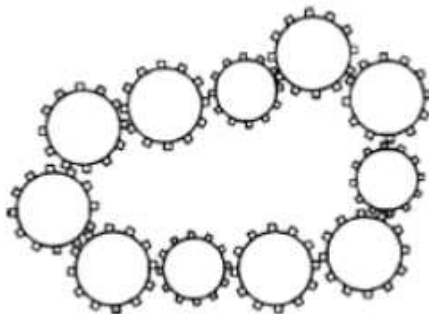
**Problema 4.2.1:** Kátia e seus amigos estão em um círculo. Os dois vizinhos de cada uma das crianças são do mesmo sexo. Se o círculo contém cinco meninos, quantas meninas estão nesse círculo?

**Solução:** Vamos fixar o vizinho à direita de Kátia. Se este fosse uma menina, obrigatoriamente, todas as crianças do círculo seriam meninas, contrariando o problema.

Logo o vizinho da direita de Kátia é um menino e, para obedecer a regra de que os dois vizinhos de cada uma das crianças são do mesmo sexo, a próxima criança é uma menina. Portanto, saímos de um menino (o vizinho à direita de Kátia) e vamos alternando de sexo, até chegarmos ao último menino (vizinho à esquerda de Kátia). Consequentemente, o número de meninas é igual ao número de meninos, isto é, há cinco meninas no círculo.

**Problema 4.2.2:** Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como ilustrado na figura abaixo. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?

**Figura 4.1:** Engrenagens



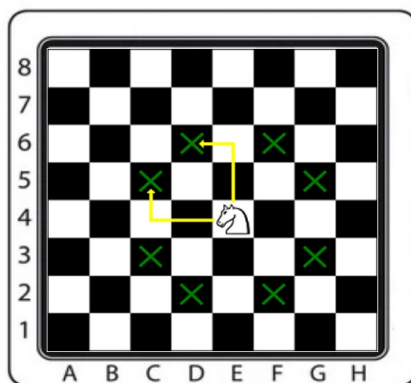
Fonte: Círculos Matemáticos, pág 5. [6]

**Solução:** Suponha que a primeira engrenagem gira em sentido horário. Então a segunda tem que girar no sentido contrário (anti-horário), a terceira no sentido horário novamente, a quarta no sentido anti-horário, e assim por diante. Percebe-se que as engrenagens “ímpares” têm que girar no sentido horário, enquanto as engrenagens “pares” têm que girar em sentido anti-horário. Mas então, a primeira e a décima primeira engrenagens têm que girar no mesmo sentido. Absurdo, pois duas engrenagens consecutivas giram em sentidos opostos. Portanto, não é possível que todas girem simultaneamente.

**Problema 4.2.3:** É possível um cavalo começar na posição A1 de um tabuleiro de xadrez e terminar em H8 visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez ao longo do caminho?

Antes de resolvermos esse problema, é importante lembrar que, no jogo de xadrez, o cavalo se movimenta em “L”, como mostra a Figura (4.2):

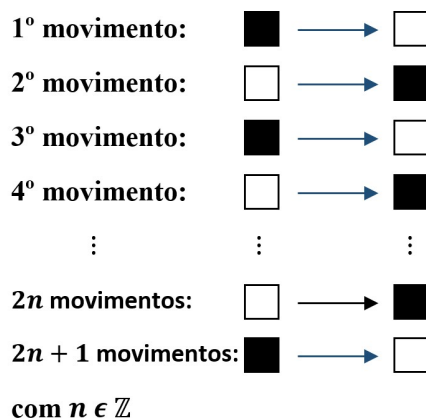
**Figura 4.2:** Possíveis movimentos do cavalo



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP, [14]

**Solução:** A cada movimento o cavalo vai para uma casa de cor oposta à que ele estava. Assim, partindo de A1 (casa escura) temos o seguinte esquema (Figura (4.3)):

**Figura 4.3:** Esquema dos movimentos do cavalo



Fonte: autoria própria

Para que o cavalo visite todas as 63 casas restantes, ele deverá fazer 63 movimentos assim, o último movimento (ímpar) tem que levá-lo a uma casa de cor clara (oposta à cor de onde ele começou). Porém, as casas A1 e H8 possuem a mesma cor (escura), portanto é impossível sair de A1 e terminar em H8 passando por todas as outras casas uma única vez.

**Problema 4.2.4:** Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte forma, Figura(4.4):

**Figura 4.4:** Jogo dos botões luminosos



Fonte: Revista Eureka! Edição Especial, pág 16, [18]

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus 8 vizinhos, porém ele não.

Exemplos:

Apertando 1, trocam de cor 1, 2, 4 e 5.

Apertando 2, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Apertando 5, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

**Solução:** Observe que apertando um botão do vértice do retângulo, trocam de cor 4 botões. Apertando um botão do meio de um lado, trocam de cor 6 botões e apertando um botão do centro trocam de cor 8 botões. Assim, cada vez que apertamos um botão trocam de cor um número par de botões. Como existem 9 botões, o problema não é possível.

**Problema 4.2.5:** Existem números inteiros  $a$  e  $b$  que satisfazem a igualdade

$$a \cdot b \cdot (a - b) = 8507?$$

**Solução:** Para resolver esse problema, vamos analisar as quatro possibilidades de paridade para  $a$  e  $b$ .

i) Se  $a$  e  $b$  são pares:

$a \cdot b$  é par,  $a - b$  é par e, portanto,  $a \cdot b \cdot (a - b)$  também é par.

ii) Se  $a$  é par e  $b$  é ímpar:

$a \cdot b$  é par,  $a - b$  é ímpar e  $a \cdot b \cdot (a - b)$  é par.

iii) Se  $a$  é ímpar e  $b$  é par:

$a \cdot b$  é par,  $a - b$  é ímpar e  $a \cdot b \cdot (a - b)$  é par.

iv) Se  $a$  e  $b$  são ímpares:

$a \cdot b$  é ímpar,  $a - b$  é par e  $a \cdot b \cdot (a - b)$  é par.

Logo, nas quatro possibilidades, o resultado de  $a \cdot b \cdot (a - b)$  é um número par, portanto não pode ser igual a 8507, que é um número ímpar.

E assim constatamos que, no geral o problema não tem solução para  $a \cdot b \cdot (a - b) = 2k + 1$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Problema 4.2.6:** Pedro comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192, em ordem crescente. Vitor arrancou aleatoriamente 25 folhas do caderno e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

**Solução:** A resposta é não. De fato, as páginas foram numeradas em ordem crescente, ou seja, com números naturais consecutivos. Mas,

- o Exemplo (3.3.1), garante que números naturais consecutivos têm paridade oposta;
- pela paridade da soma, observamos que a soma de dois números de paridade oposta é ímpar;
- a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é um número ímpar.

Assim, a soma dos dois números de cada página é ímpar e a soma dos 25 números ímpares também vai ser ímpar. Portanto, não pode ser 1990, que é par.

**Problema 4.2.7:** Um polígono convexo com 13 lados pode ser dividido em paralelogramos?

**Solução:** Um polígono convexo é aquele em que, marcando dois pontos no seu interior, a ligação entre esses dois pontos sempre será totalmente interior ao polígono, independentemente do local escolhido para os dois pontos, enquanto um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Supondo que essa divisão seja possível, vamos escolher um dos 13 lados do polígono e considerar o paralelogramo que o contém. Sendo assim, o lado do paralelogramo, oposto ao lado inicialmente escolhido, é também lado de um segundo paralelogramo. Este último também possui um outro lado paralelo ao primeiro e assim continuando essa cadeia de paralelogramos sucessivamente, chegaríamos a outro lado do polígono, que seria paralelo ao primeiro lado, de onde partimos. Sabe-se que um polígono convexo não pode conter três lados simultaneamente paralelos, portanto, este último lado alcançado não é paralelo a nenhum outro lado do polígono convexo (além do primeiro). Logo, para que a divisão seja possível, o polígono convexo de 13 lados deve conter pares de lados paralelos, mas como 13 é ímpar, essa divisão não é possível.

**Problema 4.2.8:** A soma dos quadrados de dois inteiros ímpares nunca pode ser um quadrado.

**Solução:** O quadrado de um número inteiro  $a$  é par se, e somente se,  $a$  é par. Assim, observe que, esse quadrado será divisível por 4. De fato, seja  $p = 2k$ , um número inteiro par, temos

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

que é divisível por 4.

Considere agora  $a, b$  inteiros ímpares, tais que  $a = 2m + 1$  e  $b = 2n + 1$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Daí, cada potência  $a^2$  e  $b^2$  é ímpar, portanto,  $a^2 + b^2$  é par. Pela observação acima, se  $a^2 + b^2$  é par e  $a^2 + b^2 = c^2$ , então teremos  $c$  par e  $c^2$  um múltiplo de 4. Mais ainda,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 \\ &= (4m^2 + 4m + 1) + (4n^2 + 4n + 1) \\ &= (4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n) + 1 + 1 \\ &= 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2, \end{aligned}$$

não é divisível por 4, logo não é um quadrado.

**Problema 4.2.9:** Se três inteiros verificam  $a^2 = b^2 + c^2$ , então  $b$  ou  $c$  é par e o outro é ímpar, e pelo menos um dentre  $a, b$  e  $c$  é um múltiplo de 5.

**Solução:** Pelo exemplo anterior,  $b^2$  e  $c^2$  não podem ser ambos ímpares. Logo o número  $b$  ou  $c$  tem que ser par. Agora precisamos verificar que todo quadrado é da forma  $5k$  ou  $5k \pm 1$ . De fato, o Exemplo (2.5.4) nos diz que qualquer número inteiro

$n$  pode ser escrito de modo único, sob uma das seguintes formas:  $5l$ ,  $5l + 1$ ,  $5l + 2$ ,  $5l + 3$  ou  $5l + 4$ . Daí, analisando cada caso:

$$n = 5l \Rightarrow n^2 = 25l^2 = 5(5l^2) = 5k \text{ para } k = 5l^2;$$

$$n = 5l + 1 \Rightarrow n^2 = 25l^2 + 10l + 1 = 5(5l^2 + 2l) + 1 = 5k + 1, \text{ para } k = 5l^2 + 2l;$$

$$n = 5l + 2 \Rightarrow n^2 = 25l^2 + 20l + 4 = 5(5l^2 + 4l + 1) - 1 = 5k - 1, \text{ para } k = 5l^2 + 4l + 1;$$

$$n = 5l + 3 \Rightarrow n^2 = 25l^2 + 30l + 9 = 5(5l^2 + 6l + 2) - 1 = 5k - 1, \text{ para } k = 5l^2 + 6l + 2;$$

$$n = 5l + 4 \Rightarrow n^2 = 25l^2 + 40l + 16 = 5(5l^2 + 8l + 3) + 1 = 5k + 1, \text{ para } k = 5l^2 + 8l + 3.$$

Com isso, se  $b$  e  $c$  não são múltiplos de 5, então  $b^2 = 5k \pm 1$  e  $c^2 = 5k \pm 1$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Daí,  $a^2 = b^2 + c^2$  é da forma  $5m$  ou  $5m \pm 2$ , mas este último não pode acontecer. Logo  $a^2$  é da forma  $5m$  e, portanto,  $a$  é um múltiplo de 5.

O próximo problema é consequência de um resultado que traremos como um lema e descreveremos abaixo.

**Lema 4.1:** Se  $a \neq b$  então, para todo  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

*Demonstração.* Mostraremos por indução sobre  $n$ .

i) A igualdade vale para  $n = 2$ . Pois,  $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} = a^{2-1} + a^{2-2}b$ .

ii) Suponha válido para algum natural  $n$  e verifiquemos para  $n + 1$ .

Queremos mostrar que  $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n$ .

Note que

$$\begin{aligned} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} &= \frac{aa^n - bb^n}{a - b} \\ &= \frac{aa^n - ba^n + ba^n - bb^n}{a - b} \\ &= \frac{a^n(a - b)}{a - b} + \frac{b(a^n - b^n)}{a - b} \\ &= a^n + b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n. \end{aligned}$$

Logo, vale para todo  $n \geq 2$ .

□

**Problema 4.2.10:** Dados  $a, n \in \mathbb{N}$ , com  $a > 2$  e ímpar, vamos determinar a paridade de  $\frac{a^n - 1}{2}$ .

**Solução:** Como  $a$  é ímpar, seu antecessor  $a^n - 1$  é par, logo é divisível por 2. Ou seja,  $\frac{a^n - 1}{2}$  é um número natural e assim, podemos determinar sua paridade.

Pelo Lema (4.1), temos que,

$$\frac{a^n - 1}{2} = \frac{(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)}{2}.$$

Como  $a$  é ímpar,  $a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1$  e  $n$  têm a mesma paridade. De fato, pelas propriedades da paridade de potência soma de inteiros, vemos que  $a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1$  possui  $n$  parcelas de números ímpares, portanto, o resultado será par se  $n$  for par e será ímpar se  $n$  for ímpar.

Vamos então, analisar a paridade de  $\frac{a - 1}{2}$ . Pelo Exemplo (3.3.5),  $a$  é da forma  $4k + 1$  ou  $4k + 3$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Se  $a = 4k + 1$ , então  $\frac{a - 1}{2} = \frac{4k + 1 - 1}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$ , é par.

Se  $a = 4k + 3$ , então  $\frac{a - 1}{2} = \frac{4k + 3 - 1}{2} = \frac{4k + 2}{2} = 2k + 1$ , é ímpar.

E assim concluímos que,  $\frac{a^n - 1}{2}$  é par se, e somente se,  $n$  é par ou se  $a$  é da forma  $4k + 1$ .

Podemos observar que a paridade é bastante utilizada para mostrar que um problema é impossível, ou que não existem números que satisfaçam tal sentença matemática. A ideia é despertar no aluno esse instinto para que, ao se deparar com este tipo de problema, possa recorrer ao uso da paridade para resolvê-lo. Percebe-se que a paridade leva direto ao ponto e mostra que não adianta fazer infinitas tentativas, pois o resultado de fato é impossível. Com isso, é bom destacar que, ao utilizar a paridade na resolução de problemas, o aluno estará economizando tempo e apresentando uma resolução simples e eficaz. Mais problemas como esses podem ser encontrados nas referências bibliográficas: Fomim (2012) [6], Wagner (2007) [18] e OBMEP [13]. A seguir, ofereceremos algumas sugestões para o uso desses problemas na sala de aula, trabalhando com alunos da educação básica.

### 4.3 Propostas Pedagógicas: Aplicação na sala de aula

Nesta seção, apresentaremos algumas sugestões sobre a aplicabilidade da paridade na sala de aula. Na educação básica, os números inteiros são introduzidos no 7º ano do Ensino Fundamental, por isso, as atividades estão, a princípio, destinadas a esse ano escolar. No entanto, devido à sua simplicidade, poderá ser aplicada também nas outras turmas do Ensino Fundamental e até mesmo no Ensino Médio.

**1. Etapa de ensino/ano escolar**

Ensino Fundamental / 7<sup>o</sup> ano.

**2. Área**

Matemática.

**3. Unidade Temática (BNCC)**

Números.

**4. Habilidades (BNCC)**

(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as ideias de múltiplos, divisores e divisibilidade.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

**5. Objetivos/Expectativas de Aprendizagem**

- Compreender a diferença entre números pares e ímpares.
- Realizar operações simples envolvendo números pares e ímpares.
- Aplicar o conceito e propriedades de números pares e ímpares na resolução de problemas.
- Aplicar o conceito de números pares e ímpares em situações do cotidiano.

**6. Duração das Atividades**

4 aulas de 50 min cada.

**7. Recursos didáticos**

Quadro branco, pincéis, jogos.

**8. Estratégias de ensino**

A resolução de problemas será utilizada como metodologia de ensino. Além das definições e propriedades, serão apresentados diversos problemas envolvendo paridade, concluindo com a aplicação de jogos para fixar os conhecimentos. Aulas expositivas dialogadas e a mediação da professora servirão de estratégias para explicar os conteúdos.

**9. Avaliação**

Avaliação contínua, durante a aplicação e resolução dos problemas e na dinâmica do jogo, visando identificar, ao longo do processo de ensino, se as estratégias e os recursos usados para ensinar alcançaram resultados satisfatórios.

**10. Desenvolvimento e descrição das atividades**

Aqui daremos uma sugestão de como dividir o tema nas quatro aulas propostas. O professor leitor poderá fazer as adaptações que julgar necessário.

### **AULA 1:**

A primeira aula deve ser destinada à definição do conceito de Paridade, suas propriedades de soma, produto e potência, como foi apresentado no Capítulo (3).

É interessante falar sobre a paridade do número 0, pois tal fato gera muitas dúvidas aos alunos, mas sua explicação é bem simples (Exemplo 3.3.2).

O professor ainda poderá discutir algumas curiosidades da paridade. Tais curiosidades poderão ser apresentadas com os exemplos expostos no Capítulo (3). Sendo que,

- Se a turma detém de pouco conhecimento matemático, como o 6<sup>o</sup> ano por exemplo, poderão ser discutidos os exemplos: (3.3.1), (3.3.5) e (3.3.7).
- Nas turmas de 7<sup>o</sup> ano, poderão ser apresentados os exemplos: (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) e (3.3.7).
- Nas turmas mais maduras, como 8<sup>o</sup> e 9<sup>o</sup> ano, além dos exemplos já mencionados acima, o exemplo (3.3.6) também poderá ser discutido.

É importante deixar o estudante formular sua própria resposta antes de apresentar a resolução a ele. O objetivo é o desenvolvimento do pensamento crítico, preparando-o para os problemas que serão apresentados na próxima aula.

### **AULAS 2 e 3:**

Na segunda e terceira aulas, serão apresentados os problemas que envolvem paridade, desde os mais simples até os mais elaborados, dependendo da realidade da turma.

- Nas turmas de 6<sup>o</sup> e 7<sup>o</sup> ano, sugerimos os problemas: (4.2.1), (4.2.4) e (4.2.2).
- Nas turmas de 8<sup>o</sup> e 9<sup>o</sup> ano, os problemas (4.2.3), (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) e (4.2.8) se apresentarão de forma interessante.
- Já os problemas (4.2.9) e (4.2.10) são um pouco mais complexos e poderão ser trabalhados no Ensino Médio.

A exemplo das curiosidades vistas na Aula 1, esses problemas também deverão instigar o aluno a pensar, desenvolver o raciocínio lógico e verificar um certo padrão nas resoluções para aplicar em outros problemas semelhantes. Assim, é interessante deixar que o aluno tente resolver por si só, ou até mesmo em grupos, mas sem a intervenção do professor.

### **AULA 4:**

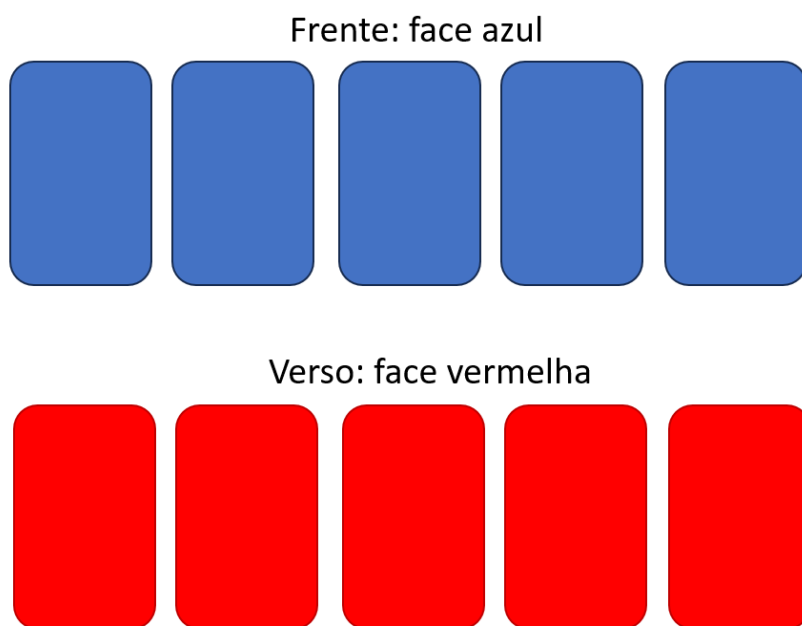
Na quarta e última aula, será feito o encerramento do tema com a aplicação de jogos cujas estratégias podem ser elaboradas através da paridade.

Deixamos abaixo 3 opções de jogos, para que o professor escolha qual o mais indicado para sua turma.

### JOGO 1: Jogo das Faces

Este jogo é composto de 5 cartas de duas faces de cores distintas, como mostra a Figura (4.5). Tais cartas podem ser confeccionadas pelo professor, utilizando cartolina ou papel cartão.

**Figura 4.5:** Cartas do jogo

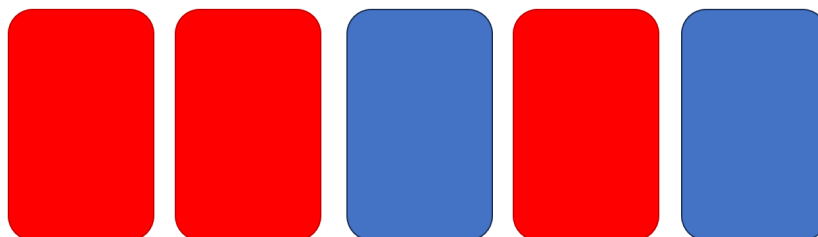


Fonte: autoria própria

#### Regras do jogo:

- Distribua 5 cartas para cada aluno;
- Os alunos deverão colocar as 5 cartas sobre a mesa de modo que duas com a face azul para cima e três fiquem com a face vermelha para cima. (Figura (4.6)).

**Figura 4.6:** Configuração inicial do jogo



Fonte: autoria própria

- O professor vira de costas e pede para os alunos virarem uma carta qualquer.
- Ainda de costas para a turma, o professor continua pedindo que os alunos virem uma carta, uma por vez, até que completem 8 viradas.
- Após a 8<sup>a</sup> virada, o aluno esconderá uma carta, observando qual face da carta escolhida estava voltada para cima.
- Então, olhando as cartas restantes, o professor “adivinha” qual a face superior da carta escondida, de cada aluno.

**JUSTIFICATIVA:** No início do jogo há 2 faces azuis e 3 faces vermelhas, ou seja, uma quantidade par de faces azuis e ímpar de faces vermelhas. Ao fazer a primeira virada, pode-se obter 3 azuis e 2 vermelhas ou 1 azul e 4 vermelhas. Em ambos os casos, haverá uma quantidade par de cartas vermelhas e ímpar de azuis. Na segunda virada, para o 1<sup>o</sup> caso, podemos obter 2 azuis e 3 vermelhas ou 4 azuis e 1 vermelha, enquanto para o 2<sup>o</sup> caso pode-se obter, 2 azuis e 3 vermelhas ou 0 azuis e 5 vermelhas. Logo, teremos uma quantia par de faces azuis e ímpar de faces vermelhas. É possível observar que a paridade do número de cada face se inverteu em relação à jogada anterior. Prosseguindo com esse raciocínio, temos o seguinte esquema (Tabela (4.1)):

**Tabela 4.1:** Paridade do número de cada face ao final de cada jogada

Jogada	Paridade das faces	
	Azuis	Vermelhas
Início	par	ímpar
1 <sup>a</sup> virada	ímpar	par
2 <sup>a</sup> virada	par	ímpar
3 <sup>a</sup> virada	ímpar	par
4 <sup>a</sup> virada	par	ímpar
5 <sup>a</sup> virada	ímpar	par
6 <sup>a</sup> virada	par	ímpar
7 <sup>a</sup> virada	ímpar	par
8 <sup>a</sup> virada	par	ímpar

Note que, em qualquer entrada par, voltamos à configuração inicial do jogo, com uma quantidade par de faces azuis e ímpar de faces vermelhas. Assim, após a 8<sup>o</sup> virada, basta que o professor observe a paridade das faces expostas. A cor cuja paridade está diferente da situação inicial, é a cor escondida. Veja:

- se houver uma quantidade ímpar de faces azuis, significa que o aluno escondeu uma carta azul;
- se houver uma quantidade par de faces vermelhas é porque o aluno escondeu uma carta vermelha.

Observe que esta estratégia de jogo pode ser generalizada para uma quantidade qualquer de cartas, para qualquer configuração inicial da partida e para uma quantidade qualquer de jogadas. Para entender a adivinhação é suficiente perceber que

a cada virada de uma carta, há uma inversão na paridade das quantidade de faces azuis e de faces vermelhas. Além disso, após um número par de viradas, estamos na mesma paridade do início do jogo. E após um número ímpar de viradas a paridade é invertida em relação àquela do início do jogo.

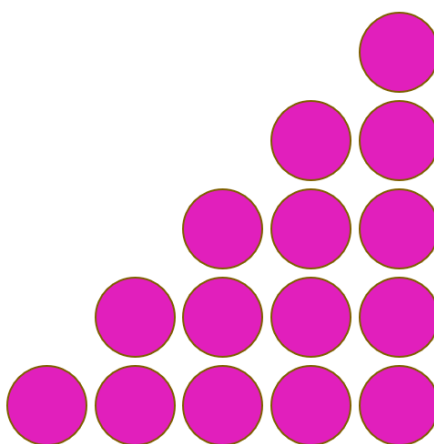
### JOGO 2: Jogo das Torres

O jogo é realizado em duplas, mas pode ser também dividido em equipes. Este jogo é também conhecido como Jogo do NIM, e consiste em certo número de peças iguais, distribuídas em torres. Aqui utilizaremos 15 peças em 5 torres. As peças podem ser: palitos, moedas, grãos, botões, dentre outros.

#### Regras do Jogo

- Divida a turma em duplas;
- Distribua 15 peças para cada dupla, solicitando-os que as distribuam em 5 grupos (torres) contendo 1, 2, 3, 4 e 5 peças, respectivamente. (Figura (4.7))

**Figura 4.7:** Jogo das Torres: distribuição inicial das peças



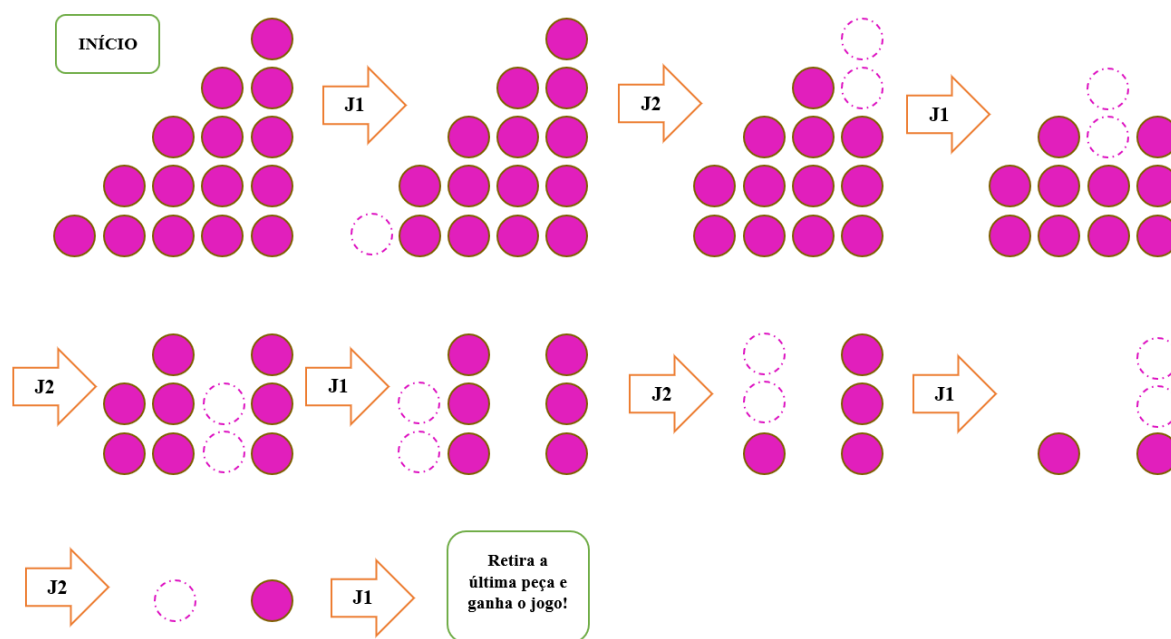
Fonte: autoria própria

- Cada jogador deve retirar uma quantidade de peças por vez, sendo que: tem que retirar no mínimo 1 peça e no máximo o grupo todo, não podendo retirar peças de duas torres diferentes na mesma jogada;
- O jogo acaba quando não houver mais peças disponíveis;
- O jogador que faz a última jogada (retira a última peça) ganha.

**ESTRATÉGIA:** O jogador vencedor deve sempre deixar uma quantidade par de peças ao final de sua jogada, visando deixar também uma quantidade par de torres para seu oponente. Fazendo isso, em algum momento o seu oponente vai mudar a

paridade da quantidade de peças, restando 1 peça ou 1 torre (quantidade ímpar) para o jogador vencedor, que a retira e ganha o jogo. Além disso, ao final da partida, seu oponente vai “receber” 0 peças (quantidade par). As Figuras (4.8) e (4.9) ilustram duas partidas, em que o vencedor utiliza a paridade como estratégia.

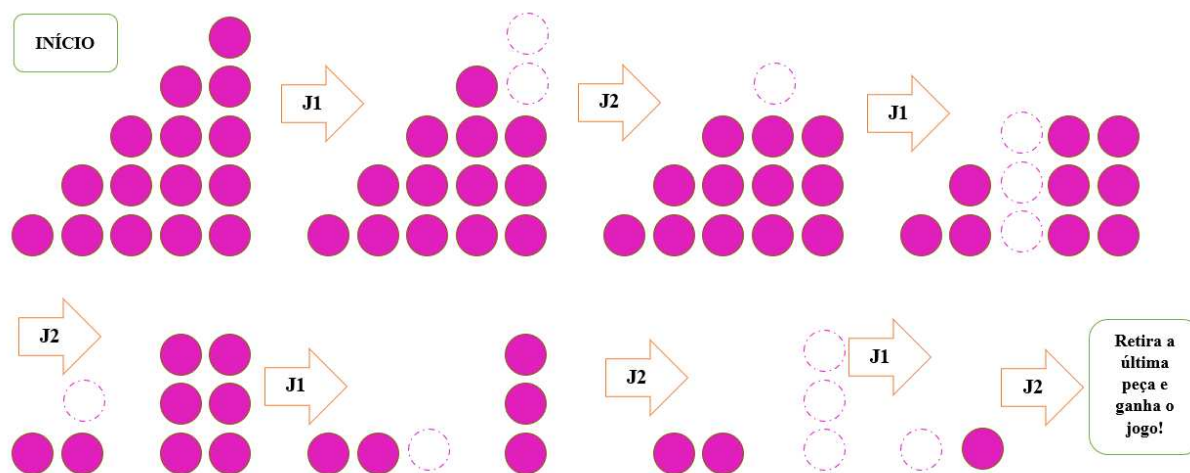
**Figura 4.8:** O primeiro jogador vence



J1= Jogador 1; J2= jogador 2.

Fonte: autoria própria

**Figura 4.9:** O segundo jogador vence



J1= Jogador 1; J2= jogador 2.

Fonte: autoria própria

### JOGO 3: Par ou ímpar?

Este jogo é bem elementar, destinado a trabalhar o conceito de ser par e ser ímpar. Portanto, pode ser aplicado no 6º ano do Ensino Fundamental, ou em turmas cujos alunos apresentem alguma defasagem. É ideal também para alunos com necessidades educativas especiais.

É um jogo bem simples que pode ser realizado com diversos materiais presentes no nosso cotidiano, como: tampinhas de garrafa, grãos de feijão, palitos, dentre outros.

O jogo pode ser individual ou em grupos. A quantidade de objetos também pode variar, de acordo com a preferência do professor. Aqui utilizaremos 13 tampinhas de garrafa PET, para cada grupo.

**Figura 4.10:** Tampinhas de garrafa PET - peças do jogo “Par ou ímpar?”



Fonte: autoria própria

#### Regras do jogo:

- Divida a turma em duplas;
- Distribua 13 tampinhas para cada dupla;
- O professor pede que separem uma quantidade  $x$  dessas tampinhas, e tentem dividi-las em grupos de 2 tampinhas cada.

**Exemplo:** Pegue 6 tampinhas. Agora divida essas 6 tampas em grupos de 2. A divisão foi possível? Sobrou alguma tampa? Tome agora 9 tampinhas e tente dividi-las em grupos de 2. O que você observou?

- Repita esse processo, solicitando em cada vez, um número diferente de tampinhas. Até que seja realizado com todas as quantidades de 1 a 13.
- O aluno deve anotar o que foi observado para cada número.

**Figura 4.11:** Dividindo 6 tampinhas

Fonte: autoria própria

**Figura 4.12:** Dividindo 9 tampinhas

Fonte: autoria própria

- Peça que os alunos dividam as quantidades observadas em dois grupos: um grupo dos números em que a divisão foi possível e não sobrou nenhuma tampinha e o outro grupo contendo os números em que a divisão não foi possível, pois sobrou 1 tampinha.

Espera-se que os grupos formados sejam, respectivamente:  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  e  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

Nesta etapa o professor explica que os números do primeiro grupo são pares e os números do segundo grupo são ímpares.

- O professor também poderá explorar a paridade do número 0, perguntando: E o número zero? Ele entra em qual grupo? Por que?

Ser “par” ou “ímpar” é um conceito de divisibilidade: divisibilidade por 2. O professor, estendendo este conceito, pode aproveitar o jogo acima para trabalhar a divisibilidade dos números inteiros, inclusive o conceito de números primos. Para isso, o jogo apresentará uma pequena mudança: em vez de solicitar que os alunos dividam as tampinhas selecionadas em grupos de 2, peça que tente dividir em todas as quantidades de 1 até o total de tampinhas selecionadas.

**Exemplo:** Selecione 8 tampinhas. É possível dividi-las em grupos de 1 unidade? E de 2? E de 3? E de 4? E de 5? E de 6? E de 7? E de 8?

Repita o processo para todas as quantidades de tampinhas disponíveis. A ideia é trabalhar o conceito de divisibilidade e o professor poderá aproveitar para introduzir a definição de números primos, destacando os números em que não foi possível “formar grupinhos”, como o 5, 7 e 13, por exemplo.

\* \* \*

Esperamos que as propostas pedagógicas aqui apresentadas contribuam e auxiliem o professor de educação básica no planejamento diário, promovendo aulas mais dinâmicas, que despertem no estudante um contentamento nas aulas de Matemática, desmitificando a história de que esta é uma disciplina chata e difícil.

## Considerações finais

---

Este trabalho muito contribuiu para ampliar o meu conhecimento quanto aos números inteiros. Pude explorar o universo desses importantes números, desde a sua construção, revelando suas propriedades fundamentais e sua importância em uma variedade de contextos matemáticos e do nosso cotidiano.

A partir do conceito de divisibilidade, compreendemos a caracterização fundamental de paridade, que divide os números inteiros em duas categorias distintas: pares e ímpares. Esta distinção, embora simples, revela-se de extrema importância em uma variedade de aplicações práticas e teóricas. A paridade desempenha um papel crucial em operações básicas como a adição e a multiplicação. Por exemplo, a soma de dois números pares ou dois números ímpares resulta em um número par, enquanto a soma de um número par e um número ímpar resulta em um número ímpar. Essas e outras propriedades são fundamentais para a compreensão e solução de uma ampla gama de problemas matemáticos.

Apresentamos diversos problemas envolvendo paridade e sua aplicação em sala de aula, visando incentivar o uso de paridade na resolução de problemas, por professores da educação básica. Mostramos como a utilização de jogos pode enriquecer o estudo e despertar o gosto pela matemática.

Além de expandir os meus conhecimentos numéricos, o presente trabalho também aprimorou a minha capacidade de raciocínio matemático e resolução de problemas.

Um próximo passo para esse trabalho seria procurar aplicações, como por exemplo, o sistema binário na parte computacional, que devido ao tempo não foi possível realizar nessa dissertação. Em sistemas de armazenamento de dados, os bits de paridade são comumente utilizados para verificar a integridade dos dados armazenados em memória ou transmitidos através de redes, garantindo a detecção precoce de erros e a preservação da confiabilidade dos sistemas computacionais. Além disso, os algoritmos de criptografia modernos frequentemente dependem de operações que se baseiam na manipulação da paridade de números inteiros para garantir a segurança das comunicações. Assim, pretendo seguir minha pesquisa no sentido das aplicações da paridade de números inteiros nas mais variadas áreas.

Espera-se que o leitor também sinta-se motivado a mergulhar ainda mais nesse incrível mundo da paridade.

# Bibliografia

---

- [1] Boaler, Jo. *Fluência Sem Medo: Pesquisas Mostram as Melhores Formas de Aprender Fatos Matemáticos*. Disponível em: <https://www.youcubed.org/pt-br/evidence/fluencia-sem-medo/>. Acesso em: 12 de fevereiro 2024.
- [2] BRASIL. “Base Nacional Comum Curricular.” *Ministério da Educação. Brasília*. (2018). URL: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_ELEF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_ELEF_110518-versaofinal_site.pdf) (acesso em 14 de fev. de 2024).
- [3] BRASIL. “Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática”. *Secretaria de Educação Fundamental - Brasília: MEC/SEF* (1997). URL: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> (acesso em 14 de fev. de 2024).
- [4] Corso, L. V. e Dorneles, B. V. “Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática”. *Revista Psicopedagogia* 27.83 (2010), pp. 298–309.
- [5] Domingues, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. Atual, 1991.
- [6] Fomin, D. *Círculos Matemáticos*. IMPA, 2012.
- [7] Hefez, A. *Aritmética*. Vol. 2 ed. SBM, Coleção Profmat, 2014.
- [8] Hefez, A. *Indução Matemática*. OBMEP, 2009.
- [9] Iezzi, G. e Domingues, H. *Álgebra moderna: teoría y problemas*. Saraiva Educação SA, 1970.
- [10] Maior, L. *Tendências Metodológicas de Ensino-Aprendizagem: Resolução de problemas - Um caminho*. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1785-8.pdf>. Acesso em: 10 de fevereiro 2024. 2009.
- [11] Mol, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.
- [12] Muller, I. “Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática”. *Ciênc. Hum. Educ.* 1.1 (2000), pp. 133–144.
- [13] OBMEP, Clubes de Matemática da. *Números especiais – pares e ímpares: Problemas envolvendo paridade*. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-pares-e-impares/numeros-especiais-pares-e-impares-problemas-envolvendo-paridade/>. Acesso em: 15 de fevereiro 2024.
- [14] OBMEP, Clubes de Matemática da. *Probleminha: Domando cavalos*. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-domando-cavalos/>. Acesso em: 15 de fevereiro 2024.
- [15] Roque, T. e Carvalho, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [16] Sociedade Brasileira de Matemática. *Dissertações do PROFMAT*. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 28 de fevereiro 2024.
- [17] Vieira, A. C. *Fundamentos de Álgebra I*. Editora UFMG, 2011.
- [18] Wagner, E. “Paridade”. *EUREKA! Edição Especial* (2007), pp. 15–21.