JONATHAN VIEIRA DA COSTA

ENTROPIA TOPOLÓGICA NA RETA REAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: André Junqueira da S. Corrêa

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

Costa, Jonathan Vieira da, 1995-

C838e Entropia topológica na reta real / Jonathan Vieira da Costa.
2021 – Viçosa, MG, 2021.

91 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: André Junqueira da Silva Corrêa.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 90-91.

1. Entropia topológica. 2. Dinâmica topológica. 3. Espaços métricos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.39

JONATHAN VIEIRA DA COSTA

ENTROPIA TOPOLÓGICA NA RETA REAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de fevereiro de 2021.

Assentimento:

Jonathan V. da Costa

Jonathan Vieira da Costa
Autor

André Junqueira da Silva Corrêa

André Junqueira da Silva Corrêa
Orientador

Dedico esta dissertação aos meus pais,
Alessandra e Anderson

Agradecimentos

Durante esses anos de mestrado, de muito estudo, esforço e empenho, tenho a intensão de agradecer algumas pessoas que foram fundamentais nesse processo. Primeiramente agradeço a Deus e a todos os meu familiares que me ajudaram ao longo de toda esta caminhada. Em especial aos meus tios, madrinha, padrinho e aos meus pais, que foram muito importantes neste processo todo me apoiando em todas as minhas decisões e, principalmente em virtude de ser a primeira vez morando fora de casa me dando todo o suporte.

Ao Prof. Dr. André Junqueira da Silva Corrêa pela orientação, me indicando livros e materiais que certamente foram muito úteis no desenvolvimento do trabalho e ainda para desenvolver no futuro, além de muitas vezes indicar os caminhos corretos, sendo paciente e me ajudando bastante a produzir este trabalho mesmo que de maneira remota durante praticamente um ano inteiro.

Aos colegas de sala de aula por colaborarem de alguma forma em minha formação, além dos momentos de descontração. Principalmente no primeiro ano do curso, que foi realizado de maneira presencial.

Aos professores do DMA-UFV por serem sempre solícitos com dúvidas e participarem deste processo. Principalmente no período em que vivemos com todas as dificuldades impostas pela pandemia.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"A Matemática é a honra do espírito humano". (Leibniz)

Resumo

COSTA, Jonathan Vieira M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2021. **Entropia Topológica na Reta Real**. Orientador: André Junqueira da Silva Corrêa.

Neste trabalho, objetivo é mostrar que mapas topologicamente transitivos na reta real tem Entropia Topológica positiva. Para tal são necessárias algumas noções básicas sobre Topologia, Análise na Reta e Sistemas Dinâmicos que serão essenciais para o desenrolar da dissertação. Para a continuidade do trabalho será necessário apresentar algumas das definições de Entropia Topológica que serão via coberturas abertas e por conjuntos geradores e separados em conjuntos compactos. No que se refere a espaços métricos compactos, as definições citadas serão equivalentes. Com o foco de se trabalhar na reta real será necessário uma nova definição de Entropia Topológica para que seja possível trabalhar no contexto desejado, esta definição será aplicada em mapas em espaços métricos. Nos dois últimos capítulos será trabalhado Entropia topológica em contextos diferentes, no penúltimo utilizando as definições de Entropia Topológica relacionadas a conjuntos compactos. Enquanto no último capítulo será utilizada a definição em Espaços Métricos. Em ambos os capítulos será feito o estudo para dar uma nova definição de Entropia Topológica envolvendo mapas monótonos. No capítulo sobre Entropia Topológica em intervalos, haverá um seção que trata o conceito de ferradura, em especial o Teorema de Misiurewicz, que é de fundamental importância para quando o mesmo tema for tratado na reta real. Nos capítulos finais, nos dois últimos, são estudados mapas topologicamente transitivos, com a finalidade de mostrar que suas Entropias Topológicas são positivas.

Palavras-chave: Entropia Topológica. Mapas Transitivos. Ferraduras

Abstract

COSTA, Jonathan Vieira M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2021. **Topological Entropy on the Real Line**. Advisor: André Junqueira da Silva Corrêa.

In this work, the objective is to show that topologically transitive maps on the real line have positive Topological Entropy. For that, some basic notions about Topology, Analysis in the Line and Dynamic Systems are necessary, which will be essential for the development of the dissertation. For the continuity of the work it will be necessary to present some of the definitions of Topological Entropy that will be via open covers and by generating sets and separated into compact sets. With regard to compact metric spaces, the definitions mentioned will be equivalent. With the focus on working on the real line, a new definition of Topological Entropy will be necessary so that it is possible to work in the desired context, this definition will be applied to maps in metric spaces. In the last two chapters, topological entropy will be worked on in different contexts, in the penultimate one using the definitions of topological entropy related to compact sets. While in the last chapter the definition in Metric Spaces will be used. In both chapters the study will be done to give a new definition of Topological Entropy involving monotonous maps. In the chapter on Topological Entropy in intervals, there will be a section that deals with the concept of horseshoe, especially the Misiurewicz Theorem, which is of fundamental importance when the same theme is dealt with in the real line. In the final chapters, in the last two, topologically transitive maps are studied, in order to show that their Topological Entropies are positive.

Keywords: Topological Entropy. Transitive Maps. Horseshoes.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Um breve contexto histórico sobre Entropia Topológica, um assunto relativamente recente, é que por volta do ano de 1965 os pesquisadores R. Adler, A. Konheim e M. McAndrew(AKM) se propuseram a dar uma noção de Entropia Topológica. Inicialmente eles se inspiraram na Entropia de Kolmogov-Sinai, porém com uma definição que não envolve medida invariante. Este primeiro estudo se aplica a mapas contínuos em espaços topológicos compactos.

Nos anos seguintes, Efim Dinaburg e Rufus Bowen deram uma nova noção de Entropia Topológica. Esta definição, no contexto correto, pode ser considerada equivalente a definição de AKM. Sobre este novo conceito sua aplicação é mais restrita, porém foi possível ter uma noção mais clara do seu real significo deste conceito. Isto é, a Entropia Topológica é a taxa de crescimento exponencial do número de órbitas que são distinguíveis dentro de um certo grau de precisão arbitrariamente pequeno.

No contexto deste trabalho, temos o objetivo de trabalhar com mapas topologicamente transitivos na reta real. Porém, as definições que citamos anteriormente não nos permite trabalhar nessa situação. Neste instante se fez necessário utilizar a definição de Entropia Topológica de Cánovas e Rodrígues. Esta nova definição nos permite trabalhar com mapas contínuos em espaços métricos ou simplesmente em espaços topológicos. O que nos permite trabalhar no texto o conceito de Entropia Topológica de mapas na reta real.

Uma maneira de enxergar esta nova definição é como uma "extensão"das definições anteriores. A vantagem de se realizar o trabalho com esta definição é poder utilizar propriedades, quando possível, das definições anteriores. Em outras palavras esta nova definição nos da como vantagem poder replicar algumas das propriedades já estudadas.

Daqui em diante descreveremos o roteiro da nossa dissertação.

No segundo capítulo, faremos uma breve introdução sobre Topologia, Análise na reta e Sistemas Dinâmicos. Na seção que se refere a Topologia temos o objetivo de apresentar conceitos bastante utilizados no decorrer do texto. O mesmo pode ser dito sobre as seções que tratam de Análise na Reta e Sistemas Dinâmicos, com o acréscimo de que na seção sobre Sistemas Dinâmicos algumas propriedades de fundamental importância são demonstradas, em especial as de mapas topologicamente transitivos.

No terceiro capítulo, apresentaremos formalmente os conceitos de Entropia Topológica citados acima. Inicialmente veremos a definição de Entropia Topológica via coberturas abertas e posteriormente por conjuntos separados e geradores. Em seguida, veremos que as definições citadas são equivalentes no contexto correto. Prosseguindo no estudo de Entropia Topológica apresentamos a definição de Cánovas e Rodrígues e em seguida reproduzimos algumas propriedades que podem ser encontradas na literatura sobre as definições anteriores.

No quarto capítulo, começaremos mostrando que para um mapa transitivo sua Entropia Topológica é positiva, com o foco em mapas transitivos aplicados a intervalos contidos na reta real. Na sequência foi feito um estudo sobre Entropia Topológica e mapas monótonos por partes. Na última seção deste capítulo mostraremos que mapas com Entropia Topológica positiva conseguimos aproximar este valor através de ferraduras.

No quinto capítulo, trabalharemos a definição de Entropia Topológica de Cánovas e Rodrígues de mapas que levam de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Inicialmente, será tratada uma definição para a Entropia Topológica focada no contexto do trabalho. Na sequência, veremos resultados para mapas monótonos e a relação entre Entropia Topológica e Ferradura. E finalmente chegaremos em nosso objetivo, que é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo e topologicamente transitivo, então $ent(f) > 0$.*

Este trabalho foi baseado no artigo escrito por Canovás e Rodrigues. A publicação ocorreu em 2005, intitulado Topological entropy of maps on the real line([7]).

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Topologia

Sobre espaços topológicos e métricos, temos uma enorme gama de materiais. Nesta seção falaremos de algumas definições e resultados importantes para o decorrer do texto. Como por exemplo os livros [10] e [11]. Neste momento não demonstraremos nenhum resultado. Os exemplares citados acima contém os fatos que serão exibidos a seguir.

Definição 1. Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção τ de subconjuntos de X é chamada **Topologia** em X se satisfaz as seguintes condições:

(i) $\emptyset, X \in \tau$;

(ii) Se (A_λ) é uma família qualquer de elementos de τ, então $\bigcup A_\lambda \in \tau$;

(iii) Se $A_1, \cdots, A_n \in \tau$, então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$.

Nessas condições, dizemos que o par (X, τ) é um espaço topológico. Os elementos de τ são chamados de subconjuntos(segundo a topologia τ) abertos do espaço. Dizemos ainda que todos os elementos de τ são abertos.

Definição 2. Dizemos que um conjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, $X - F$ é aberto.

Definição 3. Dizemos que um espaço topológico X é de **Hausdorff** se dados dois pontos arbitrários $x \neq y$ em X, existem abertos $U, V \subset X$ tais que $x \in U$ e $y \in V$ e $U \bigcap V = \emptyset$.

Proposição 4. *Os conjuntos fechados de um espaço topológico X tem as seguintes características:*

(i) $\emptyset$ e X são fechados;

(ii) Se (F_λ) é uma família qualquer de conjuntos fechados, então $\bigcap F_\lambda$ é fechado;

(iii) Se $F_1, \cdots, F_n$ são conjuntos fechados, então $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é um conjunto fechado.

Definição 5. Um espaço topológico X é dito ser **compacto** se dado uma coleção qualquer $\{A_i\}_{i\in I}$ de abertos de X tais que $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, é então sempre possível extrair $J \subset I$ finito tal que $X \subset \bigcup_{j\in J} A_j$.

Neste segundo momento, iremos trabalhar com espaços métricos, pelo fato de durante o texto termos um interesse em estudar a reta real.

Definição 6. Uma **métrica** sobre um conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ e, além disso, $\mathrm{d}(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. Para todo $x, y \in X$.
2. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
3. Dados $x, y, z \in X$, tem-se $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$.

A última propriedade é conhecida como a desigualdade triangular pela sua interpretação considerando x, y, z como vértices de um triângulo.

Definição 7. Sejam X um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Definimos a bola aberta centrada em x de raio r, denotada por $B(x, r)$, como sendo o conjunto dado por

$$B(x, r) = \{y \in X : \mathrm{d}(x, y) < r\}.$$

Definição 8. Sejam X um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Definimos a bola fechada centrada em x de raio r, denotada por $\overline{B}(x, r)$, como sendo o conjunto dado por

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \mathrm{d}(x, y) \leq r\}$$

.

Definição 9. Sejam X um espaço métrico, $A \subset X$ e $x \in X$, dizemos que x é um **ponto interior** se é centro de uma bola aberta contida em A. O conjunto dos pontos interiores denotaremos por $int(A)$.

Assim, quando um ponto $y \in X$ não é ponto interior de A se todo aberto contendo y não está inteiramente contido em A.

Definição 10. Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$. Dizemos que A é **aberto** se todos os seus pontos são interiores.

Definição 11. Sejam X, Y espaços métricos, dizemos que $f : X \to Y$ é contínua no ponto a se dado $\epsilon > 0$, é possível obter $\delta > 0$ tal que $\mathrm{d}(x, a) < \delta$ implica que $\mathrm{d}(f(x), f(a)) < \epsilon$ para todo $x \in X$.

A função f é contínua em X se é contínua em todo $a \in X$.

Definição 12. Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$. A distância de um ponto a um conjunto é dada por

$$\mathrm{d}(a, A) = \inf\{\mathrm{d}(a, x) : x \in A\}.$$

Definição 13. Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$. Um ponto $a \in X$ é **aderente** ao conjunto A quando $d(a, X) = 0$. Isto significa que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $x \in X$ tal que $\mathrm{d}(a, x) < \epsilon$. Denotaremos o conjunto de pontos aderentes por $\overline{A}$.

Definição 14. Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$. Um ponto a é um **ponto limite** do conjunto A se toda bola de centro a contém algum ponto de X, que seja diferente de a. Indicaremos com a notação A' o conjunto dos pontos limites de A em X. Chamaremos o conjunto A' de derivado do conjunto A.

Proposição 15. *Sejam X, Y espaços métricos e $f : X \to Y$. O mapa f é contínuo se para todo aberto A contido em Y, temos $f^{-1}(A)$ é aberto de X.*

Definição 16. Sejam X, Y espaços métricos, dizemos que $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se é uma bijeção contínua cuja inversa também é contínua. Dizemos que X e Y são homeomorfos.

2.2 Análise na Reta

Com o desenrolar do texto, principalmente nos capítulos que envolverão Entropia Topológica em Intervalos e na Reta, teremos durante o desenrolar do trabalho o contexto utilizado no livro [9]. A seguir teremos alguns resultados sobre análise na reta que serão bastante utilizados no decorrer do texto. Durante o desenvolvimento do texto, salvo quando for previamente descrito, utilizaremos a métrica euclidiana quando estivermos no universo de Análise na Reta.

Começaremos apresentando a definição de sequência de números reais.

Definição 17. Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais quando, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \epsilon$. Escreve-se $\lim x_n = a$.

Em símbolos escrevemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}&\lim x_n = a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.\end{aligned}$$

Outras notações são $x_n \to a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Na sequência vejamos o conceito de limite e limite lateral.

Definição 18. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto limite de X. Dizemos que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

O que significa

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definição 19. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto limite à direita de X. Dizemos que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita e escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

O que significa

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } 0 < x - a < \delta \text{ implica que } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definição 20. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto limite à esquerda de X. Dizemos que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda e escrevemos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

O que significa

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } 0 < a - x < \delta \text{ implica que } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Teorema 2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e a um ponto limite à direita e à esquerda. Então existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$.*

Trabalhando neste contexto, temos a seguinte definição de continuidade.

Definição 21. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em $a \in X$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Além disso, $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em X quando for contínua em todo $a \in X$.

Observação 22. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Se $a \in X$ é um ponto limite, f é contínua se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Utilizando o conceito de limite lateral, dizemos que f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Teorema 3. ***(Teorema do Valor Intermediário)*** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$(ou $f(b) \leq d \leq f(a)$), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Corolário 23. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.*

2.3 Sistemas Dinâmicos

Nesta seção apresentaremos algumas definições importantes sobre Sistemas Dinâmicos para o desenvolvimento do trabalho.

Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo, onde X é um espaço topológico de Hausdorff. O par (X, f) chamaremos de sistema dinâmico.

Definição 24. Dado $x \in X$, o conjunto $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é a órbita de x. Denotaremos por $\text{orb}_f(x)$. Se f for um homeomorfismo a órbita completa de x é $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, que denotaremos por $FullOrb_f(x)$.

Definição 25. Dado $x \in X$, dizemos que x é um ponto fixo se $f(x) = x$ e de período $n \in \mathbb{N}$ se $f^n(x) = x$. Denotaremos por $Fix(f)$ o conjunto de pontos fixos e $P_n(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de período $n \geq 2$. E por $P(f)$ o conjunto de pontos periódicos.

Definição 26. Seja $K \subseteq X$, dizemos que K é invariante se $f(K) \subset K$. Caso $f(K) = K$ dizemos que é estritamente invariante.

Observação 27. Na literatura sobre Sistema Dinâmicos, a definição de um mapa estritamente invariante descrita acima também é conhecida como um mapa totalmente invariante.

Definição 28. Sejam $A, B \subset X$ e $f : A \to A$, $g : B \to B$ dois mapas. f e g são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : A \to B$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Lema 29. *Sejam $A, B \subset X$ e $f : A \to A$, $g : B \to B$ dois mapas topologicamente conjugadas e $h : A \to B$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Então,*

$$h \circ f^n = g^n \circ h$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A partir deste momento, trabalharemos com intervalos da reta para as definições. Pelo fato de que nosso objetivo é trabalhar com a reta real e seus intervalos. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Para as definições posteriores utilizaremos o intervalo I.

Definição 30. Seja $f : I \to I$, dizemos que uma função é crescente(respectivamente decrescente) em I se para $x, y \in I$ com $x < y$ temos $f(x) < f(y)(f(x) > f(y))$.

Definição 31. Seja $f : I \to I$, dizemos que uma função é não descrescente(respectivamente não crescente) em I se para $x, y \in I$ com $x < y$ temos $f(x) \leq f(y)(f(x) \geq f(y))$.

Definição 32. Seja $f : I \to I$, dizemos que uma função é monótona se ela é não crescente ou não descrescente e estritamente monótona se é crescente ou decrescente.

Definição 33. Sejam $x_0 = \inf I, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = \sup I$ onde $x_2, \cdots, x_{n-1} \in I$ e $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$. Dizemos que o mapa f aplicado em I é monótono por partes se f é monótono nos intervalos $[x_i, x_{i+1}], \forall i = 0, \cdots, n-1$.

Definição 34. Seja $f : I \to I$. Dizemos que um ponto $x \in I$ é um ponto crítico de f se não existir uma vizinhança de x em que f seja estritamente monótono. Em outras palavras, dizemos que $x \in I$ é um ponto crítico de f se todo aberto V_x que contém x, existem $x, y \in V_x$, com $x \neq y$, tais que $f(x) = f(y)$.

A próxima definição que veremos é uma das mais importantes importantes para o desenvolvimento do texto. Pelo fato de que o objetivo é trabalhar mapa transitivo na reta.

Definição 35. Sja X um espaço topológico. O mapa $f : X \to X$ é topologicamente transitivo, se dados $U, V \in X$ conjuntos abertos não vazios existe $n \geq 0$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Durante o desenvolvimento do texto, em particular nos capítulos quatro e cinco, trabalharemos na reta real. Então podemos reescrever a definição acima da seguinte maneira.

Definição 36. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um subintervalo da reta. O mapa $f : I \to I$ é topologicamente transitivo, se dados $U, V \in I$ conjuntos abertos não vazios existe $n \geq 0$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Observação 37. A termo de notação, durante o texto em muitos casos chamaremos o mapa topologicamente transitivo apenas de mapa transitivo. E de maneira geral podemos definir um mapa transitivo da seguinte maneira.

A partir deste momento trataremos X como espaço métrico completo perfeito(sem pontos isolados) que possui conjunto enumerável denso.

O próximo Teorema nos dará uma versão alternativa da definição de transitividade. Que será útil com o desenrolar do texto e ainda será bastante útil na demonstração do Teorema 17.

Teorema 4. *Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo. Então f é transitiva se, e somente se, existe $x \in X$ tal que sua órbita positiva $orb_f(x)$ é densa em X.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que f é transitiva. Por hipótese temos que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$$

é denso em X para todo aberto V, pois intersecta qualquer aberto U de X. Como X é espaço métrico com subconjunto enumerável denso, então existe uma base enumerável $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ para a topologia de X. Assim,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_i) \right)$$

é a interseção enumerável de abertos densos em X. pelo Teorema da Categoria de Baire([12] Capítulo 8) o conjunto

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}\left(V_i\right)\right)$$

é denso e não vazio. Tomando

$$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}\left(V_i\right)\right)$$

temos $\overline{\text{orb}_f(x)} = X$.

Suponhamos agora que existe $x \in X$ tal que sua órbita positiva $\text{orb}_f^+(x)$ é densa em X. Seja $U \subset X$ um conjunto aberto, então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(x) \in U$. Como $f^i(x) \in \text{orb}_f(x)$, que é denso em X, temos que

$$\overline{\text{orb}_f^+(f^i(x))} = X$$

pois X não possui pontos isolados e as órbitas $\text{orb}_f^+(f^i(x))$ e $\text{orb}_f(x)$ diferem em um número finito de pontos. □

Proposição 38. *Seja $f : X \to X$ um mapa transitivo e A um aberto não vazio de X tais que $f(A) \subseteq A$. Então $\overline{A} = X$.*

Demonstração. Suponhamos que exista um aberto A não vazio de X não denso em X tal que $f(A) \subseteq A$. Então podemos encontrar $B \subset X - A$ de modo que B seja aberto. Então $f^n(A) \bigcap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Contrariando o fato de f ser um mapa transitivo. □

Proposição 39. *Seja $f : X \to X$ um mapa transitivo e A um aberto não vazio de X tais que $f^{-1}(A) \subseteq A$. Então $\overline{A} = X$.*

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser feita de maneira semelhante a da proposição anterior. Suponhamos que exista um aberto A não vazio de X não denso em X tal que $f^{-1}(A) \subseteq A$. Então podemos encontrar $B \subset X - A$ de modo que B seja aberto. Então $f^{-n}(A) \bigcap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, segue que $A \bigcap f^n(B)$. Contrariando o fato de f ser um mapa transitivo. □

Proposição 40. *Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ dois mapas topologicamente conjugadas e $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Se f é transitiva, então g também é transitiva.*

Demonstração. Suponhamos que g não é transitiva. Pelo Teorema 4, sabemos todo ponto de y não tem órbita densa em Y, ou seja, temos que

$$\forall y \in Y \text{ existe um aberto } V \subset Y, \text{ tal que para todo } n \geq 0,\ g^n(y) \notin V.$$

Seja $x \in X$ tal que $h(x) = y$(este x existe pois h é uma bijeção e consequentemente sobrejetora). Pelo Lema 29, segue que

$$g^n(h(x)) \notin V \Rightarrow h(f^n(x)) \notin V \Rightarrow f^n(x) \notin h^{-1}(V).$$

Como h é contínua, temos que $h^{-1}(V)$ é aberto. Isto é, para todo $x \in X$ existe um aberto V' em que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \mathrm{orb}_f(x) \bigcap V' = \emptyset$$

Isto nos mostra que a órbita de x não é densa em X. Logo f não pode ser transitiva. Contradizendo a hipótese. □

Voltando agora a trabalhar com intervalos contidos na reta, vejamos algumas definições e resultados que nos ajudam a trabalhar o conceito de Entropia Topológica em intervalos da reta.

Definição 41. O mapa $f : I \to I$ é topologicamente mixing, se dados $U, V \in I$ conjuntos abertos não vazios existe $N \geq 0$ tal que $\forall n \geq N$ temos $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definição 42. O mapa $f : I \to I$ é topologicamente weakly mixing se $f \times f$ é transitiva, onde $f \times f$ é o mapa

$$\begin{aligned} I \times I &\to I \times I \\ (x, y) &\mapsto (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

Os dois Teoremas que vem a seguir, serão muito importantes quando trabalharmos Entropia Topológica no Intervalo.

Teorema 5. *Seja um mapa $f : [a, b] \to [a, b]$ transitivo então uma das duas assertivas ocorre*

1. *f é topologicamente mixing;*
2. *Existe $c \in (a, b)$ tal que $f([a, c]) = [c, b], f([c, b]) = [a, c]$, os mapas $f^2|_{[a,c]}$ e $f^2|_{[c,b]}$ são topologicamente mixing e c é o único ponto fixo de f.*

Demonstração. Ver [14], página 19, Teorema 2.19. □

Teorema 6. *Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ um mapa. Então os itens abaixo são equivalentes*

1. *f é transitiva e tem um ponto periódico impar diferente de 1;*
2. *f^2 é transitiva;*
3. *f é totalmente transitiva;*
4. *f é topologically weakly mixing;*
5. *f é topologically mixing;*
6. *Para todo $\epsilon > 0$ e J um intervalo não degenerado, existe um inteiro N tal que $f^n(J) \supset [a + \epsilon, b - \epsilon], \forall n \geq N$.*

Demonstração. Ver [14], página 19, Teorema 2.20. □

Definição 43. Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ um mapa. O ponto final a(respectivamente b) é acessível se existe $x \in (a,b)$ e $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = a$(respectivamente $f^n(x) = b$).

Lema 44. *Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ um mapa topologicamente mixing.*

1. *Se a(respectivamente b) é o único ponto final não acessível, então é um ponto fixo. Se nem a nem b foram acessíveis então, ou $f(a) = a$ e $f(b) = b$ ou $f(a) = b$ e $f(b) = a$.*

2. *Se a(respectivamente b) é um ponto fixo não acessível, então existe uma sequência decrescente(respectivamente crescente) de pontos fixos $(x_n)_{n\geq 0}$ convergindo para a(respectivamente b). Além disso, para todo $n \geq 0$, $f|_{[x_{n+1},x_n]}$ não é monótono.*

Demonstração. Ver [14], página 23, Lema 2.32. □

A seguir veremos uma definição que será importante para o desenvolvimento do texto. Em especial na necessidade de se trabalhar com a Entropia Topológica em intervalos e na reta.

Definição 45. Dado $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que f tem uma $p - ferradura$ se existem p subintervalos compactos J_i de I tais que

$$\bigcup_{i=1}^{p} J_i \subseteq f(J_i), \forall i = 1, \cdots, p.$$

Definição 46. Seja $f : I \to I$ um mapa contínuo no intervalo I. Se $J_1, \cdots, J_p$ são intervalos disjuntos tais que $f(J_i) = J_{i+1}$ para todo $i = 1, \cdots, p-1$ e $f(J_p) = J_1$. Então $(J_1, \cdots, J_p)$ é chamada de ciclos de intervalos de período p. Além disso, J_1 é chamado de intervalo periódico de período p.

Definição 47. Seja $f : I \to I$ um mapa contínuo.

1. Sejam J, K dois intervalos fechados não vazios. Então J é uma cobertura para K(por f) se $K \subset f(J)$. Será denotado por $J \to K$. Se k é um inteiro positivo, J cobre K k vezes se J contém k subintervalos fechados não vazios com interiores disjuntos de modo que cada um cubra K.

2. Sejam $J_0, J_1, \cdots, J_n$ intervalos fechados não vazios tais que J_{i-1} cobre J_i para todo $i = 1, \cdots, n$. Então $(J_0, J_1, \cdots, J_n)$ é chamada cadeia de intervalos(por f). E é denotada por $J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_n$.

A seguir veremos alguns resultados que serão muito importantes no desenvolvimento do texto, em especial o conceito de w-limite.

Definição 48. Seja $f : I \to I$ um mapa contínuo, onde I é um intervalo compacto. Um ponto $y \in I$ é um ponto limite para um órbita de um elemento $x \in I$ se existe uma sequência de inteiros (n_k) com k tendendo ao infinito tal que

$$\lim_{k\to\infty} d\left(f^{n_k}(x), y\right) = 0.$$

Dado $x \in I$, denotaremos o conjunto $\omega_f(x)$ como o conjunto dos pontos limites da órbita de x de f.

Proposição 49. *Seja $f : I \to I$ um mapa contínuo. O conjunto $\omega - limite$ de $x \in I$ é dado por*

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}$$

Demonstração. Seja $y \in \omega_f(x)$. Então existe uma sequência de inteiros (n_k) com k tendendo ao infinito tal que

$$\lim_{k \to \infty} d\left(f^{n_k}(x), y\right) = 0.$$

Isto é, $y \in \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\omega_f(x) \subset \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}$.

Provemos agora a inclusão contrária. Seja $y \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}$. Então para qualquer n natural maior ou igual a 0, temos $y \in \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}$. Logo, para cada n, temos $k_n > k_{n-1}$ com $k_n \geq n$ e $d\Big(f^{k_n}(x), y\Big) < \frac{1}{n}$. Aplicando o limite quando n tende ao infinito, temos

$$\lim_{n \to \infty} d\left(f^{k_n}(x), y\right) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} d\left(f^{k_n}(x), y\right) = 0$, ou seja, $y \in \omega_f(x)$ como queríamos.

$\square$

Proposição 50. *O conjunto $\omega_f(x)$ é fechado e estritamente invariante.*

Demonstração. O conjunto $\omega_f(x)$ é fechado pelo fato de ser a união arbitrária de conjuntos fechados. Com respeito a segunda parte, observe que

$$
\begin{aligned}
f\left(\omega_f(x)\right) &= f\left(\bigcap_{n\geq 0}\overline{\{f^k(x):k\geq n\}}\right)\\
&\subset \bigcap_{n\geq 0} f\left(\overline{\{f^k(x):k\geq n\}}\right)\\
&\subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{f\left(\{f^k(x):k\geq n\}\right)}\\
&\subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{f(f^k(x)):k\geq n\}}\\
&\subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{f^{k+1}(x):k\geq n\}}\\
&\subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{f^k(x):k\geq n+1\}}\\
&\subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{f^k(x):k\geq n\}}\\
&\subset \omega_f(x)
\end{aligned}
$$

Logo $f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$, ou seja, $\omega_f(x)$ é invariante. Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que $\omega_f(x) \subset f(\omega_f(x))$.

De fato, dado $y \in \omega_f(x)$ existe uma sequência (n_k) tal que

$$\lim_{k\to\infty} d\left(f^{n_k}(x), y\right) = 0.$$

Como I compacto(limitado e fechado), segue que para $f^{n_k-1}(x)$ uma subsequencia temos

$$\lim_{k\to\infty} d\left(f^{n_k-1}(x), z\right) = 0.$$

onde $z \in \omega_f(x)$. Da continuidade de f, segue que

$$
\begin{aligned}
y &= \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)\\
&= \lim_{k\to\infty} f\left(f^{n_k-1}(x)\right)\\
&= f\left(\lim_{k\to\infty} f^{n_k-1}(x)\right)\\
&= f(z)
\end{aligned}
$$

Logo $\omega_f(x) \subset f(\omega_f(x))$ concluindo a demonstração. □

Definição 51. Definiremos agora o conjunto $\omega - limite$ por

$$\omega\left(f\right) = \bigcup_{x\in[a,b]} \omega_f(x).$$

Observação 52. O conjunto $\omega\left(f\right)$ é invariante, pois $\omega_f(x)$ é invariante.

Proposição 53. *$\omega(f)$ é fechado.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\overline{\omega(f)} = \omega(f)$. Para tal basta ver que $\overline{\omega(f)} \subseteq \omega(f)$ pois a inclusão contrária segue da definição. De fato, seja $z \in \overline{\omega(f)}$. Então existe uma sequência (z_n) de elementos de $\omega_f(x)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Ou seja,

$$\text{Dado } \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \omega_f(x)$ para algum x, ou seja, existe uma sequência x_n tal que

$$\lim_{i\to\infty} d\left(f^{k_i}(x_n), z_n\right) = 0.$$

Em outras palavras, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$i > i(n) \Rightarrow |f^{k_i}(x_n) - z_n| < \frac{1}{n}.$$

Assim, para $n > \max\left\{n_0, \frac{2}{\epsilon}\right\}$ temos

$$\begin{aligned} |f^{k_i}(x_n) - z| &= |f^{k_i}(x_n) - z_n + z_n - z| \\ &= |f^{k_i}(x_n) - z_n| + |z_n - z| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{i\to\infty} d\left(f^{k_i}(x_n), z\right) = 0$. Consequente $z \in \omega(f)$.

□

A partir de agora, veremos alguns resultados envolvendo pontos fixos e mapas topologicamente transitivos que serão de fundamental importância no desenvolvimento do texto.

Lema 54. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a,b]) \subset [a,b]$ ou $f([a,b]) \supset [a,b]$, então f tem ponto fixo.*

Demonstração. Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$. Suponhamos primeiro que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Note que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, daí:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$
$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Observe que $g(b) \leq 0 \leq g(a)$. Pelo Teorema 3 existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Portanto, c é um ponto fixo.

Suponhamos agora que $f([a,b]) \supset [a,b]$. Então existem $x, y \in [a,b]$ tais que $f(x) \leq a$ e $f(y) \geq b$. Daí,

$$g(x) = f(x) - x \leq a - x \leq 0$$
$$g(y) = f(y) - y \geq b - y \geq 0$$

Assim, $g(x) \leq 0 \leq g(y)$. Aplicando o Teorema 3 para g no intervalo $[x,y]$, existe $c \in (x,y)$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Portanto, c é um ponto fixo. □

Lema 55. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to I$ um mapa, $x, y \in I$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Seja J um subintervalo de I contendo nenhum ponto periódico e que $x, y, f^m(x), f^n(y)$ pertencem a J. Se $x < f^m(x)$ então $y < f^n(y)$ ou caso $x > f^m(x)$ então $y > f^n(y)$.*

Demonstração. Suponhamos que $f^m(x) > x$, o outro caso pode ser feito de maneira análoga. Tomemos $g = f^m$. Iremos realizar uma prova por indução para mostrar que $g^k(x) > x$ para todo $k \geq 1$.

Por hipótese é verdade para o caso $k = 1$, pois

$$g^1(x) = f^m(x) > x.$$

Suponhamos que seja verdade para todo $i = 1, \cdots, k-1$ que $g^i(x) > x$ e $g^k(x) \leq x$. Podemos escrever

$$\{g^i(x) \mid i = 0, \cdots, k-1\} = \{x_0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{k-1}\},$$

onde $x_0 = x$ e $x_i \neq x$, $\forall i = 1, \cdots, k-1$ pelo fato de que em J não existir ponto periódico. Isto mostra que

$$g^k(x) \leq x = x_0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{k-1}.$$

Seja j um inteiro em $\{1, \cdots, k-1\}$ tal que $x_1 = g^j(x)$. Pelo Teorema 3 temos

$$g^{k-j}([x_0, x_1]) \supset \left[g^k(x), g^{k-j}(x)\right] \supset [x_0, x_1].$$

Consequentemente, temos

$$g^{k-j}([x_0, x_1]) \supset [x_0, x_1].$$

Pelo Lema 54, g^{k-j} tem um ponto fixo em $[x_0, x_1]$. Em outras palavras, g tem um ponto periódico em $[x_0, x_1]$.

Por outro lado, observe que $[x_0, x_1] \subset J$ pois

$$x_1 = \min\{g^i(x) \mid i = 1, \cdots, k-1\}$$

e J não contém ponto periódico por hipótese. Assim, temos uma contradição no fato de $g = f^m$ ter um ponto periódico em $[x_0, x_1]$ e podemos concluir que $g^k(x) > x$ para todo $k \geq 1$.

Suponhamos agora que $f^n(y) < y$. Usando o mesmo argumento feito acima(na ordem inversa) temos que

$$f^{kn}(y) < y, \ \forall k \geq 1$$

Logo,

$$f^{mn}(y) < y \text{ e } x < f^{mn}(y).$$

Suponhamos sem perda de generalidade que $x < y$, caso $x > y$ basta utilizar o intervalo $[y, x]$. O mapa $\varphi(t) = f^{mn}(t) - t$ é contínuo no intervalo $[x, y]$, daí pelo Teorema 3 existe $z \in (x, y)$ tal que $f^{mn}(z) = z$. Mas note que $[x, y] \subset J$. Então não poderíamos ter um ponto periódico neste intervalo. Assim, $y \leq f^n(y)$. Como $y, f^n(y)$ pertencem a J, não podemos ter $y = f^n(y)$. Portanto, $y < f^n(y)$.

□

Proposição 56. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to I$ um mapa contínuo e f topologicamente transitiva. Então o conjunto de pontos periódicos é denso em I.*

Demonstração. Suponhamos que exista um subintervalo aberto de I que não contém ponto periódico algum e que este intervalo seja (a, b), com $a, b \in I$.

Como f é um mapa topologicamente transitiva, pelo Teorema 4 segue que existe $c \in I$ com a órbita densa em I, em particular em (a, b) com $a, b \in I$. Tomemos $x = f^n(c)$ onde n é o menor número inteiro maior ou igual a 0 tal que $f^n(c) \in (a, b)$. Pelo fato da órbita de c ser densa em (a, b), segue que a órbita de x é densa em (a, b). Então existem inteiros $m > 0$ e $0 < p < q$ tais que

$$x < f^m(x) < b \text{ e } a < f^q(x) < f^p(x) < x.$$

ou seja,

$$a < f^q(x) < f^p(x) < x < f^m(x) < b.$$

Tomemos $y = f^p(x)$. Temos

$$\begin{aligned}
&y = f^p(x) \\
&\Leftrightarrow f^q(y) = f^{p+q}(x) \\
&\Leftrightarrow f^{q-p}(y) = f^{p+q-p}(x) \\
&\Leftrightarrow f^{q-p}(y) = f^q(x)
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$a < f^{q-p}(y) < y < x < f^m(x) < b.$$

Isto é, $f^{q-p}(y) < y$ onde $x < f^m(x)$ em um subintervalo que não contém ponto periódico. Em outras palavras, contradiz o Lema 55. Portanto, o conjunto dos pontos periódicos é denso. □

A seguir, teremos algumas observações sobre mapas topologicamente transitivos que serão bastante utilizadas durante o texto. Em especial ao demonstrar o Teorema 17.

Observação 57. Sabemos que se $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to I$ um mapa. Se f não tem ponto fixo então ou $f(x) > x\ \forall x \in I$ ou $f(x) < x\ \forall x \in I$. Este fato pode ser adaptado para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde f é uma mapa contínuo. De maneira análoga suponhamos sem perda de generalidade que exista $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$ tais que

$$f(x_1) > x_1 \text{ e } f(x_2) < x_2.$$

Definamos $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f|_{[x_1,x_2]}(x) - x$. Daí, temos

$$g(x_1) = f|_{[x_1,x_2]}(x_1) - x_1 > 0$$
$$g(x_2) = f|_{[x_1,x_2]}(x_2) - x_2 < 0$$

Pelo Teorema 3 existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g(c) = 0$. Isto é, $f|_{[x_1,x_2]}(c) = c$. Consequentemente f tem ponto fixo.

Observação 58. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo e transitivo. Então para qualquer $K \subset \mathbb{R}$ invariante com $K \neq \mathbb{R}$ temos $int\,(K) = \emptyset$.

De fato, suponhamos que $K \subset \mathbb{R}$, com $K \neq \mathbb{R}$ e $int(K) \neq \emptyset$, seja invariante. Isto é, $f(K) \subset K$. Note que $int\,(K)$ é aberto. Tomemos

$$U = int\,(K) \text{ e } V \subset \mathbb{R} - K \text{ um aberto.}$$

Como K é invariante, $f(U) \subset K$. Ou seja,

$$f(U) \cap V = \emptyset.$$

Além disso, pelo fato de K ser invariante,

$$f^k(U) \subset K,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$f^k(U) \cap V = \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}.$$

O que contradiz o fato de f ser topologicamente transitiva.

Proposição 59. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to I$ um mapa contínuo. Se f tem um ponto periódico que não seja um ponto fixo, então f tem ponto fixo.*

Demonstração. Suponhamos que f não tenha ponto fixo. Então temos $f(x) > x$ para todo $x \in I$ ou $f(x) < x$ $\forall x \in I$. O que impossibilitaria existir um ponto periódico. $\square$

Capítulo 3

Entropia Topológica

Neste capítulo trataremos de Entropia Topológica primeiro de maneira mais geral, em contextos mais amplos. Posteriormente utilizaremos uma definição de Entropia Topológica no contexto em que desejamos(reta real) para a utilização nos capítulos posteriores. Faremos uma introdução sobre a definição de Entropia Topológica, utilizando os materiais [16] e [14].

3.1 Definição via coberturas abertas

Nesta seção trataremos o conjunto X como um espaço topológico compacto.

Definição 60. Seja α uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que α é uma cobertura para X se $X = \bigcup \alpha_\lambda$, onde $\alpha_\lambda \in \alpha$. A cobertura α será uma partição se seus elementos forem dois a dois disjuntos.

No momento de definir Entropia, estaremos interessados em coberturas abertas de X. Chamamos cobertura aberta de X qualquer família α de abertos cuja união contém todo o X. Pela compacidade, toda cobertura aberta admite uma subcobertura (isto é, uma subfamília que ainda é uma cobertura) com um número finito de elementos. Inicialmente, vamos denotar duas coberturas abertas por α e β.

Definição 61. Sejam duas coberturas abertas denotadas por α e β. Podemos definir uma nova cobertura aberta por

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \cap\beta\}.$$

De maneira similar, podemos definir a cobertura aberta $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ onde cada α_i é uma cobertura aberta e será denotada por α^n.

Definição 62. Uma cobertura aberta β é dita um refinamento da cobertura aberta α se todo membro de β está contido em algum membro de α e é denotado por $\alpha < \beta$.

Observação 63. Note que $\alpha < \alpha \vee \beta$ pois dado qualquer membro de $\alpha \vee \beta$ está em α pelo fato de $C = A \cap B \in \alpha \vee \beta$ com $A \in \alpha, B \in \beta$, como $C \subset A$ segue o resultado.

Observação 64. Se β é uma subcobertura de α, então $\alpha < \beta$.

Definição 65. Se α é uma cobertura aberta para X e $f : X \to X$ é um mapa contínuo então

$$f^{-1}\alpha = \left\{ f^{-1}A \mid A \in \alpha \right\}$$

é uma cobertura aberta.

Observação 66. Se α é uma cobertura aberta para X e $f : X \to X$ é um mapa contínuo, então:

1. $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}\alpha \vee f^{-1}\beta$
2. Se $\alpha < \beta$ então $f^{-1}\alpha < f^{-1}\beta$

Definição 67. Seja X um espaço topológico e α uma cobertura aberta de X. Chamamos Entropia de α o número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha)$$

onde $N(\alpha)$ é o número de conjuntos em uma subcobertura de cardinalidade miníma.

Observação 68. Dado X um espaço topológico e α uma cobertura aberta de X. Veremos algumas observações sobre $N(\alpha)$.

1. $N(\alpha) \leq \#(\alpha)$
2. Sejam $P_1, \cdots, P_n$ partições de X, então P^n é uma partição e $N(P^n) = \#(P^n)$.

Agora, veremos algumas propriedades de entropia.

Proposição 69. *1. $H(\alpha) \geq 0$;*

2. $H(\alpha) = 0$ se $N(\alpha) = 1$ ou se $X \in \alpha$;

3. Se $\alpha < \beta$ então $H(\alpha) \leq H(\beta)$;

4. $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$;

5. Se $f : X \to X$ é um mapa contínuo então $H(f^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$. Se f é sobrejetiva, segue que $H(f^{-1}\alpha) = H(\alpha)$.

Demonstração. Ver [16], página 165, Observações. □

Definição 70. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é dita subaditiva se $x_{n+m} \leq x_n + x_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Lema 71. *Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência subaditiva. Então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}a_n$ existe e é igual a $\inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}a_n$.*

Demonstração. Ver [16], página 87, Teorema 4.9. □

Proposição 72. *Se α é uma cobertura aberta de X e $f : X \to X$ é um mapa contínuo, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-1}\alpha\right)$$

existe.

Demonstração. Ver [16], página 165, Teorema 7.1. □

Definição 73. Sejam α uma cobertura aberta de X e $f : X \to X$ um mapa contínuo. Então a Entropia $h(f, \alpha)$ de uma cobertura α com relação a f é definida por

$$h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right).$$

Observação 74. Note que $h(f, \alpha) \geq 0$ pois $H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right)$ é sempre positivo.

Observação 75. Se $\alpha < \beta$ então $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

Observação 76. $h(f, \alpha) \leq H(\alpha)$

Agora iremos definir, por meio de uma cobertura aberta Entropia Topológica.

Definição 77. Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo, então a Entropia Topológia com respeito a f é

$$h(f) = \sup_{\alpha} h(f, \alpha).$$

Observação 78. Em alguns casos durante o desenvolvimento do texto, utilizaremos a definição de Entropia Topológica com uma certa alteração. Ao invés de utilizar coberturas abertas, será utilizado partições. Quando utilizada essa alteração, será devidamente indicada.

3.2 Definição de Bowen-Dinaburg

Nesta seção iremos trabalhar com a noção de conjuntos geradores e separáveis para definir o que é Entropia Topológica.

Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ um mapa contínuo. Se n é um número natural, iremos definir em X a métrica d_n definida por

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad \forall x, y \in X.$$

Vamos definir a bola aberta de centro x e raio r de acordo com a métrica d_n como $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\bar{B}(f^i(x), r)$. Em alguns casos para que facilite a notação utilizaremos $B(x, n, r)$.

Definição 79. Sejam n um número natural, $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X. Um subconjunto F de X é um conjunto $(n, \epsilon) -$ *gerador* de K com respeito a f se para todo $x \in K$ existe $y \in F$ tal que $d_n(x, y) < \epsilon$. Em outras palavras,

$$K \subset \bigcup_{y \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\bar{B}(f^i y, \epsilon).$$

Definição 80. Se n um número natural, $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X. Denotaremos $r_n(\epsilon, K)$ a menor cardinalidade de um conjunto $(n, \epsilon) -$ *gerador* de K com respeito a f. Escrevemos $r_n(\epsilon, K, f)$ quando queremos enfatizar f.

Observação 81. Claramente $r_n(\epsilon, K) < \infty$

Observação 82. Se $\epsilon_1 < \epsilon_2$ então $r_n(\epsilon_1, K) \geq r_n(\epsilon_2, K)$.

Definição 83. Se $\epsilon > 0$ e K é um subconjunto compacto de X. Seja

$$r(\epsilon, K, f) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, K).$$

Escrevemos $r(\epsilon, K, f, d)$ quando queremos enfatizar a métrica d.

Observação 84. Se $\epsilon_1 < \epsilon_2$ então $r_n(\epsilon_1, K, f) \geq r_n(\epsilon_2, K, f)$ pela observação 82.

Definição 85. Se K é um subconjunto compacto de X. Seja $h(f, K) = \lim_{\epsilon \to 0} r(\epsilon, K, f)$. Definiremos Entropia Topológica de f como

$$h(f) = \sup_K h(f, K).$$

Ou seja, a Entropia Topológica é o supremo do conjunto que reuni todos os subconjuntos compactos de X.

Agora veremos uma outra definição de Entropia Topológica, porém utilizando conjuntos separados.

Definição 86. Sejam n um número natural, $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X. Um subconjunto E de X é um conjunto $(n, \epsilon) - separado$ de K com respeito a f se para todo $x, y \in E$, $x \neq y$, implica que $d_n(x, y) > \epsilon$. Em outras palavras, se $x \in E$, o conjunto $\bigcup_{y \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\bar{B}(f^i x, \epsilon)$ não contém nenhum outro ponto de E.

Definição 87. Se n um número natural, $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X. Denotaremos $s_n(\epsilon, K)$ a menor cardinalidade de um conjunto $(n, \epsilon) - separado$ de K com respeito a f. Escrevemos $s_n(\epsilon, K, f)$ quando queremos enfatizar f.

Proposição 88. *Temos $r_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K) \leq r_n(\frac{\epsilon}{2}, K)$ e consequentemente $s_n(\epsilon, K) < \infty$.*

Demonstração. Ver [16], página 169, Observação 5. □

Observação 89. Se $\epsilon_1 < \epsilon_2$ então $s_n(\epsilon_1, K) \geq s_n(\epsilon_2, K)$.

Definição 90. Se $\epsilon > 0$ e K é um subconjunto compacto de X. Seja

$$s(\epsilon, K, f) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, K).$$

Escrevemos $s(\epsilon, K, f, d)$ quando queremos enfatizar a métrica d.

Observação 91. Segue que $r(\epsilon, K) \leq s(\epsilon, K) \leq r(\frac{\epsilon}{2}, K)$ pela proposição 88.

Observação 92. Se $\epsilon_1 < \epsilon_2$ então $s(\epsilon_1, K) \geq s(\epsilon_2, K)$.

Definição 93. Sejam K é um subconjunto compacto de X. Seja $h(f, K) = \lim_{\epsilon \to 0} s(\epsilon, K, f)$. Definiremos Entropia Topológica de f como

$$h(f) = \sup_{K} h(f, K).$$

Ou seja, a Entropia Topológica é o supremo do conjunto que reuni todos os subconjuntos compactos de X.

3.3 Equivalência de Definições de Entropia

Nesta seção veremos que as definições de Entropia Topológica apresentadas nas seções anteriores coincidem. Aqui as definições de Entropia e Entropia Topológica utilizando coberturas abertas serão denotadas por $h^*(f,\alpha)$ e $h^*(f)$ respectivamente. A seguir veremos algumas definições importantes para o desenrolar da seção.

Definição 94. Seja (X,d) um espaço métrico compacto, então definiremos o diâmetro de uma cobertura α por

$$\mathrm{diam}(\alpha) = \sup_{A\in\alpha} \mathrm{diam}(A)$$

onde $\mathrm{diam}(A)$ denota o diâmetro do conjunto A, onde $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$.

Definição 95. Seja α uma cobertura para X, onde X é um espaço métrico. Dizemos que δ é um número de Lebesgue associado a α se para todo $x \in X$ toda bola de centro x e raio δ estiver em algum elemento de α.

Observação 96. Se α, γ são coberturas abertas de X e $\mathrm{diam}(\alpha)$ é menor que o número de Lebesgue para γ então $\gamma < \alpha$.

Teorema 7. *Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Se $\{\alpha_n\}_1^\infty$ é uma sequência de coberturas abertas de X com $diam(\alpha_n) \to 0$ então se $h^*(f) < \infty$, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} h^*(f,\alpha_n)$ existe e é igual a $h^*(f)$. Caso $h^*(f) = \infty$ então $\lim\limits_{n\to\infty} h^*(f,\alpha_n) = \infty$.*

Demonstração. Ver [16], página 173, Teorema 7.6. □

Corolário 97.

$$h^*(f) = \lim_{\delta\to 0}\left\{\sup h^*(f,\alpha)|diam(\alpha) < \delta\right\}.$$

Demonstração. Ver [16], página 173, Corolário 7.6.1. □

Teorema 8. *Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo, que mapeia o espaço métrico (X,d).*

1. *Se α é uma cobertura aberta de X com número de Lebesgue δ, então*

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right) \leq r_n\left(\tfrac{\delta}{2}, X\right) \leq s_n\left(\tfrac{\delta}{2}, X\right).$$

2. *Se $\epsilon > 0$ e γ é uma cobertura aberta com $diam(\gamma) \leq \epsilon$ então*

$$r_n(\epsilon, X) \leq s_n(\epsilon, X) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\gamma\right).$$

Demonstração. Ver [16], página 173, Teorema 7.7. □

Corolário 98. *Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo, que mapeia o espaço métrico (X,d). Seja $\epsilon > 0$. Seja α_ϵ uma cobertura aberta de X formada por todas as bolas abertas de raio 2ϵ e seja γ_ϵ uma cobertura de X formada por bolas abertas de raio $\frac{\epsilon}{2}$. Então*

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha_\epsilon\right) \leq r_n\left(\epsilon, X\right) \leq s_n\left(\epsilon, X\right) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\gamma_\epsilon\right).$$

Demonstração. Ver [16], página 174, Corolário 7.7.1. □

Teorema 9. *Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo, que mapeia o espaço métrico (X, d), então $h(f) = h^*(f)$. Isto é, as definições de Entropia Topológica coincidem.*

Demonstração. Ver [16], página 174, Teorema 7.8. □

3.4 Propriedades

Aqui temos algumas propriedades de Entropia Topológica em espaços métricos compactos, cujas provas dos resultados podem ser encontradas nas referências [16], [6] e [7].

Proposição 99. *Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\varphi : X \to Y$ contínua tal que $g \circ \varphi = \varphi \circ f$. Então*

1. *Se $\varphi : X \to Y$ é injetiva, então $h(f) \leq h(g)$;*
2. *Se $\varphi : X \to Y$ é sobrejetiva, então $h(f) \geq h(g)$;*
3. *Se $\varphi : X \to Y$ é um mapa bijetivo, então $h(f) = h(g)$.*

Proposição 100. *Seja $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ onde cada X_i é compacto e invariante por f. Então,*

$$h(f) = \max\left\{h(f|_{X_i}) : i = 1, \cdots, n\right\}.$$

Proposição 101. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$h(f^n) = n \cdot h(f).$$

Proposição 102. *Seja $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ tal que $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Então*

$$h(f \times g) = h(f) + h(g).$$

Proposição 103. *Se f é um homeomorfismo, então*

$$h(f) = h(f^{-1}).$$

Proposição 104. *Seja $\varphi : X \to Y$ contínua, sobrejetiva, tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ e se K é compacto em Y então $\varphi^{-1}(K)$ é compacto em X. Então*

$$\max\left\{h(g), \sup\left\{h(f, \varphi^{-1}(y)) \mid y \in \varphi(K), K \in \mathcal{K}(X, f)\right\}\right\} \leq h(f)$$

e

$$h(f) \leq h(g) + \sup\left\{h(f, \varphi^{-1}(y)) \mid y \in \varphi(K), K \in \mathcal{K}(X, f)\right\}.$$

Proposição 105. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ contínuas. Então*

$$h(g \circ f) = h(f \circ g).$$

Proposição 106. *Sejam $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ contínuas e $F : X \times Y \to X \times Y$ definida por $F(x, y) = (g(y), f(x)), (x, y) \in X \times Y$. Então*

$$h(F) = h(g \circ f) = h(f \circ g).$$

Proposição 107. *Seja* $X_\infty = \cap_{n \geq 0} f^n(X)$. *Então*

$$h(f) = h(f|_{X_\infty}).$$

Definição 108. Sejam $f : X \to X$ um mapa contínuo. Dizemos que $x \in X$ é um ponto não errante se dada uma vizinhança U de x, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \bigcap U \neq \emptyset$. Caso contrário, dizemos que x é errante. Denotamos o conjuntos dos pontos não errantes de f por $\Omega = \Omega(f)$.

Proposição 109. *Seja* $\Omega(f)$ *o conjunto não errante de* f. *Então*

$$h(f) = h(f|_{\Omega(f)}).$$

Proposição 110. *Se* X_1, X_2 *são espaços compactos e* $f_i : X_i \to X_i$ *são contínuos para* $i = 1, 2$, *e se* $\phi : X_1 \to X_2$ *é um mapa contínuo com* $\phi(X_1) = X_2$ *e* $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$ *então*

$$h(f_1) \geq h(f_2).$$

Se ϕ *é um homeomorfismo então*

$$h(f_1) = h(f_2).$$

3.5 Entropia Topológica de Canovás e Rodríguez

Nesta seção veremos uma nova definição de Entropia Topológica. Aqui teremos um novo contexto sendo trabalhado, em que o espaço métrico não é compacto. O objetivo de utilizar essa nova ferramenta é poder calcular a Entropia Topológica na reta real. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ um mapa contínuo.

Definição 111. Para $f : X \to X$, definiremos Entropia Topológica como

$$ent(f) = \sup \{h(f|_K) \ : \ K \subseteq X, \text{ K é compacto e invariante para f}\}.$$

Pelo que vimos anteriormente, podemos reescrever a definição como

Definição 112. Para $f : X \to X$, temos como definição de Entropia Topológica

$$ent(f) = \sup \{h(f|_K) \ : \ k \in \mathcal{K}(X, f)\},$$

onde $\mathcal{K}(X, f)$ é a família de todos os subconjuntos de X compactos que são estritamente invariantes por f.

Observação 113. A definição acima só faz sentido quando tratamos de espaços métricos ou topológicos.

A seguir veremos várias propriedades que poderemos relacionar com as vistas na seção anterior. Considere X e Y dois espaços métricos, $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ dois mapas contínuos.

Proposição 114. *Seja $\varphi : X \to Y$ contínua tal que $g \circ \varphi = \varphi \circ f$. Então*

(a) Se $\varphi : X \to Y$ é injetiva, então $ent(f) \leq ent(g)$;

(b) Se $\varphi : X \to Y$ é sobrejetiva e tal que $\varphi^{-1}(K)$ é compacto para todo $K \subseteq X$, então $ent(f) \geq ent(g)$;

(c) Se $\varphi : X \to Y$ é um homomorfismo, então $ent(f) = ent(g)$

Demonstração. (a) Dado $K \in \mathcal{K}(X, f)$, temos $\varphi(K) \in \mathcal{K}(Y, g)$. Por hipótese φ é injetiva, logo pela Proposição 99 temos

$$h(f|_K) \leq h\left(g|_{\varphi(K)}\right).$$

Temos então,

$$\begin{aligned} ent(f) &= \sup \{h(f|_K) : k \in \mathcal{K}(X, f)\} \\ &\leq \sup \left\{h\left(g|_{\varphi(K)}\right) : k \in \mathcal{K}(X, f)\right\} \\ &\leq \sup \{h(g|_L) : L \in \mathcal{K}(Y, g)\} \\ &= ent(g) \end{aligned}$$

Portanto $ent(f) \leq ent(g)$.

(b) Dado $K \in \mathcal{K}(Y, g)$, temos $\varphi^{-1}(K) \in \mathcal{K}(X, f)$. Por hipótese φ é sobrejetiva, logo pela Proposição 99

$$h(f|_{\varphi^{-1}(K)}) \geq h(g|_K).$$

Temos então,

$$\begin{aligned} ent(f) &= \sup\{h(f|_L) : L \in \mathcal{K}(X, f)\} \\ &\geq \sup\left\{h\left(f|_{\varphi^{-1}(K)}\right) : K \in \mathcal{K}(Y, g)\right\} \\ &\geq \sup\{h(g|_K) : K \in \mathcal{K}(X, f)\} \\ &= ent(g) \end{aligned}$$

Portanto $ent(f) \geq ent(g)$.

(c) Segue diretamente dos itens a e b.

□

Proposição 115. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $ent(f^n) = n \cdot ent(f)$.*

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{K}(X, f)$, então $K \in \mathcal{K}(X, f^n)$. Pela Proposição 101,

$$h(f^n|_K) = h((f|_K)^n) = n \cdot h(f|_K).$$

Assim,

$$\begin{aligned} ent(f^n) &= \sup\{h(f^n|_L) : L \in \mathcal{K}(X, f^n)\} \\ &\geq \sup\{h(f^n|_K) : K \in \mathcal{K}(X, f)\} \\ &= \sup\{n \cdot h(f|_K) : K \in \mathcal{K}(X, f)\} \\ &= n \cdot \sup\{h(f|_K) : K \in \mathcal{K}(X, f)\} \\ &= n \cdot ent(f) \end{aligned}$$

Consequentemente, $ent(f^n) \geq n \cdot ent(f)$.

Reciprocamente, iremos provar a desigualdade contrária. Seja $K \in \mathcal{K}(X, f^n)$ para $n \in \mathbb{N}$. O conjunto $\widehat{K} = \cup_{i=0}^{n-1} f^i(K)$ é compacto em X e tal que

$$\begin{aligned} f(\widehat{K}) &= f(\cup_{i=0}^{n-1} f^i(K)) \\ &= f(K \cup f(K) \cup f^2(K) \cup \cdots \cup f^{n-1}(K)) \\ &= f(K) \cup f^2(K) \cup f^3(K) \cup \cdots \cup f^{n-1}(K) \cup f^n(K) \\ &= f(K) \cup f^2(K) \cup f^3(K) \cup \cdots \cup f^{n-1}(K) \cup f^n(K) \\ &= f(K) \cup f^2(K) \cup f^3(K) \cup \cdots \cup f^{n-1}(K) \cup K \\ &= \widehat{K} \end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{K} \in \mathcal{K}(X, f)$. Pelas Proposições 100 e 101, temos

$$
\begin{aligned}
n \cdot h(f|_{\widehat{K}}) &= h((f|_{\widehat{K}})^n) \\
&= h(f^n|_{\widehat{K}}) \\
&= \sup\left\{h\left(f^n|_{f^i(K)}\right) \ : \ i = 0, \cdots, n-1)\right\} \\
&\geq h(f^n|_K)
\end{aligned}
$$

Prosseguindo, segue que

$$
\begin{aligned}
n \cdot ent(f) &\geq n \cdot \sup\left\{h(f|_{\widehat{K}}) : K \in \mathcal{K}(X, f^n)\right\} \\
&= \sup\left\{n \cdot h(f|_{\widehat{K}}) : K \in \mathcal{K}(X, f^n)\right\} \\
&= \sup\left\{h(f^n|_K) : K \in \mathcal{K}(X, f^n)\right\} \\
&= ent(f^n)
\end{aligned}
$$

Consequentemente, $n \cdot ent(f) \geq ent(f^n)$. Portanto,

$$n \cdot ent(f) = ent(f^n).$$

□

Proposição 116. *Seja $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ tal que $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Então*

$$ent(f \times g) = ent(f) + ent(g).$$

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{K}(X \times Y, f \times g)$, denotaremos por π_i o mapa $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$. Pela Proposição 102, temos

$$h(f|_K) \leq h\left(f \times g|_{K_1 \times K_2}\right) = h\left(f|_{K_1}\right) + h\left(f|_{K_2}\right)$$

onde $K_i = \pi_i(K), i = 1, 2$ pois $K \subseteq K_1 \times K_2$. Então

$$
\begin{aligned}
ent(f \times g) &= \sup\left\{h\left(f \times g|_K\right) : K \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} \\
&\leq \sup\left\{h\left(f \times g|_{K_1 \times K_2}\right) : K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} \\
&= \sup\left\{h(f|_{K_1}) + h(f|_{K_2}) : K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} \\
&\leq \sup\left\{h(f|_{K_1}) : K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} + \\
&+ \sup\left\{h(f|_{K_2}) : K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} \\
&= ent(f) + ent(g)
\end{aligned}
$$

Assim, $ent(f \times g) \leq ent(f) + ent(g)$.

Provaremos agora a desigualdade inversa. Sejam $K_1 \in \mathcal{K}(X, f)$ e $K_2 \in \mathcal{K}(Y, g)$. Da Proposição 102 temos

$$h\left(f \times g|_{K_1 \times K_2}\right) = h(f|_{K_1}) + h(f|_{K_2}).$$

Então

$$\begin{aligned}
ent(f \times g) &= \sup\left\{h\left(f \times g|_{K}\right) : K \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} \\
&\geq \sup\left\{h\left(f \times g|_{K_1 \times K_2}\right) : K_1 \in \mathcal{K}\left(X, f\right) \text{ e } K_2 \in \mathcal{K}\left(Y, g\right)\right\} \\
&= \sup\left\{h(f|_{K_1}) + h(f|_{K_2})\right\} : K_1 \in \mathcal{K}\left(X, f\right) \text{ e } K_2 \in \mathcal{K}\left(Y, g\right) \\
&= \sup\left\{h(f|_{K_1}) : K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} + \\
&+ \sup\left\{h(f|_{K_2}) : K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}\left(X \times Y, f \times g\right)\right\} \\
&= ent(f) + ent(g)
\end{aligned}$$

Portanto, $ent(f \times g) = ent(f) + ent(g)$. □

Proposição 117. *Se f é um homeomorfismo, então*

$$ent(f) = ent(f^{-1}).$$

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{K}(X, f)$ e temos $K \in \mathcal{K}(X, f^{-1})$. Pela Proposição 103 temos

$$h\left(f|_K\right) = h\left(f^{-1}|_K\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
ent(f) &= \sup\left\{h\left(f|_K\right) : k \in \mathcal{K}(X, f)\right\} \\
&= \sup\left\{h\left(f^{-1}|_K\right) : k \in \mathcal{K}(X, f)\right\} \\
&= ent(f^{-1})
\end{aligned}$$

Portanto, $ent(f) = ent(f^{-1})$. □

Proposição 118. *Seja $\varphi : X \to Y$ contínua, sobrejetiva, tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ e se K é compacto em Y então $\varphi^{-1}(K)$ é compacto em X. Então*

$$\max\left\{ent(g), \sup\left\{h(f, \varphi^{-1}(y)) | y \in \varphi(K), K \in \mathcal{K}(X, f)\right\}\right\} \leq ent(f)$$

e

$$ent(f) \leq ent(g) + \sup\left\{h(f, \varphi^{-1}(y)) | y \in \varphi(K), K \in \mathcal{K}(X, f)\right\}$$

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{K}(X, f)$, então $\varphi(K) \in \mathcal{K}(Y, g)$. Pela Proposição 104 temos

$$h\left(f|_K\right) \leq h\left(g|_{\varphi(K)}\right) + \sup\left\{h(g, \varphi^{-1}(y)) : y \in \varphi(K)\right\}.$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned}
ent(f) &= \sup\left\{h\left(f|_K\right) : k \in \mathcal{K}(X,f)\right\} \\
&\leq \sup\left\{h\left(g|_{\varphi(K)}\right) + \sup\left\{h(g,\varphi^{-1}(y)) : y \in \varphi(K)\right\}\right\} \\
&\leq \sup\left\{h\left(g|_L\right) : L \in \mathcal{K}(Y,g)\right\} + \sup\left\{h(g,\varphi^{-1}(y)) : y \in \varphi(K)\right\} \\
&= ent(g) + \sup\left\{h(g,\varphi^{-1}(y)) : y \in \varphi(K)\right\}
\end{aligned}$$

Portanto

$$ent(f) \leq ent(g) + \sup\left\{h(g,\varphi^{-1}(y)) : y \in \varphi(K)\right\},$$

concluindo assim a demonstração pelo fato de a outra desigualdade ser imediata.

□

Proposição 119. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ contínuas. Então*

$$ent(g \circ f) = ent(f \circ g).$$

Demonstração. Dado $K \in \mathcal{K}(X, g \circ f)$, então $f(K) \in \mathcal{K}(Y, f \circ g)$. Pela Proposição 105 temos

$$h\left(f \circ g|_K\right) = h\left(g \circ f|_{f(K)}\right).$$

Prosseguindo, segue

$$\begin{aligned}
ent(g \circ f) &= \sup\left\{h\left(g \circ f|_K\right) : k \in \mathcal{K}(X, g \circ f)\right\} \\
&= \sup\left\{h\left(f \circ g|_{f(K)}\right) : k \in \mathcal{K}(X, g \circ f)\right\} \\
&\leq \sup\left\{h\left(f \circ g|_L\right) : L \in \mathcal{K}(Y, f \circ g)\right\} \\
&= ent(f \circ g)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$ent(g \circ f) \leq ent(f \circ g).$$

Por outro lado, também pela Proposição 105 temos

$$h\left(g \circ f|_K\right) = h\left(f \circ g|_{g(K)}\right).$$

Prosseguindo, segue que

$$\begin{aligned}
ent(f \circ g) &= \sup\left\{h\left(f \circ g|_K\right) : k \in \mathcal{K}(Y, f \circ g)\right\} \\
&= \sup\left\{h\left(g \circ f|_{g(K)}\right) : k \in \mathcal{K}(Y, f \circ g)\right\} \\
&\leq \sup\left\{h\left(g \circ f|_L\right) : L \in \mathcal{K}(X, g \circ f)\right\} \\
&= ent(g \circ f)
\end{aligned}$$

Assim,

$$ent(f \circ g) \leq ent(g \circ f)$$

concluindo a demonstração.

□

Proposição 120. *Sejam $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ contínuas e $F : X \times Y \to X \times Y$ definida por $F(x, y) = (g(y), f(x)), (x, y) \in X \times Y$. Então*

$$ent(F) = ent(g \circ f) = ent(f \circ g).$$

Demonstração. Sabemos que

$$F^2(x, y) = ((g \circ f)(x), (f \circ g)(y)),$$

e pelas Proposições 115 e 119, temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot ent(F) &= ent(F^2) \\ &= ent((g \circ f) \times (f \circ g)) \\ &= ent(g \circ f) + ent(f \circ g) \\ &= 2 \cdot ent(g \circ f) \\ &= 2 \cdot ent(f \circ g) \end{aligned}$$

Portanto

$$ent(F) = ent(g \circ f) = ent(f \circ g),$$

como queríamos. □

Proposição 121. *Seja $X_\infty = \bigcap_{n \geq 0} f^n(X)$. Então*

$$ent(f) = ent(f|_{X_\infty}).$$

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{K}(X, f)$, então K está contido em X_∞ pelo fato de todo elemento de $\mathcal{K}(X, f)$ é estritamente para f. Portanto

$$ent(f) = ent\,((f|_{X_\infty}).$$

□

Proposição 122. *Seja $\Omega(f)$ o conjunto não errante de f. Então*

$$ent(f) = ent\Big((f|_{\Omega(f)}\Big).$$

Demonstração. Seja $i : \Omega(f) \to X$ definido por $i(x) = x$. Note que

$$(f \circ i)(x) = \left(i \circ f|_{\Omega(f)}\right)(x)$$

para todo $x \in \Omega(f)$. Como i é injetiva, pela Proposição 114 temos

$$ent(f) \geq ent(f|_{\Omega(f)}).$$

Para provar a desigualdade inversa sejam

$$K \in \mathcal{K}(X, f) \text{ e } \widehat{K} = K \cap \Omega(f) \in \mathcal{K}(X, f|_{\Omega}).$$

Além disso,

$$(f|_K)\,|_{\Omega(f)} = f|_{\widehat{K}} = \left(f_{\Omega(f)}\right)|_K.$$

Sabemos da Proposição 109 que

$$h\,(f|_K) = h\,(f|_{K\cap\Omega}).$$

Então,

$$\begin{aligned} ent(f) &= \sup\left\{h\,(f|_K) : K \in \mathcal{K}(X, f)\right\} \\ &= \sup\left\{h\left(f|_{K\cap\Omega(f)}\right) : K \in \mathcal{K}(X, f)\right\} \\ &\leq \sup\left\{h\,(f|_L) : L \in \mathcal{K}(X, f|_{\Omega(f)})\right\} \\ &= ent(f|_{\Omega(f)}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$ent(f) \leq ent(f|_{\Omega(f)})$$

concluindo a demonstração. □

Capítulo 4

Entropia Topológica no Intervalo

4.1 Entropia Topológica e transitividade

Neste capítulo começaremos a trabalhar Entropia Topológica em intervalos. Nesta primeira seção nosso objetivo é mostrar que um mapa topologicamente transitivo tem Entropia Topológica positiva na proposição 128. Os resultados que precedem esta proposição tem como objetivo auxiliar a demonstração da mesma. O texto base pra o desenvolvimento desta seção foi a referência [14].

Lema 123. *1. Seja $J_0, \cdots, J_n$ intervalos não vazios tais que*

$$J_i \subseteq f(J_{i-1}),\ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Então existe um intervalo $K \subseteq J_0$ tal que

$$f^n(K) = J_n,\ f^n(\partial K) = \partial J \ e\ f^i(K) \subset J_i,\ \forall i = 0, \cdots, n.$$

Se ainda $J_0, \cdots, J_n$ são intervalos (e $(J_0, \cdots, J_n)$ uma cadeia de intervalos), então podemos escolher um K de modo que ele seja fechado.

2. Seja $(J_0, \cdots, J_n)$ uma cadeia de intervalos tal que $J_0 \subset J_n$. Então existe $x \in J_0$ tal que

$$f^n(x) = x \ e\ f^i(x) \in J_i, \forall i = 0, \cdots, n-1.$$

3. Suponha que para $i = 1, \cdots, p$, $(J_0^i, \cdots, J_n^i)$ uma cadeia de intervalos e para todo par (i, j) de índices distintos em $\{1, \cdots, p\}$ existe $k \in \{0, \cdots, n\}$ tal que J_k^i e J_k^j são intervalos com interiores disjuntos. Então existem intervalos fechados $k_1, \cdots, K_p$ com interiores disjuntos tais que

$$\forall i = 1, \cdots, p, \quad f^n(K_i) = J_n^i, f^n(\partial K_i) = \partial J_n^i \ e$$

$$\forall k = 0, \cdots, n, \forall i = 1, \cdots, p, \quad f^k(K_i) \subseteq J_k^i$$

Demonstração. Faremos a demonstração da afirmação abaixo, e com ela já teremos a demonstração do primeiro item. Para demonstrar a afirmação que vem a seguir, faremos indução sobre n.

Afirmação: Sejam $J_0, \cdots, J_n$ intervalos não vázios tais que

$$J_i \subset f(J_{i-1}), \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Então existem intervalos

$$K_n \subset K_{n-1} \subset \cdots \subset K_1 \subset J_0$$

onde para todo $k = 1, \cdots, n$ e todo $i = 0, \cdots, k$ temos

$$f^i(K_k) \subset J_i, f^k(K_k) = J_k, f^k(\partial K_k) = \partial J_k \text{ e } f^k(intK_k) = intJ_k$$

Além disso, se $J_0, \cdots, J_n$ forem intervalos fechados, então $K_1, \cdots, K_n$ também podem ser escolhidos como fechados.

Demonstração. De fato, suponhamos $n = 1$. Escreveremos $\overline{J_1} = [a, b]$. Então existem $x, y \in \overline{J_0}$ tal que $f(x) = a$ e $f(y) = b$. Se a(respectivamente b) faz parte de $f(J_0)$, podemos escolher x(respectivamente y) em J_0. Caso a(respectivamente b) não fizer parte de $f(J_0)$, então x(respectivamente y) não pertence à J_1 e necessariamente é um ponto extremo de J_0. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x \leq y$(o outro caso é simétrico). Definiremos assim

$$y' = \min\{z \geq x | f(z) = b\}, x' = \max\{z \leq y' | f(z) = a\} \text{ e } K_1' = [x', y'].$$

Então

$$f(K_1') = \overline{J_1}, f(\{x', y'\}) = \{a, b\}$$

e nenhum outro ponto de K_1' é mapeado para a e b por f. Se J_1 for fechado, então $K_1 = K_1'$ é adequado. Caso contrário, podemos verificar se K_1 pode ser escolhido entre $(x', y'), [x', y'), (x', y']$ de modo que

$$f(K_1) = J_1 \text{ e } K_1 \subset J_0.$$

Agora suponhamos que a afirmação seja válida para n e considere os seguintes intervalos

$$J_0, \cdots, J_n, J_{n+1} \text{ tais que } J_i \subset f(J_{i-1}) \text{ para todo } i = 1, \cdots, n+1.$$

Sejam $K_1, \cdots, K_n$ os intervalos construídos na afirmação aplicados à $J_0, \cdots, J_n$. Como

$$f^{n+1}(K_n) = f(J_n) \supset J_{n+1}$$

podemos aplicar o caso em que $n = 1$ para o mapa $g = f^{n+1}$ e os intervalos k_n e J_{n+1}. Construímos assim a existência de um intervalo $K_{n+1} \subset K_n$ que é fechado se $J_0, \cdots, J_n, J_{n+1}$ são fechados e ocorre que

$$f^{n+1}(K_{n+1}) = J_{n+1}, f^{n+1}(\partial K_{n+1}) = \partial J_{n+1}, f^{n+1}(intK_{n+1}) = intJ_{n+1}$$

Além disso, $f^i(K_{n+1}) = J_i$ para todo $i = 0, \cdots, n$ pois $K_{n+1} \subset K_n$. Isso demonstra a afirmação $\square$

Com esta afirmação demonstramos o primeiro item como dito anteriormente.

Iremos agora provar o segundo item do lema. Seja $(J_0, \cdots, J_n)$ uma cadeia de intervalos tais que $J_0 \subset J_n$. Pela afirmação existe um intervalo fechado $K_n \subset J_0$ tal que

$$f^n(K_n) = J_n \text{ e } f^i(K_n) \subset J_i \text{ para todo } i = 0, \cdots, n.$$

Então $K_n \subset f^n(K_n)$, daí sabemos que existe um ponto fixo(x) para $g = f^n$ em K_n. E pela maneira como foi construído, $\forall i = 0, \cdots, n-1, f^i(x) \in J_i$ proando o segundo item.

Iremos agora enfim demonstrar o último item. Suponhamos $(J_0^i, \cdots, J_n^i)_{(1 \leq i \leq p)}$ uma cadeia de intervalos satisfazendo a hipótese do item 3. Para todo $i = 1, \cdots, p$, seja $(K_0^i, \cdots, K_n^i)$ intervalos fechados pela afirmação para a cadeia $(J_0^i, \cdots, J_n^i)$ e seja $K_i = K_n^i$. Fixemos $i \neq j$ para $i, j = 1, \cdots, p$. Podemos assumir então que existe $k \in \{0, \cdots, n\}$ tal que J_k^i e J_k^j tem interiores disjuntos. Caso $k = 0$, como K_i e K_j tem interiores disjuntos pois estão em J_0^i e J_0^j. Prosseguindo, podemos assumir agora que $k \geq 1$. Suponhamos que $K_i^k \cap K_j^k \neq \emptyset$, sabemos pela hipótese do item 3 que $f(K_i^k \cap K_j^k)$ está contido em $J_k^i \cap J_k^j$ e ainda $J_k^i \cap J_k^j$ tem interiores disjuntos. Portanto, os intervalos $J_k^i \cap J_k^j$ tem um ponto extremo em comum, digamos que seja b, e $f(K_i^k \cap K_j^k) = \{b\}$. Pela definição de K_i^k existe um único ponto z em K_i^k tal que $f(z) = b$ e o mesmo vale para K_j^k. Consequentemente, $K_i^k \cap K_j^k$ contém no máximo um ponto e por $K_i \subset K_i^k$ e $K_j \subset K_j^k$, podemos concluir que K_i e K_j tem interiores disjuntos. Assim, pela afirmação e pelo que acabamos de ver segue o item 3.

$\square$

Lema 124. *Seja $f : I \to I$ um mapa em que tem um ponto periódico de período ímpar diferente de 1. Seja p o menor período maior que 1 e x um ponto periódico de período p. Seja c o ponto médio da órbita de x(isso é, $c \in orb_f(x)$ e $orb_f(x)$ contém $\frac{p-1}{2}$ pontos menores que c e $\frac{p-1}{2}$ pontos maiores que c). Se $c < f(c)$, os pontos da órbita são ordenados da seguinte maneira:*

$$f^{p-1}(c) < f^{p-3}(c) < \cdots < f^2(c) < c < f(c) < f^3(c) < \cdots < f^{p-2}(c).$$

Se $c > f(c)$, temos

$$f^{p-2}(c) < f^{p-4}(c) < \cdots < f^3(c) < f(c) < c < f^2(c) < \cdots < f^{p-3}(c) < f^{p-1}(c).$$

Demonstração. Ver [14], página 43 Lema 3.17. $\square$

Proposição 125. *Seja $f : I \to I$ um mapa contínuo. Se f tiver um ponto periódico de período impar maior que 1, então existem 2 intervalos J, K contendo nenhum ponto final de I e tal que (J, K) seja uma ferradura estrita para f^2.*

Demonstração. Seja p o menor período inteiro impar, diferente de 1,e tomemos x um ponto periódico de período p. Pelo Lema 124 existe um ponto x_0 na órbita de x tal que $x_i = f^i(x_0), 0 \leq i \leq p-1$ são ordenados da seguinte maneira:

$$x_{p-1} < x_{p-3} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-2} \tag{4.1}$$

ou

$$x_{p-2} < x_{p-4} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-3} < x_{p-1} \tag{4.2}$$

Suponhamos que a ordem seja a 1, caso seja a segunda a demonstração pode ser feita de modo análoga. Note que

$$f([x_0, x_1]) = [x_2, x_1] \supset [x_2, x_0].$$

Assim, existe $d \in (x_0, x_1)$ tal que $f(d) = x_0$ e consequentemente, $d < f^2(d) = x_1$. Observe que

$$\begin{aligned} f^2\left(x_{p-1}\right) &= f\left(f\left(x_{p-1}\right)\right) \\ &= f\left(f\left(f^{p-1}(x_0)\right)\right) \\ &= f\left(f^p(x_0)\right) \\ &= f\left(x_0\right) \\ &= x_1 \end{aligned}$$

logo $f^2\left(x_{p-1}\right) = x_1$ e

$$\begin{aligned} f^2\left(x_{p-3}\right) &= f\left(f\left(x_{p-3}\right)\right) \\ &= f\left(f\left(f^{p-3}(x_0)\right)\right) \\ &= f\left(f^{p-2}(x_0)\right) \\ &= f^{p-1}(x_0) \\ &= x_{p-1} \end{aligned}$$

logo, $f^2\left(x_{p-3}\right) = x_{p-1}$. Daí, temos

$$f^2([x_{p-1}, x_{p-3}]) \supset [x_{p-1}, x_1],$$

Consequentemente, existe $a \in (x_{p-1}, x_{p-3})$ tal que $f^2(a) > d$. Assim,

$$f^2([a, x_{p-3}]) \supset [x_{p-1}, d],$$

pois $x_{p-1} < a < x_{p-3}$ e $f^2(x_{p-3}) = x_{p-1}$. E existe $b \in (a, x_{p-3})$ tal que $f^2(b) < a$ pelo fato de que $f^2(a) > d$ e $f^2(x_{p-3}) = x_{p-1}$, ou seja,

$$f^2\left([a, x_{x_{p-3}}]\right) \supset [x_{p-1}, f^2(a)].$$

De modo similar existe $c \in (x_{p-3}, d)$ tal que $f^2(c) < a$ pois

$$f^2([x_{p-3}, d]) \supset [x_{p-1}, f^2(d)] \supset [x_{p-1}, d].$$

Resumindo, temos o seguinte gráfico

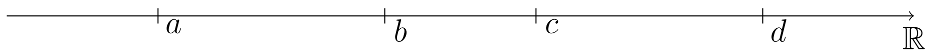


Figura com os pontos para ferradura

com as propriedades,

$$f^2(d) > d,\ f^2(a) > d,\ f^2(b) > a,\ f^2(c) < a.$$

Tomando agora $J = [a, b]$ e $K = [c, d]$, que são disjuntos, temos

$$f^2(J) \supset J \cup K \text{ e } f^2(K) \supset J \cup K,$$

ou seja, uma ferradura para f^2. Note que J e K não contém os pontos extremos de I, pois $x_{p-1} < a$ e $d < x_1$, concluindo assim a prova.

$\square$

Proposição 126. *Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ um mapa transitivo. Se f não possuí ferradura, então f tem um único ponto fixo. Além disso, esse ponto fixo não é a nem b.*

Demonstração. Suponhamos que f seja topologicamente transitiva. Começaremos mostrando que existe ponto fixo para f. De fato, caso não tenhamos nenhum ponto fixo teríamos ou $f(x) > x$ para todo $x \in [a, b]$ ou $f(x) < x$ para todo $x \in [a, b]$. Suponhamos o primeiro caso, o outro é análogo. Tomemos $x_1 \in (a, b)$. Logo $(x_1, b]$ é invariante e não tem interior vazio, o que não pode ocorrer devido a observação 58 trocando $\mathbb{R}$ por um subintervalo contido na reta.

Suponhamos que f tenha pelo menos dois pontos fixos. Nosso objetivo será ver que conseguimos uma ferradura pra f. Pelo teorema 5 temos duas opções. Caso ocorra a segunda opção não há o que demonstrar. Suponhamos então que f seja topologicamente mixing. Analisando a observação 58, podemos chegar a mesma conclusão trocando $\mathbb{R}$ por um subintervalo contido na reta. Como o conjunto $Fix(f)$ é não vazio e é diferente de $\mathbb{R}$(se $Fix(f) = \mathbb{R}$, f não poderia ser transitiva), pela observação 58 temos que $Fix(f)$ tem interior vazio. E ainda é um conjunto fechado. Então existem dois pontos $x_1 < x_2$ em $Fix(f)$ tais que $(x_1, x_2) \cap Fix(f) = \emptyset$. Logo,

$$\forall x \in (x_1, x_2), f(x) < x$$

ou

$$\forall x \in (x_1, x_2), f(x) > x$$

Iremos assumir a segunda assertiva, caso contrário, pode ser feito de modo análogo.

Se $\forall x \in (x_1, b],\ f(x) > x_1$ o intervalo $[x_1, b]$ é invariante, o que não pode ocorrer pois f é transitiva de acordo com 58. Exceto se $x_1 = a$. Porém este caso não pode ocorrer pelo fato de que $a \notin f((a, b])($ pois $f(x) > x$ para todo x entre $x_1 = a$ e $b)$. Isto implica que para todo $x \in (a, b),\ f^n(x) \neq a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, a é um ponto final não acessível. Pelo Lema 44 existe uma sequência de pontos fixos tendendo a a. Mas temos aí uma contradição pois $(x_1, x_2) \cap Fix(f) = \emptyset$ e $x_1 = a$.

Como vimos anteriormente, $\forall x \in (x_1, b],\ f(x) > x_1$ não pode ocorrer. Então existe $t \in (x_1, b]$ tal que $f(t) \leq x_1$. Na verdade, $t \in [x_2, b]$ pelo fato de que $\forall x \in (x_1, x_2),\ f(x) > x$. Como $f(x_2) = x_2 > x_1$, existe $z \in [x_2, t]$ tal que $f(z) = x_1$ pelo Teorema 3. Então podemos definir z como

$$z = \min\{x \in [x_1, b] \mid f(x) = x_1\}.$$

Assim, temos que $z \in [x_2, b]$ pois $\forall x \in (x_1, x_2),\ f(x) > x$.

Vejamos agora que existe $y \in (x_1, z)$ tal que $f(y) = z$. De fato, caso $f(x) \notin z$ para todo x em (x_1, z) temos

$$f(x) < z, \forall x \in (x_1, z).$$

Que ocorre pois $f(x_1) = x_1 < z$, $\forall x \in (x_1, x_2), f(x) > x$ e da minimalidade de z. Por outro lado, note que

$$f(x) > x_1 \text{ e } f(x) < z, \forall x \in (x_1, z).$$

Assim, o intervalo não degenerado $[x_1, z]$ é invariante. O que é uma contradição pois f é transitiva e $[x_1, z]$ é diferente de $[a, b]($ $x_1 \neq a)$ com interior não vazio.

Recapitulando temos os seguintes pontos

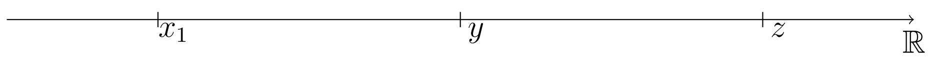


Figura com os pontos para ferradura

com as seguintes propriedades

$$f(x_1) = x_1,\ f(y) = z \text{ e } f(z) = y.$$

Tomando $J = [x_1, y]$ e $K = [y, z]$ temos em (J, K) uma ferradura para f pois

$$f(J) \supset [x_1, z] = J \cup K$$
$$f(K) \supset [x_1, z] = J \cup K$$

Chegando assim a uma contradição. Portanto, se f é transitivo e não possuí uma ferradura ela tem no máximo um ponto fixo.

Suponhamos agora que este ponto fixo seja a. Então ou $f(x) < x \ \forall x \in (a, b]$ ou $f(x) > x \ \forall x \in (a, b]$. Suponhamos que seja verdade o primeiro caso, o outro é análogo. Tomando $x_1 \in (a, b)$ temos que o intervalo $[a, x_1]$ é invariante por f e não vazio, o que é uma contradição. Se supormos que o ponto fixo é b podemos chegar a mesma conclusão de maneira análoga. Portanto, o ponto fixo não está na extremidade do intervalo.

□

Proposição 127. *Seja $f : I \to I$ um mapa. Se f tem uma $p-$ferradura, então*

$$h(f) \geq \log p.$$

Demonstração. Inicialmente, iremos supor que f seja uma p-ferradura estrita, digamos $(J_1, \cdots, J_p)$. Então existem conjuntos abertos $U_1, \cdots, U_p$ em I tais que

$$J_i \subset U_i, \ \forall i = 1, \cdots, p, \ U_{p+1} = I \setminus \bigcup_{i=1}^{p}(J_i)$$

e

$$U_{p+1} \bigcap J_i, \ \forall i = 1, \cdots, p.$$

Tomemos $\alpha = (U_1, \cdots, U_p, U_{p+1})$, então α é uma cobertura aberta para I.

Dado $(i_0, \cdots, i_{n-1}), i_k = 1, \cdots, p, k = 0, \cdots, n-1$ temos o seguinte conjunto:

$$J_{i_0, \cdots, i_{n-1}} = \Big\{x \in I | \forall k = 0, \cdots, n-1, f^k(x) \in J_{ik}\Big\}.$$

Como $(J_1, \cdots, J_p)$ é uma p-ferradura, o conjunto $J_{i_0, \cdots, i_{n-1}}$ não é vazio pelo lema 123. Além disso, contém um único elemento de $\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ que será denotado por

$$\alpha_{i_0} \cap f^{-1}(\alpha_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-(n+1)}(\alpha_{i_{n-1}})$$

Então temos $N(\alpha^n) \geq p^n$ e $H(\alpha^n) \geq \log p^n$. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
h(f) &\geq h(f,\alpha) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha^n)}{n} \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \frac{\log p^n}{n} \\
&= \log p
\end{aligned}
$$

Assim, $h(f) \geq \log p$. O próximo passo agora é verificar o caso geral, isto é, caso f tenha uma p-ferradura. Pelo lema 3.30, f^n tem uma p^n-ferradura. Enumeremos agora os p^n intervalos da ferradura em I e consideremos apenas os ímpares. Assim, obtemos um $\frac{p^n}{2}$-ferradura estrita. E pelo que foi eito anteriormente, aplicado a f^n temos $h(f^n) \geq \log \frac{p^n}{2}$. Como $h(f^n) = nh(f)$, temos

$$
\begin{aligned}
h(f) &= \frac{h(f^n)}{n} \\
&\geq \frac{\log\left(\frac{p^n}{2}\right)}{n} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \log p^n - \frac{1}{n} \log 2 \\
&= \log p - \frac{\log 2}{n}
\end{aligned}
$$

Assim, $h(f) \geq \log p - \frac{\log 2}{n}$. Daí, temos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} h(f) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\log p - \frac{\log 2}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} h(f) \geq \lim_{n\to\infty} \log p - \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2}{n} \\
&\Leftrightarrow h(f) \geq \log p - \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2}{n} \\
&\Leftrightarrow h(f) \geq \log p
\end{aligned}
$$

Portanto, $h(f) \geq \log p$. □

A proposição que vem a seguir é uma das mais importantes do texto. Ela diz que se um mapa é topologicamente transitivo ele tem Entropia Topológica positiva. O interessante é que com ela podemos fazer um comparativo com o Teorema 17. Nesta proposição trabalhamos com Entropia Topológica em conjuntos compactos enquanto no Teorema 17 em espaços métricos. Em ambos os casos chegamos a conclusão de que mapas topologicamente transitivos tem Entropia Topológica positiva.

A demonstração desta proposição será feita primeiro para um mapa f topologicamente mixing. Nesse caso iremos construir uma ferradura para o mapa f^{2n}. Posteriormente, supondo que o mapa f é topologicamente transitivo utilizaremos o primeiro passo, o Teorema 5, a proposição 126, a proposição 127 e o conceito de ferradura.

Proposição 128. *Seja $f : I \to I$ um mapa*

1. *Se f é topologicamente mixing, então $h(f) > \dfrac{\log 2}{2}$;*
2. *Se f é transitivo, então $h(f) \geq \dfrac{\log 2}{2}$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que f seja topologicamente mixing. Pelo teorema 6, f tem ponto periódico de período ímpar diferente de um. Aplicando a proposição 125 existem dois intervalos

$$J = [a, b] \text{ e } K = [c, d] \text{ com } b < c, \;\; a \notin \min I, \;\; d \notin \max I$$

e tais que (J, K) seja uma ferradura estrita para f^2.

Seja $A = [a, d]$ e $L = [b, c]$. Pelo Teorema 3, $f^2(J) \supset A$ pois $f^2(J) \supset J \cup K$. De modo similar temos $f^2(K) \supset A$. O mapa f é topologicamente mixing e o intervalo não degenerado L não contém os pontos extremos de I. Assim, existe um inteiro positivo n tal que $f^{2n}(L) \supset A$ pelo Teorema 6.

Aplicando a terceira parte do Lema 123 temos a seguinte cadeia de intervalos

$$\{(I_0, \cdots, I_{n-1}, A) \mid \forall i = 0, \cdots, n-1, I_i \in \{J, K\}\}$$

Podemos ver que existem 2^n intervalos fechados $(L_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$ com interiores dois a dois disjuntos tal que

$$L_i \subset J \cup K \text{ e } f^{2n}(L_i) \supset A = J \cup L \cup K, \;\; \forall i = 1, \cdots, 2^n.$$

Assim, temos que $(L_1, \cdots, L_{2^n}, L)$ é uma $(2^n + 1)-$ferradura para f^{2n}. Pela proposição 127 temos

$$\begin{aligned} h(f) &= \frac{h(f^{2n})}{2n} \\ &\geq \frac{\log(2^n + 1)}{2n} \\ &> \frac{\log(2^n)}{2n} \\ &= \frac{\log(2)}{2} \end{aligned}$$

Provando assim a primeira assertiva.

Agora, suponhamos que f é transitiva. Se f é topologicamente mixing caímos no item anterior e concluímos a demonstração. Suponhamos que f seja transitiva e não topologicamente mixing. Pelo teorema 5 existe $c \in int(I)$ tal que

$$J = [\min I, c] \text{ e } K = [c, \max I]$$

fazem $f^2|_J$ e $f^2|_K$ serem topologicamente mixing. Ainda c é um ponto fixo que não está no interior de J e K. Pelo proposição 126, $f^2|_J$ tem uma ferradura. Consequentemente $h(f^2) \geq \log 2$ pela proposição 127. Então

$$\begin{aligned} h(f) &= \frac{h(f^2)}{2} \\ &\geq \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $h(f) \geq \dfrac{\log 2}{2}$ concluindo assim a demonstração.

$\square$

4.2 Mapas monótonos por partes

Nesta seção, o texto base foi a referência [14]. Aqui o objetivo é dar uma definição de Entropia Topológica em função de mapas monótonos por partes. E isto pode ser verificado na proposição 132. Os resultados feitos anteriormente da proposição citada tem como objetivo serem utilizadas na demonstração da mesma.

Definição 129. Seja f um mapa monótono por partes. A cobertura monótona(respectivamente partição) para f^n é a cobertura(respectivamente partição) $\mathcal{C}$ tal que, $\forall C \in \mathcal{C}$, C é um intervalo e $f^n|_C$ é monótona.

Lema 130. *Sejam $f : I \to I$ um mapa e I um intervalo. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são coberturas monótonas para f^n e f^k respectivamente. Então $\mathcal{A} \bigvee f^{-n}(\mathcal{B})$ é uma cobertura monótona para f^{n+k}, $\forall n \geq 1$. Em particular, se $\mathcal{A}$ é uma cobertura monótona para f, então $\mathcal{A}^n$ é uma cobertura monótona para f^n.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coberturas monótonas para f^n e f^k respectivamente. Tomemos $J \in \mathcal{A}$, $K \in \mathcal{B}$ e $g = f^n|_J$. Como g é monótona, temos que

$$g^{-1}(K) = J \bigcap f^{-n}(K)$$

é um intervalo. Além disso,

$$f^{n+k}|_{J \bigcap f^{-n}(K)} = f^k|_K \circ g|_{g^{-1}K}$$

é monótona, pois a composição de dois mapas monótonos é monótono. Isto é, $A \bigvee f^{-n}(\mathcal{B})$ é uma cobertura monótona para f^{n+k}.

Em particular, suponhamos que $\mathcal{A}$ seja uma cobertura monótona de f. Aplicando a primeira parte do lema temos que

$$\mathcal{A} \bigvee f^{-1}(\mathcal{A})$$

é uma cobertura monótona para f^2. Repetindo o mesmo processo, temos

$$\mathcal{A} \bigvee f^{-1}(\mathcal{A}) \bigvee f^{-2}(\mathcal{A})$$

para f^3. Repetindo o mesmo processo, temos que

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \bigvee f^{-1}(\mathcal{A}) \bigvee f^{-2}(\mathcal{A}) \bigvee \cdots \bigvee f^{n-1}(\mathcal{A})$$

é uma cobertura monótona para f^n. □

Proposição 131. *Sejam $f : I \to I$ um mapa monótono e $\mathcal{A}$ uma cobertura monótona. Então*

$$h(f) = h(\mathcal{A}, f).$$

Demonstração. Seja α uma cobertura aberta e $\mathcal{V}$ uma cobertura aberta contendo os elementos de α. Fixemos $n \geq 1$ e um elemento de $A \in \mathcal{A}^n$. Temos o seguinte conjunto

$$\mathcal{V}^n \bigcap A = \{V \bigcap A : \quad V \in \mathcal{V}^n\}$$

Para todo $i = 0, \cdots, n-1$, A é um subintervalo de A^i e $f^i|_A$ é monótono pois A^i é uma cobertura monótona para f^i pelo Lema 130. Note que para todo $U \in \mathcal{V}$, $A \bigcap f^{-i}(U)$ é um intervalo, que não é necessariamente aberto pois A nem sempre é. Isto nos mostra que $\mathcal{V}^n \bigcap A$ é um subintervalo de A.

Lembremos que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^n &= \mathcal{V} \bigvee f^{-1}(\mathcal{V}) \bigvee \cdots \bigvee f^{-(n-1)}(\mathcal{V}) \\ &= \left\{V^0 \bigcap V^1 \bigcap \cdots \bigcap V^{n-1} \ : \ V^i \in f^{-i}(\mathcal{V}),\ \forall i = 0, \cdots, n-1\right\}\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}\#\left(\mathcal{V} \bigvee f^{-1}(\mathcal{V})\right) &\leq 2\#\mathcal{V} \\ \#\left(\mathcal{V} \bigvee f^{-1}(\mathcal{V}) \bigvee f^{-2}(\mathcal{V})\right) &\leq 4\#\mathcal{V} \\ &\vdots \\ \#(\mathcal{V}^n) &\leq 2n(\#\mathcal{V})\end{aligned}$$

Ou seja, $\#(\mathcal{V}^n \bigcap A) \leq 2n(\#\mathcal{V})$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}\#\left(\mathcal{V}^n \bigcap A\right) &\leq 2n\#(\mathcal{V}) \\ &\leq 4(2n\#\mathcal{V})^2 \\ &= (4n\#\mathcal{V})^2\end{aligned}$$

Seja $\tilde{\mathcal{V}_n}$(respectivamente, $\tilde{\mathcal{A}_n}$) uma subcobertura com cardinalidade minimal de $\mathcal{V}^n$(respectivament $\tilde{\mathcal{A}_n}$). Assim,

$$\begin{aligned}\#\tilde{\mathcal{V}_n} &\leq \sum_{A \in \tilde{\mathcal{A}_n}} \#\left(\tilde{\mathcal{A}_n} \bigcap A\right) \\ &\leq \#\left(\tilde{\mathcal{A}_n}\right)(4n\#\mathcal{V})^2\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}\log N(\mathcal{V}) &\leq \log N(\mathcal{A})\,(4n\#\mathcal{V})^2\\ &= \log N(\mathcal{A}) + \log (4n\#\mathcal{V})^2\\ &= \log N(\mathcal{A}) + 2\log(4n\#\mathcal{V})\\ &= \log N(\mathcal{A}) + 2\log(4) + 2\log(n) + 2\log(\#\mathcal{V})\end{aligned}$$

logo,

$$\log N(\mathcal{V}) \leq \log N(\mathcal{A}) + 2\log(4) + 2\log(n) + 2\log(\#\mathcal{V}).$$

Dividindo ambos os lados por n temos

$$\frac{\log N(\mathcal{V})}{n} \leq \frac{\log N(\mathcal{A})}{n} + \frac{2\log(4)}{n} + \frac{2\log(n)}{n} + \frac{2\log(\#\mathcal{V})}{n}$$

e fazendo n tender ao infinito temos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\log N(\mathcal{V})}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\log N(\mathcal{A})}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2\log(4)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2\log(n)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2\log(\#\mathcal{V})}{n}\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\log N(\mathcal{V})}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\log N(\mathcal{A})}{n}\end{aligned}$$

Isto é,

$$h(\mathcal{V}, f) \leq h(\mathcal{A}, f).$$

Além disso,

$$h(\alpha, f) \leq h(\mathcal{V}, f),$$

pois $\mathcal{V}$ refina α.

Portanto, para qualquer cobertura aberta α temos $h(f) \leq h(\mathcal{A}, f)$. A partir de agora, mostraremos a desigualdade reversa. Para tal, fixemos $n \geq 1$. Seja

$$\beta = \mathcal{A} \bigvee f^{-1}\mathcal{A} \bigvee f^{-2}\mathcal{A} \bigvee \cdots \bigvee f^{-(n-1)}\mathcal{A}$$

Trabalharemos agora com o mapa $g = f^n$ e as coberturas iteradas (β^k) relativa a g. Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \min\{|B| : B \in \beta,\ B \text{ intervalo não degenerado}\}$$

Seja $E = \bigcup_{B\in\beta} \partial B$ o conjunto dos pontos de fronteira de β. Definamos agora a seguinte cobertura

$$\alpha = \{int(B)| \;\; B \in \beta\} \bigcup \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \bigcap I| \;\; x \in E\}.$$

Para todo $x \in E$, o intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ contém no máximo 3 elementos de β pela maneira como foi definido β e pela escolha de ϵ. Então para todo $U \in \alpha$ temos

$$\#\{B \in \beta \mid U \bigcap B \neq \emptyset\} \leq 3$$

Isto implica que $\forall k \geq 1$, $\forall V \in \alpha^k$:

$$\#\{B \in \beta \mid V \bigcap B \neq \emptyset\} \leq 3^k$$

Consequentemente, se $\tilde{\alpha}_k$ é uma subcobertura minimal para α^k temos

$$\begin{aligned} N(\beta) &\leq \sum_{V \in \tilde{\alpha}_n} \#\left\{B \in \beta \mid V \bigcap B \neq \emptyset\right\} \\ &\leq 3^k \# \tilde{\alpha}_n \\ &= 3^k N(\alpha). \end{aligned}$$

Ou seja, $N(\beta) \leq 3^k N(\alpha)$. Assim,

$$\begin{aligned} \log N(\beta) &\leq \log 3^k N(\alpha) \\ &\leq \log 3^k + \log N(\alpha) \\ &\leq k \log 3 + \log N(\alpha) \end{aligned}$$

logo

$$\log N(\beta) \leq k \log 3 + \log N(\alpha).$$

Dividindo ambos os lados por nk temos

$$\begin{aligned} &\frac{\log N(\beta)}{nk} \leq \frac{k \log 3}{nk} + \frac{\log N(\alpha)}{nk} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{n} \frac{\log N(\beta)}{k} \leq \frac{1}{n} \frac{k \log 3}{k} + \frac{1}{n} \frac{\log N(\alpha)}{k} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{n} \frac{\log N(\beta)}{k} \leq \frac{1}{n} \log 3 + \frac{1}{n} \frac{\log N(\alpha)}{k} \end{aligned}$$

e fazendo $k \to \infty$ temos

$$\begin{aligned} &\lim_{k \to \infty} \frac{1}{n} \frac{\log N(\beta)}{k} \leq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n} \log 3 + \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n} \frac{\log N(\alpha)}{k} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{n} \lim_{k \to \infty} \frac{\log N(\beta)}{k} \leq \frac{1}{n} \lim_{k \to \infty} \log 3 + \frac{1}{n} \lim_{k \to \infty} \frac{\log N(\alpha)}{k} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{n} \lim_{k \to \infty} \frac{\log N(\beta)}{k} \leq \frac{1}{n} \log 3 + \frac{1}{n} \lim_{k \to \infty} \frac{\log N(\alpha)}{k} \end{aligned}$$

e finalmente, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}h(\beta,g) &\leq \frac{1}{n}h(\alpha,g)+\frac{\log 3}{n}\\ &\leq \frac{1}{n}h(g)+\frac{\log 3}{n}\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{n}h(\beta,g)=h(\mathcal{A},f)$$

e

$$\frac{1}{n}h(g)=\frac{1}{n}h(f^n)=h(f)$$

temos que

$$h(\mathcal{A},f)\leq h(f)+\frac{\log 3}{n}.$$

Fazendo n tender ao infinito, temos $h(\mathcal{A},f)\leq h(f)$ como queríamos.

□

Proposição 132. *Sejam $f: I \to I$ um mapa monótono por partes no intervalo I e, para todo $n \geq 1$, $c_n(f)$ a cardinalidade miníma de uma partição monótona para f^n. Então*

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log c_n(f)=\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\log c_n(f).$$

Demonstração. Para todo $n \geq 1$, seja $\mathcal{A}_n$ uma partição monótona para f^n com cardinalidade minima, isto é, $\#\mathcal{A}_n = c_n(f)$. Pelo Lema 130, $\mathcal{A}_n \bigvee f^{-n}(\mathcal{A}_k)$ é uma partição monótona para f^{n+k} e pela definição de $c_{n+k}(f)$ temos

$$\begin{aligned}c_{n+k}(f) &\leq \#\left(\mathcal{A}_n \bigvee f^{-n}(\mathcal{A}_k)\right)\\ &\leq \#\left(\mathcal{A}_n\right)\cdot\#\left(\mathcal{A}_k\right)\\ &\leq c_n(f)\cdot c_k(f)\end{aligned}$$

Ou seja, $c_{n+k}(f)\leq c_n(f)\cdot c_k(f)$. Assim, temos que a sequência $(\log c_n(f))_{n\geq 1}$ é subaditiva pois, se $n,m\in\mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}\log c_{n+m}(f) &\leq \log c_n(f)\cdot c_m(f)\\ &\leq \log c_n(f)+\log c_m(f)\end{aligned}$$

Isto é, $\log c_{n+m}(f)\leq \log c_n(f)+\log c_m(f)$. Daí, pelo Lema 71 temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f)$$

existe e é igual a $\inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \log c_n(f)$. Aplicando a Proposição 131 para f^n e $\mathcal{A}_n$ temos $h(f^n) = h(\mathcal{A}_n, f^n)$. Assim,

$$\begin{aligned} h(\mathcal{A}_n, f^n) &\leq \log N(\mathcal{A}^n) \\ &= \log \#\mathcal{A}^n \end{aligned}$$

logo,

$$h(f) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f).$$

Agora vamos mostrar a desigualdade contrária. Para tal fixemos $n \geq 1$. Trabalharemos com o mapa $g = f^n$ e $(\mathcal{A})^k$ uma partição monótona para g^k. Mas observe que

$$c_{nk}(f) \leq N(\mathcal{A}_n).$$

Dividindo por nk e aplicando o limite quando k tende ao infinito temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{nk} \log c_{nk}(f) \leq \frac{1}{n} h(\mathcal{A}_n, g).$$

Pela Proposição 131 $h(\mathcal{A}_n, g) = h(g)$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log c_m(f) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{nk} \log c_{nk}(f) \\ &\leq \frac{1}{n} h(f^n) \\ &= h(f). \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log c_m(f) \leq h(f)$ como queríamos. $\square$

4.3 Entropia Topológica e ferradura

Nesta parte do texto, a referência base foi [14]. Nosso objetivo agora é mostrar o Teorema 10. Para tal vejamos alguns Lemas que serão importantes para a demonstração do Teorema.

Lema 133. *Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências de inteiros positivos. Então*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(a_n+b_n\right)=\max\left\{\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(a_n\right),\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(b_n\right)\right\}$$

Demonstração. Seja $L=\max\left\{\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(a_n\right),\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(b_n\right)\right\}$. Como

$$a_n+b_n\geq a_n \text{ e } a_n+b_n\geq b_n, \text{ para todo } n$$

segue que

$$L\leq\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(a_n+b_n\right)$$

Para concluir a demonstração precisamos mostrar a desigualdade reversa. Para todo $\epsilon>0$ existe um inteiro n_0 tal que

$$\forall n\geq n_0 \text{ temos } a_n\leq e^{(L+\epsilon)n} \text{ e } b_n\leq e^{(L+\epsilon)n}.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\forall n\geq n_0,\quad \frac{1}{n}\log(a_n+b_n)&\leq\frac{1}{n}\log\left(e^{(L+\epsilon)n}+e^{(L+\epsilon)n}\right)\\&=\frac{1}{n}\log\left(2e^{(L+\epsilon)n}\right)\\&=\frac{1}{n}\log\left(2\right)+\frac{1}{n}\log\left(e^{(L+\epsilon)n}\right)\\&=\frac{1}{n}\log\left(2\right)+\frac{1}{n}\left((L+\epsilon)n\right)\\&=\frac{1}{n}\log\left(2\right)+\left(L+\epsilon\right)\end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{n}\log(a_n+b_n)\leq\frac{1}{n}\log\left(2\right)+\left(L+\epsilon\right)$. Aplicando $\lim\sup$ quando n tende ao infinito, temos

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(a_n+b_n\right)\leq L+\epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, segue o resultado desejado. $\square$

Observação 134. O Lema 133 pode ter a seguinte conclusão para as sequências de inteiros positivos $(a_n^1)_{n\geq 1}, (a_n^2)_{n\geq 1}, \cdots, (a_n^k)_{n\geq 1}$ teremos

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log \left(a_n^1 + a_n^2 + \cdots + a_n^k\right) = \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log\left(a_n^i\right) \ : \ i = 1, \cdots, k\right\}.$$

Lema 135. *Sejam* $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 0}$ *duas sequências de números reais. Então*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{k=1}^{n} \exp\left(a_n + b_{n-k}\right) = \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sup\left(\frac{a_n}{n}\right), \lim_{n\to\infty} \sup\left(\frac{b_n}{n}\right)\right\}$$

Demonstração. Seja $L = \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sup\left(\frac{a_n}{n}\right), \lim_{n\to\infty} \sup\left(\frac{b_n}{n}\right)\right\}$. Vamos assumir que $L < \infty$. Pois caso contrário não há o que provar.

Para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, \quad \tfrac{a_n}{n} \leq L + \epsilon \text{ e } \tfrac{b_n}{n} \leq L + \epsilon.$$

Tomemos $M = \max\left\{0, \frac{a_n}{n}, \frac{b_n}{n} \ : \ n = 1, \cdots, n_0 - 1\right\}$. Seja n, k dois inteiros $n \geq 2n_0$ e $k = 1, \cdots, n$. Assim temos $k \geq n_0$ ou $n - k \geq n_0$. Logo, temos 3 casos que são os seguintes

1. Se $k \geq n_0$ e $n - k \geq n_0$, então

$$a_k + b_{n-k} \leq k(L+\epsilon) + (n-k)(L+\epsilon) = n(L+\epsilon).$$

2. Se $k \geq n_0$ e $n - k < n_0$, então

$$a_k + b_{n-k} \leq k(L+\epsilon) + (n-k)(M) \leq n(L+\epsilon) + n_0 M.$$

3. Se $k < n_0$ e $n - k \geq n_0$, então

$$a_k + b_{n-k} \leq k(M) + (n-k)(L+\epsilon) \leq n_0 M + n(L+\epsilon).$$

Observe que nos três casos temos que

$$a_k + b_{n-k} \leq n(L+\epsilon) + n_0 M$$

e

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2n_0, \quad \frac{1}{n}\log\sum_{k=1}^{n}\exp\left(a_n + b_{n-k}\right) &\leq \frac{1}{n}\log\sum_{k=1}^{n}\exp^{(n(L+\epsilon)+n_0M)}\\
&= \frac{1}{n}\log n\exp^{(n(L+\epsilon)+n_0M)}\\
&= \frac{1}{n}\log n + \frac{1}{n}\log\exp^{(n(L+\epsilon)+n_0M)}\\
&= \frac{1}{n}\log n + \frac{1}{n}\left(n(L+\epsilon)+n_0M\right)\\
&= \frac{1}{n}\log n + L + \epsilon + \frac{n_0M}{n}
\end{aligned}$$

logo, $\forall n \geq 2n_0, \quad \frac{1}{n}\log\sum_{k=1}^{n}\exp\left(a_n + b_{n-k}\right) \leq \frac{1}{n}\log n + L + \epsilon + \frac{n_0M}{n}$. Aplicando lim sup quando n tende ao infinito temos

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{k=1}^{n}\exp\left(a_n + b_{n-k}\right) \leq L + \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{k=1}^{n}\exp\left(a_n + b_{n-k}\right) = \max\left\{\lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{a_n}{n}\right), \lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{b_n}{n}\right)\right\}.$$

□

Lema 136. *Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Suponhamos que existe $C > 0$ tal que $a_{n+1} \leq a_n + C$ para todo $n \geq 1$ e que*

$$0 < \alpha < \beta < \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}.$$

Então para todo inteiro N, existe $n \geq N$ tal que

$$a_n \geq \beta_n \text{ e } a_{n+1} \geq a_n + \alpha.$$

Demonstração. Suponhamos que o Lema seja falso. Então existe um N tal que

$$\forall n \geq N, a_n \geq \beta_n \Rightarrow a_{n+1} < a_n + \alpha \tag{4.3}$$

Se $a_n \geq \beta_n$ para todo $n \geq N$, então $a_{n+N} < a_N + \alpha_n$ para todo $n \geq 1$ por 4.3, o que implica que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} < \alpha.$$

O que é uma contradição pela definição de α. Assim, existe um inteiro $n > N$, $a_n < \beta_n$. Seja $N_0 = \min\{n \geq N \ : \ a_n < \beta_n\}$ e suponhamos $a_p < \beta_p$ para algum inteiro $p \geq N$ e que r é um inteiro positivo tal que $a_n \geq \beta_n$ para todo $n = p+1, \cdots, p+r$. Vejamos agora que r é limitado pela constante p. Por 4.3 temos $a_{p+r} \leq a_{p+1} + \alpha(r-1)$. Como $a_{p+1} \leq a_p + C$ e $a_p < \beta_p$, temos

$$\beta(p+r) \leq a_{p+1} \leq \beta p + C + \alpha(r-1) \tag{4.4}$$

Isto implica que $\beta p \leq C + \alpha(r-1)$ e ainda $r \leq M$ para

$$M = \frac{C-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Sabemos que $M > 0$ pois $a_n \leq a_1 + (n-1)C$ para todo $n \geq 1$ e consequentemente

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq C$$

o que nos leva a ver que $C - \alpha > 0$ e $\beta - \alpha > 0$ pela definição de M. Seja n um número inteiro maior que $N_0 + M$. Consideremos dois casos agora:

1. Se $a_n \geq \beta_n$, isto implica que existe $p \in [n-M, n)$ tal que $a_p < \beta_p$ e $a_i \geq \beta_i$, $\forall i = \{p+1, \cdots, n\}$. Então por 4.4 temos

$$a_n \leq \beta p + C + \alpha(M-1) \leq \beta n + C + \alpha M.$$

2. Se $a_n < \beta_n$, então a inequação é trivial

$$a_n \leq \beta n + C + \alpha M.$$

Portanto, pelos dois casos apresentados temos

$$a_n \leq \beta n + C + \alpha M.$$

Dividindo ambos os lados por n e aplicando $\limsup$ temos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \beta.$$

O que contradiz a definição de β. $\square$

Por fim, utilizando principalmente os lemas citados anteriormente na presente seção iremos demonstrar o Teorema que vem a seguir. No texto, ele tem uma importante função que é ser peça essencial na demonstração do Teorema 16.

Teorema 10. *(Teorema de Misiurewicz) Seja $f : I \to I$ um mapa com entropia topológica positiva. Para todo $\lambda < h(f)$ e N inteiro, existem intervalos $J_1, \cdots, J_p$ e um inteiro positivo $n \geq N$ tal que $(J_1, \cdots, J_p)$ é uma $p-$ferradura estrita para f^n e $\dfrac{\log p}{n} \geq \lambda$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que o resultado é verdadeiro a partir das seguintes suposições: $h(f) > \log 3$ e $\log 3 < \lambda < h(f)$.

Vamos escolher λ' tal que $\lambda < \lambda' < h(f)$. Pela definição de Entropia Topológica existe uma cobertura aberta U tal que $h(U, f) > \lambda'$. Escolheremos uma partição P com intervalos disjuntos de maneira que P refina U. Então $h(P, f) \geq h(U, f)$. Logo $h(P, f) > \lambda'$.

Temos assim, $N(P^n) = \#(P^n)$ pois P^n é uma partição. E daí,

$$h(P, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#(P^n)$$

Vejamos agora a seguinte definição:

Se, $\mathcal{Q}$ é uma família de subconjuntos de I, definamos, $\forall n \geq 1$ e todo $A \in \mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q}^n = \left\{ (A_0, \cdots, A_{n-1}) \ : \ \forall i = 0, \cdots, n-1, \ A_i \in \mathcal{Q} \text{ e } \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \neq \emptyset \right\}$$

e

$$\mathcal{Q}^n|_A = \{(A_0, \cdots, A_{n-1}) \ : \ A_0 = A\}.$$

Prosseguindo com a demonstração, como P é uma partição segue que $\#(P^n) = \sum_{A \in P} \#(P^n|_A)$. Pelo Lema 133 existe $A \in P$ tal que

$$h(P, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#(P^n|_A). \tag{4.5}$$

Seja $\mathcal{F}$ a família de $A \in P$ que satisfaz 4.5. Daí, temos

$$\forall A \in \mathcal{F}, \ h(P, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{F}^n|_A). \tag{4.6}$$

Faremos agora a prova 4.6.

Demonstração. **Prova de 4.6** A desigualdade $\geq$ está clara. Provaremos agora a desigualdade reversa. Fixemos $A \in \mathcal{F}$. Sejam $(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in P^n|_A$ e k o maior inteiro em $\{1, \cdots, n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{0, \cdots, k-1\}$. Então $(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n|_A$ e se $k < n$, $(A_k, \cdots, A_{n-1}) \in P^{n-k}|_B$ para algum $B \in P - \mathcal{F}$.

Então,

$$\#\left(P^n|_A\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \left(\#(\mathcal{F}^k|_A) \sum_{B \in P-F} \#\left(P^{n-k}|_B\right) \right) + \#\left(\mathcal{F}^n|_A\right). \tag{4.7}$$

Assim, $b_0 = 0$ e

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \log \#\left(\mathcal{F}^n|_A\right) \text{ e } b_n = \log \textstyle\sum_{B \in P-F} \#\left(P^{n-k}|_B\right)$$

Assim, podemos reescrever 4.7 como

$$\#\left(P^n|_A\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^n \exp\left(a_k + b_{n-k}\right).$$

De 4.5 temos

$$h(P,f) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{k=1}^{n} \exp\left(a_k + b_{n-k}\right)\right).$$

Então, pelo Lema 135

$$h(P,f) \leq \max\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}\right\} \tag{4.8}$$

De acordo com a definição de $\mathcal{F}$, temos

$$\forall B \in P - \mathcal{F},\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\left(P^n|_B\right) < h(P,f)$$

e ainda,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} < h(P,f),$$

pelo Lema 133. E de 4.8 temos $h(P,f) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$. O que conclui 4.6.

□

Continuando, seja $A_0, \cdots, A_{n-1} \in \mathcal{F}$. Tomemos $A'_0 = A_0$ e $A'_i = A_i \bigcap f(A'_{i-1})$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$. Daí, temos

$$\begin{aligned} A'_n &= f^{n-1}\left(\left\{x_0 \mid \forall i \in \{0,\cdots,n-1\},\ f^i(x_0) \in A_i\right\}\right) & (4.9)\\ &= f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)\right) & (4.10)\end{aligned}$$

Assim, note que

$$\begin{aligned} &x_{n-1} \in A'_{n-1}\\ &\quad \Leftrightarrow \exists x_{n-2} \in A'_{n-2},\ f(x_{n-2}) = x_{n-1} \in A_{n-1}\\ &\quad \Leftrightarrow \exists x_{n-3} \in A'_{n-3},\ f(x_{n-3}) = x_{n-2} \in A_{n-2} \text{ e } f^2(x_{n-3}) = f(x_{n-2}) = x_{n-1}\\ &\quad \vdots\\ &\quad \Leftrightarrow x_0 \in A'_0,\ f(x_0) = x_1, f^2(x_0) = x_2 \in A_2, \cdots, f^{n-1}(x_0) = x_{n-1} \in A_{n-1}.\end{aligned}$$

Consequentemente, juntando 4.9 com a definição de $\mathcal{F}^n$ temos

$$(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \Leftrightarrow A'_{n-1} \neq \emptyset \tag{4.11}$$

Se $A'_{n-1} \neq \emptyset$, então A'_i é não vazio e $A'_i \subset f\left(A'_{i-1}\right)$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$. Então, pelo Lema 123 para todo $(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n$. Então existe um intervalo não vazio $J_{A_0 \cdots A_{n-1}}$ tal que

$$f^{n-1}\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) = A'_{n-1} \text{ e } \forall i \in \{0, \cdots, n-1\}, \; f^i\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \subset A'_i \subset A_i \tag{4.12}$$

Além disso, $\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right)_{A_0, \cdots, A_{n-1}} \in \mathcal{F}^n$ e $A_n \in \mathcal{F}$, então

$$f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \bigcap A_n = f\left(A'_{n-1}\right) \bigcap A_n = A'_n$$

e de acordo com 4.11

$$f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \bigcap A_n \neq \emptyset \Leftrightarrow (A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^{n+1}$$

Consequentemente,

$$\#\left(\mathcal{F}^{n+1}\right) = \sum_{(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \;|\; A_0 = A} \#\left\{B \in \mathcal{F} \mid f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \bigcap B \neq \emptyset\right\} \tag{4.13}$$

Prosseguindo, para todo $A, B \in \mathcal{F}$, temos

$$c(A, B, n) = \#\left\{(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \mid A_0 = A, \; f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \supset B\right\}$$

Daí, temos o seguinte resultado:

$$A, B, C \in \mathcal{F}, \; \forall n, m \geq 1, \; c(A, B, n) \cdot c(B, C, m) \leq c(A, C, n+m). \tag{4.14}$$

Demonstração. (Prova de 4.14) Para todo $A, B \in \mathcal{F}$ e todo $n \geq 1$, temos

$$c(A, B, n) = \#\left\{(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \mid A_0 = A, \; f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \supset B\right\}$$

Sejam $(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in c(A, B, n)$ e $(B_0, \cdots, B_{m-1}) \in c(B, C, m)$. Nosso objetivo é mostrar que

$$(A_0, \cdots, A_{n-1}, B_0, \cdots, B_{m-1}) \in c(A, C, n+m)$$

O conjunto $f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right)$ contém B por definição e $J_{B_0 \cdots B_{m-1}} \subset B_0 = B$ por 4.12. Pelo Lema 123 existe um intervalo não vazio $K \subset J_{A_0 \cdots A_{n-1}}$ tal que $f^n(K) = J_{B_0 \cdots B_{m-1}}$. Além disso, por 4.12 o intervalo K satisfaz

$$\forall i = 0, \cdots, n-1, \; f^i(K) \subset A_i \text{ e } \forall j = 0, \cdots, m-1, \; f^{n-1+j}(K) = f^j(J_{B_0 \cdots B_{m-1}}) \subset B_j$$

Consequentemente,

$$K \subset \left[\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)\right] \bigcap \left[\bigcap_{i=n}^{n+m-1} f^{-i}(B_{i-n})\right]$$

e isto nos leva aos seguintes fatos

1. $(A_0, \cdots, A_{n-1}, B_0, \cdots, B_{m-1}) \in \mathcal{F}^{n+m}$ por 4.9 e 4.11 usando o fato de que $K \neq \emptyset$.
2. O conjunto $f^{n+m-1}(K)$ está contido em $f^{n+m-1}\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1} B_0 \cdots B_{m-1}}\right)$ pela combinação de 4.12 junto com 4.9.

Então, como $f^{n+m}(K) = f^m(B_0 \cdots B_{m-1})$ onde temos $f^{n+m}(K) \supset C$ pela definição de $c(B, C, m)$. Só que $f^{n+m-1}\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1} B_0 \cdots B_{m-1}}\right) \supset C$. Podemos assim concluir que $(A_0 \cdots A_{n-1} B_0 \cdots B_{m-1}) \in c\,(A, C, n+m)$ provando 4.14.

□

Continuemos agora a demonstração do Teorema. Fixemos $A \in \mathcal{F}$. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in \mathcal{F}} c\,(A, B, n) &= \#\left\{((A_0, \cdots, A_{n-1}), B) \in \mathcal{F}^n \times \mathcal{F} \mid A_0 = A,\ f^n(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}) \supset B\right\} \\
&= \sum_{(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \ \mid \ A_0 = A} \#\left\{B \in \mathcal{F} \mid f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \supset B\right\}
\end{aligned}$$

Considere $(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n$. Se $f^n(A_0, \cdots, A_{n-1})$ intersepta k intervalos de $\mathcal{F}$, então $f^n(A_0, \cdots, A_{n-1})$ contém até $k-2$ intervalos deles pois $f^n(A_0, \cdots, A_{n-1})$ é um intervalo. Consequentemente,

$$\sum_{B \in \mathcal{F}} c\,(A, B, n) \geq \sum_{(A_0, \cdots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \ \mid \ A_0 = A} \left(\#\left\{B \in \mathcal{F} \mid f^n\left(J_{A_0 \cdots A_{n-1}}\right) \bigcap B \neq \emptyset\right\} - 2\right) \tag{4.15}$$

Combinando com a equação 4.13, temos

$$\sum_{B \in \mathcal{F}} c\,(A, B, n) \geq \#\left(\mathcal{F}^{n+1}|_A\right) - 2\#\left(\mathcal{F}^n|_A\right) \tag{4.16}$$

Tomando $a'_n = \log \#\left(\mathcal{F}^n|_A\right)$ para todo $n \geq 1$. De 4.6, temos

$$h(P, f) = \limsup_{n \to \infty} \frac{a'_n}{n}.$$

Além disso, $a'_{n+1} \leq a'_n + \log \#\mathcal{F}$ para todo $n \geq 1$. Por consequência, aplicando o Lema 136 com $\alpha = \log 3$, $\beta = \lambda'$ e $C = \log \#\mathcal{F}$ e podemos ver que para todo inteiro N,

$$\exists n \geq N,\ \#\left(\mathcal{F}^n|_A\right) > \exp^{\lambda' n} \ \text{ e } \#\left(\mathcal{F}^{n+1}|_A\right) \geq 3\#\left(\mathcal{F}^n|_A\right) \tag{4.17}$$

Assim, para todo n satisfazendo 4.17 e 4.16 temos

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in \mathcal{F}} c\,(A, B, n) &\geq 3\#\left(\mathcal{F}^n|_A\right) - 2\#\left(\mathcal{F}^n|_A\right) && (4.18) \\
&= \#\left(\mathcal{F}^n|_A\right) && (4.19) \\
&\geq \exp^{\lambda' n} && (4.20)
\end{aligned}$$

Logo, $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{B\in\mathcal{F}} c\,(A, B, n) \geq \lambda'$. De acordo com o Lema 4.7, existe uma mapa $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que para todo $A \in \mathcal{F}$, $\varphi(A) = B \in \mathcal{F}$ e

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c\,(A, B, n) \geq \lambda' > \lambda$$

Como $\mathcal{F}$ é finito, o mapa $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tem um ponto periódico, isto é, existe $A_0 \in \mathcal{F}$ e $p \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^p(A_0) = A_0$. Utilizando o procedimento anterior com $A = \varphi^i(A_0)$, para $i = 0, \cdots, p-1$, temos

$$\forall i = 0, \cdots, p-1,\ \forall N_i \geq 1,\ \exists n_i \geq N_i,\ c\left(\varphi^i(A_0), \varphi^{i+1}(A_0), n_i\right) \geq \exp^{n_i\lambda} \tag{4.21}$$

Para todo $i = 0, \cdots, p-1$, sejam N_i um inteiro positivo e $n_i \geq N_i$ satisfazendo 4.21. Tomando $n = \sum_{i=0}^{p-1} n_i$ e $k = c\,(A_0, A_0, n)$ temos

$$\begin{aligned} k = c\,(A_0, A_0, n) &\geq \prod_{i=0}^{p-1} c\left(\varphi^i(A_0), \varphi^{i+1}(A_0), n_i\right), \text{ por 4.14} \\ &\geq \prod_{i=0}^{p-1} \exp^{n_i\lambda}, \text{ por 4.21} \\ &= \exp^{n\lambda} \end{aligned}$$

Pela definição de $c\,(A_0, A_0, n)$ existem k intervalos disjuntos $J_1, \cdots, J_k \subset A_0$ tal que $f^n(J_i) \supset A_0$ para todo $i = 1, \cdots, k$. Então $\left(\overline{J_1}, \cdots, \overline{J_k}\right)$ é uma $k-$ferradura para f^n e $\frac{1}{n} \log k \geq \lambda$.

Nosso objetivo agora é demonstrar o caso geral. Suponhamos $h(f) > 0$ e $0 < \lambda < h(f)$. Vamos escolher λ'' tal que $\lambda < \lambda'' < h(f)$. Então, iremos escolher q inteiro tal que

$$q\lambda'' > \log 3 \text{ e } q\,(\lambda'' - \lambda) \geq \log 2.$$

Por proposição, sabemos que

$$h(f^q) = qh(f) > q\lambda''.$$

Aplicando o processo feito anteriormente para f^q, obtemos que para todo inteiro positivo N existem inteiros positivos n, k com $n \geq N$ e $k-$ferradura, $(J_1, \cdots, J_k)$ para f^{nq} tal que $\frac{1}{n} \log k \geq q\lambda''$.

Assim, podemos colocar em ordem os elementos da ferradura tal que $J_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_k$ e seja $k' = \frac{k}{2}$. Então os intervalos J_i com índices impares são dois a dois disjuntos e temos k'−ferradura para f^{nq}. E temos

$$\begin{aligned}\frac{\log k'}{qn} &\geq \frac{\log k - \log 2}{qn}\\ &\geq \lambda'' - \frac{\log 2}{qn}\\ &\geq \lambda\end{aligned}$$

Assim, $\dfrac{\log k'}{qn} \geq \lambda$. E isto demonstra o Teorema.

$\square$

Capítulo 5

Entropia Topológica na Reta Real

Finalmente estamos onde é o objetivo deste trabalho, pois será aqui que será respondida a principal questão que foi apresentada na introdução. Nesta presente seção trataremos do comportamento de mapas topologicamente transitivos na reta real. Para tal faremos uso de inúmeras propriedades apresentadas no decorrer do texto. Num primeiro momento iremos adaptar a definição de Entropia Topológica de Cánovas e Rodrígues para este contexto. Para enfim ser demonstrado o Teorema 17.

Definição 137. Dado o intervalo compacto $[a, b]$, definiremos o mapa contínuo $f_{[a,b]} : [a, b] \to [a, b]$ por

$$f_{[a,b]}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \in [a, b] \\ a & \text{se} \quad f(x) < a \\ b & \text{se} \quad f(x) > b \end{cases}$$

Observação 138. Da maneira como foi definida $f_{[a,b]}$, podemos utilizar a definição de ω-limite que vimos no capítulo introdutório na seção sobre sistemas dinâmicos. Neste caso, teremos $\omega_f(x)$ o conjunto de pontos limites de um ponto $x \in [a, b]$ e $\omega\left(f_{[a,b]}\right)$ o conjunto w-limite.

Lema 139. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo e seja $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $orb_f(a)$ e $orb_f(b)$ estão em $[a, b]$. Então existe $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f), K \subset [a, b]$ tal que*

$$h(f_{[a,b]}) = h(f|_K).$$

Demonstração. Se $[a, b]$ é invariante por f não há o que demonstrar. Assumiremos a partir de agora que $[a, b]$ não é invariante e sejam

$$\mathcal{A} = \{x \in [a, b] : f(x) \notin [a, b]\} \text{ e } \mathcal{A}_\infty = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{A}).$$

Observe que $\text{orb}_f(a)$ e $\text{orb}_f(b)$ estão contidas em $L = [a, b] \backslash \mathcal{A}_\infty$ por hipótese. Vejamos que $\mathcal{A}_\infty$ é aberto. Para tal veremos que L é fechado. Seja $d \in \overline{L}$. Suponhamos por absurdo que $d \notin L$, ou seja, $d \in \mathcal{A}_\infty$. Isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(d) \notin [a, b]$. Como f é contínua e $[a, b]$ intervalo, $f^m([a, b])$ é intervalo. Então podemos pegar um pequeno intervalo aberto

V_d em $f^m([a,b])$ que contém $f^m(d)$ e tal que $V_d \bigcap [a,b] = \emptyset$. Assim a imagem inversa $f^{-1}(V_d)$ é aberto, contém d e está em $[a,b]$. Porém, note que todos pontos de $f^m(f^{-1}(V_d))$ não estão em $[a,b]$, daí temos um aberto contendo d em que todos os seus pontos não estão em L. O que contradiz o fato de d ser um ponto aderente a L. Logo $d \in L$ e L é fechado.

Afirmação: Dado $x \in [a,b]$, temos $\omega_{f_{[a,b]}}(x) \bigcap \mathcal{A}_\infty = \emptyset$.

De fato, sejam $y \in \mathcal{A}_\infty$ e $(c,d) \subset \mathcal{A}_\infty$ tal que $y \in (c,d)$. Vejamos agora que existe $x \in [a,b]$ tal que $y \in \omega_{f_{[a,b]}}(x)$. Suponhamos por absurdo que para qualquer $x \in [a,b]$ temos $y \notin \omega_{f_{[a,b]}}(x)$. isto é $y \notin \omega\left(f_{[a,b]}\right)$. Como $\omega\left(f_{[a,b]}\right)$ é fechado, y não é aderente a $\omega\left(f_{[a,b]}\right)$. Assim, existe um aberto V_y contendo y tal que $V_y \bigcap \omega\left(f_{[a,b]}\right) = \emptyset$. Em outras palavras V_y não contém nenhum ponto de alguma órbita, o que é uma contradição pois $y \in \mathcal{A}_\infty$.

Daí existe $n \geq 0$ tal que $f^n_{[a,b]}(x) \in (c,d)$ e então existe $m \geq 0$ tal que $f^{n+m}_{[a,b]}(x) \in \mathcal{A}$.

Observe que como o conjunto $\mathcal{A}$ foi definido, temos

$$f^{n+m+1}_{[a,b]}(x) = a \text{ ou } f^{n+m+1}_{[a,b]}(x) = b.$$

Assim,

$$\left\{f^k_{[a,b]}(x) : k \geq n+m+1\right\} \bigcap (c,d) = \emptyset,$$

pois $(c,d) \subset \mathcal{A}_\infty$ e $\mathrm{orb}_f(a)$, $\mathrm{orb}_f(b)$ estão em $[a,b]$. Consequentemente, y não pode ser um ponto limite da órbita de x, ou seja, $y \notin \omega_{f_{[a,b]}}(x)$. Provando assim a afirmação.

Portanto pelo que temos do conjunto $\omega\left(f_{[a,b]}\right)$ e pela Proposição 109, segue que

$$h\left(f_{[a,b]}\right) = h\left(f_{[a,b]}|_{\omega\left(f_{[a,b]}\right)}\right).$$

E como $\omega\left(f_{[a,b]}\right)$ é fechado pela Proposição 53 e limitado pois $\omega\left(f_{[a,b]}\right) \subseteq [a,b]$, segue que

$$\omega\left(f_{[a,b]}\right) \text{ é compacto.}$$

Concluindo assim a demonstração.

$\square$

O Teorema que vem a seguir nos trás para o contexto deste instante uma nova definição de Entropia Topológica de Cánovas e Rodrígues. Este conceito é muito importante para que possamos seguir com o desenvolvimento do trabalho, em especial no Teorema 12 e no Teorema 17.

Teorema 11. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo. Então*

$$ent(f) = \sup\{h(f_I) : I \text{ é um intervalo compacto contendo } K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f)\}.$$

Demonstração. Seja $\alpha = \sup\{h(f_I) : I$ é um intervalo compacto contendo $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f)\}$. Lembremos que

$$ent(f) = \sup\{h(f|_K) \ : \ K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f)\}.$$

Dado $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f)$ e J o menor intervalo compacto contendo K. Como K está contido em J. Observe que toda cobertura de J também cobre K e que uma cobertura minimal de J cobre K, porém não necessariamente é minimal. Assim, segue que

$$h(f|_K) \leq h(f_J).$$

Então $ent(f) \leq \alpha$.

Nosso objetivo agora é provar a desigualdade reversa. Seja I um intervalo compacto. Pela definição de f_I as órbitas das extremidades estão contidas em I. Então, pelo Lema 139 existe $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f)$ tal que

$$K \subseteq I \text{ e } h(f_I) = h(f|_K).$$

Consequentemente, $\alpha \leq ent(f)$. Portanto, podemos concluir que

$$ent(f) = \sup\{h(f_I) : I \text{ é um intervalo compacto contendo } K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f)\}.$$

$\square$

A demonstração do Teorema que vem a seguir nos dá uma maneira de construir mapas topologicamente transitivos e contínuos. Essa construção pode ser utilizada para obter exemplos de mapas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transitivos e contínuos. Estes exemplos construídos a partir da prova do Teorema citado, servem como aplicação do Teorema 17.

Teorema 12. *Seja α um número real positivo. Então existe um mapa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuo e topologicamente transitivo tal que $ent(f) \geq \alpha$.*

Demonstração. Sejam α um número real positivo e m um número inteiro positivo tal que $\log m \geq \max\{\alpha, 4\}$. O próximo passo é construir um mapa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaça o desejado.

Começaremos definindo f nos números inteiros. Seja $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq 0$, se n for par temos

$$f(n) = \frac{-n \cdot m}{2}.$$

Para n impar segue que

$$f(n) = \frac{(n+1) \cdot m}{2}.$$

Para os intervalos da forma $[n, n+1]$ definiremos f nesses intervalos de maneira linear. Para o caso em que $x < 0$ definiremos f sendo $f(x) = -f(-x)$.

Podemos notar pela forma como foram definidos os pares que para $n = 0, \cdots, m-1$, temos para n par

$$\begin{aligned}
f([0,1]) &= [0, m] \\
f([1,2]) &= \left[\frac{-m}{2}, \frac{2m}{2}\right] = \left[\frac{-m}{2}, m\right] \\
f([2,3]) &= \left[\frac{-2m}{2}, \frac{4m}{2}\right] = [-m, 2m] \\
f([3,4]) &= \left[\frac{-4m}{2}, \frac{4m}{2}\right] = [-2m, 2m] \\
&\vdots \\
f([n, n+1]) &= \left[\frac{-n \cdot m}{2}, \frac{(n+2) \cdot m}{2}\right]
\end{aligned}$$

e para n impar temos

$$\begin{aligned}
f([0,1]) &= [0, m] \\
f([1,2]) &= \left[\frac{-m}{2}, \frac{2m}{2}\right] = \left[\frac{-m}{2}, m\right] \\
f([2,3]) &= \left[\frac{-2m}{2}, \frac{4m}{2}\right] = [-m, 2m] \\
f([3,4]) &= \left[\frac{-4m}{2}, \frac{4m}{2}\right] = [-2m, 2m] \\
&\vdots \\
f([n, n+1]) &= \left[\frac{-(n+1) \cdot m}{2}, \frac{(n+1) \cdot m}{2}\right].
\end{aligned}$$

Daí, temos

$$[0, m] \subset f([n, n+1]), \quad \forall n = 0, \cdots, m-1.$$

Em outras palavras isto nos diz que para $f_{[0,m]}$ temos uma $m - ferradura$. Daí pela proposição 127 temos $h\left(f_{[0,m]}\right) \geq \log m$. Do Teorema 11 segue que $ent(f) \geq \log m \geq \alpha$.

Para que possamos concluir a demonstração, iremos provar a transitividade de f. Analisaremos primeiro os intervalos da forma $(n, n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Inicialmente, teremos os casos em que $n \geq 0$. Caso n seja par teremos

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{-nm}{2} \\
f^2(n) &= f\left(\frac{-nm}{2}\right) = -\left(\frac{-\left(\frac{-nm}{2}\right)m}{2}\right) = \left(\frac{-nm^2}{2^2}\right) (f(x) = -f(-x)\ \forall x < 0) \\
f^3(n) &= f\left(\frac{-nm^2}{2^2}\right) = \frac{-nm^3}{2^3} \\
&\vdots \\
f^i(n) &= \frac{-nm^i}{2^i}
\end{aligned}
$$

Assim, segue que $f^{i-1}(n) > f^i(n)$. Ou seja,

$$f(n) > f^2(n) > f^3(n) > f^4(n) > \cdots > f^{i-1}(n) > f^i(n) > f^{i+1}(n) > \cdots$$

Logo, $\lim\limits_{i \to \infty} f^i(n) = -\infty$. Por outro lado, caso n se ímpar temos

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{(n+1)m}{2} \\
f^2(n) &= f\left(\frac{(n+1)m}{2}\right) = -\frac{\left(\frac{(n+1)m}{2}\right)m}{2} = -\frac{(n+1)m^2}{2^2} \\
f^3(n) &= f\left(-\frac{(n+1)m^2}{2^2}\right) = -f\left(\frac{(n+1)m^2}{2^2}\right) = \frac{(n+1)m^3}{2^3} \\
&\vdots \\
f^i(n) &= (-1)^{i+1} \cdot \left[\frac{(n+1)m^i}{2^i}\right]
\end{aligned}
$$

Como $\log m \geq \max\{\alpha, 4\}$ segue que $f^{i+2}(n) > f^i(n)$. Note que para todo i impar temos $f^{i-2}(n) < f^i(n)$, ou seja,

$$f(n) < f^3(n) < f^5(n) < f^7(n) < \cdots < f^{i-1}(n) < f^i(n) < f^{i+1}(n) < \cdots$$

Isto é, $\lim\limits_{i \to \infty} f^i(n) = \infty$. Nos levando a conclusão de que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ existe um $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $x < f^i(n)$.

Agora, analisando o intervalo da forma $(n, n+1)$, podemos ver pelo que foi demonstrado acima que para qualquer aberto $V \subset \mathbb{R}$ existe um i impar de modo que $V \subset f^i(n, n+1)$.

Para concluir que f é topologicamente transitiva, sejam $U, V \subset \mathbb{R}$ abertos em $\mathbb{R}$. Observe que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(n, n+1) \bigcap U \neq \emptyset.$$

Como vimos anteriormente, existe um número natural impar i suficientemente grande tal que

$$f^i\left(\left(n, n+1\right) \bigcap U\right) \bigcap V \neq \emptyset.$$

Consequentemente,

$$f^i\left(U\right) \bigcap V \neq \emptyset.$$

Portanto, concluímos que f é topologicamente transitiva.

$\square$

5.1 Mapas Monótonos disjuntos

Nesta seção, o objetivo é dar uma definição para Entropia Topológica de Cánovas e Rodrígues em função de mapas monótonos por partes, assim como f oi feito no capítulo anterior.

Teorema 13. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo e monótono por partes. Então existe um intervalo compacto $[a, b]$ tal que*

$$ent(f) = h(f_{[a,b]}).$$

Demonstração. Utilizando a Proposição 121 podemos considerar que f é sobrejetivo trabalhando com $f : \mathbb{R}_\infty \to \mathbb{R}_\infty$, onde $\mathbb{R}_\infty = \bigcap\limits_{n\geq 0} f^n(\mathbb{R})$.

Dividiremos a demonstração em duas partes. Primeiro suponhamos que $\mathbb{R}_\infty$ é limitado. Tomemos $a = \min(\mathbb{R}_\infty)$ e $b = \max(\mathbb{R}_\infty)$. considerando o mapa $f_{[a,b]}$ note que as órbitas de a e b estão inteiramente contidas em $[a, b]$. Como todos os elementos de $\mathcal{K}(\mathbb{R}_\infty, f)$ estão contidos em $[a, b]$ segue do Teorema 11 que $ent(f) = h\left(f_{[a,b]}\right)$.

Suponhamos agora que $\mathbb{R}_\infty$ seja ilimitado. Tomemos $\mathbb{R}_\infty = [\alpha, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$(Os outros casos são similares). Seja L a união de todos os elementos de $\mathcal{K}(\mathbb{R}_\infty, f)$. Prosseguindo, temos duas possibilidades mostradas a seguir

1. Se L é limitado, tomemos $a = \min L$ e $b = \max L$.
2. Se L é ilimitado, tomemos $a = \min L$ e seja $\mathcal{F} = L \setminus Fix(f)$ onde denotaremos por $Fix(f)$ o conjunto dos pontos fixos de f. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ temos que f é monótona por partes, existe $b \in Fix(f)$ tal que $y < b$ para todo $y \in \mathcal{F}$. De fato, para $b = \max Fix(f)$ temos $x < f(x)$ para todo $x > b$ e isto nos leva ao fato de que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que intersecta (b, ∞) não pode ser invariante pois $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, logo se $y \in \mathcal{F}$ temos $y < b$.

Em ambos os casos, considere o mapa $f_{[a,b]}$. Pode-se notar que nos dois casos temos que $\mathrm{orb}_f(a)$ e $\mathrm{orb}_f(b)$ estão contidas em $[a, b]$. Aplicando o Lema 139, existe $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_\infty, f)$, tal que $h\left(f_{[a,b]}\right) = h\left(f|_K\right)$. Como os elementos de $\mathcal{K}(\mathbb{R}_\infty, f)$ estão em todos contidos em $[a, b]$, exceto pelos pontos fixos de f, pelo Teorema 11 segue que $ent(f) = h\left(f_{[a,b]}\right)$. $\square$

Dado um mapa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuo e monótono por partes. Denotaremos o número de intervalos monótonos de f^n por $c_n(f)$. Caso o mapa seja contínuo em intervalos compactos já vimos no capítulo anterior que

$$h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f).$$

O próximo Teorema nos mostra como estender este conceito para a reta real.

Teorema 14. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo e monótono por partes. Então*

$$ent(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f).$$

Demonstração. Sejam α, β tais que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta$, vamos considerar $[-\infty, \infty]$, os dois pontos de compactação da reta real. Definamos uma extensão de f por

$$f^*(x) = f(x) \text{ se } x \in \mathbb{R},\ f^*(-\infty) = \alpha \text{ e } f^*(\infty) = \beta.$$

Pelo Teorema anterior, existe um intervalo compacto $[a, b]$ tal que

$$ent(f) = h(f_{[a,b]}).$$

Observe que na demonstração do Teorema anterior, podemos escolher um intervalo $[a, b]$ tal que $\mathbb{R} - [a, b]$ não contém subintervalos invariantes compactos, exceto pelos pontos fixos e pontos periódicos de período dois. Então, pelo Teorema 3.1 no artigo [7] temos que $h(f^*) = ent(f)$. Por outro lado, sabemos que f^* é monótona por partes, temos

$$h(f^*) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f^*).$$

Como $c_n(f^*) = c_n(f)$ temos

$$\begin{aligned} h(f^*) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f^*) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ent(f) &= h(f^*) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f) \end{aligned}$$

Portanto, $ent(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n(f)$ como queríamos. □

5.2 Entropia e Ferraduras

No capítulo anterior, foi trabalhado no texto a correlação entre Ferraduras e Entropia Topológica em Intervalos. Nesta seção faremos também uma correlação entre Ferraduras e Entropia Topológica, porém na reta real. Observando o Teorema 10 podemos reescreve-lo da seguinte maneira.

Teorema 15. *Se $h(f_{[a,b]}) > 0$, então existe uma sequência de números inteiros positivos s_n e k_n tais que f^{s_n} tem uma $k_n - ferradura$ e*

$$h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \log k_n.$$

Teorema 16. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo. Assim*

(a) Se f tem uma $k - ferradura$, então $ent(f) > 0$.

(b) Se $ent(f) > 0$, então existem sequências de números inteiros s_n e k_n tais que f^{s_n} tem $k_n - ferraduras$ e

$$ent(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \log k_n.$$

Demonstração. (a) Suponhamos que f tenha uma $k - ferradura$ e sejam $J_1, \cdots, J_k$ os intervalos. Tomemos J o menor intervalo contendo $J_1, \cdots, J_k$. Pela Proposição 127 temos

$$h(f_J) \geq \log k.$$

Pelo Teorema 11 temos

$$ent(f) \geq h(f_J) \geq \log k > 0.$$

Portanto,

$$ent(f) > 0.$$

(b) Primeiramente vamos supor que $ent(f) = \alpha < \infty$. Seja (ϵ_n) uma sequência de números reais positivos tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

Pelo Teorema 11, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ existe um intervalo I_m e $\delta_m > 0$ tal que $h(f_{I_m}) > 0$ e

$$\alpha - \epsilon_m \leq h(f_{I_m}) - \delta_m < h(f_{I_m}) < h(f_{I_m}) + \delta_m \leq \alpha + \epsilon_m.$$

Como $h(f_{I_m}) > 0$, do Teorema 15 segue que existe $n_0(m) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(m)$, então

$$h(f_{I_m}) - \delta_m \leq \frac{1}{s_n(m)} \log k_n(m) \leq h(f_{I_m}) + \delta_m$$

onde $f_{I_m}^{s_n(m)}$ tem uma $s_n(m) - ferradura$. Isto significa que $f^{s_n(m)}$ tem uma $s_n(m) - ferradura$, pois se $I_m \subseteq f_{I_m}^{s_n(m)}(J)$ para algum intervalo $J \subseteq I_m$ temos

$$I_m \subseteq f_{I_m}^{s_n(m)}(J) \subseteq f^{s_n(m)}(J).$$

Fixemos $n_m \geq n_0(m)$ tal que

$$h(f_{I_m}) - \delta_m \leq \frac{1}{s_{n_m}} \log k_{n_m} \leq h(f_{I_m}) + \delta_m$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Assim existe uma sequência de inteiros positivos n_m tendendo a infinito tal que

$$\alpha - \epsilon_m \leq \frac{1}{s_{n_m}} \log k_{n_m} \leq \alpha + \epsilon_m.$$

Fazendo m tender ao infinito temos

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha - \epsilon_m) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_{n_m}} \log k_{n_m} \leq \lim_{n\to\infty} (\alpha + \epsilon_m).$$

Portanto, $ent(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_{n_m}} \log k_{n_m}$.

Assumiremos que $ent(f) = \infty$. Para qualquer $m \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 11 existe um subintervalo I_m tal que $h(f_{I_m}) > m$. Então existe $n_0(m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{s_n(m)} \log k_n(m) > m$$

e tal que $f_{I_m}^{s_n(m)}$ tem uma $s_n(m) - ferradura$. Como já vimos na outra parte da demonstração $f^{s_n(m)}$ tem uma $s_n(m) - ferradura$. Para $n_m \geq n_0(m)$ e então

$$\frac{1}{s_n(m)} \log k_n(m) > m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{s_{n_m}} \log k_{n_m} = \infty,$$

concluindo assim a demonstração.

$\square$

5.3 Entropia Topológica com Mapas Transitivos

Anteriormente analisamos mapas transitivos aplicados a intervalos compactos que tem sua entropia positiva. Agora nosso interesse é trabalhar mapas transitivos na reta real. O teorema a seguir prova tal resultado.

Teorema 17. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa contínuo e transitivo, então $ent(f) > 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja um mapa contínuo e transitivo. Primeiro, veremos que existe ponto fixo para f.

De fato, suponhamos por absurdo de f não tenha ponto fixo. Pela Observação 57 temos que para todo $x \in \mathbb{R}$, ou $f(x) > x$ ou $f(x) < x$. Seja $f(x) > x$, o outro caso é análogo. Isto implica que tomando um aberto V em $\mathbb{R}$ de modo $\sup(V) < x$ temos $V \bigcap \text{orb}_f(x) = \emptyset$. Assim, a órbita de x não é densa em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 4 segue que f não é transitiva, chegando a uma contradição.

A partir de agora, iremos dividir a primeira parte da demonstração em dois casos:

1. Existe $a \in Fix(f)$ tal que f seja crescente em $[a, \epsilon)$ ou seja decrescente em $(-\epsilon, a]$ para algum $\epsilon > a$.
2. Para todo $a \in Fix(f)$ o mapa f é decrescente em $[a, \epsilon)$ e crescente em $(-\epsilon, a]$ para algum $\epsilon > a$.

Começaremos supondo o primeiro item. Suponhamos que f seja crescente em $[a, \epsilon)$ para algum $\epsilon > a$. O outro caso é feito de maneira análoga. Vejamos agora que $f(x) > x$ para todo $x \in (a, \epsilon)$.

De fato, suponhamos a existência de um $x \in [a, \epsilon)$ tal que $f(x) \leq x$. Como f é crescente, temos que

$$a < y < x \Rightarrow f(y) < f(x) \leq x.$$

Consequentemente, $f([a, x]) \subseteq [a, x]$. O que é uma contradição pela Observação 58. Portanto, $f(x) > x$ para todo $x \in (a, \epsilon)$.

Suponhamos que para todo $x > a$, tenhamos $f(x) \neq x$. Pela Observação 57 temos que para todo $x \in (a, \infty)$, ou $f(x) > x$ ou $f(x) < x$. Como $f(x) > x$ para todo $x \in (a, \epsilon)$, segue que para $x \in (a, \infty)$ temos $f(x) > x$. Consequentemente, $f([a, \infty)) \subset [a, \infty)$ o que é uma contradição. Portanto, existe ponto fixo maior que a. Tomemos $c \in Fix(f)$ o menor ponto fixo possível de f tal que $a < c$.

Pelo fato de que $[a, \infty)$ tem interior não vazio e f ser transitiva pela observação 58 temos que $f([a, \infty))$ não está contido em $[a, \infty)$. Então existe $d > c > a$ tal que $f(d) < a$. Este fato ocorre pois se $d < c$(d não pode ser igual a c pois c é ponto fixo) é possível encontrar um ponto fixo algum entre a e d. De fato, como $f(x) > x$ para todo $x \in (a, \epsilon)$

temos que existe $a < x_1 < d$ tal que $f(x_1) > x_1$. Tomemos o mapa $g : [x_1, d] \to \mathbb{R}$ definido por $g(x) = f(x) - x$. Observe que

$$g(x_1) = f(x_1) - x_1 > 0$$
$$g(d) = f(d) - d < 0$$

Como $g(d) < 0 < g(x_1)$, pelo Teorema 3 existe $c_1 \in (x_1, d)$ tal que $g(c_1) = 0$, ou seja, $f(c_1) = c_1$. Isto é, c_1 é um ponto fixo entre a e c pois $a < d < c$. O que é uma contradição visto que c é escolhido de maneira que seja o menor ponto fixo maior que a.

Note que $f([c, d])$ contém a pois é um intervalo(pela sua continuidade), $a < c = f(c)$ e $f(d) < a$. Assim

$$f(d) < a < c = f(c)$$

Pelo Teorema 3 existe b em (c, d) tal que $f(b) = a$. Tomemos $b \in (c, d)$ de maneira que seja o menor possível. Agora, analisando o intervalo (a, b), como f é transitiva $f((a, b))$ não está contido em (a, b). Isto é, existe $e \in (a, b)$ tal que $f(e) > b$ ou $f(e) < a$. Caso $f(e) < a$, temos

$$f(e) < a < c = f(c).$$

Repetindo o mesmo processo feito acima, encontramos $b' < b$ tal que $f(b') = a$. O que é uma contradição, contrariando a minimalidade de b. Assim, $f(e) > b$.

Sejam $J_1 = [a, e]$ e $J_2 = [e, b]$, temos que

$$f_{[a,b]}(J_1) = f_{[a,b]}(J_2) = [a, b].$$

Assim, temos que $f_{[a,b]}$ tem uma $2 - ferradura$ e consequentemente

$$h\left(f_{[a,b]}\right) \geq \log 2.$$

Utilizando o Teorema 11 segue que $ent(f) \geq \log 2$ e portanto, $ent(f) > 0$.

Suponhamos o item (2) e considere o mapa f^2. Pela continuidade de f segue que f^2 é contínua. Agora analisemos a transitividade. Sejam U, V abertos em $\mathbb{R}$. Observe que $int(f^2(U))$ é um conjunto aberto contido em $f^2(U)$. Pela transitividade, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(int(f^2(U))) \cap V \neq \emptyset.$$

Assim, temos

$$f^{2n}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Ou seja,

$$(f^2)^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Portanto, f^2 é transitiva. Assumimos que f é decrescente em $[a, \epsilon)$ e crescente em $(-\epsilon, a]$ para algum $\epsilon > a$, onde a é ponto fixo. Como f é decrescente em $[a, \epsilon)$, temos $f(x) < f(y)$ para $y < x$ onde $x, y \in [a, \epsilon)$. Assim, $f^2(x) > f^2(y)$ pois $f(x) < f(y)$. Logo, f^2 é crescente em $[a, \epsilon)$.

Repetindo o mesmo processo do caso anterior para f^2 temos $b > e > a$ tais que

$$f^2(b) = a \text{ e } f^2(e) > b.$$

Tomemos $J_1 = [a, e]$ e $J_2 = [e, b]$, temos que

$$f^2_{[a,b]}(J_1) = f^2_{[a,b]}(J_2) = [a, b].$$

Assim, temos que $f^2_{[a,b]}$ tem uma $2 - ferradura$. Portanto $h\left(f^2_{[a,b]}\right) \geq \log 2$. Pelo Lema 139 existe $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, f^2)$ tal que

$$h\left(f^2|_K\right) = h\left(f^2_{[a,b]}\right) \geq \log 2.$$

Pelo Teorema 11 temos que $ent(f^2) \geq h\left(f^2|_K\right)$ e pela Proposição 115, temos

$$\begin{aligned} ent(f) &= \frac{2}{2} ent(f) \\ &= \frac{1}{2} ent(f^2) \\ &\geq \frac{\log 2}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Portanto, $ent(f) > 0$.

$\square$

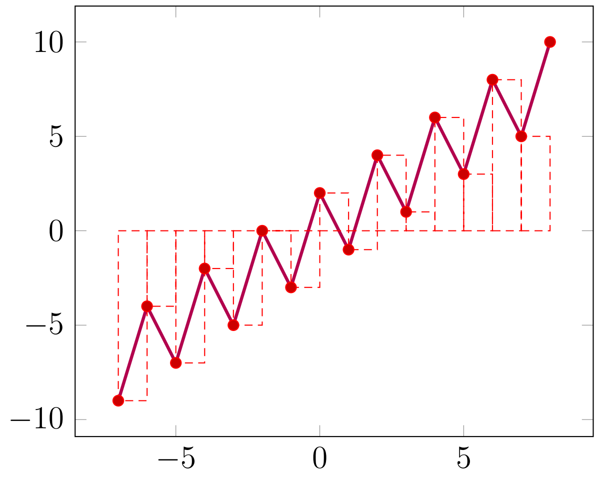
A seguir, veremos uma aplicação direta do Teorema 17, que foi retirada do Artigo [3]. Onde podemos ver mais alguns exemplos de aplicações do Teorema.

Exemplo 140. *Veremos uma aplicação direta do Teorema anterior. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 8n + 2 & se \quad 2n \leq x \leq 2n + 1 \\ 5x - 8n + 2 & se \quad 2n - 1 \leq x \leq 2n \end{cases}$$

Segue agora o gráfico da função:

Gráfico de $f(x)$



Começaremos a analisar esta função, mostrando que ela é contínua. Para ser contínua, precisamos ver que f é contínua em todo ponto $m \in \mathbb{R}$. A primeira observação a ser feita sobre f é que para cada $m \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ temos uma função polinomial, que é contínua. Assim, devemos analisar com mais cuidado os pontos em que $m \in \mathbb{Z}$. Dividiremos em dois casos, o caso em que m é par e o caso em que m é impar.

1. *Suponhamos que m seja par. Nosso objetivo é mostrar que*

$$\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^+} f(x) = \lim_{x \to m} f(x) = f(m).$$

Observe que como m é par, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2n$. Assim, temos

$$\begin{aligned} f(m) &= -3m + 8n + 2 \\ &= -3(2n) + 8n + 2 \\ &= -6n + 8n + 2 \\ &= 2n + 2 \\ &= m + 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(m) &= 5m - 8n + 2 \\ &= 5(2n) - 8n + 2 \\ &= 10n - 8n + 2 \\ &= 2n + 2 \\ &= m + 2 \end{aligned}$$

assim, $f(m) = m + 2$. Consequentemente, temos

$$\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^-} 5x - 8n + 2 = m + 2$$

e

$$\lim_{x \to m^+} f(x) = \lim_{x \to m^+} -3x + 8n + 2 = m + 2$$

Portanto, $\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^+} f(x) = f(m)$ *como queríamos.*

2. *Suponhamos que m seja impar. Nosso objetivo de maneira semelhante a feita anteriormente, é mostrar que*

$$\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^+} f(x) = \lim_{x \to m} f(x) = f(m).$$

Note que por m ser impar, $m + 1$ *e* $m - 1$ *são pares. Assim existem* $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ *tai que* $m + 1 = 2n_1$ *e* $m - 1 = 2n_2$*. Com isso, temos algumas observações a fazer. Isto é,*

$$m = m - 1 + 1 = 2n_2 + 1 \text{ e } m = m + 1 - 1 = 2n_1 - 1$$

Além disso, temos

$$m - 1 + 2 = m + 1 = 2n_1 = 2n_2 + 2, \text{ pois } m - 1 = 2n_2.$$

Isto implica que

$$2n_1 = 2n_2 + 2 \Rightarrow n_1 = n_2 + 1.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} f(m) &= -3(m) + 8n_1 + 2 \\ &= -3(2n_1 - 1) + 8n_1 + 2 \\ &= -6n_1 + 3 + 8n_1 + 2 \\ &= 2n_1 + 5 \\ &= 2(n_2 + 1) + 5 \\ &= 2n_2 + 7 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(m) &= 5(m) - 8n_2 + 2 \\ &= 5(2n_2 + 1) - 8n_2 + 2 \\ &= 10n_2 + 5 - 8n_2 + 2 \\ &= 2n_2 + 7 \end{aligned}$$

logo, $f(m) = 2n_2 + 7$*. Consequentemente, temos*

$$\lim_{x \to m^+} f(x) = \lim_{x \to m^+} 5x - 8n + 2 = 2n_2 + 7$$

e

$$\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^-} -3x + 8n + 2 = 2n_2 + 7$$

Portanto, $\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^+} f(x) = f(m)$ *como queríamos.*

O próximo passo, é mostrar que f *é topologicamente transitiva. Num primeiro instante, iremos analisar para* $n \in \mathbb{Z}$ *os intervalos* $(n, n+1)$. *Para tal, seja* $n \in \mathbb{Z}$ *um número par. Isto é, existe* $m_1 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n = 2m_1$. *Assim,*

$$\begin{aligned} f(n) &= -3n + 8m_1 + 2 \\ &= -3(2m_1) + 8m_1 + 2 \\ &= -6m_1 + 8m_1 + 2 \\ &= 2m_1 + 2 \\ &= n + 2 \end{aligned}$$

Faremos indução sobre $i \in \mathbb{N}$ *para mostrar que*

$$f^i(n) = n + 2i.$$

Já vimos que para $i = 1$ *temos* $f(n) = n + 2$ *como queremos. Suponhamos que seja verdade para* $i - 1$, *ou seja,*

$$f^{i-1}(n) = n + 2(i-1).$$

Vejamos agora que é verdade para i. *Como* n *é par,* $n + 2(i-1)$ *também é par. Então existe* $m_i \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n + 2(i-1) = 2m_i$. *Logo, temos*

$$\begin{aligned} f^i(n) &= f\left(f^{i-1}(n)\right) \\ &= f\left(n + 2(i-1)\right) \\ &= -3(n + 2(i-1)) + 8m_i + 2 \\ &= -3(2m_i) + 8m_i + 2 \\ &= -6m_i + 8m_i + 2 \\ &= 2m_i + 2 \\ &= n + 2(i-1) + 2 \\ &= n + 2i - 2 + 2 \\ &= n + 2i \end{aligned}$$

Portanto, $f^i(n) = n + 2i$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$. *Isto implica que*

$$f(n) < f^2(n) < f^3(n) < f^4(n) < \cdots < f^{i-1}(n) < f^i(n) < f^{i+1}(n) < \cdots$$

Agora analisaremos o caso em que n *é impar. Novamente faremos a indução sobre* $i \in \mathbb{N}$ *para mostrar que*

$$f^i(n) = n - 2i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Vejamos que é verdade para $i = 1$. Note que existe $m_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2m_1 - 1$. Assim, note que

$$\begin{aligned} f(n) &= 5n - 8m_1 + 2 \\ &= 5(2_1 - 1) - 8m_1 + 2 \\ &= 10m_1 - 5 - 8m_1 + 2 \\ &= 2m_1 - 3 \\ &= (2m_1 - 1) - 2 \\ &= n - 2 \end{aligned}$$

Logo, $f(n) = n - 2$.

Já vimos que para $i = 1$ temos $f(n) = n - 2$ como queremos. Suponhamos que seja verdade para $i - 1$, ou seja,

$$f^{i-1}(n) = n - 2(i - 1).$$

Como n é impar, $n - 2(i - 1)$ é impar também. Ou seja, existe m_i tal que $n - 2(i - 1) = 2m_i - 1$. Temos então

$$\begin{aligned} f^i(n) &= f\left(f^{i-1}(n)\right) \\ &= f\left(n - 2(i - 1)\right) \\ &= 5(n + 2(i - 1)) - 8m_i + 2 \\ &= 5(2m_i - 1) - 8m_i + 2 \\ &= 10m_i - 5 - 8m_i + 2 \\ &= 2m_i - 3 \\ &= 2m_i - 1 - 2 \\ &= n - 2(i - 1) - 2 \\ &= n - 2i + 2 - 2 \\ &= n - 2i \end{aligned}$$

Logo, $f^i(n) = n - 2i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$f(n) > f^2(n) > f^3(n) > f^4(n) > \cdots > f^{i-1}(n) > f^i(n) > f^{i+1}(n) > \cdots.$$

Observe que para n par, $f^i(n) = n + 2i$. E para m impar, $f^i(m) = m - 2i$. Em outras palavras, temos

$$\lim_{i\to\infty} f^i(n) = \infty \text{ e } \lim_{i\to\infty} f^i(m) = -\infty. \tag{5.1}$$

Voltemos a analisar o intervalo $(n, n+1)$. Pelo que vimos acima dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ existe $i \in \mathbb{N}$ temos

$$f^i(n+1) < x < f^i(n) \text{ se } n \text{ é par}$$

ou

$$f^i(n) < x < f^i(n+1) \text{ se } n \text{ é impar.}$$

Finalmente, para concluir que f é transitiva, sejam $U, V \subset \mathbb{R}$ conjuntos abertos contidos em $\mathbb{R}$. Assim, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$U \cap (n, n+1) \neq \emptyset.$$

Então, para i suficientemente grande pela equação 5.1 temos

$$f^i\left(U \cap (n, n+1)\right) \cap V \neq \emptyset.$$

Logo,

$$f^i\left(U\right) \cap V \neq \emptyset.$$

Portanto, f é topologicamente transitiva. E por este fato, aplicando o Teorema 17 podemos concluir que $ent(f) > 0$.

Lista de Notações

$\emptyset$	O conjunto vazio.
$f : X \to Y$	Sendo X e Y conjuntos, $f : X \to Y$ denota uma função de X em Y.
$\mathbb{Z}$	O conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{R}$	O conjunto dos números reais.
$\mathbb{Q}$	O conjunto dos números racionais.
$\mathbb{N}$	O conjunto dos números inteiros estritamente positivos.
$\overline{A}$	O fecho do conjunto A em um certo espaço topológico
f^n	De modo geral, $n \in \mathbb{N}$, e f^n denota a n-ésima iterada da função f, que é de um certo conjunto nele mesmo. Convencionamos f^0 ser a função identidade. No caso de f bijetora, $f^{-n} = (f^{-1})^n$.
$f^{-n}(A)$	Sendo $f : X \to Y$, $A \subset Y$, e $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(A)$ denota $\{x \in X : f^n(x) \in A\}$.
$f^n(A)$	Sendo $f : X \to Y$, $A \subset X$, e $n \in \mathbb{N}_0$, $f^n(A)$ denota $\{x \in Y : \exists y \in A, f^n(y) = x\}$.
$\#X$	Sendo X um conjunto, $\#X$ denota a cardinalidade de X. No caso de X ser finito, fazemos um abuso de notação e identificamos $\#X$ com o número de elementos em X.
$B(x, r)$	Sendo x um elemento de um certo espaço métrico X com uma métrica d e $r \geq 0$, $B(x, r)$ denota a bola aberta de centro x e raio r, ou seja, $\{y \in X : \mathrm{d}(x, y) < r\}$.
$B[x, r]$	Sendo x um elemento de um certo espaço métrico X com uma métrica d e $r \geq 0$, $B[x, r]$ denota a bola fechada de centro x e raio r, ou seja, $\{y \in X : \mathrm{d}(x, y) \leq r\}$.
$a \vert b$	Sendo $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \vert b$ significa a divide b.
$\prod\limits_{i=1}^{i=n} X_i$	Produtório entre os conjuntos $X_1, \cdots, X_n$.
X_∞	Seja X um conjunto e $f : X \to X$ um mapa, denotaremos por X_∞ o conjunto $X \bigcap f(X) \bigcap f^2(X) \bigcap \cdots \bigcap f^n(X) \bigcap \cdots = \bigcap\limits_{n \geq 0} f^n(X)$.
α^n	Seja α uma cobertura de um conjunto X. Denotaremos por α^n o seguinte conjunto $\alpha \bigvee f^{-1}\alpha \bigvee f^{-2}\alpha \bigvee \cdots \bigvee f^{-n}\alpha = \bigvee\limits_{i=0}^{i=n} f^{-i}\alpha$.
$\partial(X)$	Seja X um conjunto. Denotaremos por $\partial(X)$ a fronteira de X.
$\mathrm{orb}_f(x)$	Sendo X um conjunto e $f : X \to X$. Denotamos por $\mathrm{orb}_f(x)$ a órbita de x.
$f(A) \subset A$	Sendo A um conjunto. Dizemos que $f(A) \subset A$ nos diz que $f(A)$ está contido em A.

$f(A) \supset A$	Sendo A um conjunto. Dizemos que $f(A) \subset A$ nos diz que $f(A)$ está contém A.
$Fix(f)$	Sendo X um conjunto e $f : X \to X$. Denotamos por $Fix(f)$ o conjunto de pontos fixos.
$P_n(f)$	Sendo X um conjunto e $f : X \to X$. Denotamos por $P_n(f)$ o conjunto de todos os pontos de príodo $n \geq 2$.
$P(f)$	Sendo X um conjunto e $f : X \to X$. Denotamos por $P(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos.
$\omega_f(x)$	Sendo X um conjunto e $f : X \to X$. Denotamos por $\omega_f(x)$ o conjunto dos pontos limites da órbita de x.
$\omega(f)$	Sendo X um conjunto e $f : X \to X$. Denotamos por $\omega(f)$ o conjunto $\omega-$limite.

Referências Bibliográficas

[1] L. Alsedá, J. Llibre, M. Misiurewicz, Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One, World Scientific, Singapore, 1993.

[2] N. Anima, V. Kannan, S.P. Sesha, Properties of topologically transitive maps on the real line, Real Anal. Exchange 27 (2001/2002) 325–334.

[3] Anima Nagar and S. P. Sesha Sai, Some Classes of Transitive Maps on Real Line, Dept. of Mathematics e Statistics, University of Hyderabad, Hyderabad-500046.

[4] C. Araújo, Sobre Pontos Periódicos De Funções Do Intervalo e do Disco, DMA-UFV, 2015

[5] M. Bertolim, Entropia Topológica e Aplicações à Teoria de Nós, USP-São Carlos, 1999

[6] L. Block, W.A. Coppel, Dynamics in One Dimension, Lecture Notes in Math., vol. 1523, Springer, Berlin, 1992.

[7] J.S. Cánovas, J.M. Rodríguez, Topological entropy of maps on the real line, Topology and its Applications 153 (2005/2006) 735-746

[8] Devaney, L. and Devaney, R., An Introduction To Chaotic Dynamical Systems, Second Edition

[9] Lima, E.L., Curso de Análise, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Vol. 1, Sexta Edição

[10] Lima, E.L.,Elementos de topologia geral, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Coleção elementos de matemática, 1970

[11] LIMA, Elon L.; MÉTRICOS, Espaços. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 2003.

[12] Munkres, J., Topology, Prentice Hall, 2000. 2.1.1

[13] C. Robinson, Dynamical systems: stabilily. symbolic dynamics. and chaos, CRC-Press, 1995

[14] Ruette, S., Chaos on the Interval, University Lecture Series, 2017, American Mathematical Society

[15] M. Schnoor, Transitividade Robusta E Ergodicidade De Aplicações Na Reta, PUC-RIO,

[16] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer, Berlin, 1982.