UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

BRENDO LUCAS DE FARIA

NÚMERO DE SUBSEQUÊNCIAS COM UMA SOMA PREDEFINIDA

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2023

BRENDO LUCAS DE FARIA

NÚMERO DE SUBSEQUÊNCIAS COM UMA SOMA PREDEFINIDA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Abílio Lemos C. Júnior

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T
F224n
2023

Faria, Brendo Lucas de, 1998-
Número de subsequências com uma soma predefinida / Brendo Lucas de Faria. – Viçosa, MG, 2023.
1 dissertação eletrônica (43 f.): il.

Orientador: Abílio Lemos Cardoso Júnior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática, 2023.
Referências bibliográficas: f. 42-43.
DOI: https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.313
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Grupos abelianos. 2. Sequências (Matemática). I. Cardoso Júnior, Abílio Lemos, 1979-. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 512.2

Bibliotecário(a) responsável: Bruna Silva CRB-6/2552

BRENDO LUCAS DE FARIA

NÚMERO DE SUBSEQUÊNCIAS COM SOMA PREDEFINIDA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2023.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente
BRENDO LUCAS DE FARIA
Data: 24/05/2023 09:48:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Brendo Lucas de Faria
Autor

Documento assinado digitalmente
ABILIO LEMOS CARDOSO JUNIOR
Data: 24/05/2023 09:55:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Abílio Lemos Cardoso Júnior
Orientador

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me conduzido até aqui, por estar sempre me dando força e esperança em cada momento difícil que presenciei e também por ter me concedido a benção de encontrar pessoas que tornaram essa jornada mais leve e tranquila.

Ao meu orientador, Abílio Lemos Cardoso Júnior, por ter me aceitado como orientando e ter tido a atenção e paciência devida. Por toda disponibilidade, apoio e confiança. Agradeço também a todo corpo docente do DMA-UFV.

Aos meus familiares que sempre me deram apoio e foram fonte de incentivo para o início e progresso dessa jornada. Em especial as minhas tias que sempre acreditaram no meu potencial e não me permitiram desistir no meio do caminho.

Aos amigos construídos no decorrer dos anos de mestrado, pelos estudos em grupo e também por fazerem do ambiente acadêmico um local mais descontraído e acolhedor. Meus agradecimentos também aos amigos que estiveram comigo mesmo de longe.

Meu eterno obrigado a todos que passaram, direta e indiretamente, por esse árduo caminho até aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar."

(Albert Einstein)

Resumo

FARIA, Brendo Lucas de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2023. **Número de Subsequências com Soma Predefinida**. Orientador: Abílio Lemos Cardoso Júnior.

Sejam G um grupo abeliano finito e $S = g_1 \cdots g_t$ uma sequência de elementos em G. Para cada elemento g de G e $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, em que n é o expoente de G, $N_{A,g}(S)$ denota o número de subsequências $T = \prod_{i \in I} g_i$ de S tais que $\sum_{i \in I} a_i g_i = g$, onde $I \subseteq \{1, 2, \ldots, t\}$ e $a_i \in A$. Quando $A = \{1\}$, escrevemos apenas $N_g(S)$. Neste trabalho estudaremos $D(G)$ para p-grupos e para o produto direto de dois grupos cíclicos. Além disso, estudaremos também o limite inferior de $N_g(S)$ e $N_{A,g}(S)$, que dependem da constante de Davenport, e caracterizaremos a estrutura de sequências extremas, sobre alguns grupos, onde o limite inferior para $N_g(S)$ e $N_{A,g}(S)$ é atingido.

Palavras-chave: Grupo abeliano finito. Constante de Davenport. Sequências com peso. Subsequências com peso.

Abstract

FARIA, Brendo Lucas de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2023. **Number of Subsequences with Predefined Sum**. Adviser: Abílio Lemos Cardoso Júnior.

Let G be a finite abelian group and $S = g_1 \cdots g_t$ be a sequence of elements in G. For any element g of G and $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, with n being the expoent of G, $N_{A,g}(S)$ denote the number of subsequences $T = \prod_{i \in I} g_i$ of S such that $\sum_{i \in I} a_i g_i = g$, where $I \subseteq \{1, 2, \ldots, t\}$ and $a_i \in A$. When $A = \{1\}$, we write $N_g(S)$. In this paper we will study $D(G)$ for p-groups and for the direct product of two cyclic groups. Moreover, we will also study the lower bound of $N_g(S)$ and $N_{A,g}(S)$, which depend on the Davenport constant, and characterize the structures of the extremal sequences where the lower bound of $N_g(S)$ and $N_{A,g}(S)$ is reached.

Keywords: Finite abelian group. Constant Davenport. Weighted sequences. Weighted subsequences.

Sumário

Introdução

Sejam G um grupo abeliano finito com expoente n e S uma sequência sobre G. A enumeração de subsequências de S com propriedades prescritas é um problema de Teoria Combinatória dos Números. Este problema surgiu com o trabalho dos pesquisadores P. Erdös, A. Ginzbug e A. Ziv [5], que mostraram que dados quaisquer $2n-1$ inteiros, sempre podemos achar n inteiros cuja soma seja divisível por n.

Com isso, foi levantado o problema de determinar o menor inteiro positivo ℓ tal que cada sequência de tamanho ℓ possui uma subsequência não vazia de soma zero (como podemos ver em alguns artigos [3, 7, 9, 10]). Esse inteiro ℓ é chamado constante de Davenport de G e é denotado por $D(G)$.

Uma outra motivação por trás de estudos sobre a constante de Davenport é sua conexão com a teoria algébrica dos números. Sendo K um corpo de números algébricos com um anel de inteiros R e um grupo de classes G, o número $D(G)$ é definido como o número máximo de ideais primos, considerando as multiplicidades, que podem ocorrer na decomposição em ideais primos de um elemento irredutível de R. Além disso, a constante de Davenport tem conexão também com problemas em teoria dos grafos. Em [4] e [14] podemos ver a definição da constate de Davenport k-baricêntrica juntamente com alguns de seus valores e limites. Resultados apresentados nesses artigos permitem estabelecer números de Ramsey baricêntricos para grafos estrelas.

Uma generalização da constante de Davenport foi recentemente introduzida por Adhikari e Chen [1]. Para um subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$ eles definiram a constante de Davenport com peso em A de um grupo abeliano finito G, denotada por $D_A(G)$. A constante em questão é o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência S sobre G de comprimento $|S| \geq \ell$ possui uma subsequência não vazia de soma zero com peso em A. Até o momento do estudo dessa dissertação, nenhuma interpretação aritmética para essa invariante em questão era conhecida.

Apresentaremos os conceitos preliminares, definições e notações gerais que nos servirão de base para obtermos resultados no decorrer da dissertação.

Nosso estudo consiste em determinarmos a constante de Davenport para determinados grupos, como faremos para um grupo cíclico de n elementos, C_n, para um p-grupo G e também para o produto direto de dois grupos cíclicos onde a ordem de um divide a ordem do outro.

Além disso, estamos interessados em enumerar e classificar subsequências com somas predefinidas. Para cada elemento g de G, $N_g(S)$ denota o número de subsequências $T = \prod_{i \in I} g_i$ de $S = \prod_{i=1}^{t} g_i$ tais que $\sum_{i \in I} g_i = g$, onde $I \subseteq [t]$. Para cada g de G e $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, em que n é o expoente de G, $N_{A,g}(S)$ denota o número de subsequências $T = \prod_{i \in I} g_i$ de S tais que $\sum_{i \in I} a_i g_i = g$, onde $I \subseteq [t]$ e $a_i \in A$. Ademais, estudaremos também o limite inferior de $N_g(S)$ e $N_{A,g}(S)$ e caracterizaremos a estrutura de sequências extremas, sobre alguns grupos, onde o limite inferior para $N_g(S)$ e $N_{A,g}(S)$ é atingido.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e Notações Gerais

Nesta seção iremos introduzir algumas definições e notações que serão utilizadas mais adiante.

Consideramos $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos e $\mathbb{N}_0$ o conjuntos dos inteiros não negativos. Para inteiros a, $b \in \mathbb{N}_0$, definimos $[a, b] = \{x \in \mathbb{N}_0 : a \leq x \leq b\}$. Quando $a = 1$, escrevemos apenas $[b]$. Além disso, denotamos um grupo cíclico com n elementos, sendo n um inteiro positivo, por C_n. Naturalmente $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$. Denotamos r cópias de C_n por C_n^r, ou seja, $C_n^r = \underbrace{C_n \times C_n \times \cdots \times C_n}_{\text{r vezes}}$.

Sejam G um grupo abeliano aditivo e $A_1, \ldots, A_n \subseteq G$ finitos e não vazios. Definimos a soma dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ por $A_1 + \ldots + A_n = \{a_1 + \ldots + a_n : a_i \in A_i, i \in [n]\} \subseteq G$.

Seja G um grupo abeliano finito, uma sequência sobre G é da forma

$$S = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)} = g_1 \cdot g_2 \cdots g_m \in \mathcal{F}(G),$$

onde $\mathcal{F}(G)$ é um monóide abeliano de base G e $v_g(S)$ é a multiplicidade de g em S. Dizemos que g é um elemento de S se $v_g(S) > 0$ e denotamos por $g|S$, e se $v_g(S) \leq 1$, para todo $g \in G$, dizemos que S é livre de quadrados em $\mathcal{F}(G)$. Denotamos por I_S o conjunto $[m]$ de índices de S. O comprimento de S é dado por $|S| = m = \sum_{g \in G} v_g(S) \in \mathbb{N}_0$ e chamamos de suporte de S o conjunto $supp(S) = \{g \in G : v_g(S) > 0\} \subset G$.

Para uma sequência $S = g_1 \cdot g_2 \cdots g_m$ de elementos em G, definimos a soma de seus elementos por $\sigma(S) = \sum_{i=1}^{m} g_i$. A sequência vazia é denotada por λ e sua soma é $\sigma(\lambda) = 0$ por convenção. Quando consideramos uma sequência S sobre um grupo abeliano finito multiplicativo G, definimos o produto de seus elementos por $\pi(S) = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)}$. Quando o produto $\pi(S)$ for igual a $1 \in G$, dizemos que S tem produto 1.

Definimos uma subsequência T de S por $T = g_{i_1} \cdots g_{i_k}$ com conjunto de índices $I_T = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [m]$, e denotamos por $T|S$. Uma subsequência T de S satisfaz $v_g(T) \leq v_g(S)$, para todo $g \in G$. Dizemos que T é uma subsequência própria de S se $v_g(T) < v_g(S)$ para algum $g|S$. Definimos a sequência $-T$ por $-T = (-g_{i_1}) \cdots (-g_{i_k})$.

Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_t$, t subsequências de S. Denotamos por $mdc(S_1, \ldots, S_t)$ a subsequência de S com conjunto de índices $I_{S_1} \cap \ldots \cap I_{S_t}$. Duas subsequências S_1 e S_2 são disjuntas se $mdc(S_1, S_2) = \lambda$. Se S_1 e S_2 são disjuntas, então denotamos por S_1S_2 a subsequência com conjunto de índices $I_{S_1} \cup I_{S_2}$. Se $S_1|S_2$, a subsequência com conjunto de índices $I_{S_2} \backslash I_{S_1} = \{i_j \in I_{S_2} : i_j \notin I_{S_1}\}$ é denotada por $S_2S_1^{-1}$.

Definimos o conjunto da soma de todas as subsequências, sem contar a subsequência vazia, de uma sequência S por $\sum(S) = \left\{ \sum_{i \in I} g_i : \varnothing \neq I \subseteq [m] \right\}$, e $\sum^{\bullet}(S) = \sum(S) \cup \{0\}$ é o conjunto das somas de todas as subsequências de S, inclusive a vazia.

Uma sequência S é chamada sequência de soma zero se $\sigma(S) = 0$ e denotamos o conjunto de tais sequências por $\mathcal{B}(G)$. Dizemos que uma sequência S é livre de soma zero se $0 \notin \sum(S)$ e denotamos o conjunto de todas as sequências livres de soma zero por $\mathcal{A}^*(G)$. Uma sequência S é minimal de soma zero se $S \neq \lambda$, $\sigma(S) = 0$, e cada T onde $T|S$, com $1 \leq |T| < |S|$, é livre de soma zero. O conjunto dessas sequências é denotado por $\mathcal{A}(G)$. Por fim, uma sequência é dita de fatoração única se $0 \nmid S$ e se S se escreve de forma única como $S = T_1 \cdots T_k S'$, onde $T_1, \ldots, T_k$ são todas as subsequências de S minimais de soma zero e S' é livre de soma zero.

1.2 Constante de Davenport

A constante de Davenport de um grupo abeliano finito G, denotada por $D(G)$, é o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência S sobre G de comprimento $|S| \geq \ell$ possui uma subsequência não vazia de soma zero. Quando estivermos considerando o grupo G com a notação multiplicativa, a constante de Davenport desse grupo, também denotada por $D(G)$, é o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência S sobre G de comprimento $|S| \geq \ell$ possui uma subsequência não vazia de produto 1.

Esta constante se deu através do problema de determinar o menor inteiro positivo ℓ tal que cada sequência de tamanho ℓ possui uma subsequência não vazia de soma zero.

Além disso, uma motivação por trás de estudos sobre a constante em questão é sua conexão à teoria algébrica dos números. Tal conexão consiste no fato de que, sendo K um corpo de números algébricos com um anel de inteiros R e um grupo de classes G, o número $D(G)$ é definido como o número máximo de ideais primos, considerando as multiplicidades, que pode ocorrer na decomposição em ideais primos de um elemento irredutível de R. A constante de Davenport, também tem conexão com problemas em teoria dos grafos. Em [4] e [14] podemos ver a definição da constate de Davenport k-baricêntrica juntamente com alguns resultados apresentados que permitem estabelecer números de Ramsey baricêntricos para grafos estrelas.

Determinar $D(G)$ é um dos problemas diretos denominados problemas de soma zero em grupos finitos. Nos últimos anos, intensificaram-se os estudos desses problemas por pesquisadores da área.

1.2.1 Limite Superior e Igualdade para C_n

Apresentamos agora um limite superior para a constante de Davenport de um grupo abeliano finito. Em seguida, como consequência disso, temos o resultado do valor da invariante para um grupo cíclico C_n.

Teorema 1.1. *Seja G um grupo abeliano finito. Então $D(G) \leq |G|$.*

Demonstração. Vamos provar que qualquer sequência sobre G de tamanho $|G|$ possui subsequência com soma zero.

Sejam $S = g_1 g_2 g_3 \cdots g_m$ uma sequência sobre G e $|G| = m$.
Considere as m somas:

$$\begin{cases} g_1 \\ g_1 + g_2 \\ \vdots \\ g_1 + g_2 + \cdots + g_m \end{cases}$$

Se essas m somas são todas distintas, então elas nos fornecem todos os m elementos de G e assim, uma delas é igual a zero.

Caso contrário, existem $1 \leq \ell < k \leq m$ tais que

$$g_1 + \cdots + g_\ell = g_1 + \cdots + g_\ell + g_{\ell+1} + \cdots + g_k$$

$$\Rightarrow \; g_{\ell+1} + \cdots + g_k = 0.$$

□

Corolário 1.2. *Temos $D(C_n) = n$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1, temos $D(C_n) \leq n$. Agora, seja S uma sequência sobre C_n da seguinte forma,

$$S = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{\text{n-1 vezes}}.$$

Observe que S não possui subsequências com soma zero. Logo, $D(C_n) = n$.

□

Exemplo 1.3. *Tomemos $n = 6$ e a seguinte sequência de 7 elementos sobre o grupo abeliano finito $\mathbb{Z}_6$,*

$$S = 1, 1, 2, 3, 5, 4, 2.$$

***Pergunta**: Quantas subsequências de S, com soma zero, conseguimos?*

As subsequências,

$$T_1 = 1, 1, 2, 2 \qquad T_2 = 1, 1, 4$$
$$T_3 = 1, 2, 3 \qquad T_4 = 1, 2, 3$$
$$T_5 = 1, 5 \qquad T_6 = 1, 5$$

possuem soma $0 \pmod 6$.

Podemos observar que existem outras subsequências com soma zero, além dessas, e que a quantidade de subsequências de S com soma zero é maior que $2^{7-6+1} = 2^2 = 4$. E de fato, Olson em [11], mostrou que a quantidade procurada, dessas subsequências de uma sequência S sobre um grupo abeliano finito $\mathbb{Z}_n$, é maior ou igual a $2^{|S|-n+1}$, onde n é o valor da constante de Davenport do grupo $\mathbb{Z}_n$.

1.2.2 A Constante de Davenport para p-grupos

Nessa e na próxima subseção, excepcionalmente, iremos considerar a notação multiplicativa para os grupos abelianos finitos. O que foi feito, em ambas, foi baseado em [2], [11], [12] e [13].

Antes de começarmos o estudo da constante de Davenport para p-grupos, iremos definir a ordem de um elemento de um grupo e um p-grupo.

Definição 1.4. *Sejam G um grupo abeliano finito e $g \in G$. Definimos a ordem de um elemento g de um grupo G como o menor inteiro positivo n tal que $g^n = e$, sendo e o elemento neutro do grupo. Denotamos a ordem de um elemento g de um grupo G por $o(g)$.*

Definição 1.5. *Seja G um grupo. G é chamado p-grupo se $o(g_i) = p^{\alpha_i}$, para todo $g_i \in G$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ e p é um número primo.*

Para os próximos resultados precisaremos recordar o conceito de anel de grupo, mais precisamente do anel de grupo $\mathbb{Z}(G)$.

Seja G um grupo abeliano, $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros, consideraremos o conjunto $\mathbb{Z}(G)$ de todas as somas

$$\sum_{g \in G} b_g g,$$

onde $b_g \in \mathbb{Z}$ e a quantidade de $b_g \neq 0$ é finita. As operações de adição e multiplicação são definidas neste conjunto da seguinte forma:

1. $\displaystyle\sum_{g\in G} b_g g + \sum_{g\in G} c_g g = \sum_{g\in G}(b_g + c_g)g;$

2. $\displaystyle\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} c_g g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{yz=g} b_y\cdot c_z\right) g.$

Observe que $(\mathbb{Z}(G), +, \cdot)$ é um anel com elemento identidade $1_{\mathbb{Z}}1_G$, denotado por 1. Este anel é chamado de anel de grupo de G sobre $\mathbb{Z}$. Observe que $\mathbb{Z}(G)$ é comutativo, pois G é grupo abeliano e o anel $\mathbb{Z}$ é comutativo.

A partir de agora, nesta subseção, iremos considerar G um p-grupo abeliano finito (p um inteiro positivo primo), ou seja, $G \cong C_{p^{\alpha_1}} \times C_{p^{\alpha_2}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_r}}$ com $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_r$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, para todo $i \in [r]$.

Antes de mostrarmos o teorema central desta subseção, iremos ver alguns resultados auxiliares.

Teorema 1.6. *Sejam $g_1, \ldots, g_k \in G$, onde $k \geq 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i} - 1)$. Então*

$$\prod_{i=1}^{k}(1 - g_i) = (1 - g_1)\cdots(1 - g_k) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Sejam $J = \prod_{i=1}^{k}(1 - g_i) \in \mathbb{Z}(G)$, $x_i \in G$ e $C_{p^{\alpha_i}} \cong \langle x_i\rangle$, para todo $i \in [r]$. Supondo $g_i = u \cdot v$, para algum $i \in [k]$, então podemos escrever J da seguinte forma:

$$J = \left(\prod_{j=1}^{i-1}(1 - g_j)\right)\cdot(1 - u)\cdot\prod_{j=i+1}^{k}(1 - g_j) + u\cdot\left(\prod_{j=1}^{i-1}(1 - g_j)\right)\cdot(1 - v)\cdot\prod_{j=i+1}^{k}(1 - g_j).$$

Como cada g_i pode ser escrito como $g_i = x_1^{n_{i1}}\cdots x_r^{n_{ir}}$, $n_{ij} \in \mathbb{N}$, para todos $i \in [k]$ e $j \in [r]$, podemos reescrever J como combinação linear de $\prod_{i=1}^{r}(1 - x_i)^{f_i}$, com coeficientes em $\mathbb{Z}(G)$, $f_i \in \mathbb{N}_0$ e $\sum_{i=1}^{r} f_i = k$.

Desse modo, como $k \geq \sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i} - 1) + 1$, segue que $f_i \geq p^{\alpha_i}$, para algum $i \in [r]$. Para tal f_i, temos

$$(1 - x_i)^{p^{\alpha_i}} \equiv 1 - x_i^{p^{\alpha_i}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Logo, $J \equiv 0 \pmod{p}$. □

A proposição a seguir nos fornece uma cota inferior para a constante de Davenport $D(G)$ para p-grupos.

Proposição 1.7. *Seja* $G = C_{p^{\alpha_1}} \times C_{p^{\alpha_2}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_r}}$. *Então* $D(G) \geq 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i} - 1)$.

Demonstração. Basta provarmos que existe uma sequência de tamanho $\sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i} - 1)$ que não possui subsequência com produto 1, lembrando que nesta subseção G está sendo considerado com a notação multiplicativa. De fato, sejam $x_i \in G, C_{p^{\alpha_i}} = \langle x_i \rangle$, para todo $i \in [r]$, e a sequência

$$S = x_1^{p^{\alpha_1}-1} \cdots x_r^{p^{\alpha_r}-1} \in \mathcal{F}(G).$$

Observamos que S não possui subsequência com produto 1, pois $x_i^{a_i} \neq 1$, para qualquer $1 \leq a_i \leq p^{\alpha_i} - 1$ e $\langle x_i \rangle \cap \langle x_j \rangle = 1 \in G$, para $i \neq j$.

$\square$

Relembraremos agora a definição do ℓ-ésimo polinômio simétrico no anel de polinômios $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$. Para cada $\ell \in [k]$ definimos:

$$\begin{aligned}
p_1(x_1, \ldots, x_k) &= x_1 + \cdots + x_k \\
p_2(x_1, \ldots, x_k) &= x_1 x_2 + \cdots + x_{k-1} x_k \\
&\vdots \\
p_\ell(x_1, \ldots, x_k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq k} \prod_{j=1}^{\ell} x_{i_j} \\
&\vdots \\
p_k(x_1, \ldots, x_k) &= \prod_{j=1}^{k} x_j.
\end{aligned}$$

Agora vamos definir $A(\ell)$, para cada $\ell \in [k]$, sendo a soma formal dos produtos de todas as subsequências de $S = \prod_{i=1}^{k} g_i \in \mathcal{F}(G)$ com tamanho igual a ℓ. Dessa forma, $A(\ell) = p_\ell(g_1, \ldots, g_k) \in \mathbb{Z}(G)$.

A seguir apresentaremos o teorema central desta subseção, que nos diz o valor da invariante em questão para um p-grupo.

Teorema 1.8. *Se* G *é um* p*-grupo abeliano finito, ou seja,* $G \cong C_{p^{\alpha_1}} \times C_{p^{\alpha_2}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_r}}$ *com* $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_r$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. *Então* $D(G) = \sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i} - 1) + 1$.

Demonstração. Pela Proposição 1.7, temos $D(G) \geq \sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i} - 1) + 1$. Resta então provarmos a desigualdade contrária, $D(G) \leq \sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i}-1)+1$, ou seja, que se $|S| \geq \sum_{i=1}^{r}(p^{\alpha_i}-1)+1$, com $S \in \mathcal{F}(G)$, então S possui uma subsequência T com produto igual a 1 (recordamos mais uma vez, que G está sendo considerado com a notação multiplicativa, e por isso, subsequência com produto 1).

Vamos definir, para $g \in G$ e $S = \prod_{i=1}^{k} g_i \in \mathcal{F}(G)$, $E(g)$ como o número de subsequências de S com tamanho par e produto g e $O(g)$ como o número de subsequências de S com tamanho ímpar, cujo produto também é g.

A Equação (1.1) do Teorema 1.6 nos dá

$$E(g) - O(g) = \begin{cases} 0 \pmod p, & se\ g \neq 1 \\ -1 \pmod p, & se\ g = 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

pois, se considerarmos $A(0) = 1 \in \mathbb{Z}(G)$, e para $\ell \in [k]$, $A(\ell) = p_\ell(g_1, \ldots, g_k) \in \mathbb{Z}(G)$, temos

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}(1 - g_i) &= \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell A(\ell) \\ &= 1 \cdot A(0) + \sum_{g \in G}(E(g) - O(g))g \\ &= (1 + E(1) - O(1)) \cdot 1 + \sum_{g \in G,\ g \neq 1}(E(g) - O(g))g.\end{aligned}$$

Desse modo, se o produto de uma subsequência de comprimento par for igual a $g \neq 1$, deve existir uma subsequência de comprimento ímpar cujo produto é $g \neq 1$ para que as duas se cancelem, e vice-versa, pois o produto das subsequências de comprimento ímpar aparecem negativas no produtório $\prod_{i=1}^{k}(1 - g_i)$ e as de comprimento par aparecem positivas. $E(g)$ pode ser diferente de $O(g)$ apenas se a diferença for um múltiplo de p, devido a congruência módulo p que anula o termo pg. Agora, para $g = 1$ deve existir uma subsequência de comprimento ímpar cujo produto é 1, para anular o termo 1 que aparece no produtório $\prod_{i=1}^{k}(1 - g_i)$. Dessa forma, segue que S tem subsequência com produto 1. Caso contrário, teríamos que S não possui subsequência com tamanho par ou ímpar e produto 1, ou seja, $E(1) = O(1) = 0$, $0 = E(1) - O(1) \equiv -1 \pmod p$, uma contradição. Portanto, está provado o teorema.

□

1.2.3 A Constante de Davenport para $C_m \times C_n$

Na subseção anterior determinamos $D(G)$ para o caso em que G é um p-grupo. Agora, vamos determinar $D(G)$ para o caso em que G é o produto direto de 2 grupos cíclicos.

Lema 1.9. *Seja $E = C_p^2$, p primo. Se $S = \prod_{i=1}^{k} g_i \in \mathcal{F}(E)$ e $k \geq 3p-2$, então S tem uma subsequência com tamanho t, $1 \leq t \leq p$, tal que $g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{i_t} = 1$.*

Demonstração. Sejam $F = C_p^3$, $1 = (1,1,1)$ a identidade de F, x um gerador de C_p e $E = C_p^2 \times \{1\}$ sendo um subgrupo de F.

Pelo Teorema 1.8, $D(F) = 3p-2$, e como $k \geq 3p-2$, então alguma subsequência com tamanho $t \leq 3p-2$ de $T = \prod_{i=1}^{k}(g_i, x) \in \mathcal{F}(F)$, $g_i \in E$, tem produto 1, digamos $T_1 = \prod_{i=1}^{t}(g_i, x)$.

Como T_1 tem produto 1, temos que $(g_1g_2\cdots g_t, x^t) = 1$. Então $p \mid t$, daí $|T_1| \in \{p, 2p\}$.

Se $|T_1| = p$, $U = \prod_{i=1}^{t} g_i$ é a subsequência procurada.

Agora, se $|T_1| = 2p$, como $D(E) = 1 + 2(p-1) = 1 + 2p - 2 = 2p - 1$, segue que $U = \prod_{i=1}^{t} g_i$ tem uma subsequência com tamanho $u \leq 2p-1$ e produto igual a 1, digamos que seja a subsequência $U_1 = \prod_{i=1}^{u} g_i$. Se $u \leq p$, o lema está provado. Caso contrário, temos $2p - u < p$ e a subsequência $U_2 = \prod_{i=u+1}^{2p} g_i$ satisfaz o resultado do lema. □

Teorema 1.10. *Seja $G = H \times K$ o produto direto dos grupos abelianos H e K de ordens $|H| = h$ e $|K| = k$, onde $h \mid k$. Então $D(G) \leq h + k - 1$.*

Demonstração. Seja $S = \prod_{i=1}^{s} g_i \in \mathcal{F}(G)$, onde $s \geq h + k - 1$. Iremos proceder por indução finita sobre h.

Seja $h = 1$. Escreva os produtos parciais $\Pi_j = \prod_{i=1}^{j} g_i$, para todo $j \in [k]$. Se tais produtos são distintos, como $G \cong K$, segue que $\Pi_j = 1$, para algum $j \in [k]$, e o resultado segue. Caso contrário, temos $\Pi_i = \Pi_j$, para alguns $i, j \in [k]$, com $i < j$. Então, usando a lei do cancelamento, a subsequência $T = \prod_{\ell=i+1}^{j} g_\ell$ tem produto igual a 1.

Agora assuma $h > 1$ e seja p um primo divisor de h.

Sejam H_1, com $|H_1| = h_1$, um subgrupo de H, K_1, com $|K_1| = k_1$ um subgrupo de K, com índices $[H : H_1] = [K : K_1] = p$.

Considere o grupo $Q = H_1 \times K_1$, com $|Q| < |G|$. Por hipótese de indução o teorema é válido para este grupo Q. Sabemos que $G/Q \cong C_p \times C_p$ e $s \geq h + k - 1$, ou seja, $s \geq p(h_1 + k_1 - 2) + 2p - 1$. Se $h_1 = k_1 = 1$ então $D(G) = D(C_p^2) = 2p - 1$ e, pelo Teorema 1.8, o resultado está provado.

Agora, suponhamos que $h_1 \geq 1$ e $k_1 \geq 2$. Consideramos a seguinte sequência em $\mathcal{F}(G/Q)$, $T = \prod_{i=1}^{s}(g_i \cdot Q)$. Como $s \geq p \cdot (h_1 + k_1 - 2) + 2p - 1 \geq 3p - 1$, pelo Lema 1.9, a sequência T tem uma subsequência T_1 com tamanho t, $1 \leq t \leq p$, e produto $Q \in G/Q$. Podemos aplicar o Lema 1.9 a sequência TT_1^{-1}, para obtermos mais uma subsequência T_2, se $h_1 + h_1 \geq 4$, com tamanho t, $1 \leq t \leq p$ e produto Q. Continuando este processo, construimos $u - 1 = h_1 + k_1 - 2$ subsequências duas a duas disjuntas, $T_1, \ldots, T_{u-1}$, com tamanhos $|T_j| \in [p]$, para todo $j \in [u-1]$, e cada produto é igual à classe Q, isto é, $\pi(S_j) = q_j \in Q$, sendo que S_j é a sequência formada pelos g_i que aparecem em T_j. Resta uma sequência de tamanho pelo menos $2p - 1$. Logo, pelo Teorema 1.8 ela possui uma subsequência T_u disjunta das obtidas anteriormente, com produto Q, isto é, $\pi(S_u) = q_u \in Q$.

Como $D(Q) \leq h_1 + k_1 - 1$, por hipótese de indução, então a sequência $\prod_{j=1}^{u} q_j \in \mathcal{F}(Q)$ tem uma subsequência $\prod_{i \in I} q_i$, $I \subset [u]$, com produto igual a $1 \in Q$. Logo, S tem a subsequência $\prod_{i \in I} \prod_{g \in S_i} g \in \mathcal{F}(G)$, com produto igual a 1.

Portanto, o teorema está provado. □

Os resultados auxiliares provados acima nos fornecem a constante de Davenport para o produto direto de dois grupos cíclicos, C_m e C_n com $m|n$, como podemos ver no seguinte corolário.

Corolário 1.11. *Seja $G = C_m \times C_n$ o produto direto dos grupos cíclicos C_m e C_n de ordens m e n onde $m|n$. Então, $D(G) = m + n - 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.10 temos $D(G) \leq m + n - 1$. Então basta mostrar que $D(G) \geq m + n - 1$. Para isto, iremos contruir uma sequência de tamanho $m + n - 2$ que não possui subsequência com produto 1.

Sejam $(x, 1), (1, y) \in G$ tais que $C_m \cong \langle (x, 1) \rangle$, $C_n \cong \langle (1, y) \rangle$. Seja a sequência $S = \prod_{i=1}^{m-1}(x, 1) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(1, y)$. Suponha que exista uma subsequência de S com produto 1. Então, ela seria da forma

$$U = \prod_{j=1}^{r}(x, 1) \cdot \prod_{j=1}^{s}(1, y), \text{ com } r \leq m - 1, s \leq n - 1, \pi(U) = 1,$$

então $1 = (x^r, y^s)$. Daí $r = 0$ e $s = 0$, uma contradição. Portanto, $D(G) = m + n - 1$.

□

A partir de agora, voltaremos a considerar os grupos abelianos finitos com a notação aditiva.

1.3 Definições para Somas com Peso

Seja G um grupo abeliano finito de expoente n. Para uma sequência $S = \prod_{i=1}^{m} g_i \in \mathcal{F}(G)$, onde $\mathcal{F}(G)$ é o monóide abeliano com base G, definimos a soma dos elementos de S com peso em A por $\sigma^{\mathbf{a}}(S) = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i$, com $\mathbf{a} = a_1 \cdots a_m \in \mathcal{F}(A)$ fixo, onde $\mathcal{F}(A)$ é o monóide abeliano com base A. Quando $A = [n-1]$, chamamos S uma sequência totalmente ponderada. Uma sequência vazia é denotada por λ e sua soma é $\sigma^{\mathbf{a}}(\lambda) = 0$ por convenção, para qualquer escolha de pesos, isto é, qualquer $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(A)$.

Formalmente uma sequência S é chamada sequência de A-soma zero se $\sigma^{\mathbf{a}}(S) = 0$, para algum $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(A)$, uma sequência é livre de A-soma zero se $0 \notin \sum_A(S)$ e uma sequência é minimal de soma zero se $S \neq \lambda$, $\sigma(S) = 0$, e cada $T|S$ com $1 \leq |T| < |S|$ é livre de soma zero. Uma subsequência T de S é chamada subsequência maximal livre de A-soma zero se T é uma subsequência de tamanho máximo tal que T é livre de A-soma zero.

Definimos o conjunto de todas as somas com peso em A, sem contar a subsequência vazia, de uma sequência S por $\sum_A(S) = \left\{ \sum_{i \in I} a_i g_i : \varnothing \neq I \subseteq [m], a_i \in A \right\}$ e $\sum_A^{\bullet}(S) = \sum_A(S) \cup \{0\}$ é o conjunto de todas as somas com peso em A de todas as subsequências de S, inclusive a vazia.

A constante de Davenport com peso em A de um grupo abeliano finito G, denotada por $D_A(G)$, é o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência S sobre G de comprimento $|S| \geq \ell$ possui uma subsequência não vazia de soma zero com peso em A.

Sejam n o expoente de G, $g \in G$, $A \subseteq \mathbb{Z} - \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$ e $S \in \mathcal{F}(G)$. Dizemos que S é uma sequência g-completa com peso em A se $N_{A,g}(S) \geq 2^{|S| - D_A(G) + 1}$. Chamamos S uma sequência g-completa extrema em relação a A se $N_{A,g}(S) = 2^{|S| - D_A(G) + 1}$. Vamos denotar por $C_{A,g}(\mathcal{F}(G))$ o conjunto de todas as sequências g-completas em relação a A e $EC_{A,g}(\mathcal{F}(G))$ o conjunto de todas as sequências g-completas extremas em relação a A. Dizemos que G é um grupo 0-completo em relação a A se $\mathcal{F}(G) = C_{A,0}(\mathcal{F}(G))$.

1.4 Constante de Davenport com Peso

Uma generalização da constante de Davenport foi recentemente introduzida por Adhikari e Chen [1]. Para um subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$ eles definiram a constante de Davenport com peso em A, como definida anteriormente. Até o momento do estudo dessa dissertação, nenhuma interpretação aritmética para essa invariante em questão era conhecida.

1.4.1 A Constante de Davenport com Peso Completo

A seguir apresentaremos um exemplo sobre uma sequência em C_3^r e sua quantidade de subsequências com A-soma zero. Este exemplo é uma motivação para nosso estudo e teorema abordado posteriormente a respeito do valor da invariante em questão.

Uma família finita de elementos não nulos $(e_1, \ldots, e_s)$ de G é chamada linearmente independente (L.I.) se $\sum_{i=1}^{s} a_i e_i = 0$ com $a_i \in \mathbb{Z}$ implica em $a_i e_i = 0$ para cada i, caso contrário dizemos que tal família é linearmente dependente (L.D.).

Exemplo 1.12. *Vamos considerar o grupo $\mathbb{F}_3^r$, que sabemos ser um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_3$ de dimensão r. Logo, qualquer conjunto com $r+1$ elementos é linearmente dependente em $\mathbb{F}_3^r$. Agora, vamos pensar na seguinte pergunta: qual é a quantidade mínima de subsequências, de uma sequência S sobre $\mathbb{F}_3^r$, com A-soma zero, onde $A = \{1, -1\}$?*

Considere $|S| = r + \ell$ e T, de tamanho máximo em $\mathbb{F}_3^r$, uma subsequência de S linearmente independente, isto é, $|T| \leq r$. Assim, temos $|ST^{-1}| = r + \ell - |T|$. Notemos que o pior caso é quando $|T| = r$. Então, vamos investigar este caso. Sejam $T = g_1 \cdots g_r$ e $ST^{-1} = h_{r+1} \cdots h_{r+\ell}$. A cada h_i, $i \in [r+1, r+\ell]$, acrescentado a T, temos um conjunto L.D. e conseguimos extrair uma subsequência com A-soma zero. Podemos fazer isso para todos $h_i, i \in [r+1, r+\ell]$, e assim, obtemos ℓ subsequências com A-soma zero. Somando essas ℓ subsequências 2 a 2, 3 a 3, até ℓ a ℓ, obtemos pelo menos 2^ℓ subsequências distintas de S com A-soma zero, com $A = \{1, -1\}$.

Lema 1.13. *Seja $G = H \oplus C_n^r$, onde $H = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots \oplus C_{n_k}$ com $1 < n_1 | n_2 | \ldots | n_k | n = \exp(G)$ e $n_k < n$. Então, $D_A(G) = r + 1$, com $A = [n-1]$.*

Demonstração. Seja $S = \prod_{i=1}^{r} e_{k+i} \in \mathcal{F}(G)$, onde $e_{k+i} = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ onde 1 aparece na $(k+i)$-ésima coordenada. Note que $o(e_{k+i}) = n$, para todo $i \in [r]$. Logo, S é livre de A-soma zero, ou seja, $D_A(G) \geq |S| + 1 = r + 1$.

Agora, seja $S \in \mathcal{F}(G)$ tal que $|S| = r + 1$.

Se $g|S$ é tal que as últimas r coordenadas de g são iguais a zero, então existe $a \in A$ tal que $ag = 0$ e g é uma subsequência com A-soma zero de S, pois $n_i \in A$, para todo $i \in [k]$.

Assim, podemos supor que qualquer $g|S$ possui coordenadas não nulas em suas r últimas coordenadas. Note que os $r + 1$ elementos em S são todos distintos, pois caso contrário, teríamos $g_i|S$ e $g_\ell|S$, com $g_i = g_\ell$ e $i \neq \ell$, uma subsequência com A-soma zero de S de comprimento 2, tomando pesos $a_i = 1$ e $a_\ell = n - 1$. Assim, supondo que S não possui subsequência com A-soma zero podemos concluir que $supp(S)$ é um conjunto L.I.. Mas, disso temos $\langle supp(S) \rangle = K \cong C_n^{r+1}$ e claro $K \leq G$, uma contradição, pois $G = H \oplus C_n^r$ e $\exp(H) < n$, portanto, K não pode ser subgrupo de G. Note que o isomorfismo $K \cong C_n^{r+1}$ acontece pois, $S = x_1 \cdots x_{r+1}$ e cada elemento x_i, $i \in [r+1]$, de S, gera um subgrupo H_i de G isomorfo a C_n. Consequentemente, o conjunto $supp(S)$ gera o grupo $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_{r+1}$ que é isomorfo a C_n^{r+1}.

Logo, $supp(S)$ é L.D. e, portanto, existem $\varnothing \neq J \subseteq [r]$ e $a_j \in A$, para todo $j \in J$, tais que $\sum_{j \in J} a_j g_j = 0$ em G, ou seja, a sequência $T = \prod_{j \in J} g_j$ é uma subsequência com A-soma zero de S.

$\square$

A partir de agora sempre escreveremos o grupo abeliano finito G como soma direta $G = H \oplus C_n^r$, onde C_n^r denota r cópias do grupo cíclico C_n e $H = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots \oplus C_{n_t}$ com $1 < n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_t \mid n = \exp(G)$ e $n_t < n$.

Para um subconjunto A de um grupo abeliano e um número inteiro d, vamos definir dA sendo o conjunto $dA = \{da : a \in A\}$. Definimos também o *mdc* de um conjunto A, denotado por $mdc(A)$, como o máximo divisor comum de todos os elementos de A.

Lema 1.14. *Seja G um grupo abeliano finito com expoente n. Seja $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não vazio, e d um divisor do expoente de G. Então $D_{dA}(G) = D_A(dG)$.*

Demonstração. Seja $m_d : G \to G$ dada por $m_d(g) = dg$ um homomorfismo com imagem dG.

Primeiramente, seja $S \in \mathcal{F}(dG)$ de comprimento $D_{dA}(G)$. Precisamos mostrar que $0 \in \sum_A (S)$.

Seja $S' \in \mathcal{F}(G)$ uma sequência tal que $m_d(S') = S$.

Pela definição de $D_{dA}(G)$, temos que existem uma subsequência $g'_1 \cdots g'_t | S'$ e uma sequência de pesos $a'_1, \ldots, a'_t \in dA$ tais que $\sum_{i=1}^{t} a'_i g'_i = 0$. Pela definição de dA sabemos que cada $a'_i = da_i$, para algum $a_i \in A$. Como,

$$\sum_{i=1}^{t} a'_i g'_i = \sum_{i=1}^{t} da_i g'_i = \sum_{i=1}^{t} a_i m_d(g'_i)$$

e como $m_d(g'_1) \cdots m_d(g'_t)$ é uma subsequência de S, mostramos que $0 \in \sum_A (S)$.

Agora, inversamente, seja $S' \in \mathcal{F}(G)$ de tamanho $D_A(dG)$. A sequência $S = m_d(S')$ é uma sequência sobre dG e pela condição de seu comprimento sabemos que há uma subsequência $g_1 \cdots g_t | S$ e pesos $a_1, \ldots, a_t \in A$ tais que $\sum_{i=1}^{t} a_i g_i = 0$.

Seja $g'_1 \cdots g'_t | S'$ uma subsequência tal que $m_d(g'_i) = g_i$, para cada $i \in [t]$. Denotando $a'_i = da_i$, temos

$$\sum_{i=1}^{t} a'_i g'_i = \sum_{i=1}^{t} da_i g'_i = \sum_{i=1}^{t} a_i g_i = 0$$

e, então, $0 \in \sum_{dA} (S')$, completando o argumento. $\square$

Proposição 1.15. *Seja G um grupo abeliano finito com expoente n, $A \subseteq [n-1]$ um subconjunto não vazio e $b \in \mathbb{N}$. Então, $D_{bA}(G) = D_A(mdc(b, \exp(G))G)$.*

Demonstração. Sejam $n = exp(G)$ e $A \subseteq [n-1]$. Seja $b \in \mathbb{N}$ tal que $d = mdc(b, n)$. Assim, existe $b_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b = db_1$ e claro, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $xn + yb = d$.

Agora, seja $S = \prod_{i=1}^{k} g_i \in \mathcal{F}(G)$ uma sequência de dA-soma zero, isto é, existem $da_1, \ldots, da_k \in dA$ tais que $\sum_{i=1}^{k}(da_i)g_i = 0$ em G. Logo, $b\sum_{i=1}^{k} a_i g_i = b_1 \sum_{i=1}^{k}(da_i)g_i = 0$. Reciprocamente, se S é bA-soma zero, então existem $bc_1, \ldots, bc_k \in bA$ tais que $\sum_{i=1}^{k}(bc_i)g_i = 0$ em G. Mas, $(xn+yb)\sum_{i=1}^{k} c_i g_i = d\sum_{i=1}^{k} c_i g_i = \sum_{i=1}^{k}(dc_i)g_i$. Por outro lado, $(xn+yb)\sum_{i=1}^{k} c_i g_i = y\sum_{i=1}^{n}(bc_i)g_i = y \cdot 0 = 0$ em G. Assim, $\sum_{i=1}^{k}(dc_i)g_i = 0$ em G. Logo, $D_{bA}(G) = D_{dA}(G)$.

□

Corolário 1.16. *Seja G um grupo abeliano finito com expoente n e $A \subset [n-1]$ um subconjunto não vazio, tal que a imagem de $A \cup \{0\}$ em $\mathbb{Z}_n$ é um subgrupo próprio de $\mathbb{Z}_n$. Então, $D_A(G) = D_{A'}(dG)$, onde $A = dA'$ e $A' \cup \{0\} \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$.*

Demonstração. Como $A \cup \{0\}$ é um subgrupo próprio de $\mathbb{Z}_n$, então existe $d \in \mathbb{Z}_n$ tal que a imagem de $A \cup \{0\}$ em $\mathbb{Z}_n$ é $\langle d \rangle$ e d é mínimo com essa propriedade.

Agora, aplicamos o Lema 1.14 com $b = d$ e obtemos $D_A(G) = D_{A'}(dG)$, onde $A = dA'$.

Como $d\mathbb{Z}_{\frac{n}{d}} = d\{0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{d} - 1\} \cong \langle d \rangle = A \cup \{0\} = d(A' \cup \{0\})$, então $A' \cup \{0\} \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$.

□

Podemos observar, que como consequência dos resultados apresentados, é suficiente considerar conjuntos de pesos A, com $mdc(A) = 1$. Suponhamos que A seja um conjunto de pesos e seja $mdc(A) = d$. Escrevendo $A = dA'$, com $mdc(A') = 1$, temos que $D_A(G) = D_{dA'}(G) = D_{A'}(mdc(d, \exp(G))G)$. Dessa forma, determinar $D_A(G)$, para qualquer A, é equivalente a determinar $D_{A'}(H)$, para algum conjunto A' tal que $mdc(A') = 1$ e um outro grupo H.

Capítulo 2

Resultados com peso $A = \{1\}$

Os resultados aqui apresentados foram baseados em [1], [5], [6], [11] e [12].

2.1 $N_g(S)$ e seu Limite Inferior

Para cada $g \in G$, denotamos por $N_g(S)$ o número de subsequências $T = \prod_{i \in I_T} g_i$, de $S = \prod_{i=1}^{m} g_i$, tais que $\sum_{i \in I_T} g_i = g$, onde $\varnothing \neq I_T \subseteq [m]$, ou seja, $N_g(S) = |\{T : T|S \text{ e } \sigma(T) = g)\}|$.

Vamos observar que para $g = 0$ sempre teremos $N_0(S) \geq 1$. De fato, para qualquer sequência S sempre temos a subsequência vazia, λ, e sabemos que $\sigma(\lambda) = 0$.

Teorema 2.1. *Se S é uma sequência sobre um grupo abeliano finito G e $g \in \sum^{\bullet}(S)$, então $N_g(S) \geq 2^{|S|-D(G)+1}$.*

Demonstração. Vamos provar por indução sobre $m = |S|$.

No caso em que $m \leq D(G) - 1$, temos:

- para $m = D(G) - 1$, temos $2^{D(G)-1-D(G)+1} = 2^0 = 1$ e
- para $m < D(G) - 1$, temos $2^{m-D(G)+1} = 2^{m-(D(G)-1)} < 1$.

Observe que teremos então, um número entre 0 e 1. Como $N_g(S) \geq 1$, da hipótese, vale que $N_g(S) \geq 2^{m-D(G)+1}$, para $m \leq D(G) - 1$.

Agora vamos considerar o caso em que $m \geq D(G)$.

Escolha uma subsequência $T|S$ de comprimento minimal com $\sigma(T) = g$, e uma subsequência não vazia de soma zero $W|T(-(ST^{-1}))$. Note que, $|T(-(ST^{-1}))| = m \geq D(G)$ e isso garante a existência da subsequência W.

Da minimalidade de $|T|$, W não é uma subsequência de T, caso contrário, a subsequência TW^{-1} seria uma subsequência de S, com tamanho menor que o tamanho de T, com $\sigma(TW^{-1}) = \sigma(T) - \sigma(W) = g - 0 = g$.

Escolha um termo $a|W$ com $a \nmid T$, e seja $X = mdc(W, T)$.

Como $W|T(-(ST^{-1}))$, $a|W$ e $a \nmid T$, então

$$a|(-(ST^{-1})) \Rightarrow -a|ST^{-1}$$

$$\Rightarrow -a \nmid T \Rightarrow g = \sigma(T) \in \sum\nolimits^{\bullet}(S(-a)^{-1})$$

e,

$$\begin{aligned} g + a &= \sigma(T) - (\sigma(W) - a) \\ &= \sigma(T) - \sigma(X) - (\sigma(W) - \sigma(X) - a) \\ &= \sigma(TX^{-1}(-(W(Xa)^{-1})) \in \sum\nolimits^{\bullet}(S(-a)^{-1}). \end{aligned}$$

As contas acima, mostram que $N_g(S(-a)^{-1}) \geq 1$ e $N_{g+a}(S(-a)^{-1})$. Assim, pela hipótese de indução, temos $N_g(S(-a)^{-1}) \geq 2^{m-1-D(G)+1}$ e $N_{g+a}(S(-a)^{-1}) \geq 2^{m-1-D(G)+1}$.

O número de subsequências T de S tais que $\sigma(T) = g$, ou seja, $N_g(S)$, pode ser representado como a quantidade de elementos do conjunto $\{T|S : \sigma(T) = g\}$, que por sua vez pode ser escrito como a seguinte soma

$$\{T|S : \sigma(T) = g\} = \{T|S : \sigma(T) = g, (-a) \nmid T\} \;\dot{\cup}\; \{T|S : \sigma(T) = g, (-a)|T\},$$

onde $\dot{\cup}$ representa a união disjunta.

Observe que,

$$\{T|S : \sigma(T) = g, (-a) \nmid T\} = \{T|S(-a)^{-1} : \sigma(T) = g\},$$

sendo o número de elementos desse último conjunto igual a $N_g(S(-a)^{-1})$. Note que há uma bijeção entre os conjuntos $\{T|S : \sigma(T) = g, (-a)|T\}$ e $\{\bar{T}|S(-a)^{-1} : \sigma(\bar{T}) = g + a\}$, pois, $\sigma(T(-a)^{-1}) = \sigma(T) - (-a) = g + a = \sigma(\bar{T})$. Daí, o número de elementos do conjunto $\{T|S : \sigma(T) = g, (-a)|T\}$ é igual a $N_{g+a}(S(-a)^{-1})$.

Logo,

$$\begin{aligned} N_g(S) &= N_g(S(-a)^{-1}) + N_{g+a}(S(-a)^{-1}) \\ &\geq 2^{m-D(G)} + 2^{m-D(G)} = 2^{m-D(G)+1}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *Se S é uma sequência sobre um grupo abeliano finito G, então, para qualquer $T|S$, com $\sigma(T) = g \in \sum^{\bullet}(S)$,*

$$N_g(S) = N_0(T(-(ST^{-1}))).$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{X|S : \sigma(X) = g\}$ e $\mathcal{B} = \{Y|T(-(ST^{-1})) : \sigma(Y) = 0\}$. É claro que $|\mathcal{A}| = N_g(S)$ e $|\mathcal{B}| = N_0(T(-(ST^{-1})))$.

Defina a função $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ por $\phi(X) = TX_1^{-1}(-X_2)$, para qualquer $X \in \mathcal{A}$, onde $X_1 = mdc(X, T)$ e $X_2 = mdc(X, ST^{-1})$. Temos que ϕ está bem definida, pois X_1 e X_2 são únicos para cada X escolhida em $\mathcal{A}$ e $\sigma(TX_1^{-1}(-X_2)) = \sigma(T) - \sigma(X_1) - \sigma(X_2) = 0$. Vamos definir também, a função $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ por $\varphi(Y) = TY_1^{-1}(-Y_2)$, para qualquer $Y \in \mathcal{B}$, onde $Y_1 = mdc(T, Y)$ e $Y_2 = mdc(-(ST^{-1}), Y)$. Então $Y = Y_1Y_2$ e $\sigma(TY_1^{-1}(-Y_2)) = \sigma(T) - \sigma(Y_1) - \sigma(Y_2) = g$, nos garante que φ está bem definida.

Podemos mostrar que ϕ e φ são funções inversas uma da outra. Assim, ϕ é uma bijeção e $N_g(S) = N_0(T(-(ST^{-1})))$.

Temos que, $\varphi \circ \phi(X) = \varphi(TX_1^{-1}(-X_2))$, onde $TX_1^{-1} = mdc(T, Y)$ e $-X_2 = mdc(-(ST^{-1}), Y)$. Logo, $\varphi(TX_1^{-1}(-X_2)) = T(TX_1^{-1})^{-1}(-(-X_2)) = X_1X_2 = X$. Similarmente, $\phi \circ \varphi(Y) = Y$. Logo, $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.

□

Podemos observar no exemplo a seguir que o limite inferior do Teorema 2.1, $N_g(S) \geq 2^{|S|-D(G)+1}$, é o melhor possível.

Exemplo 2.3. *Seja G um grupo abeliano finito. Para qualquer $g \in G$ e qualquer $m \geq D(G) - 1$, construímos a sequência S sobre G, a qual é extrema com respeito a $g \in G$ e é de comprimento m.*

Tomemos uma sequência U sobre G livre de soma zero tal que $|U| = D(G) - 1$. O fato de pegarmos U com tamanho menor que a constante de Davenport garante sua existência. Como tomamos U livre de soma zero, U contém uma subsequência T com $\sigma(T) = g$ e $g \neq 0$.

Para $S = T(-(UT^{-1}))0^{m-D(G)+1}$, pelo Lema 2.2,

$$N_g(S) = N_0(U0^{m-D(G)+1}) = 2^{m-D(G)+1}.$$

Observe que as únicas subsequências com soma zero em $U0^{m-D(G)+1}$ são as subsequências de $0^{m-D(G)+1}$ (pois U é livre de soma zero) que serão exatamente $2^{m-D(G)+1}$. Então vale $N_0(U0^{m-D(G)+1}) = 2^{m-D(G)+1}$.

Já a igualdade $N_g(S) = N_0(U0^{m-D(G)+1})$ pode ser obtida através do Lema 2.2, que nos dá que $N_g(S) = N_0(T(-(ST^{-1})))$. Mas temos, $S = T(-(UT^{-1}))0^{m-D(G)+1}$. Então,

$$\begin{aligned} N_g(T(-UT^{-1})))^{m-D(G)+1}) &= N_0(T(-((T(-(UT^{-1}))0^{m-D(G)+1})T^{-1}))) \\ &= N_0(T(UT^{-1})0^{m-D(G)+1}) \\ &= N_0(U0^{m-D(G)+1}). \end{aligned}$$

Proposição 2.4. *Se S é uma sequência sobre um grupo abeliano finito G tal que $N_h(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$, para algum $h \in G$, então $N_g(S) \geq 2^{|S|-D(G)+1}$, para todo $g \in G$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista $g \in G$ tal que $N_g(S) < 2^{|S|-D(G)+1}$.

O número de subsequências T de $S(h-g)$ tais que $\sigma(T) = h$, ou seja, $N_h(S(h-g))$, pode ser representado como a quantidade de elementos do conjunto $\{T|S(h-g) : \sigma(T) = h\}$, que por sua vez pode ser escrito como a seguinte soma

$$\{T|S(h-g) : \sigma(T) = h\} =$$

$$= \{T|S(h-g) : \sigma(T) = h, (h-g) \nmid T\} \ \dot{\cup} \ \{T|S(h-g) : \sigma(T) = h, (h-g)|T\}.$$

Observe que,

$$\{T|S(h-g) : \sigma(T) = h, (h-g) \nmid T\} = \{T|S : \sigma(T) = h\},$$

sendo, o número de elementos desse último conjunto igual a $N_h(S)$. Note que há uma bijeção entre os conjuntos $\{T|S(h-g) : \sigma(T) = h, (h-g)|T\}$ e $\{\bar{T}|S : \sigma(\bar{T}) = g\}$, pois, $\sigma(T(h-g)^{-1}) = \sigma(T) - (h-g) = h - h + g = g = \sigma(\bar{T})$. Daí, o número de elementos do conjunto $\{T|S(h-g) : \sigma(T) = g, (h-g)|T\}$ é igual a $N_g(S)$.

Então,

$$\begin{aligned} N_h(S(h-g)) &= N_h(S) + N_g(S) \\ &< 2^{|S|-D(G)+1} + 2^{|S|-D(G)+1} \\ &= 2^{|S|+1-D(G)+1} \end{aligned}$$

é uma contradição do Teorema 2.1 desde que $h \in \sum^{\bullet}(S) \subseteq \sum^{\bullet}(S(h-g))$, pois deveríamos ter $N_h(S(h-g)) \geq 2^{|S|+1-D(G)+1}$.

$\square$

2.2 Classificação das sequências S para as quais $N_g(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$

Agora vamos classificar as sequências S sobre o grupo cíclico C_n com $0 \nmid S$ e $N_0(S) = 2^{|S|-n+1}$.

Observe que, pelo Lema 2.2, precisamos apenas prestar atenção ao caso $g = 0$. Além disso, como $N_g(0S) = 2N_g(S)$, é suficiente considerar o caso $0 \nmid S$. Lembre-se que $D(C_n) = n$.

Para $|S| \geq D(G) - 1$, definimos o seguinte conjunto

$$E(S) = \{g \in G : N_g(S) = 2^{|S|-D(G)+1}\}.$$

Lema 2.5. *Suponha S uma sequência sobre um grupo abeliano finito G com $0 \nmid S$, $|S| \geq$*

$D(G)$ e $0 \in E(S)$. Se a é um termo de uma subsequência T de S com soma zero, então $E(S) + \{0, -a\} \subseteq E(Sa^{-1})$.

Demonstração. Como $0, -a \in \sum^{\bullet}(Sa^{-1})$, pelo Teorema 2.1, $N_0(Sa^{-1}) \geq 2^{|Sa^{-1}|-D(G)+1} = 2^{(|S|-1)-D(G)+1} = 2^{|S|-D(G)}$ e $N_{-a}(Sa^{-1}) \geq 2^{|S|-D(G)}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2^{|S|-D(G)+1} &= N_0(S) = N_0(Sa^{-1}) + N_{-a}(Sa^{-1}) \\ &\geq 2^{|S|-D(G)} + 2^{|S|-D(G)} = 2^{|S|-D(G)+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$N_0(Sa^{-1}) = 2^{|S|-D(G)} = N_{-a}(Sa^{-1}) \Rightarrow 0, -a \in E(Sa^{-1}),$$

pela definição de $E(Sa^{-1})$.

Portanto, pela Proposição 2.4,

$$N_g(Sa^{-1}) \geq 2^{|S|-D(G)},$$

para todo $g \in G$.

Agora, para cada $h \in E(S)$, e usando o mesmo argumento na prova do Teorema 2.1,

$$\begin{aligned} 2^{|S|-D(G)+1} &= N_h(S) = N_h(Sa^{-1}) + N_{h-a}(Sa^{-1}) \\ &\geq 2^{|S|-D(G)} + 2^{|S|-D(G)} = 2^{|S|-D(G)+1} \end{aligned}$$

e, então,

$$N_h(Sa^{-1}) = 2^{|S|-D(G)} = N_{h-a}(Sa^{-1}) \Rightarrow h, h-a \in E(Sa^{-1}),$$

pela definição de $E(Sa^{-1})$.

Logo, $\{h, h-a\} \subseteq E(Sa^{-1})$.

□

Proposição 2.6. *Seja $G = C_n$, $n \geq 2$. Uma sequência S sobre G, com $|S| = n-1$, é livre de soma zero se, e somente se, $S = g^{n-1}$, onde $\langle g \rangle = C_n$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) É claro que se g é gerador de C_n, então $S = g^{n-1}$ é uma sequência livre de soma zero.

($\Rightarrow$) Seja $S = g_1 g_2 \cdots g_{n-1}$ livre de soma zero. Sem perda de generalidade, suponha $g_1 \neq g_2$.

Seja $L = \{g_1 + \cdots + g_k : k \in [n-1]\}$. Como S é livre de soma zero, segue que $|L| = n-1 = |C_n^*|$ e $g_2 \notin L$, uma contradição.

□

Lema 2.7. *Sejam* $G \cong C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$, *com* $n_1|n_2|\ldots|n_r$, *e* H *um subgrupo de* G. *Então,* $D(G) \geq D(H) + D(G/H) - 1$ *e* $D(G) \geq \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) + 1$.

Demonstração. Seja $S \in \mathcal{F}(H)$ uma sequência de tamanho $D(H)-1$ tal que $0 \notin \sum(S)$. Seja $T \in \mathcal{F}(G)$ uma sequência de tamanho $D(G/H) - 1$ tal que $0 \notin \sum(\phi_H(T))$, onde ϕ_H é o homomorfismo quociente $\phi_H : G \to G/H$.

Afirmamos que $0 \notin \sum(ST)$. De fato, suponha o contrário, ou seja, $0 \in \sum(ST)$. Naturalmente $0 \notin \sum(S)$, por hipótese. Suponha $0 \in \sum(T)$. Então $0 \in \sum(\phi_H(T))$, uma contradição. Portanto, $0 \notin \sum(T)$.

Agora seja a subsequência $U = WX$, onde $W|T$ e $X|S$, com $\sigma(U) = 0$. Ao aplicarmos a função ϕ_H em U, temos $\sigma(\phi_H(U)) = 0$, o que contraria o fato de $\phi_H(T)$ ser livre de soma zero. Logo, $0 \notin \sum(ST)$.

Portanto, $D(G)-1 \geq |S|+|T| = D(H)-1+D(G/H)-1 = D(H)+D(G/H)-2$. □

Teorema 2.8. *Seja* $n \geq 3$ *um inteiro positivo. Se* S *é uma sequência sobre o grupo cíclico* C_n, *com* $0 \nmid S$ *e* $N_0(S) = 2^{|S|-n+1}$, *então*

$$n - 1 \leq |S| \leq n \ e \ S = a^{|S|},$$

onde a *gera* C_n.

Demonstração. Vamos provar, primeiramente, que se $S \neq a^{|S|}$ com $\langle a \rangle = C_n$ e $|S| \geq n-1$, então $N_0(S) > 2^{|S|-n+1}$. Claramente, se $|S| < n-1$, então $N_0(S) > 2^{|S|-n+1}$. Vamos supor, por absurdo, que $S \neq a^{|S|}$, $|S| \geq n-1$ e $N_0(S) = 2^{|S|-n+1}$, isto é, $0 \in E(S)$. Seja $b|T|S$ tal que $\sigma(T) = 0$, essa subsequência T existe pela Proposição 2.6. Pelo Lema 2.5, $0 \in E(Sb^{-1})$, isto é, $N_0(Sb^{-1}) = 2^{|S|-n}$. Consequentemente, $N_0(S) = 2N_0(Sb^{-1})$. Agora, suponha, $S \neq a^{|S|}$, com $|S| = n-1$. Note que, pela Proposição 2.6, S deve ter uma subsequência $T \neq \lambda$ tal que $\sigma(T) = 0$. Portanto, $N_0(S) \geq 2 > 2^{|S|-n+1} = 1$. Suponha, por hipótese de indução, que qualquer $U \neq a^{|U|}$ com $n-1 \leq |U| < |S|$ satisfaz $N_0(U) > 2^{|U|-n+1}$. Em particular, $N_0(Sb^{-1}) > 2^{|S|-n}$. De $N_0(S) = 2N_0(Sb^{-1})$, temos que $N_0(S) > 2^{|S|-n+1}$, um absurdo ao fato de $0 \in E(S)$. Portanto, basta considerarmos as sequências do tipo $S = a^{|S|}$ com $\langle a \rangle = C_n$. Como $N_0(S) = 2^{|S|-n+1}$ para $S = a^{n-1}$ e $S = a^n$ e $N_0(S) > 2^{|S|-n+1}$ se $S = a^{|S|}$ com $|S| \geq n+1$, o resultado está provado.

Para ver que $N_0(S) > 2^{|S|-n+1}$ se $S = a^{|S|}$ com $|S| \geq n+1$, note que se $S = a^{n+1}$, então $N_0(S) \geq 1 + \binom{n+1}{n} \geq 5 > 4 = 2^{|S|-n+1}$. Assim, suponha $U = a^m$, $m \geq n+1$, satisfazendo $N_0(U) > 2^{m-n+1}$. Seja $Ua = a^{m+1}$. Assim, $N_0(Ua) = N_0(U) + N_{-a}(U)$. Como $-a \in \sum^{\bullet}(U)$, segue pelo Teorema 2.1 que $N_{-a}(U) \geq 2^{m-n+1}$. Consequentemente, $N_0(Ua) > 2^{m-n+1} + 2^{m-n+1} = 2^{m-n+2}$.

□

Agora vamos classificar as sequências em um grupo abeliano finito de ordem ímpar.

Lema 2.9. *Se S é uma sequência sobre um grupo abeliano finito G tal que $E(S)$ contém um subgrupo H de G, não trivial, então $H \cong \oplus_{i=1}^{r} C_2$ e $D(G) = D(G/H) + r$.*

Demonstração. Suponha $H \cong C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$, onde $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$, e assuma que $S = g_1 \cdots g_m$.

Considere o homomorfismo quociente $\phi : G \to G/H$ e seja $\phi(S) = \phi(g_1) \cdots \phi(g_m)$ uma sequência sobre G/H.

Como $H \subseteq E(S)$, temos que, para todo $h \in H$, $N_h(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$. Dessa forma,

$$|H| \cdot 2^{|S|-D(G)+1} = \sum_{h \in H} N_h(S).$$

Observe também que,

$$\sum_{h \in H} N_h(S) \geq N_0(\phi(S)) \geq 2^{|\phi(S)|-D(G/H)+1}.$$

Segue do Lema 2.7 que,

$$|H| \geq 2^{D(G)-D(G/H)} \geq 2^{D(H)-1},$$

e, então,

$$\prod_{i=1}^{r} n_i \geq 2^{\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)} = \prod_{i=1}^{r} 2^{n_i-1}.$$

Portanto, $n_i = 2$ para todo $i \in [r]$, o que nos dá $H \cong \oplus_{i=1}^{r} C_2$.

Agora, vamos mostrar que $D(G) = D(G/H) + r$.

Do Teorema 1.8, temos que $D(H) = r + 1$. Como, $D(G) \geq D(H) + D(G/H) - 1$ pelo Lema 2.7, então segue $D(G) \geq D(G/H) + r$.

Por outro lado, como $|H| = 2^r$ e $|H| \geq 2^{D(G)-D(G/H)}$, então, $D(G) \leq D(G/H) + r$. Logo, $D(G) = D(G/H) + r$. $\square$

Lema 2.10. *Seja G um grupo abeliano finito não-trivial e seja T uma sequência sobre G de soma zero e de fatoração única. Se $T = UV$, com U e V não vazias de soma zero, então $\sum(U) \cap \sum(V) = \{0\}$.*

Demonstração. Seja $T = U_1 \cdots U_r$ tal que U_j é minimal de soma zero para cada $j \in [r]$. Escreva $T = UV$ com U e V não vazias. Como T é de fatoração única, sem perda de generalidade, existe $t \in \mathbb{N}$ com $t \in [r-1]$ tal que $U = U_1 \cdots U_t$ e $V = U_{t+1} \cdots U_r$. Assuma a tese falsa, ou seja, existem $U', U'' \mid U$ e $V', V'' \mid V$ tais que $U = U'U''$, $V = V'V''$ e $\sigma(U') = \sigma(V') \neq 0$. Assim, $U'V''$ e $V'U''$ possuem fatorações únicas, digamos $U'V'' = W_1 \cdots W_s$ e $V'U'' = X_1 \cdots X_k$. Como $U'V''$ e $V'U''$ são subsequências de T, temos que $U'V''V'U'' = W_1 \cdots W_s \cdot X_1 \cdots X_k$ é uma fatoração diferente de $U_1 \cdots U_t \cdot U_{t+1} \cdots U_r$, pela forma em que U e V foram decompostas, fornecendo assim uma outra fatoração para T, uma contradição. □

Lema 2.11. *Seja G um grupo abeliano finito, e seja $S = S_1 \cdots S_r$ uma sequência de fatoração única sobre G com soma zero, onde $S_1, \ldots, S_r$ são todas as subsequências minimais de soma zero de S e $0 \nmid S$. Então, $|S_1| \cdots |S_r| \leq |G|$.*

Demonstração. Seja $S_i = g_{i,1} \cdots g_{i,m_i}$, onde $m_i = |S_i| \geq 2$, para cada $i \in [r]$. Vamos provar que $\prod_{i=1}^{r} m_i \leq |G|$. Para isso provaremos que os $m_1 \cdots m_r$ elementos

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{\ell_i} g_{i,\lambda}, \tag{2.1}$$

onde $\ell_i \in [m_i]$ e $i \in [r]$, são distintos.

Vamos supor, por contradição, que as somas em (2.1) não sejam distintas, ou seja, existem $r' \in [r]$ e $\ell'_i \geq \ell_i$, para todo $i \in [r'+1, r]$, e

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{\ell_i} g_{i,\lambda} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{\ell'_i} g_{i,\lambda}.$$

De modo semelhante, sem perda de generalidade, suponha $\ell_i > \ell'_i$ para $i \in [r']$ e $\ell_i \leq \ell'_i$ para $i \in [r'+1, r]$. Assim, temos

$$g = \sum_{i=1}^{r'} \sum_{\lambda=\ell'_i+1}^{\ell_i} g_{i,\lambda} = \sum_{i=r'+1}^{r} \sum_{\lambda=\ell_i+1}^{\ell'_i} g_{i,\lambda}.$$

Como $g \in \sum(S_1 \cdots S_{r'}) \cap \sum(S_{r'+1} \cdots S_r)$, segue, pelo Lema 2.10, que $g = 0$. Assim,

$$V = \prod_{i=1}^{r'} (\prod_{\lambda=\ell'_i+1}^{\ell_i} g_{i,\lambda}),$$

é uma sequência com soma zero.

Note que $mdc(S_1, V)$ não é vazia, pois $g_{1,\ell_1} \mid S_1, V$. Mas $S_1 \nmid V$, pois $g_{1,1} \mid S_1$ e $g_{1,1} \nmid V$. Logo, a fatoração de V fornece uma outra fatoração para T, uma contradição. □

Lema 2.12. *Seja G um grupo abeliano finito, e seja $S = S_1 \cdots S_r S'$ uma sequência de fatoração única sobre G, onde $S_1, \ldots, S_r$ são todas as subsequências minimais de soma zero de S e S' é vazia ou livre de soma zero e $0 \nmid S$. Então, $|S_1| \cdots |S_r| max\{1, |S'|\} \leq |G|$.*

Demonstração. Claramente, se $|S'| \leq 1$ então $|S_1| \cdots |S_r| max\{1, |S'|\} = |S_1| \cdots |S_r| \leq |G|$ pelo Lema 2.11.

Agora, assumindo $|S'| \geq 2$, a demonstração é análoga a do Lema 2.11. $\square$

Antes de apresentarmos os próximos resultados vamos definir $\mathcal{N}_1(G)$ da seguinte forma,

$$\mathcal{N}_1(G) = \max\{|S| : S \text{ é uma sequência de fatoração única sobre } G\},$$

onde S percorre todas as sequências de fatoração única.

Lema 2.13. *Se G é um grupo abeliano finito, então $\mathcal{N}_1(G) \leq \log_2 |G| + D(G) - 1$.*

Demonstração. Seja S uma sequência de fatoração única sobre G com $|S| = \mathcal{N}_1(G)$. Então, $S = S_1 \cdots S_r S'$, com $S_1, \ldots, S_r$ sendo todas as subsequências minimais de soma zero de S. Pelo Lema 2.12, $|S_1| \cdots |S_r| \leq |G|$, segue de $|S_i| \geq 2$, para cada $i \in [r]$, que $r \leq \log_2 |G|$.

Tome um elemento $x_i \in S_i$ para cada $i \in [r]$. Uma vez que $S_1, \ldots, S_r$ são todas as subsequências minimais de soma zero de S, temos que $S_1 \cdots S_r S'(x_1 \cdots x_r)^{-1}$ é livre de soma zero. Segue que $|S| - r = |S_1 \cdots S_r S'| - r \leq D(G) - 1$.

Portanto, $\mathcal{N}_1(G) = |S| \leq D(G) - 1 + r \leq D(G) - 1 + \log_2 |G|$. $\square$

Teorema 2.14. *Se S é uma sequência sobre um grupo abeliano finito G de ordem ímpar com $0 \nmid S$ e $N_0(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$, então S é de fatoração única e o número de subsequências minimais de soma zero de S é $|S| - D(G) + 1$ e, portanto, $|S| \leq \mathcal{N}_1(G) \leq D(G) - 1 + \log_2 |G|$.*

Demonstração. Notemos primeiro que S é uma sequência de fatoração única, ou seja, $S = S_1 \cdots S_\ell S'$ onde $S_1, \ldots, S_\ell$ são todas as subsequências minimais de soma zero de S. Temos, exatamente, ℓ subsequências minimais de soma zero de S, e por S de fatoração única, essas são as únicas de subsequências de S com soma zero. Dessa forma, $2^\ell = N_0(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$. Isso implica que $\ell = |S| - D(G) + 1$, e que $|S| \leq \mathcal{N}_1(G) \leq \log_2 |G| + D(G) - 1$ pelo Lema 2.13.

Portanto, é suficiente mostrar que S é uma sequência de fatoração única. Vamos proceder por indução em $|S|$.

Se $|S| = D(G)$, então $N_0(S) = 2^1 = 2$. Logo, S contém exatamente uma subsequência de soma zero não vazia.

Agora assuma, $|S| \geq D(G) + 1$. Se todas as subsequências minimais de soma zero de S forem disjuntas duas a duas, ou seja, $mdc(T_i, T_j) = \lambda$, para todo $i, j \in [k]$, então S pode ser escrita como $S = T_1 \cdots T_k S'$, e é de fatoração única.

Então, podemos assumir que existem duas subsequências de soma zero minimais distintas T_1 e T_2, com $mdc(T_1, T_2) \neq \lambda$.

Tome um termo $a | mdc(T_1, T_2)$. Pelo Lema 2.5, $0 \in E(Sa^{-1})$ e, então, Sa^{-1} contém $r = |S| - D(G) \geq 1$ subsequências minimais de soma zero disjuntas duas a duas $T_3, T_4, \ldots, T_{r+2}$ pela hipótese de indução.

Agora precisamos da seguinte afirmação.

Afirmação 2.15. *Não há termo b contido em exatamente uma sequência T_i, onde $i \in [r+2]$.*

Prova da Afirmação. Suponha por contradição que, existe um termo b tal que $b|T_t$, para algum $t \in [r+2]$, e tal que $b \nmid T_i$ para cada $i \in [r+2] \setminus \{t\}$.

Pelo Lema 2.5, temos $0 \in E(Sb^{-1})$. Segue da hipótese de indução que Sb^{-1} contém exatamente r subsequências minimais de soma zero, o que é uma contradição à hipótese de indução. Isso prova a afirmação. □

Escolha um termo c em T_1 mas não em T_2. Pela Afirmação 2.15, c está em outra T_i, digamos T_{r+2} e, portanto, não está em $T_3, T_4, \ldots, T_{r+1}$. Novamente Sc^{-1} contém exatamente r subsequências minimais de soma zero disjuntas, que são apenas $T_2, T_3, \ldots, T_{r+1}$.

Se $r \geq 2$, observando que $mdc(T_{r+1}, T_i) = \lambda$, para cada $i \in [2, r+2] \setminus \{r+1\}$, segue da Afirmação 2.15 que $T_{r+1}|T_1$, o que é uma contradição com a minimalidade de T_1. Portanto, $r = 1$.

Então, $N_0(S) = 2^{r+1} = 2^2 = 4$ e T_1, T_2, T_3 são todas as subsequências minimais de soma zero de S. Se houver algum $d|mdc(T_1, T_2, T_3)$, então Sd^{-1} não contém nenhuma subsequência de soma zero minimal, o que é impossível. Assim, $mdc(T_1, T_2, T_3) = \lambda$.

Sejam $X = mdc(T_2, T_3), Y = mdc(T_1, T_3)$ e $Z = mdc(T_1, T_2)$. Segue da Afirmação 2.15 que $T_1 = YZ, T_2 = XZ$ e $T_3 = XY$.

Portanto, $\sigma(Y) + \sigma(Z) = \sigma(X) + \sigma(Z) = \sigma(X) + \sigma(Y) = 0$. Isso nos dá que, $2\sigma(X) = 2\sigma(Y) = 2\sigma(Z) = 0$. Como $|G|$ é ímpar, segue que $\sigma(X) = 0$, o que é uma contradição. Isso prova o teorema. □

Podemos restringir a estrutura de S, se no Teorema 2.14 assumirmos $E(S) = \{0\}$, como veremos nesse seguinte corolário.

Corolário 2.16. *Se S é uma sequência sobre um grupo abeliano finito G de ordem ímpar com $0 \nmid S$ e $E(S) = \{0\}$, então S é uma sequência de fatoração única de soma zero e o número de subsequências minimais de soma zero de S é $|S| - D(G) + 1$. Portanto, $|S| \leq \mathcal{N}_1(G) \leq \log_2 |G| + D(G) - 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.14, S é uma sequência de fatoração única e contém exatamente $r = |S| - D(G) + 1$ subsequências minimais de soma zero, $T_1, \ldots, T_r$, digamos.

Portanto, $S = T_1 \cdots T_r W$, onde W é uma subsequência livre de soma zero.

Para cada subsequência X de S com $\sigma(X) = \sigma(W)$, se $W \nmid X$, então SX^{-1} é uma subsequência de soma zero contendo termos em W, o que é impossível.

Portanto, $W|X$ e $\sigma(XW^{-1}) = 0$.

Isso dá $X = T_{i_1} \cdots T_{i_s} W$ com $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq r$. Portanto, $N_{\sigma(W)}(S) = 2^r$ e, então, $\sigma(W) \in E(S) = \{0\}$, implicando $W = \lambda$.

Agora, pelo Lema 2.13 segue que $|S| \leq \mathcal{N}_1(G) \leq \log_2 |G| + D(G) - 1$. □

A seguir apresentaremos um exemplo que mostra que o Teorema 2.14 não é válido para todos os grupos abelianos finitos.

Exemplo 2.17. *Seja* $G = C_2 \oplus C_{2n_1} \oplus \cdots \oplus C_{2n_r} = \langle e \rangle \oplus \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_r \rangle$ *com* $1 \leq n_1 \mid \ldots \mid n_r$ *e* $D(G) = d^*(G) + 1$*, onde* $d^*(G) = \sum_{i=1}^{r}(2n_i - 1) + 1$*.*

Para qualquer $m \geq D(G) + 1$*, tome* $S = e^{m-D(G)+2} \prod_{i=1}^{r} e_i^{2n_i - 1}$*. Podemos observar que* $N_0(S) = \binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = 2^{k-1}$*, onde* $k = m - D(G) + 2$*, e que* S *não é uma sequência de fatoração única.*

Em geral, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.18. *Para qualquer grupo abeliano finito* $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$*, com* $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$*, (i) implica as três afirmações equivalentes (ii), (iii) e (iv).*

(i) Qualquer sequência S *sobre* G*, com* $0 \nmid S$ *e* $N_0(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$*, contém exatamente* $|S| - D(G) + 1$ *subsequências minimais de soma zero, todas disjuntas duas a duas.*

(ii) Existe um número natural $t = t(G)$ *tal que* $|S| \leq t$*, para cada sequência* S *sobre* G *com* $0 \nmid S$ *e* $N_0(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$*.*

(iii) Para qualquer subgrupo H *de* G *isomorfo a* C_2*,* $D(G) \geq D(G/H) + 2$*.*

(iv) Para qualquer sequência S *sobre* G*,* $E(S)$ *não contém subgrupo não trivial de* G*.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Como S contém exatamente $|S| - D(G) + 1$ subsequências minimais de soma zero, todas disjuntas duas a duas, temos $|S| \geq 2(|S| - D(G) + 1)$ o que nos dá $|S| \leq 2D(G) - 2$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Suponha por contradição que $D(G) = D(G/H) + 1$, para algum subgrupo $H = \{0, h\}$ de G.

Seja $\phi : G \to G/H$ o homomorfismo quociente, e seja $m = D(G/H)$.

Escolha uma sequência $S = g_1 \cdots g_m$ sobre G tal que $\phi(S) = \phi(g_1) \cdots \phi(g_m)$ é uma sequência minimal de soma zero sobre G/H, e $\sigma(S) = h$ em G. Essa sequência minimal de soma zero existe pois, note que $o(h) = 2$ e que se escolhemos S livre de soma zero com $|S| = m = D(G) - 1$ tal que $\sigma(S) = h$, então $\sigma(\phi(S)) = 0$ em G/H. Para garantir que $\phi(S)$ é minimal de soma zero vamos supor o contrário, isto é, existe $\phi(T) | \phi(S)$ com $\sigma(\phi(T)) = \phi(\sigma(T)) = 0$ e $|\phi(T)| < m$. Naturalmente temos duas possibilidades. A saber, $\sigma(T) = 0$ ou $\sigma(T) = h$. O primeiro caso não ocorre, pois S é livre de soma zero e $T | S$. Agora, se $\sigma(T) = h$, então S terá uma subsequência de soma zero, uma contradição também. De fato, como $\sigma(T) = h$ e $\sigma(S) = h$, escreva $T = \prod_{i=1}^{\ell} g_i | S = \prod_{i=1}^{m} g_i$, sem perda de generalidade, e note que $\sigma(S) = \sigma(T) + \sigma\left(\prod_{i=\ell+1}^{m} g_i\right)$, ou seja, $\sigma\left(\prod_{i=\ell+1}^{m} g_i\right) = 0$.

Em $\phi(S)$ temos as subsequências que dão soma 0 e as que dão soma h, sendo que

$h \in H$ representa o 0, então segue que

$$N_0(S) + N_h(S) = N_0(\phi(S)) = 2 = 2 \cdot 2^{|S|-D(G)+1}$$

e $N_0(S)$ e $N_h(S)$ não são zero, pelo Teorema 2.1, $N_0(S) = N_h(S) = 2^{|S|-D(G)+1}$, pois $|S| = D(G/H)$ e $D(G) = D(G/H) + 1$.

Como $N_0(Sh^k) = N_0(Sh^{k-1}) + N_h(Sh^{k-1}) = N_h(Sh^k)$, por indução temos $N_0(Sh^k) = N_h(Sh^k) = 2^{|Sh^k|-D(G)+1}$ para todo k, uma contradição da suposição em (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Suponha por contradição que exista uma sequência S sobre G tal que $E(S)$ contém um subgrupo H de G não trivial. Pelo Lema 2.9, $H \cong \oplus_{i=1}^{s} C_2$ e $D(G) = D(G/H) + s$. Portanto, $E(S)$ contém um subgrupo $H' \cong C_2$. Se $D(G) \geq D(G/H') + 2$, então pelo Lema 2.7, $D(G) \geq D(G/H') + 2 \geq D(H/H') + D((G/H')/(H/H')) + 1$. Como $({}^{G}/_{H'})/({}^{H}/_{H'}) \cong G/H$ e $H/H' \cong \oplus_{i=1}^{j-1} C_2$ implica $D(H/H') \geq s - 1 + 1$. Logo, $D(G) \geq s + D(G/H) + 1 > D(G)$, uma contradição.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Para $|S| \geq D(G)$, ou seja, $N_0(S) = 2^{|S|-D(G)+1} > 1$, existe uma subsequência não vazia de soma zero T_1 de S e um termo $a_1 \mid T_1$. Pelo Lema 2.5, $0 \in E(S) \subseteq E(Sa_1^{-1})$. De (iv), $\langle -a_1 \rangle \nsubseteq E(Sa_1^{-1})$.

Seja k o índice mínimo tal que $k(-a_1) \notin E(Sa_1^{-1})$, ou seja,

$$\{0, -a_1, \ldots, (k-1)(-a_1)\} \subseteq E(Sa^{-1}),$$

mas $k(-a_1) \notin E(Sa^{-1})$. Como $N_{(k-1)(-a_1)}(Sa_1^{-1}) = 2^{|Sa_1^{-1}|-D(G)+1}$ e $N_{k(-a_1)}(Sa_1^{-1}) \neq 2^{|Sa_1^{-1}|-D(G)+1}$, segue que

$$N_{(k-1)(-a_1)}(S) = N_{(k-1)(-a_1)}(Sa_1^{-1}) + N_{k(-a_1)}(Sa_1^{-1}) \neq 2^{|S|-D(G)+1},$$

e, consequentemente, $(k-1)(-a_1) \notin E(S)$.

Isso significa,

$$E(S) \subsetneq E(Sa_1^{-1}).$$

Se $|Sa_1^{-1}| \geq D(G)$, um argumento similar prova que existe uma subsequência não vazia de soma zero T_2 de Sa_1^{-1} e um termo $a_2 \mid T_2$, portanto, $E(Sa_1^{-1}) \subsetneq E(Sa_1^{-1}a_2^{-1})$. Continuamos esse processo para obter $a_1, a_2, \ldots, a_{|S|-D(G)+1}$ de S tal que

$$E(S) \subsetneq E(Sa_1^{-1}) \subsetneq \ldots \subsetneq E(Sa_1^{-1}a_2^{-1} \cdots a_{|S|-D(G)+1}^{-1}) \subseteq G.$$

Observe que em cada passagem de $E(S)$ para $E(Sa_1^{-1})$ é retirado um elemento de S, e com isso é aumentado pelo menos um elemento no conjunto $E(Sa_1^{-1})$. Isso segue sucessivamente nos conjuntos posteriores das inclusões. Como esse processo não pode ultrapassar a cardinalidade do grupo G, ou seja, $|E(Sa_1^{-1}a_2^{-1} \cdots a_{|S|-D(G)+1}^{-1})| \leq |G|$, segue que o número de retiradas também não pode ultrapassar a cardinalidade de G. Portanto,

$$|S| \leq D(G) + |G| - 1 := t.$$

$\square$

Capítulo 3

Resultados com peso $A = \{1, \ldots, \exp(G) - 1\}$

Os resultados aqui apresentados foram baseados em [7], [8], [9] e [10].

Neste capítulo iremos considerar o grupo abeliano finito G como soma direta $G = H \oplus C_n^r$, onde C_n^r denota r cópias de C_n e $H = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots \oplus C_{n_t}$ com $1 < n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_t \mid n = exp(G)$ e $n_t < n$.

3.1 $N_{A,0}(S)$ e seu Limite Inferior

Para um elemento $g \in G$, seja

$$N_{A,g}(S) = |\{I \subseteq [m] : \sum_{i \in I} a_i g_i = g, a_i \in A\}|$$

o número de subsequências T de S com $\sigma^{\mathbf{a}}(T) = g$, para algum $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(A)$. Note que sempre teremos $N_{A,0}(S) \geq 1$.

Teorema 3.1. *Todo grupo abeliano finito G com expoente n é 0-completo com respeito a $A = [n-1]$, isto é, $N_{A,0}(S) \geq 2^{|S| - D_A(G) + 1}$.*

Demonstração. De acordo com o Lema 1.13, temos $D_A(G) = r + 1$, sendo r o menor inteiro positivo tal que se $|S| \leq r$, então $N_{A,0}(S) \geq 1 \geq 2^{|S|-r}$.

Suponha agora que $r + 1 \leq |S|$. Dividimos a prova em 2 casos.

Caso 1: Seja $S \in \mathcal{F}(G)$ uma sequência tal que $o(g) < n$ para todo $g|S$.

Neste caso, temos que cada $g|S$ é uma subsequência com A-soma zero e, portanto, $N_{A,0}(S) = 2^{|S|} > 2^{|S|-r}$.

Caso 2: Seja $S = TW \in \mathcal{F}(G)$ uma sequência tal que os elementos de T tem ordem n e T é maximal livre de A-soma zero, com $|T| \leq r$.

Então, para cada elemento $g|W$, temos duas possibilidades:

- Se $o(g) < n$, então g é uma subsequência com A-soma zero.
- Se $o(g) = n$, então Tg possui uma subsequência com A-soma zero com g sendo um de seus elementos.

Em ambas possibilidades, existe $V|Tg$, tal que V é uma subsequência com A-soma zero cujo coeficiente de g é $a_g \in A$.

Então, $a_g g$ é uma A-soma de alguma subsequência de T:

$$a_g g = \sum_{i \in I_{Vg^{-1}}} a_i g_i \ , \ I_{Vg^{-1}} \subset I_V \text{ e } a_i \in A.$$

Assim, para cada $U|W$ não vazia, temos

$$\sum_{g|U} a_g g = \sum_{g|U} \sum_{i \in I_{Vg^{-1}}} a_i g_i = \sum_{i \in I_{V_U}} b_i g_i, \text{ com } I_{Vg^{-1}} \subset I_T \text{ e } a_i, b_i \in A,$$

isto é, a A-soma $\sum_{g|U} a_g g$ é uma A-soma de alguma subsequência de V_U de T. Portanto, UV_U é uma subsequência com A-soma zero de S. Observe que se $V_U = \lambda$, então U é uma subsequência com A-soma zero. Portanto, se incluirmos a subsequência vazia, obtemos um mínimo de $2^{|W|} = 2^{|S|-|T|}$ subsequências de A-soma zero distintas de S. Isso prova que $N_{A,0}(S) \geq 2^{|S|-r}$.

□

3.2 Classificação das sequências S para as quais $N_{A,0}(S) = 2^{|S|-D_A(G)+1}$

Agora iremos considerar grupos finitos da forma $G = H \oplus C_n^r$, com $exp(H) < n$ e $exp(H) \mid n$ e estudaremos as sequências S, tais que $N_{A,0}(S) = 2^{|S|-D_A(G)+1}$, onde $A = [n-1]$. O caso em que $A = \{1\}$, foi apresentado no Capítulo 2 para grupos gerais de expoente ímpar.

Observe que $N_{A,0}(S) = 2N_{A,0}(S0^{-1})$ e que se $o(g) < n$, então $N_{A,0}(S) = 2N_{A,0}(Sg^{-1})$. Logo, basta considerar as sequências S, tais que $0 \nmid S$ e $o(g) = n$, para todo $g|S$.

Proposição 3.2. *Seja G um grupo abeliano finito com* $\exp(G) = n$. *Se $S \in EC_{A,0}(\mathcal{F}(G))$, com $A = [n-1]$, $0 \nmid S$ e $o(g) = n$, para todo $g|S$, então $r \leq |S|$ e existe $T = \prod_{i=1}^{r} g_i$ maximal livre de A-soma zero, tal que*

$$S = \prod_{i=1}^{r} g_i \prod_{j=1}^{k} h_j,$$

onde $k \in \mathbb{N}_0$ *e* $b_j h_j = \sum_{i \in I_j} a_i g_i$*, com* $a_i, b_j \in A$*,* $I_j \subseteq [r]$*.*

Demonstração. Seja S uma sequência sobre G, com $0 \nmid S$, $o(g) = n$ para todo $g|S$ e $N_{A,0}(S) = 2^{|S|-D_A+1} = 2^{|S|-r}$. Se $|S| < r$, então λ é uma subsequência com A-soma zero de S e $N_{A,0}(S) \geq 1 > 2^{|S|-r}$.

Portanto, podemos assumir $|S| \geq r$. Pelo Teorema 3.1, Caso 2, existe $T|S$, tal que $T = \prod_{i=1}^{r} g_i$ é maximal livre de A-soma zero, além disso, $N_{A,0}(S) \geq 2^{|S|-r}$. De acordo com o Lema 1.13, observamos que se $g \nmid T$ então $a_\ell g = \sum_{i \in I \subset [r]} a_i g_i$, com $a_i, a_\ell \in A$.

Se houver mais de um conjunto I satisfazendo isso, então pelo Teorema 3.1, Caso 2, segue que $N_{A,0}(S) > 2^{|S|-r}$. Portanto, existe apenas um conjunto I satisfazendo $a_\ell g = \sum_{i \in I \subset [r]} a_i g_i$.

Assim, concluímos que

$$S = \prod_{i=1}^{r} r \prod_{j=1}^{k} h_j, \text{ onde } b_j h_j = \sum_{i \in I_j} a_i g_i,$$

onde a_i, $b_i \in A$, $I_j \subset [r]$.

$\square$

Teorema 3.3. *Seja* G *um grupo abeliano finito com* $\exp(G) = n$*, um número ímpar. Se* $S \in EC_{A,0}(\mathcal{F}(G))$*, com* $A = [n-1]$*,* $0 \nmid S$ *e* $o(g) = n$*, para todo* $g|S$*, então* $r \leq |S| \leq 2r$ *e existe* $T = \prod_{i=1}^{r} g_i$ *maximal livre de A-soma zero, tal que*

$$S = \prod_{i=1}^{r} g_i \prod_{j=1}^{k} h_j,$$

onde $k \in [r]$ *e* $b_j h_j = \sum_{i \in I_j} a_i g_i$ *com* $a_i, b_j \in A$*,* $I_j \subseteq [r]$ *e* $I_{j's}$ *disjuntos dois a dois (*$I_j = \varnothing$*, para todo* j*, implica que* $S = \prod_{i=1}^{r} g_i$*).*

Demonstração. Seja S uma sequência sobre G com $0 \nmid S$, $o(g) = n$, para todo $g|S$ e $N_{A,0}(S) = 2^{|S|-D_A(G)+1} = 2^{|S|-r}$. Sabemos, pela Proposição 3.2, que $S = \prod_{i=1}^{r} g_i \prod_{j=1}^{k} h_j$ onde $k \in \mathbb{N}_0$, $b_j h_j = \sum_{i \in I_j} a_i g_i$ com $a_i, b_j \in A$, $I_j \subset [r]$ e $T = \prod_{i=1}^{r} g_i$ é maximal livre de A-soma zero.

Agora, provaremos que os $I_{j's}$ são disjuntos dois a dois. Se $|S| = D_A(G) - 1 = r$, então $N_{A,0}(S) = 2^{|S|-r} = 2^{r-r} = 2^0 = 1$, $I_j = \varnothing$, para todo $j \in [k]$, e $S = \prod_{i=1}^{r} g_i$.

Suponha que $|S| = D_A(G) = r + 1$, então $I_j \neq \varnothing$, para apenas um j, $N_{A,0}(S) = 2^{|S|-r} = 2^{r+1-r} = 2^1 = 2$ e $S = \prod_{i=1}^{r} g_i h_j$.

Finalmente, suponha $S = \prod_{i=1}^{r} g_i \prod_{j=1}^{k} h_j$ com $k \geq 2$ e $I_{j_1} \cap I_{j_2} \neq \varnothing$, para alguns $j_1, j_2 \in [k]$, com $j_1 \neq j_2$, onde

$$a_{j_1} h_{j_1} = \sum_{i \in I_{j_1}} a_i g_i \text{ e } a_{j_2} h_{j_2} = \sum_{i \in I_{j_2}} b_i g_i$$

com $a_{j_1}, a_{j_2}, a_i, b_i \in A$.

Por hipótese, temos exatamente $2^{|S|-r}$ subsequências de A-soma zero de S, as quais podem ser obtidas usando o mesmo argumento do Teorema 3.1. Como $I_{j_1} \cap I_{j_2} \neq \varnothing$, temos $I_x, I_y \subset I_{j_1} \cup I_{j_2}$ tais que

$$\begin{cases} a_{j_1} h_{j_1} + a_{j_2} h_{j_2} = \sum_{i \in I_x} c_i g_i \\ a_{j_1} h_{j_1} - a_{j_2} h_{j_2} = \sum_{i \in I_y} d_i g_i \end{cases}$$

$c_i, d_i \in A$.

Note que $\exp(G) = n$ é um número ímpar. Assim, segue que $I_x \neq \varnothing$ ou $I_y \neq \varnothing$.

Se $I_x \neq I_y$, então existe uma nova subsequência com A-soma zero de S e, portanto, $N_{A,0} > 2^{|S|-r}$, uma contradição. Agora, suponha que $I_x = I_y$ e tome $g_\ell | \prod_{i \in I_{j_1} \cap I_{j_2}} g_i$.

Considere $T' = T h_{j_2}$ e $T' g_\ell^{-1} = \prod_{i=1}^{r+1} g_i g_\ell^{-1}$, onde $g_{r+1} = h_{j_2}$.

Se $T' g_\ell^{-1}$ não é maximal livre de A-soma zero, então existe $\bar{I}_{j_2} \subset [r+1] - \{\ell\}$ tal que $z_{j_2} h_{j_2} = \sum_{i \in \bar{I}_{j_2}} s_i g_i$, isto é, obtemos uma nova subsequência com A-soma zero de S e, portanto, $N_{A,0} > 2^{|S|-r}$, uma contradição.

Se $T' g_\ell^{-1}$ é maximal livre de A-soma zero, então, pelo Lema 1.13, temos $\bar{I}_{j_1} \subset [r+1] - \{\ell\}$ tal que, $v_{j_1} h_{j_1} = \sum_{i \in \bar{I}_{j_1}} u_i g_i$, isto é, obtemos uma nova subsequência com A-soma zero de S. Portanto, temos $N_{A,0} > 2^{|S|-r}$. Novamente, uma contradição.

Observe que se $k > r$, então existem I_{j_1} e I_{j_2} com $j_1 \neq j_2$, tais que $I_{j_1} \cap I_{j_2} \neq \varnothing$.

Portanto, $N_{A,0}(S) > 2^{|S|-r}$, uma contradição.

Assim, $r \leq |S| \leq 2r$.

$\square$

Considerações Finais

Motivados por problemas de soma zero, no decorrer do presente trabalho investigamos o valor da constante de Davenport para grupos específicos, além de determinar um limite inferior para o número de subsequências com uma soma predefinida e classificar a estrutura das sequências que atingem tal limite.

Mais precisamente, apresentamos o valor da constante de Davenport para um grupo cíclico de ordem n, para um p-grupo e também para um grupo G da forma $G = C_m \oplus C_n$, com $m \mid n$. Além disso, mostramos que para um grupo $G = H \oplus C_n^r$, onde $H = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_k}$ com $1 < n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_k \mid n = \exp(G)$ e $n_k < n$, a constante de Davenport com peso em $A = \{1, \ldots, \exp(G) - 1\}$ é dada por $D_A(G) = r + 1$.

Obtemos um limite inferior para o número de subsequências de $S \in \mathcal{F}(G)$, G um grupo abeliano finito, com soma g sem peso e com peso em $A = \{1, \ldots, \exp(G) - 1\}$.

Por fim, mostramos a estrutura das sequências quando o limite inferior de $N_{A,0}(S)$ é atingido, tanto para grupos cíclicos da forma C_n, quanto para grupos abelianos finitos de ordem ímpar.

Para atingir os objetivos deste trabalho, estudamos diversos artigos e livros citados durante seu desenvolvimento, que podem ser encontrados na bibliografia. Para desdobramentos de futuros trabalhos na área, trazemos agora, algumas conjecturas que dizem respeito ao número de subsequências de grupos abelianos finitos quaisquer e também a estrutura dessas sequências.

Conjectura 3.4. *Suponha G um grupo abeliano finito no qual $D(G) \geq D(G/H) + 2$ para cada subgrupo H de G isomorfo a C_2. Se S é uma sequência sobre G com $0 \nmid S$ e $N_0(S) = 2^{|S| - D(G) + 1}$, então S contém exatamente $|S| - D(G) + 1$ subsequências minimais de soma zero, todas duas a duas disjuntas.*

Conjectura 3.5. *Suponha $G \cong C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$, onde $1 < n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$ e $D(G) = d^*(G) + 1 = \sum_{i \in I}^{r} (n_i - 1) + 1$. Seja S uma sequência sobre G tal que $0 \nmid S$ e $E(S) \neq \varnothing$ não contém subgrupos não triviais de G, então $|S| \leq d^*(G) + r$.*

Conjectura 3.6. *Todo grupo abeliano finito G com expoente n é 0-completo com respeito a $A \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$.*

Os autores A. Lemos, B.K. Moriya, A.O. Moura e A.T. Silva, provaram recentemente, mais um caso da Conjectura 3.6 com $A = \{1, 2, \ldots, d^k n - 1\} \setminus \{d^i n : i \in [0, k-1]\}$, como pode ser visto em [8].

Referências Bibliográficas

[1] Adhikari, S. D., Chen, Y.-G., Friedlander, J. B., Konyagin, S., and Pappalardi, F. Contributions to zero-sum problems. *Discrete mathematics 306*, 1 (2006), 1–10.

[2] Almeida Silva, K. Sequências de soma zero em grupos abelianos finitos. Portal Domínio Público - Disponível em: `http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=43072`, 2007.

[3] Chang, G. J., Chen, S.-H., Qu, Y., Wang, G., and Zhang, H. On the number of subsequences with a given sum in a finite abelian group. *The Eletronic Journal of Combinatorics* (2011).

[4] Delorme, C., Gonzalez, S., Ordaz, O., and Varela, M. T. Barycentric sequences and barycentric ramsey numbers stars. *Discrete mathematics 277*, 1-3 (2004), 45–56.

[5] Erdos, P., Ginzburg, A., and Ziv, A. Theorem in the additive number theory. *Bull. Res. Council Israel F 10* (1961), 41–43.

[6] Gao, W., Geroldinger, A., and Wang, Q. A quantitative aspect of non-unique factorizations: the narkiewicz constants. *International Journal of Number Theory 7*, 06 (2011), 1463–1502.

[7] Halter-Koch, F. Arithmetical interpretation of weighted davenport constants. *Archiv der Mathematik 103*, 2 (2014), 125–131.

[8] Lemos, A., Moriya, B. K., Moura, A. O., and Silva, A. T. On the number of weighted zero-sum subsequences. *arXiv preprint arXiv:2209.14779* (2022).

[9] Lemos, A., Moura, A. O., Silva, A. T., and Moriya, B. K. On the number of fully weighted zero-sum subsequences. *International Journal of Number Theory 15*, 05 (2019), 1051–1057.

[10] Marchan, L. E., Ordaz, O., and Schmid, W. A. Remarks on the plus–minus weighted davenport constant. *International Journal of Number Theory 10*, 05 (2014), 1219–1239.

[11] Olson, J. E. A combinatorial problem on finite abelian groups, i. *Journal of number theory 1*, 1 (1969), 8–10.

[12] Olson, J. E. A combinatorial problem on finite abelian groups, ii. *Journal of Number Theory 1*, 2 (1969), 195–199.

[13] Pereira, N. R. F. d. P., et al. Alguns problemas de soma-zero com peso.

[14] Villarroel, F., Figueroa, J., Márquez, H., and Anselmi, A. Un método algoritmo para el cálculo del número baricéntrico de ramsey para el grafo estrella. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática 36*, 2 (2018), 169–183.