

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

**Dinâmica polinomial randômica, conjuntos de Julia totalmente desconexos
associados à família $f(c_n)(z) = z^3 + c_n z$**

Lucas de Oliveira Miranda
Magister Scientiae

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2025**

LUCAS DE OLIVEIRA MIRANDA

**Dinâmica polinomial randômica, conjuntos de Julia totalmente desconexos
associados à família $f(c_n)(z) = z^3 + c_n z$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Miranda Alves

Coorientador: Mostafa Salarinoghabi

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

Miranda, Lucas de Oliveira, 1998-
M672d Dinâmica polinomial randômica, conjuntos de Julia
2025 totalmente desconexos associados à família $f_{\{c_n\}}(z) = z^3 + c_n z$ / Lucas de Oliveira Miranda. – Viçosa, MG, 2025.
1 dissertação eletrônica (78 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2025.

Referências bibliográficas: f. 76-78.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2025.565>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Variáveis aleatórias.
I. Alves, Alexandre Miranda, 1969-. II. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 515.39

LUCAS DE OLIVEIRA MIRANDA

**Dinâmica polinomial randômica, conjuntos de Julia totalmente desconexos
associados à família $f(c_n)(z) = z^3 + c_n z$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 6 de agosto de 2025.

Assentimento:

Lucas de Oliveira Miranda
Autor

Alexandre Miranda Alves
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pelo autor em 03/09/2025 às 12:29:51 e pelo orientador em 03/09/2025 às 16:02:54. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **FUP6.A3B5.TBFN** e clique no botão 'Validar documento'.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida e por tudo que ele tem feito, em especial, por me conduzir nessa caminhada. Como está escrito, "O coração do ser humano traça o seu caminho, mas o Senhor lhe dirige os passos". Provérbios 16:9. A Ele seja dada, toda honra, glória e louvor.

Agradeço à Universidade Federal de Viçosa-UFV, pela oportunidade de fazer tanto a graduação quanto a pós-graduação.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Agradeço à minha mãe, Laura Maria de Oliveira Miranda, pelo seu amor, cuidado e apoio em todas as etapas da minha formação acadêmica. Certamente, se estou aqui, foi pela ajuda dela.

Agradeço ao meu orientador, professor Alexandre Miranda Alves e ao coorientador Mostafa Salarinoghabi, pela experiência e conhecimento compartilhados comigo, bem como a paciência e a disposição em me auxiliar, no decorrer deste trabalho. Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFV, por contribuírem para o meu crescimento e aprendizagem nesta área do conhecimento. Agradeço aos funcionários do Departamento, por todo suporte e dedicação para com todos os estudantes.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, pelos momentos que vivemos nesta trajetória. Em meio aos estudos, provas, seminários e listas de exercícios, aprendemos e crescemos juntos, e isto contribuiu para a formação de todos. Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais(FAPEMIG), e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior(CAPES), pela concessão das bolsas de estudos. No início do mestrado, consegui uma bolsa de estudos, vinculada a um projeto de pesquisa, elaborado pelo professor Alexandre Miranda Alves, que foi financiado pela FAPEMIG. Posteriormente, fui contemplado com uma bolsa de estudos do mestrado, financiada pela CAPES.

RESUMO

MIRANDA, Lucas de Oliveira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2025. **Dinâmica polinomial randômica, conjuntos de Julia totalmente desconexos associados à família $f_{(c_n)}(z) = z^3 + c_n z$.** Orientador: Alexandre Miranda Alves. Coorientador: Mostafa Salarinoghabi.

Esta dissertação apresenta um estudo sobre dinâmica polinomial randômica, para uma classe de sequências de polinômios que possuem coeficientes limitados, com destaque para a família quadrática $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$, e a família cúbica $f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z$, onde (c_n) é uma sequência tal que, c_n pertence à V para todo n natural, e V é um subconjunto aberto e limitado do plano complexo. Além disso, fornece a prova de uma condição para que o conjunto de Julia associado à família cúbica descrita acima, seja totalmente desconexo. Inicialmente, foram abordados alguns resultados de dinâmica complexa clássica, teoria da medida e dinâmica complexa randômica, e isto permitiu analisar as diferenças que surgem entre o caso clássico e o randômico. Em seguida, o trabalho abordou a dinâmica polinomial randômica, com o objetivo de explicitar alguns resultados do caso clássico, que podem ser generalizados para o contexto randômico, quando os polinômios em questão possuem coeficientes limitados. Também, está presente uma classificação topológica do conjunto de Julia, tanto para a família quadrática quanto para a família cúbica. De modo geral, existe uma caracterização de conexidade para esses conjuntos. No que diz respeito a desconexidade, os conjuntos de Julia são classificados de acordo com as respectivas componentes conexas. Alguns resultados associados a densidade, e a medida de alguns desses conjuntos também foram provados.

Palavras-chave: dinâmica polinomial randômica; conjunto de Fatou; conjunto de Julia; totalmente desconexo

ABSTRACT

MIRANDA, Lucas de Oliveira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2025. **Random polynomial dynamics, totally disconnected Julia sets associated with the family $f(c_n)(z) = z^3 + c_n z$.** Adviser: Alexandre Miranda Alves. Co-adviser: Mostafa Salarinoghabi.

This dissertation presents a study on random polynomial dynamics for a class of sequences of polynomials with bounded coefficients, with emphasis on the quadratic family $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$, and the cubic family $f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z$, where (c_n) is a sequence such that, c_n belong to V for every natural number n , and V is an open and bounded subset of the complex plane. Furthermore, it provides a proof of a condition under which the Julia set associated with the aforementioned cubic family is totally disconnected. Initially, the work discusses some classical results in complex dynamics, measure theory, and random complex dynamics, which enables an analysis of the differences that arise between the classical and the random cases. Subsequently, the study focuses on random polynomial dynamics, aiming to make explicit certain results from the classical case that can be generalized to the random context when the polynomials involved have bounded coefficients. The dissertation also presents a topological classification of the Julia set for both the quadratic and cubic families. In general, a characterization of connectedness for these sets is established. Regarding disconnectedness, the Julia sets are classified according to their respective connected components. Some results related to the density and measure of these sets are also proven.

Keywords: random polynomial dynamics; Fatou set; Julia set; totally disconnected.

Sumário

	Introdução	7
1	PRELIMINARES	9
1.1	Noções de Dinâmica Complexa Determinística	9
1.2	Conjuntos de Fatou e Julia	15
1.3	Dinâmica Complexa Randômica	25
1.4	Teoria da Medida e Integração	27
2	DINÂMICA POLINOMIAL RANDÔMICA	31
2.1	A família quadrática	39
2.2	Classificação topológica do conjunto de Julia	39
3	CONJUNTOS DE JULIA TOTALMENTE DESCONEXOS, PARA UMA FAMÍLIA CÚBICA DE POLINÔMIOS.	56
3.1	Polinômios de Chebychev	56
3.2	Classificação Topológica do Conjunto de Julia para a Família $f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z$	57
3.3	Resultado Principal.	63
3.4	Outros Resultados.	71
	REFERÊNCIAS	76

Introdução

Os sistemas dinâmicos constituem uma área importante da matemática, que tem se destacado nos dias atuais devido as suas aplicações, pois são utilizados para modelar fenômenos que evoluem no decorrer do tempo. Por isso, estão presentes na Física, Economia, Ciências da Natureza, Computação, entre outras áreas do conhecimento. Do ponto de vista matemático, os sistemas dinâmicos são estudados em contextos variados. Podemos citar a dinâmica simbólica, teoria ergódica, dinâmica hiperbólica, dinâmica complexa. Conceitos como, entropia e expoentes de Lyapunov, são ferramentas para este estudo. Neste trabalho, abordaremos a dinâmica complexa.

A dinâmica complexa começou a ser estudada no final do século XIX e início do século XX. Essencialmente, essa teoria consiste em estudar o comportamento de funções definidas na esfera de Riemann. Os matemáticos franceses Pierre Fatou(1878-1929) e Gaston Julia(1893-1978) contribuíram para o desenvolvimento desse conhecimento, devido aos seus trabalhos nessa linha de pesquisa, onde podemos destacar os artigos "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles"(1918) e "Sur les équations fonctionnelles"(1919-1920), em que os autores estudaram a iteração de funções racionais complexas. A partir desses resultados, foram definidos os conjuntos de Fatou e Julia. O conjunto de Fatou é caracterizado pela normalidade da família de iteradas de uma função complexa, enquanto o conjunto de Julia tem um comportamento caótico.

Devido a dificuldade de visualização dos conjuntos de Fatou e Julia, a dinâmica complexa se desenvolveu pouco, até a década de 1980. Mas essa situação mudou, quando o matemático franco-americano Benoît. B. Mandelbrot(1924-2010) conseguiu visualizar os conjuntos de Julia, através de recursos computacionais, e isto chamou a atenção por causa da estrutura fractal desses conjuntos.

O modelo estudado nesta época corresponde a função $f_c : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, dada por $f_c(z) = z^2 + c$, onde $c \in \mathbb{C}$ é um parâmetro fixo. Esse contexto, é chamado de dinâmica complexa clássica ou determinística. Em 1991, os matemáticos John Erik Fornæss e Nessim Sibony consideraram uma nova situação, eles trabalharam com as funções $f_{c_n} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, onde $c_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que, no processo de iteração dessas funções, há uma composição de funções distintas a um parâmetro. Esse contexto é chamado de dinâmica complexa randômica. É importante destacar que esses modelos descrevem com maior precisão os fenômenos reais, pois estes variam no decorrer do tempo. Muitos resultados foram provados para a família de polinômios quadráticos da forma,

$$f_{c_n}(z) = z^2 + c_n,$$

onde $\omega = (c_n) \in \Omega = V^{\mathbb{N}}$ é uma sequência formada por parâmetros $c_n \in V$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $V \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e limitado. Apresentamos alguns desses resultados, mas nosso objetivo é estudar a família de polinômios cúbicos dada por

$$f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z,$$

onde $\omega = (c_n) \in \Omega = V^{\mathbb{N}}$, e $V \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e limitado. Em especial, provamos uma condição, para que os conjuntos de Julia associados a família de polinômios cúbicos descrita acima sejam totalmente desconexos. Existem aplicações desses polinômios, como podemos ver em [1], onde os autores elaboraram um modelo, visando oferecer uma maior segurança para redes veiculares, habilitadas para o 5G, além de serem utilizados na criptografia.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, abordamos os conceitos de dinâmica complexa clássica e algumas ferramentas da teoria da medida. Além disso, apresentamos alguns resultados de dinâmica complexa randômica, e destacamos as diferenças que surgem entre esses contextos. No Capítulo 2, abordamos a dinâmica polinomial randômica, para uma classe de sequências de polinômios, em particular, para a família quadrática, mencionada anteriormente. No Capítulo 3, finalizamos a dissertação, com os novos resultados voltados para a família de polinômios cúbicos.

1 Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Tais resultados podem ser vistos com mais detalhes em [5], [6], [7], [16], [28], e [29]. A figura inserida na seção a seguir, foi gerada pelo software Geogebra.

1.1 Noções de Dinâmica Complexa Determinística

Nesta seção, vamos apresentar algumas noções gerais de dinâmica complexa clássica. Seja X um conjunto não vazio. Um sistema dinâmico discreto consiste de uma aplicação $f : X \rightarrow X$. Na prática, o conjunto X em questão, deve possuir uma estrutura que é preservada pela aplicação f . Por exemplo, podemos considerar X como um espaço topológico e f uma aplicação contínua, ou (X, d) um espaço métrico e f uma isometria. Em dinâmica complexa, o estudo é feito sob o espaço métrico conhecido como esfera de Riemann, a qual é definida por $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e neste caso, o infinito é visto como um ponto. Seja S^2 a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . Vamos denotar por N o ponto $(0, 0, 1)$ e consideramos o plano

$$\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$

Dado um ponto $P \in \pi$, podemos fazer uma projeção linear de P na direção de N , de modo que, essa projeção intersepte S^2 em um único ponto A , tal que $A \neq N$. Veja a Figura 1.

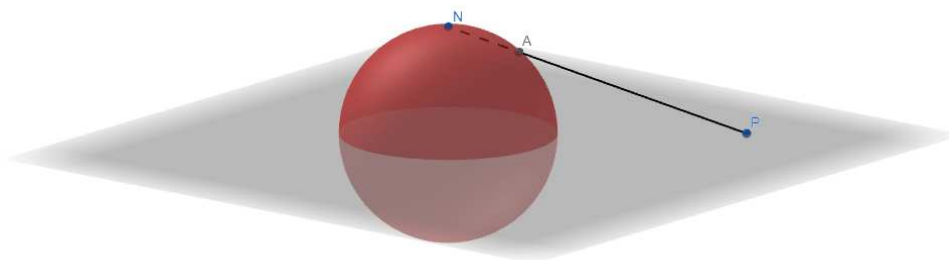


Figura 1 – Projeção estereográfica.

Identificando o plano complexo com o plano π , e aplicando o procedimento descrito acima para cada $z \in \mathbb{C}$, definimos uma aplicação $\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2$, chamada de projeção estereográfica. Observe que $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, assim, definindo $\phi(\infty) = N$, resulta que $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ é uma bijeção, e a partir dessa aplicação, podemos definir uma métrica em $\widehat{\mathbb{C}}$, dada por

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, \text{ se } z, w \in \mathbb{C},$$

e

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z, \infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z, w) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

$d_{\widehat{\mathbb{C}}}$ é chamada métrica cordal em $\widehat{\mathbb{C}}$ (veja [6] p. 27). A esfera de Riemann pode ser estudada em diversas áreas, devido as suas propriedades analíticas, geométricas, algébricas e topológicas, em especial a compacidade. Todos esses atributos evidenciam a importância dessa estrutura, e proporcionam muitos resultados em diferentes contextos matemáticos, e em outros ramos do conhecimento que estão diretamente associados à matemática, entre os quais destacamos a mecânica quântica e a física. Além disso, a esfera de Riemann também é uma variedade complexa, e está presente na geometria projetiva e algébrica, como podemos ver em [9], [21] e [31]. O nosso objetivo é estudar dinâmica complexa, sendo assim, vamos considerar as funções $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, e a partir disso, definimos as ferramentas iniciais para esse estudo, como veremos a seguir.

Definição 1.1. *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. A composição de f n vezes consigo mesma, isto é,*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-vezes}}.$$

é definida como a n -ésima iterada de f . Quando $n = 0$, $f^0 = Id$.

Definição 1.2. *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. A órbita positiva de um ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ é dada por*

$$\mathcal{O}_f^+(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots\} = (f^n(z)).$$

Quando f é uma bijeção, podemos definir a órbita negativa de z da seguinte forma,

$$\mathcal{O}_f^-(z) = \{z, f^{-1}(z), f^{-2}(z), \dots\} = (f^{-n}(z)).$$

E a órbita de z é dada por $\mathcal{O}_f(z) = \mathcal{O}_f^+(z) \cup \mathcal{O}_f^-(z)$.

Definição 1.3. *Dizemos que um ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ é periódico, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) = z$. Quando isto acontece, a órbita para frente de z é periódica, isto é*

$$\mathcal{O}_f^+(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots, f^{n-1}(z)\},$$

e esta órbita é chamada de ciclo. O menor $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz $f^n(z) = z$, é chamado período de z . Em particular, se $f(z) = z$, então z é um ponto fixo de f .

Exemplo 1.1. Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por $f(z) = z^2 - 2z + 2$. Observe que

$$f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Como, 1 e 2 são as raízes dessa equação, segue que os pontos fixos de f são 1, 2 e ∞ .

A seguir, veremos uma classificação desses pontos. Os pontos fixos em especial, desempenham um papel importante nessa teoria, com relação a convergência das órbitas. Basta observar que se uma órbita $(f^n(z))$ converge para um ponto $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, temos

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(z)\right) = f(w),$$

ou seja, w é um ponto fixo.

Definição 1.4. Seja $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ um ponto periódico de período n . O multiplicador de f em z_0 é dado por

$$\lambda = \begin{cases} (f^n)'(z_0), & z_0 \neq \infty. \\ (g^n)'(0), & z_0 = \infty. \end{cases}$$

onde $g(z) = \frac{1}{f(1/z)}$.

z_0 é classificado da seguinte forma:

- (i) z_0 é atrator, se $0 < |\lambda| < 1$;
- (ii) z_0 é superatrator, se $|\lambda| = 0$;
- (iii) z_0 é repulsor, se $|\lambda| > 1$;
- (iv) z_0 é racionalmente neutro ou parabólico, se $|\lambda| = 1$ e $\lambda^n = 1$ para algum $n \in \mathbb{Z}$,
- (v) z_0 é irracionalmente neutro, se $|\lambda| = 1$ e $\lambda^n \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.2. Seja $f(z) = z^2 - 2z + 2$. Vimos no Exemplo 1.1 que os pontos fixos de f são 1, 2 e ∞ . Observe que $f'(z) = 2z - 2$, assim, temos, $f'(1) = 0$, $f'(2) = 2$. Além disso,

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)} = \frac{1}{\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 2} = \frac{z^2}{1 - 2z + 2z^2}.$$

Derivando essa função, temos

$$g'(z) = \frac{2z - 2z^2}{(1 - 2z + 2z^2)^2},$$

e $g'(0) = 0$. Pela Definição 1.4, segue que os pontos 1 e ∞ são superatratores e 2 é um ponto repulsor.

Estamos interessados em estabelecer uma caracterização para as funções que estão definidas na esfera de Riemann, para isso, precisamos das seguintes definições.

Definição 1.5. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que g é holomorfa em A , se $g'(z)$ existe para todo $z \in A$.*

Definição 1.6. *Seja $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Dizemos que $h(z)$ é uma função racional, se*

$$h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

onde $P(z), Q(z)$ são polinômios tais que $\text{mdc}(P(z), Q(z)) = 1$. Denotamos por $\text{grau}(P)$ (resp. $\text{grau}(Q)$) o grau de P (resp. Q). O grau de h é dado por $d = \max(\text{grau}(P), \text{grau}(Q))$. Neste trabalho, sempre vamos considerar $b \geq 2$.

Quando $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é uma aplicação holomorfa, temos o seguinte resultado, devido a Georg Friedric Bernhard Riemann, que mostrou que toda função holomorfa definida na esfera de Riemann é uma função racional.

Teorema 1.1 ([29]). *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa. Então existem polinômios $P(z)$ e $Q(z)$ tais que*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

com $\text{mdc}(P(z), Q(z)) = 1$, ou seja, f é uma aplicação racional.

Outros conceitos importantes, são os que dizem respeito a convergência localmente uniforme e a normalidade de uma família de aplicações. Tais conceitos serão abordados a seguir.

Definição 1.7. *Seja (f_n) uma sequência de aplicações tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \rightarrow Y$ é uma aplicação entre os espaços métricos (X, d) e (Y, \tilde{d}) . Dizemos que (f_n) converge localmente uniformemente em X para a aplicação $r : X \rightarrow Y$, se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança V_x , tal que*

$$f_n \rightarrow r \quad (n \rightarrow \infty)$$

uniformemente em V_x .

Definição 1.8 (Normalidade). *Sejam (X, d) e (Y, \tilde{d}) espaços métricos. Uma família de aplicações $\mathfrak{F} = \{g : X \rightarrow Y\}$ é normal em X , se toda sequência infinita de aplicações em \mathfrak{F} contém uma subsequência que converge localmente uniformemente em X .*

Um resultado importante que expressa uma caracterização de famílias normais, é o Teorema de Montel. Antes de enunciá-lo e fazermos a prova, precisamos de alguns resultados auxiliares, que se encontram a seguir, e podem ser vistos com mais detalhes em [16].

Definição 1.9. Dizemos que uma aplicação $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é conforme ou univalente, se g é holomorfa e um-para-um (injetora).

Definição 1.10. Uma aplicação $p : R \rightarrow S$ é chamada uma aplicação de recobrimento (ou apenas recobrimento) quando cada ponto $x \in S$ pertence a conjunto aberto $V \subset S$ tal que

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

é uma união disjunta dois a dois de conjuntos abertos U_{α} , tal que, para cada α , restrição $p|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow V$ é um homeomorfismo. Em particular, quando p é holomorfa e R e S são superfícies de Riemann, ou seja, são variedades complexas e conexas, de dimensão complexa 1 (veja [28]), a restrição $p|_{U_{\alpha}}$ é uma aplicação conforme.

Um subconjunto $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ aberto e conexo é chamado de domínio. Em particular, se $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é um domínio tal que, qualquer curva fechada em D pode ser deformada em um ponto de D , então, dizemos que D é um domínio simplesmente conexo. De acordo com a Definição 1.10, se R é uma superfície de Riemann simplesmente conexa, então a aplicação $p : R \rightarrow S$ é denominada de recobrimento universal, e neste caso, R é uma cobertura universal de S , que denotamos por S^{∞} . Além disso, existe um teorema que garante a existência de uma aplicação conforme, entre um domínio simplesmente conexo e o disco unitário, chamado de Teorema da Aplicação de Riemann, o qual mencionamos a seguir.

Teorema 1.2 (Teorema da Aplicação de Riemann[20]). Seja $D \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio simplesmente conexo. Então existe uma aplicação conforme entre D e o disco unitário $D_1 = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$.

Teorema 1.3 ([16]). Seja $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio e $\mathfrak{F} = \{f : D \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}$ uma família de funções holomorfas que é limitada por uma constante fixa $M > 0$, ou seja, para toda $f \in \mathfrak{F}$, $|f| \leq M$. Então \mathfrak{F} é uma família normal.

Com esses resultados, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 1.4 ([16]). Seja $S = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ a esfera três vezes perfurada. Então existe uma aplicação conforme entre o disco unitário D_1 e S .

Demonstração. Seja $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ o semi-plano superior. Como H é conexo, pelo Teorema da Aplicação de Riemann, existe uma aplicação conforme $\varphi : H \rightarrow D_1$. A partir disso, é suficiente encontramos uma aplicação de recobrimento $\psi : H \rightarrow S$. Considere o disco unitário $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < x < 1; |z - 1/2| > 1/2\}$. Pelo Teorema da Aplicação de Riemann, existe uma aplicação conforme $\psi : E \rightarrow H$, que fixa os pontos $0, 1, \infty$. Seja F a reflexão de E através do círculo

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| = 1/2\}.$$

Pelo Princípio da reflexão de Schwarz (veja [20]), podemos estender ψ de modo que $\psi : E \cup F \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\}$ seja uma aplicação conforme. Aplicando novamente o Princípio da reflexão de Schwarz, podemos estender ψ ao conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < x < 1; y > 0\},$$

de modo que ψ assuma valores em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Finalmente, fazendo a reflexão através da reta $x = n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$ podemos estender ψ ao semi-plano H . Por construção, segue que $\psi : H \rightarrow S$ é uma aplicação de recobrimento. Como φ é uma aplicação conforme, segue que $\varphi^{-1} : D_1 \rightarrow H$ também é conforme. Além disso, a composição entre uma aplicação de recobrimento e uma aplicação conforme resulta em uma aplicação conforme. Portanto, $\psi \circ \varphi^{-1} : D_1 \rightarrow S$ é uma aplicação conforme, o que conclui a prova. \square

Definição 1.11. *Seja $p : R^\infty \rightarrow R$ um recobrimento universal de R e $f : D \rightarrow R$ uma aplicação entre superfícies de Riemann, tal que D é simplesmente conexa. Dizemos que $\tilde{f} : D \rightarrow R^\infty$ é um levantamento, se satisfaz*

$$p \circ \tilde{f} = f.$$

Definição 1.12. *Uma transformação de Möbius é uma aplicação racional $r : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, tal que*

$$r(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Teorema 1.5 (Teorema de Montel [16]). *Seja $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ um domínio e \mathfrak{F} uma família de funções holomorfas $f : D \subset \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que omite três valores distintos, isto é, assuma que existem pontos distintos $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ tais que $f(D) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$, para toda $f \in \mathfrak{F}$. Então \mathfrak{F} é uma família normal.*

Demonstração. Pelo Teorema da Aplicação de Riemann, podemos assumir que D é um disco. Seja $r : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ uma transformação de Möbius, tal que, para toda $f \in \mathfrak{F}$, a composição $r \circ f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ não assume os valores $0, 1, \infty$. Seja $S = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Pelo Teorema 1.4, existe uma aplicação conforme $\psi : D_1 \rightarrow S$. Dada um função $f \in \mathfrak{F}$, seja $h_f : D \rightarrow D_1$ um levantamento de f , tal que $\psi \circ h_f = f$. Como h_f é holomorfa e limitada, segue do Teorema 1.3, que a família $\mathfrak{G} = \{h_f : f \in \mathfrak{F}\}$ é normal, pois, para toda $h_f \in \mathfrak{G}$, $|h_f| < 1$. Dada uma sequência de funções (h_{f_n}) em \mathfrak{G} , pela normalidade dessa família, resulta que

$$h_{f_{n_k}}(x) \rightarrow h(x) \quad (k \rightarrow \infty),$$

para todo $x \in D$. Por hipótese, ψ é uma aplicação conforme, em particular, é uma aplicação contínua. Isso implica que

$$\psi(h_{f_{n_k}}(x)) \rightarrow \psi(h(x)) \quad (k \rightarrow \infty),$$

para todo $x \in D$, ou seja, a subsequência $(\psi \circ h_{f_{n_k}})$ converge localmente uniformemente em D . Como, $f = \psi \circ h_f$, para toda $f \in \mathfrak{F}$, segue que \mathfrak{F} é uma família normal. \square

Antes de prosseguirmos, vamos estabelecer algumas notações que serão utilizadas com frequência neste trabalho. Seja $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$, então

- (i) \overline{E} é o fecho de E .
- (ii) $E^c = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus E)$ é o complementar de E .
- (iii) $\text{diam}(E) = \sup\{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(x, y) : x, y \in E\}$, onde $d_{\widehat{\mathbb{C}}}$ é a métrica cordal em $\widehat{\mathbb{C}}$.
- (iv) se $r > 0$ e $a \in \mathbb{C}$, $D_r(a) = D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$. Em particular, $D_r = D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.

1.2 Conjuntos de Fatou e Julia

Nesta seção, vamos definir os principais objetos de estudo em dinâmica complexa, os conjuntos de Fatou e Julia, bem como veremos algumas propriedades desses conjuntos. As figuras inseridas nessa seção, foram geradas pelo software Fraqtive [30], que permite a visualização dos conjuntos de Julia quando consideramos a família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.

Definição 1.13. *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa não constante. O conjunto dos pontos $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tais que a família $\{f^n\}$ é normal, é chamado de conjunto de Fatou, o qual denotamos por \mathcal{F}_f . O seu complementar é chamado de conjunto de Julia, que denotamos por \mathcal{J}_f .*

Por definição, o conjunto de Fatou é aberto e o conjunto de Julia é fechado. Como a esfera de Riemann é compacta, isso implica que o conjunto de Julia é compacto. Uma aplicação direta da Definição 1.13, pode ser vista no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3. *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por $f(z) = z^2$. Observe que $f^n(z) = z^{2^n}$. Assim, temos:*

- (i) *se $|z| < 1$, então $f^n(z) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. De fato, como $|z| < 1$, temos $|z| \leq (1 - \delta)$, para algum $0 < \delta < 1$. Logo, $|z^{2^n}| = |z|^{2^n} \leq (1 - \delta)^{2^n}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \left\lceil \ln \left(\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(1-\delta)} \right) / \ln(2) \right\rceil$. Assim, para todo $n > n_0$, resulta que $|(1 - \delta)^{2^n}| < \epsilon$, isso implica que $|f^n(z)| = |z^{2^n}| < \epsilon$. Portanto, $f^n(z) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.*

- (ii) se $|z| > 1$, então $f^n(z) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Com efeito, como $|z| > 1$, temos $|z| \geq 1 + \delta$, para algum $\delta > 0$, isso implica que $|z^{2^n}| = |z|^{2^n} \geq (1 + \delta)^{2^n}$. Dado $K > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \left\lceil \ln \left(\frac{\ln(K)}{\ln(1+\delta)} \right) / \ln(2) \right\rceil$. Assim, para todo $n > n_0$, segue que $(1 + \delta)^{2^n} > K$, ou seja, $(1 + \delta)^{2^n} \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $f^n(z) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.
- (iii) se $|z| = 1$, para qualquer vizinhança U de z , existem pontos $y, w \in U$, para os quais $f^n(y) \rightarrow \infty$ e $f^n(w) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Isso significa que em qualquer vizinhança U de z , f não converge localmente uniformemente.

Portanto, $\mathcal{J}_f = S^1$. Veja a Figura 2.

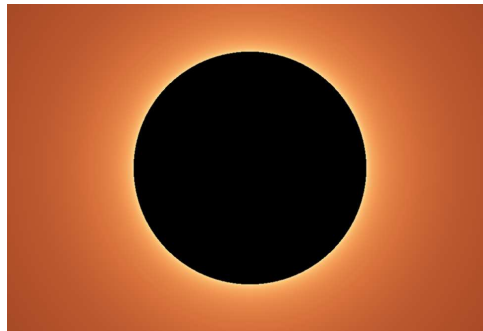
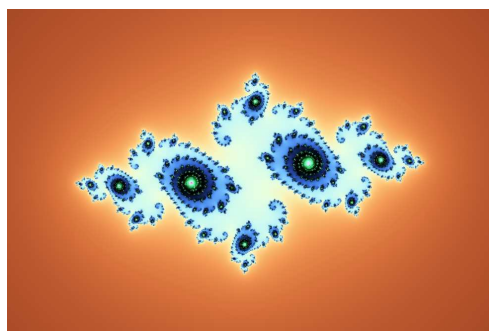
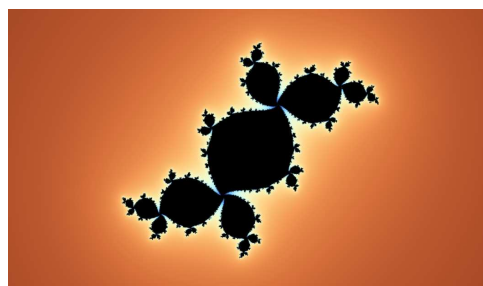


Figura 2 – Conjunto de Julia para $f(z) = z^2$.

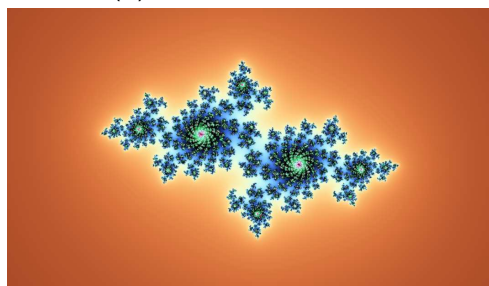
O Exemplo 1.3 é um caso particular do conjunto de Julia associado à família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. Quando $c = 0$, o conjunto de Julia é um disco, mas essa estrutura muda completamente, quando fazemos uma pequena variação do parâmetro $c \in \mathbb{C}$. Podemos ver algumas dessas variações, nas figuras a seguir.



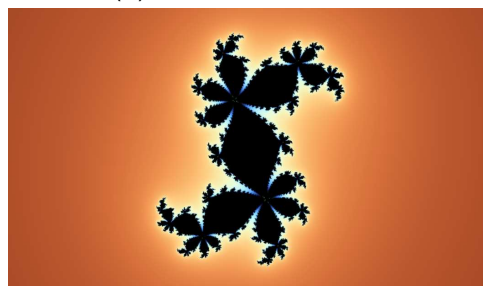
(a) $c = -0.75 + 0.17i$.



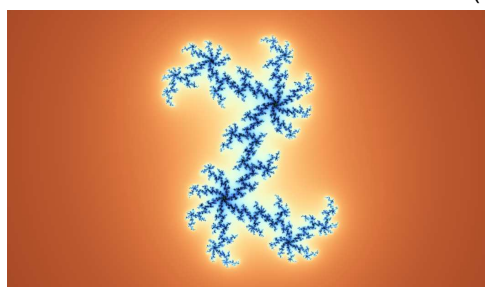
(b) $c = -0.139 + 0.7i$.



(c) $c = -0.7 - 0.298i$.



(d) $c = 0.374 + 0.334i$.



(e) $c = 0.41096 - 0.23i$.

Ainda considerando a família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, podemos destacar o conjunto dos parâmetros $c \in \mathbb{C}$, tais que a órbita $(f_c^n(0))$ é limitada, e consequentemente, o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é conexo. A explicação para este fato, será vista no Capítulo 2. Esse conjunto é chamado conjunto de Mandelbrot, o qual denotamos por \mathcal{M} . Ele é um conjunto compacto e simplesmente conexo, que está contido no disco $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$, e a sua interseção com o eixo real, coincide com o intervalo $[-2, \frac{1}{4}]$. Veja a Figura 4.

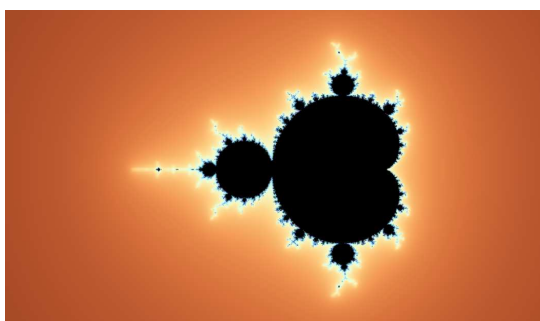


Figura 4 – Conjunto de Mandelbrot para $f_c(z) = z^2 + c$.

A seguir, formalizamos a definição de invariância de um subconjunto $A \subset X$, para um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$. Essa propriedade é importante, pois permite estimar pontos atratores e regiões de atração para sistemas dinâmicos periódicos não lineares. Também veremos a relação existente entre a invariância e os conjuntos de Fatou e Julia no contexto clássico.

Definição 1.14. *Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. Um subconjunto $A \subset X$ é dito ser:*

- (i) *positivamente invariante se $f(A) \subset A$.*
- (ii) *negativamente invariante se $f^{-1}(A) \subset A$.*
- (iii) *completamente invariante se $f(A) = A$.*

Lema 1.1 (Lema da Invariância [16]). *Seja $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa de grau maior ou igual a dois. O conjunto de Julia \mathcal{J}_f é completamente invariante sob f .*

Demonstração. Devemos provar que $f(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f$, o que é equivalente a mostrar que $f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$, visto que \mathcal{J}_f é o complementar de \mathcal{F}_f . Seja $z_0 \in f^{-1}(\mathcal{F}_f)$, então $w_0 = f(z_0) \in \mathcal{F}_f$. Por definição, $\{f^n\}$ é normal em alguma vizinhança U de w_0 , ou seja, existe uma subsequência (f^{n_k}) tal que $f^{n_k} \rightarrow g$, localmente uniformemente em U , isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $n_{k_0}(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n_k > n_{k_0}(\epsilon)$,

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k}(w), g(w)) < \epsilon,$$

para todo $w \in U$. Pela continuidade de f , $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de z_0 . Seja $z \in f^{-1}(U)$, onde $z = f^{-1}(w)$ para algum $w \in U$. Assim, para todo $n_k + 1 > n_k > n_{k_0}(\epsilon)$, temos

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k+1}(z), g(f(z))) = d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k+1}(f^{-1}(w)), g(f(f^{-1}(w)))) = d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k}(w), g(w)) < \epsilon.$$

Assim, $\{f^{n_k+1}\}$ é normal na vizinhança $V = f^{-1}(U)$ de z_0 , e $z_0 \in \mathcal{F}_f$. Portanto, $f^{-1}(\mathcal{F}_f) \subset \mathcal{F}_f$. Agora, seja $x_0 \in \mathcal{F}_f$, e suponha que $(f^{n_k+1} = f^{n_k} \circ f)$ converge localmente uniformemente em alguma vizinhança W de x_0 , para a aplicação $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $n_{k_1}(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n_k > n_{k_1}(\epsilon)$,

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k+1}(x), h(x)) < \epsilon,$$

para todo $x \in W$. Como f é holomorfa e $\text{grau}(f) \geq 2$, pelo Teorema da Aplicação Aberta (veja [20] p.233), resulta que $f(W)$ é uma vizinhança de $f(x_0)$. Seja $y \in f(W)$ e $z \in f^{-1}(y) \subset W$. Observe que $f(z) = y$ e pela normalidade de $\{f^{n_k+1}\}$ em W , segue que para todo $n_k > n_{k_1}(\epsilon)$,

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k}(y), h(f^{-1}(y))) = d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k}(f(z)), h(f^{-1}(f(z)))) = d_{\hat{\mathbb{C}}}(f^{n_k+1}(z), h(z)) < \epsilon,$$

ou seja, $\{f^n\}$ é normal na vizinhança $f(W)$ de $f(x_0)$, logo, $f(x_0) \in \mathcal{F}_f$ e $f(\mathcal{F}_f) \subset \mathcal{F}_f$. Como $f^{-1}(\mathcal{F}_f) \subset \mathcal{F}$, isso implica que $\mathcal{F}_f \subset f(\mathcal{F}_f)$. Portanto, $f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$, e o conjunto de Fatou é completamente invariante, como queríamos provar. \square

Lema 1.2 (Lema da Iteração[28]). Para qualquer $N \in \mathbb{N}$, o conjunto de Julia de f^N coincide com o conjunto de Julia de f , ou seja, $\mathcal{J}_{f^N} = \mathcal{J}_f$.

Demonstração. Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa. Vamos mostrar que $\mathcal{J}_{f^N} = \mathcal{J}_f, \forall N \in \mathbb{N}$. Isto resulta da afirmação a seguir.

Afirmação: $\{f^n\}$ é normal em um conjunto aberto U se, e somente se, $\{f^{nN}\}$ é normal em U .

(\Leftarrow) Seja $N \in \mathbb{N}$. Suponha que $\{f^{nN}\}$ é normal em U , então existe uma subsequência $(f^{n_k N}) \subset \{f^{nN}\}$ que converge localmente uniformemente em U . Como $\{f^{nN}\} \subset \{f^n\}$, segue que $(f^{n_k N})$ é uma subsequência de $\{f^n\}$. Logo $\{f^n\}$ é normal em U .

(\Rightarrow) Suponha que $\{f^n\}$ é normal em U , então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_{k_0}(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_k > n_{k_0}$,

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{n_k}(z), g(z)) < \epsilon,$$

para todo $z \in U$, onde $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Seja $N = 2$ e considere a família $\{f^{2n}\}$. Como f^{n_k} é contínua para todo $n_k \in \mathbb{N}$, existe $\delta = \epsilon > 0$, tal que para todo $n_k > n_{k_0}$,

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{n_k}(z), g(z)) < \delta \Rightarrow d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{n_k}(f^{n_k}(z)), f^{n_k}(g(z))) < \epsilon,$$

ou seja, $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{2n_k}(z), f^{n_k}(g(z))) < \epsilon$. Logo, $\{f^{2n}\}$ é normal em U . Suponha que para $N = K$, a família $\{f^{nK}\}$ é normal em U . Vamos provar para $N = K + 1$. Pela normalidade de $\{f^{nK}\}$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_{j_0}(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_j > n_{j_0}$,

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{n_j K}(z), h(z)) < \epsilon,$$

para todo $z \in U$, onde $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Observe que $f^{n_j K} = \underbrace{f^{n_j} \circ f^{n_j} \circ \dots \circ f^{n_j}}_{K\text{-vezes}}$. Pela continuidade de f^{n_j} para todo $n_j \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \epsilon > 0$, para todo $n_j > n_{j_0}$, temos

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{n_j K}(z), h(z)) < \delta \Rightarrow d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{n_j}(f^{n_j K}(z)), f^{n_j}(h(z))) < \epsilon,$$

isto é, $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f^{n_j(K+1)}(z), f^{n_j}(h(z))) < \epsilon$, ou seja, $\{f^{n(K+1)}\}$ é normal em U . Portanto, $\{f^{nN}\}$ é normal em U , para todo $N \in \mathbb{N}$.

Pela definição do conjunto de Fatou, segue que $\mathcal{F}_{f^N} = \mathcal{F}_f$, $\forall N \in \mathbb{N}$, logo, $\mathcal{J}_{f^N} = \mathcal{J}_f$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 1.6 ([16]). *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa de grau $d \geq 2$, então o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é não vazio.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{J}_f = \emptyset$. Então, $\{f^n\}$ é uma família normal em toda a esfera $\widehat{\mathbb{C}}$. Por definição, existe uma subsequência (f^{n_k}) tal que $f^{n_k}(z) \rightarrow g(z)$ quando $k \rightarrow \infty$, e $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é uma aplicação holomorfa, logo, pelo Teorema 1.1, segue que g é uma aplicação racional.

Afirmção: Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ holomorfa. Então $f(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$.

De fato, como f é holomorfa, pelo Teorema 1.1, segue que f é uma aplicação racional, ou seja, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios que não tem fatores em comum. É claro que $f(\widehat{\mathbb{C}}) \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Vamos mostrar que $\widehat{\mathbb{C}} \subset f(\widehat{\mathbb{C}})$. Dado $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ considere o polinômio $R(z) = P(z) - wQ(z)$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, R tem raízes em \mathbb{C} . Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ uma raiz de R , isso implica $R(z_0) = 0$, assim, $\frac{P(z_0)}{Q(z_0)} = w$. Logo, existe $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f(z_0) = w$. Portanto, $\widehat{\mathbb{C}} \subset f(\widehat{\mathbb{C}})$ e $f(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$.

Se g é constante, então a imagem de f^{n_k} está contida em uma pequena vizinhança de um valor constante, mas pela afirmação acima isso não é possível, pois $f^n(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se g não é constante, segue pelo Princípio do Argumento (veja [20]), que f^{n_k} tem o mesmo número de zeros que g , mas isso é impossível, pois f^n tem grau d^n , que diverge quando $n \rightarrow \infty$, pois $d \geq 2$. Portanto, $\mathcal{J}_f \neq \emptyset$. □

Antes de provarmos o próximo teorema, atentamos para a seguinte situação. Seja $w \in \mathcal{J}_f$ e V uma vizinhança qualquer de w . Observe que $\{f^n\}$ não é normal em V , logo, $\{f^n\}$ omite um conjunto \mathcal{E} que contém no máximo dois pontos, pois, caso contrário, $\{f^n\}$ seria normal em V pelo Teorema de Montel.

Definição 1.15. *O conjunto \mathcal{E} descrito acima, é chamado conjunto excepcional de f .*

Teorema 1.7 ([16]). *Seja \mathcal{E} o conjunto excepcional de f . Se \mathcal{E} contém um único ponto, podemos conjugá-lo com ∞ , dessa forma, $f(z)$ é um polinômio. Se \mathcal{E} contém dois pontos, podemos conjugá-lo com 0 e ∞ , e então, $f(z) = Cz^d$ ou $f(z) = Cz^{-d}$. Em ambos os casos, $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_f$.*

Demonstração. Observe que $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$. Suponha que $\mathcal{E} = \{a\}$. Então $f(a) = a$. Fazendo $a = \infty$, segue que $f^{-1}(\infty) = \infty$, e não existem outros polos, logo, f é um polinômio. Se \mathcal{E} contém dois pontos, podemos assumir que $\mathcal{E} = \{0, \infty\}$, assim, temos

$f(0) = 0, f(\infty) = \infty$ ou $f(0) = \infty, f(\infty) = 0$. No primeiro caso, f é um polinômio com apenas uma raiz, isso implica, $f(z) = Cz^d$. No segundo caso, a única raiz do polinômio é ∞ , logo, $f(z) = Cz^{-d}$. \square

Teorema 1.8 ([28]). *Seja $z_0 \in \mathcal{J}_f$ um ponto arbitrário e U uma vizinhança qualquer de z_0 . A união W das imagens positivas de $f^n(U)$ contém o conjunto de Julia, isto é, $\mathcal{J}_f \subset W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$, além disso, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E} \subset W$, onde \mathcal{E} é o conjunto excepcional de f .*

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathcal{J}_f$ e $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$. Observe que $f(W) \subset W$. De fato,

$$f(W) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)\right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{n+1}(U) = W.$$

Além disso, o conjunto $W^c = \widehat{\mathbb{C}} \setminus W$ pode conter no máximo dois pontos, senão, pelo Teorema de Montel, $\{f^n\}$ seria normal em W , o que é uma contradição, visto que $z_0 \in W \cap \mathcal{J}_f$, logo, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E} \subset W$. Usando novamente o fato de $f(W) \subset W$, vemos que se $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus W$, então $f^{-1}(z) \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus W$. Com efeito, suponha que $f^{-1}(z) \in W$, então, $z \in f(W) \subset W$, assim, $z \in W$, uma contradição. Isso implica que $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$. Como $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_f$, segue que $\mathcal{E} \cap \mathcal{J}_f = \emptyset$, por isso, $\mathcal{J}_f \subset W$. Agora, tomando U é suficientemente pequena de modo que $U \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$, segue que $W = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$. \square

Teorema 1.9 ([16]). *Seja $z \in \mathcal{J}_f$ um ponto qualquer. A órbita negativa*

$$\mathcal{O}^-(z) = \{z, f^{-1}(z), f^{-2}(z), \dots\}$$

é densa em \mathcal{J}_f .

Demonstração. Seja $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio tal que $D \cap \mathcal{J}_f \neq \emptyset$. Considere $z \in D \cap \mathcal{J}_f$. Pelo Teorema 1.8, $\mathcal{J}_f \subset V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(D)$, assim, para algum $m \in \mathbb{N}$, $z \in f^m(D)$, logo, $f^{-m}(z) \in D$, e $D \cap \mathcal{O}^-(z) \neq \emptyset$. Como D é arbitrário, segue que $\mathcal{O}^-(z)$ é densa em \mathcal{J}_f . \square

Teorema 1.10 ([28]). *Seja $z \in \mathcal{J}_f$ um ponto qualquer. A órbita positiva*

$$\mathcal{O}_f^+(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

é densa em \mathcal{J}_f .

Demonstração. Como o conjunto de Julia é compacto, para cada $j > 0$, podemos cobri-lo com uma quantidade finita de conjuntos abertos B_{j_k} , com $\text{diam}(B_{j_k}) < \frac{1}{j}$. Para cada B_{j_k} , seja $W_{j_k} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(B_{j_k})$. Do Teorema 1.9, segue que $\overline{W_{j_k}} \cap \mathcal{J}_f = \mathcal{J}_f$, ou seja, $W_{j_k} \cap \mathcal{J}_f$ é um subconjunto denso de \mathcal{J}_f . Seja $z \in W_{j_k} \cap \mathcal{J}_f$, então, para algum $m \in \mathbb{N}$, $z \in f^{-m}(B_{j_k})$, isso implica que $f^m(z) \in B_{j_k}$ e $f^m(z) \in \mathcal{J}_f$. Dessa forma, $\mathcal{O}^+(z) \cap B_{j_k} \neq \emptyset$ para cada B_{j_k} . Pela arbitrariedade desses conjuntos, segue que $\mathcal{O}^+(z)$ é densa em \mathcal{J}_f . \square

Teorema 1.11 ([16]). *Se o conjunto de Julia \mathcal{J}_f contém ponto interior, então $\mathcal{J}_f = \widehat{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Seja $z_0 \in \text{int}(\mathcal{J}_f)$, então existe um aberto $U \subset \mathcal{J}_f$ tal que $z_0 \in U$. Observe que $f^n(U) \subset f^n(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois \mathcal{J}_f é completamente invariante. Como, $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}$ é denso em $\widehat{\mathbb{C}}$, segue que $\overline{W} = \widehat{\mathbb{C}}$. Por outro lado, $W \subset \mathcal{J}_f$, pois, se $z \in W$, então $z \in f^n(U)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $f^n(U) \subset \mathcal{J}_f$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, $z \in \mathcal{J}_f$, o que implica $\overline{W} \subset \overline{\mathcal{J}_f} = \mathcal{J}_f$, já que \mathcal{J}_f é fechado. Assim, $\widehat{\mathbb{C}} \subset \mathcal{J}_f$. Portanto, $\mathcal{J}_f = \widehat{\mathbb{C}}$. \square

Definição 1.16. *Dizemos que um conjunto X , não vazio, é perfeito, se todos os seus pontos são pontos de acumulação, ou seja, X não tem pontos isolados.*

A partir dessa definição, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.12 ([16]). *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Se f tem grau $d \geq 2$, então \mathcal{J}_f não tem pontos isolados, isto é, \mathcal{J}_f é um conjunto perfeito.*

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathcal{J}_f$ e V uma vizinhança aberta de z_0 . Suponha que z_0 não é periódico. Como $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é contínua, então $f^{-1}(V) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é um conjunto aberto. Seja $w \in f^{-1}(V)$, tal que $f(w) = z_0$. Observe que $f^n(z_0) \neq w$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois caso contrário, existiria $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(z_0) = w$ e teríamos $f^{k+1}(z_0) = f(w) = z_0$, daí, z_0 seria periódico, o que é uma contradição. Note que $w \in \mathcal{J}_f$ e $\mathcal{O}_f^-(w)$ é densa em \mathcal{J}_f , assim, para todo domínio $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $D \cap \mathcal{J}_f \neq \emptyset$, tem-se $D \cap \mathcal{O}_f^-(w) \neq \emptyset$. Em particular, $V \cap \mathcal{O}_f^-(w) \neq \emptyset$, logo, existe $a \in V \cap \mathcal{O}_f^-(w)$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-m}(w) = a$, deste modo, $w = f^m(a)$. Portanto, $a \in \mathcal{J}_f \cap V$ e $a \neq z_0$. Agora, suponha que z_0 é periódico e de período k , isto é $f^k(z_0) = z_0$. Suponha que z_0 seja a única solução de $f^k(z) = z_0$, dessa forma, $(f^k)'(z_0) = 0$, e z_0 seria um ponto fixo superatrator de f^k , o que é uma contradição, pois $z_0 \in \mathcal{J}_f$. Logo, deve existir $y_0 \in V$, $y_0 \neq z_0$ com $f^k(y_0) = z_0$. Além disso, $f^j(z_0) \neq y_0$, para todo $0 \leq j < k$, caso contrário, teríamos

$$f^j(z_0) = f^{k+j}(z_0) = f^k(f^j(z_0)) = f^k(y_0) = z_0$$

contradizendo o fato de k ser o período de z_0 . Portanto, $y_0 \in \mathcal{J}_f \cap V$, e \mathcal{J}_f é um conjunto perfeito. \square

A seguir, definimos outros objetos de estudo, a saber, a bacia de atração de um ponto fixo atrator e o conjunto de Julia cheio.

Definição 1.17. *Seja $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ um ponto fixo atrator. Chamamos de bacia de atração de z_0 , o conjunto*

$$\mathcal{A}(z_0) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0\}.$$

Existe uma relação entre o conjunto de Julia, e o bordo da bacia de atração de um ponto fixo atrator. Antes de provarmos essa relação, precisamos do seguinte resultado.

Teorema 1.13 ([16]). *Seja $E \subset \mathcal{J}_f$ um conjunto completamente invariante. Então, E é denso em \mathcal{J}_f . Além disso, se D é uma união de componentes de \mathcal{F}_f , tal que D é completamente invariante, segue que $\mathcal{J}_f = \partial D$.*

Teorema 1.14 ([16]). *Seja w um ponto periódico atrator. A bacia de atração $\mathcal{A}(w)$ é uma união de componentes do conjunto de Fatou. Além disso, o conjunto de Julia é o bordo de $\mathcal{A}(w)$, ou seja, $\mathcal{J}_f = \partial \mathcal{A}(w)$.*

Demonstração. Suponha que w é um ponto periódico atrator de período k e considere o ciclo $\mathcal{O}_f^+(w) = \{w, f(w), \dots, f^{k-1}(w)\}$. Seja $U \subset \mathcal{F}_f$ uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_f^+(w)$.

Afirmção: $\mathcal{A}(w) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$.

De fato, seja $z \in \mathcal{A}(w)$, por definição, $f^n(z) \rightarrow w$, ($n \rightarrow \infty$). Como $w \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $f^m(z) \in U$, isto implica que $z \in f^{-m}(U) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$, logo, $\mathcal{A}(w) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$. Agora, seja $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$, então $y \in f^{-n}(U)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, resulta que $f^n(y) \in U \subset \mathcal{F}_f$. Como $w \in U$ é um ponto periódico atrator, segue que $f^n(y) \rightarrow w$, ($n \rightarrow \infty$), logo, $y \in \mathcal{A}(w)$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U) \subset \mathcal{A}(w)$. Portanto, $\mathcal{A}(w) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$.

Dessa afirmação resulta que $\mathcal{A}(w)$ é um conjunto aberto. Seja $a \in \partial \mathcal{A}(w)$ e V uma vizinhança qualquer de a . Observe que $f^n(z) \rightarrow w$, ($n \rightarrow \infty$) em $V \cap \mathcal{A}(w)$ e $f^n(z) \notin \mathcal{A}(w)$ se $z \in V \setminus \mathcal{A}(w)$. Isso implica que $\{f^n\}$ não é normal em V , e $a \in \mathcal{J}_f$. Como $\mathcal{A}(w)$ é completamente invariante, pelo Teorema 1.13, segue que $\mathcal{J}_f = \partial \mathcal{A}(w)$. \square

Quando f é um polinômio de grau $d \geq 2$, por definição, ∞ é um ponto fixo superatrator e a bacia de atração

$$\mathcal{A}(\infty) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty\}$$

é um domínio. Além disso, temos a seguinte definição.

Definição 1.18. *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa polinomial de grau $d \geq 2$. Definimos*

$$\mathcal{K}_f = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : f^n(z) \not\rightarrow \infty\}$$

como o conjunto de Julia Cheio.

Segue diretamente da Definição 1.17, que $\mathcal{K}_f = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}(\infty)$, e além disso, $\mathcal{J}_f = \partial \mathcal{K}_f$. A demonstração da última igualdade pode ser vista em [28].

Definição 1.19. *Seja \mathcal{O} uma órbita periódica de período m . Definimos a bacia de atração de \mathcal{O} , como o conjunto aberto $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, tal que*

$$\mathcal{A} = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n.m}(z) \rightarrow w\},$$

onde $w \in \mathcal{O}$. A bacia de atração imediata de \mathcal{O} , a qual denotamos por \mathcal{A}_0 , é dada pela união das componentes conexas de \mathcal{A} , que contém um ponto de \mathcal{O} .

Teorema 1.15 ([28]). *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa e $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ um ponto periódico de período n . A bacia de atração de cada órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou, e cada órbita periódica repulsora está contida no conjunto de Julia.*

Demonstração. Seja $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ um ponto fixo de f , com multiplicador λ , e z um ponto suficientemente próximo de z_0 , tal que

$$|f(z) - z_0| = |f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0)| \cdot |z - z_0| = |\lambda| \cdot |z - z_0|.$$

Suponha que para $n = k$, a igualdade $|f^k(z) - z_0| = |\lambda|^k \cdot |z - z_0|$ seja verdadeira. Para $n = k + 1$, temos

$$\begin{aligned} |f^{k+1}(z) - z_0| &= |f^{k+1}(z) - f^{k+1}(z_0)| \\ &= |f'(z_0)| \cdot |f^k(z) - z_0| \\ &= |f'(z_0)| \cdot |\lambda|^k \cdot |z - z_0| \\ &= |\lambda|^{n+1} \cdot |z - z_0| \end{aligned}$$

Pelo Princípio de Indução Finita, $|f^n(z) - z_0| = |\lambda|^n \cdot |z - z_0|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $|\lambda| > 1$ então nenhuma sequência de iteradas de f converge uniformemente próximo de z_0 , pois $|\lambda|^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e neste caso, $z_0 \in \mathcal{J}_f$. Se $|\lambda| < 1$, então $f^n(z) \rightarrow z_0$, em uma vizinhança próxima de z_0 , pois neste caso, $|\lambda|^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, se $|\lambda| < 1$, por definição, $\mathcal{A}(z_0) \subset \mathcal{F}_f$. Se z_0 é um ponto periódico de período m , basta tomar $g = f^m$ e aplicar o raciocínio acima para g . \square

Por fim, mencionamos uma propriedade importante do conjunto de Julia, chamada de autossimilaridade. Isso significa que uma parte do conjunto a ser estudado possui as mesmas características do conjunto todo, sendo uma propriedade típica dos fractais. Isso nos leva a seguinte definição.

Definição 1.20. *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma função holomorfa e $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Dizemos que E é autossimilar se para todo domínio $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $D \cap E \neq \emptyset$, existe $N = N(D) \in \mathbb{N}$, tal que $f^N(D \cap E) = E$.*

Teorema 1.16 ([32]). *Seja $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma função holomorfa. O conjunto de Julia \mathcal{J} é autossimilar.*

1.3 Dinâmica Complexa Randômica

Nesta seção, falaremos sobre o conceito de dinâmica complexa randômica ou aleatória, que foi inicialmente estudado por Fornaess e Sibony em [19]. Para isto, vamos definir o que é uma iteração generalizada, bem como os conjuntos de Fatou e Julia nesse contexto geral. Além disso, veremos as diferenças que surgem em relação aos resultados da teoria clássica. Tais resultados, podem ser vistos com mais detalhes em [12].

Definição 1.21. *Seja (f_{c_n}) uma sequência de funções holomorfas, com $c_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A n -ésima iterada de (f_{c_n}) é dada por*

$$f_{\omega}^n = f_{c_n} \circ f_{c_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}, \quad (1.1)$$

onde $\omega = (c_n)$ é uma sequência em $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Quando $n = 0$, colocamos $f_{\omega}^0 = Id$ e $f_{\omega} = f_{c_1}$.

Na prática, cada função f_{ω}^n definida acima, é uma composição de funções que são distintas por um parâmetro. Por exemplo, considere a sequência (f_{c_n}) , onde, $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$, e ω é uma sequência em $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Observe que,

$$\begin{aligned} f_{\omega}^2(z) &= f_{c_2} \circ f_{c_1}(z) \\ &= (f_{c_1}(z))^2 + c_2 \\ &= (z^2 + c_1)^2 + c_2. \end{aligned}$$

O que difere do caso clássico, quando consideramos $f_c(z) = z^2 + c$, onde $c \in \mathbb{C}$ é um parâmetro fixo, e $f^2(z) = f \circ f(z) = (z^2 + c)^2 + c$. Naturalmente, as noções dos conjuntos de Fatou e Julia podem ser generalizadas para o caso randômico, como veremos a seguir.

Definição 1.22 (Conjuntos de Fatou e Julia). *Seja (f_{c_n}) uma sequência de funções holomorfas. Definimos o conjunto de Fatou \mathcal{F}_{ω} , como o conjunto dos pontos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tais que a família $\{f_{\omega}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é normal em alguma vizinhança U de z . O complementar de \mathcal{F}_{ω} é chamado de conjunto de Julia, e denotamos por \mathcal{J}_{ω} .*

Vimos no Teorema 1.6, que o conjunto de Julia de uma função holomorfa $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grau $d \geq 2$ é não vazio. Esse resultado também é válido no caso randômico, como segue.

Teorema 1.17 ([12]). *Seja (f_{c_n}) uma sequência de funções holomorfas, onde f_{c_n} tem grau $d \geq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, conjunto de Julia \mathcal{J}_{ω} é não vazio.*

Muitos resultados da teoria clássica não podem ser generalizados de forma direta, e isto acontece porque, neste contexto, os conjuntos de Fatou e Julia não são completamente invariantes. Uma condição que se aproxima da invariância para o caso randômico, foi provada em [2], de acordo com o seguinte lema.

Lema 1.3 ([2]). *Seja (f_{c_n}) uma seqüência de funções holomorfas. Então,*

$$(f_{\omega}^k)^{-1}(f_{\omega}^k(\mathcal{F}_{\omega})) = \mathcal{F}_{\omega} \quad \text{e} \quad (f_{\omega}^k)^{-1}(f_{\omega}^k(\mathcal{J}_{\omega})) = \mathcal{J}_{\omega},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, outras situações podem ocorrer, como mostra o exemplo a seguir, em que o conjunto de Julia contém um único ponto.

Exemplo 1.4 ([12]). *Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a seqüência $f_{c_n}(z) := \frac{z^2}{n^{1+2^n}}$. Queremos provar que, para $R > 0$ e $|z| \leq R$, temos*

$$|f_{\omega}^n(z)| \leq \frac{R^{2^n}}{n^{1+2^n}} = \frac{1}{n} \left(\frac{R}{n} \right)^{2^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} f_{\omega}(z) &= f_{c_1}(z) = z^2 \leq R^2, \\ f_{\omega}^2(z) &= f_{c_2}(f_{c_1}(z)) = \frac{(z^2)^2}{2^{1+2^2}} = \frac{z^4}{2^{1+2^2}} \leq \frac{R^4}{2^{1+2^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{2} \right)^{2^2}. \end{aligned}$$

Suponha que para $n = k \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$|f_{\omega}^k(z)| \leq \frac{R^{2^k}}{k^{1+2^k}} = \frac{1}{k} \left(\frac{R}{k} \right)^{2^k},$$

seja verdadeira. Vamos provar para $n = k + 1$. Assim, temos

$$f_{\omega}^{k+1}(z) = f_{k+1}(f_{\omega}^k(z)) = \frac{(f_{\omega}^k(z))^2}{(k+1)^{1+2^{k+1}}} \leq \frac{1}{(k+1)^2} \frac{R^{2^{k+1}}}{(k+1)^{1+2^{k+1}}}.$$

Como $\frac{1}{(k+1)^2} \leq 1$, obtemos

$$|f_{\omega}^{k+1}(z)| \leq \frac{R^{2^{k+1}}}{(k+1)^{1+2^{k+1}}}.$$

Portanto,

$$|f_{\omega}^n(z)| \leq \frac{R^{2^n}}{n^{1+2^n}} = \frac{1}{n} \left(\frac{R}{n} \right)^{2^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, segue que $f_{\omega}^n \rightarrow 0$ localmente uniformemente em \mathbb{C} . Observe que 0 é um ponto fixo atrator de $f_{\omega}^n(z)$, pois $f_{\omega}^n(0) = 0$, e

$$(f_{\omega}^n)'(0) = \prod_{j=1}^n f_j'(f_{\omega}^{j-1}(0)) = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f_{\omega}^n(\infty) = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o raio $R > 0$ é arbitrário, pelo Teorema 1.17 segue que $\mathcal{J}_{\omega} = \{\infty\}$.

No caso clássico, o conjunto de Julia é perfeito, de acordo com o Teorema 1.12, mas no caso randômico, essa propriedade nem sempre é satisfeita, conforme vimos no exemplo anterior. Outra situação que pode acontecer, é o conjunto de Julia conter pontos interiores, mas $\mathcal{J}_\omega \neq \hat{\mathbb{C}}$. Veja o próximo resultado.

Teorema 1.18 ([12]). *Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ conjuntos abertos e limitados tais que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{A}$ e $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{B}$ são domínios simplesmente conexos, e $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Então existe uma sequência (f_{c_n}) de polinômios, tais que $A \subset \mathcal{F}$ e $B \subset \mathcal{J}_\omega$.*

1.4 Teoria da Medida e Integração

Nesta seção, veremos alguns resultados da teoria de medida e integração que serão utilizados neste trabalho. Tais resultados podem ser vistos com mais detalhes em [5].

Definição 1.23. *Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X . Dizemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma σ -álgebra de X se verifica:*

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- (iii) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Dizemos que (X, \mathcal{A}) é um espaço mensurável. Se $A \in \mathcal{A}$, dizemos que A é \mathcal{A} -mensurável.

Exemplo 1.5. *Seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 3, 5, 7, \dots\}, \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \mathbb{N}\}$. Segue diretamente da definição que \mathcal{A} é uma σ -álgebra do conjunto dos números naturais.*

Exemplo 1.6. *Seja (X, τ) um espaço topológico. A σ -álgebra gerada pela topologia é chamada de σ -álgebra de Borel, a qual denotamos por $\text{Borel}(X)$.*

Exemplo 1.7. *Seja $X \neq \emptyset$ e $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ um conjunto de σ -álgebras de X . Então, $\bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{A}_\alpha$ é uma σ -álgebra de X .*

Demonstração. De fato, observe que

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}_\alpha$, para todo $\alpha \in L$, logo, $\emptyset, X \in \bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{A}_\alpha$.
- (ii) Seja $A \in \bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{A}_\alpha$, então $A \in \mathcal{A}_\alpha$, para todo $\alpha \in L$. Como \mathcal{A}_α é uma σ -álgebra de X , para todo $\alpha \in L$, $A^c \in \mathcal{A}_\alpha$, logo, $A^c \in \bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{A}_\alpha$.

- (iii) Seja $A_i \in \bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{A}_\alpha$, para todo $\alpha \in L$ e todo $i \in \mathbb{N}$. Deste modo, $A_i \in \mathcal{A}_\alpha$, para todo $\alpha \in L$ e todo $i \in \mathbb{N}$. Disso, resulta que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_\alpha$, para todo $\alpha \in L$, logo,
- $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{A}_\alpha.$$

Portanto, $\bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{A}_\alpha$ é uma σ -álgebra de X . □

Definição 1.24. *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uma função \mathcal{A} -mensurável se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Quando consideramos o conjunto dos números reais estendidos, isto é,

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

dizemos que $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ é uma função real estendida, e neste caso, $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ é uma função \mathcal{A} -mensurável se cumpre a Definição 1.24. A partir desta observação, enunciamos o lema a seguir, que desempenha um papel importante na definição de integral de uma função mensurável.

Lema 1.4 ([5]). *Seja $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ uma função mensurável com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X$. Então, existe uma sequência $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, tal que*

- (i) $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.
- (iii) As funções φ_n são simples para todo $n \in \mathbb{N}$, isto significa que essas funções assumem um número finito de valores.

Estamos interessados em estabelecer o conceito de medida, bem como as suas propriedades, e isto é feito a seguir.

Definição 1.25. *Seja X um conjunto não vazio e \mathcal{A} uma σ -álgebra de conjuntos de X . Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ tal que*

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mu(E) \geq 0$, para todo $E \in \mathcal{A}$.
- (iii) *Seja $E_n \in \mathcal{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ disjuntos dois a dois, isto é, $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Dizemos que (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida. Em particular, quando $\mu(X) = 1$, dizemos que μ é uma medida de probabilidade.

Exemplo 1.8. Seja $p \in X$, definimos

$$\mu^p(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in E \\ 0, & \text{se } p \notin E \end{cases}$$

μ^p é chamada de medida de Dirac de p .

Exemplo 1.9. Seja $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \text{Borel}(\mathbb{R})$. Existe uma única medida μ_L definida em $\text{Borel}(\mathbb{R})$ que coincide com o comprimento dos intervalos abertos, ou seja, se $(a, b) = E \in \text{Borel}(\mathbb{R})$ é um intervalo não vazio, então, $\mu_L(E) = b - a$. A medida μ_L é chamada de medida de Lebesgue. Esse conceito pode ser estendido para o \mathbb{R}^n , o que torna possível o cálculo da medida de subconjuntos mais gerais de espaços euclidianos n -dimensionais. Em particular, quando $n = 2$ ou 3 , a medida de Lebesgue coincide com as medidas padrões de área e volume. A definição formal da medida de Lebesgue e a suas aplicações, podem ser vistas com detalhes em [5].

Exemplo 1.10. Seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\mu(E) = \#E$, isto é a cardinalidade de E . Esta é uma medida de contagem.

Lema 1.5 ([5]). Seja μ uma medida definida em uma σ -álgebra de X . Se $E, F \in \mathcal{A}$ e $E \subset F$, então,

(i) $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(ii) Se $\mu(E) < \infty$, então $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Demonstração. De fato, note que $F = E \cup (F - E)$, assim, temos

$$\mu(F) = \mu(E \cup (F - E)) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E).$$

Agora, se $\mu(E) < \infty$, segue diretamente que $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$. A hipótese de $\mu(E) < \infty$ é essencial, pois do contrário, teríamos $\mu(E) = \infty$ e como $E \subset F$, segue que $\mu(F) = \infty$, logo, $\mu(F - E) = \infty - \infty$, e esta operação não está definida. \square

Lema 1.6 ([5]). Seja μ uma medida definida em uma σ -álgebra de X .

(i) Se (E_n) é uma sequência crescente em \mathcal{A} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

(ii) Se (F_n) é uma sequência decrescente em \mathcal{A} e $\mu(F_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Vamos denotar o conjunto das funções reais estendidas e mensuráveis por $M_{\mathcal{A}}$, ou seja, $M_{\mathcal{A}} = \{f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{R}} : f \text{ é mensurável}\}$. Além disso, seja $E \in \mathcal{A}$. A função característica de E é dada por

$$\mathcal{X}_E = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Como mencionamos anteriormente, uma função $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples, se assume um número finito de valores. Em particular, toda função simples é uma combinação linear finita de funções características. Dito isso, podemos formalizar a definição de integral para uma função simples, conforme veremos a seguir. Além disso, dados subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos $E_i \subset X$, $i = 1, \dots, n$, vamos considerar $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$.

Definição 1.26. *Seja $\varphi \in M_{\mathcal{A}}^+ = \{f \in M_{\mathcal{A}} / f \geq 0\}$ uma função simples. Definimos a integral de φ com relação μ como*

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i),$$

onde φ é representada por $\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}$. Denotamos $\mu(E) = \int_X \mathcal{X}_E d\mu$.

A partir dessa definição, muitas propriedades podem ser provadas, e além disso, pode-se generalizar a definição de integral para funções mensuráveis que não são simples. Esse processo pode ser visto com detalhes em [5]. Não iremos aprofundar na teoria de integração, pois não é o objetivo deste trabalho. Queremos avançar para o conceito de medida produto, sendo assim, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.27. *Sejam (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) espaços mensuráveis. O conjunto $A \times B$ com $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ é chamado de retângulo em $Z = X \times Y$. Denotamos por $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ a σ -álgebra de subconjuntos de $Z = X \times Y$, gerada pelos retângulos $A \times B$.*

Dados dois espaços de medida (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) , será que o produto $\mu \cdot \nu$ é uma medida em $Z = X \times Y$? O próximo teorema responde essa pergunta.

Teorema 1.19 ([5]). *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) espaços de medida. Existe uma medida π definida em $Z = X \times Y$ tal que*

$$\pi(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$ e todo $B \in \mathcal{B}$.

2 Dinâmica Polinomial Randômica

Abordaremos agora o caso de dinâmica polinomial randômica. Neste capítulo, vamos trabalhar com uma classe de seqüências de polinômios e apresentar alguns resultados que se encontram em [12], [13], [14] e [18].

Definição 2.1. *Seja (f_{c_n}) uma seqüência de polinômios de grau $d_n \geq 2$ e ω a seqüência formada pelos parâmetros $c_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Definimos a bacia de atração do infinito, como o conjunto,*

$$\mathcal{A}_\omega(\infty) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_\omega^n(z) = \infty\}.$$

Em [14], o autor considerou a classe \mathcal{S} de polinômios como a seguir.

Definição 2.2. *Dizemos que uma seqüência de polinômios (f_{c_n}) pertence a classe \mathcal{S} , se (f_{c_n}) satisfaz as condições:*

- (i) *existe $R > 0$ e $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > R\}$ um domínio invariante, tal que $f_{c_n}(M) \subset M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\infty \in M$.*
- (ii) *$f_\omega^n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) localmente uniformemente em M .*

Definição 2.3 (big O). *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, funções reais. Dizemos que $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow \infty$) se, e somente se, existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq M \cdot |g(x)|,$$

para todo $x \geq x_0$.

A definição de big O fornece uma caracterização do comportamento das funções, em relação às suas taxas de crescimento. Tendo em vista as aplicações, esse conceito é estudado tanto na ciência da computação quanto na teoria analítica dos números e em outras áreas. O exemplo a seguir trás uma aplicação direta dessa definição.

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determinamos o big O de f , da seguinte forma:

- (i) *se $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ é uma função polinomial, devemos manter o termo de maior grau da lei de formação de f .*
- (ii) *se o termo destacado em (i) é um produto de fatores, isto é, $a_i x^i$, $i = 1, \dots, n$, devemos omitir as constantes.*

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 7x^5 + 4x^3 - 2$. Pelo item (i), devemos considerar o termo de maior grau de f , ou seja, $7x^5$. Por (ii), a constante deve ser omitida, o que resulta em x^5 . Seja $g(x) = x^5$. Vamos vamos provar que $f(x) = O(x^5)$ ($x \rightarrow \infty$). Para $x_0 = 1$ e $x \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} |f(x)| = |7x^5 + 4x^3 - 2| &\leq 7|x^5| + 4|x^3| + 2 \\ &\leq 7x^5 + 4x^5 + 2x^5 \\ &= 13g(x). \end{aligned}$$

Logo, para todo $x \geq 1$ e $M = 13$, $|f(x)| \leq M|g(x)|$. Portanto, $f(x) = O(x^5)$ ($x \rightarrow \infty$).

A Definição 2.3 será utilizada no teorema a seguir.

Teorema 2.1 ([14]). Seja (f_{c_n}) uma sequência de polinômios da forma,

$$f_{c_n}(z) = \sum_{k=0}^{d_n} c_{n,k} z^k, \quad (2.1)$$

com $d_n \geq 2$, $c_{n,d_n} \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que:

- (i) $\inf\{|c_{n,d_n}| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.
- (ii) $\max\{|c_{n,k}| : 0 \leq k < d_n\} = O(|c_{n,d_n}|)$.

Então $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Pela hipótese (i), existe uma constante $b > 0$ tal que $|c_{n,d_n}| \geq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, além disso, por (ii), existe uma contante $B \geq 0$, de modo que $|c_{n,k}| \leq B|c_{n,d_n}|$, para $k = 0, 1, \dots, d_n - 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ (Definição 2.3). A partir dessas contantes, podemos escolher $R \in \mathbb{R}$, $R > 1$, tal que

$$c = bR \left(1 - \frac{B}{R-1}\right) > 1.$$

Assim, para todo $z \in \mathbb{C}$, com $|z| > R$, temos

$$\begin{aligned} |f_{c_n}(z)| &\geq |c_{n,d_n}| \left(|z|^{d_n} - \sum_{k=0}^{d_n-1} \frac{|c_{n,k}|}{|c_{n,d_n}|} |z|^k \right) \\ &\geq b \left(|z|^{d_n} - B \sum_{k=0}^{d_n-1} |z|^k \right) \\ &= b \left(|z|^{d_n} - B \frac{|z|^{d_n-1}}{|z|-1} \right) \\ &\geq b \left(|z|^{d_n} - B \frac{|z|^{d_n}}{|z|-1} \right) \\ &\geq b \left(1 - \frac{B}{R-1} \right) |z|^{d_n} \\ &= c |z|^{d_n} > cR > R. \end{aligned}$$

Isso mostra que $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > R\}$ é um domínio invariante, e $f_\omega^n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente em M . Portanto, $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$. \square

No início da demonstração do Teorema 2.1, verificamos as condições:

(P1) existe uma constante $b > 0$ tal que $|c_{n,d_n}| \geq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(P2) existe uma constante $B \geq 0$ tal que $|c_{n,k}| \leq B|c_{n,d_n}|$, para $k = 0, 1, \dots, d_n - 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,

que são consequências imediatas da hipótese do teorema. Agora, vamos introduzir uma terceira condição:

(P3) existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $\log |c_{n,d_n}| \leq C|d_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.4. *Seja $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $E \neq \emptyset$. Definimos a órbita negativa de E com respeito a sequência (f_ω^n) como sendo*

$$\mathcal{O}^-(E) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (f_\omega^n)^{-1}(E).$$

Na abordagem de dinâmica clássica estudada no Capítulo 1, vimos que o conjunto de Julia coincide com o bordo da bacia de atração no infinito. Quando consideramos uma sequência de polinômios em \mathcal{S} , esse resultado também é válido no caso randômico, como veremos a seguir.

Lema 2.1 ([14]). *Seja $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$ e M o domínio invariante no infinito correspondente. Então*

$$\mathcal{J}_\omega = \partial \mathcal{O}^-(M).$$

Além disso, $f_\omega^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ localmente uniformemente em $\mathcal{O}^-(M)$.

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$. Observe que $f_\omega^n(z_0) \notin M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z_0 \notin \mathcal{O}^-(M)$. De fato, se existisse algum $m \in \mathbb{N}$, tal que $f_\omega^m(z_0) \in M$, então $z_0 \in (f_\omega^m)^{-1}(M) \subset M \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$, pois M é invariante, assim, $z_0 \in \mathcal{A}_\omega(\infty) \subset \mathcal{F}$, uma contradição, pois $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$. Seja V uma vizinhança qualquer de z_0 , e $W = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_\omega^n(V)$. Suponha que $M \cap W = \emptyset$, dessa forma, $f_\omega^n(V)$ é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$, e pelo Teorema de Montel, (f_ω^n) é normal em V , logo, $z_0 \in \mathcal{F}_\omega$, o que é uma contradição. Deste modo, $M \cap W \neq \emptyset$ para toda vizinhança V de z_0 .

Afirmção 1: $V \cap \mathcal{O}^-(M) \neq \emptyset$ para toda vizinhança V de z_0 .

De fato, seja V uma vizinhança qualquer de z_0 . Como $M \cap W \neq \emptyset$, temos,

$$\emptyset \neq M \cap W = M \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} f_\omega^n(V) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_\omega^n(V) \cap M,$$

logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\emptyset \neq f_\omega^n(V) \cap M \Rightarrow \emptyset \neq (f_\omega^n)^{-1}(f_\omega^n(V) \cap M) = V \cap (f_\omega^n)^{-1}(M),$$

assim,

$$\emptyset \neq \bigcup_{n=0}^{\infty} V \cap (f_\omega^n)^{-1}(M) = V \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} (f_\omega^n)^{-1}(M) = V \cap \mathcal{O}^-(M).$$

Da afirmação acima, resulta que qualquer vizinhança V de z_0 intersepta o conjunto $\mathcal{O}^-(M)$ e $z_0 \notin \mathcal{O}^-(M)$. Portanto, $z_0 \in \partial\mathcal{O}^-(M)$ e $\mathcal{J}_\omega \subset \partial\mathcal{O}^-(M)$. Agora, vamos provar a outra inclusão. Seja $z_0 \in \partial\mathcal{O}^-(M)$ e suponha que $z_0 \in \mathcal{F}_\omega$. Considere a componente $U \subset \mathcal{F}_\omega$ tal que $z_0 \in U$, e $K \subset \mathcal{O}^-(M)$ um conjunto compacto. Por definição, M é um conjunto aberto, e $\mathcal{O}^-(M)$ é uma cobertura de K . Pela compacidade de K , $\mathcal{O}^-(M)$ admite uma subcobertura finita, assim, $K \subset \bigcup_{i=1}^k (f_\omega^i)^{-1}(M)$. Assim, temos

$$f_\omega^k(K) \subset f_\omega^k\left(\bigcup_{i=1}^k (f_\omega^i)^{-1}(M)\right) = f_\omega^k(f_\omega^{-1}(M) \cup \dots \cup f_\omega^{-k}(M)) = f_\omega^{k-1}(M) \cup \dots \cup M = M,$$

pois M é invariante. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_\omega^k(K) \subset M$. Isso implica que,

$$f_{c_n} \circ f_{c_{n-1}} \circ \dots \circ f_{c_{k+1}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

localmente uniformemente em $f_\omega^k(K)$. Pelo Teorema de Vitali(veja [6] p.56) a convergência obtida em $f_\omega^k(K)$ pode ser estendida, de modo que

$$f_{c_n} \circ f_{c_{n-1}} \circ \dots \circ f_{c_{k+1}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

localmente uniformemente em M . Dessa forma, $f_\omega^n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente em K , e como $K \subset \mathcal{O}^-(M)$, essa convergência também ocorre em $\mathcal{O}^-(M)$. Observe que $U \cap \mathcal{O}^-(M) \neq \emptyset$ e $U \subset \mathcal{F}_\omega$, logo, $f_\omega^n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) localmente uniformemente em U , pelo Teorema de Vitali. Além disso, como $\infty \in M$, segue que para todo conjunto compacto $B \subset U$, existe $N = N(B) \in \mathbb{N}$, tal que $f_\omega^N(B) \subset M$. Note que $U \subset M$, basta verificar que se $U \not\subset M$, então $f_\omega^n(U) \not\subset f_\omega^n(M)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $B \subset U$, segue que $f_\omega^n(B) \not\subset f_\omega^n(M)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Logo, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$U \subset M \Rightarrow f_\omega^n(U) \subset f_\omega^n(M) \subset M,$$

pois M é invariante, assim, $U \subset (f_\omega^n)^{-1}(M) \subset \mathcal{O}^-(M)$, mas isso é uma contradição, pois $z_0 \in U \cap \partial\mathcal{O}^-(M)$ e $\mathcal{O}^-(M)$ é um conjunto aberto. Portanto, $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$ e

$$\partial\mathcal{O}^-(M) \subset \mathcal{J}_\omega.$$

□

Teorema 2.2 ([14]). *Seja $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$. Então $\mathcal{A}_\omega(\infty)$ é um domínio estável de (f_{c_n}) e satisfaz*

$$\mathcal{A}_\omega(\infty) = \mathcal{O}^-(M) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (f_\omega^k)^{-1}(M)$$

para algum $R > 0$. Além disso, temos $\mathcal{J}_\omega = \partial\mathcal{A}_\omega(\infty)$. Em particular, o conjunto de Julia não tem pontos interiores.

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathcal{A}_\omega(\infty) = \mathcal{O}^-(M)$. Seja $w \in \mathcal{O}^-(M)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y = f_\omega^m(w) \in M$. Logo,

$$f_{c_n} \circ f_{c_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}}(y) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

localmente uniformemente em $f_\omega^m(M) \subset M$. Assim, $f_\omega^n(w) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) e $w \in \mathcal{A}_\omega(\infty)$, ou seja, $\mathcal{O}^-(M) \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$. Agora, seja $z \in \mathcal{A}_\omega(\infty)$. Por definição,

$$f_\omega^n(z) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

sendo assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_\omega^n(z) \in M$, pois $\infty \in M$. Por isso,

$$z \in (f_\omega^n)^{-1}(M) \subset \mathcal{O}^-(M).$$

Portanto, $\mathcal{A}_\omega(\infty) \subset \mathcal{O}^-(M)$, e pelo Lema 2.1, $\mathcal{J}_\omega = \partial\mathcal{A}_\omega(\infty)$, o que conclui a prova. \square

Vimos no Capítulo 1, Teorema 1.16, que em dinâmica clássica o conjunto de Julia é autossimilar. Agora, estamos interessados em provar uma condição de autossimilaridade do conjunto de Julia, para o contexto randômico. Nesse sentido, dizemos que o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é autossimilar, se para todo domínio $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, existe

$$N = N(D) \in \mathbb{N},$$

tal que

$$f_\omega^N(D \cap \mathcal{J}_\omega) = f_\omega^N(\mathcal{J}_\omega) \Leftrightarrow (f_\omega^N)^{-1}(f_\omega^N(D \cap \mathcal{J}_\omega)) = \mathcal{J}_\omega.$$

Iniciamos essa investigação com o seguinte lema.

Lema 2.2 ([14]). *Seja $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$ e $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio tal que $D \cap \mathcal{J}_\omega \neq \emptyset$. Então, nenhuma subsequência de (f_ω^n) é normal em D .*

Demonstração. Suponha que (f_ω^n) possui uma subsequência $(f_\omega^{n_k})$ que converge localmente uniformemente em D . Por hipótese, $D \cap \mathcal{J}_\omega \neq \emptyset$, então existe $z_0 \in D \cap \mathcal{J}_\omega$. Pelo Lema 2.1, $D \cap \mathcal{O}^-(M) \neq \emptyset$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $D \cap (f_\omega^N)^{-1}(M) \neq \emptyset$, e então $f_\omega^N(D) \cap M \neq \emptyset$. Assim, para todo $n_k \geq N$, $f_\omega^{n_k} \rightarrow \infty$ localmente uniformemente em $f_\omega^N(D)$. Pelo Teorema de Vitali, podemos estender essa convergência para o domínio D . Assim, de acordo com a prova do Lema 2.1 devemos ter $D \subset \mathcal{O}^-(M) \subset \mathcal{F}_\omega$, o que é uma contradição, pois $D \cap \mathcal{J}_\omega \neq \emptyset$. Portanto, nenhuma subsequência de (f_ω^n) é normal em D . \square

Lema 2.3 ([14]). *Seja $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$. Suponha que $\forall n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega)$ contém pelo menos dois pontos. Então, existe uma sequência estritamente crescente $(n_k) \subset \mathbb{N}$, tal que para todo $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$*

$$\text{diam } g_k^{-1}(G_k(z_0)) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

onde $g_k = f_{c_{n_k}} \circ f_{c_{n_k-1}} \circ \cdots \circ f_{c_{n_{k-1}+1}}$ e $G_k = g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1$.

Teorema 2.3 ([14]). *Para toda sequência $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$, o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é autossimilar.*

Demonstração. Seja $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio tal que $D \cap \mathcal{J}_\omega \neq \emptyset$. Se $\text{diam } f_\omega^n(\mathcal{J}) = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então $f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega) = \{y_0\}$, pois, $\mathcal{J}_\omega \neq \emptyset$. Como

$$(D \cap \mathcal{J}_\omega) \subset \mathcal{J}_\omega \Rightarrow f_\omega^n(D \cap \mathcal{J}_\omega) \subset f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega).$$

Suponha $\{y_0\} = f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega) \not\subset f_\omega^n(D \cap \mathcal{J}_\omega)$, então,

$$y_0 \notin f_\omega^n(D \cap \mathcal{J}_\omega) \Rightarrow (f_\omega^n)^{-1}(y_0) \notin D \cap \mathcal{J}_\omega \Rightarrow y_0 \notin f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega),$$

o que é uma contradição. Logo, $f_\omega^n(D \cap \mathcal{J}_\omega) = \{y_0\}$, e isso mostra que

$$f_\omega^n(D \cap \mathcal{J}_\omega) = \{y_0\} = f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega),$$

ou seja, \mathcal{J}_ω é autossimilar. Agora, suponha que $f_\omega^n(\mathcal{J})$ contém pelo menos dois pontos. Vamos considerar a sequência $(n_k) \subset \mathbb{N}$ e os polinômios g_k de acordo com o Lema 2.3.

Afirmção 1: $\mathcal{J}_\omega = \mathcal{J}_{(g_k)}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, seja $z \in \mathcal{J}_\omega$ e suponha que $z \notin \mathcal{J}_{(g_k)}$, então, $z \in \mathcal{F}_{(g_k)}$, e por definição, (g_k) é normal em alguma vizinhança V de z . Como $g_k = f_{c_{n_k}} \circ f_{c_{n_k-1}} \circ \cdots \circ f_{c_{n_{k-1}+1}}$, segue que $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de (f_ω^n) , logo, $z \in \mathcal{F}_\omega$, o que é uma contradição. Portanto, $z \in \mathcal{J}_{(g_k)}$ e $\mathcal{J}_\omega \subset \mathcal{J}_{(g_k)}$. A outra inclusão segue diretamente do Lema 2.2, pois nenhuma subsequência de (f_ω^n) é normal em D .

Queremos mostrar que $\mathcal{J}_{(g_k)}$ é autossimilar, e pela igualdade provada na Afirmção 1, resulta que \mathcal{J}_ω é autossimilar. Para isto, é suficiente mostrar que

$$W = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k^{-1}(G_k(z_0))$$

é um subconjunto denso de \mathcal{J}_ω , para todo $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$ e com isso, provar que

$$\mathcal{J}_\omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k^{-1}(G_k(D \cap \mathcal{J}_\omega)).$$

Suponha que exista $w \in \mathcal{J}_\omega \setminus \overline{W}$, e seja U uma vizinhança de w , tal que $U \cap \overline{W} = \emptyset$. Logo, para todo $x \in U$

$$x \notin G_k^{-1}(G_k(z_0)) \Rightarrow G_k(x) \notin G_k(z_0).$$

Como $G_k(z_0) = g_{k+1}^{-1}(G_{k+1}(z_0))$ (veja [2], Lema 1.1), implica,

$$g_{k+1}^{-1}(G_{k+1}(z_0)) \cap G_k(U) = \emptyset.$$

Pelo Lema 2.3, existe uma sequência $(k_l) \subset \mathbb{N}$ e números complexos $\xi_l, \theta_l \in g_{k_l+1}^{-1}(G_{k_l+1}(z_0))$ tais que $\liminf_{l \rightarrow \infty} |\xi_l - \theta_l| > 0$. Além disso, as sequências $(\xi_l), (\theta_l)$ são limitadas pois $\xi_l, \theta_l \notin M$, para todo $l \in \mathbb{N}$. De fato, se existisse $j \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_j \in M$, então

$$g_{k_l+1}(\xi_j) \rightarrow \infty \quad (l \rightarrow \infty).$$

Por outro lado, $\xi_j \in g_{k_l+1}^{-1}(G_{k_l+1}(z_0))$, ou seja, $g_{k_l+1}(\xi_j) \in G_{k_l+1}(z_0)$, logo,

$$g_{k_l+1}(\xi_j) = G_{k_l+1}(z_0).$$

Isso mostra que $G_{k_l+1}(z_0) \rightarrow \infty, (l \rightarrow \infty)$, logo, $z_0 \in \mathcal{A}_\omega(\infty) \subset \mathcal{F}$, o que é uma contradição, pois $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$. O mesmo vale para θ_l . Considere o conjunto de transformações lineares $T_l : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$T_l(z) = \frac{1}{\xi_l - \theta_l} z + \frac{\xi_l}{\xi_l - \theta_l}$$

tais que $H_l = T_l \circ G_{k_l}$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Afirmção 2: $0, 1 \notin H_l(U)$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Com efeito, suponha que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in H_l(U)$, então existe $x \in U$ tal que

$$H_l(x) = 0 \Rightarrow T_l(G_{k_l}(x)) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\xi_l - \theta_l} G_{k_l}(x) + \frac{\xi_l}{\xi_l - \theta_l} = 0,$$

assim, $G_{k_l}(x) = -\xi_l \in g_{k+1}^{-1}(G_{k+1}(z_0))$, o que é uma contradição, pois $U \cap \overline{W} = \emptyset$. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para o número 1.

Observe que, pelo Teorema de Montel, (H_l) é normal em U . Além disso, os coeficientes de T_l são limitados, pois $|\xi_l - \theta_l| \geq \inf |\xi_l - \theta_l| = a > 0$ e $|\xi_l| \leq C$, para todo $l \in \mathbb{N}$, daí,

$$\frac{1}{\xi_l - \theta_l} \leq \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \frac{\xi_l}{\xi_l - \theta_l} \leq \frac{C}{a}.$$

Dessa forma,

$$H_l = T_l(G_{k_l}) = \frac{G_{k_l} + \xi_l}{\xi_l - \theta_l} \Rightarrow G_{k_l} = (\xi_l - \theta_l)H_l - \xi_l,$$

isso implica que (G_{k_l}) é normal em U . Pelo Lema 2.2, $U \subset \mathcal{F}_{(g_k)} = \mathcal{F}_\omega$, o que é uma contradição, pois $w \in U \cap \mathcal{J}_\omega$. Portanto, $\mathcal{J}_\omega = \overline{W}$ e W é denso em \mathcal{J}_ω . Resta mostrar que $\mathcal{J}_\omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k^{-1}(G_k(D \cap \mathcal{J})) = X$. Suponha que exista $z_0 \in \mathcal{J}_\omega \setminus X$. Como W é denso em \mathcal{J}_ω , existe $y \in D \cap \mathcal{J}_\omega$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in G_m^{-1}(G_m(z_0))$. Assim, temos $z_0 \in G_m^{-1}(G_m(y)) \subset X$, o que é uma contradição. Logo, $\mathcal{J}_\omega \subset X$. Por outro lado, como $D \cap \mathcal{J}_\omega \subset \mathcal{J}_\omega$, segue que

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k^{-1}(G_k(D \cap \mathcal{J}_\omega)) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k^{-1}(G_k(z_0)), \forall z_0 \in \mathcal{J}_\omega \subset \mathcal{J}_\omega.$$

Portanto, $\mathcal{J}_\omega = X$, e o resultado está provado. \square

Além disso, vimos no Teorema 1.12 que o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é um conjunto perfeito, isso significa que todos os seus pontos são pontos de acumulação, ou seja, \mathcal{J}_f não tem pontos isolados. Quando consideramos uma sequência $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$, essa propriedade também é satisfeita, de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 2.4 ([14]). *Seja $(f_{c_n}) \in \mathcal{S}$. Então o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é perfeito ou finito. No caso finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega)$ contém um único ponto.*

Demonstração. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega)$ contém pelo menos dois pontos. Vamos provar que o conjunto de Julia é perfeito. Pelo Lema 2.3, sabemos que

$$\text{diam}(f_{c_n})^{-1}(f_\omega^n(z_0)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

para todo $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$. Observe que $(f_{c_n})^{-1}(f_\omega^n(z_0)) \subset f_\omega^{n-1}(\mathcal{J}_\omega)$, para todo $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$. De fato, seja $w_0 \in (f_{c_n})^{-1}(f_\omega^n(z_0))$, então, $f_{c_n}(w_0) \in f_\omega^n(z_0)$, isso implica,

$$f_{c_n}(w_0) = f_\omega^n(z_0) \in f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega),$$

já que $z_0 \in \mathcal{J}_\omega$, daí, $w_0 \in f_{c_n}^{-1}(f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega)) = f_\omega^{n-1}(\mathcal{J}_\omega)$. Por definição,

$$\begin{aligned} \text{diam } f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega) &= \sup\{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f_\omega^n(x), f_\omega^n(y)) : x, y \in \mathcal{J}_\omega\} \\ &\geq \sup\{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f_\omega^{n-1}(x), f_\omega^{n-1}(y)) : x, y \in \mathcal{J}_\omega\} \\ &\geq \text{diam } f_{c_n}^{-1}(f_\omega^n(z_0)), \forall z_0 \in \mathcal{J}_\omega, \end{aligned}$$

assim, $\text{diam } f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega) \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$. Como \mathcal{J}_ω é autossimilar (Teorema 2.3) dado um domínio $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $D \cap \mathcal{J}_\omega \neq \emptyset$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $f_\omega^k(D \cap \mathcal{J}_\omega) = f_\omega^k(\mathcal{J}_\omega)$. Logo, para $n \geq k$, temos

$$\text{diam } f_\omega^n(D \cap \mathcal{J}_\omega) = \text{diam } f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.2)$$

Suponha que $z_0 \in \mathcal{J}$ seja um ponto isolado. Então existe um domínio $\widetilde{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $\widetilde{D} \cap \mathcal{J}_\omega = \{z_0\}$. Assim, $\text{diam } f_\omega^n(\widetilde{D} \cap \mathcal{J}_\omega) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mas isso

contradiz (2.2). Portanto, neste caso, \mathcal{J}_ω não possui pontos isolados, ou seja, é um conjunto perfeito. Observe que se \mathcal{J}_ω é finito, então deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega)$ consista de um único ponto, pois do contrário, ele teria pelo menos dois pontos, e conseqüentemente seria um conjunto perfeito, de acordo com a demonstração acima. \square

2.1 A família quadrática

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados de dinâmica polinomial randômica para a sequência (f_{c_n}) de polinômios quadráticos, da forma $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$, tal que $\omega = (c_n)$ é uma sequência em $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Esses resultados podem ser vistos com mais detalhes em [12], [13], [10], [11], e [15].

Seja (f_{c_n}) uma sequência da forma $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$, com $\omega = (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Além disso, seja $\delta > 0$ tal que $c_n \in \overline{D}_\delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para esse $\delta > 0$, definimos o raio de escape,

$$R_\delta := \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\delta} \right)$$

de modo que, para todo $R > R_\delta$, o conjunto $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > R\}$ está contido em $\mathcal{A}_\omega(\infty)$, e é um domínio invariante. Além disso, $\mathcal{J}_\omega = \partial \mathcal{A}_\omega(\infty) = \partial \mathcal{K}_\omega$, onde

$$\mathcal{K}_\omega = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : f_\omega^n(z) \not\rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty\},$$

é o conjunto de Julia cheio. Dado um subconjunto aberto e limitado $V \subset \mathbb{C}$, o conjunto $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ é chamado de espaço de parâmetros. Também, vamos considerar a aplicação shift à esquerda, a qual denotamos por σ , definida por,

$$\omega = (c_1, c_2, \dots) \in \Omega, \quad \sigma(\omega) = (c_2, c_3, \dots).$$

2.2 Classificação topológica do conjunto de Julia

O objetivo principal deste trabalho é estudar as propriedades topológicas do conjunto de Julia, relacionadas à conexidade. Mais precisamente, estamos interessados em verificar sob quais condições o conjunto de Julia pode ser conexo, desconexo, ter finitas ou infinitas componentes conexas ou ser totalmente desconexo. Em [19], Fornaess e Sibony provaram uma condição necessária e suficiente, para que o conjunto de Julia de uma família de polinômios com coeficientes limitados seja conexo. Em particular, Bruck provou em [13], essa condição para a família quadrática $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$ com $c_n \in \overline{D}_\delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$. Uma ferramenta utilizada nessa prova é a função de Green em $\mathcal{A}_\omega(\infty)$, a qual veremos a seguir.

Definição 2.5. *Seja $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio. A função de Green em D é uma aplicação $g_D : D \times D \rightarrow (-\infty, \infty]$, tal que, para cada $d \in D$:*

- (i) $g_D(\cdot, d)$ é harmônica em $D \setminus \{d\}$ e limitada fora de cada vizinhança de d ;
- (ii) $g_D(d, d) = \infty$, e quando $z \rightarrow \infty$, temos $g_D(z, d) = \begin{cases} \log |z| + O(1), & w = \infty \\ -\log |z - d| + O(1), & w \neq \infty \end{cases}$;
- (iii) $g_D(z, d) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow y$, para cada $y \in \partial D$.

Teorema 2.5 (Existência da função de Green [23]). *Seja $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto de Borel e $\Omega = V^{\mathbb{N}}$. Seja μ a medida de probabilidade de Borel em V e \mathbb{P} a medida produto gerada por μ . Para cada sequência $\omega \in \Omega$, o limite a seguir existe*

$$g_\omega : \mathcal{A}_\omega(\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log |f_\omega^n(z)|.$$

A função g_ω é a função de Green em $\mathcal{A}_\omega(\infty)$, com polo no infinito. Se $g_\omega(z) = 0$, para todo $z \in \mathcal{K}_\omega$, esta função se estende continuamente sobre todo o plano.

Demonstração. Seja $R > 0$ suficientemente grande tal que $V \subset D_R$ e para todo $c \in V$, temos

$$|f_c(z)| > |z| \text{ e } |z| > R. \quad (2.3)$$

Podemos supor $R \geq 2$, e com isso, temos

$$\frac{|z|^2}{R} \leq |z^2 + c|, \quad (2.4)$$

pois,

$$|z| > R \Leftrightarrow |z|^2 > R^2 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|^2} < \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{|z|^2} > -\frac{1}{R^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{|c|}{|z|^2} > 1 - \frac{|c|}{R^2},$$

e

$$\begin{aligned} |z^2 + c| &\geq |z|^2 - |c| = |z|^2 \left(1 - \frac{|c|}{|z|^2}\right) \\ &> |z|^2 \left(1 - \frac{|c|}{R^2}\right) \\ &> |z|^2 \left(1 - \frac{R}{R^2}\right) \\ &= |z|^2 \left(\frac{R-1}{R}\right) \geq \frac{|z|^2}{R}. \end{aligned}$$

Agora, seja $U_k = (f_\omega^k)^{-1}(\mathbb{C} \setminus D_R)$.

Afirmção 1: $U_k \subset U_{k+1} \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}_\omega(\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$.

Com efeito, seja $z \in U_k$, então $f_\omega^k(z) \in \mathbb{C} \setminus D_R$, ou seja, $|f_\omega^k(z)| > R$. De (2.3), obtemos

$$|f_\omega^{k+1}(z)| = |f_{c_{k+1}}(f_\omega^k(z))| > |f_\omega^k(z)| > R,$$

logo, $z \in U_{k+1}$. Mais ainda, como $R > 1$, resulta que $f_\omega^k(z) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), logo, $U_{k+1} \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$, e conseqüentemente, $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$. Por outro lado, se $y \in \mathcal{A}_\omega(\infty)$, então, $f_\omega^k(y) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), e isso significa que $|f_\omega^k(y)| > R$, para algum $k \in \mathbb{N}$, visto que a órbita $(f_\omega^k(y))$ não é limitada, assim,

$$f_\omega^k(y) \in \mathbb{C} \setminus D_R \Rightarrow y \in (f_\omega^k)^{-1}(\mathbb{C} \setminus D_R) = U_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Portanto, $\mathcal{A}_\omega(\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$.

Seja $z \in U_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $g_n(z) = \frac{1}{2^n} \log \frac{|f_\omega^n(z)|}{R}$. Observe que

$$\begin{aligned} g_n(z) \leq g_{n+1}(z) &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \log \frac{|f_\omega^n(z)|}{R} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \log \frac{|f_\omega^{n+1}(z)|}{R} \\ &\Leftrightarrow \log \frac{|f_\omega^n(z)|}{R} \leq \frac{1}{2} \log \frac{|f_\omega^{n+1}(z)|}{R} \\ &\Leftrightarrow 2 \log \frac{|f_\omega^n(z)|}{R} \leq \log \frac{|f_\omega^{n+1}(z)|}{R} \\ &\Leftrightarrow \log \frac{|f_\omega^n(z)|^2}{R} \leq \log |(f_\omega^n(z))^2 + c_{n+1}|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como $|f_\omega^n(z)| > R$, segue de (2.4) que a desigualdade em (2.5) é verdadeira, para todo $z \in U_n$. Assim, $(g_n(z))$ é uma seqüência crescente e limitada de funções harmônicas. Logo, $(g_n(z))$ converge para uma função harmônica $G(z)$, que pode ser definida em $\mathcal{A}_\omega(\infty)$. Note que

$$\begin{aligned} G(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log \left| \frac{|f_\omega^n(z)|}{R} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (\log |f_\omega^n(z)| - \log R) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log |f_\omega^n(z)| = g_\omega(z), \end{aligned}$$

isso mostra que g_ω está bem definida e é uma função harmônica em $\mathcal{A}_\omega(\infty)$. Resta provar que g_ω é de fato a função de Green para $\mathcal{A}_\omega(\infty)$. Como V é limitado, para cada $\epsilon > 0$, existe $R_\epsilon > 0$ tal que, para todo $|z| > R_\epsilon$ e $c_n \in V$, temos

$$(1 - \epsilon)|z|^2 \leq |f_{c_n}(z)| \leq (1 + \epsilon)|z|^2.$$

Assumindo que R_ϵ é suficientemente grande de modo que $|f_{c_n}(z)| > R_\epsilon$, para todo $c_n \in V$, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação 2: Seja $\omega \in \Omega = V^{\mathbb{N}}$. Então,

$$(1 - \epsilon)^{2^n - 1} |z|^{2^n} \leq |f_\omega^n(z)| \leq (1 + \epsilon)^{2^n - 1} |z|^{2^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

De fato, quando $n = 1$, já vimos acima. Para $n = 2$, temos

$$(1 - \epsilon) |f_{c_1}(z)|^2 \leq |f_\omega^2(z)| \leq (1 + \epsilon) |f_{c_1}(z)|^2 \quad \Rightarrow$$

$$(1 - \epsilon)(1 - \epsilon)^2 |z|^4 \leq |f_\omega^2(z)| \leq (1 + \epsilon)(1 + \epsilon)^2 |z|^4 \quad \Rightarrow$$

$$(1 - \epsilon)^{2^2 - 1} |z|^4 \leq |f_\omega^2(z)| \leq (1 + \epsilon)^{2^2 - 1} |z|^4.$$

Suponha que para $n = k$, a desigualdade

$$(1 - \epsilon)^{2^k - 1} |z|^{2^k} \leq |f_\omega^k(z)| \leq (1 + \epsilon)^{2^k - 1} |z|^{2^k}$$

seja verdadeira. Para $n = k + 1$, temos

$$(1 - \epsilon) |f_\omega^k(z)|^2 \leq |f_\omega^{k+1}(z)| \leq (1 + \epsilon) |f_\omega^k(z)|^2 \quad \Rightarrow$$

$$(1 - \epsilon)(1 - \epsilon)^{2(2^k - 1)} |z|^{2^{k+1}} \leq |f_\omega^{k+1}(z)| \leq (1 + \epsilon)(1 + \epsilon)^{2(2^k - 1)} |z|^{2^{k+1}} \quad \Rightarrow$$

$$(1 - \epsilon)^{2^{k+1} - 1} |z|^{2^{k+1}} \leq |f_\omega^{k+1}(z)| \leq (1 + \epsilon)^{2^{k+1} - 1} |z|^{2^{k+1}}.$$

O que prova afirmação.

Tomando o logaritmo em (2.6), resulta que

$$(2^n - 1) \log(1 - \epsilon) + 2^n \log |z| \leq \log |f_\omega^n(z)| \leq (2^n - 1) \log(1 + \epsilon) + 2^n \log |z| \quad \Rightarrow$$

$$2^n \log(1 - \epsilon) - \log(1 - \epsilon) + 2^n \log |z| \leq \log |f_\omega^n(z)| \leq 2^n \log(1 + \epsilon) - \log(1 + \epsilon) + 2^n \log |z|.$$

Como $-\log(1 - \epsilon) > 0$ e $-\log(1 + \epsilon) < 0$, temos

$$\log(1 - \epsilon) + \log |z| \leq \frac{1}{2^n} \log |f_\omega^n(z)| \leq \log(1 + \epsilon) + \log |z|.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$,

$$\log(1 - \epsilon) + \log |z| \leq g_\omega(z) \leq \log(1 + \epsilon) + \log |z|.$$

Por fim, se $z \rightarrow \infty$, concluímos que $g_\omega(z) = \log |z| + O(1)$. Agora, considere

$$\sigma^m(\omega) = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{m\text{-vezes}}(\omega) = (c_m, c_{m+1}, \dots).$$

Note que

$$g_\omega(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log |f_\omega^n(z)| = \frac{1}{2^m} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-m}} \log |f_{\sigma^m(\omega)}^{n-m}(f_\omega^m(z))|. \quad (2.7)$$

Seja $R > 0$ suficientemente grande, de modo que $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$. Observe que, dado um polinômio quadrático $p(z) = z^2 + c$, existe uma constante $M > 0$, tal que para todo $|z| < R$, temos

$$|p^n(z)| < M.$$

Podemos considerar a mesma condição no caso randômico, isto é, dada uma sequência $\omega \in \Omega = V^\mathbb{N}$, existe uma constante $\xi > 0$, tal que

$$|f_\omega^n(z)| < \xi^n.$$

A partir disso, podemos encontrar uma constante ξ_R independente de n, m e ω , que satisfaz

$$\frac{1}{2^{n-m}} \log |f_{\sigma^m(\omega)}^{n-m}(z)| < \xi_R. \quad (2.8)$$

quando $|z| < R$. Daí, resulta de (2.7) que

$$g_\omega(z) = \frac{1}{2^m} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-m}} \log |f_{\sigma^m(\omega)}^{n-m}(z)| < \frac{\xi_R}{2^m},$$

em $W_m = \{z \in \mathbb{C} : |f_\omega^m(z)| \leq R\}$. Além disso, (W_m) é uma sequência decrescente de conjuntos, pois se $z \in W_{m+1} \Rightarrow |f_\omega^{m+1}(z)| \leq R$. Suponha que $z \notin W_m$, então $|f_\omega^m(z)| > R$ e

$$|f_\omega^{m+1}(z)| = |f_{c_{m+1}}(f_\omega^m(z))| > R$$

de acordo com (2.3), o que é uma contradição. Logo, $W_{m+1} \subset W_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, e a sequência (W_m) contém o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω . Portanto, $\lim_{z \rightarrow \partial \mathcal{A}_\omega(\infty)} g_\omega(z) = 0$.

□

Além da definição da função de Green, também é válida a seguinte equação funcional,

$$g_\omega(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} g_\omega(f_\omega^n(z)), \quad (2.9)$$

a qual será utilizada na demonstração do Teorema 2.6 adiante. Mais ainda, necessitamos da seguinte definição.

Definição 2.6. *Seja (f_{c_n}) uma sequência de polinômios quadráticos, onde*

$$f_{c_n}(z) = z^2 + c_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto crítico de $(f_{c_n}^n(z))$ é dado por

$$\mathcal{C}_{(f_{c_n}^n)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (f_{c_n}^n)^{-1}(0).$$

A definição de conjunto crítico de uma sequência de polinômios (f_{c_n}) é mais geral. No entanto, para polinômios quadráticos da forma $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos apenas a união de pré-imagens do zero, pois esse é o único ponto crítico para esta família de polinômios. O próximo resultado, devido a Fornaess e Sibony, nos fornece uma condição necessária e suficiente de conexidade do conjunto de Julia.

Teorema 2.6 (conexidade do conjunto de Julia [13]). *O conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é conexo se, e somente se, $\mathcal{C}_{(f_\omega^n)} \subset \mathcal{K}_\omega$.*

Demonstração. De fato, pelas propriedades topológicas da esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, resulta que o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é conexo se, e somente se, cada componente do conjunto de Fatou \mathcal{F}_ω é simplesmente conexa ([6], Teorema 5.1.6, p. 81). Isso implica que $\mathcal{A}_\omega(\infty)$ é simplesmente conexa.

Afirmção: *Seja $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio. A função de Green não tem ponto crítico em D se, e somente se, D não é simplesmente conexo (veja [27]).*

Por esse resultado, $\mathcal{A}_\omega(\infty)$ é simplesmente conexa se, e somente se

$$\frac{\partial g_\omega}{\partial z}(z) \neq 0, \text{ para todo } z \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_\omega(\infty) \setminus \{\infty\}.$$

Sendo assim, derivando a equação (2.9), temos,

$$\frac{\partial g_\omega}{\partial z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \frac{\partial g_\omega}{\partial z}(f_\omega^n(z))(f_\omega^n(z))'.$$

Dado $z \in \mathcal{A}$, segue que $\frac{\partial g_\omega}{\partial z}(f_\omega^n(z)) \neq 0$, para n suficientemente grande. Logo, \mathcal{J}_ω é conexo se, e somente se, $(f_\omega^n(z))' \neq 0$, em qualquer subconjunto de \mathcal{A} , para n suficientemente grande. Note que

$$(f_\omega^n(z))' = 2^n \prod_{j=0}^{n-1} f_\omega^j(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(f_\omega^n(z_0))' = 0$ para algum $z_0 \in \mathbb{C}$ se, e somente se $f_\omega^j(z_0) = 0$, para algum $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, ou seja $z_0 \in \mathcal{C}_\omega$ e $z_0 \notin \mathcal{A}$. Por isso, $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A} = \mathcal{K}_\omega \cup \{\infty\}$. Portanto, $z_0 \in \mathcal{K}_\omega$ e $\mathcal{C}_{(f_\omega^n)} \subset \mathcal{K}_\omega$. \square

Quando $\delta \leq \frac{1}{4}$ e $|c_n| \leq \frac{1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a conexidade do conjunto de Julia é garantida, pelo corolário a seguir.

Corolário 2.6.1. *Seja $\omega = (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tal que $|c_n| \leq \frac{1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, \mathcal{J}_ω é conexo.*

Demonstração. De fato, seja $z \in \overline{D}_{1/2}$, assim, temos,

$$|f_{c_n}(z)| = |z^2 + c_n| \leq |z|^2 + |c_n| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

ou seja, $f_{c_n}(z) \in \overline{D}_{1/2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso mostra que $\overline{D}_{1/2}$ é um conjunto invariante, pois para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_\omega^n(z)| = |(f_\omega^{n-1}(z))^2 + c_n| \leq |f_\omega^{n-1}(z)|^2 + |c_n| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Seja $w \in \mathcal{C}_{(f_\omega^n)}$. Por definição, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_\omega^k(w) = 0$. Além disso,

$$|f_\omega^{k+1}(w)| = |(f_\omega^k(w))^2 + c_{k+1}| \leq |f_\omega^k(w)|^2 + |c_{k+1}| \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

Isso implica que, $f_\omega^{k+1}(w) \in \overline{D}_{1/2}$, e como $\overline{D}_{1/2}$ é invariante, segue que a órbita $(f_\omega^n(w))$ é limitada. Logo, $w \in \mathcal{K}_\omega$ e $\mathcal{C}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$. Portanto, \mathcal{J}_ω é conexo. \square

Agora, seja $\delta > 0$ e considere o espaço produto $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$. Podemos estudar $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ tanto como um espaço métrico, como um espaço topológico, uma vez que este é metrizável. Dada uma sequência $\omega = (c_n) \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$, definimos os conjuntos a seguir.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{\omega \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}} : \mathcal{J}_\omega \text{ é desconexo}\}, \\ \mathcal{D}_N &= \{\omega \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}} : \mathcal{J}_\omega \text{ tem mais do que } N \text{ componentes}\}, \\ \mathcal{D}_\infty &= \{\omega \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}} : \mathcal{J}_\omega \text{ tem infinitas componentes}\}, \\ \mathcal{T} &= \{\omega \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}} : \mathcal{J}_\omega \text{ é totalmente desconexo}\}. \end{aligned}$$

Segue imediatamente da definição que $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_N \subset \mathcal{D}$. Se $\delta \leq \frac{1}{4}$, pelo Teorema 2.6, resulta que $\mathcal{D} = \emptyset$. Além disso, destacamos que $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ é um espaço métrico completo (veja [25]), e essa propriedade será utilizada na prova dos Teoremas 2.7 e 2.8. Em [13] e [10], Bruck provou os resultados a seguir.

Teorema 2.7 ([10]). *Se $\delta > \frac{1}{4}$, então o conjunto \mathcal{T} é denso em $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\overline{\mathcal{T}} = \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$. Como $\mathcal{T} \subset \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$, isso implica que

$$\overline{\mathcal{T}} \subset \overline{\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}} = \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}},$$

pois $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ é fechado, logo, basta mostrar que $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{T}}$. Seja $\omega_0 = (c_n^0) \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$. Considere a sequência $\omega_m = (c_n^m) \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\omega_m = \begin{cases} c_n^0, & n = 1, \dots, m. \\ c, & n > m. \end{cases},$$

onde $c \in \overline{D}_\delta \setminus \mathcal{M}$, e \mathcal{M} é o conjunto de Mandelbrot. Note que, fazendo $m \rightarrow \infty$, segue que $\omega_m \rightarrow \omega_0$, além disso, o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é totalmente desconexo, onde $f(z) = z^2 + c$, pois $c \notin \mathcal{M}$, e por definição, \mathcal{M} é o conjunto dos parâmetros $c \in \mathbb{C}$ em que \mathcal{J}_f é conexo. Observe que de acordo com ([2] Lema 1.1)

$$\mathcal{J}_{\omega_m} = (f_{c_m^0} \circ \dots \circ f_{c_1^0})^{-1}(\mathcal{J}_f), \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Afirmção: Seja $g : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos. Se $T \subset Y$ é um conjunto totalmente desconexo, então $g^{-1}(T)$ é totalmente desconexo.

De fato, seja $C \subset g^{-1}(T)$ uma componente conexa, e suponha que $g^{-1}(T)$ não é totalmente desconexo. Assim, deve existir pelo menos dois pontos distintos $x, y \in C$. Como a imagem de um conjunto conexo por função contínua é um conjunto conexo, segue que $g(C)$ é uma componente conexa de T , com $g(x), g(y) \in g(C)$, o que é uma contradição, pois T é totalmente desconexo. Portanto, $g^{-1}(T)$ é totalmente desconexo.

Note que $(f_{c_m^0} \circ \dots \circ f_{c_1^0})$ é contínua para todo $m \in \mathbb{N}$, e pela afirmação acima, resulta que \mathcal{J}_{ω_m} é totalmente desconexo, logo $\omega_m \in \mathcal{T}$ e $\omega_0 \in \overline{\mathcal{T}}$. Portanto, $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ e \mathcal{T} é denso em $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$. □

Teorema 2.8 ([10]). *O conjunto \mathcal{D}_∞ tem interior vazio.*

Demonstração. Seja $\omega_0 = (c_n^0) \in \mathcal{D}_\infty$. Considere a sequência $\omega_m = (c_n^m) \in \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\omega_m = \begin{cases} c_n^0, & n = 1, \dots, m. \\ c, & n > m. \end{cases},$$

onde $c \in \overline{D}_\delta \cap \mathcal{M}$. Assim, $\omega_m \rightarrow \omega_0$ ($m \rightarrow \infty$) e \mathcal{J}_f é conexo, pois $c \in \mathcal{M}$. De (2.10), sabemos que $\mathcal{J}_{\omega_m} = (f_{c_m^0} \circ \dots \circ f_{c_1^0})^{-1}(\mathcal{J}_f)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, e isso implica que, o conjunto de Julia \mathcal{J}_{ω_m} tem finitas componentes, logo, $\omega_m \notin \mathcal{D}_\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pela convergência de ω_m , dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > m_0$, temos $B(\omega_0, \epsilon) \not\subset \mathcal{D}_\infty$. Como ω_0 é arbitrária, segue que $\text{int}(\mathcal{D}_\infty) = \emptyset$. □

Teorema 2.9 ([10]). *Se $\delta > \frac{1}{4}$, então o conjunto \mathcal{D} é aberto e denso em $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração. Seja $\omega_0 = (c_n^0) \in \mathcal{D}$. Pelo Teorema 2.6 existe $z_0 \in \mathcal{C}_{(f_{\omega_0}^n)}$ tal que

$$f_{\omega_0}^m(z_0) = (f_{c_n^0} \circ \cdots \circ f_{c_1^0})(z_0) = 0,$$

para algum $m \in \mathbb{N}$ e $f_{\omega_0}^n(z_0) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Isso implica que para todo $n > m$

$$f_{\omega_0}^n(z_0) = (f_{c_n^0} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}^0} \circ f_{c_m^0} \circ \cdots \circ f_{c_1^0})(z_0) = (f_{c_n^0} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}^0})(0),$$

logo,

$$(f_{c_n^0} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}^0})(0) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dessa forma, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$, $N > m$, de modo que

$$|(f_{c_N^0} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}^0})(0)| > R \geq R_\delta.$$

Pela continuidade de $(f_{c_N^0} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}^0})$, (composição de funções contínuas) existe uma vizinhança $U = U_{m+1} \times \cdots \times U_N \subset \overline{D}_\delta^{N-m}$ de $(c_{m+1}^0, \dots, c_N^0)$, tal que

$$|(f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}})(0)| > R, \quad \text{para toda } (c_{m+1}, \dots, c_N) \in U.$$

Definimos o conjunto

$$W = \overline{D}_\delta^m \times U \times \overline{D}_\delta^N.$$

Note que W é uma vizinhança de ω_0 em relação a topologia produto de $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$.

Afirmção: $W \subset \mathcal{D}$.

De fato, seja $(c_n) \in W$ e $y_0 \in \mathbb{C}$ tal que $(f_{c_m} \circ \cdots \circ f_{c_1})(y_0) = 0$. Como $(c_{m+1}, \dots, c_N) \in U$, resulta que $|(f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_{m+1}})(0)| > R$. Isso implica que

$$|(f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1})(y_0)| > R.$$

Logo, $(f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1})(y_0) \in M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > R\}$, o qual é uma domínio invariante. Pela definição de M , $(f_{c_n} \circ \cdots \circ f_{c_1})(y_0) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Portanto, $(c_n) \in \mathcal{D}$.

Pela afirmação acima, concluímos que \mathcal{D} é um subconjunto aberto de $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$. Resta mostrar a densidade. Por hipótese, $\delta > \frac{1}{4}$ e por definição $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$, logo, $\overline{\mathcal{T}} \subset \overline{\mathcal{D}}$. Vimos no Teorema 2.7 que \mathcal{T} é denso em $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$, por esse motivo, $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}} = \overline{\mathcal{T}} \subset \overline{\mathcal{D}}$. Dessa forma, $\overline{\mathcal{D}} = \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$, ou seja, \mathcal{D} é denso em $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$. □

Além de $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ ser um espaço métrico completo, também podemos estudá-lo como um espaço de medida. Para ser mais preciso, seja μ_{L_δ} a medida de Lebesgue em \overline{D}_δ , normalizada por $\mu_{L_\delta}(\overline{D}_\delta) = 1$. Os espaços \overline{D}_δ^n e $\overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ carregam as respectivas medidas produto

$$\mathbb{P}_n = \bigotimes_{k=1}^n \mu_{L_\delta} \quad \text{e} \quad \mathbb{P} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_{L_\delta}.$$

Decorre dessas definições que se $\delta > \frac{1}{4}$, então $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 1$, conforme provou Bruck em [13]. Antes de apresentarmos uma prova desse resultado, precisamos de provar um lema e um teorema auxiliar, como veremos a seguir.

Lema 2.4 ([13]). *Seja $R > 0$ e $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto conexo tal que $K \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$. Então, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, existe $n \in \mathbb{N}$ e $c_1, \dots, c_n \in K$ tal que $|f_\omega^n(z)| > R$.*

Demonstração. Seja $c \in K \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M})$. Como \mathcal{M} é o conjunto dos parâmetros $a \in \mathbb{C}$, tais que $(f_a^n(0))$, é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $f_c^n(0) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), pois $c \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$. Isso implica que o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é totalmente desconexo, e o conjunto de Fatou \mathcal{F}_f coincide com a bacia no infinito, ou seja, $\mathcal{F}_f = \mathcal{A}(\infty)$. Seja $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Se $z_0 \in \mathcal{A}(\infty)$, por definição $f_c^n(z_0) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), logo, existe $n \in \mathbb{N}$ e parâmetros $c_1 = \dots = c_n = c \in K$ tais que $|f_c^n(z_0)| > R$. Agora, se $z_0 \in \mathcal{J}_f$, vamos considerar a aplicação $g : K \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por $g(k) = f_k(z) = z^2 + k$. Como $f_k(z)$ é contínua para todo $k \in K$ e todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, segue que g é contínua. Dado $c_1 \in K$, temos, $g(c_1) = f_{c_1}(z_0) \in g(K)$. Por hipótese, K é conexo, e pela continuidade de g , resulta que $g(K)$ é conexo. Como \mathcal{J}_f é totalmente desconexo, segue que $f_{c_1}(z_0) \in \mathcal{F}_f = \mathcal{A}_f(\infty)$. Definindo $c_2 = c_3 = \dots = c_n = c \in K$, para n suficiente grande, obtemos $|f_\omega^n(z_0)| = |(f_{c_n} \circ \dots \circ f_{c_1})(z_0)| > R$. Como z_0 é arbitrário, o resultado segue. \square

Teorema 2.10 ([13]). *Seja $\delta > \frac{1}{4}$ e $R > 0$. Então para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ existe um conjunto aberto $U_z \subset \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$ com as seguintes propriedades:*

- (i) $\mathbb{P}(U_z) = 1$.
- (ii) *Para toda sequência $\omega = (c_n) \in U_z$, a condição $|f_\omega^k(z)| > R$ é válida para todo k suficientemente grande.*

Demonstração. Vamos assumir que R é suficientemente grande, de modo que

$$\overline{f_{c_n}(\mathbb{C} \setminus D_R)} \subset \mathbb{C} \setminus D_R,$$

para todo $c_n \in \overline{D}_\delta$. Dado $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ e $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$E^k(z) = \{(c_1, \dots, c_k) \in \overline{D}_\delta^k : |f_\omega^k(z)| > R\},$$

como o k -ésimo conjunto de escape. Por hipótese, $\delta > \frac{1}{4}$, logo $\overline{D}_\delta^k \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$. Assim, pelo Lema 2.4, existe $k_z = k(z) \in \mathbb{N}$ tal que $E^{k_z}(z) \neq \emptyset$, em particular, temos $|f_\omega^{k_z}(z)| > R$. Pela continuidade de $f_\omega^{k_z}$ existe $\delta_z = \delta(z) > 0$ tal que $|f_\omega^{k_z}(w)| > R$, para todo $w \in D_{\delta_z}$. Consequentemente, $E^{k_z}(w) \neq \emptyset$, para todo $w \in D_{\delta_z}$. Além disso, aplicando novamente o Lema 2.4, temos

$$\widehat{\mathbb{C}} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E^i(z).$$

Como a esfera de Riemann é compacta, a cobertura $\bigcup_{i=1}^{\infty} E^i(z)$ admite uma subcobertura finita, ou seja,

$$\widehat{\mathbb{C}} \subset \bigcup_{i=1}^n E^i(z).$$

Logo, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $E^N(z) \neq \emptyset$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Também definimos os conjuntos

$$S^k(z) = \{(c_1, \dots, c_k) \in \overline{D}_\delta^k : |f_\omega^k(z)| \leq R\}$$

e

$$S_0^k(z) = \{(c_1, \dots, c_k) \in \overline{D}_\delta^k : |f_\omega^k(z)| < R\}.$$

É claro que $E^k(z) = \overline{D}_\delta^k \setminus S^k(z)$. Note que ∂D_R tem área zero, para todo $R > 0$, logo, fixando a sequência $(c_1, \dots, c_{k-1}) \in \overline{D}_\delta^{k-1}$, segue que o conjunto

$$\{c_k \in \overline{D}_\delta : |f_{c_k}(f_\omega^{k-1}(z))| = R\}$$

tem medida nula. Isso implica que, $\mathbb{P}_k(S^k(z)) = \mathbb{P}_k(S_0^k(z))$. Como

$$\mathbb{P}_k(E^k(z)) = 1 - \mathbb{P}_k(S_0^k(z))$$

e essas funções são semicontínuas inferiormente, concluímos que $\mathbb{P}_k(E^k(z))$ é contínua. Vimos que $E^N(z) \neq \emptyset$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, mais ainda, $E^N(z)$ é um conjunto aberto, pois

$$E^N(z) = (f_\omega^N)^{-1}((R, \infty)),$$

logo, se $y \in E^N(z)$, existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset E^N(z)$, isso implica

$$0 < \mathbb{P}_N(B(y, r)) \leq \mathbb{P}_N(E^N(z)).$$

Pela continuidade de \mathbb{P}_N , existe $\delta_z = \delta(z) > 0$, tal que

$$\mathbb{P}_N(E^N(w)) > 0, \quad \text{para todo } w \in D_{\delta_z}.$$

Note que, $\widehat{\mathbb{C}} \subset \bigcup_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} D_{\delta_z}$. Pela compacidade de $\widehat{\mathbb{C}}$, a cobertura $\bigcup_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} D_{\delta_z}$ admite uma subcobertura finita $\{D_{\delta_{z_1}}, \dots, D_{\delta_{z_n}}\}$. Definindo

$$0 < \beta = \min \mathbb{P}_N(E^N(w)), \quad \text{para todo } w \in D_{\delta_{z_i}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

segue que, existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_N(E^N(z)) \geq \beta, \quad \text{para todo } z \in \widehat{\mathbb{C}}. \quad (2.11)$$

Afirmção: $(E^k(z) \times \overline{D}_\delta) \subset E^{k+1}(z)$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, seja $(c_1, \dots, c_k, c_{k+1}) \in E^k(z) \times \overline{D}_\delta$, assim, temos $|f_\omega^k(z)| > R$. Por hipótese,

$$f_{c_n}(\mathbb{C} \setminus D_R) \subset \mathbb{C} \setminus D_R,$$

para todo $c_n \in \overline{D}_\delta$, isso implica

$$|f_\omega^{k+1}(z)| = |f_{c_{k+1}}(f_\omega^k(z))| > R,$$

logo, $(c_1, \dots, c_k, c_{k+1}) \in E^{k+1}(z)$.

Como

$$\mathbb{P}_{k+1}(E^k(z) \times \overline{D}_\delta) = \mathbb{P}_k(E^k(z)) \cdot \mu_{L_\delta}(\overline{D}_\delta) = \mathbb{P}_k(E^k(z))$$

pois $\mu_{L_\delta}(\overline{D}_\delta) = 1$, decorre da afirmação que $\mathbb{P}_k(E^k(z)) \leq \mathbb{P}_{k+1}(E^{k+1}(z))$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, observe que

$$\mathbb{P}_{k+N}(S^{k+N}(z)) = \int_{S^k(z)} \mathbb{P}_N(S^N(f_\omega^k(z))) d\mathbb{P}_k(\omega) \leq (1 - \beta)\mathbb{P}_k(S^k(z)).$$

Basta notar que $\mathbb{P}_N(E^N(z)) = 1 - \mathbb{P}_N(S^N(z))$. Por (2.11), temos $\beta \leq 1 - \mathbb{P}_N(S^N(z))$, e isso implica que $\mathbb{P}_N(S^N(z)) \leq 1 - \beta$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Além disso, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ e todo $k \in \mathbb{N}$, temos,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k(E^k(z)) &\leq \mathbb{P}_{k+1}(E^{k+1}(z)) \Rightarrow \\ -\mathbb{P}_k(E^k(z)) &\geq -\mathbb{P}_{k+1}(E^{k+1}(z)) \Rightarrow \\ 1 - \mathbb{P}_k(E^k(z)) &\geq 1 - \mathbb{P}_{k+1}(E^{k+1}(z)) \Rightarrow \\ \mathbb{P}_k(S^k(z)) &\geq \mathbb{P}_{k+1}(S^{k+1}(z)), \end{aligned}$$

ou seja, a sequência $(\mathbb{P}_k(S^k(z)))$ é decrescente. Note que

$$\mathbb{P}_{2N}(S^{2N}(z)) \leq (1 - \beta)\mathbb{P}_N(S^N(z)) \leq (1 - \beta)^2.$$

Prosseguindo indutivamente, resulta que

$$\mathbb{P}_{nN}(S^{nN}(z)) \leq (1 - \beta)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência $(\mathbb{P}_k(S^k(z)))$ é um decaimento exponencial com passo fixo N . Podemos interpolar os termos dessa sequência, para estimar os valores $k \in \mathbb{N}$, que não são múltiplos de N . Assim, pela recorrência da desigualdade do decaimento exponencial, segue que existe uma constante $0 < \alpha \leq 1$, tal que

$$\mathbb{P}_k(S^k(z)) \leq \alpha \cdot (1 - \beta)^{\frac{k}{N}},$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Resulta que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_k(S^k(z)) = 0$, e por isso, $\mathbb{P}_k(E^k(z)) \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$) uniformemente em $\widehat{\mathbb{C}}$. Definindo

$$U_z = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z) \times \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}},$$

temos

$$\mathbb{P}(U_z) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z) \times \overline{D}_{\delta}^{\mathbb{N}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z)\right) \cdot \mathbb{P}(\overline{D}_{\delta}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z)\right).$$

Como $E^k(z) \subset E^{k+1}(z)$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ e todo $k \in \mathbb{N}$, pelo Lema 1.6, segue que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_k(E^k(z)) = 1,$$

o que concluí a prova. □

Teorema 2.11 ([13]). *Seja $\delta > \frac{1}{4}$ e $\mathcal{D} = \{\omega \in \overline{D}_{\delta}^{\mathbb{N}} : \mathcal{J}_{\omega} \text{ é desconexo}\}$. Então $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.6, sabemos que o conjunto de Julia \mathcal{J} é conexo se, e somente se, $\mathcal{C}_{(f_{\omega}^k)} \subset \mathcal{K}_{\omega}$. Sendo assim, é suficiente contruir um conjunto $\mathfrak{C} \subset \overline{D}_{\delta}^{\mathbb{N}}$, tal que $\mathbb{P}(\mathfrak{C}) = 1$, e para cada sequência $\omega = (c_n) \in \mathfrak{C}$, tem-se

$$f_{\omega}^k(z) = (f_{c_n} \circ \dots \circ f_{c_1})(z) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty),$$

com $z \in \mathcal{C}_{(f_{\omega}^k)}$. Como $0 \in \mathcal{C}_{(f_{\omega}^k)}$, para toda sequência $\omega \in \mathfrak{C}$, podemos definir

$$\mathfrak{C} = U_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(0) \times \overline{D}_{\delta}^{\mathbb{N}}.$$

Pelo Teorema anterior, segue que $\mathbb{P}(\mathfrak{C}) = \mathbb{P}(U_0) = 1$. Por construção, $\mathfrak{C} \subset \mathcal{D}$, assim,

$$1 = \mathbb{P}(\mathfrak{C}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{D}) \leq 1.$$

Portanto, $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 1$. □

Agora, estamos interessados em estudar o conjunto \mathcal{T} . Mais especificamente, buscamos condições para que o conjunto de Julia \mathcal{J}_{ω} seja totalmente desconexo. Em [13], Bruck provou uma condição suficiente para tal situação, como veremos a seguir.

Lema 2.5 ([13]). *Seja $\omega \in \overline{D}_{\delta}^{\mathbb{N}}$. Então $\text{diam } f_{\omega}^n(\mathcal{J}_{\omega}) \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Com efeito, de acordo com ([2] Lema 1.1), dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathcal{J}_{\omega} = (f_{\omega}^n)^{-1}(\mathcal{J}_{\sigma^n(\omega)}).$$

Além disso, a função de Green $g_{\sigma^k(\omega)}$ do conjunto de Julia $\mathcal{J}_{\sigma^n(\omega)}$ satisfaz a condição

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (g_{\sigma^n(\omega)}(z) - \log |z|) = 0.$$

Portanto, a capacidade do conjunto de Julia $\mathcal{J}_{\sigma^n(\omega)}$ é 1, o que conclui a prova. □

Teorema 2.12 ([13]). *Seja $\delta > 1/4$ e $\omega \in \overline{D_\delta}^\mathbb{N}$. Suponha que existe um domínio simplesmente conexo e limitado $D \subset \mathbb{C}$ tal que $\bigcup_{n=0}^\infty f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega) \subset D$ e $(f_{c_n} \circ \dots \circ f_{c_{j+1}})(0) \notin D$, para todo $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Então, \mathcal{J}_ω é totalmente desconexo.*

Demonstração. Seja $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > R\}$ e $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio simplesmente conexo e limitado, tal que $M \cap D = \emptyset$. Observe que $W = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus D)$ é um subconjunto fechado da bacia no infinito $\mathcal{A}_\omega(\infty)$, tal que

$$f_\omega^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

uniformemente em W . Com efeito, como

$$M \cap D = \emptyset \Rightarrow D \subset M^c \Rightarrow M \subset W.$$

Seja $z \in W$ e suponha que $z \notin \mathcal{A}_\omega(\infty)$. Dessa forma, segue que $z \in \mathcal{K}_\omega$, e isso implica

$$M \subset W \subset \mathcal{K}_\omega,$$

o que é uma contradição, pois $M \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$. Resulta que, dado $R > 0$ e $w \in W$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_\omega^{n_0}(w)| > R$, logo, $f_\omega^{n_0}(W) \subset M$, para todo $n \geq n_0$, pois M é invariante. Note que a aplicação $f_\omega^n(z)$ é um polinômio de grau 2^n , e $\mathcal{C}_{(f_\omega^n)} \not\subset D$, pois, $(f_{c_n} \circ \dots \circ f_{c_{j+1}})(0) \notin D$, para todo $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e todo $n \in \mathbb{N}$, isso implica que f_ω^n é uma aplicação de recobrimento (veja [26]). Por isso, existem 2^n funções inversas locais de f_ω^n , que vamos denotar por f_j^n , para $(j = 1, \dots, 2^n)$. Além disso, definimos $D_{j,n} = f_j^n(D)$. Pela definição de uma aplicação de recobrimento, temos

$$(f_\omega^n)^{-1}(D) = \bigcup_{j=1}^{2^n} f_j^n(D) = \bigcup_{j=1}^{2^n} D_{j,n},$$

e $D_{1,n}, \dots, D_{2^n,n}$ são domínios simplesmente conexos e dois a dois disjuntos.

Afirmção 1: $\mathcal{J}_\omega \subset \bigcup_{j=1}^{2^n} D_{j,n}$.

De fato, seja $z \in \mathcal{J}_\omega$ e suponha que $z \notin \bigcup_{j=1}^{2^n} D_{j,n}$, então $z \notin D_{j,n} = f_j^n(D)$ para $j = 1, \dots, 2^n$. Logo, $f_\omega^n(z) \notin D$, e conseqüentemente $f_\omega^n(z) \in W \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$, o que é uma contradição.

Afirmção 2: $D_{j,n} \subset D$, se $n \geq n_0$.

Seja $z \in D_{j,n} = f_j^n(D)$. Como $f_j^n(D)$, $j = 1, \dots, 2^n$ são as pré-imagens de D , temos $f_\omega^n(z) \in D$. Agora se $z \notin D$, então $z \in W$, e isso implica que $f_\omega^n(z) \in f_\omega^n(W) \subset M$. Assim, $M \cap D \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

Afirmção 3: A família $\mathfrak{G} = \{f_j^n : j = 1, \dots, 2^n\}$ é normal em D .

Como D é limitado e f_j^k com $j = 1, \dots, 2^n$ são as inversas locais de f_ω^n , segue que a

família \mathfrak{G} é limitada, logo, pelo Teorema de Montel, segue que \mathfrak{G} é normal.

Seja $E \subset \mathcal{J}_\omega$ uma componente conexa. Vamos mostrar que E consiste de um único ponto. Pela Afirmação 1, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $j_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ tal que $E \subset E_n = D_{j_n, n}$. Como $f_{j_n}^n \in \mathfrak{G}$, temos $f_{j_n}^n(D) = E_n \supset E$. Vimos na Afirmação 3 que \mathfrak{G} é normal em D , logo, a sequência $(f_{j_n}^n)$ tem uma subsequência $(f_{j_{n_l}}^{n_l})$ tal que

$$f_{j_{n_l}}^{n_l} \rightarrow \psi \quad (l \rightarrow \infty)$$

localmente uniformemente em D .

Afirmação: ψ é constante.

De fato, suponha que ψ não é constante, então, pelo Teorema de Hurwitz([20]), ψ é univalente. Note que, se $z \in E_n$, então, para todo $l \in \mathbb{N}$, existe $m(l) \in \mathbb{N}$ tal que

$$(f_{j_{n_l}}^{n_l} \circ f_\omega^{m(l)})(z) = z.$$

Nessas condições, dado $z_0 \in E \subset \mathcal{J}_\omega$, podemos assumir que

$$f_\omega^{m(l)}(z_0) \rightarrow d \quad (l \rightarrow \infty),$$

com $d \in D$. De fato, basta observar que

$$f_\omega^{m(l)}(z_0) = (f_{j_{n_l}}^{n_l})^{-1}(z_0) \in D, \quad \text{para todo } l \in \mathbb{N},$$

logo, $(f_\omega^{m(l)})$ restrita ao conjunto E é uma sequência limitada, a qual possui uma subsequência convergente em D . Pela continuidade de cada função $f_{j_{n_l}}^{n_l}$, temos

$$f_{j_{n_l}}^{n_l}(f_\omega^{m(l)}(z_0)) \rightarrow f_{j_{n_l}}^{n_l}(d) \rightarrow \psi(d) \quad (l \rightarrow \infty).$$

Por outro lado, $f_{j_{n_l}}^{n_l}(f_\omega^{m(l)}(z_0)) = z_0$, assim, pela unicidade do limite, segue que

$$\psi(d) = z_0 \in \mathcal{J}_\omega.$$

Pelo Lema 2.4, existe $0 < \epsilon < 1$, de modo que $\tilde{D} = D_\epsilon(d) \subset D$ e $f_\omega^n(\mathcal{J}_\omega) \not\subset \tilde{D}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(f_{j_{n_l}}^{n_l})$ converge uniformemente em D , podemos restringir essa convergência ao círculo $\partial D_{\epsilon/2}(d)$. Pelo Princípio do Argumento([20]), existe uma vizinhança V de $\psi(d)$ tal que $f_{j_{n_l}}^{n_l}(\tilde{D}) \supset V$, para todo $n_l \geq \tilde{n}$, onde $\tilde{n} \geq n_0$ é suficientemente grande. Do Teorema 2.3, segue que $(f_\omega^n)^{-1}(f_\omega^n(V)) \supset \mathcal{J}_\omega$, para todo $n \geq n' \geq \tilde{n}$. Tomando $l \in \mathbb{N}$ tal que $m(l) \geq n'$, temos

$$\mathcal{J}_\omega \subset (f_\omega^{m(l)})^{-1}(f_\omega^{m(l)}(V)) \subset (f_\omega^{m(l)})^{-1}(f_\omega^{m(l)}(f_{j_{n_l}}^{n_l}(\tilde{D}))) = (f_\omega^{m(l)})^{-1}(\tilde{D}).$$

Portanto, $f_\omega^{m(l)}(\mathcal{J}_\omega) \subset \tilde{D} \subset D$, o que é uma contradição.

Agora, seja $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_{\omega}^n(\mathcal{J}_{\omega}) \subset D$. Como C é fechado e D é limitado, segue que C é compacto. Podemos restringir a sequência $(f_{j_n}^n)$ ao conjunto C de modo que $f_{j_n}^n(C) \supset E$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, a subsequência $(f_{j_{n_l}}^{n_l})$ converge uniformemente em C para a função ψ , a qual é constante. Note que, dados $x, y \in C$ e $\epsilon > 0$, existem $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, tais que, para todo $l > l_1$,

$$d(f_{j_{n_l}}^{n_l}(x), \psi) < \frac{\epsilon}{2}$$

e para todo $l > l_2$,

$$d(f_{j_{n_l}}^{n_l}(y), \psi) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tome $l_0 = \max\{l_1, l_2\}$. Dessa forma, para todo $l > l_0$, temos

$$d(f_{j_{n_l}}^{n_l}(x), f_{j_{n_l}}^{n_l}(y)) \leq d(f_{j_{n_l}}^{n_l}(x), \psi) + d(\psi, f_{j_{n_l}}^{n_l}(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por definição, $\text{diam } f_{j_{n_l}}^{n_l}(C) = \sup\{d(f_{j_{n_l}}^{n_l}(x), f_{j_{n_l}}^{n_l}(y)) : x, y \in C\}$. Isto implica que

$$\text{diam } f_{j_{n_l}}^{n_l}(C) \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty).$$

Como $f_{j_n}^n(C) \supset E$, segue que $\text{diam } E \rightarrow 0$ ($l \rightarrow \infty$). Portanto, E contém um único ponto, o que conclui a prova. \square

Podemos observar que a condição $(f_k \circ \dots \circ f_{j+1})(0) \notin D$, para todo $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ e todo $k \in \mathbb{N}$ presente nas hipóteses do Teorema 2.12, implica que o conjunto crítico $\mathcal{C}_{(f_{\omega}^n)}$ está contido na bacia de atração do infinito $\mathcal{A}_{\omega}(\infty)$, pois, para todo $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ e todo $k \in \mathbb{N}$, a iterada $(f_k \circ \dots \circ f_{j+1})(0)$ não é limitada, logo não pertence ao conjunto de Julia cheio \mathcal{K}_{ω} . Além disso, destacamos que é suficiente analisar essa condição somente no zero, pois este é o único ponto crítico para a família quadrática, tanto no caso clássico, como no randômico. O fato de $\mathcal{C}_{(f_{\omega}^n)} \subset \mathcal{A}_{\omega}(\infty)$ não garante que o conjunto de Julia é totalmente desconexo, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 2.2. Considere a família quadrática $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$. Vamos construir uma sequência $\omega = (c_n) \subset \mathbb{C}$, tal que $\mathcal{C}_{(f_{\omega}^n)} \subset \mathcal{A}_{\omega}(\infty)$, mas o conjunto de Julia \mathcal{J}_{ω} não é totalmente desconexo. Seja $c_1 = -\frac{11}{10}$ e $c_n = 0$, para todo $n \geq 2$. Note que $f_{c_1}(0) = -\frac{11}{10}$ e

$$f_{\omega}^n(0) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Pelo Teorema 2.6, segue que \mathcal{J}_{ω} é desconexo. Agora, considere o intervalo

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \subset (0, 1).$$

Observe que

$$f_{c_1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{11}{10}, \frac{9}{16} - \frac{11}{10}\right) = \left(-\frac{17}{20}, -\frac{43}{80}\right) \subset (-1, 1),$$

$$f_{c_2} \left(f_{c_1} \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \right) \right) = f_{c_2} \left(\left(-\frac{17}{20}, -\frac{43}{80} \right) \right) = \left(\left(-\frac{43}{80} \right)^2, \left(-\frac{17}{20} \right)^2 \right) \subset (-1, 1).$$

Prosseguindo de maneira indutiva, resulta que $f_{\omega}^n \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \right) \subset (-1, 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Isso implica que $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \subset \mathcal{K}_{\omega}$. Sabemos que $\partial \mathcal{K}_{\omega} = \mathcal{J}_{\omega}$ (veja [19]), e \mathcal{K}_{ω} é um conjunto compacto, logo,

$$\mathcal{K}_{\omega} = \overline{\mathcal{K}_{\omega}} = \mathcal{K}_{\omega} \cup \mathcal{J}_{\omega}.$$

Note que, se $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \subset \mathcal{J}_{\omega}$, então \mathcal{J}_{ω} não pode ser totalmente desconexo. Agora, se $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \not\subset \mathcal{J}_{\omega}$, segue que existem pontos neste intervalo, que pertence a uma componente limitada do conjunto de Fatou. Logo, \mathcal{F}_{ω} tem pelo menos duas componentes conexas, uma componente limitada, e outra que contém o infinito. Pela Proposição 2.1 (veja [3]), resulta que um conjunto $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é totalmente desconexo, se o seu complementar $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ é conexo. Como, $\mathcal{F}_{\omega} = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{J}_{\omega})$ e \mathcal{F}_{ω} não é conexo, segue que, o conjunto de Julia \mathcal{J}_{ω} não é totalmente desconexo.

Mais uma vez, podemos notar a diferença que surge quando trabalhamos no contexto de dinâmica complexa randômica, pois é possível encontrarmos um conjunto de Julia desconexo, que não é totalmente desconexo, de acordo com o Exemplo 2.2. Essa situação não acontece na teoria clássica. De fato, o seguinte Teorema, que pode ser visto em [16], estabelece uma dicotomia sobre o conjunto de Julia.

Teorema 2.13 ([16]). *Se para cada ponto crítico q do polinômio P a órbita escapa para o infinito, ou seja, $P^n(q) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), então o conjunto de Julia é totalmente desconexo.*

Quando $\delta > \frac{1}{4}$ e $V \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e limitado, Lech e Zdunik provaram em [24] os seguintes resultados para a família quadrática $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$.

Teorema 2.14 ([24]). *Seja $\delta > \frac{1}{4}$. Considere o espaço $\Omega = D_{\delta}^{\mathbb{N}}$ com a medida produto $\mathbb{P} = \otimes_{n=1}^{\infty} \mu_{L_{\delta}}$. Se*

$$\mathcal{T} = \{\omega \in \Omega : \mathcal{J}_{\omega} \text{ é totalmente desconexo}\},$$

então $\mathbb{P}(\mathcal{T}) = 1$.

Teorema 2.15 ([24]). *Seja V um conjunto aberto e limitado tal que $D(0, \frac{1}{4}) \subset V$, e $V \neq D(0, \frac{1}{4})$. Considere o espaço $\Omega = V^{\mathbb{N}}$, equipado com a medida produto \mathbb{P} de distribuição uniforme em V . Então, para \mathbb{P} -quase toda sequência $\omega \in \Omega$, o conjunto de Julia \mathcal{J}_{ω} é totalmente desconexo.*

O nosso objetivo, é apresentar a prova de um resultado similar ao Teorema 2.15, para uma família randômica de polinômios cúbicos. Isso será feito no próximo capítulo.

3 Conjuntos de Julia Totalmente Desconexos, Para Uma Família Cúbica de Polinômios.

Neste capítulo, vamos estudar uma família cúbica de polinômios. O nosso objetivo é classificar o conjunto de Julia de acordo com suas propriedades topológicas, e estabelecer uma condição para que esse conjunto seja totalmente desconexo. As referências para esta etapa do trabalho encontram-se em, [3] e [17]. Iniciamos este último capítulo, definindo uma sequência de polinômios, denominados Polinômios de Chebychev, como veremos a seguir. A motivação para estudarmos esses polinômios decorre de suas aplicações, como podemos ver em [1], onde os autores criaram um modelo que oferece maior resistência à ataques de redes veiculares, habilitadas para o 5G, utilizando os Polinômios de Chebyshev.

3.1 Polinômios de Chebychev

Os Polinômios de Chebychev são definidos como uma sequência de polinômios ortogonais, que estão associados à formula de Moivre

$$z^n = (r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)))^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$ (veja [17]). Existem diferentes formas de descrever esses polinômios, e um caminho mais simples, é utilizando as propriedades elementares do cosseno, através da seguinte relação,

$$T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta), \quad k \in \mathbb{N} \text{ e } \theta \in \mathbb{R}.$$

Para $k = 1, 2$ e 3 , temos

$$(i) \quad T_1(\cos \theta) = \cos \theta \Rightarrow T_1(z) = z.$$

$$(ii) \quad T_2(\cos \theta) = \cos 2\theta = 2 \cos^2(\theta) - 1 \Rightarrow T_2(z) = 2z^2 - 1.$$

$$(iii) \quad T_3(\cos \theta) = \cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \Rightarrow T_3(z) = 4z^3 - 3z.$$

Dois sistemas dinâmicos $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são conjugados, se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ que satisfaz

$$h \circ f = g \circ h.$$

Sendo assim, por meio de conjugações, podemos escrever os polinômios $T_2(z)$ e $T_3(z)$ como a seguir,

$$T_2(z) = z^2 \pm c$$

e

$$T_3(z) = z^3 \pm dz,$$

com $c, d \in \mathbb{C}$, unicamente determinados. Como estamos trabalhando no contexto randômico, vamos considerar a família cúbica

$$f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z \quad (3.1)$$

onde $c_n \in V \subset \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e V é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{C} , ou seja, é um subconjunto de Borel.

3.2 Classificação Topológica do Conjunto de Julia para a Família $f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z$.

Seja $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e limitado e $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ o espaço produto. Sob esse espaço, definimos os seguintes subconjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{\omega \in \Omega : \mathcal{J}_\omega \text{ é desconexo}\}, \\ \mathcal{D}_N &= \{\omega \in \Omega : \mathcal{J}_\omega \text{ tem mais do que } N \text{ componentes}\}, \\ \mathcal{D}_\infty &= \{\omega \in \Omega : \mathcal{J}_\omega \text{ tem infinitas componentes}\}, \\ \mathcal{T} &= \{\omega \in \Omega : \mathcal{J}_\omega \text{ é totalmente desconexo}\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Quando $N > 1$, temos as inclusões $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_N \subset \mathcal{D}$.

Assim como definimos o conjunto crítico no caso quadrático, também definimos o conjunto crítico no caso cúbico.

Definição 3.1. *Seja $\omega = (c_n) \in \Omega$ e $f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z$. O conjunto crítico de $(f_\omega^n(z))$ é dado por*

$$\mathcal{C}_{(f_\omega^n)} = \{z \in \mathbb{C} : (f_\omega^m)'(z) = 0, \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}.$$

O objetivo dessa definição é estabelecer uma caracterização de conexidade do conjunto de Julia para $f_{c_n}(z) = z^3 + c_n z$, a qual é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1 ([12]). *O conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é conexo se, e somente se, $\mathcal{C}_{(f_\omega^n)} \subset \mathcal{K}_\omega$.*

Vimos no caso quadrático que, quando $|c_n| \leq \frac{1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é conexo. Estamos interessados em determinar uma condição similar para o caso cúbico, ou seja, até que valor $\delta > 0$ o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é conexo? Essa pergunta foi respondida por Alves e Salarinoghabi em [4]. Esses autores obtiveram o seguinte valor para $\omega \in \Omega = D_\delta^{\mathbb{N}}$,

$$\delta_0 := \frac{3(1 + \sqrt{2})^{2/3} - 1}{2(1 + \sqrt{2})^{1/3}} \approx 0.89.$$

e provaram o seguinte resultado.

Teorema 3.2 ([4]). *Seja $\delta < \delta_0$ e $\omega \in \Omega = \overline{D}_\delta^{\mathbb{N}}$. Se $z_0 \in \mathcal{C}_{(f_\omega^n)}$, então $f_\omega^n(z_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Em particular, o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é conexo.*

E quando $\delta > \delta_0$, o que acontece? O nosso objetivo é responder essa pergunta, provando o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Seja $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e limitado e μ_δ a medida de probabilidade de Borel em V , tal que $D_{\delta_0} \subsetneq V \subset D_\delta$. Considere o espaço $\Omega = V^{\mathbb{N}}$, com a medida produto $\mathbb{P} = \otimes_{n=0}^{\infty} \mu_\delta$ gerada por μ_δ . Então, para \mathbb{P} -quase toda sequência $\omega \in \Omega$, o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é totalmente desconexo.*

A prova desse teorema foi dividida em três partes. Inicialmente, provou-se uma condição para que o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω seja totalmente desconexo, considerando uma sequência $\omega \in \Omega = D_\delta^{\mathbb{N}}$. Em seguida, tal condição foi verificada para um conjunto aberto e limitado $V \subset \mathbb{C}$, onde $\omega \in \Omega = V^{\mathbb{N}}$. Resta agora provarmos o caso em que $\omega \in \Omega = V^{\mathbb{N}}$ e $D_{\delta_0} \subsetneq V \subset D_\delta$. Observe que, de acordo com o Teorema 3.2, D_{δ_0} contém os parâmetros para os quais o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é conexo. As duas primeiras partes mencionadas acima correspondem respectivamente aos Teoremas 3.5 e 3.6, que se encontram a seguir, e podem ser vistos com mais detalhes em [3]. Aqui, iremos apenas citar tais resultados, pois o nosso foco é provar a última parte. Antes de fazermos isso, precisamos de algumas definições, lemas e teoremas auxiliares, que também podem ser vistos com mais detalhes em [3] e [4]. Tais ferramentas, irão nos ajudar na demonstração do Teorema 3.3, conforme veremos a seguir.

Seja $\delta > 0$. Definimos $R_\delta = \sqrt{1 + \delta}$. Este número tem um papel importante em nosso estudo, e isso ficará evidente no seguinte lema.

Lema 3.1 ([4]). *Seja $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Quando $|z| > R_\delta$, então existe uma constante $\beta > 1$, tal que $|f_\omega^n(z)| > |z|\beta^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

R_δ é chamado raio de escape, e isso significa que, para todo $z \notin D_{R_\delta}$, $f_\omega^n(z) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Assim como fizemos para a família quadrática, também é possível definir a função de Green na bacia de atração do infinito $\mathcal{A}_\omega(\infty)$, como segue.

Teorema 3.4 (Existência da função de Green [3]). *Seja $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto de Borel e $\Omega = V^{\mathbb{N}}$. Seja μ a medida de probabilidade de Borel em V e \mathbb{P} a medida produto gerada por μ . Para cada sequência $\omega \in \Omega$, o limite a seguir existe*

$$g_\omega : \mathcal{A}_\omega(\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z : \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \log |f_\omega^n(z)|.$$

A função g_ω é a função de Green definida sobre $\mathcal{A}_\omega(\infty)$, com polo no infinito. Se $g_\omega(z) = 0$, para todo $z \in \mathcal{K}_\omega$, então, esta função se estende continuamente em todo o plano.

Agora, seja $R > 0$ tal que $R > R_\delta$. É possível escolher um valor $R > 0$ suficientemente grande, de maneira que, para toda sequência $\omega \in \Omega$,

$$f_\omega(\overline{D}_R^c) \subset \overline{D}_{3R}^c \quad (3.3)$$

e $\overline{D}_R^c \subset \mathcal{A}_\omega(\infty)$. A partir dessa condição, iremos provar os seguintes lemas.

Lema 3.2 ([3]). *Seja $R > R_\delta$. Então, dado $\epsilon > 0$, temos $|g_\omega(z) - \log |z|| < \epsilon$, para todo $z \in \overline{D}_R^c$.*

Demonstração. Seja $z \in (\overline{D}_R)^c$, $a_0(z) = \log |z|$ e $a_n(z) = \frac{1}{3^n} \log |f_\omega^n(z)|$. Assim, temos

$$\begin{aligned} a_{n+1}(z) &= \frac{1}{3^{n+1}} \log |f_\omega^{n+1}(z)| \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} \log |(f_\omega^n(z))^3 + c_{n+1}(f_\omega^n(z))| \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} \log \left| (f_\omega^n(z))^3 \left(1 + \frac{c_{n+1}}{(f_\omega^n(z))^2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} \left(\log |f_\omega^n(z)|^3 + \log \left| 1 + \frac{c_{n+1}}{(f_\omega^n(z))^2} \right| \right) \\ &= \frac{1}{3^n} \log |f_\omega^n(z)| + \frac{1}{3^{n+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{n+1}}{(f_\omega^n(z))^2} \right| \\ &= a_n(z) + \frac{1}{3^{n+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{n+1}}{(f_\omega^n(z))^2} \right|. \end{aligned}$$

Afirmção: $a_n(z) = a_0(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3^{i+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{i+1}}{(f_\omega^i(z))^2} \right|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, pela relação acima, temos

$$(i) \quad n = 0 \Rightarrow a_1(z) = a_0(z) + \frac{1}{3} \log \left| 1 + \frac{c_1}{z^2} \right|$$

$$(ii) \quad n = 1 \Rightarrow a_2(z) = a_1(z) + \frac{1}{3^2} \log \left| 1 + \frac{c_2}{(f_\omega(z))^2} \right| = a_0(z) + \sum_{i=0}^1 \frac{1}{3^{i+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{i+1}}{(f_\omega^i(z))^2} \right|.$$

Suponha que para $n = k - 1$, a igualdade

$$a_k(z) = a_0(z) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{3^{i+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{i+1}}{(f_\omega^i(z))^2} \right| \quad (3.4)$$

seja verdadeira. Para $n = k$, temos

$$a_{k+1}(z) = a_k(z) + \frac{1}{3^{k+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{k+1}}{(f_\omega^k(z))^2} \right|.$$

De (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} a_{k+1}(z) &= a_0(z) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{3^{i+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{i+1}}{(f_\omega^i(z))^2} \right| + \frac{1}{3^{k+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{k+1}}{(f_\omega^k(z))^2} \right| \\ &= a_0(z) + \sum_{i=0}^k \frac{1}{3^{i+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{i+1}}{(f_\omega^i(z))^2} \right|. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, a afirmação segue.

Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = g_\omega(z)$, por isso, resulta que

$$\begin{aligned} g_\omega(z) - \log |z| &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) - \lim_{n \rightarrow \infty} a_0(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n(z) - a_0(z)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \log \left| 1 + \frac{c_{n+1}}{(f_\omega^n(z))^2} \right|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ e $R > R_\delta$ suficientemente grande, visto que $z \in \overline{D}_R^c$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que para todo $n > n_0$,

$$\left| \log \left| 1 + \frac{c_{n+1}}{(f_\omega^n(z))^2} \right| \right| < \epsilon,$$

pois, $f_\omega^n(z) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) e $\omega = (c_n)$ é limitada. Por esse motivo, para todo $n > n_0$, temos

$$\left| g_\omega(z) - \log |z| \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \left| \log \left| 1 + \frac{c_{n+1}}{(f_\omega^n(z))^2} \right| \right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \epsilon = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Lema 3.3 ([3]). Para cada $R > R_\delta$, seja $\tilde{R} \in (R, R^3 - \delta R)$ um valor fixado. Então, para cada $\omega \in \Omega$, temos $f_\omega^{-1}(D_{\tilde{R}}) \subset D_R$. Além disso, para cada $z \in \overline{D}_R^c$,

$$G_\delta = \sup_{R \leq |z| \leq \tilde{R}} (g_\omega(z)) < \infty.$$

Demonstração. Seja $z \in f_\omega^{-1}(D_{\tilde{R}})$, então $f_\omega(z) \in D_{\tilde{R}}$. Observe que

$$|z|^3 - \delta|z| < |z|^3 - |c_1||z| \leq |z|^3 - c_1|z| = |f_\omega(z)| < \tilde{R},$$

isso implica que $|z|^3 - \delta|z| - R < 0$. Resolvendo esta desigualdade, obtemos $|z| < R_0$, onde

$$R_0 = \frac{1}{6} \frac{\left(108\tilde{R} + 12\sqrt{-12\delta^3 + 81\tilde{R}^2}\right)^{2/3} + 12\delta}{\left(108\tilde{R} + 12\sqrt{-12\delta^3 + 81\tilde{R}^2}\right)^{1/3}}. \quad (3.5)$$

Como $\tilde{R} < R^3 - \delta R$, substituindo em (3.5), resulta que $R_0 < R$, logo, $z \in D_R$. Agora, seja $z \in (\overline{D}_R)^c$, tal que $R \leq |z| \leq \tilde{R}$, isso implica $\log R \leq \log |z| \leq \log \tilde{R}$. Pelo Lema 3.2, $|g_\omega(z) - \log |z|| < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ e todo $z \in \overline{D}_R^c$. Por isso, temos

$$|g_\omega(z)| < \log |z| + \epsilon < \log \tilde{R} + \epsilon,$$

logo, $|g_\omega(z)| \leq \log \tilde{R} < \infty$, para todo $z \in \overline{D}_R^c$, tal que $|z| \in [R, \tilde{R}]$, ou seja, a função de Green é limitada superiormente. Portanto, o supremo existe, o qual denotamos por

$$G_\delta = \sup_{R \leq |z| \leq \tilde{R}} (g_\omega(z)) < \infty.$$

□

Com os valores R_δ e G_δ estabelecidos, podemos formalizar as seguintes definições.

Definição 3.2. Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo e $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto de Borel limitado, com $V \subset D_\delta$, para algum $\delta > 0$. Além disso, seja μ_δ a medida de probabilidade de Borel em V e $\mathbb{P} = \otimes_{n=0}^\infty \mu_\delta$ a distribuição produto em $\Omega = V^\mathbb{N}$ gerada por μ_δ . Dada uma sequência $\omega \in \Omega$ e $z \in \mathbb{C}$, dizemos que z escapa rapidamente se existe uma constante $\gamma > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(A_k(z)) < e^{-\gamma k},$$

onde

$$A_k(z) = \left\{ \omega \in \Omega : g_\omega(z) < \frac{G_\delta}{3^k} \right\}.$$

Definição 3.3. Seja $R > R_\delta$, $z \in D_R$ e $\omega \in \Omega$. O tempo de escape de z do disco D_R é dado por

$$t(z, \omega) = \begin{cases} \min\{j : |f_\omega^j(z)| \geq R\}, & z \in \mathcal{A}_\omega(\infty). \\ \infty, & z \in \mathcal{K}_\omega. \end{cases}$$

Lema 3.4 ([3]). Para todo $z \in \mathcal{A}_\omega(\infty) \cap D_R$ e $\omega \in \Omega$, temos

$$\frac{\log R - 1}{3^{t(z,\omega)}} \leq g_\omega(z) \leq \frac{\log R + 1}{3^{t(z,\omega)-1}}.$$

Seja $R > R_\delta$ e $\tilde{R} \in (R, R^3 - \delta R)$. Escolhendo um raio arbitrário $r \in [R, \tilde{R}]$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos,

$$B_k = (f_\omega^k)^{-1}(D_r).$$

Quando consideramos $f_\omega^k : \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_{f_\omega^k} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, onde $\mathcal{C}_{f_\omega^k}$ é o conjunto crítico de f_ω^k , segue que f_ω^k é uma aplicação de recobrimento. Pela definição de uma aplicação de recobrimento, concluímos que

$$B_k = \bigcup_j B_{k,j},$$

onde $B_{k,i} \cap B_{k,j} = \emptyset$, se $i \neq j$.

Os dois teoremas a seguir, correspondem respectivamente à primeira e a segunda parte da demonstração do Teorema 3.3, conforme mencionamos anteriormente.

Teorema 3.5 ([3]). Seja $\delta > 0$ e $\omega \in D_\delta^\mathbb{N}$. Se existe um número natural N tal que para finitos $k \in \mathbb{N}$ e para cada componente $B_{k,j}$ de B_k , o grau da aplicação $f_\omega^k : B_{k,j} \rightarrow D_{\tilde{R}}$ é no máximo N , então, o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é totalmente desconexo.

Teorema 3.6 ([3]). Sejam V, μ_δ e \mathbb{P} dados na Definição 3.2. Se todo ponto crítico de f_ω^n escapa rapidamente, então as hipóteses do Teorema 3.5 são satisfeitas para \mathbb{P} -quase toda $\omega \in V^\mathbb{N}$. Portanto, para \mathbb{P} -quase toda $\omega \in V^\mathbb{N}$, o conjunto de Julia \mathcal{J}_ω é totalmente desconexo.

Além desses resultados, iremos utilizar uma propriedade elementar dos números complexos, descrita pelo seguinte lema.

Lema 3.5 ([22]). Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Se o argumento de z coincide com o argumento de w , isto é $\arg(z) = \arg(w)$, então vale a igualdade

$$|z + w| = |z| + |w|.$$

Demonstração. De fato, seja $\theta = \arg(z) = \arg(w)$. Escrevendo z e w na forma polar, temos $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Assim,

$$\begin{aligned} |z + w| &= ||z| + |w|(\cos \theta + i \sin \theta)| \\ &= ||z| + |w|| \cdot |\cos \theta + i \sin \theta| \\ &= |z| + |w| \cdot \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= |z| + |w|. \end{aligned}$$

□

3.3 Resultado Principal.

Nesta seção, vamos finalizar a prova do Teorema 3.3. Para concluirmos essa demonstração, precisamos das definições e resultados vistos anteriormente neste capítulo, bem como os teoremas a seguir.

Teorema 3.7. *Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo e $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e limitado, tal que*

$$D_{\delta_0} \subsetneq V \subset D_\delta.$$

Considere o espaço $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ com o produto de distribuição uniforme \mathbb{P} em V . Então existe uma constante $\gamma > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t(z, \omega) > k\}) \leq e^{-\gamma k},$$

onde $t(z, \omega)$ é o tempo de escape de z do disco $D_{R_0} = D(0, R_0)$, e $R_0 > R_\delta$.

Demonstração. Seja $c \in V$ tal que $|c| > \delta_0 + \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Observe que, para aplicação $f(x) = x^3 + \delta_0 x$, temos

$$f^n(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \tag{3.6}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz, $|x| < \sqrt{1 - \delta_0}$. Com efeito, primeiro notemos que, os pontos fixos de f são

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x^3 + \delta_0 x = x \\ &\Leftrightarrow x^3 + (\delta_0 - 1)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + (\delta_0 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm \sqrt{1 - \delta_0}. \end{aligned}$$

Agora, seja $x \in (-\sqrt{1 - \delta_0}, 0)$, pelo que vimos acima, temos $-\sqrt{1 - \delta_0} < f^n(x) < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a órbita $(f^n(x))$ é limitada, além disso,

$$f(x) = x^3 + \delta_0 x = x(x^2 + \delta_0) > x((-\sqrt{1 - \delta_0})^2 + \delta_0) = x,$$

assim, $f(x) > x$. Prosseguindo esse processo de maneira indutiva, resulta que

$$f^{n+1}(x) > f^n(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(f^n(x))$ é monótona e limitada, portanto, ela converge para um ponto fixo, que neste caso é o zero, de acordo com as condições acima. Quando $x \in (0, \sqrt{1 - \delta_0})$, o raciocínio é análogo.

Seja $c' \in D(0, \sqrt{1 - \delta_0})$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\arg(c') = \frac{\arg(c)}{2}$; e $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(ii) $|c'| = \sqrt{1 - \delta_0} - \epsilon > 0$, para algum $\epsilon > 0$ pequeno;

Caso 1: $|z| < \sqrt{1 - \delta_0}$.

Afirmção 1: Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $|z| < \sqrt{1 - \delta_0}$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ e parâmetros $c_1, c_2, \dots, c_N \in D_{\delta_0} = D(0, \delta_0)$ tal que

$$f_{c_N} \circ \dots \circ f_{c_1}(z) = c'.$$

De fato, note que, se para cada $m \in \mathbb{N}$ os parâmetros $\tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_m \in (0, \delta_0)$ e $y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $|y| < \sqrt{1 - \delta_0}$, então,

$$0 < f_{\tilde{c}_m} \circ \dots \circ f_{\tilde{c}_2}(|y|) < f^{m-1}(|y|). \quad (3.7)$$

Basta observar que, se $\tilde{c}_2 \in (0, \delta_0)$, temos

$$f_{\tilde{c}_2}(|y|) = |y|^3 + \tilde{c}_2|y| < |y|^3 + \delta_0|y| = f(|y|).$$

O restante segue de maneira indutiva. Considere a aplicação $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $s(\zeta) = z^3 + \zeta z$, onde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ está fixo e $|z| < \sqrt{1 - \delta_0}$. Seja $a \in D(0, \delta_0)$, assim, temos

$$|s(a)| = |z^3 + az| \leq |z|^3 + |a| \cdot |z| = |z|(|z|^2 + |a|) < |z|(1 - \delta_0 + \delta_0) < \sqrt{1 - \delta_0}.$$

Podemos escolher $c_1 \in D(0, \delta_0)$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $|z| < \sqrt{1 - \delta_0}$, tal que

$$|c'| < |s(c_1)| < \sqrt{1 - \delta_0}.$$

Vamos denotar por $w = s(c_1) = f_{c_1}(z)$. Além disso, ajustamos o argumento de w , de tal forma que

$$\left[3^{N-1} \arg(w) = 3^{N-1} \arg(f_{c_1}(z)) \right]_{\text{mod } 2\pi} = \arg(c'). \quad (3.8)$$

Defina $\tilde{w} = (\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots)$, com $\tilde{c}_j \in (0, \delta_0)$, para todo $j > 1$. Decorre de (3.6) e (3.7) que

$$f_{\tilde{w}}^n(|w|) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Como $|w| > |c'|$, segue que existem $N \in \mathbb{N}$ e parâmetros $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots, \tilde{c}_N \in (0, \delta_0)$ tais que

$$f_{\tilde{c}_N} \circ \dots \circ f_{\tilde{c}_2}(|w|) = |c'|. \quad (3.9)$$

Agora, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $c_{n+1} \in \mathbb{C}$, tal que $|c_{n+1}| = \tilde{c}_{n+1} \in (0, \delta_0)$ e

$$\arg(c_{n+1} \cdot (f_{c_n} \circ \dots \circ f_{c_1}(z))) = \arg((f_{c_n} \circ \dots \circ f_{c_1}(z))^3). \quad (3.10)$$

Afirmção 2: $|f_{c_{n+1}} \circ \dots \circ f_{c_1}(z)| = f_{\tilde{c}_{n+1}} \circ \dots \circ f_{\tilde{c}_2}(|w|)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $w = z^3 + c_1 z = f_{c_1}(z)$ e $c_{n+1} \in \mathbb{C}$, satisfazendo (3.10).

De fato, se $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} |f_{c_2} \circ f_{c_1}(z)| &= |(f_{c_1}(z))^3 + c_2 \cdot f_{c_1}(z)| \\ &= |f_{c_1}(z)|^3 + |c_2| \cdot |f_{c_1}(z)| \\ &= |w|^3 + \tilde{c}_2 \cdot |w| \\ &= f_{\tilde{c}_2}(|w|). \end{aligned}$$

Suponha que para $n = k$, a igualdade

$$|f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| = f_{\tilde{c}_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{\tilde{c}_2}(|w|), \quad (3.11)$$

seja verdadeira. Para $n = k + 1$, temos

$$\begin{aligned} |f_{c_{k+2}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| &= |(f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))^3 + c_{k+2} \cdot (f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))| \\ &= |(f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))|^3 + |c_{k+2}| \cdot |(f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))| \\ &= |(f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))|^3 + \tilde{c}_{k+2} \cdot |(f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))| \\ &= f_{\tilde{c}_{k+2}}(|(f_{c_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))|) \quad (3.11) \\ &= f_{\tilde{c}_{k+2}}(f_{\tilde{c}_{k+1}} \circ \cdots \circ f_{\tilde{c}_2}(|w|)) \\ &= f_{\tilde{c}_{k+2}} \circ \cdots \circ f_{\tilde{c}_2}(|w|). \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, a afirmação 2 está provada.

Em particular, quando $n = N - 1$, resulta que

$$|f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| = f_{\tilde{c}_N} \circ \cdots \circ f_{\tilde{c}_2}(|w|) = |c'|.$$

Mais ainda, de (3.8) e (3.10), concluímos que

$$\arg(f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)) = \arg(c').$$

Quando dois números complexos possuem o mesmo módulo e o mesmo argumento, isso implica que tais números devem ser iguais, logo,

$$f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z) = c'.$$

E isso, finaliza a prova da Afirmação 1.

Por hipótese,

$$\begin{aligned} \arg(c') = \frac{\arg(c)}{2} &\Leftrightarrow 2 \arg(c') = \arg(c) \\ &\Leftrightarrow 3 \arg(c') = \arg(c) + \arg(c') \\ &\Leftrightarrow \arg((c')^3) = \arg(c \cdot c'). \end{aligned}$$

Colocando $c_{N+1} = c$ e aplicando a observação acima, temos

$$\begin{aligned}
 |f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| &= |(f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))^3 + c_{N+1} \cdot f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| \\
 &= |f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)|^3 + |c_{N+1}| \cdot |f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| \\
 &= |c'|^3 + |c| \cdot |c'| \\
 &= |c'|^3 + (\delta_0 + \epsilon) \cdot |c'| \\
 &> (\delta_0 + \epsilon) \cdot |c'| \\
 &> \sqrt{1 - \delta_0}.
 \end{aligned}$$

Note que se $x \in \mathbb{R}$ e $x > \sqrt{1 - \delta_0}$, então $f^n(x) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), pois

$$f(x) = x^3 + \delta_0 x = x(x^2 + \delta_0) > x(1 - \delta_0 + \delta_0) = x > \sqrt{1 - \delta_0},$$

$$f^2(x) = (f(x))^3 + \delta_0 f(x) = f(x)(f(x)^2 + \delta_0) > f(x)(1 - \delta_0 + \delta_0) = f(x) > \sqrt{1 - \delta_0}.$$

Prosseguindo de maneira indutiva, resulta que

$$f^n(x) < f^{n+1}(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, se $(f^n(x))$ fosse limitada, essa órbita deveria convergir para um ponto fixo, o que não é possível, já que os pontos fixos de f são $0, \pm\sqrt{1 - \delta_0}$ e $f^n(x) > \sqrt{1 - \delta_0}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$f^n(x) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Sabemos que $|f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| > \sqrt{1 - \delta_0}$ e por hipótese, $|c| > \delta_0 + \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Colocando $c_{N+2} = c$, e ajustando o argumento de acordo com (3.10), temos

$$\begin{aligned}
 |f_{c_{N+2}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| &= |(f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z))^3 + c_{N+2} \cdot f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| \\
 &= |f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)|^3 + |c_{N+2}| \cdot |f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| \\
 &= |f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| (|f_{c_{N+1}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)|^2 + |c|) \\
 &> \sqrt{1 - \delta_0} \cdot (1 - \delta_0 + \delta_0 + \epsilon) \\
 &= (1 + \epsilon) \sqrt{1 - \delta_0}.
 \end{aligned}$$

Seja $c_{N+3} \in \mathbb{C}$, tal que $|c_{N+3}| = \delta_0 - 0,01$. Resulta que

$$\begin{aligned}
 |f_{c_{N+3}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| &= |f_{c_{N+2}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)|^3 + |c_{N+3}| \cdot |f_{c_{N+2}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| \\
 &= |f_{c_{N+2}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)| (|f_{c_{N+2}} \circ \cdots \circ f_{c_1}(z)|^2 + |c_{N+3}|) \\
 &> (1 + \epsilon) \sqrt{1 - \delta_0} \cdot ((1 + \epsilon)^2 (1 - \delta_0) + \delta_0 - 0,01) \\
 &= (1 + \epsilon) \sqrt{1 - \delta_0} \cdot (1 + (2 - 2\delta_0)\epsilon + (1 - \delta_0)\epsilon^2 - 0,01).
 \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$(1 + \epsilon)\sqrt{1 - \delta_0} \cdot (1 + (2 - 2\delta_0)\epsilon + (1 - \delta_0)\epsilon^2 - 0,01) = (1 + \epsilon)\sqrt{1 - \delta_0} + \alpha_1,$$

com $\alpha_1 > 0$, assim,

$$|f_{c_{N+3}} \circ \dots \circ f_{c_1}(z)| > (1 + \epsilon)\sqrt{1 - \delta_0} + \alpha_1.$$

Definimos uma subsequência $c_{N+k} \in \mathbb{C}$, de modo que $|c_{N+k}| = |c_{N+k-1}| - 0,01$, para todo $k > 3$. Aplicando (3.10) em cada etapa, segue que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ e parâmetros $c_{N+3}, \dots, c_{N+N_1} \in D(0, \delta_0)$ tal que

$$|f_{c_{N+N_1}} \circ \dots \circ f_{c_1}(z)| > R_0 + 1.$$

Caso 2: $|z| > \sqrt{1 - \delta_0}$.

Se $|z| > \sqrt{1 - \delta_0}$, obtemos uma condição similar, basta observar que, colocando $d_1 = c$ e aplicando (3.10), temos

$$\begin{aligned} |f_{d_1}(z)| &= |z^3 + d_1z| \\ &= |z|^3 + |d_1| \cdot |z| \\ &= |z|(|z|^2 + |c|) \\ &> \sqrt{1 - \delta_0}(1 - \delta_0 + \delta_0 + \epsilon) \\ &= (1 + \epsilon)\sqrt{1 - \delta_0}. \end{aligned}$$

Definindo $d_2 \in \mathbb{C}$ tal que $|d_2| = \delta_0 - 0,01$ e $d_k \in \mathbb{C}$ com $|d_k| = |d_{k-1}| - 0,01$, para todo $k > 2$, de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, segue que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ e parâmetros $d_2, \dots, d_{N_2} \in D(0, \delta_0)$ tais que

$$|f_{d_{N_2}} \circ \dots \circ f_{d_1}(z)| > R_0 + 1.$$

Caso 3: $|z| = \sqrt{1 - \delta_0}$.

Se $|z| = \sqrt{1 - \delta_0}$, podemos escolher um parâmetro $c_0 \in D(0, \delta_0)$ tal que

$$|z^3 + c_0z| \leq |z|^3 + |c_0| \cdot |z| = |z|(|z|^2 + |c_0|) < |z|(1 - \delta_0 + \delta_0) = \sqrt{1 - \delta_0},$$

e aplicar o raciocínio descrito na primeira parte da demonstração.

As condições provadas até então, significam que para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe $M = M(z) \in \mathbb{N}$ e uma sequência $c_i \in V$, $i = 1, \dots, M$ tal que

$$|f_{c_M} \circ \dots \circ f_{c_1}(z)| > R_0 + 1.$$

O mesmo acontece quando fazemos uma pequena perturbação de $c_i \in V$. Então, tomando $r > 0$ suficientemente pequeno, definimos

$$B_z = D(c_1, r) \times D(c_2, r) \times \dots \times D(c_M, r) \times D(0, \delta)^{\mathbb{N}}.$$

Como $\mu_{L_\delta}(D(0, \delta)) = 1$, resulta que $\mathbb{P}(D(0, \delta)^\mathbb{N}) = 1$ e conseqüentemente $\mathbb{P}(B_z) > 0$. Isso implica que, para toda seqüência $\omega \in B_z$,

$$|f_\omega^M(z)| > R_0 + \frac{1}{2}.$$

Além disso, a família

$$\mathfrak{F} = \{f_\omega^M|_{D_{R_0}} : \omega \in \Omega = V^\mathbb{N}\},$$

é equicontínua quando M está fixado, e isso equivale a dizer que \mathfrak{F} é normal, logo, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe uma vizinhança aberta U_z tal que, para todo $v \in U_z$ e toda $\omega \in B_z$, temos $|f_\omega^M(v)| > R_0$. De (3.3), sabemos que $f_\omega(\overline{D}_{R_0}^c) \subset \overline{D}_{3R_0}^c$, para toda $\omega \in \Omega$, sendo assim, segue que para todo $N \geq M$,

$$|f_\omega^N(v)| > R_0.$$

De fato, basta observar que dada uma seqüência $\omega = (b_1, b_2, \dots) \in \Omega$, temos

$$f_\omega^{M+1}(v) = f_{b_{M+1}}(f_\omega^M(v)) \subset \overline{D}_{3R_0}^c \Rightarrow |f_\omega^{M+1}(v)| > 3R_0 > R_0.$$

Em particular, podemos considerar vizinhanças abertas U_z , com $z \in \overline{D}_{R_0}$, de modo que $\{U_z\}_{z \in \overline{D}_{R_0}}$ seja uma cobertura de \overline{D}_{R_0} . Como \overline{D}_{R_0} é compacto, resulta que $\{U_z\}_{z \in \overline{D}_{R_0}}$ admite uma subcobertura finita $\{U_{z_1}, \dots, U_{z_k}\}_{z_i \in \overline{D}_{R_0}}$, para todo $i = 1, \dots, k$. Tomando $\beta = \min_{z_i} \mathbb{P}(B_{z_i})$ e $M = \max_{z_i} M_{z_i}$, temos

$$\{\omega \in B_z : |f_\omega^M(z)| > R_0\} \subset \{\omega \in \Omega : |f_\omega^M(z)| > R_0\},$$

logo, existe $M \in \mathbb{N}$ e $\beta > 0$, tal que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |f_\omega^M(z)| > R_0\}) > \beta.$$

Definindo $S^k(z) = \{\omega \in \Omega : |f_\omega^k(z)| < R_0\}$ e $E^k(z) = \{\omega \in \Omega : |f_\omega^k(z)| > R_0\}$, segue que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos $\mathbb{P}(S^M(z)) < 1 - \beta$. Basta observar que $S^M(z) \subset (\Omega \setminus E^M(z))$, logo,

$$\mathbb{P}(S^M(z)) \leq \mathbb{P}(\Omega \setminus E^M(z)) = 1 - \mathbb{P}(E^M(z)) < 1 - \beta.$$

Podemos estimar a medida do conjunto $S^k(z)$ como foi feito no Teorema 2.10, usando o fato de que \mathbb{P} é a medida produto. Assim, temos

$$\mathbb{P}(S^{k+M}(z)) = \int_{S^k(z)} \mathbb{P}(S^M(f_\omega^k(z))) d\mathbb{P}(\omega) \leq (1 - \beta) \cdot \mathbb{P}(S^k(z)).$$

Isso implica que existe uma constante $0 < \alpha \leq 1$ tal que

$$\mathbb{P}(S^k(z)) \leq \alpha(1 - \beta)^{\frac{k}{M}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Definindo $0 < \gamma \leq \frac{-\ln(1 - \beta)}{M}$, temos,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 - \beta)}{M} \leq -\gamma &\Rightarrow \frac{k}{M} \ln(1 - \beta) \leq -k\gamma \Rightarrow \\ \ln(1 - \beta)^{\frac{k}{M}} &\leq -k\gamma \Rightarrow (1 - \beta)^{\frac{k}{M}} \leq e^{-k\gamma}. \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $\gamma > 0$, tal que

$$\mathbb{P}(S^k(z)) \leq \alpha(1 - \beta)^{\frac{k}{M}} \leq e^{-k\gamma}.$$

Note que

$$T_k(z) = \{\omega \in \Omega : t(z, \omega) > k\} = \{\omega \in \Omega : |f_\omega^k(z)| \leq R_0\} = W^k(z).$$

De fato, seja $\omega \in T^k(z)$, então, $t(z, \omega) > k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Por definição, o tempo de escape do disco $D(0, R_0)$ é o menor número natural que satisfaz $|f_\omega^{t(z, \omega)}(z)| > R_0$, logo, $|f_\omega^k(z)| \leq R_0$, e $\omega \in W^k(z)$, ou seja, $T_k(z) \subset W^k(z)$. A outra inclusão é análoga. Como $S^k(z) \subset W^k(z)$ e o bordo do disco $D(0, R_0)$ tem área igual a zero, segue que $\mathbb{P}(S^k(z)) = \mathbb{P}(W^k(z))$. Isso implica que

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t(z, \omega) > k\}) \leq e^{-\gamma k}.$$

□

De acordo com o Teorema 3.6, para que o conjunto de Julia seja totalmente desconexo, é suficiente mostrarmos que, para toda sequência $\omega \in \Omega = V^{\mathbb{N}}$, onde $V \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e limitado, tal que $D_{\delta_0} \subsetneq V \subset D_\delta$, todo ponto crítico escapa rapidamente, conforme a Definição 3.2. Mostramos exatamente isso, no teorema a seguir.

Teorema 3.8. *Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo e $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e limitado, tal que*

$$D_{\delta_0} \subsetneq V \subset D_\delta.$$

Considere o espaço $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ com o produto de distribuição uniforme \mathbb{P} em V . Então existe uma constante $\gamma > 0$ tal que, para todo ponto crítico não nulo $z_0 \in \mathcal{C}_{(f_\omega^n)}$,

$$\mathbb{P}(A_k(z_0)) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : g_\omega(z_0) < \frac{G_\delta}{3^k}\right\}\right) \leq e^{-\gamma k},$$

onde G_δ é dado pelo Lema 3.3.

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathcal{C}_{(f_\omega^n)}$ um ponto crítico não nulo. Definimos

$$T_k(z_0) = \{\omega \in \Omega : t(z_0, \omega) > k\}.$$

Queremos provar que $A_k(z_0) \subset T_k(z_0)$. Seja $\omega \in A_k(z_0)$ e suponha que $\omega \notin T_k(z_0)$. Por simplicidade, vamos denotar $t(z_0, \omega)$ por t . Então, devemos ter $t \leq k$. Logo, existem $q, r \in \mathbb{N}$, tais que $k = qt + r$, com $0 \leq r < t$.

Afirmção 1: $r = 1$.

De fato, suponha que $r \neq 1$. Como $\omega \in A_k(z_0)$, temos

$$g_\omega(z_0) < \frac{G_\delta}{3^k} = \frac{G_\delta}{3^{qt+r}} \Rightarrow 3^{qt} g_\omega(z_0) < \frac{G_\delta}{3^r}.$$

Pelo Lema 3.4, temos

$$\begin{aligned} \frac{\log R_0 - 1}{3^t} &\leq g_\omega(z_0) \leq \frac{3(\log R_0 + 1)}{3^t} \Rightarrow \\ \log R_0 - 1 &\leq 3^t g_\omega(z_0) \leq 3(\log R_0 + 1) \Rightarrow \\ \log R_0 - 1 &\leq g_{\sigma^t \omega}(f_\omega^t(z_0)) \leq 3(\log R_0 + 1). \end{aligned}$$

Como $|f_\omega^t(z_0)| \geq R_0$, pelo Lema 3.3, resulta que $g_{\sigma^t \omega}(f_\omega^t(z_0)) \leq G_\delta \leq 3(\log R_0 + 1)$. Além disso,

$$3^t g_\omega(z_0) \leq 3^{qt} g_\omega(z_0) < \frac{G_\delta}{3^r} \leq \frac{3(\log R_0 + 1)}{3^r}.$$

Isso implica que

$$3^r g_\omega(z_0) \leq \frac{3(\log R_0 + 1)}{3^t}.$$

Por outro lado, temos

$$\frac{3^r(\log R_0 - 1)}{3^t} \leq 3^r g_\omega(z_0) \leq \frac{3(\log R_0 + 1)}{3^t} \Rightarrow \frac{3^r(\log R_0 - 1)}{3^t} \leq \frac{3(\log R_0 + 1)}{3^t}.$$

Como $r \neq 1$, resulta que

$$\log R_0 \leq \frac{3^{r-1} + 1}{3^{r-1} - 1}. \quad (3.12)$$

A sequência $\left(\frac{3^{r-1} + 1}{3^{r-1} - 1}\right)_{r>1}$ é decrescente, e o seu valor máximo é igual a 2. Podemos escolher um valor R_0 apropriado, de modo que a desigualdade (3.12) não seja satisfeita, e assim, temos uma contradição. Se $r = 0$, aplicando o mesmo raciocínio, segue que

$$\log R_0 \leq \frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3} - 1} = -2,$$

logo, $R_0 < 1$, o que também é uma contradição, pois $R_0 > R_\delta = \sqrt{1 + \delta} > 1$. Portanto, $r = 1$.

Agora, como $k = qt + 1$, temos

$$\begin{aligned} |f_\omega^k(z_0)| &= |f_{c_k}(f_\omega^{k-1}(z_0))| = |f_{c_k}(f_\omega^{qt}(z_0))| \\ &= |(f_\omega^{qt}(z_0))^3 + c_k(f_\omega^{qt}(z_0))| \\ &\geq |(f_\omega^{qt}(z_0))|^3 - |c_k|(f_\omega^{qt}(z_0))| \\ &> R_0^3 - \delta R_0 > \tilde{R}_0. \end{aligned}$$

Como $\omega \in A_k(z_0)$, então $g_{\sigma^k \omega}(f_\omega^k(z_0)) = 3^k g_\omega(z_0) < G_\delta$, o que é uma contradição, pois $|f_\omega^k(z_0)| > \tilde{R}_0$ e $G_\delta = \sup\{g_\omega(z) : \omega \in \Omega \text{ e } R_0 \leq |z| \leq \tilde{R}_0\}$. Portanto, $A_k(z_0) \subset T_k(z_0)$, e pelo Teorema 3.7, segue que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : g_\omega(z_0) < \frac{G_\delta}{3^k}\right\}\right) \leq e^{-\gamma k}.$$

□

3.4 Outros Resultados.

Em [8] Brolin estudou a família cúbica $f_c(z) = z^3 + cz$, com $c \in \mathbb{R}$. Ele provou que, se $|c| \leq 3$, então o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é conexo, e isso implica que o intervalo $[-3, 3]$ está contido no conjunto de Mandelbrot. Para $|c| > 3$, o autor verificou que neste caso, o conjunto de Julia é totalmente desconexo. Por esse motivo, para o próximo resultado, vamos considerar o disco fechado $\overline{D}(3, \delta)$, com $\delta > 0$, visto que esse conjunto contém parâmetros que estão no complementar do conjunto de Mandelbrot. Além disso, normalizamos a medida de Lebesgue μ_{L_δ} nesse disco, da seguinte forma,

$$\mu_{L_\delta}(\overline{D}(3, \delta)) = 1.$$

Sendo assim, temos o seguinte lema.

Lema 3.6. *Seja $R > 0$ e $W \subset \mathbb{C}$ um conjunto conexo tal que $W \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$, onde \mathcal{M} é o conjunto de Mandelbrot. Então, para cada $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ e $c_1, \dots, c_n \in W$, tal que $|f_\omega^n(z)| > R$.*

Demonstração. Seja $c \in W \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M})$. Note que, o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é totalmente desconexo, e o conjunto de Fatou coincide com a bacia no infinito, isto é, $\mathcal{F}_f = \mathcal{A}(\infty)$. Se $z \in \mathcal{F}_f = \mathcal{A}(\infty)$, então, pela definição de $\mathcal{A}(\infty)$, podemos escolher $c_1 = \dots = c_n = c$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $|f_\omega^n(z)| > R$. Agora, se $z \in \mathcal{J}_f$, podemos encontrar $c_1 \in W$, de modo que $f_{c_1}(z) \in \mathcal{A}(\infty)$, pois a aplicação $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(c) = f_c(z) = z^3 + cz$ é contínua e W é conexo, logo, $g(W)$ é conexo. Por esse motivo, $g(c_1) = f_{c_1}(z) \notin \mathcal{J}_f$, pois, \mathcal{J}_f é totalmente desconexo. Sendo assim, $g(c_1) \in \mathcal{A}(\infty) = \mathcal{F}_f$. Tomando n suficientemente grande e definindo $c_2 = \dots = c_n = c$, segue que $|f_c^{n-1}(f_{c_1}(z))| > R$. □

Teorema 3.9. *Seja $\delta > 0$ e $R > R_\delta$. Então, para cada $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, existe um conjunto aberto $U_z \subset \overline{D}(3, \delta)^\mathbb{N}$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\mathbb{P}(U_z) = 1$;
- (ii) Para toda $\omega = (c_n) \in U_z$, a condição $|f_\omega^k(z)| > R$ é válida, para todo k suficientemente grande.

Demonstração. Assuma que R é suficientemente grande, de modo que

$$\overline{f_{c_n}(\mathbb{C} \setminus D_r)} \subset \mathbb{C} \setminus D_R,$$

para todo $c_n \in \overline{D}(3, \delta)$. Dado $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto

$$E^k(z) = \{(c_1, \dots, c_k) \in \overline{D}(3, \delta)^k : |f_\omega^k(z)| > R\}.$$

Como $\overline{D}(3, \delta)^k \cap (\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$ e $\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}$ é conexo, pelo Lema 3.6, existe $k = k(z) \in \mathbb{N}$ tal que $E^k(z) \neq \emptyset$, isto significa que existe uma sequência $(c_1, \dots, c_k) \in \overline{D}(3, \delta)^k$, tal que $|f_\omega^k(z)| = |f_{c_k} \circ \dots \circ f_{c_1}(z)| > R$. Pela continuidade de f_ω^k , existe $\delta = \delta(z) > 0$, tal que $|f_\omega^k(w)| > R$, para todo $w \in D(z, \delta)$, logo,

$$E^k(w) \neq \emptyset,$$

para todo $w \in D(z, \delta)$. Como $\widehat{\mathbb{C}}$ é compacta, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E^N(z) \neq \emptyset$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ (análogo ao Teorema 2.10). Também definimos

$$S^k(z) = \{(c_1, \dots, c_k) \in \overline{D}(3, \delta)^k : |f_\omega^k(z)| \leq R\}$$

e

$$S_0^k(z) = \{(c_1, \dots, c_k) \in \overline{D}(3, \delta)^k : |f_\omega^k(z)| < R\}.$$

Observe que $\mathbb{P}_k(S^k(z)) = \mathbb{P}_k(S_0^k(z))$. De fato, como ∂D_R tem área zero, fixando a sequência $(c_1, \dots, c_{k-1}) \in \overline{D}(3, \delta)^{k-1}$, segue que o conjunto

$$\{c_k \in \overline{D}(3, \delta) : |f_{c_k}(f_\omega^{k-1}(z))| = R\}$$

tem medida nula. Além disso, o conjunto $E^N(z)$ é aberto, pois,

$$E^N(z) = (|f_\omega^N|)^{-1}(R, +\infty).$$

Logo, para cada sequência $(c_1, \dots, c_N) \in E^N(z)$, existe $r > 0$ tal que

$$B((c_1, \dots, c_N), r) \subset E^N(z),$$

isso implica que

$$0 < \mathbb{P}_N(B((c_1, \dots, c_N), r)) \leq \mathbb{P}_N(E^N(z)).$$

Assim, existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_N(E^N(z)) \geq \beta, \tag{3.13}$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Mais ainda, note que

$$E^{k+1}(z) \supset (E^k(z) \times \overline{D}(3, \delta)), \tag{3.14}$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ e todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, seja $(c_1, \dots, c_k, c_{k+1}) \in (E^k(z) \times \overline{D}(3, \delta))$, então, $|f_\omega^k(z)| > R$ e $c_{k+1} \in \overline{D}(3, \delta)$. Por hipótese, sabemos que

$$\overline{f_{c_n}(\mathbb{C} \setminus D_r)} \subset \mathbb{C} \setminus D_R,$$

para todo $c_n \in \overline{D}(3, \delta)$, isso implica que

$$|f_\omega^{k+1}(z)| = |f_{c_{k+1}}(f_\omega^k(z))| > R,$$

ou seja, $(c_1, \dots, c_k, c_{k+1}) \in E^{k+1}(z)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{k+1}(E^k(z) \times \overline{D}(3, \delta)) &= \mathbb{P}_k(E^k(z)) \cdot \mathbb{P}(\overline{D}(3, \delta)) \\ &= \mathbb{P}_k(E^k(z)) \cdot \mu_{L_\delta}(\overline{D}(3, \delta)) \\ &= \mathbb{P}_k(E^k(z)), \end{aligned}$$

pois $\mu_{L_\delta}(\overline{D}(3, \delta)) = 1$. Resulta de (3.14) que

$$\mathbb{P}_k(E^k(z)) \leq \mathbb{P}_{k+1}(E^{k+1}(z)),$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, observe que

$$\mathbb{P}_{k+N}(S^{k+N}(z)) = \mathbb{P}_{k+N}(S^k(z) \times S^N(z)) = \mathbb{P}_k(S^k(z)) \cdot \mathbb{P}_N(S^N(z)) \leq (1 - \beta) \cdot \mathbb{P}_k(S^k(z)).$$

Isso segue de (3.13), pois

$$\beta \leq \mathbb{P}_N(E^N(z)) = 1 - \mathbb{P}_N(S^N(z)) \Rightarrow \mathbb{P}_N(S^N(z)) \leq 1 - \beta.$$

Logo, existe uma constante α tal que

$$\mathbb{P}_k(S^k(z)) \leq \alpha \cdot (1 - \beta)^{k/N}, \text{ (veja Teorema 2.10),}$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Isso implica $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_k(S^k(z)) = 0$, e por isso,

$$\mathbb{P}_k(E^k(z)) \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty),$$

uniformemente em $\widehat{\mathbb{C}}$. Definindo

$$U_z = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z) \times \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}},$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_z) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z) \times \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z)\right) \cdot \mathbb{P}(\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z)\right). \end{aligned}$$

Como $E^k(z) \subset E^{k+1}(z)$, para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ e todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_k(E^k(z)) = 1,$$

o que concluí a prova. □

Com esses resultados, podemos provar o teorema a seguir.

Teorema 3.10. *Seja $\delta > 0$ e $\mathcal{D} = \{\omega \in \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}} : \mathcal{J}_{\omega} \text{ é desconexo}\}$. Então, $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 1$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.1, o conjunto de Julia é conexo se, e somente se, $\mathcal{C}_{(f_{\omega}^n)} \subset \mathcal{K}_{\omega}$. Então, para provar o Teorema 3.10, é suficiente construir um conjunto $\mathfrak{C} \subset \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}$, tal que, para toda sequência $\omega \in \mathfrak{C}$, a condição

$$f_{\omega}^k(z) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty),$$

é satisfeita para algum $z \in \mathcal{C}_{(f_{\omega}^n)}$. Seja $z_0 \in \mathcal{C}_{(f_{\omega}^n)}$. Podemos definir

$$\mathfrak{C} = U_{z_0} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k(z_0) \times \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}},$$

e pelo Teorema 3.9, segue que, para toda sequência $\omega \in \mathfrak{C}$,

$$f_{\omega}^k(z_0) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty),$$

além disso, $\mathbb{P}(\mathfrak{C}) = 1$. Por construção, $\mathfrak{C} \subset \mathcal{D}$. Assim, temos

$$1 = \mathbb{P}(\mathfrak{C}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{D}) \leq 1.$$

Portanto, $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 1$. □

Teorema 3.11. *Seja $\delta > 0$ e $\mathcal{T} = \{\omega \in \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}} : \mathcal{J}_{\omega} \text{ é totalmente desconexo}\}$. Então \mathcal{T} é denso em $\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração. De fato, observe que

$$\mathcal{T} \subset \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}} \Rightarrow \overline{\mathcal{T}} \subset \overline{\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}} = \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}},$$

pois $\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}$ é fechado. Resta mostrar que $\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{T}}$. Seja $\omega_0 = (c_n^0) \in \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}$ e considere

$$\omega_m = (c_n^m) = \begin{cases} c_n^0, & n = 1, \dots, m \\ c, & n > m, \end{cases}$$

onde $c \in \mathbb{R}$, $3 < c < 3 + \delta$, $\delta > 0$. Note que $c \in \overline{D}(3, \delta) \cap (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M})$, onde \mathcal{M} é o conjunto de Mandelbrot para a família cúbica $f_c(z) = z^3 + cz$. Pelo resultado provado por Brolin

em [8], sabemos que o conjunto de Julia \mathcal{J}_f é totalmente desconexo. Além disso, por construção, temos

$$\omega_m \rightarrow \omega_0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Como $\mathcal{J}_{\omega_m} = (f_{c_m^0} \circ \dots \circ f_{c_1^0})^{-1}(\mathcal{J}_f)$ (veja [2]), e a pré-imagem de um conjunto totalmente desconexo por uma aplicação contínua é um conjunto totalmente desconexo, segue que \mathcal{J}_{ω_m} é totalmente desconexo. Logo, $\omega_m \in \mathcal{T}$ e $\omega_0 \in \overline{\mathcal{T}}$. Como ω_0 é arbitrária, resulta que $\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{T}}$. Portanto, $\overline{\mathcal{T}} = \overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}$ e \mathcal{T} é denso em $\overline{D}(3, \delta)^{\mathbb{N}}$. \square

Referências

- [1] Al-Shareeda, M. A., Manickam, S., Mohammed, B. A., Al-Mekhlafi, Z. G., Qtaish, A., Alzahrani, A. J., Alshammari, G., Sallam, A. A., and Almekhlafi, K. Chebyshev polynomial-based scheme for resisting side-channel attacks in 5g-enabled vehicular networks. *Applied Sciences* 12, 12 (2022), 5939. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 56.
- [2] Alves, A., and Salarinoghabi, M. On the family of cubic parabolic polynomials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B* 27, 4 (2022), 2051–2064. Citado 5 vezes nas páginas 26, 37, 46, 51 e 75.
- [3] Alves, Alexandre, H. G. e. S. M. Random cubic polynomials (part - ii) pré-print. Citado 6 vezes nas páginas 55, 56, 58, 59, 61 e 62.
- [4] Alves, Alexandre e Salarinoghabi, M. On a family of random cubic polynomials. pré-print. Citado na página 58.
- [5] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 9, 27, 28, 29 e 30.
- [6] Beardon, A. F. *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*, vol. 132. Springer Science & Business Media, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 9, 10, 34 e 44.
- [7] Brin, M., and Stuck, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002. Citado na página 9.
- [8] Brolin, H. Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv för matematik* 6, 2 (1965), 103–144. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 75.
- [9] Brown, J. W., Churchill, R. V., et al. *Complex variables and applications*, vol. 9. McGraw-Hill New York, 1996. Citado na página 10.
- [10] Brück, R. Connectedness and stability of julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + cn$. *Journal of the London Mathematical Society* 61, 2 (2000), 462–470. Citado 3 vezes nas páginas 39, 45 e 46.
- [11] Brück, R. Geometric properties of julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + cn$. *Pacific Journal of Mathematics* 198, 2 (2001), 347–372. Citado na página 39.

- [12] Brück, R., and Büger, M. Generalized iteration. *Computational Methods and Function Theory* 3 (2004), 201–252. Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 27, 31, 39 e 57.
- [13] Brück, R., Büger, M., and Reitz, S. Random iterations of polynomials of the form: connectedness of julia sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 19, 5 (1999), 1221–1231. Citado 7 vezes nas páginas 31, 39, 44, 45, 48, 51 e 52.
- [14] Büger, M. Self-similarity of julia sets of the composition of polynomials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 17, 6 (1997), 1289–1297. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 33, 35, 36 e 38.
- [15] Büger, M. On the composition of polynomials of the form. *Mathematische Annalen* 310, 4 (1998), 661–683. Citado na página 39.
- [16] Carleson, L., and Gamelin, T. *Complex dynamics*. Springer Science & Business Media, 1996. Citado 10 vezes nas páginas 9, 12, 13, 14, 18, 20, 21, 22, 23 e 55.
- [17] Chebyshev, P. L. *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*. Imprimerie de l'Académie impériale des sciences, 1853. Citado na página 56.
- [18] Comerford, M. Infinitely many grand orbits. *Michigan Mathematical Journal* 51, 1 (2003), 47–58. Citado na página 31.
- [19] Fornæss, J. E., and Sibony, N. Random iterations of rational functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 11, 4 (1991), 687–708. Citado 3 vezes nas páginas 25, 39 e 55.
- [20] Gamelin, T. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 18, 20 e 53.
- [21] Griffiths, P., and Harris, J. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 2014. Citado na página 10.
- [22] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 6: Números Complexos, Polinômios e Equações*, 6ª ed. Saraiva, São Paulo, 2002. Citado na página 62.
- [23] Lech, K. Julia sets in random holomorphic dynamics. Citado na página 40.
- [24] Lech, K., and Zdunik, A. Total disconnectedness of julia sets of random quadratic polynomials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 42, 5 (2022), 1764–1780. Citado na página 55.

- [25] Lima, E. L. *Espaços métricos*, vol. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. Citado na página 45.
- [26] Lima, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 1977. Citado na página 52.
- [27] Lyubich, M. Conformal geometry and dynamics of quadratic polynomials, vol i-ii. Available in his web page (<http://www.math.stonybrook.edu/~mlyubich/book.pdf>) (2017). Citado na página 44.
- [28] Milnor, J. W. Dynamics in one complex variable. number v. 10 in academic search complete, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 9, 13, 19, 21, 23 e 24.
- [29] Miranda, R. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, vol. 5. American Mathematical Soc., 1995. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 12.
- [30] Męciński, M. Fraqtive: multi-platform fractal generator (mandelbrot julia). <https://fraqtive.mimec.org/>, 2015. Versão 0.4.8 (lançada em 29 de janeiro de 2015); visualização dinâmica do conjunto de Julia. Citado na página 15.
- [31] Rankin, R. Real and complex analysis. by w. rudin. pp. 412. 84s. 1966.(mcgraw-hill, new york.). *The Mathematical Gazette* 52, 382 (1968), 412–412. Citado na página 10.
- [32] Steinmetz, N. *Rational iteration: complex analytic dynamical systems*, vol. 16. Walter de Gruyter, 2011. Citado na página 24.