

EMÍLIO DRUMOND PEREIRA

A QUEBRA DO PARADIGMA DE YANG-MILLS: O MODELO DE JACKIW-PI

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de Magister Scientiae.

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima
Coorientador: Daniel Heber Theodoro Franco

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

P436q
2024
Pereira, Emílio Drumond, 1998-
A quebra do paradigma de Yang-Mills: o modelo de
Jackiw-Pi / Emílio Drumond Pereira. – Viçosa, MG, 2024.
1 dissertação eletrônica (67 f.): il.

Inclui apêndices.

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Física, 2024.

Referências bibliográficas: f. 56-60.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2024.444>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Campos de calibre (Física). 2. Partículas (Física nuclear)
- Modelos matemáticos. 3. Interações eletromagnéticas.
4. Interações fracas (Física nuclear). 5. Grupos abelianos. I. Del
Cima, Oswaldo Monteiro, 1965-. II. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Física. Mestrado em Física. III. Título.

CDD 22. ed. 530.1435

EMÍLIO DRUMOND PEREIRA

A QUEBRA DO PARADIGMA DE YANG-MILLS: O MODELO DE JACKIW-PI

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de Magister Scientiae.

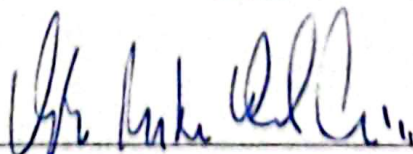
APROVADA: 6 de março de 2024.

Assentimento:



Emílio Drumond Pereira

Autor



Oswaldo Monteiro Del Cima

Orientador

Agradecimentos

De fato, esta é a seção mais difícil dessa dissertação. Nenhum cálculo é tão cansativo ou conceito matemático é tão abstrato quanto a expressão de um sentimento. Não que ser grato seja algo complexo, e não é. Mas, traduzir em palavras toda gratidão por cada um que, de alguma forma, fez parte de mais essa etapa é uma tarefa árdua. Ainda mais no meu caso, em que a memória não colabora e lembrar de todas as pessoas e acontecimentos torna o processo ainda mais difícil... Sendo assim, de maneira explícita, somente sete nomes serão citados aqui. Porém, muitos outros de modo implícito.

Primeiramente, venho agradecer às pessoas que, sem elas, esse trabalho não seria possível. Ao meu orientador, Oswaldo M. Del Cima, e coorientador Daniel H. T. Franco, agradeço por todos os ensinamentos sobre física e muitas coisas além dela, por todas as discussões e motivações. Além disso, especialmente ao Wado, pela capacidade de humanização em uma pós-graduação em física (fato que deveria ser habitual) e, principalmente, por acreditar e confiar em nossa capacidade. Quando digo “nossa” acrescento, Daniel e Thadeu, que embarcaram nessa jornada junto a mim e, portanto, o estudo feito aqui é também esforço de vocês. Deixo, então, meus agradecimentos por todas as discussões e trocas de ideias que foram fundamentais para a elaboração desse trabalho.

Aos meus pais, Andrea e Juarez, sou e serei grato por sempre fazerem de tudo por mim sem medir nenhum esforço e, principalmente, por toda confiança depositada. Também agradeço aos demais familiares, avó, tias, tios, primas e primos, por todo apoio e incentivo.

A todos os meus amigos, desde os “velhos” do Vale do Aço, os “do meio” de Viçosa e aos novos da pós-graduação, deixo meus agradecimentos por todas as risadas e perrengues que passamos juntos e fico ansioso para os muitos outros que virão.

Agora, para resolver um agradecimento pendente, meu muito obrigado à minha namorada, Thainá, por toda ajuda com o Latex. Evidentemente não só por isso, mas por todo apoio e dedicação a nós. É como diz a canção “Toda Esbelta Abre Meu Ouro e venho a sorrir...”

De antemão, agradeço a todos que dedicarão algum tempo para a leitura desse texto e que ele possa ajudá-los de alguma maneira. Por fim, agradeço aos professores e funcionários do Departamento de Física (DPF) e à Universidade Federal de Viçosa (UFV). O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Que vivamos nossas vidas com as lições
do passado e os sonhos do futuro."*

O Alquimista - Paulo Coelho

Resumo

PEREIRA, Emílio D., M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2024. **A quebra do paradigma de Yang-Mills: o modelo de Jackiw-Pi.** Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima. Coorientador: Daniel Heber Theodoro Franco

As teorias de gauge são formuladas para descrever campos de matéria que apresentam uma simetria local, conhecida como simetria de gauge. O grande impacto dessas teorias é obtido ao utilizar algum método para quantizá-las. Partindo de grupos de simetria específicos, como, por exemplo, o grupo $U(1)$, o $SU(2)$ e o $SU(3)$, é possível obter o modelo padrão da física de partículas, isto é, uma teoria que descreve três interações fundamentais: interação eletromagnética, fraca e forte. Tais teorias também podem ser estudadas em diferentes dimensões espaço-temporais e ainda assim possuir interesse além do teórico. Em particular, quando estudadas em três dimensões espaço-temporais, forneceram modelos que contribuíram para a compreensão de fenômenos como o efeito hall quântico e sobre sistemas como o grafeno e isolantes topológicos. Ainda nessa dimensionalidade, em 1997, os físicos Roman Jackiw e So-Young Pi propuseram uma teoria de gauge massiva que, ao contrário da teoria de Chern-Simons, preserva a simetria de paridade e, além disso, quebra o paradigma de Yang-Mills (generalizações não-abelianas de modelos abelianos). Portanto, tendo em vista a peculiaridade do modelo de Jackiw-Pi, o foco principal do presente trabalho é estudá-lo e será composto da seguinte forma: uma introdução às teorias de gauge, discutindo sucintamente a eletrodinâmica quântica e as teorias de Yang-Mills; A origem da simetria BRS e sua relação com a unitariedade da matriz S ; os aspectos da renormalização algébrica, que será o procedimento utilizado para a análise da quantização do modelo; o estudo dos aspectos clássicos e quânticos do modelo de Jackiw-Pi. Por fim, é feita a conclusão sobre a possibilidade de quantização e apresentadas as perspectivas futuras.

Palavras-chave: Renormalização algébrica. Simetria BRS. Jackiw-Pi.

Abstract

PEREIRA, Emílio D., M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2024. **Breaking the Yang-Mills paradigm: the Jackiw-Pi model.** Advisor: Oswaldo Monteiro Del Cima. Co-advisor: Daniel Heber Theodoro Franco

Gauge theories are formulated to describe fields of matter that have local symmetry, known as gauge symmetry. The great impact of these theories is obtained when using some method to quantize them. Starting from specific symmetry groups, such as the group $U(1)$, $SU(2)$ and $SU(3)$, it is possible to obtain the standard model of particle physics, that is, a theory that describes three fundamental interactions: electromagnetic, weak and strong interaction. Such theories can also be studied in different space-time dimensions and still have interest beyond the theoretical. In particular, when studied in three space-time dimensions, they provided models that contributed to the understanding of phenomena such as the quantum hall effect and systems such as graphene and topological insulators. Still in this dimensionality, in 1997, physicists Roman Jackiw and So-Young Pi proposed a massive gauge theory that, unlike the Chern-Simons theory, preserves parity symmetry and, in addition, breaks the Yang-Mills paradigm (non-abelian generalizations of abelian models). Therefore, in view of the peculiarity of the Jackiw-Pi model, the main focus of the present work is to study it and will be composed as follows: An introduction to gauge theories, briefly discussing quantum electrodynamics and Yang-Mills theories ; The origin of BRS symmetry and its connection with the unitarity of the S matrix; The aspects of algebraic renormalization, which will be the procedure used to analyze the quantization of the model; The study of the classical and quantum aspects of the Jackiw-Pi model. Finally, a conclusion is made about the possibility of quantization and future perspectives are presented.

Keywords: Algebraic renormalization, BRS symmetry, Jackiw-Pi.

Sumário

Convenções	8
I Introdução	9
1.1 A Teoria Quântica de Campos: contratempos e façanhas	9
1.2 (3+1) dimensões... isso é tudo?!	12
II Teorias de gauge	14
2.1 Invariância local	15
2.2 Teorias de Yang-Mills	16
2.3 Quantização: mecanismo de Faddeev-Popov	19
III Renormalização algébrica	25
3.1 Simetria BRS	25
3.2 Unitariedade da matriz S	28
3.3 Renormalização	33
IV O modelo de Jackiw-Pi	38
4.1 Simetrias e peculiaridades	39
4.1.1 Consistência à tree-level	42
4.1.2 Identidades	47
4.2 Quantização: anomalias e estabilidade	49
V Conclusões e Perspectivas	55
Referências Bibliográficas	56
A O propagador do campo de gauge e os operadores de projeção	61
B A unidade de Faddeev-Popov	65

Convenções

- Vamos adotar o sistema de unidades naturais, ou seja, $c = \hbar = 1$.
- Os índices gregos, $\mu, \nu, \dots = (0, 1, 2, 3)$, serão relacionados com o espaço-tempo. Já os índices latinos, $i, j, \dots = (0, 1, 2, 3)$, serão relacionados com o espaço interno referente à alguma estrutura de grupo, mais especificamente o grupo $SU(N)$. Iremos adotar a convenção de soma tal que, índices repetidos são diretamente somados.
- A métrica do espaço-tempo adotada é tal que,

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com exceção ao capítulo 4, que irá discutir o modelo tridimensional de Jackiw-Pi. Lá a métrica adotada será

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Capítulo I

Introdução

A física do século XX pode ser compactada por duas grandes teorias: a relatividade e a mecânica quântica. Se ponderarmos uma revolução como, necessariamente, uma quebra de paradigma, elas foram as verdadeiras revoluções científicas desse século e constituem os alicerces das demais. É evidente que muitas outras teorias também foram desenvolvidas, em especial, temos a combinação da relatividade restrita com mecânica quântica: a teoria quântica de campos (TQC) que, mesmo não se encaixando no conceito de revolução listado acima, exprime um tremendo avanço na compreensão dos constituintes fundamentais da natureza.

Nesse capítulo, será feito um breve compilado sobre a criação da TQC. Em qual contexto se deu seu desenvolvimento, quais foram os empecilhos para sua estruturação e como se tornou, no aspecto de exatidão teórico-experimental, a teoria mais gloriosa já proposta pelos físicos.

1.1 A Teoria Quântica de Campos: contratempos e façanhas

A história das teorias de campo começa em alguns anos após Isaac Newton, em 1687, formular a teoria da gravitação. Ele, por si só, interpretava a interação gravitacional como uma força transmitida instantaneamente entre dois corpos massivos. No entanto, somente no século seguinte que físicos e matemáticos, dentre eles Pierre-Simon Laplace, trouxeram o conceito do campo gravitacional como artifício matemático que, no final das contas, não produzia alterações na teoria da gravitação newtoniana [1]. Porém, lidava com a questão da interação à distância e trazia também outra interpretação para a interação gravitacional: um dado corpo massivo sofre o efeito gravitacional por meio de um campo vetorial definido em todo o espaço, que é composto pela contribuição de todos os outros corpos massivos do universo [2].

Ainda assim, o termo “campo” só veio a ser introduzido na comunidade dos físicos por Michael Faraday em 1849. Com o desenvolvimento da teoria eletromagnética, principal-

mente com as contribuições de James Clerk Maxwell¹, no fim do século XIX, a comunidade científica já digerira melhor o conceito e se conformavam que campos elétricos e magnéticos faziam parte do universo, tal como as partículas [2]. Nos dias de hoje tais questionamentos podem parecer um tanto quanto inusitados, por exemplo, com um ímã e limalhas de ferro o campo magnético se faz bem convincente de sua existência.

O fim do século XIX foi, na verdade, bastante singular para a comunidade científica. Ao mesmo tempo em que a maioria dos físicos julgava a física como concluída, a menos de refinamentos em medidas experimentais, haviam alguns problemas em aberto, como por exemplo: a radiação de corpo negro; o efeito fotoelétrico; o periélio de mercúrio e o próprio eletromagnetismo em como lidar com a não existência do éter. As teorias da época não chegavam nem perto de predizer algum comportamento completo de tais problemas e, somente no início do século seguinte que as soluções seriam encontradas com o desenvolvimento da relatividade² e da mecânica quântica, os dois pilares da física moderna.

Dentre os principais fundadores da mecânica quântica temos Max Karl Ernst Ludwig Planck e Niels Bohr, que se debruçaram no problema da radiação de corpo negro³. Apesar de se originar de um problema relacionado à radiação, a mecânica quântica lidava somente com partículas, basicamente com os elétrons em átomos. Somente em 1927, Dirac volta à questão da emissão espontânea de radiação de átomos excitados e aplica a mecânica quântica aos campos de maneira prática e com uma estrutura matemática fundamentada⁴ [6]. Acontecia então o nascimento da teoria quântica de campos juntamente com a eletrodinâmica quântica (QED).

Após o pontapé inicial de 1926 e 1927, outros estudos foram surgindo e foi estabelecida a interpretação de que, assim como o fóton, cada partícula elementar era, na verdade, uma excitação do seu próprio campo. Tal interpretação, juntamente com o novo conceito de antimatéria que surgia no início da década seguinte, levou de imediato à possibilidade da criação e aniquilação de partículas a partir de uma determinada quantidade de energia. Quanto à interação entre duas partículas carregadas, por exemplo, ficou estabelecido o

¹Maxwell considerava os campos eletromagnéticos como uma perturbação de um meio que permeava todo o espaço, o éter. Tal meio era um artifício proposto para suprir a existência de um referencial privilegiado onde as leis de sua teoria seriam válidas. Não passou muito tempo para que viesse à tona experimentos que buscavam sua detecção. Um deles é o famoso experimento de Michelson-Morley, que decretou um fim para a teoria do éter [3].

²Primeiro em 1905, Albert Einstein, desenvolve a teoria da relatividade restrita e nos dá outra interpretação para o espaço-tempo. Onze anos depois, em 1916, ele elabora a teoria da relatividade geral e finalmente põe em pé de igualdade gravitação e espaço-tempo.

³Outros nomes que contribuíram veementemente com a teoria são: Louis de Broglie, Werner Heisenberg, Max Born, Pascual Jordan, Wolfgang Pauli, Paul Adrian Maurice Dirac e Erwin Schroedinger. O próprio Einstein, apesar de todos os seus entraves à teoria, fez sua contribuição com a descrição da luz por meio dos fótons [4].

⁴Na verdade o primeiro trabalho envolvendo a mecânica quântica no estudo dos campos se deve a Born, Heisenberg e Jordan em 1926, o qual mostram a quantização do campo eletromagnético. No entanto, apesar de elucidativo, não teve tanta visibilidade quanto ao trabalho de Dirac [5].

conceito de que era feita por meio da troca de fótons virtuais indetectáveis que violavam a conservação de energia. Porém, desde que tais partículas virtuais existam em um tempo curto, a violação é protegida pelo princípio de incerteza, $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.

Embora estivesse ainda em construção, a TQC podia ser aplicada para a análise de processos como, por exemplo, o espalhamento Compton e gerava resultados satisfatórios utilizando cálculos em primeira ordem de aproximação em teorias de perturbação. Em contrapartida, os termos de ordem superiores forneciam valores infinitos⁵ e, então, os físicos estavam diante de um enorme empecilho. Foi nesse cenário que a comunidade científica começou a suspeitar que a TQC estava incompleta e possuía obstruções matemáticas irreparáveis.

Ao mesmo tempo em que os infinitos não eram domados, muitas descobertas foram feitas: em 1933 Enrico Fermi, com o estudo do decaimento beta, propõe a primeira teoria para o que viria a se tornar a interação fraca [7]; Hidekei Yukawa, em 1936, prediz a existência do méson juntamente com uma primeira proposta para a interação entre prótons e neutros [8]. Simultaneamente, outros começaram a buscar por abordagens alternativas à TQC, dentre elas, a de maior visibilidade foi a teoria da matriz S [9].

Finalmente, entre os anos de 1946 e 1949 os trabalhos de Shin'ichiro Tomonaga [10], Julian Schwinger [11] e Richard Feynman [12], definiram o processo de renormalização⁶. Tal procedimento tratava os infinitos da QED via uma redefinição dos parâmetros de massa e constantes de acoplamento. Feito isso, fundamentava-se a teoria mais precisa na comparação teoria-experimento⁷. Todavia, não foi possível aplicar uma ideia semelhante à da QED às interações fracas e fortes, pois havia um problema quanto à renormalizabilidade dessas teorias. Então, a TQC passaria por outra crise e as abordagens alternativas voltariam a ganhar destaque.

Sabia-se que a QED apresentava uma simetria muito importante, a simetria de gauge local. Então, pairava sobre os físicos o questionamento se havia alguma simetria local que pudesse estar por trás das demais interações. Com essa situação, surgia em 1954, a teoria desenvolvida por Chen Ning Yang e Robert Mills que tentava descrever a interação forte através de simetrias de gauge envolvendo grupos não-abelianos [15].

A teoria de Yang-Mills levou alguns anos para ser quantizada e, somente em 1967, que os físicos Ludvig Faddeev e Victor Popov, por meio do formalismo da integral de caminho e do astuto artifício dos campos de ghosts, conseguiram quantizá-la [16]. Sendo assim, aliada

⁵A primeira aparição dos infinitos se deu em 1930 em um trabalho onde Robert Oppenheimer avaliava a auto-energia do elétron, que podia provocar uma mudança observável na órbita atômica e era ocasionada quando um elétron emitia fótons virtuais e reabsorvia esses fótons [2]. Tal processo abrangia uma soma infinita nos momentos das partículas, o que era a origem de todo o problema.

⁶Desenvolvidos de forma independente, foram sistematizados por Freeman Dyson em 1949 e colocados como formalismos equivalentes [13]. O formalismo de Feynman, em especial, trouxe consigo seus conhecidos diagramas e regras que facilitaram a esquematização dos processos e seus cálculos.

⁷Alguns exemplos desse sucesso são o cálculo de desvio de Lamb, que tem seu valor experimental igual a $1057,8 \pm 0,1 MHz$ enquanto a previsão teórica é de $1057,862 \pm 0,020 MHz$ e do momento magnético anômalo do elétron, que possui valor experimental de $1159652410200 \cdot 10^{-12}$ e teórico de $1159652359282 \cdot 10^{-12}$ [14].

ao mecanismo de Higgs⁸ e da prova de sua renormalizabilidade desenvolvida por Gerardus 't Hooft e Martinus J. G. Veltman, tal teoria se tornou o cerne do atual modelo padrão da física de partículas [18]. Simultaneamente, o tratamento das divergências que surgiam do método de perturbação das teorias de gauge foram aprimorados com os diferentes processos de regularização. Dentre eles, o método algébrico, relacionado à simetria BRS⁹ foi crucial para o estudo das reais obstruções ao quantizar as teorias, as anomalias.

Enfim, o início da década de 70 foi definitivo para a TQC. Explorando todas essas ideias e partindo dos grupos de simetria $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$, foi desenvolvido um modelo que descrevia a interação eletrofraca e a interação forte: o Modelo Padrão. No entanto, apesar de todo o sucesso da TQC com o esse modelo, ainda existem muitas questões em aberto na física fundamental: o regime não renormalizável da QCD e sua liberdade assintótica; a quantização (ou não) da gravitação; a matéria e energia escura; os possíveis novos tipos de interação. Com isso, fica a incerteza se as TQC's são, na verdade, teorias efetivas e o que realmente são os constituintes fundamentais da natureza. De qualquer maneira, é na inconclusão e no inacabado que está o combustível para que a ciência continue avançando e buscando “domar” a natureza.

1.2 (3+1) dimensões... isso é tudo?!

A TQC não proporcionou apenas uma nova interpretação para as partículas, mas também auxiliou a compreensão do estudo sobre outras dimensionalidades e suas possíveis aplicações. Se tratando de dimensões superiores a 4, grande parte de seu estudo é referente às teorias de unificação que buscam a quantização da interação gravitacional junto das demais interações. A primeira proposta foi feita por Theodor Kaluza e Oskar Klein que, durante a década 20, produziram uma teoria de campo em 5 dimensões espaço-temporais no intuito de unificar o eletromagnetismo e a gravitação. Tal teoria viria a ser a precursora da teoria das cordas e de conceitos como a compactificação de dimensões [22].

Quanto às TQC's em dimensões inferiores a 4, muitas também foram desenvolvidas. Especificamente em $(2 + 1)$ dimensões espaço-temporais, os trabalhos teóricos de Stanley Deser, Roman Jackiw e Stephen Templeton tiveram bastante evidência, principalmente ao tratarem de campos de gauge massivos [23, 24]. Além disso, as teorias tridimensionais puderam ser aplicadas a sistemas da matéria condensada e então, ganharam outro motivador além do puramente teórico. Fenômenos como o efeito Hall quântico e a supercondutividade a alta temperatura crítica e sistemas como o grafeno e isolantes topológicos são alguns

⁸Mecanismo responsável por gerar massa aos bosons de gauge através do processo de quebra espontânea de simetria. Apesar de popularmente nomeado como “mecanismo de Higgs”, foi descoberto de maneira independente por Peter Higgs, Robert Brout e François Englert; Gerald Guralnik, C. R. Hagen e Tom Kibble [17].

⁹Descoberta por Carlo Becchi, Alain Rouet e Raymond Stora em 1974 e, independentemente por Tyutin em 1975, é uma simetria presente na ação de Yang-Mills conjunta com os termos de Faddeev-Popov [19, 20]. Já o processo de renormalização explorando tal simetria foi cunhado apenas por BRS [21].

exemplos da aplicação das TQC's tridimensionais [25–28].

É nesse cenário tridimensional que concentra esse trabalho. No capítulo 4 será discutido o modelo de Jackiw-Pi que apresenta aspectos bem inusitados, devido quebra do paradigma de Yang-Mills [29]. Para discutí-lo, no próximo capítulo, vamos introduzir as teorias de gauge e o mecanismo de Faddeev-Popov para sua quantização. No capítulo seguinte, vamos introduzir a simetria BRS, sua ligação com a unitariedade da matriz S e o procedimento de renormalização algébrica, que irá nos permitir a verificação das possíveis anomalias e da estabilidade de uma teoria de uma forma algébrica e iterativa. Finalmente, no capítulo 4, apresentamos as características clássicas do modelo de Jackiw-Pi e obtemos, como resultado inédito, sua quantização em todas as ordens em teoria de perturbação, através do método algébrico de BRS. Juntamente com a prova da ausência de anomalias, renormalizabilidade multiplicativa e invariância de escala do modelo.

Capítulo II

Teorias de gauge

A primeira noção de uma teoria de gauge aconteceu em 1918, devido à Hermann Weyl em sua tentativa de descrever a gravitação e o eletromagnetismo em um só contexto geométrico. Apesar de falhar em sua descrição, Weyl estava certo quanto à invariância de gauge e mostrou isso em outros artigos desenvolvidos alguns anos depois [30]. Alguns anos depois, surgia a primeira¹ teoria de gauge bem sucedida, a QED.

De um ponto de vista moderno, uma teoria de gauge é construída da seguinte forma: a partir de um lagrangiano invariante sob uma transformação global pertencente a algum grupo de simetria, é exigido que essa invariância seja mantida ao promovermos tal transformação em uma transformação local. Essas transformações recebem o nome de transformações de gauge e compõem um conjunto de campos que, quando transformados, não alteram propriedade alguma do sistema. Logo, a transformação de gauge está relacionada a uma ambiguidade presente em um espaço interno de um determinado grupo de simetria presente na teoria.

O ponto crucial de uma teoria de gauge é sua quantização. Quando realizada, podemos obter, por exemplo, o modelo padrão da física de partículas. Sendo assim, nesse capítulo, começamos de maneira sucinta apresentando a estrutura da simetria de gauge e de sua invariância dentro da QED. Em seguida, entraremos na discussão das teorias de Yang-Mills e dos grupos não-abelianos. Feito isso, finalmente, discutiremos sobre a necessidade de um gauge-fixing e a quantização dessas teorias através do mecanismo de Faddeev-Popov.

¹De um ponto de vista cronológico, a primeira teoria de gauge bem sucedida foi a teoria da relatividade geral de Einstein de 1916. Porém, quando formulada, o conceito de gauge não havia sido encontrado ainda e somente após a metade do século XX que ela seria colocada no formalismo de gauge como uma teoria de gauge não-abeliana [31].

2.1 Invariância local

Como um protótipo, vamos recorrer ao primeiro grande sucesso das teorias de gauge: a eletrodinâmica quântica. Portanto, vamos partir do lagrangiano de Dirac²,

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.1)$$

o qual é invariante sob uma transformação de gauge global:

$$\begin{cases} \psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x) \\ \bar{\psi}'(x) = e^{-i\theta}\bar{\psi}(x) \end{cases}, \quad (2.2)$$

em que θ é o parâmetro da transformação. Pretendemos então, promover a equação (2.2) para uma transformação de gauge local, ou seja, em que $\theta = \theta(x)$ e, a partir disso, construir um lagrangiano invariante sob tal transformação local.

Note que, agora, o parâmetro de gauge $\theta(x)$ é dependente dos pontos do espaço-tempo. Sendo assim, ao contrário do que ocorre com o segundo termo de (2.1), o primeiro não é invariante sob essa transformação local. Isso se deve à atuação da derivada no próprio parâmetro.

Tratamos esse obstáculo por meio do acoplamento mínimo, que consiste em substituir as derivadas ordinárias por derivadas covariantes³ D_μ :

$$D_\mu\psi(x) \equiv \partial_\mu\psi(x) - ieA_\mu(x)\psi(x), \quad (2.3)$$

em que $A_\mu(x)$ é denominado de campo de gauge, ou conexão, e e uma constante de acoplamento que, nesse caso, é a carga do elétron. As transformações de $A_\mu(x)$ e D_μ são:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x), \quad (2.4)$$

$$D'_\mu = e^{i\theta(x)}D_\mu. \quad (2.5)$$

Note que D_μ se transforma de maneira semelhante aos campos spinoriais, por isso o nome “covariante”. Além disso, o segundo termo da equação (2.4) é crucial para garantir a invariância do lagrangiano sob a transformação de gauge local.

Portanto, ao buscar a invariância de \mathcal{L}_{Dirac} , ganhamos um novo campo vetorial. Nessas circunstâncias, temos que verificar a possibilidade de novos termos invariantes que

²As equações de movimento desse lagrangiano nos concede a dinâmica de um férmion livre de spin $\frac{1}{2}$ e massa m . A escolha do lagrangiano de Dirac não tem um propósito específico. Poderíamos ter desenvolvido a análise a partir do lagrangiano de Klein-Gordon, por exemplo, e então utilizado a QED escalar como protótipo sem nenhuma perda de generalidade.

³A origem da derivada covariante na verdade é geométrica. Visto que buscamos uma teoria com invariância local, quantidades avaliadas em diferentes pontos do espaço-tempo se transformam de maneiras distintas e então, devemos tratar a subtração na definição de ∂_μ introduzindo um fator $U(y, x)$ que compensa tal situação. O caminho mais simples é tomar $U(y, x) = e^{i\phi(x, y)}$ [32].

dependam apenas de A_μ e suas derivadas. Como nossa análise está sendo feita sobre a QED, sabemos que o campo de gauge é referente ao fóton que, claramente, possui dinâmica. Tal termo quadrático é obtido através do field strenght⁴ $F_{\mu\nu}$, uma quantidade definida através do comutador entre as derivadas covariantes que, nesse caso é dado por:

$$F_{\mu\nu} \equiv (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \quad (2.6)$$

A partir dessa quantidade, que por sinal também é invariante de gauge, obtemos o termo referente à dinâmica do fóton que deve ser adicionado ao lagrangiano, conhecido como o lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Assumimos também que a massa m_A associada ao campo de gauge é nula, pois um possível termo de massa, $m_A^2 A_\mu A^\mu$, não é invariante de gauge⁵. Sendo assim, agrupando os termos, obtemos o lagrangiano da QED,

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Uma maneira de modelar o efeito das simetrias é através do arcabouço matemático da teoria de grupos. Voltando às transformações de fase da equação (2.1) e sua versão em que $\theta = \theta(x)$, temos que tais transformações representam o grupo abeliano $U(1)$ global e $U(1)$ local, respectivamente. Mencionaremos alguns aspectos desses grupos na próxima seção.

2.2 Teorias de Yang-Mills

No final da década de 40 a QED se encontrava como uma teoria prática e bem estabelecida. No entanto, as outras interações ainda enfrentavam problemas em serem formuladas e uma das ideias foi a de generalizar a teoria de gauge abeliana para grupos não-abelianos. Surgia então a teoria de Yang-Mills [15].

Para seu desenvolvimento, vamos considerar um grupo de Lie⁶ não-abeliano genérico

⁴O field strenght é, na verdade, o tensor do campo eletromagnético. Além disso, também possui uma interpretação geométrica devido ao mesmo problema que acontece com a derivada.

⁵Um termo do tipo $-c\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$ também poderia ser adicionado, pois é invariante de gauge. No entanto, a teoria exige outras simetrias, a de reversão temporal e de paridade que proíbem a existência de um termo desse tipo [32].

⁶Os grupos de Lie são tais que todos seus elementos estão conectados à identidade e, portanto, mediante transformações contínuas infinitesimais podemos acessar todo o grupo. Com isso, suas matrizes de representação podem ser expressas numa expansão em séries e, a partir daí, podemos definir suas características por meio de seus geradores, parâmetros e constantes de estrutura.

$SU(N)$. Para tais grupos, qualquer um de seus elementos $V(\theta)$, pode ser dado por:

$$V(\theta) = e^{i\theta^a T^a} = 1 + i\theta^a T^a + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (2.9)$$

onde θ^a são os parâmetros infinitesimais do grupo e T^a seus geradores que, por sinal, satisfazem a seguinte regra de comutação

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (2.10)$$

Aqui, o termo f^{abc} é conhecido como constante de estrutura e definem a álgebra do grupo. É uma quantidade totalmente antissimétrica que satisfaz a identidade de Jacobi,

$$f^{abc} f^{cde} + f^{adc} f^{ceb} + f^{aec} f^{cbd} = 0. \quad (2.11)$$

Note que, os índices latinos representam os índices do espaço interno associado ao grupo $SU(N)$ e, nas equações acima, temos uma soma implícita em índices repetidos.

Com esse grupo genérico como base, a transformação de gauge local sofrida por um campo de matéria $\psi(x)$ é

$$\psi'(x) = V(x)\psi(x), \quad (2.12)$$

em que $V(x)$ é dado pela equação (2.9).

Agora, precisamos generalizar os resultados da seção anterior para obter uma teoria invariante de gauge. Com isso, para cada elemento do grupo, precisamos de um campo de gauge associado que irá corrigir a não invariância da derivada ordinária. Logo, é necessário um acoplamento mínimo que tem a derivada covariante definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \quad (2.13)$$

aqui a constante de acoplamento da teoria é dada pela variável g . Para encontrar como se transformam os campos de gauge não-abelianos, podemos avaliar a variação da equação (2.13) utilizando a versão infinitesimal das transformações de gauge

$$\delta\psi = iT^a\theta^a\psi. \quad (2.14)$$

Com o auxílio da equação (2.10) temos que,

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\psi) &= \delta(\partial_\mu\psi) - igT^a[\delta(A_\mu^a)\psi + A_\mu^a\delta(\psi)] \\ \Rightarrow iT^a\theta^a(\partial_\mu\psi - igA_\mu^b T^b\psi) &= iT^a[\theta^a(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\theta^a)\psi] - igT^a\delta(A_\mu^a)\psi + gT^a A_\mu^b T^b\theta^b\psi \\ \Rightarrow igT^a\delta(A_\mu^a)\psi &= iT^a\partial_\mu\theta^a\psi + gT^a T^b\theta^b A_\mu^c\psi - gT^b T^a\theta^a A_\mu^b\psi \\ \Rightarrow \delta(A_\mu^a) &= \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a - f^{abc}\theta^b A_\mu^c. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Note que, diferente da transformação de gauge do grupo abeliano, equação (2.4), aqui temos um termo extra envolvendo as constantes de estrutura do grupo. Veja também que a equação (2.15) engloba o caso abeliano, pois $f^{abc} = 0$ para esse grupo.

Agora, a fim de construir o termo cinético do lagrangiano para os campos de gauge, vamos encontrar os fields strength da teoria através do comutador das derivadas covariantes,

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] \psi(x) &= [(\partial_\mu - igA_\mu^a T^a), (\partial_\nu - igA_\nu^b T^b)] \psi(x) \\
\Rightarrow [D_\mu, D_\nu] \psi &= ([\partial_\mu, \partial_\nu] - ig [\partial_\mu, A_\nu^b T^b] + ig [\partial_\nu, A_\mu^a T^a] - g^2 [A_\mu^a T^a, A_\nu^b T^b]) \psi \\
&\Rightarrow [D_\mu, D_\nu] \psi = -ig [(\partial_\mu A_\nu^b T^b) \psi + A_\mu^b T^b \partial_\mu \psi - A_\nu^b T^b \partial_\mu \psi] \\
&\quad + ig [(\partial_\nu A_\mu^a T^a) \psi + A_\mu^a T^a \partial_\nu \psi - A_\nu^a T^a \partial_\mu \psi] - ig^2 f^{abc} T^c A_\mu^a A_\nu^b \psi \\
[D_\nu, D_\nu] \psi &= -ig (\partial_\mu A_\nu^c T^c - \partial_\nu A_\mu^c T^c + g f^{abc} T^c A_\mu^a A_\nu^b) \psi. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Da equação (2.16) definimos o field strength

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \tag{2.17}$$

Novamente, temos uma estrutura geral na equação (2.17). Ela contém o caso abeliano ($f^{abc} = 0$) e recupera a equação (2.6), bem como apresenta a estrutura não-abeliana com a presença da constante de estrutura no terceiro termo. Já a variação de $F_{\mu\nu}^a$ é obtida com o auxílio das equações (2.11) e (2.15):

$$\begin{aligned}
\delta F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu \delta(A_\nu^a) - \partial_\nu \delta(A_\mu^a) + g f^{abc} [\delta(A_\mu^b) A_\nu^c + A_\mu^b \delta(A_\nu^c)] \\
\Rightarrow \delta F_{\mu\nu}^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \partial_\nu \theta^a - f^{abc} [(\partial_\mu \theta^b) A_\nu^c + \theta^b \partial_\mu A_\nu^c] - \frac{1}{g} \partial_\nu \partial_\mu \theta^a + f^{abc} [(\partial_\nu \theta^b) A_\mu^c + \theta^b \partial_\nu A_\mu^c] \\
&\quad + g f^{abc} \left\{ \left[\frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^b) A_\nu^c - f^{bde} \theta^d A_\mu^e A_\nu^c \right] + \left[\frac{1}{g} (A_\nu^b \partial_\mu \theta^c) - f^{cde} \theta^d A_\mu^e A_\nu^c \right] \right\} \\
\Rightarrow \delta F_{\mu\nu}^a &= -f^{abc} \theta^b (\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c) - g f^{abc} [f^{bde} \theta^d A_\mu^e A_\nu^c + f^{cde} \theta^d A_\mu^e A_\nu^c] \\
\delta F_{\mu\nu}^a &= -f^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^c. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Portanto, o field strength se transforma de maneira covariante. Ao contrário do que ocorria na teoria abeliana, na qual ele era uma quantidade invariante de gauge.

Finalmente, o termo cinético referente aos campos de gauge para uma teoria não-abeliana é

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{tr} [(F_{\mu\nu}^a T^a)^2] = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \tag{2.19}$$

Aqui, utilizamos outra propriedade dos geradores do grupo $SU(N)$: Para quaisquer representações irredutíveis temos que o traço entre dois geradores do grupo pode ser dado por

$$\text{tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \tag{2.20}$$

O lagrangiano da equação (2.19) é conhecido como lagrangiano de Yang-Mills. Note que, devido à estrutura da equação (2.17), o termo quadrático nos fields strength produz termos de terceira e quarta ordem nos campos de gauge. Tais termos estão associados à auto-interação entre esses campos. Sendo assim, dizemos que uma teoria de Yang-Mills pura é, por si só, interagente.

2.3 Quantização: mecanismo de Faddeev-Popov

A formulação de uma teoria quântica de campos para descrever os fenômenos quânticos é feita dispondo de uma teoria clássica de campos como ponto de partida e a partir dela feita sua quantização. Até agora discutimos sobre as teorias de campo de gauge, mas não informamos nada a cerca de sua quantização. Em particular, o caso não-abeliano dessas teorias não pode ser quantizado através de métodos canônicos e necessitam de ir além de um gauge-fixing usual para tratá-la.

Considere um livro escrito em português. O conteúdo e informação que ele contém serão, a princípio, os mesmos após uma tradução para qualquer outra língua. Isso reflete, nas devidas proporções, as transformações de gauge. Por exemplo, as mudanças no campo de gauge que são feitas conforme a equação (2.15) não provocam alteração da situação física. Então, podem ser interpretadas como mudanças na descrição, mas não como mudanças reais do estado.

Aqui, vamos apresentar o método de quantização desenvolvido por Faddeev-Popov que proporcionou a quantização das teorias de gauge não-abelianas e avaliar a quantização dos campos de gauge [16]. Mas, antes de ir direto às teorias de Yang-Mills, vamos avaliá-lo na eletrodinâmica quântica. Tal método faz uso da quantização por integrais de caminho de Feynman [32], que concilia o princípio de mínima ação com a mecânica quântica e faz uso de integrais funcionais do tipo

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]}, \quad (2.21)$$

em que $S[\Phi]$ é uma ação usual, dada por

$$\int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi), \quad (2.22)$$

e Φ um campo qualquer. Como nosso interesse está no estudo dos campos de gauge, iniciaremos com a \mathcal{L}_M dada pela equação (2.7) e portanto $\Phi \equiv A_\mu$. A integral (2.21) evidencia bem o problema da invariância de gauge. O que ocorre é uma soma em todas as configurações possíveis para os campos A_μ , porém alguns deles estão conectados via uma transformação de gauge e então, essa soma conta repetidas vezes um mesmo estado. Uma maneira de contornar o problema seria alterar a integral para fazer a soma de modo a desconsiderar essa redundância e assim, contabilizar cada configuração física somente uma

vez. Isso pode ser feito por meio do processo de gauge-fixing que, nesse caso, é realizado adicionando a seguinte unidade

$$1 = \Delta \int \mathcal{D}\theta(x) \delta \left[G(A'_\mu) \right], \quad (2.23)$$

à integral de caminho [16]. Na equação (2.23) temos que: $\theta(x)$ é o parâmetro da transformação de gauge, tal qual na equação (2.4); Δ é proveniente de uma mudança de variáveis e é definido como $\Delta \equiv \det \left(\frac{\delta G(A'_\mu)}{\delta \theta} \right)$, tal que A'_μ indica que esse é um campo transformado por meio da equação (2.4); $\delta [G(\Phi)]$ é uma delta funcional que força a todos os pontos do espaço-tempo a seguirem a condição de gauge fixing $G[\Phi] = 0$. É essa condição que seleciona somente um campo de gauge dentre todos equivalentes por uma transformação de gauge. No apêndice B é apresentada uma breve discussão para esclarecer um pouco mais sobre essa equação e seus termos.

Sendo assim, a integral (2.21) é reescrita como

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}A \left(\Delta \int \mathcal{D}\theta(x) \delta \left[G(A'_\mu) \right] \right) e^{iS[A]}. \quad (2.24)$$

Além disso, com exceção de $[G(A'_\mu)]$, consideramos que os demais termos da equação (2.24) são deixados invariantes⁷ pela transformação de gauge de $A_\mu \rightarrow A'_\mu$. Então, escolhendo o gauge-fixing⁸ linear-covariante

$$G(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu - \eta(x), \quad (2.25)$$

em que $\eta(x)$ é uma função arbitrária. Temos que, após a transformação dada pela equação (2.4),

$$\begin{aligned} G(A'_\mu) &= \partial^\mu A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \partial^\mu \theta - \eta(x) \\ \Rightarrow \det \left(\frac{\delta G(A'_\mu)}{\delta \theta} \right) &= \det \left(\frac{1}{e} \partial_\mu \partial^\mu \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Portanto, o determinante é independente do parâmetro θ . Apesar de ter chegado a essa conclusão após escolher o gauge linear-covariante, isso sempre irá ocorrer desde que a escolha de $G(A_\mu)$ seja sempre linear em θ .

⁷É evidente a invariância dos termos $\mathcal{D}A$ e $S[A]$. O termo $\mathcal{D}\theta$ é denominado de medida de Haar e possui a propriedade de que $\theta\theta' = \theta''$. Então, sob uma transformação de gauge $\theta \rightarrow \theta'$, os demais termos se tornam invariantes. Além disso, a invariância apresentada dessa forma é feita para excluir o problema de Gribov que emerge nas teorias não-abelianas [33–35].

⁸A escolha do gauge fixing não tem interferência com os resultados físicos, como veremos mais a frente. Aqui, a escolha do gauge linear covariante é justificada, pois é o gauge utilizado para a discussão do modelo de Jackiw-Pi. No entanto, existem outros gauges (covariantes ou não covariantes) que podem ser mais úteis a depender do objetivo final [36].

Finalmente, a integral funcional (2.21) é dada por

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det \left(\frac{1}{e} \partial_\mu \partial^\mu \right) \left(\int \mathcal{D}\theta \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta [\partial^\mu A_\mu - \eta(x)]. \quad (2.27)$$

Note que, a integração em $\mathcal{D}\theta$, que representa o volume do espaço de simetria interno, foi isolada do restante. Portanto, dividindo esse termo obtemos a remoção da contagem redundante e o problema exposto no início da seção fica solucionado.

Além disso, a delta pode ser escrita em termos de uma integral funcional gaussiana acrescentando outra unidade,

$$1 = N(\alpha) \int \mathcal{D}\eta e^{\left(-\frac{i}{2\alpha} \int d^4x \eta^2(x)\right)}, \quad (2.28)$$

tal que $N(\alpha)$ é um fator de normalização. Então, voltando à equação (2.27),

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} &= N(\alpha) \det \left(\frac{1}{e} \partial_\mu \partial^\mu \right) \left(\int \mathcal{D}\theta \right) \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta e^{\left(-\frac{i}{2\alpha} \int d^4x \eta^2(x)\right)} e^{iS[A]} \delta [\partial^\mu A_\mu - \eta(x)] \\ &\Rightarrow \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = N \int \mathcal{D}A e^{\left(-\frac{i}{2\alpha} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)^2\right)} e^{iS[A]}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde N contém todos os termos independentes que podem ser considerados como um fator de normalização.

Veja que também podemos incorporar o termo gaussiano por meio de uma redefinição da ação adicionando o termo,

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 \quad (2.30)$$

ao lagrangiano. Esse termo ganha o nome de lagrangiano de gauge-fixing. No apêndice A mostramos que esse termo essencial no cálculo do propagador do fóton. A nova ação é dada por,

$$S_{eff} = \int d^4x \{ \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{GF} \} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right\} \quad (2.31)$$

Do formalismo das integrais de caminho sabemos que o cálculo do valor esperado de um dado observável $\mathcal{O}[A]$ é obtido por,

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}[A] e^{iS[A]}}{\int \mathcal{D}A e^{iS[A]}}. \quad (2.32)$$

O que foi apresentado para reescrever o denominador da equação (2.32) pela equação (2.29) pode ser feito de maneira semelhante ao termo do numerador. Portanto, desde que

o observável seja um operador invariante de gauge, temos que

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}[A] e^{iS_{eff}}}{\int \mathcal{D}A e^{iS_{eff}}}. \quad (2.33)$$

Fica evidente pela equação (2.33) que, através do gauge-fixing, a contagem das infinitas configurações que representam um mesmo estado físico é tratada dentro da teoria abeliana da QED. Além disso, também é possível mostrar que esse método é equivalente ao procedimento de quantização canônica [37].

Agora, vamos adiante e discutir o mecanismo de Faddeev-Popov para as teorias de Yang-Mills. Já sabemos que o caso não-abeliano das teorias de gauge é muito mais complexo devido à própria estrutura de grupo. Antes de começar, vamos utilizar a representação adjunta para os geradores do grupo $SU(N)$, que, nesse caso, são matrizes dadas em função dos fatores de estrutura,

$$(T^c)_{ab} = if^{abc}. \quad (2.34)$$

Com isso, podemos reescrever a equação (2.13) e, a atuação da derivada covariante em um campo qualquer Φ se torna,

$$(D_\mu \Phi)^a = \partial_\mu \Phi^a + gf^{abc} A_\mu^c \Phi^b. \quad (2.35)$$

Assim, a transformação de gauge da equação (2.15) é dada em termos dessa derivada covariante,

$$\delta(A_\mu^a) = \frac{1}{g}(D_\mu \theta)^a. \quad (2.36)$$

A estratégia segue a mesma, reescrevemos a integral de caminho através da equação (2.24), considerando \mathcal{L}_{YM} como lagrangiano, dado pela equação (2.19). Dada uma transformação de gauge do tipo (2.36), as quantidades permanecem invariantes e a integral no volume do espaço de simetria interno pode ser fatorada [32]. Portanto, a redundância de contagem devido à invariância de gauge é tratada ao calcular quantidades semelhantes às da equação (2.32).

Até agora, a integral de caminho pode ser reescrita por,

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \left(\int \mathcal{D}\theta(x) \right) \int \mathcal{D}A \Delta \delta \left[G(A'_\mu) \right] e^{iS[A]}. \quad (2.37)$$

A novidade do caso não-abeliano emerge ao calcular o determinante Δ . Selecionando o gauge-fixing linear-covariante,

$$G(A_\mu^a) = \partial^\mu A_\mu^a - \eta^a(x). \quad (2.38)$$

Ao realizar uma transformação de gauge, equação (2.38), temos que

$$\begin{aligned} G(A'_\mu{}^a) &= \partial^\mu A'_\mu{}^a + \frac{1}{g} \partial_\mu D^\mu \theta^a - \eta^a(x) \\ \Rightarrow \det \left(\frac{\delta G(A'_\mu{}^a)}{\delta \theta^b} \right) &= \det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Perceba a presença dos índices de grupo nas equações e, além disso, que o determinante não é independente dos campos de gauge devido à aparição da derivada covariante.

Portanto, não é possível fatorar o determinante da integral nos campos como feito no caso abeliano. O truque usado por Faddeev e Popov para tratar essa quantidade foi escrevê-la também como uma integral funcional,

$$\det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \right) = \int \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{i \int d^4x \bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b}. \quad (2.40)$$

em que os fatores $\frac{1}{g}$ e i podem ser absorvidos na definição dos campos c e \bar{c} que são, respectivamente, o ghost e anti-ghost de Faddeev-Popov [16].

Essa identidade pode ser derivada das regras de integrais funcionais para férmions [32]. No entanto, temos uma tremenda discrepância, aqui os campos c e \bar{c} quebram o teorema spin-estatística, pois apesar de satisfazerem a estatística de Fermi-Dirac, também são escalares sob uma transformação de Lorentz. Por isso acabaram sendo nomeados de ghosts.

De fato, os ghosts não possuem significado físico e são um artifício matemático que trata o problema. No entanto, são fundamentais para a consistência da teoria, pois irão eliminar polarizações não-físicas dos campos de gauge. Iremos discutir sobre esse fato no próximo capítulo, no contexto da simetria BRS.

Note que, também poderíamos representar o determinante (2.26) do caso abeliano em termos dos ghosts. Mas, isso não levaria à nada de novo, pois mesmo fazendo isso ele ainda seria fatorado da integral e se tornaria apenas uma constante multiplicativa.

Então, voltando à equação (2.37), temos

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \delta \left[G(A'_\mu{}^a) \right] e^{i \int d^4x \bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b} e^{iS[A]}. \quad (2.41)$$

Agora, semelhante ao caso da QED, exponenciamos a delta com a ajuda da equação (2.28) e, no fim das contas,

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} &= N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{(-\frac{i}{2\alpha} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)^2)} e^{i \int d^4x \bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b} e^{iS[A]}, \\ \Rightarrow \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} &= N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{iS_{FP}[A]}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que S_{FP} é dada pela integração do seguinte lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (2.43)$$

A equação (2.42) é suficiente para realizar a quantização das teorias de gauge não abelianas. Mas, visando a apresentação da simetria BRS no próximo capítulo, vamos reescrever o termo de gauge-fixing da equação (2.43) com a introdução do campo de Nakanishi-Lautrup, b^a . Assim como os demais campos b^a , também se transforma de maneira adjunta à $SU(N)$ e pode ser interpretado como um multiplicador de Lagrange para a condição de gauge-fixing [38–40],

$$\frac{\delta S_{FP}}{\delta b^a} = \partial^\mu A_\mu^a + \alpha b^a. \quad (2.44)$$

Dado o exposto, redefinimos a ação de Faddeev-Popov por:

$$S_{FP} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b + \frac{\alpha}{2} b^a b^a + b^a \partial^\mu A_\mu^a \right\}. \quad (2.45)$$

Além disso, devido à inserção desses novos campos de Faddeev-Popov, devemos definir um novo número quântico, o número de ghost, $\Phi\Pi$. Temos que,

$$\Phi\Pi c = +1, \quad \Phi\Pi \bar{c} = -1, \quad (2.46)$$

e os demais campos apresentam número de ghost igual a zero. Note que, a ação de Yang-Mills possui número de ghost nulo tanto antes, equação (2.19), quanto depois, equação (2.45), de ser realizado o processo de gauge-fixing.

Aqui, a escolha do gauge-fixing linear-covariante foi feita com o propósito de utilizá-lo adiante na discussão do modelo de Jackiw-Pi. Entretanto, qualquer outra escolha de gauge-fixing também pode ser feita, visto que as quantidades físicas são independentes dessa escolha.

No próximo capítulo, veremos explicitamente que os ghosts de Faddeev-Popov, apesar de dispor estados de norma negativa, dão conta em eliminar os graus de liberdade longitudinais dos campos de gauge.

Capítulo III

Renormalização algébrica

Durante a década de 60, os teóricos que estudavam a TQC buscavam resolver o problema relacionado à renormalizabilidade das teorias de gauge não-abelianas. Essa busca foi concluída por t'Hooft e Veltman em 1972 através do procedimento de regularização dimensional [41].

No entanto, ainda avaliando essa questão da renormalizabilidade das teorias não-abelianas, nos trabalhos de 1974 e 1976, Becchi, Rouet e Stora, mostram que a ação de Yang-Mills com o gauge-fixing realizado pelo mecanismo de Faddeev-Popov possuía uma simetria, que futuramente seria chamada de simetria BRS [19, 21].

Essa simetria BRS trouxe consigo o processo de renormalização algébrica que permitia a prova da renormalizabilidade de uma teoria em todas as ordens em uma expansão perturbativa sem a especificação de um método de regularização. Além disso, ela também está intimamente relacionada à unitariedade de uma teoria.

Tendo em vista a importância da simetria BRS, nesse capítulo, vamos partir da ação de Faddeev-Popov e apresentar a simetria nela contida. Em sequência, vamos adentrar, em talvez, seu aspecto mais importante: sua relação com a unitariedade da teoria. Finalmente, vamos discutir sobre o procedimento de renormalização algébrica, que permite a busca pela consistência a nível quântico de uma teoria por meio do estudo da cohomologia de um operador relacionado à simetria BRS.

3.1 Simetria BRS

Partindo da ação de Faddeev-Popov, equação (2.45) é possível perceber uma invariância ao atuar com o operador de BRS, s . As transformações dos campos devido à esse operador são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} sA_\mu^a = D_\mu^{ab}c^b = \partial_\mu c^a + gf^{abc}A_\mu^c c^b \\ sc^a = \frac{g}{2}f^{abc}c^b c^c \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} s\bar{c}^a = b^a \\ sb^a = 0 \end{array} \right. . \quad (3.1)$$

Veja que, as transformações do campo de gauge e do campo de ghost resultam em produtos de dois campos no mesmo ponto, ou seja, são transformações não-lineares. Já o campo de anti-ghost e o campo de Nakanishi-Lautrup são chamados de dubleto de BRS, pois a transformação de \bar{c} leva em b que é deixado invariante pela mesma transformação.

Antes de verificar a invariância de S_{FP} sob essa transformação, vamos ver algumas propriedades do operador de BRS. Fica claro pela equação (3.1) que ele eleva o número de ghost em uma unidade. Por exemplo, A_μ possui número de ghost zero e após a atuação de s temos uma quantidade com número de ghost $+1$. Além disso, o operador de BRS segue a estatística dos ghosts e apresenta a propriedade de nilpotência, ou seja,

$$s^2 = 0. \quad (3.2)$$

Essa propriedade é resultado da identidade de Jacobi satisfeita pelas constantes de estrutura, equação (2.11). Por exemplo, calculando $s^2 c^a$ temos,

$$\begin{aligned} s^2 c^a &= s \left(\frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c \right) = \frac{g^2}{2} f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c \\ \Rightarrow s^2 c^a &= -\frac{g^2}{6} (f^{acb} f^{bdc} + f^{adb} f^{bec} + f^{aeb} f^{bcd}) c^d c^e c^c \\ &\Rightarrow s^2 c^a = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Também podemos realizar o mesmo cálculo omitindo os índices de grupo. Determinando que para um campo qualquer, Φ , temos que $\Phi = \Phi^a T^a$, as transformações de BRS podem ser reescritas por:

$$\begin{cases} sA_\mu = D_\mu c = \partial_\mu c + ig[A_\mu, c] \\ sc = -igc^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} s\bar{c} = b \\ sb = 0 \end{cases}. \quad (3.4)$$

Então, resolvendo $s^2 c$ obtemos,

$$s^2 c = s(-igc^2) = -ig[(sc)c - c(sc)] = -g^2(c^3 - c^3) \Rightarrow s^2 c = 0. \quad (3.5)$$

É importante se lembrar que o operador de BRS anticomuta com os campos de ghost. De modo geral, precisamos definir a estatística dos campos levando em consideração tanto seu spin quanto seu número de ghost. Então, campos de spin semi-inteiro e número de ghost par, bem como campos de spin inteiro e número de ghost ímpar são anticomutantes; os demais comutam entre si.

Podemos agora discutir sobre a invariância de S_{FP} . A atuação de s no campo de gauge pode ser interpretada como uma transformação de gauge usual, tal qual à da equação (2.36), mas com o parâmetro de gauge sendo o campo de ghost c . Portanto, dado que a ação de Yang-Mills é invariante de gauge, perceber a invariância desse termo sob uma

transformação de BRS é imediata. De modo geral, qualquer termo invariante de gauge também é invariante sob BRS e, dessa forma pode ser adicionado à ação de uma teoria sem problemas.

Já o termo de gauge-fixing pode ser escrito como,

$$s \int d^4x \bar{c}^a \partial^\mu A_\mu^a = \int d^4x \{ b^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b \}. \quad (3.6)$$

Como estamos discutindo sobre a invariância da ação, ao calcularmos sS_{FP} , a nilpotencia do operador garante a invariância desse termo.

Isso, na verdade, é um caso particular de que toda ação de gauge-fixing, independente da escolha¹ de um gauge específico, pode ser reescrita como a variação BRS de um funcional integrado I que depende dos campos de gauge, ghost, anti-ghost e de Nakanishi-Lautrup,

$$S_{GF} = s \int d^4x \bar{c}^a I(A_\mu^a, c^a, \bar{c}^a, b^a). \quad (3.7)$$

Dizemos que o termo de gauge-fixing é um termo exato da cohomologia do operador de BRS. Todos os parâmetros de gauge aparecem sempre como uma quantidade exata da cohomologia, o que corrobora para sua natureza não física [42].

Conseqüentemente, é verificado que a ação de Faddeev-Popov é invariante de BRS,

$$sS_{FP} = 0. \quad (3.8)$$

Aqui, nosso foco não está nos campos de matéria. No entanto, a inserção desses campos é feita adicionando a ação de matéria S_M à teoria,

$$S_M = \int d^4x \bar{\psi}^i \gamma^\mu [\partial_\mu \delta^{ij} - ig(T^a)^{ij} A_\mu^a] \psi^j, \quad (3.9)$$

em que o termo entre colchetes é a derivada covariante dada pela equação (2.13) e os índices i e j são referentes a uma representação específica. As transformações de BRS desses campos são,

$$s\psi^i = ig(T^a)^{ij} \psi^j c^a, \quad s\bar{\psi}^j = -ig\bar{\psi}^j (T^a)^{ji} c^a. \quad (3.10)$$

De modo que $sS_M = 0$.

¹Desde que o gauge-fixing tomado seja renormalizável e continue sem interferir nos parâmetros físicos de uma teoria, qualquer um pode ser uma boa escolha. É claro que, alguns são mais fáceis de trabalhar do que outros, porém a escolha é dependente do objetivo.

3.2 Unitariedade da matriz S

Na construção de um modelo, é fundamental seguirmos algumas imposições de modo que, se satisfeitas, tal modelo possa fazer o papel de descrever um sistema. Aqui, teremos quatro condições a serem satisfeitas: causalidade, unitariedade, renormalizabilidade e invariância de Lorentz. As três primeiras são estritamente necessárias pois refletem, respectivamente, sobre a relação entre causa e efeito, sobre a conservação da probabilidade e sobre a consistência do modelo em nível quântico. Já a última pode não ser útil em alguns modelos específicos.

A relação entre a simetria BRS, apresentada na seção anterior, e a unitariedade da matriz S foi alcançada pela primeira vez nos trabalhos de Kugo e Ojima [43]. De modo mais específico, veremos como a carga de BRS está associada com o sub-espço físico de uma teoria. Para isso, vamos partir da ação de Faddeev-Popov, equação (2.45), e utilizar o gauge de Feynman, $\alpha = 1$,

$$S_{FP} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b + \frac{1}{2} b^a b^a + b^a \partial^\mu A_\mu^a \right\}. \quad (3.11)$$

Se assumimos que a teoria de Yang-Mills possui uma formulação LSZ², isto é que os estados assintóticos existam e estejam conectados por meio da matriz S , podemos avaliar a teoria livre,

$$S_{Free} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{c} \partial^\mu \partial_\mu c + \frac{1}{2} b^2 + b \partial^\mu A_\mu \right\}. \quad (3.12)$$

Note que, os índices de grupo são redundantes aqui e podem ser adicionados a qualquer momento sem dificuldades. A ação livre da equação (3.12), nada mais é do que a ação para a teoria de gauge abeliana no gauge de Feynman e com a adição dos ghosts e do campo de Nakanishi-Lautrup. Portanto, a transformação de seus campos sob a simetria BRS são as mesmas da equação (3.4), porém com $g = 0$.

Vamos então, buscar a criação do espaço de fock da teoria. Mas antes, a partir de S_{Free} , podemos encontrar as equações de movimento para os quatro campos. Para o campo b temos,

$$\frac{\delta S}{\delta b} = \partial^\mu A_\mu + b = 0 \Rightarrow b = -\partial^\mu A_\mu, \quad (3.13)$$

então, ele representa a parte longitudinal dos campos de gauge. Já os demais campos

²A formulação LSZ nos diz que os estados assintóticos $|in\rangle$ e $|out\rangle$ de uma teoria são conectados através da matriz de espalhamento, matriz S , que traduz a parte interativa da teoria em questão [14]. Para a teoria de Yang-Mills pura os estados assintóticos não existem, pois a teoria descreve os glúons que apresentam estado confinante. No entanto, aqui usaremos o arcabouço LSZ para Yang-Mills com um interesse matemático.

satisfazem equações de Klein-Gordon,

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} = \square A_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu - b) = 0 \Rightarrow \square A_\mu = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\delta S}{\delta c} = \square \bar{c} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{c}} = -\square c = 0, \quad (3.16)$$

e, portanto, é possível realizar uma expansão em ondas planas com os respectivos operadores de criação e destruição. Para fazer isso, seguimos as propriedades de hermiticidade utilizadas por Kugo-Ojima [43]:

$$c^\dagger = c, \quad \bar{c}^\dagger = -\bar{c}, \quad A_\mu^\dagger = A_\mu, \quad b^\dagger = b. \quad (3.17)$$

Sendo assim, expandindo os campos de ghost e as componentes do campo de gauge em ondas planas e utilizando a equação (3.13) para encontrar o campo b , temos:

$$A_0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a_0(k)e^{-ikx} + a_0^\dagger(k)e^{ikx} \right]; \quad (3.18)$$

$$A_i(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{m=1}^3 \left[a_m(k)\epsilon_i^{(m)}(k)e^{-ikx} + a_m^\dagger(k)\epsilon_i^{(m)}(k)e^{ikx} \right]; \quad (3.19)$$

$$c(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[c(k)e^{ikx} + c^\dagger(k)e^{-ikx} \right]; \quad (3.20)$$

$$\bar{c}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[\bar{c}(k)e^{ikx} - \bar{c}^\dagger(k)e^{-ikx} \right]; \quad (3.21)$$

$$b(x) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left\{ [a_0(k) - a_3(k)] e^{ikx} - [a_0^\dagger(k) - a_3^\dagger(k)] e^{-ikx} \right\}; \quad (3.22)$$

em que os vetores $\epsilon^{(m)}$ são os vetores de polarização tais que, $\epsilon^{(3)} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ e $\vec{\epsilon}^{(m)} \cdot \vec{\epsilon}^{(n)} = \delta^{mn}$ e \vec{k} o vetor de onda. Esse conjunto de equações nos mostram que, como era de se esperar para uma teoria invariante de Lorentz, temos quatro graus de liberdade para o campo de gauge: dois físicos, os transversais, e os não físicos, o longitudinal e o temporal. Para o campo b , vemos claramente que as polarizações transversais não aparecem.

Seguindo, podemos calcular os momentos conjugados, $\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)}$, em que Φ é um campo qualquer. Portanto,

$$\pi_0^A = b, \quad \pi_i^A = -F_{0i}, \quad \pi_c = \partial_0 \bar{c}, \quad \pi_{\bar{c}} = -\partial_0 c, \quad (3.23)$$

e deles, encontrar as relações de comutação e anti-comutação dos operadores:

$$[a_0(k), a_0^\dagger(k')] = -2(2\pi)^3 \omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'); \quad (3.24)$$

$$[a_i(k), a_j^\dagger(k')] = 2(2\pi)^3 \omega_k \delta_{ij} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'); \quad (3.25)$$

$$[c(k), \bar{c}^\dagger(k')] = -2(2\pi)^3 \omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'); \quad (3.26)$$

$$[\bar{c}(k), c^\dagger(k')] = -2(2\pi)^3 \omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'); \quad (3.27)$$

Agora, propondo que a atuação dos operadores de destruição no vácuo é zero,

$$a_0(k) |0\rangle = a_i(k) |0\rangle = c(k) |0\rangle = \bar{c}(k) |0\rangle = 0. \quad (3.28)$$

A partir daí, existe a possibilidade de estados com norma negativa, por exemplo,

$$\langle 0 | a_0(k') a_0^\dagger(k) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_0(k'), a_0^\dagger(k)] | 0 \rangle = -2(2\pi)^3 \omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'); \quad (3.29)$$

$$\langle 0 | \bar{c}(k') c(k) c^\dagger(q) \bar{c}^\dagger(q') | 0 \rangle = -\langle 0 | \{ \bar{c}(k'), c^\dagger(q) \} \{ c(k) \bar{c}^\dagger(q') \} | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \bar{c}(k') c(k) c^\dagger(q) \bar{c}^\dagger(q') | 0 \rangle = -4(2\pi)^6 \omega_k \delta^3(\vec{q} - \vec{k}') \delta^3(\vec{k} - \vec{q}'); \quad (3.30)$$

$$\langle 0 | a_j(k') a_i^\dagger(k) | 0 \rangle = 2(2\pi)^3 \omega_k \delta_{ij} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'); \quad (3.31)$$

Note que, as equações (3.29) e (3.30) mostram explicitamente estados de norma negativa que ferem a conservação da probabilidade e a equação (3.31) mostra a existência do modo longitudinal.

Então, temos que restringir o espaço de Hilbert para um o sub-espaço físico que só contenha estados de norma positiva e estados que tenham algum significado físico. Então, vamos ver como a carga de BRS é definida e se relaciona com esse sub-espaço. Pelo teorema de Noether,

$$\mathcal{J}_{BRS}^\mu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu c + b \partial^\mu c, \quad (3.32)$$

é a corrente associada à simetria BRS e a carga associada, sabendo que $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\nu b$, é

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{BRS} &= \int d^3x [b \partial^0 c - (\partial^0 b) c] \\ \mathcal{Q}_{BRS} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ c_k^\dagger [a_0(k) - a_3(k)] + c_k [a_0^\dagger(k) - a_3^\dagger(k)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde foi utilizado as expansões de ondas planas para os campos. Note que a carga de BRS avalia somente os operadores referentes à parte problemática do espaço de Hilbert. Além disso, ela também satisfaz a relação de nilpotência, $\mathcal{Q}_{BRS}^2 = 0$.

Introduzimos mais dois operadores: o operador de contagem, \mathcal{N} , que conta o número

de modos que não queremos em nosso sub-espço físico,

$$\mathcal{N} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a_3^\dagger(k) a_3(k) - a_0^\dagger(k) a_0(k) - c^\dagger(k) \bar{c}(k) - \bar{c}^\dagger(k) c(k) \right]. \quad (3.34)$$

e o operador \mathcal{R} [44],

$$\mathcal{R} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{8\omega_k^2} \left\{ \left[a_0^\dagger(k) + a_3^\dagger(k) \right] \bar{c}(k) + \bar{c}^\dagger(k) \left[a_0(k) + a_3(k) \right] \right\}, \quad (3.35)$$

que nos permite representar o operador número em função da carga de BRS:

$$\mathcal{N} = \{ \mathcal{Q}_{BRS}, \mathcal{R} \}. \quad (3.36)$$

O sub-espço que buscamos é tal que,

$$\mathcal{H}_{Phys} = \{ |f\rangle \}; \quad \mathcal{Q}_{BRS}|f\rangle = 0; \quad |f\rangle \neq \mathcal{Q}_{BRS}|f'\rangle. \quad (3.37)$$

Ou seja, \mathcal{H}_{Phys} é composto por todos os estados que são aniquilados pela carga de BRS e não podem ser escritos pela atuação da carga de BRS em outro estado. Portanto, o sub-espço físico é dado pela cohomologia³ do operador \mathcal{Q}_{BRS} .

Vamos supor um estado $|g\rangle$ que é aniquilado pela carga de BRS e possua algum modo não físico,

$$\mathcal{Q}_{BRS}|g\rangle = 0; \quad \mathcal{N}|g\rangle = n|g\rangle, n \neq 0. \quad (3.38)$$

Sendo assim, podemos reescrevê-lo utilizando o anti-comutador da equação (3.36),

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \frac{1}{n} \{ \mathcal{Q}_{BRS}, \mathcal{R} \} |g\rangle = \mathcal{Q}_{BRS} \left(\frac{1}{n} \mathcal{R} |g\rangle \right) + \mathcal{R} \left(\frac{1}{n} \mathcal{Q}_{BRS} |g\rangle \right) \\ |g\rangle &= \mathcal{Q}_{BRS} \left(\frac{1}{n} \mathcal{R} |g\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Logo, a equação (3.39) comprova a ausência dos estados não físicos no sub-espço \mathcal{H}_{Phys} . Sendo assim, um elemento genérico do sub-espço físico é dado por

$$|f\rangle = a_1^{\dagger m} a_2^{\dagger n} |0\rangle. \quad (3.40)$$

Tal estado é aniquilado por \mathcal{Q}_{BRS} , como é possível observar pela equação (3.33) que não possui dependência dos modos transversais. Uma prova dentro da linguagem de cohomologia pode ser encontrada em [45].

³O problema de cohomologia discutido consiste em resolver a equação $\mathcal{Q}_{BRS}|F\rangle = 0$ e é decorrente da propriedade de nilpotência de \mathcal{Q}_{BRS} . As soluções para essa equação são tais que $|F\rangle = |f\rangle + \mathcal{Q}_{BRS}|f'\rangle$. Em que, $|f'\rangle$ compõe o conjunto de soluções triviais desse operador e $|f\rangle$ compõe as soluções não triviais. No presente contexto, $|f\rangle$ são os estados referentes aos modos de propagação físicos e, portanto, o sub-espço físico é composto pelas soluções não triviais da cohomologia da carga de BRS.

Assumimos no início da seção a existência dos estados assintóticos para a teoria, tais que estão conectados por meio da matriz S . Sabendo que é possível representar essa matriz de espalhamento na forma operatorial e que ela possui uma relação de comutação com a carga de BRS [43, 46],

$$[\mathcal{Q}_{BRS}, S] = 0, \quad (3.41)$$

podemos obter a unitariedade da matriz S .

Primeiro vamos propor a existência de um estado inicial, $|in\rangle$, que possui modos não físicos, então da equação (3.39),

$$|in\rangle = \mathcal{Q}_{BRS}|in'\rangle, \quad (3.42)$$

e calcular a probabilidade de espalhamento entre ele e um estado final, $|out\rangle$ composto por modos físicos.

$$\langle in | S | out \rangle = \langle in' | \mathcal{Q}_{BRS} S | out \rangle = \langle in' | S \mathcal{Q}_{BRS} | out \rangle.$$

Se o estado final é físico, segue da equação (3.37) que,

$$\langle in | S | out \rangle = 0. \quad (3.43)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para um estado inicial físico e um estado final não físico.

Agora, vamos supor que ambos os estados sejam não físicos. Calculando a probabilidade de transição entre eles é,

$$\langle in | S | out \rangle = \langle in' | \mathcal{Q}_{BRS} S \mathcal{Q}_{BRS} | out' \rangle = \langle in' | S \mathcal{Q}_{BRS}^2 | out' \rangle.$$

Logo, da nilpotência da carga de BRS, também obtemos um resultado nulo,

$$\langle in | S | out \rangle = 0. \quad (3.44)$$

Portanto, todos os elementos da matriz S não recebem contribuições dos modos não físicos, ou seja, o modo longitudinal de propagação, e os modos de norma negativa se reagrupam de modo a não fornecer nada à matriz. Com isso, os únicos modos que restam são os do sub-espço físico.

Considerando o que foi discutido nessa seção sobre a relação entre a carga de BRS e a unitariedade da matriz S e a existência de um sub-espço físico, dado que uma teoria apresenta a simetria de BRS ao nível clássico, é de extrema importância garantir sua extensão à nível quântico.

3.3 Renormalização

Ainda precisamos avaliar a extensão quântica⁴ da simetria BRS, pois caso não possa ser feita, toda a discussão da seção anterior sobre a unitariedade da matriz S da teoria é colocada em risco.

Dada as transformações não lineares do campo de calibre e do ghost, é necessário inserir o seguinte termo à ação de Faddeev-Popov,

$$S_{EXT} = \int d^4x \{ -A_\mu^{*a} sA^\mu + c^{*a} sc^a \}, \quad (3.45)$$

A_μ^* e c^* são conhecidos com fontes externas ou anti-campos e possuem número de ghost igual a -1 e -2 , respectivamente. A necessidade em adicionar tal termo está em controlar as divergências e garantir a renormalização dessas transformações em nível quântico [42].

As fontes externas são invariantes por transformações de BRS, ou seja,

$$sA_\mu^* = 0, \quad sc^* = 0. \quad (3.46)$$

Então a invariância da equação (3.45) é imediata.

Sendo assim, definimos a ação à tree-level invariante de BRS,

$$\Gamma^{(0)} = S_{FP} + S_{EXT}, \quad (3.47)$$

que será o ponto de partida para avaliarmos a extensão quântica da teoria.

A simetria BRS também pode ser expressa em sua forma funcional por meio da identidade de Slavnov-Taylor,

$$\mathcal{S}(\Gamma^{(0)}) = 0 \quad (3.48)$$

em que \mathcal{S} é o operador de Slavnov-Taylor dado por,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma^{(0)}) &= \int d^4x \left\{ (sA_\mu^a) \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu^a} + (sc^a) \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^a} + (s\bar{c}^a) \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{c}^a} \right. \\ &\quad \left. + (sb^a) \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta b^a} + (sA_\mu^{*a}) \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu^{*a}} + (sc^{*a}) \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^{*a}} \right\} \\ \Rightarrow \mathcal{S} &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu^{*a}} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^{*a}} \frac{\delta}{\delta c^a} + b^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Note que, utilizamos as transformações de BRS das equações (3.1) e (3.46) e o fato de que a derivada funcional de $\Gamma^{(0)}$ em relação às fontes externas, claramente, nos retorna sA_μ^a e sc .

⁴Entende-se como extensão quântica de alguma simetria a sua existência após utilizar algum método perturbativo possuindo a ação a tree-level como termo de ordem zero. A teoria de perturbação é avaliada de acordo com o número de loops ou em potências de \hbar [32, 33].

Outro operador funcional que será útil introduzir é o operador linearizado,

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu^{*a}} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta}{\delta A_\mu^{*a}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^{*a}} \frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta c^{*a}} + b^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} \right\}. \quad (3.50)$$

Juntos, tais operadores satisfazem as seguintes propriedades,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} = 0, \quad (3.52)$$

onde \mathcal{F} é um funcional qualquer e a propriedade (3.52) reflete a propriedade de nilpotência do operador de BRS.

A possível extensão quântica da identidade de Slavnov-Taylor, equação (3.48), é permitida pelo princípio de ação quântica (QAP) [42]. De maneira bem prática, o QAP nos diz que: dada uma ação a tree-level $\Gamma^{(0)}$ que obedece uma identidade do tipo

$$W(\Gamma^{(0)}) = \Delta_{lin}, \quad (3.53)$$

e seja Γ o funcional quântico obtido ao aplicar algum procedimento de regularização genérico,

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \mathcal{O}(\hbar^n) \quad n \geq 1, \quad (3.54)$$

temos que

$$W(\Gamma) = \Delta_{lin} + \hbar^n \Delta^{(n)} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \quad n \geq 1, \quad (3.55)$$

em que $\Delta^{(n)}$ é um polinômio local integrado dependente dos campos, fontes externas e parâmetros que possui os mesmos números quânticos que o operador W [42]. Dessa forma o princípio de ação quântica indica que, em uma certa ordem n , há a possibilidade da quebra da simetria na ação quântica. Tal quebra é chamada de anomalia e, sendo assim, se uma simetria é quebrada em nível quântico, dizemos que a teoria é anômala⁵.

Aplicando o princípio de ação quântica para verificar a possível extensão da identidade de Slavnov-Taylor, equação (3.48), temos que

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \hbar^n \Delta^{(n)} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}). \quad (3.56)$$

Utilizando a equação (3.51) para o funcional quântico e expansão do operador linearizado, $\mathcal{S}_\Gamma = \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} + \mathcal{O}(\hbar^n)$, obtemos a condição de consistência de Wess-Zumino para o possível termo de anomalia,

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta = 0. \quad (3.57)$$

⁵É importante ressaltar que a presença de anomalias ocorre de maneira independente ao método de regularização utilizado. Alguns métodos de regularização por si só podem quebrar uma simetria de uma teoria, no entanto, essa quebra não significa uma anomalia.

A solução dessa condição representa um problema de cohomologia do operador linearizado no setor de número de ghost $+1$. Logo, Δ pode ser escrito como a soma dos termos exatos da cohomologia e dos termos não-triviais,

$$\Delta = \hat{\Delta} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \tilde{\Delta}. \quad (3.58)$$

Uma das maneiras de resolver a condição de consistência é através das equações de descida [42]. Mas, caso Δ possa ser representado somente pela parte trivial da cohomologia,

$$\Delta = \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \tilde{\Delta}, \quad (3.59)$$

em que $\tilde{\Delta}$ é um polinômio local integrado com número de ghost 0, a extensão da simetria BRS é concebida, de modo que $\tilde{\Delta}$ pode ser adicionado ao funcional de vértice Γ como um contratermo não-invariante:

$$\Gamma \rightarrow \Gamma - \hbar^n \tilde{\Delta} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}). \quad (3.60)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma - \hbar^n \tilde{\Delta}) &= \mathcal{S}(\Gamma) - \hbar^n \tilde{\Delta} \\ \mathcal{S}(\Gamma - \hbar^n \tilde{\Delta}) &= \mathcal{O}(\hbar^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Desse modo, a simetria BRS é satisfeita à ordem n na expansão de loops. A vantagem do método algébrico está na extensão desse raciocínio de maneira iterativa às ordens superiores. Perceba então, que uma anomalia⁶ pertence aos elementos não triviais da cohomologia.

Além da identidade de Slavnov-Taylor, também temos outras identidades funcionais que descrevem o modelo, dentre elas:

$$\frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta b^a} = \partial^\mu A_\mu^a + \alpha b^a; \quad (3.62)$$

$$\mathcal{G}\Gamma = \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^*} \right) \Gamma = 0; \quad (3.63)$$

são respectivamente, a condição de gauge-fixing e a equação de ghost. Também devemos verificar a existência dessas identidades em nível quântico e de fato, elas são satisfeitas. Por exemplo, utilizando o princípio de ação quântica, para a condição de gauge-gixing temos que,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta b^a} = \partial^\mu A_\mu^a + \alpha b^a + \hbar^n \Delta^a + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}). \quad (3.64)$$

Nesse caso, dado que os termos da equação (3.62) possuem dimensão dois, temos que a

⁶No caso da simetria BRS, a possível anomalia é conhecida como anomalia de gauge e sua existência leva a problemas à unitariedade da teoria e invalida sua consistência.

forma mais geral possível para o possível termo de quebra é,

$$\Delta^a = f^a(A_\mu, c, \bar{c}) + \kappa_{ab} b^b, \quad (3.65)$$

onde $f^a(A_\mu, c, \bar{c})$ é um polinômio de dimensão dois e κ_{ab} são números. É fato que as derivadas funcionais em relação ao campo b comutam. Logo, temos a seguinte condição de consistência,

$$\left[\frac{\delta}{\delta b^a(x)}, \frac{\delta}{\delta b^b(y)} \right] = 0. \quad (3.66)$$

Aplicando essa condição à equação (3.64),

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta}{\delta b^a(x)}, \frac{\delta}{\delta b^b(y)} \right] \Gamma &= \frac{\delta}{\delta b^a(x)} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta b^b(y)} \right) - \frac{\delta}{\delta b^b(y)} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta b^a(x)} \right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\delta}{\delta b^a(x)} \Delta^b(y) - \frac{\delta}{\delta b^b(y)} \Delta^a(x) &= 0 \\ \kappa_{ba} - \kappa_{ab} &= 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

obtemos que κ é uma quantidade simétrica e, portanto, Δ pode ser representado por

$$\Delta^a(x) = \frac{\delta}{\delta b^a(x)} \int d^4y \left(b^a f^a + \frac{1}{2} \kappa_{ab} b^a b^b \right) = \frac{\delta}{\delta b^a(x)} \tilde{\Delta}. \quad (3.68)$$

De maneira análoga à equação (3.61), podemos redefinir o funcional de vértice Γ adicionando o contratermo não-invariante $-\tilde{\Delta}$ e garantir a validade da condição de gauge-fixing ordem a ordem.

Já a renormalizabilidade da equação de ghost, pode ser feita de maneira semelhante à da condição de gauge-fixing. Para isso, é feita uma troca de variáveis,

$$A_\mu^* \rightarrow \tilde{A}_\mu^*, \quad \tilde{A}_\mu^* = A_\mu^* + \partial_\mu \bar{c}. \quad (3.69)$$

Com isso, a equação (3.63) passa a ser,

$$\frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta \bar{c}} = 0. \quad (3.70)$$

Além de verificar a existência de anomalias em uma teoria, também é necessário verificar sua renormalizabilidade multiplicativa, ou seja, sua estabilidade em relação às correções radiativas. Se a teoria for estável, as correções radiativas, podem ser absorvidas ordem a ordem por meio da redefinição dos campos, constantes de acoplamento e parâmetros de massa da teoria. Essa verificação é feita tendo como ponto de partida uma perturbação da ação à tree-level em relação a um parâmetro infinitesimal ϵ ,

$$\tilde{\Gamma}^{(0)} = \Gamma^{(0)} + \epsilon \Gamma^c. \quad (3.71)$$

Note que, o contratermo invariante Γ^c possui os mesmos números quânticos que a ação a tree-level e satisfaz a seguinte condição:

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}(\Gamma^c) = 0. \quad (3.72)$$

Essa equação é semelhante à equação (3.57). Mas agora, é necessário resolver o problema de cohomologia do operador linearizado no setor de número de ghost zero.

Então, o método de renormalização algébrica consiste em avaliar a consistência da teoria, através do princípio de ação quântica, examinando a existência de alguma anomalia em uma ordem n qualquer da expansão feita por algum método genérico de regularização. Caso a existência da anomalia seja confirmada, é fato que a teoria é anômala e outros métodos devem ser buscados para tentar tratar a questão. Caso contrário, a prova da ausência de anomalia pode ser repetida de maneira iterativa. Isso exprime o poder do método algébrico.

Capítulo IV

O modelo de Jackiw-Pi

É fato que o interesse de estudo das TQC's em $(2+1)$ dimensões espaço-temporais é além do teórico, devido à sua aplicabilidade em sistemas de matéria condensada. Fenômenos como o efeito Hall quântico e a supercondutividade a alta temperatura crítica e sistemas como o grafeno e isolantes topológicos são alguns exemplos dessa aplicação [25–28]. Com isso em mente, neste capítulo vamos apresentar o modelo desenvolvido pelo casal de físicos Roman Jackiw e So-Young Pi.

O modelo de Jackiw-Pi¹ surgiu em 1997 enquanto os autores se debruçavam sobre a questão de teorias de campo em três dimensões que produziam um gap de massa e, portanto, descreviam campos de gauge massivos. Ao longo desse estudo, eles propuseram um modelo não-abeliano em $(2 + 1)$ dimensões que possuía: invariância de gauge; campos de gauge massivos, através da inclusão de um termo tipo Chern-Simons; e ao mesmo tempo simetria de paridade [29].

Era conhecida a possibilidade de modelos com termos topológicos para geração de massa sem a quebra da simetria de gauge, mas tais modelos quebravam a simetria de paridade [23, 24]. No entanto, o modelo de Jackiw-Pi conseguia contornar a quebra da paridade quebrando também o paradigma de Yang-Mills, ou seja, se tratava de um modelo não-abeliano que não partia de nenhum modelo abeliano para sua generalização.

Esse feito trouxe ao modelo características bastante peculiares, dentre elas a de possuir duas transformações de gauge em detrimento de apenas um grupo de simetria não-abeliano. Apesar de tudo isso, os autores acabam seu artigo comentando sobre a impossibilidade de encontrar um gauge-fixing para o modelo bem como sua realização em teoria de perturbação.

Não obstante, em trabalhos recentes, a estruturação de um gauge-fixing é factível e sua estrutura à tree-level é avaliada [47, 48]. A partir disso, a análise do modelo de Jackiw-Pi em nível quântico torna-se possível.

¹A colaboração entre o casal de físicos originou diversos trabalhos e acarretou mais de um modelo com o nome de “modelo de Jackiw-Pi”. Então, para deixar ainda mais explícito, o modelo estudado no presente trabalho é referente à [29].

Então, nesse capítulo, apresentaremos toda a estrutura do modelo à tree-level e iremos utilizar do arcabouço da renormalização algébrica para avaliar sua extensão quântica.

4.1 Simetrias e peculiaridades

O modelo de Jackiw-Pi possui a seguinte ação,

$$S_{JP} = \text{Tr} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (G^{\mu\nu} + g [F^{\mu\nu}, \rho]) (G_{\mu\nu} + g [F_{\mu\nu}, \rho]) - m \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} \phi_\rho \right\}, \quad (4.1)$$

em que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g [A_\mu, A_\nu]$ é o field strength de Yang-Mills, idêntico ao da equação (2.17) e $G_{\mu\nu} \equiv D_\mu \phi_\nu - D_\nu \phi_\mu$. Tal modelo pode descrever mésons vetoriais, ϕ_μ , interagindo com campos de gauge A_μ , ambos massivos graças à presença do termo do tipo Chern-Simons. É um modelo tridimensional que possui o grupo de simetria não-abeliano $SU(N)$. Aqui utilizaremos sua representação adjunta e, por conveniência, as seguintes redefinições das equações (2.10) e (2.20),

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c, \quad \text{tr}[T^a T^b] = -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (4.2)$$

Já a derivada covariante D_μ continua idêntica à equação (2.35).

Os campos A_μ e ϕ_μ são campos vetoriais e ρ um campo escalar, no sentido de uma transformação de Lorentz. Além disso, o campo ρ é introduzido pelos autores para que a ação seja invariante às seguintes transformações infinitesimais [29]:

$$\delta_\theta A_\mu = D_\mu \theta, \quad \delta_\theta \phi_\mu = g [\phi_\mu, \theta], \quad \delta_\theta \rho = g [\rho, \theta]. \quad (4.3)$$

$$\delta_\chi A_\mu = 0, \quad \delta_\chi \phi_\mu = D_\mu \chi, \quad \delta_\chi \rho = -\chi. \quad (4.4)$$

O intrigante do modelo está em, apesar de possuir somente um grupo de simetria, $SU(N)$, a ação apresenta duas simetrias de gauge: uma em relação ao parâmetro infinitesimal θ e outra em relação ao parâmetro infinitesimal χ . Note que, a interpretação de A_μ e ϕ_μ como campos de gauge se deve, respectivamente, às transformações em relação aos parâmetros infinitesimais θ e χ . Por consequência dessas duas simetrias presentes e de sua própria construção, o modelo de Jackiw-Pi é uma teoria de gauge não-abeliana que não é construído a partir da generalização de um modelo abeliano e, portanto, quebra o paradigma de Yang-Mills.

Como discutido na seção 3.1, vamos trabalhar em cima da simetria BRS. Para a S_{JP} temos as seguintes transformações de BRS para os campos envolvidos no modelo:

$$sA_\mu = D_\mu c, \quad s\phi_\mu = D_\mu \xi + g [\phi_\mu, c], \quad s\rho = -\xi + g [\rho, c],$$

$$\begin{aligned}
sc &= -gc^2, & s\xi &= -g[\xi, c], \\
s\bar{c} &= b, & sb &= 0, & s\bar{\xi} &= \pi, & s\pi &= 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Note que, temos cinco transformações não lineares e dois pares de dubletos de BRS.

Agora temos duas transformações de gauge, então é necessário introduzir dois tipos de ghost, c e ξ , dois tipos de anti-ghost, \bar{c} e $\bar{\xi}$, e dois campos de Nakanishi-Lautrup, b e π . A introdução desses campos é feita pelos mesmos motivos discutidos na seção 2.3, ou seja definir um gauge-fixing. Bem como discutido em [47, 48] é adotado um gauge-fixing linear covariante, com condições dadas por:

$$\frac{\delta S_{GF}}{\delta b} = \partial^\mu A_\mu + \alpha b, \quad \frac{\delta S_{GF}}{\delta \pi} = \partial^\mu \phi_\mu + \beta \pi, \tag{4.6}$$

onde α e β são os parâmetros de gauge.

A equação (3.7) nos informa que a ação de gauge-fixing, S_{GF} , pode sempre ser escrita como a variação de BRS de algum funcional integrado. Nesse caso,

$$S_{GF} = sTr \int d^3x \left\{ \bar{c} \partial^\mu A_\mu + \bar{\xi} \partial^\mu \phi_\mu + \frac{\alpha}{2} \bar{c} b + \frac{\beta}{2} \bar{\xi} \pi \right\}. \tag{4.7}$$

Utilizando as equações (4.5) da transformação de BRS, temos

$$S_{GF} = Tr \int d^3x \left\{ b \partial^\mu A_\mu - \bar{c} \partial^\mu D_\mu c + \pi \partial^\mu \phi_\mu - \bar{\xi} \partial^\mu (D_\mu \xi + g[\phi_\mu, c]) + \frac{\alpha}{2} b^2 + \frac{\beta}{2} \pi^2 \right\} \tag{4.8}$$

Além disso, a nilpotência do operador de BRS, s , pode ser verificada. Para isso, devemos lembrar que, devido à presença dos ghosts, as relações de comutação e anti-comutação devem levar em conta tanto o número de ghost quanto o spin de cada campo. Então, a estatística dos campos é feita da mesma maneira que apresentado na seção 3.1: campos de spin semi-inteiro e número de ghost par, bem como campos de spin inteiro e número de ghost ímpar são anticomutantes; os demais comutam entre si. Isso pode ser apreciado através de um comutador graduado,

$$[\Phi_1^{g_1}, \Phi_2^{g_2}] \equiv \Phi_1^{g_1} \Phi_2^{g_2} - (-1)^{g_1 g_2} \Phi_2^{g_2} \Phi_1^{g_1}, \tag{4.9}$$

onde Φ_1 e Φ_2 são quaisquer um dos campos presentes no modelo e g_1 e g_2 seus respectivos números de ghost que podem ser encontrados na tabela IV.1.

Tendo em vista as transformações não-lineares na equação (4.5), é preciso introduzir os anti-campos, A_μ^* , ϕ_μ^* , ρ^* , c^* , ξ^* , de modo a controlar a renormalização de tais transformações a nível quântico. Então a ação de fontes externas é,

$$S_{EXT} = Tr \int d^3x \{ A_\mu^* s A^\mu + \phi_\mu^* s \phi^\mu + \rho^* s \rho + c^* s c + \xi^* s \xi \}. \tag{4.10}$$

Além disso, os anti-campos são quantidades invariantes de BRS.

Finalmente, a ação à tree-level para o modelo de Jackiw-Pi é

$$\Gamma^{(0)} = S_{JP} + S_{GF} + S_{EXT}. \quad (4.11)$$

Já foi discutido na seção 3.1 sobre a invariância de BRS de S_{GF} e como as fontes externas são invariantes, a invariância de BRS de S_{EXT} é observada de maneira imediata. Quanto à invariância de S_{JP} sob as transformações de BRS temos que verificar o segundo termo, $S_{JP}^{(2)}$, e o terceiro termo, $S_{JP}^{(3)}$, visto que o primeiro termo é a ação de Yang-Mills que é invariante por BRS. Para isso, utilizando as transformações da equação (4.5) temos outras transformações que auxiliam para a verificação da invariância,

$$\begin{aligned} sF_{\mu\nu} &= g [F_{\mu\nu}, c], & sG_{\mu\nu} &= g \{ [F_{\mu\nu}, \xi] + [G_{\mu\nu}, c] \}, \\ s([F_{\mu\nu}, \rho]) &= [\xi, F_{\mu\nu}] + g \{ [F_{\mu\nu}\rho, c] - [\rho F_{\mu\nu}, c] \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Então, a invariância do segundo termo de S_{JP} é obtida,

$$\begin{aligned} sS_{JP}^{(2)} &= \text{Tr} \int d^3x \frac{1}{2} s (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + g G^{\mu\nu} [F_{\mu\nu}, \rho] + g [F^{\mu\nu}, \rho] G_{\mu\nu} + g^2 [F_{\mu\nu}, \rho] [F^{\mu\nu}, \rho]) \\ \Rightarrow sS_{JP}^{(2)} &= \text{Tr} \int d^3x \frac{1}{2} \{ 2g G_{\mu\nu} ([F^{\mu\nu}, \xi] + [G^{\mu\nu}, c]) + 2g^2 ([F_{\mu\nu}, \xi] + [G_{\mu\nu}, c]) [F^{\mu\nu}, \rho] \\ &\quad + 2g G_{\mu\nu} [\xi, F^{\mu\nu}] + 2g^2 G_{\mu\nu} ([F^{\mu\nu}\rho, c] - [\rho F^{\mu\nu}, c]) + 2g^2 [F_{\mu\nu}, \rho] [\xi, F^{\mu\nu}] \\ &\quad + 2g^2 [F_{\mu\nu}, \rho] ([F^{\mu\nu}\rho, c] - [\rho F^{\mu\nu}, c]) \} \\ sS_{JP}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

É importante ressaltar que o desenvolvimento para chegar à equação (4.13) é feito utilizando a propriedade cíclica do traço.

Agora, para o termo do tipo Chern-Simons,

$$\begin{aligned} sS_{JP}^{(3)} &= -m \text{Tr} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} (F_{\mu\nu} D_\rho \xi + g [F_{\mu\nu} \phi_\rho, c]) \\ \Rightarrow sS_{JP}^{(3)} &= -m \text{Tr} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu (F_{\nu\rho} \xi). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Portanto, a ação de Jackiw-Pi a tree level, equação (4.11) é invariante sob as transformações de BRS a menos de uma derivada total devido à transformação do termo do tipo Chern-Simons, equação (4.14). Essa estrutura sugere que, em nível quântico, a função- β associada a massa seja nula [49–51].

Além de sua invariância de BRS, $\Gamma^{(0)}$ também é invariante por transformações de

paridade, P , definidas por:

$$\begin{aligned} A_\mu \xrightarrow{P} A_\mu^P &= (A_0, -A_1, A_2), & \phi_\mu \xrightarrow{P} \phi_\mu^P &= (-\phi_0, \phi_1, -\phi_2), \\ \omega \xrightarrow{P} \omega^P &= \omega, \quad \omega = \{b, c, \bar{c}\}; & \sigma \xrightarrow{P} \sigma^P &= -\sigma, \quad \sigma = \{\rho, \pi, \xi, \bar{\xi}\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ou seja, o campo A_μ se transforma como vetor, ϕ_μ como pseudo-vetor, os campos ω como escalares e σ como pseudo-escalares.

4.1.1 Consistência à tree-level

A fim de estudar a consistência da ação de Jackiw-Pi à tree-level, ou seja, avaliar sua unitariedade e causalidade, vamos encontrar os propagadores para os campos da teoria por meio da ação livre,

$$\begin{aligned} S_{Free} = \text{Tr} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - m \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} \phi_\rho + b \partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2} b^2 \right. \\ \left. + \pi \partial^\mu \phi_\mu + \frac{\beta}{2} \pi^2 - \bar{c} \partial^\mu \partial_\mu c - \bar{\xi} \partial^\mu \partial_\mu \xi \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Utilizando os operadores de projeção apresentados no apêndice A na tabela (A.1) e avaliando o traço da ação para deixar a estrutura de grupo explícita, temos que

$$\begin{aligned} S_{Free} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu^a \square \Theta^{\mu\nu} A_\nu^a + \frac{1}{2} \phi_\mu^a \square \Theta^{\mu\nu} \phi_\nu^a + m A_\mu^a \Sigma^{\mu\nu} \phi_\nu^a - \frac{1}{2} b^a \partial^\mu A_\mu^a - \frac{\alpha}{4} b^a b^a \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \pi^a \partial^\mu \phi_\mu^a - \frac{\beta}{4} \pi^a \pi^a + \frac{1}{2} \bar{c}^a \square c^a + \frac{1}{2} \bar{\xi}^a \square \xi^a \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Seguindo [47], o propagador para um campo qualquer Φ_i é dado pela derivada do funcional gerador conexo $Z^c[J_i]$,

$$\langle T \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle = -i \frac{\delta^2 Z^c}{\delta J_i(x) J_j(y)}, \quad (4.18)$$

onde $J_i(x)$ são as fontes clássicas e $Z^c[J_i]$ é dado por uma transformação de Legendre do funcional de vértice à tree-level,

$$Z^c[J_i] = \Gamma^{(0)}[\Phi_i] + \text{Tr} \int d^3x \left\{ A_\mu J_A^\mu + \phi_\mu J_\phi^\mu + b J_b + \pi J_\pi + \bar{J}_c c + J_{\bar{c}} \bar{c} + \bar{J}_\xi \xi + J_{\bar{\xi}} \bar{\xi} \right\}. \quad (4.19)$$

Perceba que, derivando $Z^c[J_i]$ em relação às fontes clássicas obtemos os campos correspondentes e derivando $\Gamma^{(0)}[\Phi_i]$ em relação aos campos obtemos as respectivas fontes. Como exemplos, vamos avaliar o propagador entre os campos de gauge A_μ e o propagador entre

os ghosts c e \bar{c} .

$$\langle T A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = -i \frac{\delta}{\delta J_A^{\mu a}(x)} \left(\frac{\delta Z^c}{\delta J_A^{\nu b}(y)} \right) = -i \frac{\delta A_\mu^a(x)}{\delta J_A^{\nu b}(y)}; \quad (4.20)$$

$$\langle T c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = -i \frac{\delta}{\delta \bar{J}_c^a(x)} \left(\frac{\delta Z^c}{\delta J_c^b(y)} \right) = i \frac{\delta c^a(x)}{\delta J_c^b(y)}. \quad (4.21)$$

É importante lembrar de levar em consideração os números de ghost na comutação das derivadas funcionais. As fontes J_c^a e J_ξ^a possuem número de ghost igual a 1, as fontes \bar{J}_c^a e \bar{J}_ξ^a número de ghost -1 e as demais fontes, número de ghost zero. Para os demais campos basta consultar a tabela IV.1.

Agora é preciso escrever o campo de gauge e o ghost em termos das fontes clássicas. Isso pode ser feito derivando da equação (4.19), em relação ao campo \bar{c} :

$$\frac{1}{2} \square c^a = J_{\bar{c}}^a \quad \Rightarrow \quad c^a = \frac{2}{\square} J_{\bar{c}}^a; \quad (4.22)$$

ao campo A_μ^a :

$$\square \Theta^{\mu\nu} A_\nu^a + m \Sigma^{\mu\nu} \phi_\nu^a + \frac{1}{2} \partial^\mu b^a = -J_A^{\mu a}; \quad (4.23)$$

ao campo ϕ_μ^a :

$$\square \Theta^{\mu\nu} \phi_\nu^a + m \Sigma^{\mu\nu} A_\nu^a + \frac{1}{2} \partial^\mu \pi^a = -J_\phi^{\mu a}; \quad (4.24)$$

e ao campo b :

$$\frac{1}{2} \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} b^a = J_b^a. \quad (4.25)$$

Para encontrar a equação para A_μ , vamos manipular as equações (4.23), (4.24) e (4.25). Primeiro, multiplicando a equação (4.23) por $\frac{\Omega_{\alpha\mu}}{\square}$,

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\mu} \Theta^{\mu\nu} A_\nu^a + m \frac{\Omega_{\alpha\mu} \Sigma^{\mu\nu}}{\square} \phi_\nu^a + \frac{1}{2} \frac{\partial_\alpha \partial_\mu \partial^\mu}{\square^2} b^a &= -\frac{\partial_\alpha \partial_\mu}{\square^2} J_A^{\mu a} \\ \Rightarrow \partial^\alpha \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha b^a \right) &= -\partial^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha \partial_\mu}{\square} J_A^{\mu a} \right) \quad \Rightarrow \quad b^a = 2 \frac{\partial_\mu}{\square} J_A^{\mu a}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Depois, multiplicando a equação (4.23) por $\frac{\Sigma_{\alpha\mu}}{\square}$ e utilizando a equação (4.24),

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\mu} \Theta^{\mu\nu} A_\nu^a + m \frac{\Sigma_{\alpha\mu} \Sigma^{\mu\nu}}{\square} \phi_\nu^a + \frac{1}{2} \frac{\Sigma_{\alpha\mu} \partial^\mu}{\square} b^a &= -\frac{\Sigma_{\alpha\mu}}{\square} J_A^{\mu a} \\ \Rightarrow \Sigma_\alpha^\nu A_\nu^a - m \Theta_\alpha^\nu \phi_\nu^a &= -\frac{\Sigma_{\alpha\mu}}{\square} J_A^{\mu a} \\ \Rightarrow \Sigma_\mu^\nu A_\nu^a + m^2 \frac{\Sigma_\mu^\nu}{\square} A_\nu^a + \frac{m}{2} \frac{\partial_\mu}{\square} \pi^a + m \frac{1}{\square} J_{\phi\mu}^a &= -\Sigma_{\mu\nu} J_A^{\nu a} \\ \Theta_\mu^\nu A_\nu^a + \frac{m}{\square(\square + m^2)} \Sigma_{\mu\nu} J_\phi^{\nu a} &= \frac{1}{(\square + m^2)} \Theta_{\mu\nu} J_A^{\nu a} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por fim, multiplicando a equação (4.25) por $\frac{\partial_\alpha}{\square}$,

$$\frac{1}{2}\Omega_\alpha^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial_\alpha}{\square}b^a = \frac{\partial_\alpha}{\square}J_b^a. \quad (4.28)$$

Somando as equações (4.27) e (4.28) e utilizando o resultado da equação (4.26) temos que,

$$A_\mu^a = -\left[\frac{1}{(\square + m^2)}\Theta_{\mu\nu} - \frac{2\alpha}{\square}\Omega_{\mu\nu}\right]J_A^{a\nu} + \frac{m}{\square(\square + m^2)}\Sigma_{\mu\nu}J_\phi^{a\nu} + \frac{2}{\square}\partial_\mu J_b^a. \quad (4.29)$$

Uma análise semelhante pode ser feita para encontrar os demais campos em função das fontes e, com isso, os propagadores podem ser encontrados. Apresentando-os já no espaço dos momentos, temos:

$$\langle A_\mu^a(k)A_\nu^b(k) \rangle = -i\delta^{ab}\left[\frac{1}{k^2 - m^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - \frac{2\alpha}{k^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\right], \quad (4.30)$$

$$\langle \phi_\mu^a(k)\phi_\nu^b(k) \rangle = -i\delta^{ab}\left[\frac{1}{k^2 - m^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - \frac{2\beta}{k^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\right], \quad (4.31)$$

$$\langle A_\mu^a(k)\phi_\nu^b(k) \rangle = -\delta^{ab}\frac{m\epsilon_{\mu\nu\rho}k^\rho}{k^2(k^2 - m^2)}, \quad (4.32)$$

$$\langle A_\mu^a(k)b^b(k) \rangle = \delta^{ab}\frac{2k_\mu}{k^2}, \quad \langle \phi_\mu^a(k)\pi^b(k) \rangle = \delta^{ab}\frac{2k_\mu}{k^2}, \quad (4.33)$$

$$\langle b^a(k)b^b(k) \rangle = 0, \quad \langle \pi^a(k)\pi^b(k) \rangle = 0 \quad (4.34)$$

$$\langle c^a(k)\bar{c}^b(k) \rangle = -i\delta^{ab}\frac{2}{k^2}, \quad \langle \xi^a(k)\bar{\xi}^b(k) \rangle = -i\delta^{ab}\frac{2}{k^2}. \quad (4.35)$$

Note que, os campos de Nakanishi-Lautrup não se propagam, o que contribui para sua interpretação como apenas um multiplicador de Lagrange para a condição de gauge-fixing.

É de extremo interesse obter um modelo causal e unitário e agora, com os propagadores calculados, podemos estudar, em uma primeira abordagem, a unitariedade e causalidade da ação à tree-level.

A partir dos propagadores obtidos nas equações (4.30) à (4.35), seus pólos são interpretados como as partículas da teoria. Como pode ser observado, encontramos $k^2 \geq 0$ para todos, o que confirma a ausência de táquions juntamente com a causalidade do modelo.

Quanto à unitariedade, podemos avaliá-la a partir da parte imaginária dos resíduos das amplitudes entre as correntes externas, $\mathcal{A}_{\Phi_i\Phi_j}$,

$$\mathcal{A}_{\Phi_i\Phi_j} = J_{\Phi_i}^a(k)\langle \Phi_i^a(k)\Phi_j^b(k) \rangle J_{\Phi_j}^b(k), \quad (4.36)$$

de modo que $J_{\Phi_i}^a$ são as correntes externas a serem acopladas aos propagadores e $\Phi_i = \{A_\mu, \phi_\mu, c, \bar{c}, \xi, \bar{\xi}, b, \pi\}$.

Primeiro, vamos examinar os campos de gauge. Suas respectivas correntes vetoriais

podem ser expandidas em uma base completa:

$$J_A^{a\mu} = X_A^a k^\mu + Y_A^a \tilde{k}^\mu + Z_A^a \epsilon^\mu, \quad J_\phi^{a\mu} = X_\phi^a k^\mu + Y_\phi^a \tilde{k}^\mu + Z_\phi^a \epsilon^\mu, \quad (4.37)$$

onde $k^\mu = (k^0, k^1, k^2)$, $\tilde{k}^\mu = (k^0, -k^1, -k^2)$, $\epsilon^\mu = (0, \epsilon^1, \epsilon^2)$ são os vetores dessa base no espaço dos momentos que seguem os seguintes vínculos: $k^\mu \epsilon_\mu = \tilde{k}^\mu \epsilon_\mu = 0$, $\epsilon^\mu \epsilon_\mu = -1$. Além disso, as correntes seguem condições de conservação:

$$k_\mu J_A^{a\mu} = k_\mu J_\phi^{a\mu} = 0. \quad (4.38)$$

Para aferir os pólos massivos, $k^2 = m^2$, selecionamos $k^\mu = (m, 0, 0)$. Então, aplicando as condições de conservação e os vínculos à equação (4.37),

$$\begin{aligned} X_A^a k_\mu k^\mu + Y_A^a k_\mu \tilde{k}^\mu + Z_A^a k_\mu \epsilon^\mu &= 0, & X_\phi^a k_\mu k^\mu + Y_\phi^a k_\mu \tilde{k}^\mu + Z_\phi^a k_\mu \epsilon^\mu &= 0 \\ \Rightarrow X_A^a + Y_A^a &= 0, & \Rightarrow X_\phi^a + Y_\phi^a &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, para o pólo massivo,

$$\Rightarrow J_A^{a\mu}|_{k^2=m^2} = Z_A^a \epsilon^\mu, \quad \Rightarrow J_\phi^{a\mu}|_{k^2=m^2} = Z_\phi^a \epsilon^\mu. \quad (4.39)$$

Já para os pólos não-massivos, $k^2 = 0$, selecionamos $k^\mu = (m, 0, m)$. Então, pelo mesmo raciocínio,

$$J_A^{a\mu}|_{k^2=0} = (mX_A^a, Z_A^a, mX_A^a), \quad J_\phi^{a\mu}|_{k^2=0} = (mX_\phi^a, Z_\phi^a, mX_\phi^a). \quad (4.40)$$

Portanto, a parte imaginária dos resíduos das amplitudes podem ser encontradas. Por exemplo, para o campo A_μ^a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AA}|_{k^2=m^2} &= J_A^{a\mu}|_{k^2=m^2} \left\{ -i\delta^{ab} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{2\alpha}{k^2} \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \right] \right\} J_A^{a\mu}|_{k^2=m^2} \\ \Rightarrow \mathcal{A}_{AA}|_{k^2=m^2} &= \frac{-i}{k^2 - m^2} |Z_A^a|^2 \epsilon^\mu \epsilon_\mu = \frac{i}{k^2 - m^2} |Z_A^a|^2 \\ \Rightarrow \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{AA}|_{k^2=m^2}) &= |Z_A^a|^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Desse modo, para os demais propagadores, obtermos que:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{\phi\phi}|_{k^2=m^2}) &= |Z_\phi^a|^2, & \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{A\phi}|_{k^2=m^2}) &= 0, & \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{\phi\bar{c}}|_{k^2=0}) &= 0, \\ \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{Ab}|_{k^2=0}) &= 0, & \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{bb}|_{k^2=0}) &= 0, & \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{c\bar{c}}|_{k^2=0}) &= -2J_c^a J_{\bar{c}}^a, \\ \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{\phi\pi}|_{k^2=0}) &= 0, & \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{\pi\pi}|_{k^2=0}) &= 0, & \text{Im}(\text{Res}\mathcal{A}_{\xi\bar{\xi}}|_{k^2=0}) &= -2J_\xi^a J_{\bar{\xi}}^a, \end{aligned} \quad (4.42)$$

Esses resultados nos mostram que os campos de gauge possuem somente a propagação de seus graus de liberdade massivos transversais. Isso é decorrente da presença dos ghosts

que, apesar de possuir estados de norma negativa, se reagrupam com o setor longitudinal dos campos de gauge e, juntos, provocam contribuição nula à matriz S . Além disso, não temos a propagação de modos massivos para os campos de Nakanishi-Lautrup.

Portanto, o modelo de Jackiw-Pi à tree-level é unitário e causal. Na próxima seção, vamos avaliar a extensão da simetria BRS ao nível quântico e assim, será possível obter uma condição melhor quanto à unitariedade da teoria.

Devemos avaliar também as dimensões ultravioleta, d , e infravermelho, r , dos campos. Elas são coletadas por meio das seguintes inequações:

$$d_X + d_Y \geq 3 + d_{XY}, \quad r_X + r_Y \leq 3 + r_{XY}, \quad (4.43)$$

em que os subíndices X e Y representam um campo qualquer e as quantidades d_{XY} e r_{XY} são a potência assintótica do propagador entre X e Y quando $k \rightarrow \infty$ e quando $k \rightarrow 0$, respectivamente [47].

Desse modo, a partir dos propagadores (4.30), (4.31) e (4.33) e das equações (4.43) encontramos as dimensões para os campos de gauge e os campos de Nakanishi-Lautrup,

$$2d_A \geq 3 - 2 \Rightarrow d_A = \frac{1}{2}, \quad 2r_A \leq 3 - 2 \Rightarrow r_A = \frac{1}{2}; \quad (4.44)$$

$$2d_\phi \geq 3 - 2 \Rightarrow d_\phi = \frac{1}{2}, \quad 2r_\phi \leq 3 - 2 \Rightarrow r_\phi = \frac{1}{2}; \quad (4.45)$$

$$d_A + d_b \geq 3 - 1 \Rightarrow d_b = \frac{3}{2}, \quad r_A + r_b \leq 3 - 1 \Rightarrow r_b = \frac{3}{2}; \quad (4.46)$$

$$d_\phi + d_\pi \geq 3 - 1 \Rightarrow d_\pi = \frac{3}{2}, \quad r_\phi + r_\pi \leq 3 - 1 \Rightarrow r_\pi = \frac{3}{2}; \quad (4.47)$$

Para o caso dos ghosts e do campo auxiliar ρ , utilizamos os propagadores da equação (4.35), as transformações de BRS, equação (4.5), o fato do operador de BRS ser adimensional e da constante de acoplamento da teoria ter dimensão de massa igual à $\frac{1}{2}$. Então,

$$d_c + d_{\bar{c}} \geq 3 - 2, \quad r_c + r_{\bar{c}} \leq 3 - 2; \quad (4.48)$$

$$d_\xi + d_{\bar{\xi}} \geq 3 - 2, \quad r_\xi + r_{\bar{\xi}} \leq 3 - 2; \quad (4.49)$$

$$\Rightarrow d_c = -\frac{1}{2}, \quad d_\xi = -\frac{1}{2}, \quad d_{\bar{c}} = \frac{3}{2}, \quad d_{\bar{\xi}} = \frac{3}{2}, \quad d_\rho = -\frac{1}{2}. \quad (4.50)$$

Feito isso, a dimensão dos anti-campos pode ser coletada por meio da equação (4.10) e então, podemos construir a seguinte tabela:

	A_μ	ϕ_μ	ρ	b	π	c	ξ	\bar{c}	$\bar{\xi}$	A_μ^*	ϕ_μ^*	ρ^*	c^*	ξ^*	g	m
d'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\Phi\Pi$	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	0	0

Tabela IV.1: Dimensão dos campos e seus respectivos números de ghost. Dado o fato de que as dimensões ultravioletas e infravermelho de todos com campos são iguais, representamos ambas como d' .

4.1.2 Identidades

Assim como discutido na seção 3.3, vamos apresentar as identidades funcionais que descrevem o modelo de forma unívoca [47]. A primeira delas é a identidade de Slavnov-Taylor que traduz a simetria de BRS em sua forma funcional,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma^{(0)}) = \text{Tr} \int d^3x \left\{ \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu^*} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A^\mu} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi_\mu^*} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi^\mu} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\rho^*} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\rho} \right. \\ \left. + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^*} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\xi^*} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\xi} + b \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\bar{c}} + \pi \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\bar{\xi}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Introduzimos também o operador linearizado:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} = \text{Tr} \int d^3x \left\{ \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu^*} \frac{\delta}{\delta A^\mu} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A^\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu^*} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi_\mu^*} \frac{\delta}{\delta\phi^\mu} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi^\mu} \frac{\delta}{\delta\phi_\mu^*} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\rho^*} \frac{\delta}{\delta\rho} \right. \\ \left. + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\rho} \frac{\delta}{\delta\rho^*} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^*} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c} \frac{\delta}{\delta c^*} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\xi} \frac{\delta}{\delta\xi^*} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\xi^*} \frac{\delta}{\delta\xi} + b \frac{\delta}{\delta\bar{c}} + \pi \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Além das identidades envolvendo a simetria BRS, ainda há outras satisfeitas pela ação à tree-level. Poderia se pensar que, por estar trabalhando com um modelo que contém apenas um grupo de simetria, o grupo $SU(N)$, assim como o caso apresentado na seção 3.3, que teríamos mais quatro identidades: a condição de gauge-fixing, a equação de ghost de anti-ghost e a simetria rígida. Porém, ao quebrar o paradigma de Yang-Mills, o modelo de Jackiw-Pi se torna uma teoria de campo não-abeliana fora do habitual exibindo duas invariâncias de gauge, bem como discutido no início desse capítulo. Sendo assim, apresentamos não quatro, mas outras oito identidades.

Como discutido, duas delas são as condições de gauge-fixing, já apresentadas na equação (4.6). Outras duas são as equações de ghost:

$$\mathcal{G}_I \Gamma^{(0)} = 0, \quad \mathcal{G}_{II} \Gamma^{(0)} = 0. \quad (4.53)$$

em que \mathcal{G}_I e \mathcal{G}_{II} são definidos por:

$$\mathcal{G}_I \equiv \frac{\delta}{\delta\bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A^{*\mu}}, \quad \mathcal{G}_{II} \equiv \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta\phi^{*\mu}}. \quad (4.54)$$

Temos também as equações de anti-ghost,

$$\bar{\mathcal{G}}_I \Gamma^{(0)} = \bar{\Delta}_I, \quad \bar{\mathcal{G}}_{II} \Gamma^{(0)} = \bar{\Delta}_{II}, \quad (4.55)$$

em que $\bar{\mathcal{G}}_I$ e $\bar{\mathcal{G}}_{II}$ são definidos por:

$$\bar{\mathcal{G}}_I \equiv \int d^3x \left\{ \frac{\delta}{\delta c} - g \left[\bar{c}, \frac{\delta}{\delta b} \right] - g \left[\bar{\xi}, \frac{\delta}{\delta \pi} \right] \right\}, \quad \bar{\mathcal{G}}_{II} \equiv \int d^3x \left\{ \frac{\delta}{\delta \xi} - g \left[\bar{\xi}, \frac{\delta}{\delta b} \right] \right\}, \quad (4.56)$$

e as quebras $\bar{\Delta}_I$ e $\bar{\Delta}_{II}$ por:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_I &\equiv -g \int d^3x \left\{ [A_\mu^*, A^\mu] + [\phi_\mu^*, \phi^\mu] + [\rho^*, \rho] - [c^*, c] - [\xi^*, \xi] + \alpha[\bar{c}, b] + \beta[\bar{\xi}, \pi] \right\}, \\ \bar{\Delta}_{II} &\equiv -g \int d^3x \left\{ [\phi_\mu^*, A^\mu] - [\xi^*, c] - \frac{\rho^*}{g} + \alpha[\bar{\xi}, b] \right\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

As equações de anti-ghost possuem um papel fundamental no gauge de Landau ($\alpha = \beta = 0$). Elas controlam a dependência dos campos de ghost da teoria, pois os termos não lineares nos campos das equações (4.57) se anulam e isso permite a prova algébrica do teorema de não-renormalização de Adler-Bardeen para a anomalia de gauge [42, 47, 52].

Por fim, ainda no gauge de Landau, também temos as equações das simetrias rígidas, que representam as transformações rígidas em sua forma funcional,

$$\mathcal{W}_I^{\text{rig}} \Gamma^{(0)} = 0, \quad \mathcal{W}_{II}^{\text{rig}} \Gamma^{(0)} = 0, \quad (4.58)$$

onde $\mathcal{W}_I^{\text{rig}}$ e $\mathcal{W}_{II}^{\text{rig}}$ são:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_I^{\text{rig}} &\equiv -g \int d^3x \left\{ \left[A^\mu, \frac{\delta}{\delta A^\mu} \right] + \left[\phi^\mu, \frac{\delta}{\delta \phi^\mu} \right] + \left[\rho, \frac{\delta}{\delta \rho} \right] + \left[b, \frac{\delta}{\delta b} \right] + \left[\pi, \frac{\delta}{\delta \pi} \right] \right. \\ &\quad + \left[c, \frac{\delta}{\delta c} \right] + \left[\xi, \frac{\delta}{\delta \xi} \right] + \left[\bar{c}, \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right] + \left[\bar{\xi}, \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} \right] + \left[A_\mu^*, \frac{\delta}{\delta A_\mu^*} \right] \\ &\quad \left. + \left[\phi_\mu^*, \frac{\delta}{\delta \phi_\mu^*} \right] + \left[\rho^*, \frac{\delta}{\delta \rho^*} \right] + \left[c^*, \frac{\delta}{\delta c^*} \right] + \left[\xi^*, \frac{\delta}{\delta \xi^*} \right] \right\}, \\ \mathcal{W}_{II}^{\text{rig}} &\equiv -g \int d^3x \left\{ \left[A^\mu, \frac{\delta}{\delta \phi^\mu} \right] + \left[\pi, \frac{\delta}{\delta b} \right] + \left[c, \frac{\delta}{\delta \xi} \right] + \left[\bar{c}, \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\phi_\mu^*, \frac{\delta}{\delta A_\mu^*} \right] + \left[\xi^*, \frac{\delta}{\delta c^*} \right] + \frac{1}{g} \frac{\delta}{\delta \rho} \right\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Além disso, para um dado funcional genérico \mathcal{K} com número de ghost par, as seguintes identidades operatoriais são satisfeitas [47]:

$$\mathcal{S}_\mathcal{K} \mathcal{S}(\mathcal{K}) = 0 \quad \forall \mathcal{K}, \quad \mathcal{S}_\mathcal{K} \mathcal{S}_\mathcal{K} = 0 \quad \text{se } \mathcal{S}(\mathcal{K}) = 0, \quad (4.60)$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}(\mathcal{K})}{\delta b} - \mathcal{S}_\mathcal{K} \left(\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta b} - \partial^\mu A_\mu \right) = \mathcal{G}_I(\mathcal{K}), \quad \frac{\delta \mathcal{S}(\mathcal{K})}{\delta \pi} - \mathcal{S}_\mathcal{K} \left(\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \pi} - \partial^\mu \phi_\mu \right) = \mathcal{G}_{II}(\mathcal{K}), \quad (4.61)$$

$$\mathcal{G}_I \mathcal{S}(\mathcal{K}) + \mathcal{S}_\mathcal{K} \mathcal{G}_I(\mathcal{K}) = 0, \quad \mathcal{G}_{II} \mathcal{S}(\mathcal{K}) + \mathcal{S}_\mathcal{K} \mathcal{G}_{II}(\mathcal{K}) = 0, \quad (4.62)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_I \mathcal{S}(\mathcal{K}) + \mathcal{S}_\mathcal{K} (\bar{\mathcal{G}}_I(\mathcal{K}) - \bar{\Delta}_I) = \mathcal{W}_I(\mathcal{K}), \quad \bar{\mathcal{G}}_{II} \mathcal{S}(\mathcal{K}) + \mathcal{S}_\mathcal{K} (\bar{\mathcal{G}}_{II}(\mathcal{K}) - \bar{\Delta}_{II}) = \mathcal{W}_{II}(\mathcal{K}), \quad (4.63)$$

$$\mathcal{W}_I \mathcal{S}(\mathcal{K}) - \mathcal{S}_{\mathcal{K}} \mathcal{W}_I(\mathcal{K}) = 0, \quad \mathcal{W}_{II} \mathcal{S}(\mathcal{K}) - \mathcal{S}_{\mathcal{K}} \mathcal{W}_{II}(\mathcal{K}) = 0. \quad (4.64)$$

4.2 Quantização: anomalias e estabilidade

Agora, estamos aptos a avaliar a extensão da simetria BRS em nível quântico e a renormalizabilidade multiplicativa, ou seja, a condição de estabilidade para o modelo de Jackiw-Pi.

Tal como discutido na seção 3.3, o princípio de ação quântica nos diz que a identidade de Slavnov-Taylor pode possuir uma possível anomalia, Δ , em uma ordem n na expansão em loops, como mostrado na equação (3.56), onde Δ é um funcional integrado com número de ghost +1, dimensão UV limitada por $d \leq 3$, que apresenta invariância de Lorentz e que satisfaz a condição de consistência de Wess-Zumino,

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta = 0. \quad (4.65)$$

Vamos então explorar as identidades operatoriais apresentadas no final da seção anterior e aplicá-las ao funcional de vértice quântico tendo em mente que $\mathcal{S}_{\Gamma} = \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} + \mathcal{O}(\hbar^n)$. Da equação (4.61) temos,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{S}(\Gamma)}{\delta b} - \mathcal{S}_{\Gamma} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta b} - \partial^{\mu} A_{\mu} \right) &= \mathcal{G}_I(\Gamma), & \frac{\delta \mathcal{S}(\Gamma)}{\delta \pi} - \mathcal{S}_{\Gamma} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta b} - \partial^{\mu} \phi_{\mu} \right) &= \mathcal{G}_{II}(\Gamma) \\ \Rightarrow \frac{\delta \Delta}{\delta b} - \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} (\partial^{\mu} A_{\mu} - \partial^{\mu} A_{\mu}) &= 0, & \Rightarrow \frac{\delta \Delta}{\delta \pi} - \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} (\partial^{\mu} \phi_{\mu} - \partial^{\mu} \phi_{\mu}) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\delta \Delta}{\delta b} &= 0, & \Rightarrow \frac{\delta \Delta}{\delta \pi} &= 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Assim como apresentado na seção 3.3, por meio da mudança de variáveis $A_{\mu}^* \rightarrow \tilde{A}_{\mu}^* = A_{\mu}^* + \partial_{\mu} \bar{c}$ e $\phi_{\mu}^* \rightarrow \tilde{\phi}_{\mu}^* = \phi_{\mu}^* + \partial_{\mu} \bar{\xi}$, a equação (4.62) pode ser avaliada. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_I \mathcal{S}(\Gamma) + \mathcal{S}_{\Gamma} \mathcal{G}_I(\Gamma) &= 0, & \mathcal{G}_{II} \mathcal{S}(\Gamma) + \mathcal{S}_{\Gamma} \mathcal{G}_{II}(\Gamma) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\delta \Delta}{\delta \bar{c}} &= 0, & \Rightarrow \frac{\delta \Delta}{\delta \bar{\xi}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Agora, a identidade da equação (4.63), pode ser analisada considerando os resultados das equações (4.66) e (4.67),

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_I \mathcal{S}(\Gamma) + \mathcal{S}_{\Gamma} (\bar{\mathcal{G}}_I(\Gamma) - \bar{\Delta}_I) &= \mathcal{W}_I(\Gamma) \\ \Rightarrow \int d^3x \left\{ \frac{\delta \Delta}{\delta c} - g \left[\bar{c}, \frac{\delta \Delta}{\delta b} \right] - g \left[\bar{\xi}, \frac{\delta \Delta}{\delta \pi} \right] \right\} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} (\bar{\Delta}_I - \bar{\Delta}_I) &= 0 \\ \Rightarrow \int d^3x \frac{\delta \Delta}{\delta c} &= 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathcal{G}}_{\text{II}} \mathcal{S}(\Gamma) + \mathcal{S}_{\Gamma}(\bar{\mathcal{G}}_{\text{II}}(\Gamma) - \bar{\Delta}_{\text{II}}) = \mathcal{W}_{\text{II}}(\Gamma) \\
\Rightarrow & \int d^3x \left\{ \frac{\delta \Delta}{\delta \xi} - g \left[\bar{\xi}, \frac{\delta \Delta}{\delta b} \right] \right\} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}(\bar{\Delta}_{\text{II}} - \Delta_{\text{II}}) = 0 \\
& \Rightarrow \int d^3x \frac{\delta \Delta}{\delta \xi} = 0.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Temos também que, pela equação (4.64), as simetrias rígidas provenientes das duas transformações de gauge são satisfeitas em nível quântico,

$$\mathcal{W}_{\text{I}}(\Delta) = 0, \quad \mathcal{W}_{\text{II}}(\Delta) = 0. \tag{4.70}$$

Assim como mostrado na seção 3.3 e em [42], as demais simetrias: condições de gauge-fixing, equações de ghost e equações de anti-ghost (no gauge de Landau), também são satisfeitas em nível quântico. Visto que não apresentam algo além de uma quebra linear nos campos.

A partir das equações (4.66), (4.67), (4.68) e (4.69) sabemos que a quebra Δ não depende dos campos $\{b, \pi, \bar{c}, \bar{\xi}, A_{\mu}^*, \phi_{\mu}^*\}$ e, ainda, a dependência dos campos de ghost é feita por meio de uma derivada, $\partial_{\mu}c$ e $\partial_{\mu}\xi$. Além disso, é mostrado que a cohomologia no setor de número de ghost 1 é independente dos anti-campos [53, 54].

A inserção do campo auxiliar ρ é bem interessante. Como já discutido, ele é introduzido para garantir a invariância da ação do modelo sob as duas simetrias de gauge. Além disso, por meio do formalismo hamiltoniano, é mostrado que o modelo não apresenta inconsistências e o número de graus de liberdade físicos são os mesmos, tanto para o caso geral, quanto para o caso em que $\rho = 0$, quanto para o caso abeliano em que a constante de acoplamento é “desligada” [55].

Ademais, podemos definir o operador de BRS linearizado s_0 e verificar a formação de um dubleto de BRS entre os campos ρ e ξ . Sendo assim, sabendo que os dubletos não pertencem a cohomologia do operador e, além disso, que a cohomologia do operador s é isomorfa à cohomologia de s_0 [42], a dependência do possível termo de anomalia é:

$$\Delta = \Delta(A_{\mu}, \phi_{\mu}, \partial_{\mu}c, \partial_{\mu}\xi). \tag{4.71}$$

Associado à quebra da identidade de Slavnov-Taylor, temos o problema de cohomologia do operador linearizado no setor de número de ghost 1. Então, ela é composta por,

$$\Delta = \Delta^{(1)} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta^{(0)}, \tag{4.72}$$

onde $\Delta^{(0)}$ são as soluções triviais, devido à propriedade de nilpotência do operador, e $\Delta^{(1)}$ a real anomalia.

Além disso, as correções radiativas acontecerem em, pelo menos, primeira ordem na expansão de loops. Ou seja, apresentam, no mínimo, ordem 2 nas constantes de

acoplamento, e portanto a dimensão do termo de quebra é reduzida em uma unidade. Semelhante a [50], tal fato se deve à super-renormalizabilidade por power-counting do modelo, em que o grau de divergência de um diagrama 1PI γ é

$$d(\gamma) = 3 - \sum_{\Lambda} d_{\Lambda} N_{\Lambda}, \quad (4.73)$$

onde N_{Λ} corresponde ao número de linhas externas do diagrama e Λ faz referência aos campos e também inclui a constante de acoplamento g .

Sendo assim, vamos encontrar o funcional integrado mais geral possível que apresenta invariância de Lorentz, invariância por paridade, possui número de ghost 1 e dimensão $d \leq 2$. Dessa forma, o termo mais geral possível para $\Delta^{(1)}$ é:

$$\Delta^{(1)} = \text{Tr} \int d^3x (K^{\nu} \partial_{\nu} c + H^{\nu} \partial_{\nu} \xi), \quad (4.74)$$

onde o vetor K^{μ} e o pseudo-vetor H^{μ} são compostos pelos seguintes monômios:

$$\begin{aligned} K^{\nu} = & f_1 A_{\mu} A^{\mu} A^{\nu} + f_2 A_{\mu} A^{\nu} A^{\mu} + f_3 A^{\nu} A_{\mu} A^{\mu} + f_4 A_{\mu} \phi^{\mu} \phi^{\nu} + f_5 A_{\mu} \phi^{\nu} \phi^{\mu} \\ & + f_6 A^{\mu} \phi_{\mu} \phi^{\mu} + f_7 \phi_{\mu} A^{\mu} \phi^{\nu} + f_8 \phi_{\mu} A^{\nu} \phi^{\mu} + f_9 \phi^{\nu} A_{\mu} \phi^{\mu} + f_{10} \phi_{\mu} \phi^{\mu} A^{\nu} \\ & + f_{11} \phi_{\mu} \phi^{\nu} A^{\mu} + f_{12} \phi^{\nu} \phi_{\mu} A^{\mu} + \epsilon^{\rho\mu\nu} (f_{13} A_{\rho} \phi_{\mu} + f_{14} \phi_{\rho} A_{\mu}) + f_{15} A^{\nu}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} H^{\nu} = & g_1 \phi_{\mu} \phi^{\mu} \phi^{\nu} + g_2 \phi_{\mu} \phi^{\nu} \phi^{\mu} + g_3 \phi^{\nu} \phi_{\mu} \phi^{\mu} + g_4 \phi_{\mu} A^{\mu} A^{\nu} + g_5 \phi_{\mu} A^{\nu} A^{\mu} \\ & + g_6 \phi^{\nu} A_{\mu} A^{\mu} + g_7 A_{\mu} \phi^{\mu} A^{\nu} + g_8 A_{\mu} \phi^{\nu} A^{\mu} + g_9 A^{\nu} \phi_{\mu} A^{\mu} + g_{10} A_{\mu} A^{\mu} \phi^{\nu} \\ & + g_{11} A_{\mu} A^{\nu} \phi^{\mu} + g_{12} A^{\nu} A_{\mu} \phi^{\nu} + \epsilon^{\rho\mu\nu} (g_{13} A_{\rho} A_{\mu} + g_{14} \phi_{\mu} \phi_{\rho}) + g_{15} \phi^{\nu}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

em que f_n e g_n são coeficientes constantes.

Mas antes de averiguar se o contratermo acima pode ser escrito como a variação de BRS de algum outro funcional integrado, devemos verificar se ele satisfaz as simetrias rígidas, equação (4.70) e a própria condição de consistência de Wess-Zumino, equação (4.65). Vejamos o que acontece ao explorarmos esta última.

Note que, ao aplicar as derivadas funcionais em relação aos campos $\{a_{\mu}, \phi_{\mu}, c, \xi\}$ do operador linearizado sempre teremos multiplicado um termo da variação de BRS do respectivo campo. Isso se deve a própria estrutura desse operador, equação (4.52). Além disso, dada a estrutura dos monômios e a aplicação de $\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}$, a equação (4.65) deve ser satisfeita individualmente para $K^{\nu} \partial_{\nu} c$ e $H^{\nu} \partial_{\nu} \xi$, ou melhor, para os grupos de termos que possuem a mesma quantidade de campos A_{μ} e ϕ_{μ} . Vamos avaliar os monômios de K^{μ} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta_{(A)}^{(1)} &= \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \left(\text{Tr} \int d^3x \{f_{15} A^{\nu} \partial_{\nu} c\} \right) = 0 \\ \Rightarrow \text{Tr} \int d^3x f_{15} \{ (sA^{\mu}) \partial_{\mu} c - (sc) \partial_{\mu} A^{\mu} \} &= \text{Tr} \int d^3x f_{15} \{ D^{\mu} c \partial_{\mu} c + g c^2 \partial_{\mu} A^{\mu} \} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{Tr} \int d^3x f_{15} \{ \partial^\mu c \partial_\mu c + g (A^\mu c \partial_\mu c - c A^\mu \partial_\mu c + c^2 \partial_\mu A^\mu) \} = 0 \\
&\Rightarrow \text{Tr} \int d^3x f_{15} \{ \partial^\mu c \partial_\mu c - 2gc A^\mu \partial_\mu c \} = 0 \\
&\Rightarrow f_{15} = 0
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta_{(A\phi)}^{(1)} &= \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \left(\text{Tr} \int d^3x \epsilon^{\rho\mu\nu} (f_{13} A_\rho \phi_\mu + f_{14} \phi_\rho A_\mu) \partial_\nu c \right) = 0 \\
&\Rightarrow \text{Tr} \int d^3x \epsilon^{\rho\mu\nu} \{ f_{13} [(sA_\rho) \phi_\mu \partial_\nu c + (s\phi_\mu) \partial_\nu A_\rho - (sc) \partial_\nu c (A_\rho \phi_\mu)] \\
&\quad + f_{14} [(sA_\mu) \phi_\rho \partial_\nu c + (s\phi_\rho) \partial_\nu c A_\mu - (sc) \partial_\nu (\phi_\rho A_\mu)] \} = 0
\end{aligned}$$

Se $f_{13} = f_{14}$ a antissimetria do tensor Levi-Civita pode anular os termos simétricos que não envolvem sc . Então,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{Tr} \int d^3x f_{13} \epsilon^{\rho\mu\nu} \{ c^2 \partial_\nu (A_\rho \phi_\mu) + c^2 \partial_\nu (\phi_\rho A_\mu) \} = 0 \\
&\Rightarrow f_{13} = f_{14} = 0
\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta_{(AAA)}^{(1)} &= \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \left(\text{Tr} \int d^3x \{ f_1 A_\mu A^\mu A^\nu + f_2 A_\mu A^\nu A^\mu + f_3 A^\nu A_\mu A^\mu \} \partial_\nu c \right) = 0 \\
&\Rightarrow (\text{Tr} \int d^3x \{ f_1 [(sA_\mu) A^\mu A^\nu \partial_\nu c + (sA^\mu) A^\nu \partial_\nu c A_\mu + (sA^\nu) \partial_\nu c A_\mu A^\mu \\
&\quad - (sc) \partial_\nu (A_\mu A^\mu A^\nu)] + f_2 [(sA_\mu) A^\nu A^\mu \partial_\nu c + (sA^\nu) A^\mu \partial_\nu c A_\mu \\
&\quad + (sA^\mu) \partial_\nu c A_\mu A^\mu - (sc) \partial_\nu (A_\mu A^\nu A^\mu)] + f_3 [(sA_\nu) A_\mu A^\mu \partial_\nu c \\
&\quad (sA_\mu) A^\mu \partial_\nu c A_\nu + (sA^\mu) \partial_\nu c A^\nu A_\mu - (sc) \partial_\nu (A^\nu A_\mu A^\mu)] \} = 0
\end{aligned}$$

Até poderíamos reagrupar alguns termos da equação acima e obter alguma relação entre os coeficientes, no entanto, os termos que possuem (sc) não se combinam. Sendo assim, necessariamente, para satisfazer a condição de consistência,

$$\Rightarrow f_1 = f_2 = f_3 = 0 \tag{4.79}$$

Para o cálculo de $\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta_{(\phi AA)}^{(1)}$ nos deparamos com uma estrutura semelhante aos termos de sc e, portanto,

$$\Rightarrow f_4 = f_5 = f_6 = f_7 = f_8 = f_9 = f_{10} = f_{11} = f_{12} = 0 \tag{4.80}$$

No final das contas, o que foi avaliado para os monômios referentes ao vetor K^μ também pode ser estendido para os monômios de H^ν . Com isso, obtemos que os coeficientes são tais que $f_n = g_n = 0$.

Finalmente, chegamos ao resultado que o setor de número de ghost 1 da cohomologia do operador linearizado é vazio, ou seja, $\{\Delta^{(1)}\} \equiv \emptyset$. Logo, o modelo de Jackiw-Pi não apresenta anomalia de gauge e a simetria BRS é estendida ao nível quântico garantindo a unitariedade da matriz S .

Feito isso, nos resta agora fazer o estudo da estabilidade. Então, perturbando a ação à tree-level com algum contratermo invariante $\tilde{\Gamma}^{(0)} = \Gamma^{(0)} + \epsilon\Gamma^c$, tal que Γ^c é invariante de BRS, invariante de Lorentz, invariante por paridade, possui número de ghost 0 e dimensão UV dada por $d \leq 3$, temos de verificar se tal perturbação pode ser tratada por meio de uma redefinição nos parâmetros do modelo: campos, constantes de acoplamento e parâmetros de massa.

Podemos observar que a ação de contratermos invariantes satisfaz o seguinte conjunto de condições, que podem ser derivadas das equações (4.6), (4.53), (4.55), (4.58), (4.60) respectivamente:

$$\frac{\delta\Gamma^c}{\delta b} = \frac{\delta\Gamma^c}{\delta\pi} = 0; \quad (4.81)$$

$$\frac{\delta\Gamma^c}{\delta c} = \frac{\delta\Gamma^c}{\delta\xi} = 0; \quad (4.82)$$

$$\frac{\delta\Gamma^c}{\delta\bar{c}} = \frac{\delta\Gamma^c}{\delta\bar{\xi}} = 0; \quad (4.83)$$

$$\mathcal{W}_I^{\text{rig}}\Gamma^c = \mathcal{W}_{II}^{\text{rig}}\Gamma^c = 0; \quad (4.84)$$

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\Gamma^c = 0. \quad (4.85)$$

Logo, os possíveis contratermos invariantes que respeitam as mesmas características do funcional de vértice à tree-level são termos semelhantes aos da ação de Jackiw-Pi, equação (4.1),

$$\Gamma^c = \text{Tr} \int d^3x \{h_1 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + h_2 (G^{\mu\nu} + g[F^{\mu\nu}, \rho]) (G_{\mu\nu} + g[F_{\mu\nu}, \rho]) + h_3 \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} \phi_\rho\}, \quad (4.86)$$

Porém, como discutido para o caso da anomalia, os contratermos também entram em correções radiativas em, pelo menos, ordem de 1 loop e, portanto, a dimensão de Γ^c deve ser ≤ 2 . Assim, o único contratermo não invariante presente é o termo de Chern-Simons,

$$\Gamma^c = \text{Tr} \int d^3x h_3 \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} \phi_\rho = z_m m \frac{\partial}{\partial m} \Gamma^{(0)}, \quad (4.87)$$

em que $z_m = \frac{h_3}{m}$.

Portanto, somente o parâmetro de massa da teoria recebe correções radiativas. No entanto, a invariância de BRS do termo de Chern-Simons não acontece localmente, ocorre via uma derivada total, equação (4.14). Então, a função- β associada ao parâmetro de massa é nula, $\beta_m = 0$ [49–51].

Portanto, como resultado da checagem da estabilidade, temos que as quantidades físicas do modelo de Jackiw-Pi não recebem contribuições radiativas, ou seja, as funções- β associadas aos campos, constante de acoplamento e massa são nulas em todas as ordens em uma expansão em \hbar . Isso confirma a invariância de escala do modelo.

Finalmente, obtemos a finitude do modelo de Jackiw-Pi em todas as ordens em teoria de perturbação.

Capítulo V

Conclusões e Perspectivas

Em suma, no capítulo II, foi feita uma revisão às teorias de gauge mais habituais: a QED e a teoria de Yang-Mills; bem como uma apresentação do mecanismo de gauge-fixing de Faddeev-Popov que resolve o problema enfrentado na quantização de teorias de gauge não-abelianas. Em seguida, no capítulo III, iniciamos com a ação de Faddeev-Popov para a teoria de Yang-Mills e apresentamos uma simetria satisfeita por ela, a simetria BRS. Ao longo desse capítulo, também discutimos sobre a importância dessa simetria e como sua presença em uma teoria está associada à unitariedade da matriz S . Com isso em mente, discutimos também sobre o procedimento de renormalização algébrica que, utilizando o princípio de ação quântica, permite a garantia da extensão quântica de uma teoria em todas as ordens em uma teoria de perturbação, sem a necessidade em especificar o esquema de regularização utilizado.

Finalmente, no capítulo IV introduzimos o modelo teórico de Jackiw-Pi e, utilizando os conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores, fizemos sua análise clássica e quântica. Portanto, pelo procedimento de renormalização algébrica, obtemos como resultado que o modelo teórico tridimensional, massivo, invariante sob transformações de gauge e transformações de paridade proposto por Jackiw-Pi é livre de anomalias em todas as ordens em teoria de perturbação e todas suas simetrias podem ser estendidas ao nível quântico. Além disso, exibe renormalizabilidade multiplicativa, apresentando funções- β associadas aos campos, constante de acoplamento e parâmetro de massa nulas, o que confirma a invariância de escala do modelo.

Visto o exotismo do modelo de Jackiw-Pi, como perspectiva ao trabalho é pretendido: realizar novamente o estudo de anomalias, porém atacando o problema de cohomologia a partir do formalismo das equações de descida e da fórmula russa [42]; compreender melhor a natureza do campo auxiliar ρ e estudar uma possível extensão do modelo utilizando termos para incluir sua propagação [56]; estudar o efeito de bifurcação proveniente das duas invariâncias de gauge, o que pode indicar uma possível quebra espontânea de simetria [57].

Referências Bibliográficas

- [1] W. W. R. Ball, *A short account of the history of mathematics*. Courier Corporation, 1960.
- [2] S. Weinberg, “The search for unity: Notes for a history of quantum field theory,” *Daedalus*, pp. 17–35, 1977.
- [3] A. A. Michelson, “Art. xxi.—the relative motion of the earth and the luminiferous ether,” *American Journal of Science (1880-1910)*, vol. 22, no. 128, p. 120, 1881.
- [4] A. Einstein, “On a heuristic point of view concerning the production and transformation of light,” *Annalen der Physik*, vol. 17, no. 132, pp. 1–16, 1905.
- [5] M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, “On quantum mechanics ii,” *Z. Phys*, vol. 35, no. 8-9, pp. 557–615, 1926.
- [6] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the emission and absorption of radiation,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 114, no. 767, pp. 243–265, 1927.
- [7] E. Fermi, “Tentativo di una teoria dei raggi β ,” *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, vol. 11, no. 1, pp. 1–19, 1934.
- [8] H. Yukawa, “On the interaction of elementary particles. i,” *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, vol. 17, pp. 48–57, 1935.
- [9] M. Kuhlmann, “Quantum Field Theory,” in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (E. N. Zalta and U. Nodelman, eds.), Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2023 ed., 2023.
- [10] S.-i. Tomonaga, “On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields.,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 1, no. 2, pp. 27–42, 1946.
- [11] J. Schwinger, “On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” *Physical Review*, vol. 73, no. 4, p. 416, 1948.

-
- [12] R. P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics,” *Reviews of modern physics*, vol. 20, no. 2, p. 367, 1948.
- [13] F. J. Dyson, “The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman,” *Physical Review*, vol. 75, no. 3, p. 486, 1949.
- [14] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum field theory*. Courier Corporation, 2012.
- [15] C.-N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance,” *Physical review*, vol. 96, no. 1, p. 191, 1954.
- [16] L. D. Faddeev and V. N. Popov, “Feynman diagrams for the yang-mills field,” *Physics Letters B*, vol. 25, no. 1, pp. 29–30, 1967.
- [17] T. W. B. Kibble, “Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble mechanism,” *Scholarpedia*, vol. 4, no. 1, p. 6441, 2009. revision #91222.
- [18] G. Hooft, “The evolution of quantum field theory: From qed to grand unification,” in *The Standard Theory of Particle Physics: Essays to Celebrate CERN’s 60th Anniversary*, pp. 1–27, World Scientific, 2016.
- [19] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, “The abelian higgs kibble model, unitarity of the s-operator,” *Physics Letters B*, vol. 52, no. 3, pp. 344–346, 1974.
- [20] I. V. Tyutin, “Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism,” *arXiv preprint arXiv:0812.0580*, 2008.
- [21] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, “Renormalization of gauge theories,” *Annals of Physics*, vol. 98, no. 2, pp. 287–321, 1976.
- [22] J. M. Overduin and P. S. Wesson, “Kaluza-klein gravity,” *Physics reports*, vol. 283, no. 5-6, pp. 303–378, 1997.
- [23] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Topologically massive gauge theories,” *Annals of Physics*, vol. 140, no. 2, pp. 372–411, 1982.
- [24] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Three-dimensional massive gauge theories,” *Physical Review Letters*, vol. 48, no. 15, p. 975, 1982.
- [25] R. B. Laughlin, “Anomalous quantum hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations,” *Physical Review Letters*, vol. 50, no. 18, p. 1395, 1983.
- [26] M. Franz, Z. Tešanović, and O. Vafek, “QED 3 theory of pairing pseudogap in cuprates: From d-wave superconductor to antiferromagnet via an algebraic fermi liquid,” *Physical Review B*, vol. 66, no. 5, p. 054535, 2002.

-
- [27] O. M. Del Cima, D. H. T. Franco, L. S. Lima, and E. S. Miranda, “The quantum scale invariance in graphene-like quantum electrodynamics,” *Phys. Lett. B*, vol. 835, p. 137544, 2022.
- [28] J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, and A. R. Pereira, “Geometrically induced electric polarization in conical topological insulators,” *Journal of Applied Physics*, vol. 111, no. 6, 2012.
- [29] R. Jackiw and S.-Y. Pi, “Seeking an even-parity mass term for 3-d gauge theory,” *Physics Letters B*, vol. 403, pp. 297–303, 1997.
- [30] L. O’Raifeartaigh and N. Straumann, “Gauge theory: Historical origins and some modern developments,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 72, no. 1, p. 1, 2000.
- [31] R. Utiyama, “Invariant theoretical interpretation of interaction,” *Physical Review*, vol. 101, no. 5, p. 1597, 1956.
- [32] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [33] P. Ramond, *Field theory: a modern primer*. Routledge, 2020.
- [34] L. H. Ryder, *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [35] N. Vandersickel, “A study of the gribov-zwanziger action: from propagators to glueballs,” *arXiv preprint arXiv:1104.1315*, 2011.
- [36] G. Leibbrandt, “Introduction to noncovariant gauges,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 59, no. 4, p. 1067, 1987.
- [37] S. Coleman, *Quantum field theory: lectures of Sidney Coleman*. World Scientific, 2019.
- [38] N. Nakanishi, “Covariant quantization of the electromagnetic field in the landau gauge,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 35, no. 6, pp. 1111–1116, 1966.
- [39] N. Nakanishi, “On the validity of the regge formula in the unequal-mass case,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 37, no. 3, pp. 618–631, 1967.
- [40] B. Lautrup, “Canonical quantum electrodynamics in covariant gauges,” *Matematisk-Fysiske meddelelser udgivet af det kongelige danske videnskabernes selskab*, vol. 35, no. 11, p. 3, 1967.
- [41] M. Veltman *et al.*, “Regularization and renormalization of gauge fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 44, no. 1, pp. 189–213, 1972.
- [42] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*, vol. 28. Springer Science & Business Media, 2008.

- [43] T. Kugo and I. Ojima, “Manifestly covariant canonical formulation of the yang-mills field theories. i: —general formalism—,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 60, no. 6, pp. 1869–1889, 1978.
- [44] D. Dudal, N. Vandersickel, and H. Verschelde, “Unitarity analysis of a non-abelian gauge invariant action with a mass,” *Physical Review D*, vol. 76, no. 2, p. 025006, 2007.
- [45] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1992.
- [46] S. P. Sorella, “Simetria brst e renormalização algébrica.” Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=51SxoF5u0XU&list=PLsMozBsLxEHrCm1PgCJP65TzFw-I9-pPI&index=1>. Acesso em: 20 de janeiro de 2024.
- [47] O. M. Del Cima, “The jackiw–pi model: Classical theory,” *Physics Letters B*, vol. 720, no. 1-3, pp. 254–261, 2013.
- [48] O. Del Cima, “The jackiw–pi model and its symmetries,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 44, no. 35, p. 352001, 2011.
- [49] O. M. Del Cima, D. H. Franco, J. A. Helayel-Neto, and O. Piguet, “On the non-renormalization properties of gauge theories with a chern-simons term,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 1998, no. 02, p. 002, 1998.
- [50] O. M. Del Cima, D. H. Franco, J. A. Helayel-Neto, and O. Piguet, “An algebraic proof on the finiteness of yang–mills–chern–simons theory in $d=3$,” *Letters in Mathematical Physics*, vol. 47, pp. 265–273, 1999.
- [51] G. Barnich, “A general non renormalization theorem in the extended antifield formalism,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 1998, no. 12, p. 003, 1999.
- [52] S. L. Adler and W. A. Bardeen, “Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation,” *Physical Review*, vol. 182, no. 5, p. 1517, 1969.
- [53] G. Barnich and M. Henneaux, “Renormalization of gauge invariant operators and anomalies in yang-mills theory,” *Physical Review Letters*, vol. 72, no. 11, p. 1588, 1994.
- [54] G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, “Local brst cohomology in einstein-yang-mills theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 455, no. 1-2, pp. 357–408, 1995.
- [55] Ö. F. Dayi, “Hamiltonian formulation of jackiw–pi three-dimensional gauge theories,” *Modern Physics Letters A*, vol. 13, no. 24, pp. 1969–1977, 1998.

- [56] Suggested by O. Piguet in a private communication with O. M. Del Cima.
- [57] Suggested by S. Deser in a private communication with O. M. Del Cima (see also S. Deser, S. Ertl and D. Grumiller, arXiv:1208.0339 [hep-th]).

Apêndice A

O propagador do campo de gauge e os operadores de projeção

Sabendo que o propagador de uma partícula está relacionado com sua parte quadrática no lagrangiano, vamos utilizar a ação com o lagrangiano de Maxwell, equação (2.7), para tentar encontrar o propagador para o campo de gauge da QED, o fóton.

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
 \Rightarrow S &= -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) \\
 \Rightarrow S &= -\frac{1}{4} \int d^4x [\partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) + A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \\
 &\quad - \partial_\nu (A_\mu \partial^\mu A^\nu) + A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu (A_\mu \partial^\nu A^\mu) - A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu]
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Para chegarmos à equação (A.1), realizamos o processo de integração por partes e os termos em parênteses irão se anular, pois são termos de superfície. Então, definindo $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ e explorando a troca dos índices μ e ν seguimos que,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S &= -\frac{1}{4} \int d^4x (-2A_\nu \square A^\nu + 2A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu) = \frac{1}{2} \int d^4x (\eta^{\mu\nu} A_\mu \square A_\nu - A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu) \\
 \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \int d^4x [A_\mu (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu]
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A princípio, o propagador do campo de gauge é obtido ao realizar uma transformada de Fourier e inverter a quantidade entre parênteses na equação (A.2). Vamos definir a seguinte quantidade,

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}, \tag{A.3}$$

e sua inversa como uma combinação desses termos,

$$(\Theta^{-1})_{\mu\nu} = a(\partial_\mu\partial_\nu) + b(\eta_{\mu\nu}\square), \quad (\text{A.4})$$

em quem a e b são constantes. Veja que tal inversa não existe:

$$\begin{aligned} (\Theta^{-1})_{\alpha\mu}\Theta^{\mu\nu} &= \delta_\alpha^\nu \\ \Rightarrow a\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\mu\square - a\partial_\alpha\partial_\mu\partial^\mu\partial^\nu + b\eta_{\alpha\mu}\eta^{\mu\nu}\square^2 - b\eta_{\alpha\mu}\partial^\mu\partial^\nu &= \delta_\alpha^\nu \\ \Rightarrow b(\delta_\alpha^\nu\square^2 - \partial_\alpha\partial^\nu) &= \delta_\alpha^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Atuando com ∂_ν na equação (A.5) temos, por absurdo, que não é possível obter uma inversa para o operador $\Theta^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} b(\partial_\nu\delta_\alpha^\nu\square^2 - \partial_\nu\partial_\alpha\partial^\nu) &= \partial_\nu\delta_\alpha^\nu \Rightarrow b(\partial_\alpha\square^2 - \partial_\alpha\square^2) = \partial_\alpha \\ 0 &= \partial_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Uma das maneiras de tornarmos tal operador inversível é adicionar um termo à parte quadrática do lagrangiano, esse termo recebe o nome de gauge-fixing. Por exemplo, podemos adicionar um termo do tipo,

$$\frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\alpha}, \quad (\text{A.7})$$

em que α é um parâmetro de gauge, uma constante. Então a nova ação, após realizar a integração por partes, se torna

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu\square \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\square} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\square} \right) A_\nu \\ \Rightarrow S' &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu\square \left(\Theta^{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} \Omega^{\mu\nu} \right) A_\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

em que definimos um novo operador,

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\square}. \quad (\text{A.9})$$

Realizando uma transformada de Fourier na equação (A.8),

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu \left[-k^2\eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k^\mu k^\nu \right] \tilde{A}_\nu, \quad (\text{A.10})$$

e encontrando a inversa do termo entre colchetes da equação (A.10), é possível obter o

propagador para o fóton:

$$-\frac{1}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]. \quad (\text{A.11})$$

Em particular, quando $\alpha = 0$ dizemos que foi utilizado o gauge de Landau e quando $\alpha = 1$ o gauge de Feynman.

Agora, vamos analisar algumas propriedades dos operadores $\Theta^{\mu\nu}$ e $\Omega^{\mu\nu}$ definidos nas equações (A.3) e (A.9), respectivamente. Eles recebem o nome de projetores, pois o quadrado deles nos leva a eles mesmos.

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha\mu} \Theta^{\mu\nu} &= \left(\eta_{\alpha\mu} - \frac{\partial_\alpha \partial_\mu}{\square} \right) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) = \delta_\alpha^\nu - \frac{\partial_\alpha \partial^\nu}{\square} - \frac{\partial_\alpha \partial^\nu}{\square} + \frac{\partial_\alpha \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu}{\square^2} \\ &\Rightarrow \Theta_{\alpha\mu} \Theta^{\mu\nu} = \delta_\alpha^\nu - \frac{\partial_\alpha \partial^\nu}{\square} = \Theta_\alpha^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\Omega_{\alpha\mu} \Omega^{\mu\nu} = \frac{\partial_\alpha \partial_\mu}{\square} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \Rightarrow \Omega_{\alpha\mu} \Omega^{\mu\nu} = \Omega_\alpha^\nu \quad (\text{A.13})$$

Além disso, são ortogonais,

$$\Theta_{\alpha\mu} \Omega^{\mu\nu} = \left(\eta_{\alpha\mu} - \frac{\partial_\alpha \partial_\mu}{\square} \right) \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} = \frac{\partial_\alpha \partial^\nu}{\square} - \frac{\partial_\alpha \partial^\nu}{\square} \Rightarrow \Theta_{\alpha\mu} \Omega^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Portanto, é possível fechar uma álgebra com esse projetores ortogonais. Além disso, note que

$$\Theta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{A.15})$$

O projetor $\Theta_{\mu\nu}$ recebe o nome de projetor transverso enquanto $\Omega_{\mu\nu}$ de projetor longitudinal.

Podemos ir um pouco além e construir a álgebra de projetores que serão utilizados para o modelo de Jackiw-Pi. É importante lembrar que se trata de um modelo tridimensional com métrica definida por $diag = (+, -, -)$ e, devido à presença do termo de Chern-Simons, precisamos de definir um último projetor para fecharmos tal álgebra. Então, definindo o operador

$$\Sigma_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho, \quad (\text{A.16})$$

em que $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ é o tensor de Levi-Civita. Vamos provar que $\Sigma_{\mu\nu}$ também é um projetor e avaliar qual sua relação com os outros dois.

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\mu} \Sigma^{\mu\nu} &= \epsilon_{\alpha\mu\rho} \partial^\rho (\epsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\sigma) = -(\delta_\alpha^\nu \delta_\rho^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \delta_\rho^\nu) \partial^\rho \partial_\sigma = \partial^\nu \partial_\alpha - \delta_\alpha^\nu \square \\ &\Rightarrow \Sigma_{\alpha\mu} \Sigma^{\mu\nu} = -\square \Theta_\alpha^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\Sigma_{\alpha\mu} \Theta^{\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\mu\rho} \partial^\rho \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) = \epsilon_{\alpha\mu\rho} \partial^\rho - \epsilon_{\alpha\mu\rho} \partial^\rho \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}$$

$$\Rightarrow \Sigma_{\alpha\mu} \Theta^{\mu\nu} = \Sigma_{\alpha}^{\nu} \quad (\text{A.18})$$

$$\Sigma_{\alpha\mu} \Omega^{\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\mu\rho} \partial^{\rho} \frac{\partial^{\mu} \partial^{\nu}}{\square} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_{\alpha\mu} \Omega^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Note que, nas equações (A.18) e (A.19) temos o produto do Levi-Civita com derivadas ordinárias, ou seja, o produto de quantidades completamente antissimétricas com quantidades completamente simétricas. Finalmente, podemos montar uma tabela que representa a álgebra desses três operadores:

	$\Theta_{\alpha\mu}$	$\Omega_{\alpha\mu}$	$\Sigma_{\alpha\mu}$
$\Theta^{\mu\nu}$	Θ_{α}^{ν}	0	Σ_{α}^{ν}
$\Omega^{\mu\nu}$	0	Ω_{α}^{ν}	0
$\Sigma^{\mu\nu}$	Σ_{α}^{ν}	0	$-\square \Theta_{\alpha}^{\nu}$

Tabela A.1: Álgebra fechada dos operadores de projeção.

Apêndice B

A unidade de Faddeev-Popov

Ainda sem apresentar o rigor matemático necessário para a dedução da equação (2.23), vamos tentar examinar um pouco melhor os termos que a compõem a partir de seu análogo em dimensão finita.

Começamos considerando uma função $f(w_1, w_2, \dots, w_{n+m})$ que depende de $n + m$ variáveis reais, tais que podem ser divididas em dois grupos,

$$x_i = \{w_1, \dots, w_n\}, \quad i = 1, \dots, n \qquad y_j = \{w_{n+1}, \dots, w_m\}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (\text{B.1})$$

Tal função irá fazer o papel da exponencial invariante de gauge, e^{iS} , presente nas integrais de caminho. Para isso, vamos propor que $f(w_1, w_2, \dots, w_{n+m}) = f(x_i)$, ou seja, que só tenha dependência nas variáveis x . Então, alterar y não muda o valor da função, bem como uma transformação de gauge não provoca alterações na exponencial.

De maneira pictórica, podemos interpretar o espaço das variáveis w como mostra a figura 2.1. Em analogia à invariância de gauge, percorrer os pontos em x representa transitar em estados físicos diferentes, já percorrer os pontos em y representa realizar uma transformação de gauge e permanecer no mesmo estado.

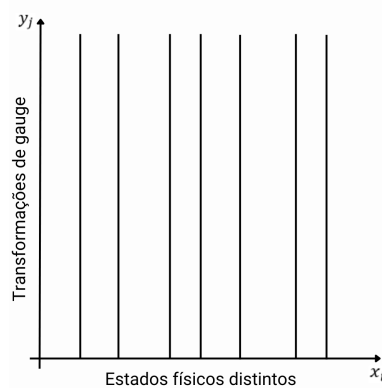


Figura 2.1: Espaço das variáveis w dividido em seus dois grupos x_i e y_j . Cada reta vertical representa um estado físico equivalente cujos pontos são conectados por transformações de gauge.

Com todas essas analogias, a integral funcional da equação (2.21) seria algo semelhante à

$$\int \prod_{a=1}^{n+m} dw_a f(w). \quad (\text{B.2})$$

É compreensível que a integral (B.2) é divergente, pois conta repetidas vezes o mesmo valor da função no momento em que varre as variáveis y . A integral que representa a resolução dessa questão é tal que não contabiliza a variação em y , ou seja, uma integral somente nas variáveis x ou, até mesmo, em w porém com uma condição que dê a garantia de não contar a redundância causada pelas variáveis y . Portanto, a integral desejada é,

$$I = \int \prod_i dx_i f(x) = \int \prod_{a=1}^{n+m} dw_a f(w) \prod_j \delta(y_j) \quad (\text{B.3})$$

Note que, ao integrar em todo o espaço das variáveis w , faz-se necessário o uso de funções delta que, nesse caso, força $y_j = 0$ e restringe à integral a ser realizada em cima do eixo x . No entanto, não precisamos necessariamente que $y_j = 0$. Podemos tomar $y_j = g_j(x_1, \dots, x_n)$, tal que a função g intersecte apenas uma vez cada estado físico que, por sua vez, é representado pelas retas paralelas ao eixo y , como mostra a figura 2.2.

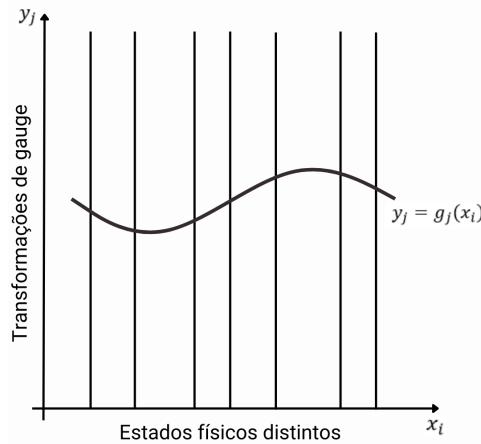


Figura 2.2: Analogia ao processo de gauge-fixing. Representação da função $g_j(x_i)$ que seleciona, para um dado valor de x_i , um único estado físico.

O processo descrito no parágrafo anterior e representado na figura 2.2 é o análogo ao procedimento de gauge-fixing. A nomenclatura utilizada no âmbito das teorias de gauge é tal que, as retas paralelas ao eixo y são nomeadas de órbitas de gauge, pois seus pontos estão conectados via uma transformação de gauge e realizar uma transformação entre eles não produz alteração do estado físico.

Dado que parametrizar a superfície por $y_j = g_j(x_1, \dots, x_n)$ pode não ser conveniente, é possível generalizar ainda mais a situação utilizando uma função geral $h_j(w_1, \dots, w_{n+m})$

que nos retorne à parametrização. Dessa forma, a integral se torna,

$$I = \int \prod_i dx_i f(x) = \int \prod_{a=1}^{n+m} dw_a f(w) \prod_j \delta(h_j) \Delta, \quad (\text{B.4})$$

em que Δ vem da mudança de variáveis e é dado por:

$$\Delta \equiv \det \left(\frac{\partial h_b}{\partial y_c} \right), \quad (\text{B.5})$$

podendo ser melhor compreendido por meio de uma das propriedades da função delta. Dada um função $F(x)$ sendo x_i suas raízes e F' sua derivada, temos que

$$\delta(F(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|F'(x_i)|}. \quad (\text{B.6})$$

Note que, o caso em que $F'(x_i) = 0$ gera problemas e, portanto, não é levado em consideração aqui. Fazendo a analogia às teorias de gauge, tal caso está relacionado ao problema de Gribov, isto é, à situação em que um gauge-fixing não é eficaz em selecionar apenas uma configuração de cada uma das órbitas de gauge e o problema da contagem redundante permanece [35].

Sendo assim, a equação (B.4) e a discussão apresentada esclarece um pouco mais sobre os termos da equação (2.23).