

VICTOR DO NASCIMENTO MARTINS

**REPRESENTAÇÕES DE PESO MÁXIMO PARA
ÁLGEBRAS DE LIE CORRENTES TRUNCADAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

M386r
2013

Martins, Victor do Nascimento, 1989-

Representações de peso máximo para álgebras de Lie
correntes truncadas / Victor do Nascimento Martins. – Viçosa,
MG, 2013.

ix 72 f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Marinês Guerreiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 72.

1. Álgebra. 2. Lie, Álgebra de. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 512.482

VICTOR DO NASCIMENTO MARTINS

**REPRESENTAÇÕES DE PESO MÁXIMO PARA
ÁLGEBRAS DE LIE CORRENTES TRUNCADAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 17 de julho de 2013.

Allan de Oliveira Moura

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Rogério Carvalho Picanço
(Coorientador)

Marinês Guerreiro
(Orientadora)

“...Viver é acalantar sonhos e esperanças, fazendo da fé a nossa inspiração maior. É buscar nas pequenas coisas, um grande motivo para ser feliz...”
Mário Quintana

AGRADECIMENTOS

“Aquele que triunfa não deve jamais esquecer alguém que o tenha ajudado, mantendo em mente que tem o dever de fazer o mesmo nas oportunidades que a vida lhe trará”.

Agradeço a Deus por ter me dado toda força necessária para trilhar este caminho e principalmente por ter colocado em minha caminhada cada um daqueles que agradecerei aqui e os demais que de uma forma ou de outra contribuíram para o meu crescimento.

A minha família por ser base disso tudo, minha fortaleza e refúgio em todos os momentos. Em especial a minha mãe Maria das Dores que com certeza sonhou com isso tudo muito mais do que eu e sempre fez jus ao seu nome Maria, demonstrando sempre tamanha fé. Ao meu pai Vicente pela criação digna e honesta. Aos meus irmãos Vinícius e Felipe e minha sobrinha Laysa. A minha vó pelas infinitas orações.

A todos com quem dividi moradias neste tempo em Viçosa. A começar pela Conceição e sua família que foram aqueles que abriram as portas de Viçosa para mim. Aos colegas de alojamento e república.

Aos funcionários do Departamento de Matemática, que além de desenvolverem seus trabalhos com competência, muitas vezes foram excelentes companheiros de conversas. Em especial ao Paulo e a Míriam pela eficiência em seus trabalhos na secretaria do Mestrado. Ao senhor Jair pelo famoso cafezinho e, é claro, ao senhor Celino, jamais poderei esquecer das conversas, churrascos e das balas.

Aqueles que, profissionalmente, foram os que mais contribuíram para o meu crescimento. Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática que me incentivaram, que me ensinaram e até mesmo aqueles que, ao meu ver, não desempenharam bem seus papéis, pois estes me ensinaram como não devo ser. Um especial agradecimento aqueles que foram além de professores. À Marli e à Carol pela parceria nas organizações de eventos, pelas brincadeiras e conversas. Ao Anderson e ao Maurício por me mostrarem que existem bons exemplos de excelentes profissionais e excelentes seres humanos no mundo matemático. Saibam que vocês servem de inspiração para muitos. À Fernanda, pela oportunidade de trabalho no PIC, que foi uma experiência muito gratificante. À Lucy e à Sônia por serem muito mais que professoras, por serem amigas, por serem excelentes companhias para um bate-papo. Ao Rogério pela coorientação e pelas conversas.

Aos professores Allan Moura (UFV) e Viviane Ribeiro (UFMG) por terem aceito o convite para participação nesta banca.

Aos colegas do mestrado com quem convivi nos últimos dois anos. À Alana Cavalcante, ao Maks, ao Gustavo, à Alana Nunes, à Anna Paula, ao Luiz Henrique, à Aline, à Lívia, ao Carlos, ao Renno, ao Tilu, à Débora, à Maysa, ao Guemael, o cara mais ignorante que já conheci, depois de mim, é claro, à Samara, pessoa mais batalhadora e simples que conheci no Mestrado, aos “pretinhos” da Samara, rsrsrs, Thiago, Serginei e Rondinei.

À Gabi, ao Junim (Qui) e aos demais que, principalmente nesta reta final, me disseram algumas coisas que certamente jamais vou esquecer. Mesmo que achem que foram simples conversas, saibam que foram essas simples conversas e/ou mensagens que fizeram muita diferença neste término do mestrado.

Aqueles que fizeram menos difícil minha passagem em Viçosa. Aos que hoje posso chamar de amigos. Ao Wanderley, o mais palhaço de todos, mas um exemplo de profissional. À Priscila, que apesar de chorar muito, as conversas sérias com ela foram muito produtivas e gratificantes. À Camila Azevedo, pelos choques de realidade. Ao Thiago Neves pelos conselhos e pelas conversas. À Laís por ter sempre uma palavra de otimismo. À Izabela por ter as melhores respostas sempre, por sempre se mostrar prestativa e por ter ido à primeira festa da minha comissão de formatura comigo, quando ninguém mais queria ir. À Michely, pelas conversas e, principalmente, por sempre ter ouvido minhas reclamações. Ao Fael, cara que sou fã e tenho o maior orgulho de dizer que sou amigo. À Michele por todo este tempo de graduação e mestrado, por ter ouvido minhas reclamações e ter me ajudado a resolver a maioria delas, por me conhecer melhor que qualquer um em Viçosa.

Aos melhores amigos que alguém pode ter. Ao Cristiano e Thiago Luiz pelas conversas, festas, churrascos e tudo mais que vivemos até hoje e continuaremos por muito tempo, se Deus quiser. Ao Ramiro que, apesar de suas piadas não terem muita graça, ele é divertido assim mesmo. Ao Matheus, futuro advogado da galera. Primeiro cara que chamei de amigo e até hoje parece que nada mudou na amizade. Ao Felipe, amigo de Ubá, mas que em Viçosa foi meio que um refúgio. Quando estava entediado era só procurar o Felipe. Era certeza de um bate papo descontraído e de muita coisa pra rir. Ah, e é claro, jamais esquecerei do melhor irmão do mundo. O cara que me ensinou muita coisa, que me ouviu reclamar muito, que me viu nos meus melhores e piores momentos em Viçosa. O cara que também me viu chorar muito. Mas acima de tudo, foi o cara que sempre esteve ao meu lado, principalmente me mandando estudar. Obrigado Dudu, por ter sido o irmão que sempre pedi a Deus.

Ao professor Vyacheslav Futorny, que me orientou durante o estágio no IME-USP em 2012 e que sugeriu o tema deste trabalho. Além disso, tirou algumas dúvidas via e-mail. Serviu de inspiração, me motivou a continuar os estudos e, simplesmente, após uma simples conversa em um evento, depositou tamanha confiança em mim que até mesmo eu duvidei que fosse capaz de ir tão longe.

A minha orientadora, psicóloga e amiga Marinês Guerreiro. Obrigado por ter aguentado minhas crises pessoais nos últimos quatro anos. Obrigado por cada uma de nossas conversas, por cada uma das dicas, por acreditar tanto em mim, por apostar tanto em mim. Por abrir tantas portas, tantas oportunidades. Por me mostrar que eu posso muito mais.

À CAPES pelo suporte financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos que não citei acima, mas que em algum momento trocaram uma palavra, me deram um abraço, me inspiraram ou simplesmente me mostraram o que eu nunca devo fazer. Muito obrigado a todos!

“Posso tudo com uma pequena ajuda dos meus amigos (e família)”!

SUMÁRIO

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
INTRODUÇÃO	1
1 Conceitos Básicos	4
1.1 A Noção de Álgebra de Lie	4
1.2 Ideais e Morfismos	8
1.2.1 Ideais	8
1.2.2 Morfismos	10
1.3 Derivações	12
1.4 Solubilidade e Nilpotência	12
1.4.1 Solubilidade	13
1.4.2 Nilpotência	14
2 Representações e Álgebras Envelopantes	15
2.1 Representações	15
2.2 Álgebra Envelopante Universal	18
2.2.1 Construção de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$	18
2.2.2 Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)	20
3 Peso Máximo para Álgebras de Lie com Decomposição Triangular	22
3.1 Teoria de Representação de Peso	22
3.2 Álgebras de Lie com Decomposição Triangular	27
3.3 Teoria de Representação de Peso Máximo	30
3.3.1 Módulos de Peso Máximo	30
3.3.2 A Forma de Shapovalov	38
3.3.3 Partições e os Monômios de Poincaré-Birkhoff-Witt	44
3.3.4 Lema de Shapovalov	44
4 Teoria de Peso Máximo para Álgebras de Lie Correntes Truncadas	48
4.1 Álgebras de Lie Correntes Truncadas	48
4.2 Uma Modificação na Forma de Shapovalov	50
4.3 Decomposição da Forma de Shapovalov	53
4.4 Valores da Forma de Shapovalov	58
4.4.1 Álgebras de Lie com Emparelhamento Não Degenerado	60

4.5	Redutibilidade de Módulos Verma	63
	COMENTÁRIOS FINAIS	65
	Apêndice	65
A	Produto Tensorial	66
A.0.1	Propriedades do produto tensorial	67
A.0.2	Álgebra Tensorial	67
A.0.3	Produtos Tensoriais e Formas Bilineares	68
B	A Álgebra de Witt Sobre os Complexos	71
	Referências Bibliográficas	72

RESUMO

MARTINS, Victor do Nascimento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2013. **Representações de peso máximo para álgebras de Lie correntes truncadas.** Orientadora: Marinês Guerreiro. Coorientador: Rogério Carvalho Picanço.

Neste trabalho estudamos representações de peso máximo de *álgebras de Lie correntes truncadas*. Estas álgebras são definidas como o produto tensorial de uma álgebra de Lie por um anel de polinômios truncado. O objetivo principal é estabelecer um critério para a redutibilidade dos objetos universais da teoria de representações de peso máximo, os chamados *módulos Verma*. Em sua tese de doutorado, Benjamin J. Wilson provou que a redutibilidade dos módulos Verma das álgebras de Lie correntes truncadas depende apenas de uma de suas componentes homogêneas. Nosso trabalho consiste em estudar o critério estabelecido por Wilson.

ABSTRACT

MARTINS, Victor do Nascimento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, july, 2013. **Highest weight representations for truncated current Lie algebras.** Adviser: Marinês Guerreiro. Co-adviser: Rogério Carvalho Picanço.

In this work we study highest weight representations for *truncated current Lie algebras*. These algebras are defined by the tensor product of a Lie algebra and of a truncated polynomial ring. The main goal is to establish a criterion for the reducibility of the universal objects in the theory of highest weight representations, the so called *Verma modules*. In his doctoral thesis, Benjamin J. Wilson proved that the reducibility of the Verma modules of the truncated current Lie algebras depends only on one of their homogeneous components. This work consists in studying the criterion established by Wilson.

INTRODUÇÃO

Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto bilinear $[\ , \]$, denominado colchete ou comutador de Lie que satisfaz a propriedade da antissimetria e a identidade de Jacobi, isto é, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$. As álgebras de Lie surgiram na década de 1870, nas pesquisas desenvolvidas pelo matemático norueguês *Sophus Lie* (1842 - 1899). Seu programa de pesquisa baseava-se na tentativa de estender às equações diferenciais a Teoria de Galois existente para as equações algébricas. Devido às suas descobertas, Lie deixou de lado seu objetivo inicial voltado para as equações diferenciais e dedicou a estudar as álgebras de Lie. A Teoria de Lie desenvolveu-se a partir da descoberta de Lie dos *grupos infinitesimais*.

Lie fez uma analogia com a *Teoria dos Grupos* e, a partir daí, introduziu os conceitos de subgrupos, subgrupos normais, homomorfismos. Ele mostrou que estes conceitos correspondem às noções de subálgebra, ideais e homomorfismos de álgebras de Lie, respectivamente. Juntamente com o matemático *Friedrich Engel* (1861-1941), ele detalhou outras noções como as de grupos derivados e solúveis e a relação entre os produtos nas álgebras e comutadores nos grupos. Dessa forma, as álgebras de Lie são objetos infinitesimais associados aos grupos de transformações, com o produto da álgebra correspondendo ao comutador do grupo. Assim a teoria passa a ter uma consideração mais algébrica.

Uma das vertentes na *Teoria de Álgebras de Lie*, e que é foco de nosso trabalho, é o estudo das representações destas álgebras. Estruturas algébricas abstratas são comumente estudadas via suas representações. Em representações de álgebras de Lie, basicamente o que fazemos é uma identificação de determinada álgebra de Lie com uma álgebra de Lie de operadores lineares, o que torna a tarefa de estudar a álgebra inicial um pouco mais fácil, já que conhecemos melhor a estrutura das álgebras dos operadores lineares. No decorrer do trabalho, o termo representações de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ será frequentemente substituído por $\mathfrak{g}$ -módulo. Isso se deve ao fato de que representações de uma álgebra e módulos de uma álgebra são definições equivalentes, conforme mostraremos no Capítulo 2.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0, fixe um inteiro positivo N . A álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[t]}{t^{N+1}\mathbb{K}[t]}$ sobre $\mathbb{K}$, com colchete de Lie dado por

$$[x \otimes t^i, y \otimes t^j] = [x, y] \otimes t^{i+j}, \quad \text{para todos } x, y \in \mathfrak{g} \text{ e } i, j \geq 0,$$

é chamada uma *álgebra de Lie corrente truncada*. Essas álgebras são uma generalização das álgebras de Takiff estudadas por Takiff em [8]. Na definição

dessas álgebras, queremos deixar claro que não estamos impondo restrições sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para a construção de $\widehat{\mathfrak{g}}$, isto é, $\mathfrak{g}$ pode ou não ser de dimensão finita. Em nosso trabalho, a finitude da dimensão da álgebra não aparecerá como restrição em nenhum resultado importante.

Dada uma álgebra de Lie, é interessante conhecer todas as suas representações, no entanto, este conjunto de representações é, em geral, muito grande. Uma classe de representações é a das *representações de peso*, que ainda assim é muito grande. Como subconjunto desta classe temos as *representações de peso máximo*.

O principal objetivo de nosso trabalho é desenvolver, assim como em [10] e [11], um estudo de uma teoria de representações de peso máximo para álgebras de Lie correntes truncadas. Os *módulos Verma*, objetos universais nesta teoria, serão estudados em mais detalhes e buscamos estabelecer um critério para a redutibilidade destes módulos e, conseqüentemente, ter um resultado a respeito da redutibilidade de representações de peso máximo para as álgebras de Lie correntes truncadas. Para isso, dividimos este trabalho em quatro capítulos e dois apêndices que passamos a descrever.

No Capítulo 1, o nosso principal objetivo é familiarizar o leitor com a teoria básica das álgebras de Lie, a fim de que este possa ter mais facilidade no entendimento dos conteúdos mais avançados que serão apresentados nos capítulos subsequentes. Seguindo as linhas de [3] e [7], começaremos com as definições básicas da maioria das estruturas algébricas. Apresentaremos a definição formal de álgebras de Lie e dos objetos usuais das teorias em Álgebra: subálgebra, ideais e morfismos. Além disso, chamamos a atenção para os exemplos que apresentaremos neste capítulo, pois os utilizaremos até o fim de nosso trabalho. Acreditamos que esta metodologia facilitará a compreensão dos tópicos aqui apresentados. Omitimos alguns resultados clássicos da teoria geral das álgebras de Lie com o intuito de focar nos tópicos que serão relevantes para nosso trabalho, mas sugerimos ao leitor que consulte as referências [3] e [7] para mais detalhes e para as demonstrações dos resultados que forem omitidas neste capítulo inicial. Novamente enfatizamos que o mais importante neste capítulo é um bom entendimento dos exemplos nele presentes.

No Capítulo 2, procuramos fazer, em um primeiro momento, um breve comentário sobre representações de álgebras de Lie. Na *Teoria de Representações*, o que fazemos é “transformar” uma estrutura algébrica abstrata em uma estrutura mais conhecida e fácil de manipular, tais como álgebras ou grupos de operadores lineares. Assim como no Capítulo 1, focamos nos tópicos que serão de maior relevância em nosso trabalho. Daí, não apresentamos vários exemplos de representações de álgebras de Lie como feito em [7]. Destacamos a representação adjunta que será importante para o entendimento dos demais capítulos. Mostramos também a equivalência entre os conceitos de módulo e representação, pois nos demais capítulos quase sempre estaremos utilizando o termo módulo para nos referirmos a alguma representação de uma dada álgebra de Lie. Finalizamos este capítulo definindo e apresentando os principais resultados sobre *álgebras envelopantes universais*.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, uma álgebra envelopante universal de $\mathfrak{g}$ é uma álgebra associativa $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ que, de certa forma, “contém” $\mathfrak{g}$ e, além disso, as repre-

representações de $\mathfrak{g}$ se estendem a representações de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Neste capítulo, concluímos que a categoria das representações de uma álgebra de Lie é isomorfa à categoria das representações de sua álgebra envelopante universal. Este fato será usado nos Capítulos 3 e 4, onde passaremos, de maneira natural, a trabalhar com $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulos ao invés de $\mathfrak{g}$ -módulos.

No Capítulo 3, desenvolveremos as teorias de módulos de peso e módulos de peso máximo para álgebras de Lie. Para definirmos uma teoria de peso máximo, devemos fazer uma escolha de uma decomposição triangular para a álgebra de Lie. Escolhemos uma subálgebra abeliana $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que age diagonalmente sobre $\mathfrak{g}$ via a representação adjunta e escrevemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ para a decomposição em autoespaços, onde $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$. Uma decomposição triangular de $\mathfrak{g}$ é, essencialmente, uma divisão do conjunto Δ em dois conjuntos opostos $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ que são fechados para a soma e que definem uma decomposição em $\mathfrak{g}$ como soma direta de subálgebras

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_-, \quad \text{onde } \mathfrak{g}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_\pm} \mathfrak{g}^{\pm\alpha}.$$

Um $\mathfrak{g}$ -módulo M é um *módulo de peso* se a ação de $\mathfrak{h}$ sobre M é diagonalizável. Um $\mathfrak{g}$ -módulo de peso M é um *módulo de peso máximo* se existe um vetor não nulo $v \in M$ e um funcional $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ tais que

$$\mathfrak{g}_+ \cdot v = 0, \quad \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v = M, \quad h \cdot v = \Lambda(h)v, \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h}.$$

Mostraremos que todos os módulos de peso máximo Λ são imagens homomórficas de um certo módulo de peso máximo Λ denotado por $M(\Lambda)$ e chamado *módulo Verma*. Daí o fato destes serem chamados objetos universais nessa teoria.

No Capítulo 4, apresentaremos a definição formal de álgebras de Lie correntes truncadas e construiremos uma teoria de peso máximo para estas álgebras. No fim deste capítulo, estaremos prontos para enunciar e provar um critério de redutibilidade para os módulos Verma desta álgebra. Veremos que o critério de redutibilidade para estes módulos não depende da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ escolhida para a construção da álgebra corrente truncada $\hat{\mathfrak{g}}$. Além disso, no fim do capítulo apresentaremos dois corolários que dão critérios mais precisos para a redutibilidade de módulos Verma das álgebras de *Virasoro* e *Heisenberg*, que são os exemplos que começamos a apresentar já no Capítulo 1.

Essa dissertação possui ainda dois apêndices. O primeiro versa sobre *produtos tensoriais* e o segundo sobre uma realização concreta da álgebra de Lie de *Witt* sobre o corpo dos complexos. O objetivo do primeiro apêndice é que o leitor possa ler essa dissertação sem ter que consultar uma outra bibliografia para lembrar os conceitos e resultados de produtos tensoriais, deixando nosso trabalho mais autocontido. O segundo apêndice aparece apenas como uma forma de mostrar ao leitor que algumas álgebras de Lie podem ser obtidas de maneira concreta. Nos comentários finais proporemos um possível problema para prosseguimento dos estudos na direção desta dissertação.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo inicial, o objetivo principal é apresentar os conceitos básicos da Teoria de Álgebras de Lie. Para isto, apresentaremos a definição formal de álgebras de Lie e os objetos usuais em teorias de estruturas algébricas em geral: *subálgebra*, *ideais* e *morfismos*. Além disso, exibiremos alguns exemplos que nos acompanharão até o fim deste trabalho. Para maiores detalhes sobre os conceitos que serão apresentados sugerimos uma consulta a [3] e [7].

1.1 A Noção de Álgebra de Lie

Álgebras de Lie são, essencialmente, $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais munidos de uma nova operação que, em geral, não é comutativa e nem associativa. Ao longo deste trabalho, a menos que mencionemos o contrário, assumiremos $\text{car } \mathbb{K} = 0$. Formalmente, temos:

Definição 1.1.1 *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de uma lei de composição interna bilinear, geralmente chamada **colchete de Lie** ou **comutador de Lie** e denotada por*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz

- (i) $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. (Antissimetria)
- (ii) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$, para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$.
(Identidade de Jacobi)

Do item (i) da definição e da bilinearidade do colchete temos, para $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$[x + y, x + y] = 0 \Leftrightarrow [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0 \Leftrightarrow [x, y] = -[y, x].$$

Decorre deste fato a antissimetria (ou anticomutatividade) do colchete de Lie.

Uma álgebra de Lie é dita comutativa se, e somente se, $[x, y] = 0$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Neste caso, dizemos que a álgebra de Lie é **abeliana**.

A **dimensão** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a dimensão de $\mathfrak{g}$ como espaço vetorial.

Definição 1.1.2 Uma $\mathbb{K}$ -álgebra A é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial munido de uma aplicação de $A \times A$ em A , $(x, y) \mapsto x \cdot y$, satisfazendo, para todos $x, y, z \in A$ e $c \in \mathbb{K}$,

$$x(y + z) = xy + xz,$$

$$(x + y)z = xz + yz,$$

$$c(xy) = (cx)y = x(cy).$$

A álgebra A é **associativa** se $x(yz) = (xy)z$, para todos $x, y, z \in A$.

Uma álgebra associativa A pode ser munida de uma estrutura de álgebra de Lie, definindo o colchete de Lie por

$$[x, y] = xy - yx, \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Usaremos a notação $A^{(-)}$ para nos referirmos à álgebra associativa vista como uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.1.3 ($\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial)

Dados os vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{R}^3$, defina o produto vetorial entre u e v por

$$u \times v = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

O produto vetorial é bilinear e, além disso, $u \times v = -v \times u$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^3$. Logo $v \times v = -v \times v$ e daí $v \times v = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Para provar a identidade de Jacobi, observe as três igualdades que seguem para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w,$$

$$v \times (w \times u) = (v \cdot u)w - (v \cdot w)u,$$

$$w \times (u \times v) = (w \cdot v)u - (w \cdot u)v,$$

onde o símbolo $\cdot$ denota o produto escalar usual. Somando essas três igualdades, temos verificada a identidade de Jacobi. Portanto, $\mathbb{R}^3$, com o produto vetorial fazendo o papel do colchete, é uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.1.4 ($M_n(\mathbb{K})$: a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$)

O espaço vetorial $M_n(\mathbb{K})$ munido do comutador

$$[A, B] = AB - BA$$

com A, B matrizes $n \times n$ é uma álgebra de Lie. Denotaremos a álgebra de Lie das matrizes $n \times n$ por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ou simplesmente $\mathfrak{gl}_n$ omitindo-se o corpo. Esta álgebra pode ser identificada com $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, a álgebra dos operadores $\mathbb{K}$ -lineares de um espaço vetorial V de dimensão n .

Exemplo 1.1.5 (Álgebras abelianas)

Como neste caso $[,] = 0$, a estrutura de álgebra de Lie não acrescenta nada à estrutura de espaço vetorial. Como exemplos de álgebras abelianas temos os espaços vetoriais $\mathfrak{g}$ tais que $\dim \mathfrak{g} = 1$.

Exemplo 1.1.6 (Álgebra não-abeliana de dimensão 2)

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2 sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\beta = \{x', y'\}$ uma base para tal álgebra. Construa uma outra base de $\mathfrak{g}$, $\{x'', y''\}$, da seguinte forma: $x'' = [x', y']$ e y'' o elemento que completa o conjunto $\{x''\}$ a uma base de $\mathfrak{g}$. Como β é uma base de $\mathfrak{g}$, então existem $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tais que $x'' = ax' + by'$ e $y'' = cx' + dy'$. Assim

$$\begin{aligned}[x'', y''] &= [ax' + by', cx' + dy'] \\ &= (ad - bc)[x', y'] \\ &= (ad - bc)x''.\end{aligned}$$

Portanto, existe uma base $\{x, y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] = x$, a saber, $x = x''$ e $y = \frac{1}{ad - bc}y''$.

Definição 1.1.7 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma **subálgebra de Lie** de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado em relação ao colchete, isto é, $[x, y] \in \mathfrak{h}$, sempre que $x, y \in \mathfrak{h}$.

Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie considerando-se a restrição do colchete a $\mathfrak{h}$.

Exemplo 1.1.8 (Algumas subálgebras abelianas)

- (i) Todo subespaço vetorial de dimensão 1 de uma álgebra de Lie não nula é uma subálgebra abeliana;
- (ii) O espaço das matrizes diagonais é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}_n$;
- (iii) Todo subespaço de uma álgebra abeliana é uma subálgebra abeliana.

Exemplo 1.1.9 (Algumas subálgebras de $\mathfrak{gl}_n$)

- (i) $\mathfrak{so}_n = \{x \in \mathfrak{gl}_n : x + x^t = 0\}$, onde x^t denota a matriz transposta de x ;
- (ii) $\mathfrak{sl}_n = \{x \in \mathfrak{gl}_n : \text{tr } x = 0\}$;
- (iii) A subálgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\left\{ x \in \mathfrak{gl}_n; x = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vejamos agora, de forma um pouco mais detalhada, alguns exemplos que aparecerão frequentemente neste trabalho.

Exemplo 1.1.10 (A álgebra $\mathfrak{sl}_2$)

A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2 = \{z \in \mathfrak{gl}_2 : \text{tr } z = 0\}$ é uma álgebra de dimensão 3 e uma base ordenada de $\mathfrak{sl}_2$ é dada por $\{x, h, y\}$, onde

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando os comutadores entre os elementos da base, temos

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$

Por estes cálculos, $\mathfrak{sl}_2$ de fato é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_2$.

Exemplo 1.1.11 (Álgebra de Witt)

Seja $X = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}L_n$ um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{K}$, com base dada pelos símbolos $\{L_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Defina, nos elementos da base de X , o seguinte colchete de Lie

$$[L_m, L_n] = (n - m)L_{m+n}, \quad \text{para todos } m, n \in \mathbb{Z},$$

e estenda por linearidade aos elementos de X . Desta forma, fica definida em X uma estrutura de álgebra de Lie. Chamamos essa álgebra de **álgebra de Witt** e a denotamos por $\mathfrak{W}$.

Apesar da forma abstrata com que apresentamos a álgebra de Witt, ela pode ser realizada de outras maneiras mais concretas. Uma dessas, por exemplo, é realizarmos a álgebra de Witt sobre os complexos como a álgebra das derivações (para definição de derivação ver seção 1.3) de A , onde $A = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ é a álgebra dos polinômios de Laurent. Neste caso, $L_m = z^{m+1} \frac{d}{dz}$. Essa realização pode ser vista no Apêndice B.

Exemplo 1.1.12 (Álgebra de Virasoro)

A **álgebra de Virasoro** $\mathfrak{V}$ é gerada como espaço vetorial pela base $\{L_m : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$ tal que c é um elemento central, isto é, $[c, L_m] = 0$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, e o colchete em $\mathfrak{V}$ é definido por

$$[L_m, L_n] = (n - m)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}c,$$

onde $\delta_{m,-n}$ representa a função delta de Kronecker e o colchete é estendido por linearidade. Desta maneira, $\mathfrak{V}$ é dada por

$$\mathfrak{V} = X \oplus \mathbb{K}c.$$

Vamos verificar a identidade de Jacobi para três elementos distintos da base de $\mathfrak{B}$. Sejam L_m, L_n e L_p em $\mathfrak{B}$ tais que $m \neq -n$, $m \neq -p$ e $n \neq -p$. Assim, $\delta_{m,-n} = \delta_{m,-p} = \delta_{n,-p} = \delta_{n,-m} = \delta_{p,-m} = \delta_{p,-n} = 0$ e daí

$$\begin{aligned} & [L_m, [L_n, L_p]] + [L_n, [L_p, L_m]] + [L_p, [L_m, L_n]] = \\ & (p-n)[L_m, L_{n+p}] + (m-p)[L_n, L_{m+p}] + (n-m)[L_p, L_{m+n}] = \\ & (p-n)(n+p-m)L_{m+n+p} + (m-p)(m+p-n)L_{m+n+p} + (n-m)(m+n-p)L_{m+n+p} = \\ & ((p-n)(n+p-m) + (m-p)(m+p-n) + (n-m)(m+n-p))L_{m+n+p} = 0. \end{aligned}$$

A escolha do escalar $\frac{1}{12}$ na definição do colchete é irrelevante para nosso trabalho, pois poderíamos tomar por exemplo $\bar{c} = ac$ no lugar de c , para qualquer $a \in \mathbb{K}$. Note ainda que $\mathfrak{W}$ é um subespaço de $\mathfrak{B}$, mas não é uma subálgebra.

Exemplo 1.1.13 (Álgebra de Heisenberg)

Uma **álgebra de Heisenberg** é uma álgebra de Lie $\mathfrak{H}$ sobre $\mathbb{K}$ que admite um subespaço unidimensional $\mathfrak{c}$ com as propriedades

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = \{[x, y] : x, y \in \mathfrak{H}\} = \mathfrak{c}$$

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{c}] = \{[x, y] : x \in \mathfrak{H}, y \in \mathfrak{c}\} = (0).$$

Uma forma de realizá-la é considerarmos $\mathfrak{H}$ gerada por $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$, onde c é central e $[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}c$ é estendido por linearidade a $\mathfrak{H}$.

1.2 Ideais e Morfismos

Nesta seção, além dos conceitos de ideais e morfismos de álgebras de Lie, falaremos brevemente de quocientes e dos clássicos teoremas de isomorfismos.

1.2.1 Ideais

Definição 1.2.1 Uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um **ideal** se, para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \mathfrak{h}$, temos $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

Na Teoria de Álgebras de Lie, os ideais desempenham função análoga aos subgrupos normais em teoria de grupos e aos ideais bilaterais em teoria de anéis.

Exemplo 1.2.2 (Ideais triviais)

O subespaço nulo e $\mathfrak{g}$ são os ideais triviais de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.2.3 O centro $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ dado por

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$. Para verificar isso, basta utilizar a identidade de Jacobi.

Exemplo 1.2.4 (Álgebra derivada)

A álgebra derivada de $\mathfrak{g}$ dada por

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle [x, y] : x, y \in \mathfrak{g} \rangle$$

é o ideal de $\mathfrak{g}$ gerado por todos os elementos $[x, y]$ tais que $x, y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.2.5 A subálgebra $\mathfrak{sl}_n$ é um ideal de $\mathfrak{gl}_n$.

De fato, dados $x \in \mathfrak{gl}_n$, $y \in \mathfrak{sl}_n$, temos

$$\text{tr}([x, y]) = \text{tr}(xy - yx) = \text{tr}(xy) - \text{tr}(yx) = 0,$$

já que $\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx)$. Logo $[x, y] \in \mathfrak{sl}_n$. Além disso, $\mathfrak{sl}_n$ é também a álgebra derivada de $\mathfrak{gl}_n$.

Observação 1.2.6 Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ são ideais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b : a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$$

é também um ideal de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.2.7 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tal que $\dim \mathfrak{g} > 1$. Se $\mathfrak{g}$ não possui ideais não triviais, dizemos que $\mathfrak{g}$ é **simples**.

Exemplo 1.2.8 Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, então $\mathfrak{g}$ é simples no caso em que $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$.

De fato, seja $\{x, h, y\}$ uma base de $\mathfrak{g}$, como no Exemplo 1.1.10. Lembramos que os colchetes entre os elementos dessa base são

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$

Agora considere $I \neq 0$ um ideal de $\mathfrak{g}$ e tome um elemento não nulo $z = ax + bh + cy \in I$, com $a, b, c \in \mathbb{K}$. Como I é ideal, temos

$$[x, z] = a[x, x] + b[x, h] + c[x, y] = -2bx + ch \in I,$$

$$[x, -2bx + ch] = [x, -2bx] + [x, ch] = -2cx \in I, \tag{1.1}$$

$$[y, z] = a[y, x] + b[y, h] + c[y, y] = -ah + 2by \in I,$$

$$[y, -ah + 2by] = [y, -ah] + [y, 2by] = -2ay \in I. \tag{1.2}$$

Como z é não nulo, pelo menos um dos a, b ou c é não nulo.

Se $c \neq 0$, então de (1.1), $x \in I$ e ainda

$$[y, x] = -h \in I \Rightarrow h \in I.$$

Daí $[h, y] = -2y \in I$ e, conseqüentemente, $y \in I$. Logo, $I = \mathfrak{g}$.

Se $a \neq 0$, então de (1.2), $y \in I$ e assim, procedendo analogamente como acima, temos $I = \mathfrak{g}$.

Se $a = c = 0$, então $bh \neq 0 \in I$ e daí

$$[bh, x] = 2bx \in I \Rightarrow x \in I,$$

$$[bh, y] = -2by \in I \Rightarrow y \in I.$$

Logo $I = \mathfrak{g}$.

Portanto, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ é simples se $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$. No caso em que $\text{car } \mathbb{K} = 2$ o ideal $\langle h \rangle$, gerado por h é próprio, logo, neste caso, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ não é simples.

1.2.2 Morfismos

Definição 1.2.9 Uma transformação linear $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, com $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$, é um **homomorfismo** de álgebras de Lie se $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

Definição 1.2.10 Seja $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. O **núcleo** de ϕ é o conjunto

$$\text{Ker}(\phi) = \{x \in \mathfrak{g} : \phi(x) = 0\}$$

e a **imagem** de ϕ é o conjunto

$$\text{Im}(\phi) = \{y \in \mathfrak{h} : \exists x \in \mathfrak{g} \text{ tal que } \phi(x) = y\}.$$

O núcleo de um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, pois se $x \in \mathfrak{g}$ e $z \in \text{Ker}(\phi)$, então $\phi([x, z]) = [\phi(x), \phi(z)] = [\phi(x), 0] = 0$, já que $z \in \text{Ker}(\phi)$.

A imagem de ϕ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$. De fato, se y_1 e y_2 estão em $\text{Im}(\phi)$ então existem $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$ tais que $\phi(x_1) = y_1$ e $\phi(x_2) = y_2$, daí $[y_1, y_2] \in \text{Im}(\phi)$, já que $\phi([x_1, x_2]) = [\phi(x_1), \phi(x_2)] = [y_1, y_2]$.

Para $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, se $\text{Ker}(\phi) = 0$, dizemos que ϕ é um **monomorfismo** e se $\text{Im}(\phi) = \mathfrak{h}$, dizemos que ϕ é um **epimorfismo**. Se ϕ for simultaneamente, um monomorfismo e um epimorfismo de álgebras de Lie dizemos que ϕ é um **isomorfismo** de álgebras de Lie e, neste caso, as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são ditas isomorfas. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ e ϕ é um isomorfismo de álgebras de Lie, dizemos que ϕ é um **automorfismo** da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.2.11 Os homomorfismos entre as álgebras abelianas são as transformações lineares e duas álgebras abelianas são isomorfas se, e somente se, elas têm a mesma dimensão.

Exemplo 1.2.12 A aplicação traço $tr : \mathfrak{gl}_n \rightarrow \mathbb{K}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, pois $tr([x, y]) = tr(xy - yx) = 0$, já que $tr(xy) = tr(yx)$, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{gl}_n$ e $[tr(x), tr(y)] = 0$, uma vez que $\mathbb{K}$ é uma álgebra abeliana. Observe que $Ker(tr) = \mathfrak{sl}_n$ e $Im(tr) = \mathbb{K}$.

Definição 1.2.13 Um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é dito um **anti-automorfismo** se $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ e $\phi([x, y]) = [\phi(y), \phi(x)]$.

Exemplo 1.2.14 Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ qualquer, o homomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dado por $\phi(x) = -x$, para todo $x \in \mathfrak{g}$ é um anti-automorfismo de ordem 2. De fato, $\phi([x, y]) = -[x, y] = [y, x]$, pelo item (i) da Definição 1.1.1. Como $[y, x] = [\phi(y), \phi(x)]$, temos a igualdade $\phi([x, y]) = [\phi(y), \phi(x)]$. E ainda $\phi^2(x) = \phi(-x) = x$.

Definição 1.2.15 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. No espaço vetorial quociente $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$, defina

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]},$$

onde $\bar{x}$ denota a classe $x + \mathfrak{h}$.

O espaço vetorial $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ munido do colchete definido acima tem uma estrutura de álgebra de Lie. Para verificar isso, além de mostrarmos os itens (i) e (ii) da Definição (1.1.1), devemos mostrar que a definição do colchete independe dos representantes x e y . Neste ponto será possível perceber porque $\mathfrak{h}$ não pode ser simplesmente uma subálgebra, pois neste caso não teríamos uma boa definição do colchete em $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$.

Teorema 1.2.16 (Teoremas de Isomorfismo)

Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ duas álgebras de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$.

- (i) Se $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então $\frac{\mathfrak{g}}{Ker \phi} \cong Im \phi$.
- (ii) Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ideais de $\mathfrak{g}$ tais que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ então $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ é um ideal de $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}}$ e $\frac{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}} \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}$.
- (iii) Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ são ideais de $\mathfrak{g}$, então $\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} \cong \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.

Demonstração: Vamos provar apenas (i), já que os demais itens são consequências do primeiro e para suas demonstrações basta construir homomorfismos adequados e usar (i).

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : \quad \frac{\mathfrak{g}}{Ker(\phi)} &\rightarrow Im(\phi) \\ x + Ker(\phi) &\mapsto \phi(x), \end{aligned}$$

que está bem definida, pois se $x_1 + Ker(\phi) = x + Ker(\phi)$ então

$$x_1 = x + n, \quad n \in Ker \phi,$$

logo

$$\phi(x_1) = \phi(x + n) = \phi(x) + \phi(n) = \phi(x).$$

É direto da definição de $\bar{\phi}$ que essa aplicação é um homomorfismo de álgebras de Lie, já que ϕ o é. A aplicação $\bar{\phi}$ é sobrejetora, pois se $y \in Im(\phi)$, por definição, existe $x \in \mathfrak{g}$ tal que $\phi(x) = y$ e daí $\bar{\phi}(x + Ker(\phi)) = \phi(x) = y$. Ainda $\bar{\phi}$ é injetiva, pois se $\bar{\phi}(x + Ker(\phi)) = 0 \in \mathfrak{h}$, então $\phi(x) = 0 \in \mathfrak{h}$. Assim $x \in Ker(\phi)$ e, conseqüentemente, $x = \bar{0}$. Portanto, $\bar{\phi}$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. ■

1.3 Derivações

Definição 1.3.1 *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra. Uma aplicação linear $\delta : A \rightarrow A$ é chamada uma **derivação** de A se satisfaz a regra de Leibniz*

$$\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y, \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Em geral, a composição de duas derivações não é necessariamente uma derivação, no entanto, o comutador de duas derivações é uma derivação. Assim o espaço $Der(A)$ de todas as derivações de A é uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.3.2 *Toda transformação linear de uma álgebra de Lie abeliana é uma derivação.*

Exemplo 1.3.3 *A aplicação linear*

$$\begin{aligned} ad_x : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ y &\mapsto ad_x(y) = [x, y] \end{aligned}$$

*é uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com $x \in \mathfrak{g}$, chamada **adjunta de x** .*

As derivações da forma ad_x , $x \in \mathfrak{g}$, são chamadas **derivações internas** de $\mathfrak{g}$ e o espaço destas, que é um ideal de $Der(\mathfrak{g})$, é denotado por $Inn(\mathfrak{g})$.

Exemplo 1.3.4 *As matrizes das adjuntas ad_x , ad_h e ad_y , onde $\{x, h, y\}$ é a base de $\mathfrak{sl}_2$ dada no Exemplo 1.1.10 são*

$$[ad_x] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [ad_h] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad [ad_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Solubilidade e Nilpotência

Análogo à Teoria de Grupos, podemos definir duas importantes cadeias de ideais e, a partir daí, elucidar os conceitos de solubilidade e nilpotência para uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A solubilidade em Teoria de Grupos foi estudada por alguns matemáticos como Abel e Galois, principalmente com o intuito de determinar a solubilidade de equações polinomiais no século XIX.

1.4.1 Solubilidade

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos uma cadeia de ideais de $\mathfrak{g}$, chamada **série derivada** por

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \text{ para } k \geq 1.\end{aligned}$$

Definição 1.4.1 Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é **solúvel** se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. O menor valor $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ é o **grau de solubilidade** de $\mathfrak{g}$.

Observe que se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ então $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, para todo $k \geq n$.

Exemplo 1.4.2 Toda álgebra de Lie abeliana é solúvel.

Exemplo 1.4.3 A álgebra de Heisenberg

$$\mathfrak{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_3 \right\}$$

é solúvel.

Exemplo 1.4.4 A álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, com $\text{car } \mathbb{K} = 0$, não é solúvel.

Proposição 1.4.5 [3, Proposição 3.1] Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.

- (i) Se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de $\mathfrak{g}$ também o são.
- (ii) Se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal solúvel e $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ é solúvel, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.
- (iii) Se $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}$ são ideais solúveis de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}$.

Do item (iii) da Proposição 1.4.5 é fácil ver que existe um único ideal solúvel maximal em uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Chamaremos este ideal de **radical** de $\mathfrak{g}$ e o denotaremos por $\text{Rad } \mathfrak{g}$.

Definição 1.4.6 Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita **semisimples** se $\text{Rad } \mathfrak{g} = \{0\}$.

Uma álgebra de Lie simples, portanto, é semisimples. Note ainda que $\frac{\mathfrak{g}}{\text{Rad } \mathfrak{g}}$ é semisimples, pelo item (ii) da Proposição 1.4.5.

1.4.2 Nilpotência

Diferentemente da noção de solubilidade, a idéia de grupo nilpotente é mais recente e foi modelada a partir da noção correspondente para álgebras de Lie.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos uma cadeia de ideais de $\mathfrak{g}$, chamada **série central descendente**, por

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^1 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \text{ para } k \geq 1.\end{aligned}$$

Definição 1.4.7 Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é **nilpotente** se $\mathfrak{g}^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e, consequentemente, para valores superiores a n . O menor valor $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = 0$ é o **grau de nilpotência** de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.4.8 Toda álgebra de Lie abeliana é nilpotente.

Exemplo 1.4.9 A álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, com $\text{car } \mathbb{K} = 2$, é uma álgebra de Lie nilpotente.

Proposição 1.4.10 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, então $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo álgebras nilpotentes são solúveis.

A recíproca da proposição anterior não é verdadeira. A álgebra de Lie não-abeliana de dimensão 2 descrita no Exemplo 1.1.6 é solúvel, mas não é nilpotente.

Proposição 1.4.11 [3, Proposição 3.2] Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.

- (i) Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então todas as suas subálgebras e imagens homomórficas também o são.
- (ii) Se $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})}$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ também o é.
- (iii) Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente e não nula, então, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então, para algum n , $(\text{ad}_x)^n = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.4.12 Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $x \in \mathfrak{g}$, chamamos x de **ad-nilpotente** se ad_x é uma transformação linear nilpotente.

Teorema 1.4.13 (Engel) [3, Teorema 3.2] Se todos os elementos de $\mathfrak{g}$ são ad-nilpotentes, então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

Capítulo 2

Representações e Álgebras Envelopantes

2.1 Representações

Representar uma estrutura algébrica abstrata significa transformá-la em uma estrutura mais conhecida e fácil de manipular, tais como álgebras ou grupos de operadores lineares. Antes mesmo de definirmos formalmente a idéia de representação de uma álgebra de Lie, já vimos como “representar” uma álgebra de Lie como álgebra de operadores lineares. Por exemplo, a aplicação $x \mapsto ad_x$ faz uma álgebra de Lie agir sobre si mesma por operadores. Em Matemática Aplicada ou Física, em geral, a situação é contrária, isto é, as álgebras de Lie são introduzidas primeiro como álgebras de operadores lineares. A partir deste capítulo vamos considerar $gl(V)$ a álgebra associativa dos operadores lineares de um espaço vetorial V . Quando estiver olhando para $gl(V)$ munida da estrutura de álgebra de Lie, a denotaremos por $\mathfrak{gl}(V)$.

Definição 2.1.1 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ e V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Uma **representação** de $\mathfrak{g}$ sobre V é um homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$, isto é, π é uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$ em $gl(V)$ satisfazendo*

$$\pi([x, y])(v) = \pi(x)\pi(y)(v) - \pi(y)\pi(x)(v),$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.

Definição 2.1.2 *Uma **ação** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V é uma aplicação bilinear*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (x, v) &\mapsto x \cdot v \end{aligned}$$

satisfazendo, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$,

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

Se existir uma ação de $\mathfrak{g}$ em V , dizemos que V é um **$\mathfrak{g}$ -módulo** (relativo a esta ação).

Os conceitos de módulo e representação são, essencialmente, a mesma coisa. Note que se π é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V , então $\mathfrak{g}$ age sobre V via

$$x \cdot v = \pi(x)(v), \text{ para todos } x \in \mathfrak{g} \text{ e } v \in V.$$

Reciprocamente, se $\mathfrak{g}$ age sobre V , então como $v \mapsto x \cdot v$, com $v \in V$ e $x \in \mathfrak{g}$, é um operador linear de V , definindo $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$ por

$$\pi(x)(v) = x \cdot v,$$

determinamos uma representação de $\mathfrak{g}$ em V .

Dado um $\mathfrak{g}$ -módulo V , a representação π de $\mathfrak{g}$ em V construída acima, a partir da ação de $\mathfrak{g}$ em V , é dita a **representação equivalente** do $\mathfrak{g}$ -módulo V . Se $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, a **dimensão** de π será a dimensão de V como espaço vetorial.

Um subespaço $V' \subset V$ é dito um **submódulo** de V , se V' é um $\mathfrak{g}$ -módulo. Um submódulo V' é dito **trivial** se $V' = (0)$ ou $V' = V$ e **não trivial** (ou **próprio**), caso contrário. Um $\mathfrak{g}$ -módulo $V \neq 0$ é dito **simples** ou **irredutível** se V não possui submódulos não triviais e **redutível**, caso contrário.

Definição 2.1.3 Se V é um $\mathfrak{g}$ -módulo, então o conjunto

$$Ann(V) = \{x \in \mathfrak{g} : x \cdot v = 0, \text{ para todo } v \in V\}$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$ chamado o **anulador** de V .

Observe que, se π é a representação equivalente do $\mathfrak{g}$ -módulo V , então $Ann(V) = Ker(\pi)$. Se $Ann(V) = Ker(\pi) = (0)$, dizemos que V é um **$\mathfrak{g}$ -módulo fiel** e, conseqüentemente, a representação π é uma **representação fiel**.

Exemplo 2.1.4 Seja V um espaço vetorial. Então $gl(V)$ e $\mathfrak{sl}(V)$ agem sobre V por suas definições usuais de operadores lineares. Assim, obtemos as representações **naturais** de $gl(V)$ e $\mathfrak{sl}(V)$ sobre V , isto é,

$$\begin{array}{ll} p : gl(V) \rightarrow gl(V) & q : \mathfrak{sl}(V) \rightarrow gl(V) \\ \sigma \mapsto p(\sigma) : V \rightarrow V & \theta \mapsto q(\theta) : V \rightarrow V \\ v \mapsto \sigma(v) & v \mapsto \theta(v) \end{array}.$$

Exemplo 2.1.5 (Representação adjunta)

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A aplicação linear $ad : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$, dada por $ad(x) = ad_x$, onde

$$\begin{array}{ll} ad_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ y \mapsto [x, y], \end{array}$$

é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ chamada **representação adjunta** de $\mathfrak{g}$. O $\mathfrak{g}$ -módulo equivalente neste caso é exatamente a álgebra $\mathfrak{g}$ vista como $\mathfrak{g}$ -módulo via a ação dada por multiplicação à esquerda. O núcleo da representação adjunta é o centro de $\mathfrak{g}$, logo a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é fiel se o centro de $\mathfrak{g}$ é nulo. Em particular, se $\mathfrak{g}$ é simples e não abeliana a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é fiel.

Exemplo 2.1.6 (Representação adjunta de $\mathfrak{sl}_2$)

Com as notações e cálculos feitos no Exemplo 1.3.4, vamos determinar a matriz da representação adjunta de $\mathfrak{sl}_2$.

Seja $z = ax + bh + cy \in \mathfrak{sl}_2$. Calculando ad_z nos elementos da base de $\mathfrak{sl}_2$, temos

$$\begin{aligned} ad(z)(x) &= ad_z(x) = [z, x] = 2bx - ch \\ ad(z)(h) &= ad_z(h) = [z, h] = -2ax + 2cy \\ ad(z)(y) &= ad_z(y) = [z, y] = ah - 2by. \end{aligned}$$

Assim, a representação

$$ad : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow gl(\mathfrak{sl}_2) \cong gl_3$$

é tal que, para $z = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$, $ad(z)$ é a aplicação em gl_3 dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix}$$

em relação à base $\{x, h, y\}$ de $\mathfrak{sl}_2$.

Definição 2.1.7 Seja $\pi_j : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_j)$, $j \in J$, uma família de representações de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O espaço $V = \bigoplus_{j \in J} V_j$ tem uma estrutura natural de $\mathfrak{g}$ -módulo definido por

$$x \cdot \left(\sum_{j \in J} v_j \right) = \sum_{j \in J} \pi_j(x)(v_j), \text{ para todos } x \in \mathfrak{g}, v_j \in V_j, j \in J.$$

A representação π de $\mathfrak{g}$ em V obtida dessa maneira é chamada **soma direta** das π_j , $j \in J$. Denotamos essa representação por $\pi = \bigoplus_{j \in J} \pi_j$.

Definição 2.1.8 Seja $\pi_j : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V_j)$, $j = 1, \dots, n$, uma família finita de representações de $\mathfrak{g}$. Considere $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ e defina $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$ a única aplicação linear satisfazendo

$$\pi(x)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_{j=1}^n v_1 \otimes \dots \otimes \pi_j(x)(v_j) \otimes \dots \otimes v_n,$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v_j \in V_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. A aplicação linear π é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V , chamada **produto tensorial** das π_j , $j = 1, \dots, n$, e escrevemos $\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n$.

2.2 Álgebra Envelopante Universal

Nosso objetivo nesta seção é associar a cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma álgebra associativa com unidade, que seja livre e que, de certa forma, preserve as representações de $\mathfrak{g}$. Esta é denominada a *álgebra envelopante universal* de $\mathfrak{g}$. A partir desta associação, veremos que toda álgebra de Lie está “contida” numa álgebra associativa, a álgebra envelopante universal. Desta forma, verifica-se também que o estudo das representações das álgebras de Lie se reduz ao das representações das álgebras associativas. Neste trabalho, todas as álgebras associativas possuem unidade.

Definição 2.2.1 *Uma álgebra associativa $\mathcal{U}$ com unidade é uma **álgebra envelopante universal** de $\mathfrak{g}$ se existe um homomorfismo injetor $i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}$ de $\mathfrak{g}$ a valores na álgebra de Lie $\mathcal{U}^{(-)}$, que satisfaz:*

(i) *a imagem $i(\mathfrak{g})$ gera $\mathcal{U}$ como álgebra associativa e*

(ii) *dada uma álgebra associativa L e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow L^{(-)}$, existe um único homomorfismo $\tilde{\pi} : \mathcal{U} \rightarrow L$ que satisfaz*

$$\tilde{\pi} \circ i(x) = \pi(x),$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Aqui $\tilde{\pi}$ é um homomorfismo de álgebras associativas, isto é, satisfaz

$$\tilde{\pi}(xy) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(y).$$

Em outras palavras, $\mathcal{U}$ é uma álgebra envelopante universal se, para todo homomorfismo π , existe um homomorfismo $\tilde{\pi}$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{U} & \\ & \uparrow i & \searrow \tilde{\pi} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & L \end{array}$$

Um objeto definido por meio de propriedade universal é único, a menos de isomorfismos, logo duas álgebras envelopantes universais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são isomorfas como álgebras associativas. Assim, precisamos dar uma construção concreta para garantir a existência de tal objeto. Denotaremos a álgebra envelopante universal de $\mathfrak{g}$ (que é única, a menos de isomorfismo) por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

2.2.1 Construção de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Nosso objetivo agora é fazer uma construção de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ que é utilizada como álgebra envelopante universal de $\mathfrak{g}$. Para esta realização, consideremos o seguinte fato sobre uma álgebra associativa $\mathcal{A}$: dado um subconjunto $C \subset \mathcal{A}$, o ideal bilateral gerado por C é o menor ideal bilateral I de $\mathcal{A}$ que contém C . No caso em que $\mathcal{A}$ contém unidade, esse ideal coincide com o subespaço gerado por todos os produtos da forma

$$azb$$

com $a, b \in \mathcal{A}$ e $z \in C$.

Considere, conforme a definição dada em A.0.2, a álgebra tensorial

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes k}$$

de $\mathfrak{g}$. Os elementos de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ são combinações lineares finitas de monômios da forma

$$x_1 \dots x_k (= x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k),$$

com $x_i \in \mathfrak{g}$, $i = 1, \dots, k$, $k \geq 0$.

A álgebra $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa que contém unidade e é gerada por $\mathfrak{g}$. No entanto, a inclusão $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ não é um homomorfismo de álgebras de Lie, pois, para $x, y \in \mathfrak{g}$, $xy - yx$ é diferente de $[x, y]$, já que o primeiro é um elemento de grau dois de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, enquanto o segundo é um elemento de $\mathfrak{g}$, isto é, de grau um.

Para obtermos um homomorfismo, procedemos da seguinte forma: seja I o ideal bilateral de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos (não homogêneos) da forma

$$xy - yx - [x, y] \in \mathcal{T}(\mathfrak{g}),$$

com $x, y \in \mathfrak{g}$. Desta maneira, a álgebra envelopante universal pode ser construída como

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}.$$

Um homomorfismo π de $\mathfrak{g}$ em uma álgebra associativa L se estende a um homomorfismo $\tilde{\pi}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ em L , sendo definido nos monômios por

$$\tilde{\pi}(x_1 \dots x_k) = \pi(x_1) \dots \pi(x_k).$$

Exemplo 2.2.2 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra abeliana. Para obter $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ a partir de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, temos a identificação $xy = yx$ e daí $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é a álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$ (Ver Definição A.0.9), que é abeliana. Seja*

$$\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$$

uma base ordenada de $\mathfrak{g}$. Os elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ são combinações lineares de monômios do tipo

$$x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

com $x_{i_j} \in \beta$. Como dois elementos de $\mathfrak{g}$ quaisquer comutam, pois $\mathfrak{g}$ é abeliana, é possível reescrever os monômios como

$$x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n},$$

com $s_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. O produto de dois desses monômios é dado como o produto de dois monômios comutativos nas variáveis $x_1, \dots, x_n$. Portanto, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é isomorfa a uma álgebra de polinômios.

Em resumo temos,

Proposição 2.2.3 *A álgebra envelopante universal $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ de uma álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{h}$ é isomorfa à álgebra simétrica $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$.*

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e π uma representação de $\mathfrak{g}$ sobre um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V , assim, π é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ sobre $gl(V)$. Logo, π se estende a um homomorfismo de álgebras associativas, também denotado por π , de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sobre $gl(V)$, isto é, V se torna um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo à esquerda, com a ação $u \cdot v = \pi(u)(v)$, para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $v \in V$. Reciprocamente, se V é um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo à esquerda, restringimos a uma representação π de $\mathfrak{g}$ em V definindo $\pi(x)(v) = i(x) \cdot v$, onde $i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Daí conseguimos concluir que a categoria das representações de $\mathfrak{g}$ e dos $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulos à esquerda são isomorfas.

2.2.2 Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)

No Exemplo 2.2.2 vimos que, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie abeliana, uma base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é dada a partir de produtos ordenados de elementos de uma base de $\mathfrak{g}$. Na verdade, algo assim acontece não só com uma álgebra abeliana. Um resultado importante sobre as álgebras envelopantes universais é o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Este teorema parte de bases ordenadas de $\mathfrak{g}$ e obtém, a partir da ordenação de monômios, bases de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Formalmente, temos o seguinte:

Teorema 2.2.4 [7, Teorema 10.1] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{x_i\}_{i \in J}$ uma base de $\mathfrak{g}$ ordenada por uma ordem no conjunto de índices J . Então os monômios do tipo*

$$x_{i_1} \dots x_{i_k}, \quad i_1 \leq \dots \leq i_k,$$

junto com $1 \in \mathbb{K}$, formam uma base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Corolário 2.2.5 *As imagens $\{i(x_j)\}_{j \in J}$ em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ da base $\{x_j\}_{j \in J}$ de $\mathfrak{g}$ formam um conjunto linearmente independente.*

Corolário 2.2.6 *Seja $\mathfrak{b}$ uma subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja $\{x_j\}_{j \in J} \cup \{y_k\}_{k \in K}$ uma base de $\mathfrak{g}$ tal que $\{x_j\}_{j \in J}$ é base de $\mathfrak{b}$ e ambos J e K são totalmente ordenados. Então*

(i) a injeção $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pode ser estendida a uma injeção de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$;

(ii) $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é um $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ -módulo livre à esquerda (resp. direita), admitindo como uma base a família

$$\{y_{k_1} \dots y_{k_n}; \quad k_1 \leq \dots \leq k_n, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração: De $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ obtemos um homomorfismo $\mathcal{U}(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ordenamos totalmente o conjunto $J \cup K$, dizendo que $j < k$ para todo $j \in J$ e $k \in K$. A família

$$\{x_{j_1} \dots x_{j_n} y_{k_1} \dots y_{k_m} : j_1 \leq \dots \leq j_n, \quad k_1 \leq \dots \leq k_m, \quad n, m \in \mathbb{N}\}$$

é então uma $\mathbb{K}$ -base do espaço $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Mais ainda, a subfamília que não envolve y_k (isto é, quando $m = 0$) corresponde a uma base de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$. Isto implica (i) e (ii). ■

Corolário 2.2.7 *Sejam $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie e considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_n$ (produto direto de álgebras de Lie). Então*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_n),$$

como $\mathbb{K}$ -espaços.

Demonstração: Mostremos que, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, então $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$. Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_n$, a demonstração é análoga.

Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sua álgebra envelopante universal e a injeção $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ da definição de álgebra envelopante universal. Denotemos por σ_1 e σ_2 , respectivamente, as injeções de $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ em suas respectivas álgebras envelopantes universais $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$. Considere as injeções canônicas

$$\begin{array}{ccc} i_1 : \mathfrak{g}_1 & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ x_1 & \mapsto & (x_1, 0) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} i_2 : \mathfrak{g}_2 & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ x_2 & \mapsto & (0, x_2). \end{array}$$

Assim, $\sigma \circ i_1 : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $\sigma \circ i_2 : \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ são homomorfismos injetores e, pelo item (ii) da Definição 2.2.1, existem homomorfismos injetores de álgebras associativas $\phi_1 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $\phi_2 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tais que $\phi_1 \circ \sigma_1 = \sigma \circ i_1$ e $\phi_2 \circ \sigma_2 = \sigma \circ i_2$. Defina

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) & \rightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ x_1 \otimes x_2 & \mapsto & \phi_1(x_1)\phi_2(x_2). \end{array}$$

A aplicação ϕ é um homomorfismo injetor de álgebras, pois as imagens de ϕ_1 e ϕ_2 comutam. Agora defina o seguinte homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{array}{ccc} \sigma' : \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \sigma_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_2(x_2). \end{array}$$

Assim, existe um único homomorfismo injetor τ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ em $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & & \\ \sigma \uparrow & \searrow \tau & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\sigma'} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) \end{array}$$

Observe que $\phi \circ \tau(\sigma) = \phi \circ \sigma' = \sigma$ e $\tau \circ \phi(\sigma') = \tau \circ \sigma = \sigma'$. Logo $\phi \circ \tau$ e $\tau \circ \phi$ são as identidades de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$, respectivamente. Portanto ϕ é um isomorfismo. ■

Capítulo 3

Peso Máximo para Álgebras de Lie com Decomposição Triangular

Neste capítulo, apresentaremos as teorias de representações de peso e representações de peso máximo para álgebras de Lie. Para definição de uma teoria de peso máximo, faremos uma escolha de uma decomposição triangular para a álgebra de Lie. Escolhemos $\mathfrak{h}$ uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$ que age diagonalmente sobre $\mathfrak{g}$ via a representação adjunta. Um $\mathfrak{g}$ -módulo M é um módulo de peso se a ação de $\mathfrak{h}$ sobre M é diagonalizável. A partir disso, diremos quando um módulo é um módulo de peso máximo e definiremos os módulos Verma, objetos universais nesta teoria. Com isso, buscaremos resultados sobre a redutibilidade destes módulos Verma. Para mais detalhes desta teoria, sugerimos uma consulta a [6].

3.1 Teoria de Representação de Peso

Sejam $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie abeliana, $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow gl(M)$ uma representação de $\mathfrak{h}$ em um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial M e $\phi \in \mathfrak{h}^*$, um funcional linear de $\mathfrak{h}$. Um vetor não nulo $v \in M$ é chamado um **vetor peso** de peso ϕ (relativo a $\mathfrak{h}$ e π) se, para todo $h \in \mathfrak{h}$,

$$\pi(h)v = \phi(h)v.$$

Quando estiver claro no contexto que v é um vetor peso relativo a uma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e a uma representação π , diremos apenas que v é um vetor peso. Além disso, frequentemente escreveremos $h \cdot v$ para representar $\pi(h)v$.

Vimos na Proposição 2.2.3 que $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ pode ser identificada com a álgebra simétrica $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ e qualquer representação π de $\mathfrak{h}$ se estende unicamente para uma representação π de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Suponha que v seja um vetor peso de $\mathfrak{h}$ de peso ϕ . A aplicação linear $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$ estende-se unicamente a um homomorfismo

$$\phi : \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathbb{K}.$$

Se $h_1, h_2, \dots, h_k$ são elementos de $\mathfrak{h}$, então

$$\phi \left(\sum a_i h_1^{i_1} h_2^{i_2} \dots h_k^{i_k} \right) = \sum a_i \phi(h_1)^{i_1} \phi(h_2)^{i_2} \dots \phi(h_k)^{i_k},$$

onde $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ e $a_i \in \mathbb{K}$. Logo $\pi(u)v = \phi(u)v$, para todo $u \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$.

Para cada $\phi \in \mathfrak{h}^*$, defina o **ϕ -espaço de peso** M^ϕ por

$$M^\phi = \{v \in M : \pi(h)v = \phi(h)v, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Dessa forma M^ϕ é um $\mathfrak{h}$ -submódulo de M .

Definição 3.1.1 *Sejam $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie abeliana e $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow gl(M)$ uma representação de $\mathfrak{h}$. Dizemos que o $\mathfrak{h}$ -módulo M admite uma **decomposição em espaços de pesos** se $M = \sum_{\phi \in \mathfrak{h}^*} M^\phi$ e, neste caso, dizemos que M é um **módulo de peso**.*

Os funcionais ϕ para os quais $M^\phi \neq \{0\}$ são chamados **pesos** de M relativos a $\mathfrak{h}$ e π . O conjunto de todos os pesos de M é chamado **suporte** do módulo de peso M . Para cada $\phi \in \mathfrak{h}^*$, a dimensão $\dim M^\phi$ é chamada a **multiplicidade** de ϕ em M e é denotada por $\text{mult}_M(\phi)$. Daí $\text{mult}_M(\phi) \geq 1$ se, e somente se, ϕ é um peso.

Proposição 3.1.2 *Sejam $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie abeliana e M um $\mathfrak{h}$ -módulo admitindo uma decomposição em espaços de pesos relativa a uma representação π de $\mathfrak{h}$. Então*

$$(i) \text{ a soma } M = \sum_{\phi \in \mathfrak{h}^*} M^\phi \text{ é direta;}$$

$$(ii) \text{ todo } \mathfrak{h}\text{-submódulo } N \text{ de } M \text{ admite uma decomposição em espaços de pesos e } N^\phi = M^\phi \cap N, \text{ para todo } \phi \in \mathfrak{h}^*.$$

Demonstração:

(i) Provemos primeiro que vetores que estão em espaços de pesos distintos são linearmente independentes. Fazendo indução sobre o número de somandos temos o resultado válido para $n = 1$. Suponha o resultado válido para valores menores que n . Sejam $v_i \in M^{\phi_i}$ não nulo e $\lambda_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \dots, n$. Suponha

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0. \quad (3.1)$$

Aplicando $\pi(h)$ na Equação (3.1), para $h \in \mathfrak{h}$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \pi(h)v_1 + \dots + \lambda_n \pi(h)v_n &= 0 \\ \lambda_1 \phi_1(h)v_1 + \dots + \lambda_n \phi_n(h)v_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Multiplicando agora $\phi_1(h)$ na Equação (3.1), para $h \in \mathfrak{h}$, temos

$$\lambda_1 \phi_1(h)v_1 + \dots + \lambda_n \phi_1(h)v_n = 0. \quad (3.3)$$

Subtraindo a Equação (3.3) de (3.2) obtemos

$$\lambda_2(\phi_2 - \phi_1)(h)v_2 + \dots + \lambda_n(\phi_n - \phi_1)(h)v_n = 0.$$

Pela hipótese de indução, os vetores $v_2, \dots, v_n$ são linearmente independentes, logo $\lambda_i = 0$, para $i = 2, \dots, n$, já que $\phi_i(h) \neq \phi_1(h)$, para $i = 2, \dots, n$ e algum $h \in \mathfrak{h}$. Assim $\lambda_1 v_1 = 0$ e daí $\lambda_1 = 0$. Portanto, os vetores v_i , para $i = 1, \dots, n$, são linearmente independentes.

Para ver que a soma M é direta, suponha $v \in M$ tal que $v = v_1 + \dots + v_n$ e $v = u_1 + \dots + u_n$, com $v_i, u_i \in M^{\phi_i}$, para $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$(v_1 - u_1) + \dots + (v_n - u_n) = 0.$$

Como os vetores $(v_i - u_i)$ são linearmente independentes, para $i = 1, \dots, n$, temos $v_i = u_i$, para $i = 1, \dots, n$. Portanto, cada vetor v de M se escreve de maneira única como soma de elementos dos espaços de pesos e, assim, a soma M é direta.

(ii) Seja N um submódulo de M . Defina $N^\phi = M^\phi \cap N$ para todo $\phi \in \mathfrak{h}^*$. Dado $x \in N$ escreva $x = \sum_{\phi \in R} x^\phi$, onde $x^\phi \in M^\phi$ e R é algum conjunto finito de pesos distintos de M . Mostremos por indução sobre $k = |R|$ que cada $x^\phi \in N^\phi$.

Se $R = \{\phi_1\}$, então $x \in M^{\phi_1} \cap N = N^{\phi_1}$. Suponha $k > 1$ e que, para $|R| < k$, o resultado seja válido. Sejam ϕ_1 e $\phi_2 \in R$, com $\phi_1 \neq \phi_2$. Escolha $h \in \mathfrak{h}$ tal que $\phi_1(h) \neq \phi_2(h)$. Então

$$h \cdot x - \phi_2(h)x = \sum_{\phi \in R \setminus \{\phi_2\}} (\phi(h) - \phi_2(h))x^\phi \in N.$$

Pela hipótese de indução, cada componente $(\phi(h) - \phi_2(h))x^\phi \in N^\phi$. Em particular, $x^{\phi_1} \in N^{\phi_1}$ e daí $\sum_{\phi \in R \setminus \{\phi_1\}} x^\phi \in N$. Aplicando indução de novo, temos cada $x^\phi \in N^\phi$ e daí N admite uma decomposição em espaços de pesos.

■

Exemplo 3.1.3 (A álgebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$)

Seja $\mathfrak{h}$ o conjunto de todas as matrizes diagonais em $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Uma base de $\mathfrak{h}$ é dada por $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$, onde

$$h_k = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ na } (k, k) - \text{posição}).$$

Sejam $M = \mathbb{K}^n$ e π a representação natural de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ sobre M , dada por

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & gl_n(M) \\ u & \mapsto & \pi(u) : M \rightarrow M \\ & & (a_1, \dots, a_n) \mapsto u \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

Então

$$e_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ na } k\text{-ésima linha})$$

é um vetor peso para $\mathfrak{h}$ com peso ϕ_k dado por

$$\phi_k(h_j) := \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j, j+1, \\ 1, & \text{se } k = j, \\ -1, & \text{se } k = j+1. \end{cases}$$

Além disso, $M^{\phi_k} = \mathbb{K}e_k$ e $M = \bigoplus_{k=1}^n M^{\phi_k}$, mostrando que M admite decomposição em espaços de pesos.

Exemplo 3.1.4 (Álgebra de Virasoro)

Sejam $\mathfrak{B} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}L_n \oplus \mathbb{K}c$ a álgebra de Virasoro e $\mathfrak{h} = \mathbb{K}L_0 \oplus \mathbb{K}c$. Considerando $\mathfrak{B}$ como um $\mathfrak{h}$ -módulo através da representação adjunta restrita a $\mathfrak{h}$, temos

$$[L_0, L_n] = nL_n,$$

$$[c, L_n] = 0 = 0 \cdot L_n.$$

Mostrando que L_n é um vetor peso de peso λ_n , onde $\lambda_n \in \mathfrak{h}^*$ é definido, para cada $n \in \mathbb{Z}$, por

$$\lambda_n(L_0) = n, \quad \lambda_n(c) = 0.$$

Como $\lambda_n = n\lambda_1$, defina $\mathfrak{B}^{\lambda_n} = \mathfrak{B}^{n\lambda_1} = \mathbb{K}L_n$, se $n \neq 0$ e $\mathfrak{B}^0 = \mathfrak{h}$. Isso mostra que $\mathfrak{B}$ admite uma decomposição em espaços de pesos relativos a $\mathfrak{h}$.

Definição 3.1.5 Sejam $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie abeliana, $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow gl(M)$ uma representação de $\mathfrak{h}$ e M um $\mathfrak{h}$ -módulo de peso. Dado $\phi \in \mathfrak{h}^*$, um elemento v não nulo em M^ϕ é um **vetor primitivo** de M se o submódulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v \subset M$ é próprio.

Proposição 3.1.6 Um módulo de peso M é redutível se, e somente se, M tem um vetor primitivo.

Demonstração: Se M tem um vetor primitivo, então existem $\phi \in \mathfrak{h}^*$ e $v \in M^\phi$ tais que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v \subset M$ é um submódulo próprio. Logo M é redutível. Reciprocamente, se M é redutível, então existe $N \subset M$ um submódulo próprio. Como N é próprio, seja $v \in N^\phi$ um elemento não nulo. Assim, $v \in N^\phi \subset N$, já que N é módulo e então $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v \subset N$ e o fato de N ser próprio implica $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v$ ser próprio. Portanto, v é um vetor primitivo de M , como queríamos. ■

Proposição 3.1.7 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der } \mathfrak{g} \subset \text{gl}(\mathfrak{g})$ uma representação de uma álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{h}$ como uma álgebra de Lie de derivações de $\mathfrak{g}$.*

(i) *Suponha que $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição em espaços de pesos*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}^\alpha$$

com respeito a $\mathfrak{h}$ sobre a representação π , então

- (ia) *para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$;*
- (ib) *a álgebra envelopante universal de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, admite uma decomposição em espaços de pesos (relativo à representação de $\mathfrak{h}$ sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ estendida da de $\mathfrak{h}$ sobre $\mathfrak{g}$) e, para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$,*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^\alpha \mathcal{U}(\mathfrak{g})^\beta \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\alpha+\beta}.$$

- (ii) *Suponha que $\mathfrak{g}$ é gerada como uma álgebra de Lie por um conjunto de vetores x_j , $j \in J$, com $\pi(h)x_j = \phi_j(h)x_j$, para cada j e para todo $h \in \mathfrak{h}$. Então $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição em espaços de pesos $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^\alpha$, com $x_j \in \mathfrak{g}^{\phi_j}$ e cada peso $\alpha \in \sum \mathbb{Z}\phi_j$.*

Demonstração:

Da maneira usual, identifiquemos $\mathfrak{g}$ como uma subálgebra de Lie de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Sabemos que todo elemento de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma soma de produtos $x_1 x_2 \dots x_k$, onde cada $x_i \in \mathfrak{g}$. Tanto para (i) quanto para (ii) podemos assumir que cada x_i pertence a um espaço de pesos, digamos, $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$. Então

$$\begin{aligned} \pi(h)(x_1 x_2 \dots x_k) &= \sum_{j=1}^k x_1 \dots \pi(h)x_j \dots x_k \\ &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)(h)x_1 x_2 \dots x_k. \end{aligned}$$

As partes (ii) e (ib) seguem disso. Para (ii) usamos a Proposição 3.1.2 com $\mathfrak{g}$ visto como um $\mathfrak{h}$ -submódulo de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Como para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $[x, y] = xy - yx$ podemos deduzir (ia) de (ib). ■

3.2 Álgebras de Lie com Decomposição Triangular

Definição 3.2.1 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma **decomposição triangular** de $\mathfrak{g}$ é dada por um par de subálgebras abelianas não-nulas $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$, um par de subálgebras distintas e não-nulas $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ e uma anti-involução (anti-automorfismo de ordem 2) $\omega : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tais que:*

- (i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$;
- (ii) a subálgebra $\mathfrak{g}_+$ é um módulo de peso não nulo para $\mathfrak{h}_0$ sobre a ação adjunta, com pesos Δ_+ todos não nulos;
- (iii) $\omega|_{\mathfrak{h}} = id_{\mathfrak{h}}$ e $\omega(\mathfrak{g}_+) = \mathfrak{g}_-$;
- (iv) O semigrupo com identidade Q_+ , gerado por Δ_+ com a adição, é livremente gerado por um subconjunto finito de $\{\alpha_j\}_{j \in J} \subset Q_+$ consistindo de elementos linearmente independentes de $\mathfrak{h}_0^*$. Assim, podemos escrever $Q = \sum_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j$.

A decomposição triangular é dita **regular** se adicionarmos em (ii) que os espaços de pesos de $\mathfrak{g}_+$ são de dimensão finita. Chamamos os pesos Δ_+ do $\mathfrak{h}_0$ -módulo $\mathfrak{g}_+$ de **raízes positivas** e o espaço de peso $\mathfrak{g}^\alpha$ correspondente a $\alpha \in \Delta_+$ o **α -espaço de raízes**. Daí $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}^\alpha$. A anti-involução ω assegura uma decomposição análoga de $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}^\alpha$, onde $\Delta_- = -\Delta_+$ (as **raízes negativas**) e $\mathfrak{g}^{-\alpha} = \omega(\mathfrak{g}^\alpha)$, para todo $\alpha \in \Delta_+$.

Escrevemos $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ para as raízes de $\mathfrak{g}$ e vamos considerar Q_+ parcialmente ordenado por

$$\gamma \preceq_{Q_+} \gamma' \Leftrightarrow (\gamma' - \gamma) \in Q_+,$$

para $\gamma, \gamma' \in Q_+$.

Uma notação para uma álgebra de Lie com decomposição triangular é dada pela 5-upla $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$, mas na maioria das vezes, estaremos trabalhando com exemplos em que $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$, logo eventualmente poderemos omitir $\mathfrak{h}_0$.

Exemplo 3.2.2 (A álgebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, $n > 1$)

Seja $\mathfrak{g}_+$ (respectivamente $\mathfrak{g}_-$) a subálgebra das matrizes triangulares estritamente superiores (inferiores). Sejam $\tilde{\mathfrak{h}}$ a subálgebra das matrizes diagonais em $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ e $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Ambas $\tilde{\mathfrak{h}}$ e $\mathfrak{h}$ são subálgebras abelianas de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. A decomposição triangular procurada é

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+.$$

A transposição $x \mapsto x^t$ serve como uma anti-involução, fixando $\mathfrak{h}$ ponto a ponto e levando elementos de $\mathfrak{g}_-$ em elementos de $\mathfrak{g}_+$. Para determinarmos as raízes,

consideremos as matrizes unitárias E_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, com 1 na (i, j) -entrada e 0 nas demais. Uma base para $\mathfrak{g}_+$ é dada pelas matrizes E_{ij} tais que $i < j$ e uma base para $\mathfrak{g}_-$ é composta pelas matrizes E_{ij} tais que $i > j$. Sejam $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ definidos por

$$\varepsilon_i(E_{jj}) = \delta_{ij},$$

e $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ definidos por

$$\alpha_i := (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})|_{\mathfrak{h}}.$$

O conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ é uma base de $\mathfrak{h}^*$. Para $h = \sum_{l=1}^{n-1} a_l(E_{ll} - E_{l+1,l+1}) \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} [h, E_{ij}] &= hE_{ij} - E_{ij}h \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} a_l(E_{ll}E_{ij} - E_{l+1,l+1}E_{ij}) - \sum_{l=1}^{n-1} a_l(E_{ij}E_{ll} - E_{ij}E_{l+1,l+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} a_l(\delta_{il}E_{ij} - \delta_{i,l+1}E_{ij}) - \sum_{l=1}^{n-1} a_l(\delta_{jl}E_{ij} - \delta_{j,l+1}E_{ij}) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} a_l(\varepsilon_i(E_{ll})E_{ij} - \varepsilon_i(E_{l+1,l+1})E_{ij}) - \sum_{l=1}^{n-1} a_l(\varepsilon_j(E_{ll})E_{ij} - \varepsilon_j(E_{l+1,l+1})E_{ij}) \\ &= \varepsilon_i \left(\sum_{l=1}^{n-1} a_l(E_{ll} - E_{l+1,l+1}) \right) E_{ij} - \varepsilon_j \left(\sum_{l=1}^{n-1} a_l(E_{ll} - E_{l+1,l+1}) \right) E_{ij} \\ &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)E_{ij}. \end{aligned}$$

Para $i < j$, isso nos dá

$$[h, E_{ij}] = (\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})(h)E_{ij}.$$

Considere $Q_+ := \{\sum m_i \alpha_i : m_i \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$. Então

$$\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\alpha \in Q_+} \mathfrak{g}_+^\alpha = \bigoplus_{i < j} \mathbb{K}E_{ij}$$

é a decomposição em espaços de pesos. Além disso, $E_{ji} = E_{ij}^t$ tem peso $-(\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})$, para todo $i < j$, e

$$\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i > j} \mathbb{K}E_{ij}$$

é a decomposição em espaços de pesos de $\mathfrak{g}_-$. Logo $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ admite uma decomposição triangular regular, considerando $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$. Consequentemente, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ também tem uma decomposição triangular com os mesmos $\mathfrak{g}_+$ e $\mathfrak{g}_-$, mas com $\tilde{\mathfrak{h}}$ no lugar de $\mathfrak{h}$.

Exemplo 3.2.3 (Álgebra de Virasoro)

Considerando a álgebra de Virasoro $\mathfrak{B}$ do Exemplo 3.1.4, defina

$$\mathfrak{B}_+ = \sum_{n>0} \mathbb{K}L_n, \quad \mathfrak{B}_- = \sum_{n<0} \mathbb{K}L_n \quad \text{e} \quad \mathfrak{h} = \mathbb{K}L_0 \oplus \mathbb{K}c.$$

Seja $\lambda_1 \in \mathfrak{h}^*$ o peso de L_1 . Assim, com $Q_+ := \mathbb{Z}_+\lambda_1$ verificamos as propriedades (i), (ii) e (iv) de decomposição triangular da Definição 3.2.1. Considere ω a transformação linear definida nos elementos da base de $\mathfrak{B}$ e estendida por linearidade por $\omega(L_j) = L_{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, $\omega(c) = c$. A transformação ω assim definida é uma anti-involução. Isso mostra que $\mathfrak{B}$ possui uma decomposição triangular regular.

Exemplo 3.2.4 (Álgebra de Heisenberg estendida)

Seja $\tilde{\mathfrak{H}}$ o espaço vetorial com base

$$\{a_n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c, d\},$$

onde o colchete de Lie é dado, nos elementos da base e estendido por linearidade, por

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}c, \quad [c, a] = 0, \quad [d, a_m] = ma_m, \quad m, n \in \mathbb{Z}, a \in \tilde{\mathfrak{H}}.$$

A álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{H}}$ assim construída é chamada **álgebra de Heisenberg estendida** ou **álgebra oscilante**.

Sejam

$$\mathfrak{g}_{\pm} = \bigoplus_{m>0} \mathbb{K}a_{\pm m} \quad \text{e} \quad \mathfrak{h} = \mathbb{K}a_0 \oplus \mathbb{K}c \oplus \mathbb{K}d.$$

Considerando $\tilde{\mathfrak{H}}$ como um $\mathfrak{h}$ -módulo via a representação adjunta restrita a $\mathfrak{h}$, note que

$$[a_0, a_m] = 0 = 0 \cdot a_m,$$

$$[c, a_m] = 0 = 0 \cdot a_m,$$

$$[d, a_m] = ma_m.$$

Isto nos mostra que a_m é um vetor peso de peso δ_m , onde $\delta_m \in \mathfrak{h}^*$ é definido, para todo $m \in \mathbb{Z}$, por

$$\delta_m(a_0) = 0 = \delta_m(c) \quad \text{e} \quad \delta_m(d) = m.$$

Assim, $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$ e $\mathfrak{g}_+$ é um módulo de peso para $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$, com pesos $\Delta_+ = \{\delta_m : m > 0\}$. O semigrupo Q_+ é gerado por δ_1 e uma anti-involução ω é dada por

$$\omega(c) = c, \quad \omega(d) = d, \quad \omega(a_m) = a_{-m}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 3.2.5 Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$ e R uma $\mathbb{K}$ -álgebra associativa, comutativa e com unidade 1. Escreva $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} R$. Então $\tilde{\mathfrak{g}}$ é uma álgebra de Lie com colchete dado por

$$[x \otimes r, y \otimes s] = [x, y] \otimes rs, \quad x, y \in \mathfrak{g}, \quad r, s \in R$$

e contém $\mathfrak{g}$ como subálgebra via $x \mapsto x \otimes 1$. Ainda, $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_-$, onde $\tilde{\mathfrak{g}}_+$, $\tilde{\mathfrak{h}}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_-$ são definidos de forma análoga à definição de $\tilde{\mathfrak{g}}$ e $\mathfrak{h}_0 \subset \tilde{\mathfrak{h}}$ (na verdade estamos considerando a cópia $\mathfrak{h}_0 \otimes 1$ de $\mathfrak{h}_0$ em $\tilde{\mathfrak{h}}$) são subálgebras abelianas não nulas de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Como $\mathfrak{g}_+$ é um módulo de peso para $\mathfrak{h}_0$ com pesos Δ_+ , $\tilde{\mathfrak{g}}_+$ será também um módulo de peso para $\mathfrak{h}_0$ e os pesos coincidirão com os pesos Δ_+ . Além disso, $(\tilde{\mathfrak{g}}_+)^{\alpha} = (\mathfrak{g}_+)^{\alpha}$. Então $\mathfrak{g}$ e $\tilde{\mathfrak{g}}$ têm o mesmo sistema de raízes Δ e conjuntos de raízes Q e Q_+ . Uma anti-involução de $\tilde{\mathfrak{g}}$ é dada pela extensão R -linear $\omega : x \otimes r \mapsto \omega(x) \otimes r$, $x \in \mathfrak{g}$, $r \in R$ e fixa $\tilde{\mathfrak{h}}$ ponto a ponto. Portanto, $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}_0, \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{g}}_+, \omega)$ é uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie com decomposição triangular.

3.3 Teoria de Representação de Peso Máximo

Nesta seção, $\mathfrak{g}$ denota uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$. A menos que mencionemos o contrário, consideraremos, como na maioria dos exemplos apresentados, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$. Os principais resultados a serem provados serão a existência e propriedades dos módulos de peso máximo universais de $\mathfrak{g}$, chamados **módulos Verma**.

3.3.1 Módulos de Peso Máximo

Utilizando a decomposição triangular de $\mathfrak{g}$, escreveremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$. Seja π uma representação de $\mathfrak{g}$ sobre um espaço M . Pela Definição 2.2.1, π se estende a uma representação π de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sobre M . Assim, M é um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo com ação dada por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times M &\rightarrow M \\ (x, v) &\mapsto \pi(x)v \end{aligned}$$

Se v é um vetor em M , então

$$\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))v := \{\pi(u)v : u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\}$$

é o menor submódulo de M contendo v , com ação dada por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))v &\rightarrow \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))v \\ (x, \pi(u)v) &\mapsto \pi(x)\pi(u)v = \pi(xu)v. \end{aligned}$$

Chamamo-lo de **submódulo de M gerado por v** .

Definição 3.3.1 Um vetor não nulo $v \in M$ é chamado um **vetor peso máximo** para $\mathfrak{g}$ (relativo à decomposição triangular) se

(i) v é um vetor peso relativo à ação de $\mathfrak{h}$, isto é, existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\pi(h)v = \lambda(h)v$, para todo $h \in \mathfrak{h}$;

(ii) $\pi(x)v = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}_+$.

Definição 3.3.2 Um $\mathfrak{g}$ -módulo M é dito um **módulo de peso máximo** se M contém um vetor peso máximo v que o gera, isto é, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v = \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))v = M$. O peso $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ do vetor peso máximo v é chamado o **peso máximo de M** . Chamamos o par (λ, v) um **par de peso máximo de M** . A representação de $\mathfrak{g}$ em M obtida de M como um $\mathfrak{g}$ -módulo de peso máximo é chamada uma **representação de peso máximo**.

Seja M um módulo de peso máximo obtido a partir da representação π e com par de peso máximo (λ, v) . Usando o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, temos $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)$. Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))v \\ &= \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+))v \\ &= \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))\pi(\mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}_+\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+))v \\ &= \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))v \\ &= \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))v, \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde a última igualdade é consequência do fato de que v é um autovetor para $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \pi(\mathcal{S}(\mathfrak{h}))$, conforme Seção 3.1.

Pela Proposição 3.1.7, $\mathfrak{g}$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ admitem decomposições em espaços de pesos com pesos em Q . Além disso, todos os pesos de $\mathfrak{g}_-$ estão em $-Q_+$ e os de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ em $-Q_+ \cup \{0\}$. Seja P um subgrupo de $\mathfrak{h}^*$. Um $Q_+ - \mathbf{crivo}$ em P é qualquer conjunto da forma

$$\lambda \downarrow Q_+ := \{\lambda\} \cup \{\lambda - \beta : \beta \in Q_+\},$$

onde $\lambda \in P$. Chamamos λ a **fonte** do crivo. Particularmente, $Q_- \cup \{0\} = 0 \downarrow Q_+$.

Proposição 3.3.3 Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie admitindo uma decomposição triangular e Q seu conjunto de raízes. Seja M um $\mathfrak{g}$ -módulo de peso máximo com par de peso máximo (λ, v) com ação de $\mathfrak{g}$ sobre M obtida de uma representação π de $\mathfrak{g}$ em M . Então

- (i) M admite uma decomposição em espaços de pesos relativa a $\mathfrak{h}$, onde todos os pesos estão no crivo $\lambda \downarrow Q_+$. Além disso, $M^{\lambda - \alpha} = \pi((\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))^{-\alpha})v$, para todo $\alpha \in Q_+ \cup \{0\}$. Em particular, $M^\lambda = \mathbb{K}v$.
- (ii) Se a decomposição de $\mathfrak{g}$ é regular, então todos os espaços de pesos de M são de dimensão finita.

Demonstração:

Por (3.4), M é gerado por vetores da forma $\pi(u)v$, onde $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\alpha}$, $\alpha \in Q_+ \cup \{0\}$. Fazendo a restrição de π a $\mathfrak{h}$ temos, para $h \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} \pi(h)\pi(u)v &= [\pi(h), \pi(u)]v + \pi(u)\pi(h)v \\ &= \pi([h, u])v + \lambda(h)\pi(u)v \\ &= \pi(h \cdot u)v + \lambda(h)\pi(u)v \\ &= \pi(-\alpha(h)u)v + \lambda(h)\pi(u)v \\ &= -\alpha(h)\pi(u)v + \lambda(h)\pi(u)v \\ &= (\lambda - \alpha)(h)\pi(u)v, \end{aligned}$$

o que mostra que M é gerado por vetores de peso e daí tem uma decomposição em espaços de pesos. Isto implica $M^{\lambda-\alpha} = \pi((\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))^{-\alpha})v$ e que todos os espaços de pesos de M são dessa forma, provando assim (i).

Para (ii), suponha que a decomposição de $\mathfrak{g}$ é regular. Agora $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ tem todos seus pesos em $0 \downarrow Q_+$ e, exceto para $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^0 (= \mathbb{K} \cdot 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)})$, pela Proposição 3.1.7, cada espaço de pesos $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\beta}$ é gerado por produtos $x_1 \dots x_k$ de vetores pesos com pesos $-\beta_1, \dots, -\beta_k \in -Q_+$ e $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_k$. Como há somente finitas maneiras de se decompor $\beta \in Q_+$ em partes que também estão em Q_+ e como $\dim \mathfrak{g}_-^{-\alpha} = \dim \mathfrak{g}_-^{\alpha} < \infty$, para todo $\alpha \in Q_+$, temos $\dim \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\beta} < \infty$. Portanto, $M^{\lambda-\beta} = \pi((\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))^{-\beta})v$ é também de dimensão finita, o que prova (ii). ■

Observação 3.3.4 *Pela Proposição 3.3.3, fica clara a terminologia peso máximo. Pelo item (i), o suporte de M está contido em $\lambda - \{Q_+ \cup \{0\}\}$, isto é $M = \bigoplus_{\alpha \leq \lambda} M^\alpha$, daí λ é um peso e todos os outros são “menores”, pois são da forma $\lambda - \alpha$, $\alpha \in Q_+$.*

Observação 3.3.5 *A Proposição 3.3.3 mostra também que λ e $\mathbb{K}v$ são únicos. De fato, seja w um outro vetor peso máximo para M de peso máximo μ . Como λ é peso máximo $\mu = \lambda - \alpha$, para algum peso $\alpha \in Q_+ \cup \{0\}$. Por outro lado, como μ é peso máximo, $\lambda = \mu - \beta$ para algum $\beta \in Q_+ \cup \{0\}$. Então $\mu = \lambda - \alpha = (\mu - \beta) - \alpha$, o que implica $\alpha + \beta = 0$ e, portanto, $\alpha = \beta = 0$. Logo $\mu = \lambda$ e assim $\dim M^\mu = 1$ e $\mathbb{K}w = \mathbb{K}v$.*

Exemplo 3.3.6 (A representação natural de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$)

Consideremos as notações dos Exemplos 3.1.3 e 3.2.2, com $M = \mathbb{K}^n$ e π a representação natural de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ em M . Então $M = \bigoplus_{k=1}^n \mathbb{K}e_k$ é uma decomposição em espaços de pesos de M . Como $E_{ij}e_1 = 0$, para todo $i < j$, $\mathfrak{g}_+ \cdot (e_1) = 0$ e e_1 é um vetor peso relativo a ação de $\mathfrak{h}$, conforme o Exemplo 3.1.3, então e_1 é um vetor peso máximo. Como $e_i = \pi(E_{i1})e_1 = E_{i1}e_1$, para $i = 2, \dots, n$, M é gerado por e_1 e daí M é um módulo de peso máximo. Os pesos são $\phi_1, \phi_2 = \phi_1 - \alpha_1, \phi_3 = \phi_1 - \alpha_1 - \alpha_2, \dots, \phi_n = \phi_1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}$. Além disso, todos os espaços de pesos são unidimensionais.

Proposição 3.3.7 *Módulos de peso máximo são indecomponíveis.*

Demonstração:

Seja M um módulo de peso máximo com par de peso máximo (λ, v) tal que $M = M_1 \oplus M_2$, onde M_1 e M_2 são submódulos de M . Então, pela Proposição 3.1.2,

$$\mathbb{K}v = M^\lambda = M_1^\lambda \oplus M_2^\lambda,$$

forçando ou $M_1^\lambda = (0)$ ou $M_2^\lambda = (0)$. Digamos, $M_2^\lambda = (0)$. Então $v \in M_1^\lambda$ e $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v \subset M_1$, daí $M_2 = (0)$. ■

Definição 3.3.8 *Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Um módulo de peso máximo $M(\lambda)$ para $\mathfrak{g}$ com par de peso máximo (λ, v_+) é chamado um **módulo Verma** se, dado qualquer módulo de peso máximo M com par de peso máximo (λ, v) , existe um epimorfismo de $\mathfrak{g}$ -módulos $\eta : M(\lambda) \rightarrow M$ tal que $v_+ \mapsto v$, em outras palavras, $M(\lambda)$ é um módulo Verma se todo $\mathfrak{g}$ -módulo M com peso máximo λ é um quociente de $M(\lambda)$.*

Um módulo Verma $M(\lambda)$ é universal já que todo módulo de peso máximo com mesmo peso máximo que $M(\lambda)$ é imagem homomórfica dele. Logo $M(\lambda)$ é único a menos de isomorfismos.

A seguir, apresentaremos três demonstrações da existência de módulos Verma. A primeira demonstração é mais técnica e simples. As outras demonstrações serão apresentadas pois, além da existência de módulos Verma, nos dão duas maneiras distintas de construir estes módulos. Apresentamos duas demonstrações construtivas distintas, pois cada uma terá sua importância em resultados posteriores, facilitando algumas demonstrações.

Proposição 3.3.9 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular. Então, para todo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, existe um $\mathfrak{g}$ -módulo Verma.*

Demonstração:

Considere o ideal à esquerda $J(\lambda)$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ gerado por $\mathfrak{g}_+$ e pelos elementos $h - \lambda(h)1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$, com $h \in \mathfrak{h}$, e considere

$$M(\lambda) = \frac{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{J(\lambda)}.$$

A multiplicação à esquerda em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ induz uma estrutura de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo sobre $M(\lambda)$ e $M(\lambda)$ é um $\mathfrak{g}$ -módulo com peso máximo λ e vetor peso máximo $1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} + J(\lambda)$.

Seja V um $\mathfrak{g}$ -módulo com peso máximo λ e vetor peso máximo v . Como $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ podemos definir um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ -módulos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sobre V por $x \mapsto x \cdot v$. O anulador $\text{Ann}(V)$ de V é um ideal à esquerda J_1 que contém $J(\lambda)$, daí $V \cong \frac{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{J_1}$ e temos um epimorfismo de $\mathfrak{g}$ -módulos $M(\lambda) \rightarrow V$, o que prova a proposição. ■

Observação 3.3.10 *Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, podemos demonstrar a existência de $M(\lambda)$ também via a construção de um módulo induzido de $\mathbb{K}v_+$. De fato, seja $\mathfrak{b}$ a subálgebra $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$ de $\mathfrak{g}$. Seja $\mathbb{K}v_+$ um espaço vetorial unidimensional e o faça um $\mathfrak{b}$ -módulo com*

$$\mathfrak{g}_+ \cdot v_+ = 0 \quad e \quad h \cdot v_+ = \lambda(h)v_+, \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h}.$$

Estendendo a ação de $\mathfrak{b}$ sobre $\mathbb{K}v_+$ a uma ação de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$, $\mathbb{K}v_+$ torna-se um $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ -módulo à esquerda e, além disso, $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ é um subanel de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Daí podemos induzir um módulo obtido de $\mathbb{K}v_+$ por extensão da base de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$M(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{K}v_+.$$

O módulo $M(\lambda)$ é um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo à esquerda e assim um $\mathfrak{g}$ -módulo, com ação dada por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times M(\lambda) &\rightarrow M(\lambda) \\ (x, u \otimes av_+) &\mapsto xu \otimes av_+. \end{aligned}$$

Considere $1 \otimes v_+ = 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \otimes v_+ \in M(\lambda)$. Para $x \in \mathfrak{g}_+$,

$$x \cdot (1 \otimes v_+) = x \otimes v_+ = 1 \otimes x \cdot v_+ = 0$$

e, para $h \in \mathfrak{h}$,

$$h \cdot (1 \otimes v_+) = h \otimes v_+ = 1 \otimes h \cdot v_+ = 1 \otimes \lambda(h)v_+ = \lambda(h)(1 \otimes v_+).$$

Além disso, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot (1 \otimes v_+) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{K}v_+ = M(\lambda)$, logo $M(\lambda)$ é um módulo de peso máximo com vetor peso máximo $1 \otimes v_+$ de peso λ .

Seja M' qualquer módulo de peso máximo com vetor peso máximo v' e peso máximo λ . Daí $M' = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v'$. A aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{K}v_+ &\rightarrow M' \\ (u, av_+) &\mapsto au \cdot v', \end{aligned}$$

é $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ -balanceada¹, isto é, para $w \in \mathcal{U}(\mathfrak{b})$, $u_1, u_2, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $a_1, a_2, a \in \mathbb{K}$,

$$f(u_1 + u_2, av_+) = a(u_1 + u_2) \cdot v' = au_1 \cdot v' + au_2 \cdot v' = f(u_1, av_+) + f(u_2, av_+),$$

$$f(u, a_1v_+ + a_2v_+) = (a_1 + a_2)u \cdot v' = a_1u \cdot v' + a_2u \cdot v' = f(u, a_1v_+) + f(u, a_2v_+),$$

$$f(uw, av_+) = au \cdot w \cdot v' = f(u, w \cdot av_+).$$

Daí, pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma aplicação linear induzida

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{K}v_+ &\rightarrow M' \\ u \otimes av_+ &\mapsto au \cdot v'. \end{aligned}$$

A aplicação f de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulos satisfaz $1 \otimes v_+ \mapsto v'$, como queríamos.

Na sequência, faremos outra demonstração da Proposição 3.3.9 e, para isso, usaremos o seguinte lema:

Lema 3.3.11 *Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Então*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) \oplus \{\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ + \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)1)\}. \quad (3.5)$$

Demonstração:

Como, pela Proposição 2.2.3, $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) = \mathcal{S}(\mathfrak{h})$, a aplicação $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$ se estende de forma única a um homomorfismo

$$\lambda : \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathbb{K}.$$

¹Veja Definição A.0.4 no Apêndice A

cujo núcleo é $\sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{S}(\mathfrak{h})(h - \lambda(h)1)$. Assim,

$$\mathcal{S}(\mathfrak{h}) = \mathbb{K} \oplus \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{S}(\mathfrak{h})(h - \lambda(h)1).$$

Seja $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_-$, pelo Corolário 2.2.6 do Teorema PBW, $\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$ é um $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ -módulo livre admitindo qualquer $\mathbb{K}$ -base de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ como uma $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ -base. Pela decomposição triangular e o Teorema PBW, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})(\mathbb{K}1 \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)\mathfrak{g}_+) \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)\mathfrak{g}_+ \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)(\mathbb{K} \oplus \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{U}(\mathfrak{h})(h - \lambda(h)1)) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ \text{ (pois } \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \cong \mathcal{S}(\mathfrak{h})) \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) \oplus \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)(h - \lambda(h)1) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+. \end{aligned}$$

Agora, $\mathfrak{g}_+(h - \lambda(h)1) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$, já que $\mathfrak{g}_+$ é um $\mathfrak{h}$ -módulo via a representação adjunta, logo

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)1) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)(h - \lambda(h)1) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$$

e, como $\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)(h - \lambda(h)1) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)1)$, segue o resultado. ■

Demonstração: (3ª. demonstração da Proposição 3.3.9)

Seja

$$p : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$$

a projeção determinada pela decomposição em soma direta (3.5) de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. O núcleo de p é um ideal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Defina a ação de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) &\rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) \\ (y, u) &\mapsto y \cdot u = p(yu) \end{aligned}$$

Isso torna $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo. Sejam $y', y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ e escreva $yu = p(yu) + r$, onde $p(r) = 0$. Então

$$\begin{aligned} y' \cdot (y \cdot u) &= p(y'p(yu)) \\ &= p(y'(yu - r)) \\ &= p(y'yu) \\ &= (y'y) \cdot u, \end{aligned}$$

já que $y'r$ está no núcleo de p e, ainda, para $u', u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$,

$$u' \cdot u = p(u'u) = u'u$$

e, assim, a ação de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ sobre si mesmo é uma multiplicação à esquerda. Daí $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ é gerado por $1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)}$ como um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo. Além disso, para todo $y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)$,

$$y \cdot 1 = p(y) = 0,$$

e, para todo $h \in \mathfrak{h}$,

$$h \cdot 1 = p(h) = p(\lambda(h)1 + (h - \lambda(h)1)) = \lambda(h)1.$$

Isso mostra que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ é um módulo de peso máximo com vetor peso máximo 1 e peso máximo λ . Se M' é qualquer módulo de peso máximo com par de peso máximo (λ, v') , então o núcleo de p anula v' . Portanto, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) & \rightarrow & M' \\ u & \mapsto & u \cdot v' \end{array}$$

de $\mathfrak{g}$ -módulos mostra que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ (como um $\mathfrak{g}$ -módulo) é um módulo Verma. $\blacksquare$

Observação 3.3.12 *Da 3ª. demonstração da Proposição 3.3.9 e da Proposição 3.3.3 temos $M(\lambda) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ como $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ -módulos e $M(\lambda)^{\lambda-\alpha} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\alpha}$, onde a ação sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ é a multiplicação à esquerda. Assim, como $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ -módulos, todos os $M(\lambda)$ são isomorfos a $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$, a menos das ações de $\mathfrak{h}$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)$ que podem ser diferentes.*

Se $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ é um domínio de integridade, temos o importante fato de que um módulo Verma $M(\lambda)$ é um $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ -módulo **livre de torção**, pois, para $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$, $m \in M(\lambda)$,

$$u \cdot m = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } m = 0. \quad (3.6)$$

Qualquer homomorfismo de $M(\lambda)$ que não é injetivo anula algum elemento não trivial $u \cdot v, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) \setminus \{0\}$. Assim, temos a seguinte conclusão:

Proposição 3.3.13 *Seja M um $\mathfrak{g}$ -módulo de peso máximo. Para M ser um módulo Verma é necessário e suficiente que M seja livre de torção como um $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ -módulo (isto é, vale (3.6)).*

Observação 3.3.14 *Se M é um $\mathfrak{g}$ -módulo Verma, então como um $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ -módulo é cíclico e livre de torção e, portanto, ele é livre.*

Corolário 3.3.15 *Qualquer submódulo de um módulo Verma que é um módulo de peso máximo é um módulo Verma.*

Da aplicação de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulos à esquerda

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \rightarrow & M(\lambda) \\ u & \mapsto & u \cdot v_+, \end{array}$$

obtemos

$$M(\lambda) \cong \frac{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{I(\lambda)}, \quad (3.7)$$

onde $I(\lambda)$ é o anulador de v_+ em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. De (3.6) e da 3ª. demonstração da Proposição 3.3.9, temos

$$I(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ + \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)1). \quad (3.8)$$

Proposição 3.3.16 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

(i) *Se $M(\lambda)$ é o módulo Verma de peso máximo λ , então*

- (a) *todo submódulo próprio N de $M(\lambda)$ tem uma decomposição em espaços de pesos relativa a $\mathfrak{h}$ e os pesos estão em $\lambda - Q_+$;*
- (b) *$M(\lambda)$ tem um único submódulo próprio maximal $N(\lambda)$;*
- (c) *$L(\lambda) := \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}$ é irredutível e, a menos de isomorfismo, $L(\lambda)$ é o único módulo de peso máximo irredutível de $\mathfrak{g}$ com peso máximo λ .*

(ii) *Qualquer módulo de peso máximo M com peso máximo λ contém um único submódulo próprio maximal N . Além disso, $\frac{M}{N} \cong L(\lambda)$.*

Demonstração:

- (i) (a) Se N é um submódulo de $M(\lambda)$, então em particular N é um $\mathfrak{h}$ -submódulo de $M(\lambda)$. Pela Proposição 3.1.2(ii), N tem uma decomposição em espaços de pesos com espaços de pesos $N^\phi = M(\lambda)^\phi \cap N$ e, pela Proposição 3.3.3, $\phi \in \lambda - \{Q_+ \cup \{0\}\}$. Se λ é um peso de N , então $N^\lambda = M(\lambda)^\lambda = \mathbb{K}v_+$ e assim $N = M$, já que v_+ gera $M(\lambda)$ como um $\mathfrak{g}$ -módulo. Portanto, se N é próprio, todos os pesos de N estão em $\lambda - Q_+$.
- (b) Pelo item (a), a soma $N(\lambda)$ de todos os submódulos próprios de M ainda é próprio (já que nenhum deles pode contribuir para M^λ). Isso prova (b).
- (c) É claro que $L(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}$ é um módulo de peso máximo com peso máximo λ e, já que $N(\lambda)$ é maximal, $L(\lambda)$ é irredutível. Seja L' qualquer módulo de peso máximo irredutível com peso máximo λ . Então, como $M(\lambda)$ é um módulo Verma, existe um epimorfismo

$$\eta : M(\lambda) \rightarrow L'$$

com $M(\lambda)^\phi \rightarrow L'^\phi$, para todos os pesos ϕ de $M(\lambda)$. Como η é sobrejetor, seu núcleo é um submódulo próprio maximal de $M(\lambda)$. Portanto, pelo item (b), $\eta(N(\lambda)) = 0$ e

$$\frac{M(\lambda)}{N(\lambda)} \cong L'.$$

(ii) Da propriedade universal de $M(\lambda)$, existe um epimorfismo $M(\lambda) \rightarrow M$. Este leva espaços de pesos em espaços de pesos. Logo $N(\lambda)$ vai em um submódulo próprio N de M . Então N é maximal e $\frac{M}{N} \cong \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)} = L(\lambda)$. ■

Exemplo 3.3.17 Álgebra de Virasoro

A subálgebra diagonal $\mathfrak{h}$ da álgebra de Virasoro do Exemplo 3.2.3 é bidimensional com base $\{L_0, c\}$. Assim, qualquer funcional linear λ em $\mathfrak{h}^*$ é determinado por dois valores

$$h := \lambda(L_0) \text{ e } \bar{c} := \lambda(c).$$

Denotamos o correspondente módulo Verma por $M = M(\lambda)$ e um vetor peso máximo por v_+ , daí $M = \mathcal{U}(\mathfrak{B})v_+$. Como c gera o centro de $\mathfrak{B}$, temos $c \cdot x \cdot v_+ = x \cdot c \cdot v_+ = x \cdot \lambda(c)v_+ = \bar{c}x \cdot v_+$, para todo $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{B})$. Logo c age como multiplicação escalar por $\bar{c}$ sobre M . Com $\lambda_1 \in \mathfrak{h}^*$ definido por $\lambda_1(L_0) = 1$ e $\lambda_1(\bar{c}) = 0$, como no Exemplo 3.1.4, temos

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M^{\lambda - n\lambda_1}.$$

Usando a Observação 3.3.12 e o Teorema PBW aplicado à base ordenada $\{L_{-1}, L_{-2}, \dots\}$ de $\mathfrak{B}_-$, achamos uma base de $M^{\lambda - n\lambda_1}$ dada pelo conjunto

$$\{L_{-n_k} \dots L_{-n_1} \cdot v_+ : n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k \text{ e } \sum n_i = n\}.$$

3.3.2 A Forma de Shapovalov

Em geral, o problema de se descrever os submódulos de um módulo Verma é muito difícil e também não é fácil dizer se $M(\lambda)$ é irredutível e como a irredutibilidade depende de λ . A **forma de Shapovalov** é útil neste caso. Trata-se de uma forma bilinear contragradiente sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ com valores em $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ que é então transferido para os módulos Verma $M(\lambda)$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie admitindo uma decomposição triangular $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_-$, com um conjunto de raízes Q e uma anti-involução ω . Pela decomposição triangular e o Teorema PBW, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})(\mathbb{K}1 \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)\mathfrak{g}_+) \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)\mathfrak{g}_+ \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ \\ &= (\mathbb{K}1 \oplus \mathfrak{g}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-))\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{g}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \{\mathfrak{g}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

A anti-involução ω se estende de forma única a uma anti-involução (que também denotaremos por ω) de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ que leva $\mathfrak{g}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$, e vice-versa, e fixa

ponto a ponto $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. As componentes do lado direito da igualdade (3.9) são todas $\mathfrak{h}$ -módulos sobre a representação adjunta.

Seja $\mathbf{q} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ a projeção sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ definida por (3.9) (logo $\mathbf{q}$ é nula nos demais somandos). Como já fizemos anteriormente, vamos identificar $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ com a álgebra simétrica $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ e daí $\mathbf{q} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h})$. Definimos a **forma de Shapovalov** por

$$\begin{aligned} F : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \\ (x, y) &\mapsto \mathbf{q}(\omega(x)y). \end{aligned}$$

Proposição 3.3.18 *A forma de Shapovalov F satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) F é simétrica;
- (ii) para todos $u, x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $F(ux, y) = F(x, \omega(u)y)$;
- (iii) para $\alpha, \beta \in Q$ e $\alpha \neq \beta$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^\alpha \perp \mathcal{U}(\mathfrak{g})^\beta$ relativo a F ;
- (iv) $F(1, 1) = 1$.

Demonstração:

- (i) Sejam $x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Escrevendo

$$\omega(x)y = F(x, y) + r,$$

onde $r \in \mathfrak{g}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$, e aplicando ω , temos $\omega(y)x = F(x, y) + \omega(r)$ o que implica $F(y, x) = \mathbf{q}(\omega(y)x) = \mathbf{q}(F(x, y)) + \mathbf{q}(\omega(r)) = F(x, y)$.

- (ii) Para todos $u, x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,

$$F(ux, y) = \mathbf{q}(\omega(ux)y) = \mathbf{q}(\omega(x)\omega(u)y) = F(x, \omega(u)y).$$

- (iii) Se $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^\alpha$, $y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^\beta$, então $\omega(x)y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\beta-\alpha}$, pela Proposição 3.1.7. Como a decomposição (3.9) é uma soma de $\mathfrak{h}$ -módulos, para $\beta - \alpha \neq 0$ obtemos $F(x, y) = \mathbf{q}(\omega(x)y) = 0$.

- (iv) $F(1, 1) = \mathbf{q}(\omega(1)1) = \mathbf{q}(1) = 1$.

■

Definição 3.3.19 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com uma anti-involução ω . Uma aplicação bilinear*

$$B : M \times M \rightarrow V$$

*de um $\mathfrak{g}$ -módulo M em algum espaço V é chamada **contragradiente** (relativa a ω) se, para todos $x, y \in M$ e para todo $u \in \mathfrak{g}$,*

$$B(u \cdot x, y) = B(x, \omega(u) \cdot y).$$

Pelo item (ii) da Proposição 3.3.18, a forma de Shapovalov F é contragradiente relativa à anti-involução da decomposição triangular.

Qualquer $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ se estende unicamente a um homomorfismo

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{S}(\mathfrak{h}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(\lambda). \end{aligned}$$

Como, em particular, a forma de Shapovalov assume valores em $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$, podemos definir, para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, uma forma bilinear simétrica com valores em $\mathbb{K}$ sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dada por

$$\begin{aligned} F(\lambda) : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto F(\lambda)(x, y) = F(x, y)(\lambda). \end{aligned}$$

Agora se $y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$ então, para todo $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $F(x, y) = \mathbf{q}(\omega(x)y) = 0$ (já que $\omega(x)y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$) e, em particular, $F(\lambda)(x, y) = 0$, para todo $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Se $y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)1)$, então é possível mostrar que $F(x, y) = f(h - \lambda(h)1)$, para algum $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$ e, assim, de novo $F(\lambda)(x, y) = 0$. Logo o ideal à esquerda $I(\lambda)$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dado em (3.8) está no radical $S := \{x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : F(\lambda)(x, y) = 0, \text{ para todo } y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\}$ de $F(\lambda)$. Como $M(\lambda) \cong \frac{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{I(\lambda)}$, usamos $1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ para determinar o vetor peso máximo v_+ de $M(\lambda)$ e assim obtemos uma nova forma bilinear induzida

$$F_\lambda : M(\lambda) \times M(\lambda) \rightarrow \mathbb{K} \quad (3.10)$$

satisfazendo

$$F_\lambda(x \cdot v_+, y \cdot v_+) = F(\lambda)(x, y),$$

para todos $x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Proposição 3.3.20 *Para a forma F_λ definida em (3.10), temos:*

- (i) F_λ é simétrica e contragradiente;
- (ii) relativo a F_λ , $M(\lambda)^{\lambda-\alpha} \perp M(\lambda)^{\lambda-\beta}$, a menos que $\alpha = \beta$;
- (iii) o submódulo maximal $N(\lambda)$, construído na demonstração do item (ib) da Proposição 3.3.16, é o radical de F_λ ;
- (iv) escrevendo $M(\lambda) = \mathbb{K}v_+ + \sum_{\alpha \in Q_+} M(\lambda)^{\lambda-\alpha}$ temos, para todos $x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, que $F_\lambda(x \cdot v_+, y \cdot v_+)$ é a componente de $\omega(x) \cdot y \cdot v_+$ em $\mathbb{K}v_+$.

Demonstração:

O item (i) segue do fato de F ser simétrica e contragradiente. O item (ii) é um cálculo simples, notando-se que $\omega(x)y \in M^{\alpha-\beta}$. Para a parte (iii), seja R o radical de F_λ . O radical R é um submódulo, pelo fato de F ser contragradiente, e é próprio, já que $F_\lambda(v_+, v_+) = 1$. Logo $R \subset N(\lambda)$. Reciprocamente, seja $w \in N(\lambda)$. Então, para todo $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, como F_λ é contragradiente,

$$F_\lambda(x \cdot v_+, w) = F_\lambda(v_+, \omega(x) \cdot w) = 0,$$

pela parte (ii), já que $\omega(x) \cdot w \in N(\lambda) \subset \sum_{\alpha \in Q_+} M(\lambda)^{\lambda-\alpha}$. Isso mostra que $N(\lambda) \subset R$ e daí $N(\lambda) = R$. Para parte (iv), escreva $\omega(x)y = F(x, y) + r$, como na prova da Proposição 3.3.18, e aplicando em v_+ segue o resultado. ■

Lembramos que uma forma bilinear $B : A \times A \rightarrow \mathbb{K}$ é **não-degenerada** se o radical $R := \{x \in A : B(x, y) = 0, \text{ para todo } y \in A\}$ de B é nulo. Se $R \neq (0)$, B é dita **degenerada**.

A proposição a seguir estabelece um critério de irredutibilidade do módulo Verma.

Proposição 3.3.21 *O módulo Verma $M(\lambda)$ é irredutível se, e somente se, F_λ é não degenerada, isto é, o radical de F_λ é nulo.*

Demonstração: Para ver isso, lembremos que no item (ic) da Proposição 3.3.16 verificamos que $L(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}$ é, a menos de isomorfismo, o único módulo de peso máximo irredutível de $\mathfrak{g}$ com peso máximo λ , onde $N(\lambda)$ é o submódulo próprio maximal de $M(\lambda)$. Assim,

$$M(\lambda) \text{ é irredutível} \Leftrightarrow L(\lambda) = M(\lambda) \Leftrightarrow N(\lambda) = 0 \Leftrightarrow F_\lambda \text{ é não degenerada,}$$

onde a última equivalência segue do item (iii) da Proposição 3.3.20. ■

Podemos ser mais precisos sobre a irredutibilidade de $M(\lambda)$. Seja $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$ e defina $F|_\gamma$ a restrição de F para cada espaço de peso $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma}$, isto é:

$$F|_\gamma : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma} \times \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma} \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h}).$$

Proposição 3.3.22 *A forma $F|_\gamma(\lambda)$ é degenerada se, e somente se, $N(\lambda)^{\lambda-\gamma} \neq (0)$.*

Demonstração:

Temos um isomorfismo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma} \cong M(\lambda)^{\lambda-\gamma}$ dado por

$$u \mapsto u \cdot v_+$$

e $F|_\gamma(\lambda)(u_1, u_2) = F(u_1, u_2)(\lambda) = F_\lambda(u_1 \cdot v_+, u_2 \cdot v_+)$. Dado $u_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma}$, $u_2 \cdot v_+ \in M(\lambda)^{\lambda-\gamma}$, então, para qualquer $u_1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma}$,

$$\begin{aligned} u_2 \text{ está no radical de } F|_\gamma(\lambda) &\Leftrightarrow F|_\gamma(\lambda)(u_1, u_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow F_\lambda(u_1 \cdot v_+, u_2 \cdot v_+) = 0 \Leftrightarrow u_2 \cdot v_+ \perp M(\lambda)^{\lambda-\gamma}, \text{ relativo a } F_\lambda \\ &\Leftrightarrow u_2 \cdot v_+ \perp M(\lambda), \text{ relativo a } F_\lambda \Leftrightarrow u_2 \cdot v_+ \in N(\lambda)^{\lambda-\gamma}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde a penúltima equivalência segue do item (ii) da Proposição 3.3.20. ■

Agora, se $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição triangular regular, isto é, os espaços de pesos são de dimensão finita, então para qualquer $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$ podemos achar uma base, digamos, $\{u_1, \dots, u_n\}$, de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma}$. Considere a matriz $n \times n$

$$Sh_\gamma(\lambda) = ((F|_\gamma(u_i, u_j))(\lambda))_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (3.12)$$

Lembrando que o **posto** p de uma matriz $n \times n$ é o número de linhas linearmente independentes dessa matriz e que a nulidade N dessa matriz é dada por $N = n - p$, de (3.11) temos o seguinte:

Corolário 3.3.23 *Se $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição triangular regular e Sh_γ é definido por (3.12), então*

- (i) *a dimensão de $N(\lambda)^{\lambda-\gamma}$ é igual a nulidade de $Sh_\gamma(\lambda)$;*
- (ii) *$M(\lambda)$ é irredutível se, e somente se, $\det(Sh_\gamma(\lambda)) \neq 0$, para todo $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$.*

Demonstração:

- (i) A nulidade de $Sh_\gamma(\lambda)$ é igual a dimensão do radical da forma $F|_\gamma(\lambda)$. Logo basta ver que $N(\lambda)^{\lambda-\gamma}$ é o radical de $F|_\gamma(\lambda)$.
- (ii) Se $M(\lambda)$ é irredutível, então $N(\lambda) = (0)$. Como a decomposição em espaços de pesos é uma soma direta, pela Proposição 3.1.2, $N(\lambda)^{\lambda-\gamma} = (0)$, para todo $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$, daí pela Proposição 3.3.22, $F|_\gamma(\lambda)$ é não degenerada, para todo $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$, o que implica $\det(Sh_\gamma(\lambda)) \neq 0$, para todo $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$. Reciprocamente, se $\det(Sh_\gamma(\lambda)) \neq 0$, para todo $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$, então $F|_\gamma(\lambda)$ é não degenerada, pois do contrário, se $F|_\gamma(\lambda)$ fosse degenerada, existiria u não nulo em $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma}$ tal que $F|_\gamma(\lambda)(u, v) = 0$, para todo $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-\gamma}$, o que implica em $\det(Sh_\gamma(\lambda)) = 0$, uma contradição. Agora como $F|_\gamma(\lambda)$ é não degenerada, pela Proposição 3.3.22, $N(\lambda)^{\lambda-\gamma} = (0)$, para todo $\gamma \in Q_+ \cup \{0\}$, logo $N(\lambda) = (0)$, e, portanto, $M(\lambda)$ é irredutível.

■

Exemplo 3.3.24 (Álgebra de Virasoro)

Usando a notação do Exemplo 3.3.17, a álgebra diagonal $\mathfrak{h}$ da álgebra de Virasoro é gerada por L_0 e c , e $M = M(\lambda)$ denota o módulo Verma com peso máximo λ tal que $\lambda(L_0) = h$ e $\lambda(c) = \bar{c}$.

Seja v_+ um vetor peso máximo de M de peso máximo λ . No Exemplo 3.3.17, para $n \in \mathbb{N}$, explicitamos uma base para $M(\lambda)^{\lambda-n\lambda_1} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{-n\lambda_1}$ que é formada pelo conjunto dos elementos $L_{-n_k} \dots L_{-n_1} \cdot v_+$, onde $n_1 \leq \dots \leq n_k$ e $n_1 + \dots + n_k = n$. Seja $\gamma_n = n\lambda_1$ um funcional em $\mathfrak{h}^*$. Vamos determinar as matrizes $Sh_{\gamma_n}(\lambda)$, para os valores $n = 0, 1, 2$.

Para $n = 0$, uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^0$ é $\{v_+\}$. Assim,

$$F_\lambda(v_+, v_+) = \lambda(F(1, 1)) = \lambda(1) = 1$$

e a matriz $Sh_0(\lambda)$ é dada por

$$Sh_0(\lambda) = (1).$$

Para $n = 1$, uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{\gamma_1}$ é $\{L_{-1} \cdot v_+\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
F_\lambda(L_{-1} \cdot v_+, L_{-1} \cdot v_+) &= \lambda(F(L_{-1}, L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(\omega(L_{-1})L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(L_1 L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}([L_1, L_{-1}] + L_{-1} L_1)) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(-2L_0 + L_{-1} L_1)) \\
&= \lambda(-2L_0) \\
&= -2\lambda(L_0) \\
&= -2h.
\end{aligned}$$

e a matriz $Sh_{\gamma_1}(\lambda)$ é dada por

$$Sh_{\gamma_1}(\lambda) = (-2h).$$

Para $n = 2$, uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)^{\gamma_2}$ é $\{L_{-2} \cdot v_+, L_{-1} L_{-1} \cdot v_+\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
F_\lambda(L_{-2} \cdot v_+, L_{-2} \cdot v_+) &= \lambda(F(L_{-2}, L_{-2})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(\omega(L_{-2})L_{-2})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(L_2 L_{-2})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}([L_2, L_{-2}] + L_{-2} L_2)) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(-4L_0 + \frac{1}{2}c + L_{-2} L_2)) \\
&= \lambda(-4L_0 + \frac{1}{2}c) \\
&= -4h + \frac{1}{2}\bar{c}. \\
F_\lambda(L_{-2} \cdot v_+, L_{-1} L_{-1} \cdot v_+) &= \lambda(F(L_{-2}, L_{-1} L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(\omega(L_{-2})L_{-1} L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(L_2 L_{-1} L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(-3L_1 L_{-1} + L_{-1} L_2 L_{-1})) \\
&= 6h. \\
F_\lambda(L_{-1} L_{-1} \cdot v_+, L_{-2} \cdot v_+) &= F_\lambda(L_{-2} \cdot v_+, L_{-1} L_{-1} \cdot v_+) \\
&= 6h, \text{ pois } F_\lambda \text{ é simétrica.} \\
F_\lambda(L_{-1} L_{-1} \cdot v_+, L_{-1} L_{-1} \cdot v_+) &= \lambda(F(L_{-1} L_{-1}, L_{-1} L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(\omega(L_{-1} L_{-1})L_{-1} L_{-1})) \\
&= \lambda(\mathbf{q}(L_1 L_1 L_{-1} L_{-1})) \\
&= \lambda(-4L_0 + 4L_0^2 + 4L_0^2) \\
&= 8h^2 - 4h.
\end{aligned}$$

e a matriz $Sh_{\gamma_2}(\lambda)$ é dada por

$$Sh_{\gamma_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} -4h + \frac{1}{2}\bar{c} & 6h \\ 6h & 8h^2 - 4h \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Partições e os Monômios de Poincaré-Birkhoff-Witt

Seja $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_+^\alpha$ uma decomposição em espaços de pesos do $\mathfrak{h}$ -módulo $\mathfrak{g}_+$ e, para cada $\alpha \in \Delta_+$, $\beta_\alpha = \{x(\alpha_1), \dots, x(\alpha_r), \dots\}$ uma base de $\mathfrak{g}_+^\alpha$. Daí uma base para $\mathfrak{g}_+$ é dada pela união disjunta $\beta = \bigcup_{\alpha \in \Delta_+} \beta_\alpha$. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto tal que podemos associar a cada elemento $x(\gamma) \in \mathfrak{g}_+^{\Delta(\gamma)}$ de β um elemento $\gamma \in \mathcal{C}$ e vice-versa, isto é, $\mathcal{C}$ é um conjunto parametrizando a base β de $\mathfrak{g}_+$ construída a partir dos espaços de pesos via

$$\mathcal{C} \ni \gamma \leftrightarrow x(\gamma) \in \mathfrak{g}_+.$$

Defina

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C} &\rightarrow \Delta_+ \\ \gamma &\mapsto \Delta(\gamma) \end{aligned}$$

tal que $x(\gamma) \in \mathfrak{g}_+^{\Delta(\gamma)}$, para todo $\gamma \in \mathcal{C}$.

Definição 3.3.25 *Uma partição λ de $\mathcal{C}$ é um multiconjunto² finito com elementos de $\mathcal{C}$ e escrevemos $\mathcal{P}$ para o conjunto das partições de $\mathcal{C}$.*

Definição 3.3.26 *O comprimento $|\lambda|$ de uma partição $\lambda \in \mathcal{P}$ é o número de elementos de λ , contando todas as repetições.*

Fixe alguma ordem na base $\{x(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}\}$ de $\mathfrak{g}_+$. Para qualquer $\lambda \in \mathcal{P}$ seja

$$x(\lambda) = x(\lambda_1) \dots x(\lambda_k) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \quad (3.13)$$

onde $k = |\lambda|$ e $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ é uma enumeração dos elementos de λ tais que (3.13) é um monômio de PBW com respeito à base ordenada.

Para qualquer partição $\lambda \in \mathcal{P}$, escreva $y(\lambda) = \omega(x(\lambda))$. Pelo Teorema PBW, os espaços $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ têm bases $\{x(\lambda) : \lambda \in \mathcal{P}\}$, $\{y(\lambda) : \lambda \in \mathcal{P}\}$, respectivamente. Dada uma partição $\lambda \in \mathcal{P}$ e raízes positivas $\alpha \in \Delta_+$, escreva

$$\Delta(\lambda) = \sum_{\gamma \in \lambda} \Delta(\gamma) \text{ e } \lambda^\alpha = \{\gamma \in \lambda : \Delta(\gamma) = \alpha\}.$$

3.3.4 Lema de Shapovalov

O lema seguinte será utilizado na demonstração do Lema de Shapovalov.

Lema 3.3.27 *Seja $\lambda \in \mathcal{P}$ tal que $|\lambda| = r$ e $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ uma enumeração de λ . Seja $\tau \in S_r$ (grupo das permutações de r elementos). Então*

$$x(\lambda_1) \dots x(\lambda_r) = x(\lambda_{\tau(1)}) \dots x(\lambda_{\tau(r)}) + R$$

onde R é uma combinação linear de termos $x(\phi_1) \dots x(\phi_s)$, onde $\phi_i \in \mathcal{C}$, para $1 \leq i \leq s$ e $s < r$.

²Um multiconjunto é a generalização de um conjunto, de tal forma que permite a repetição de elementos.

Lema 3.3.28 (Lema de Shapovalov) *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$. Suponha $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, com $|\lambda| = r$ e $|\mu| = s$ e que $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ e $(\mu_i)_{1 \leq i \leq s}$ sejam enumerações arbitrárias de λ e μ , respectivamente. Seja*

$$Z = x(\lambda_r) \dots x(\lambda_1) y(\mu_1) \dots y(\mu_s).$$

Então

- (i) *O grau $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z)$ de $\mathbf{q}(Z)$ em relação a monômios formados a partir de elementos de $\mathfrak{h}$ satisfaz $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z) \leq r, s$;*
- (ii) *se $r = s$, mas $|\lambda^\alpha| \neq |\mu^\alpha|$, para algum $\alpha \in \Delta_+$, então $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z) < r = s$;*
- (iii) *se $r = s$ e $|\lambda^\alpha| = |\mu^\alpha| =: m_\alpha$, para todo $\alpha \in \Delta_+$, então o termo de grau $r = s$ de $\mathbf{q}(Z)$ é*

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{\tau \in S_{m_\alpha}} \prod_{1 \leq j \leq m_\alpha} [x(\lambda_{\tau(j)}^\alpha), y(\mu_j^\alpha)],$$

onde, para cada $\alpha \in \Delta_+$, $(\lambda_j^\alpha)_{1 \leq j \leq m_\alpha}$, $(\mu_j^\alpha)_{1 \leq j \leq m_\alpha}$ são quaisquer enumerações fixadas de λ^α e μ^α , respectivamente.

Demonstração:

A prova será feita por indução sobre $|\lambda| + |\mu|$. É fácil notar que os três itens valem para o caso $|\lambda| = 0$ ou $|\mu| = 0$. Suponha que os três itens valem para todos $\lambda', \mu' \in \mathcal{P}$, tais que $|\lambda'| + |\mu'| < |\lambda| + |\mu|$. Sejam $\varsigma \in S_r$, $\tau \in S_s$ e

$$Z' = x(\lambda_{\varsigma(r)}) \dots x(\lambda_{\varsigma(1)}) y(\mu_{\tau(1)}) \dots y(\mu_{\tau(s)}).$$

Pelo Lema 3.3.27, $Z = Z' + R$, onde R é uma combinação linear dos termos

$$x(\phi_{r'}) \dots x(\phi_1) y(\psi_1) \dots y(\psi_{s'}),$$

com $r' < r$ ou $s' < s$. Logo, pelas hipóteses indutivas, o lema vale para enumerações arbitrárias de λ e μ , se ele vale para qualquer par particular de enumerações.

Considere Δ_+ com a ordem parcial usual e escolha quaisquer enumerações de λ, μ tais que

$$\Delta(\lambda_1) \leq \dots \leq \Delta(\lambda_r) \text{ e } \Delta(\mu_1) \leq \dots \leq \Delta(\mu_s).$$

Mais ainda, como

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x(\lambda_r) \dots x(\lambda_1) y(\mu_1) \dots y(\mu_s)) &= \mathbf{q}(\omega(x(\lambda_r) \dots x(\lambda_1) y(\mu_1) \dots y(\mu_s))) \\ &= \mathbf{q}(x(\mu_s) \dots x(\mu_1) y(\lambda_1) \dots y(\lambda_r)). \end{aligned}$$

pode-se supor, sem perda de generalidade, $\Delta(\mu_1) \leq \Delta(\lambda_1)$. Agora

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(Z) &= \mathbf{q}(x(\lambda_r) \dots x(\lambda_1) y(\mu_1) \dots y(\mu_s)) \\ &= \mathbf{q}([x(\lambda_r) \dots x(\lambda_1), y(\mu_1)] y(\mu_2) \dots y(\mu_s)) \\ &= \sum_{i=1}^r \mathbf{q}(A_i), \end{aligned}$$

onde, pela regra de Leibniz

$$A_i = x(\lambda_r) \dots x(\lambda_{i+1})[x(\lambda_i), y(\mu_1)]x(\lambda_{i-1}) \dots x(\lambda_1)y(\mu_2) \dots y(\mu_s),$$

para $1 \leq i \leq r$. Seja $0 \leq k \leq r$ maximal tal que $\Delta(\lambda_i) = \Delta(\mu_1)$ para todo $1 \leq i \leq k$, os termos A_i com $1 \leq i \leq k$ e $k < i \leq r$ serão considerados separadamente. Se $1 \leq i \leq k$ então $[x(\lambda_i), y(\mu_1)] \in \mathfrak{h}$. Daí pela regra de Leibniz,

$$A_i = Z_i[x(\lambda_i), y(\mu_1)] + R_i,$$

onde $Z_i = x(\lambda_r) \dots x(\lambda_{i+1})x(\lambda_{i-1}) \dots x(\lambda_1)y(\mu_2) \dots y(\mu_s)$ e R_i é uma combinação linear de termos

$$x(\phi_{r-1}) \dots x(\phi_1)y(\psi_1) \dots y(\psi_{s-1}), \text{ com } \phi_1, \dots, \phi_{r-1}, \psi_1, \dots, \psi_{s-1} \in \mathcal{C}.$$

Se $k < i \leq r$, então A_i é igual a

$$x(\lambda_r) \dots x(\lambda_{i+1})x(\gamma)x(\lambda_{i-1}) \dots x(\lambda_1)y(\mu_2) \dots y(\mu_s),$$

onde $\Delta(\gamma) = \Delta(\lambda_i) - \Delta(\mu_1) \in \Delta_+$, já que $\Delta(\mu_1) \leq \Delta(\lambda_1) \leq \Delta(\lambda_i)$. Note que $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z) \leq \max\{\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(A_i)\}$.

Considere agora cada um dos três itens do lema:

(i) Para $1 \leq i \leq k$, temos

$$\mathbf{q}(A_i) = \mathbf{q}(Z_i)[x(\lambda_i), y(\mu_1)] + \mathbf{q}(R_i), \quad (3.14)$$

já que $\mathbf{q}|_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0}$ é um homomorfismo de álgebras. Pela parte (i) das hipóteses de indução,

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z_i), \partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(R_i) \leq r-1, s-1,$$

e então $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(A_i) \leq r, s$. Para $k < i \leq r$, de novo pela parte (i) das hipóteses de indução, $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(A_i) \leq r, s-1$. Daí $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z) \leq r, s$, e a parte (i) vale.

(ii) Suponha $r = s$ e seja $\alpha \in \Delta_+$ tal que $|\lambda^\alpha| \neq |\mu^\alpha|$. Para $1 \leq i \leq k$, considere $\mathbf{q}(A_i)$ dado pela equação (3.14). Pela parte (i) das hipóteses de indução,

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(R_i) \leq r-1 < r,$$

e então resta considerar apenas $\mathbf{q}(Z_i)$. Escreva λ' (respectivamente, μ') para a partição consistindo das componentes de λ (respectivamente, μ) exceto para λ_i (respectivamente, μ_1). Então $|\lambda'| = |\mu'|$ e $|\lambda'^\alpha| \neq |\mu'^\alpha|$. Logo, pela parte (ii) das hipóteses de indução, $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z_i) < r-1$ e daí $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(A_i) < r$. Para $k < i \leq r$, a parte (i) das hipóteses de indução implica $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(A_i) \leq s-1 < r$. Portanto, $\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(Z) < r$, como queríamos.

(iii) Suponha $r = s$ e $|\lambda^\alpha| = |\mu^\alpha|$, para todo $\alpha \in \Delta_+$. Observe que, para $k < i \leq r$, a parte (i) das hipóteses de indução implica

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(A_i) \leq s-1 < r$$

e, para $1 \leq i \leq k$,

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathbf{q}(R_i) \leq r - 1 < r.$$

Daí os termos $\mathbf{q}(A_i)$, para $k < i \leq r$ e os termos $\mathbf{q}(R_i)$, para $1 \leq i \leq k$, não podem contribuir para a componente de grau r de $\mathbf{q}(Z)$, daí a componente de grau r de $\mathbf{q}(Z)$ é a componente de grau r de

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{q}(Z_i)[x(\lambda_i), y(\mu_1)].$$

Como Z_i satisfaz as condições da parte (iii) das hipóteses de indução, para $1 \leq i \leq k$, a fórmula segue.

■

Capítulo 4

Teoria de Peso Máximo para Álgebras de Lie Correntes Truncadas

Neste capítulo, desenvolvemos um estudo das representações de peso máximo para **álgebras de Lie correntes truncadas** e o encerramos com um critério de redutibilidade para os módulos Verma. Ao longo do capítulo utilizamos as notações dos capítulos anteriores e, sempre que possível, fazemos referências que especifiquem melhor onde essas notações foram utilizadas. Neste capítulo, todas as álgebras de Lie estão definidas sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0.

4.1 Álgebras de Lie Correntes Truncadas

Consideramos nesta seção $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$ e $\mathcal{C}$ um conjunto parametrizando uma base de $\mathfrak{g}_+$, como na Seção 3.3.3.

Definição 4.1.1 *Fixe um inteiro positivo N e seja*

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \frac{\mathbb{K}[t]}{t^{N+1}\mathbb{K}[t]}.$$

Com o colchete de Lie definido por

$$[x \otimes t^i, y \otimes t^j] = [x, y] \otimes t^{i+j}, \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g} \text{ e } i, j \geq 0,$$

$\widehat{\mathfrak{g}}$ é uma álgebra de Lie denominada **álgebra de Lie corrente truncada** e o inteiro N é o **índice de nilpotência** de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Observação 4.1.2 *Pelo Exemplo 3.2.5, $\widehat{\mathfrak{g}}$ é uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{h}}_0, \widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{g}}_+, \omega)$.*

Exemplo 4.1.3 (Álgebra de Takiff)

Quando o índice de nilpotência de $\widehat{\mathfrak{g}}$ é 1 e $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, a álgebra de Lie corrente truncada

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \frac{\mathbb{K}[t]}{t^2\mathbb{K}[t]}$$

é conhecida como a **álgebra de Takiff** e foi estudada inicialmente por Takiff em [8].

Observação 4.1.4 Quando $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, a álgebra de Lie corrente truncada $\widehat{\mathfrak{g}}$, com índice de nilpotência N , é chamada **álgebra de Lie polinomial** ou ainda **álgebra de Takiff generalizada**.

De forma análoga ao que foi feito na Seção 3.3.3, seja $\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \times \{0, \dots, N\}$, onde $\mathcal{C}$ é um conjunto parametrizando uma base de $\mathfrak{g}_+$ construída a partir de bases de seus espaços de pesos. Daí $\widehat{\mathcal{C}}$ parametriza uma base de $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ consistindo de vetores de pesos de $\mathfrak{h}_0$ de graus homogêneos em t via a correspondência

$$\widehat{\mathcal{C}} \ni \gamma \leftrightarrow x(\gamma) \in \widehat{\mathfrak{g}}_+,$$

onde $x(\gamma) = x(\tau) \otimes t^d$, com $\gamma = (\tau, d) \in \widehat{\mathcal{C}}$. Defina

$$\begin{array}{ccc} \Delta: \widehat{\mathcal{C}} & \rightarrow & \Delta_+ \\ \gamma & \mapsto & \Delta(\gamma) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \partial_t: \widehat{\mathcal{C}} & \rightarrow & \{0, \dots, N\} \\ \gamma & \mapsto & \partial_t(\gamma) \end{array},$$

onde $x(\gamma) \in \mathfrak{g}_+^{\Delta(\gamma)} \otimes t^{\partial_t(\gamma)}$, para todo $\gamma \in \widehat{\mathcal{C}}$.

Ordene a base $\{x(\gamma) : \gamma \in \widehat{\mathcal{C}}\}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ fixando uma ordem parcial pelo crescimento dos graus homogêneos em t , isto é,

$$\partial_t(\gamma) < \partial_t(\gamma') \Rightarrow x(\gamma) < x(\gamma'), \quad \gamma, \gamma' \in \widehat{\mathcal{C}}.$$

Se $\partial_t(\gamma) = \partial_t(\gamma')$ usamos a ordem parcial de $\mathfrak{g}_+$ para ordenarmos $x(\gamma)$ e $x(\gamma')$.

Como na Seção 3.3.3, a base de monômios de PBW de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_+)$ com respeito a esta base ordenada é parametrizada por uma coleção $\mathcal{P}$ de partições. Partições aqui são multiconjuntos (finitos) com elementos de $\widehat{\mathcal{C}}$. Para qualquer $\chi \in Q_+$, seja

$$\mathcal{P}_\chi = \{\lambda \in \mathcal{P} : \Delta(\lambda) = \chi\},$$

onde $\Delta(\lambda) = \sum_{\gamma \in \lambda} \Delta(\gamma)$. Para quaisquer $0 \leq d \leq N$ e $\lambda \in \mathcal{P}$, defina

$$\lambda^d = \{\gamma \in \lambda : \partial_t(\gamma) = d\}.$$

Assim, diremos que λ é **homogêneo de grau d em t** se $\lambda = \lambda^d$. A ordem da base de $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ é tal que, para todo $\lambda \in \mathcal{P}$,

$$x(\lambda) = x(\lambda^0)x(\lambda^1)\dots x(\lambda^N), \quad y(\lambda) = y(\lambda^N)\dots y(\lambda^1)y(\lambda^0), \quad (4.1)$$

onde $x(\lambda^i)$ e $y(\mu^i)$ são iguais aos produtos de todos $x(\gamma)$ e $y(\theta)$, tais que $\gamma \in \lambda^i$ e $\theta \in \mu^i$, respectivamente. Para qualquer $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ e $0 \leq d \leq N$, seja $\Lambda_d \in \mathfrak{h}^*$ dado por

$$\Lambda_d(h) = \Lambda(h \otimes t^d), \quad h \in \mathfrak{h}.$$

4.2 Uma Modificação na Forma de Shapovalov

Como vimos na Seção 3.3, existe uma decomposição

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}}) \oplus \{\widehat{\mathfrak{g}}_-\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) + \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})\widehat{\mathfrak{g}}_+\},$$

como uma soma direta de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})^0$ -módulos bilaterais. Denote por $\mathbf{q} : \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})$ a projeção sobre o primeiro somando. Seja

$$F : \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \times \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})$$

a forma de Shapovalov $F(x, y) = \mathbf{q}(\omega(x)y)$ e escreva F_χ para a restrição de F ao subespaço $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$, para $\chi \in Q_+$.

Considere o subespaço vetorial de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$,

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_m = \left\langle \left\{ (x_1 \otimes t^{d_1}) \dots (x_k \otimes t^{d_k}) : x_i \in \mathfrak{g}, \sum_{i=1}^k d_i = m, k \geq 0 \right\} \right\rangle,$$

assim, $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_m$.

Definição 4.2.1 *Dado qualquer subespaço $V \subset \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$, seja*

$$V_m = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_m \cap V, \quad m \geq 0.$$

*Dizemos que V é **graduado** em t se $V = \bigoplus_{m \geq 0} V_m$.*

Observação 4.2.2 *As subálgebras $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_+)$, $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)$ e $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})$ são graduadas em t .*

Lema 4.2.3 *Para qualquer $m \geq 0$, $\mathbf{q}(\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_m) \subset \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})_m$.*

Demonstração: Os espaços $\widehat{\mathfrak{g}}_-\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ e $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})\widehat{\mathfrak{g}}_+$ são graduados em t , daí a soma

$$\{\widehat{\mathfrak{g}}_-\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) + \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})\widehat{\mathfrak{g}}_+\}$$

também o é. Portanto, para qualquer $m \geq 0$,

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_m = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})_m \oplus \{\widehat{\mathfrak{g}}_-\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) + \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})\widehat{\mathfrak{g}}_+\}_m.$$

■

Exemplo 4.2.4 (Álgebra de Virasoro)

Consideramos as notações utilizadas nos Exemplos 3.1.4 e 3.2.3. Sejam $N = 1$, $\chi = 2\lambda_1$, $\mathcal{C} = \Delta_+$ e $\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \times \{0, 1\}$. A álgebra corrente truncada associada à álgebra de Virasoro $\mathfrak{B}$ será, neste caso, $\widehat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \otimes \frac{\mathbb{K}[t]}{t^2\mathbb{K}[t]}$. Então, $\mathcal{P}_\chi$ consiste das cinco partições

$$\{(\lambda_1, 0), (\lambda_1, 0)\}, \{(2\lambda_1, 0)\}, \{(\lambda_1, 1), (\lambda_1, 0)\}, \{(2\lambda_1, 1)\}, \{(\lambda_1, 1), (\lambda_1, 1)\}. \quad (4.2)$$

Ordene a base

$$\{x(\gamma) : \gamma \in \widehat{\mathcal{C}}\} = \{L_m \otimes t^d : m > 0, d = 0, 1\}$$

de $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ primeiramente pelo crescimento do grau d e depois pelo crescimento do índice m . Então a base de monômios de PBW de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$ correspondentes a (4.2) é, respectivamente,

$$(L_{-1} \otimes t^0)^2, L_{-2} \otimes t^0, (L_{-1} \otimes t^1)(L_{-1} \otimes t^0), L_{-2} \otimes t^1, (L_{-1} \otimes t^1)^2. \quad (4.3)$$

Se $\Omega_{m,i} = \left(-2mL_0 + \frac{m^3 - m}{12}c\right) \otimes t^i$, para $m, i \geq 0$, a matriz de F_χ , com respeito a base ordenada (4.3), será

$$\begin{pmatrix} 2\Omega_{1,0}(\Omega_{1,0} - 1) & -3\Omega_{1,0} & 2\Omega_{1,1}(\Omega_{1,0} - 1) & -3\Omega_{1,1} & (\Omega_{1,1})^2 \\ -3\Omega_{1,0} & \Omega_{2,0} & -3\Omega_{1,1} & \Omega_{2,1} & 0 \\ 2\Omega_{1,1}(\Omega_{1,0} - 1) & -3\Omega_{1,1} & \Omega_{1,1}^2 & 0 & 0 \\ -3\Omega_{1,1} & \Omega_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ (\Omega_{1,1})^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí o determinante de Shapovalov para χ é dado por $\det F_\chi = \Omega_{1,1}^6 \Omega_{2,1}^2$.

Exemplo 4.2.5 (Álgebra de Virasoro)

Sejam $N = 2$, $\chi = 2\lambda_1$, $\mathcal{C} = \Delta_+$ e $\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \times \{0, 1, 2\}$. A álgebra corrente truncada associada à álgebra de Virasoro $\mathfrak{B}$ será, neste caso, $\widehat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \otimes \frac{\mathbb{K}[t]}{t^3\mathbb{K}[t]}$. Então $\mathcal{P}_\chi$ consiste das nove partições

$$\begin{aligned} &\{(\lambda_1, 0), (\lambda_1, 0)\}, \quad \{(2\lambda_1, 0)\}, \quad \{(\lambda_1, 0), (\lambda_1, 1)\}, \\ &\{(2\lambda_1, 1)\}, \quad \{(\lambda_1, 0), (\lambda_1, 2)\}, \quad \{(\lambda_1, 1), (\lambda_1, 1)\}, \\ &\{(2\lambda_1, 2)\}, \quad \{(\lambda_1, 1), (\lambda_1, 2)\}, \quad \{(\lambda_1, 2), (\lambda_1, 2)\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ordene a base $\{x(\gamma) : \gamma \in \widehat{\mathcal{C}}\}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ como no exemplo anterior. Então a base de monômios de PBW de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$ correspondentes a (4.4) é, respectivamente,

$$\begin{aligned} &(L_{-1} \otimes t^0)^2, \quad L_{-2} \otimes t^0, \quad L_{-1} \otimes t^1 \cdot L_{-1} \otimes t^0, \\ &L_{-2} \otimes t^1, \quad L_{-1} \otimes t^2 \cdot L_{-1} \otimes t^0, \quad (L_{-1} \otimes t^1)^2, \\ &L_{-2} \otimes t^2, \quad L_{-1} \otimes t^2 \cdot L_{-1} \otimes t^1, \quad (L_{-1} \otimes t^2)^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{pmatrix}
2\Omega_{1,0}(\Omega_{1,0} - 1) & -3\Omega_{1,0} & 2\Omega_{1,1}(\Omega_{1,0} - 1) & 2\Omega_{1,2}(\Omega_{1,0} + 1) & -3\Omega_{1,1} & 2(\Omega_{1,1}^2 + \Omega_{1,2}) & 2\Omega_{1,1}\Omega_{1,2} & 3\Omega_{1,2} & 2\Omega_{1,2}^2 \\
-3\Omega_{1,0} & \Omega_{2,0} & 3\Omega_{1,1} & -3\Omega_{1,2} & \Omega_{2,1} & 3\Omega_{1,2} & 0 & \Omega_{2,2} & 0 \\
2\Omega_{1,1}(\Omega_{1,0} - 1) & -3\Omega_{1,1} & \Omega_{1,2}(\Omega_{1,0} + 2) + \Omega_{1,1}^2 & \Omega_{1,1}\Omega_{1,2} & 3\Omega_{1,2} & 2\Omega_{1,1}\Omega_{1,2} & \Omega_{1,2}^2 & 0 & 0 \\
2\Omega_{1,1}(\Omega_{1,0} + 1) & 3\Omega_{1,2} & \Omega_{1,1}\Omega_{1,2} & \Omega_{1,2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3\Omega_{1,1} & \Omega_{2,1} & 3\Omega_{1,2} & 0 & \Omega_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2(\Omega_{1,1}^2 + \Omega_{1,2}) & 3\Omega_{1,2} & 2\Omega_{1,1}\Omega_{1,2} & 0 & 0 & 2\Omega_{1,2}^2 & 0 & 0 & 0 \\
2\Omega_{1,1}\Omega_{1,2} & 0 & \Omega_{1,2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3\Omega_{1,2} & \Omega_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\Omega_{1,2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Matriz de F_χ com respeito à base ordenada (4.5), onde $\Omega_{m,i} = \left(-2mL_0 + \frac{m^3 - m}{12}c\right) \otimes t^i$, para $m, i \geq 0$. Note que a matriz tem sete entradas não nulas na diagonal e não há reordenação da base (4.5) que nos dê uma matriz triangular.

Como observado no Exemplo 4.2.5, não é sempre que a matriz de F_χ , $\chi \in Q_+$, pode ser triangular a partir de uma escolha de ordenação para a base de monômios de PBW de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$. Uma permutação completa de colunas é necessária e isto é realizado por uma involução $\star$ nas partições e incluído em uma modificação B da forma de Shapovalov F . Para qualquer $\gamma = (\tau, d) \in \widehat{\mathcal{C}}$, escreva $\gamma^\star = (\tau, N-d) \in \widehat{\mathcal{C}}$ e, para qualquer $\lambda \in \mathcal{P}$, seja

$$\lambda^\star = \{\gamma^\star : \gamma \in \lambda\}.$$

Então $(\lambda^d)^\star = (\lambda^\star)^{N-d}$, para todo $\lambda \in \mathcal{P}$ e todos os graus d . Para qualquer $\chi \in Q_+$, seja

$$B_\chi : \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi} \times \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi} \rightarrow \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})$$

a forma bilinear definida por

$$B_\chi(y(\lambda), y(\mu)) = F_\chi(y(\lambda), y(\mu^\star)) = \mathbf{q}(\omega(y(\lambda))y(\mu^\star)), \quad \lambda, \mu \in \mathcal{P}_\chi.$$

Relativo a qualquer ordem total da base $\{y(\lambda) : \lambda \in \mathcal{P}_\chi\}$ de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$, as matrizes de B_χ e F_χ são iguais depois de uma reordenação das colunas determinada pela involução $\star$. Em particular, os determinantes $\det F_\chi$ e $\det B_\chi$ são iguais a menos de sinal.

4.3 Decomposição da Forma de Shapovalov

Nesta seção consideramos uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$ e seja $\widehat{\mathfrak{g}}$ a álgebra de Lie corrente truncada associada a $\mathfrak{g}$ com decomposição triangular $(\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{h}}_0, \widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{g}}_+, \omega)$ e índice de nilpotência N .

Seja $\mathcal{L}$ a coleção de todas as matrizes cujas entradas são inteiros não negativos e cujas linhas são indexadas por Δ_+ e as colunas por $\{0, \dots, N\}$, com somente um número finito de entradas não nulas. Para qualquer $\chi \in Q_+$, defina

$$\mathcal{L}_\chi = \{L \in \mathcal{L} : \chi = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{0 \leq d \leq N} L_{\alpha, d} \alpha\}.$$

Observe que ao analisarmos uma linha de uma matriz em $\mathcal{L}_\chi$, por exemplo a linha indexada por $\alpha \in \Delta_+$, a soma dos elementos desta linha corresponde ao fator que multiplica α na decomposição de χ . Assim, as entradas de uma matriz em $\mathcal{L}_\chi$ especificam a multiplicidade de cada raiz em cada componente de grau homogêneo de uma partição de χ , isto é, denotando por $\lambda^{\alpha, d} = \{\gamma \in \lambda : \partial_t(\gamma) = d \text{ e } \Delta(\gamma) = \alpha\}$, temos

$$\lambda \in \mathcal{P}_\chi \Leftrightarrow (|\lambda^{\alpha, d}|)_{\alpha \in \Delta_+, 0 \leq d \leq N} \in \mathcal{L}_\chi.$$

Dado $L \in \mathcal{L}$, seja

$$\mathcal{P}_L = \{\lambda \in \mathcal{P} : |\lambda^{\alpha, d}| = L_{\alpha, d}, \text{ para todos } \alpha \in \Delta_+, 0 \leq d \leq N\}.$$

Daí, para qualquer $L \in \mathcal{L}$, se os espaços de pesos de $\mathfrak{g}$ são unidimensionais, $\mathcal{P}_L$ é um conjunto finito não vazio, daí $\mathcal{P}_L$ é único.

O conjunto $\mathcal{L}_\chi$ parametriza uma decomposição em união disjunta do conjunto $\mathcal{P}_\chi$:

$$\mathcal{P}_\chi = \bigcup_{L \in \mathcal{L}_\chi} \mathcal{P}_L. \quad (4.6)$$

Para qualquer $S \subset \mathcal{P}$, defina o conjunto gerado por S sobre $\mathbb{K}$ por

$$\langle S \rangle = \langle \{y(\lambda) : \lambda \in S\} \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Assim, por exemplo, $\langle \mathcal{P} \rangle = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)$ e $\langle \mathcal{P}_\chi \rangle = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$, para qualquer $\chi \in Q_+$. Dado $\chi \in Q_+$, a decomposição (4.6) de $\mathcal{P}_\chi$ define uma decomposição de $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi} = \langle \mathcal{P}_\chi \rangle$:

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi} = \bigoplus_{L \in \mathcal{L}_\chi} \langle \mathcal{P}_L \rangle.$$

A idéia central desta seção é construir uma ordem no conjunto $\mathcal{L}_\chi$ e mostrar que, relativa a esta ordem, qualquer matriz da forma de Shapovalov modificada B_χ de $\widehat{\mathfrak{g}}$ é triangular superior (Teorema 4.3.5).

A fim de estabelecermos uma ordem para o conjunto $\mathcal{L}_\chi$, considere a ordem definida sobre Q_+ na Seção 3.2. Se X é um conjunto com uma ordem total, escreva $X^\dagger$ para o conjunto X com a ordem inversa, isto é, $x \leq y$ em $X^\dagger$ se, e somente se, $y \leq x$ em X . Por exemplo, nesta ordem em $\mathbb{Z}_+^\dagger$ 0 é elemento maximal. Suponha que $(X_i)_{i \geq 1}$ é uma sequência de conjuntos ordenados totalmente e seja

$$X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots$$

denotando o produto cartesiano ordenado. O conjunto X carrega uma ordem $<_X$ definida, para (x_i) e (y_i) em X , por

$$(x_i) <_X (y_i) \Leftrightarrow \exists m \geq 1 \text{ tal que } x_i = y_i, \text{ para todo } 1 \leq i < m, \text{ e } x_m < y_m.$$

Esta ordem sobre X é total e é chamada **ordem lexicográfica**.

Fixe uma enumeração arbitrária do conjunto $\Delta_+ \times \{0, 1, \dots, N\}$ e considere $\mathcal{L}$ como um subconjunto do produto cartesiano ordenado de cópias do conjunto $\mathbb{Z}_+$ indexados por essa enumeração. Denotemos por $\mathcal{L}(\leq)$ o conjunto $\mathcal{L}$ com a ordem lexicográfica associada. Para qualquer $L \in \mathcal{L}$, sejam

$$\Delta(L) = \left(\sum_{\alpha \in \Delta_+} L_{\alpha,0} \alpha, \sum_{\alpha \in \Delta_+} L_{\alpha,1} \alpha, \dots, \sum_{\alpha \in \Delta_+} L_{\alpha,N} \alpha \right) \in (Q_+^\dagger)^{N+1} \text{ e}$$

$$|L| = \left(\sum_{\alpha \in \Delta_+} L_{\alpha,0}, \sum_{\alpha \in \Delta_+} L_{\alpha,1}, \dots, \sum_{\alpha \in \Delta_+} L_{\alpha,N} \right) \in \mathbb{Z}_+^\dagger \times \mathbb{Z}_+^N.$$

Dado qualquer $\chi \in Q_+$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} \theta_\chi : \mathcal{L}_\chi &\rightarrow (Q_+^\dagger)^{N+1} \times (\mathbb{Z}_+^\dagger \times \mathbb{Z}_+^N) \times \mathcal{L}(\leq) \\ L &\mapsto (\Delta(L), |L|, L). \end{aligned}$$

Considere os conjuntos $(Q_+^\dagger)^{N+1}$ e $(\mathbb{Z}_+^\dagger \times \mathbb{Z}_+^N)$ ambos com ordem lexicográfica. Logo o produto cartesiano

$$(Q_+^\dagger)^{N+1} \times (\mathbb{Z}_+^\dagger \times \mathbb{Z}_+^N) \times \mathcal{L}(\leq) \quad (4.7)$$

possui uma ordem lexicográfica e esta ordem é total. Para qualquer $\chi \in Q_+$ considere o conjunto $\mathcal{L}_\chi$ com a ordem total definida pela aplicação injetiva θ_χ e o conjunto totalmente ordenado (4.7).

Lema 4.3.1 *Para quaisquer partições $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$,*

$$x(\lambda)y(\mu) = x(\lambda^0)y(\mu^N)x(\lambda^1)y(\mu^{N-1}) \dots x(\lambda^N)y(\mu^0).$$

Demonstração: Pela escolha da ordem da base $\{x(\gamma) : \gamma \in \widehat{\mathcal{C}}\}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ e como $y(\mu) = \omega(x(\mu))$, por (4.1), temos

$$x(\lambda)y(\mu) = x(\lambda^0) \dots x(\lambda^N)y(\mu^N) \dots y(\mu^0).$$

Como $x(\lambda^j)y(\mu^l) = [x(\lambda^j), y(\mu^l)] + y(\mu^l)x(\lambda^j)$ e $[x(\lambda^i), y(\mu^j)] = 0$, se $i + j > N$, segue o resultado. ■

Proposição 4.3.2 *Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_\chi$, $\chi \in Q_+$ e $\Delta(\lambda^d) = \Delta(\mu^d)$, para todo $0 \leq d \leq k$, para algum $0 \leq k \leq N$. Então*

$$B(y(\lambda), y(\mu)) = \prod_{0 \leq d \leq k} B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) \cdot B(y(\lambda'), y(\mu')),$$

$$\text{onde } \lambda' = \bigcup_{k < d \leq N} \lambda^d \text{ e } \mu' = \bigcup_{k < d \leq N} \mu^d.$$

Demonstração: Pelas hipóteses do enunciado da proposição, temos

$$\begin{aligned} & B(y(\lambda), y(\mu)) \\ &= F_\chi(y(\lambda), y(\mu^*)) \\ &= \mathbf{q}(x(\lambda)y(\mu^*)) \\ &= \mathbf{q}(x(\lambda^0)y((\mu^*)^N)x(\lambda^1)y((\mu^*)^{N-1}) \dots x(\lambda^N)y((\mu^*)^0)) \quad (\text{pelo Lema 4.3.1}). \\ &= \mathbf{q}(x(\lambda^0)y((\mu^0)^*)x(\lambda^1)y((\mu^1)^*) \dots x(\lambda^N)y((\mu^N)^*)) \\ &= \left(\prod_{0 \leq d \leq k} \mathbf{q}(x(\lambda^d)y((\mu^d)^*)) \right) \cdot \mathbf{q}(x(\lambda^{k+1})y((\mu^{k+1})^*) \dots x(\lambda^N)y((\mu^N)^*)) \\ &= \left(\prod_{0 \leq d \leq k} \mathbf{q}(x(\lambda^d)y((\mu^d)^*)) \right) \cdot B(y(\lambda'), y(\mu')) \quad (\text{pelo Lema 4.3.1}) \\ &= \left(\prod_{0 \leq d \leq k} B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) \right) \cdot B(y(\lambda'), y(\mu')). \end{aligned}$$

■

A demonstração do próximo resultado segue da aplicação do Lema de Shapovalov à álgebra de Lie com decomposição triangular $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Lema 4.3.3 *Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ duas partições de grau homogêneo d .*

(i) *Se $d = 0$ e $|\lambda| < |\mu|$ ou se $d > 0$ e $|\lambda| > |\mu|$, então $B(y(\lambda), y(\mu)) = 0$.*

(ii) *Se $|\lambda| = |\mu|$ e $|\lambda^\alpha| \neq |\mu^\alpha|$, para algum $\alpha \in \Delta_+$, então $B(y(\lambda), y(\mu)) = 0$.*

Demonstração: Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ partições de grau homogêneo d . Como

$$x(\lambda)y(\mu^\star) \in \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_{|\lambda|d+|\mu|(N-d)},$$

pelo Lema 4.2.3,

$$B(y(\lambda), y(\mu)) \in \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})_{|\lambda|d+|\mu|(N-d)}. \quad (4.8)$$

Por outro lado,

$$\partial_{\widehat{\mathfrak{h}}} B(y(\lambda), y(\mu)) \leq |\lambda|, |\mu|, \quad (4.9)$$

pelo Lema de Shapovalov. Assim, se $B(y(\lambda), y(\mu)) \neq 0$, então

$$|\lambda|d + |\mu|(N - d) \leq |\lambda|N, \quad (4.10)$$

e

$$|\lambda|d + |\mu|(N - d) \leq |\mu|N. \quad (4.11)$$

já que o grau de $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$ em t é no máximo N . Se $d = 0$, a Inequação (4.10) torna-se $|\mu| \leq |\lambda|$. Daí, se $d = 0$ e $|\lambda| < |\mu|$ então $B(y(\lambda), y(\mu)) = 0$. Se $d > 0$ e $|\lambda| > |\mu|$, a Inequação (4.11) fica $|\lambda| \leq |\mu|$, o que é um absurdo, portanto $B(y(\lambda), y(\mu)) = 0$. Isso prova a parte (i).

Suponha $|\lambda| = |\mu| = r$ e $|\lambda^\alpha| \neq |\mu^\alpha|$, para algum $\alpha \in \Delta_+$. Então, pelo Lema de Shapovalov, a Inequação (4.9) torna-se estrita. Daí, se $B(y(\lambda), y(\mu)) \neq 0$, as Inequações (4.10) e (4.11) também são estritas. Estas nos dão $rN < rN$, que é um absurdo. Portanto, $B(y(\lambda), y(\mu)) = 0$, o que prova a parte (ii). ■

Lema 4.3.4 *Seja $\nu \in Q$ tal que $\nu \notin Q_+$. Então $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})^\nu \subset \widehat{\mathfrak{g}}_- \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$.*

Demonstração: Como $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}}_- \oplus (\widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+)$ temos $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-) \otimes \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+)$ pelo Teorema PBW. O conjunto de todos os pesos do $\mathfrak{h}_0$ -módulo $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+)$ é Q_+ e, assim, para qualquer $\nu \in Q$,

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})^\nu = \sum_{\chi \in Q_+} \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{\nu-\chi} \otimes \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+)^{\chi}. \quad (4.12)$$

Suponha $\nu \in Q$ e $\nu \notin Q_+$ então, em particular, $\nu - \chi \neq 0$, para qualquer $\chi \in Q_+$ e daí

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{\nu-\chi} \subset \widehat{\mathfrak{g}}_- \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}).$$

Portanto, $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})^\nu \subset \widehat{\mathfrak{g}}_- \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$, pela Equação (4.12). ■

Teorema 4.3.5 *Sejam $\chi \in Q_+$, $L, M \in \mathcal{L}_\chi$. Se $L > M$, então*

$$B(y(\lambda), y(\mu)) = 0,$$

para todos $\lambda \in \mathcal{P}_L$ e $\mu \in \mathcal{P}_M$.

Demonstração: Sejam $L, M \in \mathcal{L}_\chi$ e suponha $L > M$. Então um dos seguintes itens valem:

- (a) $\Delta(L) > \Delta(M)$;
- (b) ou $\Delta(L) = \Delta(M)$ e $|L| > |M|$;
- (c) ou $\Delta(L) = \Delta(M)$, $|L| = |M|$ e $L > M$ em $\mathcal{L}(\leq)$.

Sejam $\lambda \in \mathcal{P}_L$ e $\mu \in \mathcal{P}_M$. Suponha $\Delta(L) > \Delta(M)$. Assim, existe $0 \leq l \leq N$ tal que $\Delta(\lambda^d) = \Delta(\mu^d)$, para todo $0 \leq d < l$ e $\Delta(\lambda^l) > \Delta(\mu^l)$ em $Q_+^\dagger$, isto é $\Delta(\lambda^l) < \Delta(\mu^l)$ em Q_+ . Se $l > 0$, então, pela Proposição 4.3.2, com $k = l - 1$, temos

$$B(y(\lambda), y(\mu)) = \theta \cdot B(y(\lambda'), y(\mu')), \quad (4.13)$$

para algum $\theta \in S(\widehat{\mathfrak{h}})$, onde $\lambda' = \bigcup_{l \leq d \leq N} \lambda^d$ e $\mu' = \bigcup_{l \leq d \leq N} \mu^d$. Quando $l = 0$, a Equação (4.13) vale com $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$ e $\theta = 1$. Pelo Lema 4.3.1,

$$B(y(\lambda'), y(\mu')) = \mathbf{q}(x(\lambda^l)y((\mu^*)^{N-l}) \dots x(\lambda^N)y((\mu^*)^0)). \quad (4.14)$$

Como $\Delta((\mu^*)^{N-l}) = \Delta(\mu^l)$, o monômio $x(\lambda^l)y((\mu^*)^{N-l})$ tem peso $\nu = \Delta(\lambda^l) - \Delta(\mu^l)$. E como $\nu \notin Q_+$, já que $\Delta(\lambda^l) < \Delta(\mu^l)$ em Q_+ , temos

$$x(\lambda^l)y((\mu^*)^{N-l}) \in \widehat{\mathfrak{g}}_- \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}),$$

pelo Lema 4.3.4. Daí

$$B(y(\lambda'), y(\mu')) = 0,$$

pela Equação (4.14) e definição da projeção $\mathbf{q}$. Logo $B(y(\lambda), y(\mu)) = 0$, pela Equação (4.13).

Suponha agora $\Delta(L) = \Delta(M)$. Pela Proposição 4.3.2,

$$B(y(\lambda), y(\mu)) = \prod_{0 \leq d \leq N} B(y(\lambda^d), y(\mu^d)).$$

Como $|L|, |M| \in \mathbb{Z}_+^\dagger \times \mathbb{Z}^N$, se $|L| > |M|$ então ou $|\lambda^d| < |\mu^d|$, com $d = 0$, ou $|\lambda^d| > |\mu^d|$, para algum $0 < d \leq N$. Neste caso,

$$B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) = 0,$$

pela parte (i) do Lema 4.3.3 aplicado às partições λ^d, μ^d . Se $|L| = |M|$ e $L > M$ em $\mathcal{L}(\leq)$, então

$$L_{\alpha,d} \neq M_{\alpha,d}, \quad \text{para alguns } \alpha \in \Delta_+, \quad 0 \leq d \leq N,$$

daí $|(\lambda^d)^\alpha| \neq |(\mu^d)^\alpha|$. Logo, pela parte (ii) do Lema 4.3.3, aplicada às partições λ^d, μ^d , $B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) = 0$. Daí $B(y(\lambda), y(\mu)) = 0$. ■

O corolário a seguir encerra esta seção não por acaso, pois se trata do resultado mais importante desta, uma vez que apresenta uma decomposição multiplicativa do determinante da forma de Shapovalov.

Corolário 4.3.6 *Se $\chi \in Q_+$ então*

$$\det B_\chi = \prod_{L \in \mathcal{L}_\chi} \det B_\chi|_{\langle \mathcal{P}_L \rangle}.$$

4.4 Valores da Forma de Shapovalov

Nesta seção, continuamos considerando $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$ e $\widehat{\mathfrak{g}}$ a álgebra de Lie corrente truncada associada a $\mathfrak{g}$ com decomposição triangular $(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}_0, \widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{g}}_+, \omega)$ e índice de nilpotência N . Vimos na Seção 4.3 que o espaço $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$ é decomposto como

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi} = \bigoplus_{L \in \mathcal{L}_\chi} \langle \mathcal{P}_L \rangle$$

e demonstramos que o determinante da forma de Shapovalov modificada B_χ sobre $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_-)^{-\chi}$ é o produto dos determinantes das restrições de B_χ aos espaços $\langle \mathcal{P}_L \rangle$, $L \in \mathcal{L}_\chi$. Nesta seção discutiremos sobre as restrições $B|_{\langle \mathcal{P}_L \rangle}$.

Se $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ e $|\lambda| = |\mu| = n$, defina

$$\mathcal{S}(\lambda, \mu) = \sum_{\tau \in S_n} \prod_{1 \leq i \leq n} [x(\lambda_{\tau(i)}), y(\mu_i)] \in \mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}}),$$

onde (λ_i) e (μ_i) , $1 \leq i \leq n$ são enumerações arbitrárias de λ e μ , respectivamente.

Lema 4.4.1 *Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ e suponha $|\lambda| = |\mu|$. Então*

$$(i) \quad \mathcal{S}(\lambda, \mu) = \mathcal{S}(\mu, \lambda);$$

(ii) *Se λ e μ são partições homogêneas de grau d em t , então*

$$\mathcal{S}(\lambda^*, \mu) = \mathcal{S}(\lambda, \mu^*).$$

Demonstração: Seja $n = |\lambda| = |\mu|$ e escolha enumerações (λ_i) e (μ_i) , $1 \leq i \leq n$ de λ e μ . A anti-involução ω fixa $\mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}})$ ponto a ponto e daí fixa $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{S}(\lambda, \mu)) &= \sum_{\tau \in S_n} \prod_{1 \leq i \leq n} \omega([x(\lambda_{\tau(i)}), y(\mu_i)]) \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \prod_{1 \leq i \leq n} [x(\mu_i), y(\lambda_{\tau(i)})] \\ &= \mathcal{S}(\mu, \lambda), \end{aligned}$$

provando a parte (i). Suponha λ, μ homogêneas de grau d em t . Para cada $1 \leq i \leq n$, sejam $\epsilon_i, \gamma_i \in \mathcal{C}$ tais que

$$\lambda_i = (\epsilon_i, d), \quad \mu_i = (\gamma_i, d).$$

Daí

$$\mathcal{S}(\lambda^*, \mu) = \sum_{\tau \in S_n} \prod_{1 \leq i \leq n} [x(\epsilon_{\tau(i)}) \otimes t^{N-d}, y(\gamma_i) \otimes t^d]. \quad (4.15)$$

Para quaisquer $1 \leq i \leq n$ e $\tau \in S_n$,

$$\begin{aligned} [x(\epsilon_{\tau(i)}) \otimes t^{N-d}, y(\gamma_i) \otimes t^d] &= [x(\epsilon_{\tau(i)}), y(\gamma_i)] \otimes t^N \\ &= [x(\epsilon_{\tau(i)}) \otimes t^d, y(\gamma_i) \otimes t^{N-d}] \end{aligned}$$

e daí $\mathcal{S}(\lambda^*, \mu) = \mathcal{S}(\lambda, \mu^*)$, pela Equação (4.15), provando a parte (ii). ■

Proposição 4.4.2 *Sejam $L \in \mathcal{L}$ e $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_L$. Então*

$$B(y(\lambda), y(\mu)) = \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{S}(\lambda^{\alpha, d}, (\mu^{\alpha, d})^*) \quad (4.16)$$

e $B(y(\lambda), y(\mu)) = B(y(\mu), y(\lambda))$.

Demonstração: Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_L$, $L \in \mathcal{L}$, e $0 \leq d \leq N$. Então

$$|\lambda^{\alpha, d}| = |\mu^{\alpha, d}| = L_{\alpha, d}, \quad \alpha \in \Delta_+.$$

Seja $l = |\lambda^d| = |\mu^d|$. Pelo Lema de Shapovalov, aplicado à álgebra de Lie com decomposição triangular $\widehat{\mathfrak{g}}$, temos

$$\partial_{\widehat{\mathfrak{h}}} B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) \leq l$$

e a componente de grau l de $B(y(\lambda^d), y(\mu^d))$ é dada por

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{S}(\lambda^{\alpha, d}, (\mu^{\alpha, d})^*), \quad (4.17)$$

já que $B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) = \mathbf{q}(x(\lambda^d)y((\mu^d)^*))$. Pelo Lema 4.2.3 e como $ld + l(N-d) = lN$,

$$B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) \in \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}})_{lN}.$$

Como $\partial_t H \leq N$, para qualquer $H \in \widehat{\mathfrak{h}}$,

$$\partial_{\widehat{\mathfrak{h}}} B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) \cdot N \geq lN,$$

daí $\partial_{\widehat{\mathfrak{h}}} B(y(\lambda^d), y(\mu^d)) \geq l$. Portanto, $B(y(\lambda^d), y(\mu^d))$ é homogêneo de grau l em $\widehat{\mathfrak{h}}$ e é igual a expressão dada em (4.17). Pela Proposição 4.3.2, temos

$$B(y(\lambda), y(\mu)) = \prod_{0 \leq d \leq N} B(y(\lambda^d), y(\mu^d))$$

e segue a Equação (4.16) . A simetria de $B|_{\langle \mathcal{P}_L \rangle}$ segue da Equação (4.16) e do Lema 4.4.1.

$$\begin{aligned}
B(y(\lambda), y(\mu)) &= \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{S}(\lambda^{\alpha, d}, (\mu^{\alpha, d})^*) \\
&= \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{S}((\mu^{\alpha, d})^*, \lambda^{\alpha, d}) \\
&= \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{S}(\mu^{\alpha, d}, (\lambda^{\alpha, d})^*) \\
&= B(y(\mu), y(\lambda)).
\end{aligned}$$

■

4.4.1 Álgebras de Lie com Emparelhamento Não Degenerado

Definição 4.4.3 Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$ possui um **emparelhamento não degenerado** se, para todo $\alpha \in \Delta$, existe um elemento não nulo $h(\alpha) \in \mathfrak{h}$ e uma forma bilinear não degenerada

$$(\cdot|\cdot)_\alpha : \mathfrak{g}^\alpha \times \mathfrak{g}^\alpha \rightarrow \mathbb{K},$$

tal que

$$[x_1, \omega(x_2)] = (x_1|x_2)_\alpha h(\alpha), \quad (4.18)$$

para todos $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}^\alpha$.

Observação 4.4.4 Se $\mathfrak{g}$ tem um emparelhamento não degenerado, então, para qualquer $\alpha \in \Delta$, o espaço

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = [\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^\alpha]$$

é unidimensional e daí os elementos $h(\alpha)$ e $h(-\alpha)$ podem diferir apenas por um escalar não nulo.

Exemplo 4.4.5 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular tal que, para qualquer raiz $\alpha \in \Delta$,

$$\dim \mathfrak{g}^\alpha = \dim \mathfrak{g}^{-\alpha} = 1, \text{ e } [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] \neq 0.$$

Assim, para cada $\alpha \in \Delta$, podemos escolher um elemento arbitrário não nulo

$$h(\alpha) \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$$

e definir a forma $(\cdot|\cdot)_\alpha : \mathfrak{g}^\alpha \times \mathfrak{g}^\alpha \rightarrow \mathbb{K}$ pela Equação (4.18).

Exemplo 4.4.6 Seja $\mathfrak{B}$ a álgebra de Virasoro com as notações do Exemplo 3.2.3. Considere $\alpha \in \Delta$ e m um inteiro não nulo tal que $\alpha = m\lambda_1$. Daí

$$\mathfrak{B}^\alpha = \mathbb{K}L_m, \quad \mathfrak{B}^{-\alpha} = \mathbb{K}L_{-m}$$

e $[L_m, L_{-m}] = -2mL_0 + \frac{m^3 - m}{12}c$ é não nulo. Portanto, pelo Exemplo 4.4.5, $\mathfrak{B}$ possui um emparelhamento não degenerado, com

$$h(\alpha) = 2mL_0 + \frac{m^3 - m}{12}c, \quad \alpha = m\lambda_1.$$

Exemplo 4.4.7 A álgebra de Heisenberg estendida $\tilde{\mathfrak{H}}$ do Exemplo 3.2.4 possui um emparelhamento não degenerado. Sejam $\alpha \in \Delta$ e m um inteiro não nulo tal que $\alpha = \delta_m$. Assim,

$$\tilde{\mathfrak{H}}^\alpha = \mathbb{K}a_m, \quad \tilde{\mathfrak{H}}^{-\alpha} = \mathbb{K}a_{-m},$$

e como $[a_m, a_{-m}] = mc$ é não nulo, pelo Exemplo 4.4.5, $\tilde{\mathfrak{H}}$ possui um emparelhamento não degenerado, com

$$h(\alpha) = mc, \quad \alpha = \delta_m.$$

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$ e emparelhamento não degenerado e sua álgebra Lie corrente truncada associada $\hat{\mathfrak{g}}$ com índice de nilpotência N . Formas bilineares não degeneradas são definidas sobre as componentes de graus homogêneos dos espaços de pesos de $\hat{\mathfrak{g}}$ da seguinte maneira. Para todos $\alpha \in \Delta$, $0 \leq d \leq N$ e para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}^\alpha$, defina uma forma bilinear não degenerada $(\cdot | \cdot)_{\alpha, d}$ sobre $\mathfrak{g}^\alpha \otimes t^d$ por

$$(x_1 \otimes t^d | x_2 \otimes t^d)_{\alpha, d} = (x_1 | x_2)_\alpha. \quad (4.19)$$

Para todos $\alpha \in \Delta_+$ e $0 \leq d \leq N$, seja

$$\hat{\mathcal{C}}_{\alpha, d} = \{\gamma \in \hat{\mathcal{C}} : \Delta(\gamma) = \alpha, \partial_t(\gamma) = d\}.$$

Lema 4.4.8 Se $\alpha \in \Delta_+$ e $0 \leq d \leq N$, então

$$[x(\phi), y(\psi^*)] = (x(\phi) | x(\psi))_{\alpha, d} h(\alpha) \otimes t^N,$$

para todos $\phi, \psi \in \hat{\mathcal{C}}_{\alpha, d}$.

Demonstração: Sejam $\phi', \psi' \in \mathcal{C}$ tais que $\phi = (\phi', d)$ e $\psi = (\psi', d)$. Então

$$y(\psi^*) = y(\psi') \otimes t^{N-d} = \omega(x(\psi')) \otimes t^{N-d},$$

e $x(\phi) = x(\phi') \otimes t^d$. Portanto, pela Equação (4.19),

$$\begin{aligned} [x(\phi), y(\psi^*)] &= [x(\phi'), \omega(x(\psi'))] \otimes t^N \\ &= (x(\phi') | x(\psi'))_\alpha h(\alpha) \otimes t^N \\ &= (x(\phi) | x(\psi))_{\alpha, d} h(\alpha) \otimes t^N. \end{aligned}$$

■

Para qualquer $L \in \mathcal{L}$, seja

$$A_L = \bigotimes_{0 \leq d \leq N} \bigotimes_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{S}^{L_{\alpha, d}}(\mathfrak{g}^\alpha \otimes t^d),$$

onde $\mathcal{S}^{L_{\alpha,d}}(\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes t^d)$ é o espaço dos tensores simétricos de grau $L_{\alpha,d}$ em $\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes t^d$, conforme Definição dada na Seção A.0.2 do Apêndice. O espaço vetorial A_L tem uma base parametrizada pelas partições em $\mathcal{P}_L$:

$$\mathcal{P}_L \ni \lambda \leftrightarrow \bar{x}(\lambda) \in A_L,$$

onde, para todo $\lambda \in \mathcal{P}$,

$$\bar{x}(\lambda) = \bigotimes_{0 \leq d \leq N} \bigotimes_{\alpha \in \Delta_+} \prod_{\gamma \in \lambda^{\alpha,d}} x(\gamma).$$

Proposição 4.4.9 *Sejam $\alpha \in \Delta_+$ e $0 \leq d \leq N$. Se $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ são partições com componentes em $\widehat{\mathcal{C}}_{\alpha,d}$ tais que $|\lambda| = |\mu| = k$, então*

$$\mathcal{S}(\lambda, \mu^*) = k!(h(\alpha) \otimes t^N)^k (\bar{x}(\lambda) | \bar{x}(\mu)),$$

onde $(\cdot | \cdot)$ é a forma bilinear sobre $\mathcal{S}^k(\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes t^d)$ definida a partir da forma bilinear definida sobre $\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes t^d$ e a Proposição A.0.11.

Demonstração: A afirmação segue do Lema 4.4.8 e da definição da forma bilinear definida sobre $\mathcal{S}^k(\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes t^d)$. Sejam (λ_i) e (μ_i) , para $1 \leq i \leq k$, quaisquer enumerações de λ e μ , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\lambda, \mu^*) &= \sum_{\tau \in S_k} \prod_{1 \leq i \leq k} [x(\lambda_{\tau(i)}), y(\mu_i^*)] \\ &= \sum_{\tau \in S_k} \prod_{1 \leq i \leq k} (x(\lambda_{\tau(i)}) | x(\mu_i))_{\alpha,d} h(\alpha) \otimes t^N \\ &= k!(h(\alpha) \otimes t^N)^k \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \prod_{1 \leq i \leq k} (x(\lambda_{\tau(i)}) | x(\mu_i))_{\alpha,d} \\ &= k!(h(\alpha) \otimes t^N)^k (\bar{x}(\lambda) | \bar{x}(\mu)). \end{aligned}$$

■

Para qualquer $L \in \mathcal{L}$, os espaços vetoriais $\langle \mathcal{P}_L \rangle$ e A_L são isomorfos estendendo-se linearmente a correspondência

$$y(\lambda) \leftrightarrow \bar{x}(\lambda), \quad \lambda \in \mathcal{P}_L.$$

Seja $(\cdot | \cdot)$ a forma não degenerada sobre A_L definida pela forma (4.19) sobre $\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes t^d$ e pelas Proposições A.0.10 e A.0.11 do Apêndice. Assim,

$$(\bar{x}(\lambda) | \bar{x}(\mu)) = \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (\bar{x}(\lambda^{\alpha,d}) | \bar{x}(\mu^{\alpha,d})), \quad (4.20)$$

para todos $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_L$, onde $(\bar{x}(\lambda^{\alpha,d}) | \bar{x}(\mu^{\alpha,d}))$ é definido pela Proposição A.0.11 do Apêndice. Seja J_L a forma bilinear não degenerada sobre $\langle \mathcal{P}_L \rangle$ dada pela extensão bilinear de

$$J_L(y(\lambda) | y(\mu)) = (\bar{x}(\lambda) | \bar{x}(\mu)), \quad \lambda, \mu \in \mathcal{P}_L.$$

Teorema 4.4.10 Para qualquer $L \in \mathcal{L}$,

$$B|_{\langle \mathcal{P}_L \rangle} = h(L) \cdot J_L,$$

onde $h(L) \in \mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}})$ é dado por

$$h(L) = \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (L_{\alpha, d}!) (h(\alpha) \otimes t^N)^{L_{\alpha, d}}.$$

Demonstração: Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_L$. Para os elementos da base $\{y(\lambda) : \lambda \in \mathcal{P}_L\}$ de $\langle \mathcal{P}_L \rangle$ temos:

$$\begin{aligned} & B(y(\lambda), y(\mu)) \\ &= \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{S}(\lambda^{\alpha, d}, (\mu^{\alpha, d})^*) \quad (\text{pela Proposição 4.4.2}) \\ &= \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (L_{\alpha, d}!) (h(\alpha) \otimes t^N)^{L_{\alpha, d}} (\overline{x}(\lambda^{\alpha, d}) | \overline{x}(\mu^{\alpha, d})) \quad (\text{pela Proposição 4.4.9}) \\ &= \left[\prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (L_{\alpha, d}!) (h(\alpha) \otimes t^N)^{L_{\alpha, d}} \right] \cdot (\overline{x}(\lambda) | \overline{x}(\mu)) \quad (\text{pela Equação (4.20)}) \\ &= h(L) \cdot J_L(y(\lambda) | y(\mu)). \end{aligned}$$

■

4.5 Redutibilidade de Módulos Verma

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \omega)$ e com emparelhamento não degenerado e $\widehat{\mathfrak{g}}$ a álgebra de Lie corrente truncada com decomposição triangular $(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}_0, \widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{g}}_+, \omega)$ e índice de nilpotência N associada à $\mathfrak{g}$. Estabelecemos um critério de redutibilidade para um $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo Verma $M(\Lambda)$ em termos de valores do funcional $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$.

Teorema 4.5.1 Sejam $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ e $\chi \in Q_+$. O $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo Verma $M(\Lambda)$ contém um vetor primitivo não nulo de peso $\Lambda|_{\mathfrak{h}_0} - \chi$ se, e somente se,

$$\Lambda_N(h(\alpha)) = \Lambda(h(\alpha) \otimes t^N) = 0, \quad (4.21)$$

para algum $\alpha \in \Delta_+$ tal que $\chi - \alpha \in Q_+$. Além disso, como $h(\alpha)$ e $h(-\alpha)$ são proporcionais, para qualquer $\alpha \in \Delta$, $M(\Lambda)$ é redutível se, e somente se, a Equação (4.21) vale para algum $\alpha \in \Delta$.

Demonstração: Sejam $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ e $\alpha \in \Delta_+$. Pela Proposição 3.3.22, $N(\Lambda)^{\Lambda|_{\mathfrak{h}_0} - \chi} \neq (0)$ se, e somente se, $F_\chi(\Lambda)$ é degenerada, isto é, $M(\Lambda)$ tem um vetor primitivo não nulo de peso $\Lambda|_{\mathfrak{h}_0} - \chi$ se, e somente se, $F_\chi(\Lambda)$ é degenerada.

Os determinantes $\det F_\chi$ e $\det B_\chi$ podem diferir somente no sinal e

$$\det F_\chi(\Lambda) = \Lambda(\det F_\chi).$$

Daí tal vetor primitivo existe se, e somente se, $\Lambda(\det B_\chi)$ se anula. Agora

$$\begin{aligned}\Lambda(\det B_\chi) &= \Lambda \left(\prod_{L \in \mathcal{L}_\chi} \det B|_{\langle \mathcal{P}_L \rangle} \right) \quad (\text{pelo Corolário 4.3.6}) \\ &= \Lambda \left(\left(\prod_{L \in \mathcal{L}_\chi} \det J_L \right) \cdot h(L)^{|\mathcal{P}_L|} \right) \quad (\text{pelo Teorema 4.4.10}) \\ &= \left(\prod_{L \in \mathcal{L}_\chi} \det J_L \right) \cdot \Lambda(h(L))^{|\mathcal{P}_L|}.\end{aligned}$$

Para qualquer $L \in \mathcal{L}_\chi$, a forma J_L é não degenerada e então $\det J_L$ é um escalar não nulo. Daí $\Lambda(\det B_\chi)$ se anula se, e somente se, $\Lambda(h(L))$ se anula para algum $L \in \mathcal{L}_\chi$. Como

$$h(L) = \prod_{0 \leq d \leq N} \prod_{\alpha \in \Delta} (L_{\alpha,d}!) (h(\alpha) \otimes t^N)^{L_{\alpha,d}},$$

então $\Lambda(\det B_\chi)$ se anula se, e somente se, $\Lambda(h(\alpha) \otimes t^N) = \Lambda_N(h(\alpha))$ é zero, para algum $\alpha \in \Delta_+$ para o qual exista $L \in \mathcal{L}_\chi$ e $0 \leq d \leq N$ com $L_{\alpha,d} > 0$. Esta condição sobre α é equivalente a existência de uma partição $\mu \in \mathcal{P}_\chi$ tal que $|\mu^\alpha| > 0$, que ocorre precisamente quando $\chi - \alpha \in Q_+$. Logo o teorema está provado. ■

Pelo que vimos no decorrer deste trabalho sobre as álgebras de Virasoro e Heisenberg, podemos enunciar dois corolários que nos dão critérios mais precisos sobre a redutibilidade dos módulos Verma das álgebras de Lie correntes truncadas associadas a estas álgebras.

Corolário 4.5.2 *Sejam $\mathfrak{B}$ a álgebra de Virasoro e $\widehat{\mathfrak{B}}$ a álgebra de Lie corrente truncada de índice de nilpotência N associada à $\mathfrak{B}$. Então, para qualquer $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$, um $\widehat{\mathfrak{B}}$ -módulo Verma $M(\Lambda)$ é redutível se, e somente se,*

$$-2m\Lambda_N(L_0) + \frac{m^3 - m}{12}\Lambda_N(c) = 0,$$

para algum inteiro não nulo m .

Demonstração: Pelo Exemplo 4.4.6, $h(\alpha) = 2mL_0 + \frac{m^3 - m}{12}c$, para $\alpha = m\lambda_1$. Assim, pelo Teorema 4.5.1 segue o resultado. ■

Corolário 4.5.3 *Sejam $\widetilde{\mathfrak{H}}$ a álgebra de Heisenberg e $\widehat{(\widetilde{\mathfrak{H}})}$ a álgebra de Lie corrente truncada de índice de nilpotência N associada à $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Então, para qualquer $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$, um $\widehat{(\widetilde{\mathfrak{H}})}$ -módulo Verma $M(\Lambda)$ é redutível se, e somente se, $\Lambda_N(c) = 0$.*

Demonstração: Pelo Exemplo 4.4.7, $h(\alpha) = mc$, para $\alpha = \delta_m$. Assim, pelo Teorema 4.5.1 segue o resultado. ■

COMENTÁRIOS FINAIS

O Teorema 4.5.1 finaliza este trabalho mostrando que atingimos o objetivo proposto no início de nossos estudos, e além disso, ele o finaliza de forma surpreendente, uma vez que dado $\widehat{\mathfrak{g}}$ uma álgebra de Lie corrente truncada de índice de nilpotência N com decomposição triangular $(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}_0, \widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{g}}_+, \omega)$ e um funcional linear $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$, a redutibilidade do módulo Verma $M(\Lambda)$ depende apenas da componente de grau homogêneo N da álgebra.

O mais interessante ainda é que isto independe da álgebra $\mathfrak{g}$ escolhida para construção de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Assim, se decompormos o funcional Λ como $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$, onde cada Λ_i é a restrição de Λ a componente de grau homogêneo i , para sabermos sobre a redutibilidade de $M(\Lambda)$ só precisamos trabalhar com Λ_N . Com isso, o estudo das representações de peso máximo de álgebras de Lie correntes truncadas se torna simples.

Como sequência deste trabalho um problema imediato que surge é o de como seriam as representações de peso para álgebras de Lie correntes truncadas. Nas representações de peso máximo foi fundamental o uso dos objetos universais da teoria, os módulos Verma. Assim, um caminho inicial para o estudo das representações de peso, seria talvez, a procura por objetos universais dentro da teoria.

Apêndice A

Produto Tensorial

Os resultados desta seção podem ser encontrados no Capítulo 2, Seção 1.2 de [1], no Apêndice B de [2] e em [11].

Definição A.0.4 *Sejam A um anel, M um A -módulo à direita, N um A -módulo à esquerda e P um grupo abeliano. Uma **aplicação balanceada** f do produto cartesiano $M \times N$ em P é uma aplicação que satisfaz:*

- (i) $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n);$
- (ii) $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2);$
- (iii) $f(m, an) = f(ma, n);$

para todos $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ e $a \in A$.

Definimos a seguir o produto tensorial entre os módulos M e N via uma propriedade universal.

Definição A.0.5 *Sejam M um A -módulo à direita e N um A -módulo à esquerda. Um par (T, ϕ) , onde T é um grupo abeliano e ϕ é uma aplicação balanceada de $M \times N$ em T , é dito um **produto tensorial** de M e N se valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Os elementos da forma $\phi(m, n)$, para todos $m \in M$ e $n \in N$ geram T (como um grupo aditivo).*
- (ii) *Para qualquer grupo abeliano aditivo P e qualquer aplicação balanceada*

$$f : M \times N \rightarrow P,$$

*existe um homomorfismo $\hat{f} : T \rightarrow P$ tal que $f = \hat{f} \circ \phi$ (neste caso, chamamos $\hat{f}$ **fator** de f por ϕ), isto é, tal que o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & P \\ \phi \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ T & & \end{array}$$

Denotamos o produto tensorial T por $M \otimes_A N$, ou simplesmente $M \otimes N$, quando não for necessário especificar o anel A , e $\phi(m, n) = m \otimes n$, para todo $m \in M$ e todo $n \in N$.

Teorema A.0.6 *Sejam M e N um A -módulo à direita e um A -módulo à esquerda, respectivamente. Então o produto tensorial de M e N existe e é único, a menos de isomorfismo.*

Teorema A.0.7 *Se V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensões m e n , respectivamente, então $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ tem dimensão $m \cdot n$. Se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ e $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ são bases, respectivamente, de V e W , então $\{\alpha_i \otimes \beta_j\}$, com $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, é base de $V \otimes_{\mathbb{K}} W$.*

A.0.1 Propriedades do produto tensorial

(i) Associatividade:

$$(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U) \cong V \otimes W \otimes U.$$

(ii) Comutatividade:

$$V \otimes W \cong W \otimes V.$$

(iii) A aplicação

$$\begin{aligned} \psi : V^* \otimes W &\rightarrow L(V, W) \\ \alpha \otimes w &\mapsto S : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & W \\ u & \mapsto & \alpha(u)w. \end{array} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de $V^* \otimes W$ no espaço das transformações lineares de V em W .

A.0.2 Álgebra Tensorial

Podemos fazer o produto tensorial de uma quantidade finita de A -módulos. Quando os fatores de um produto são todos iguais a V , por exemplo, o produto de s de suas cópias é denotado por $V^{\otimes s}$. Seja V um espaço vetorial e considere a seguinte sequência

$$\begin{aligned} V^{\otimes 0} &= \mathbb{K} \cdot 1 \\ V^{\otimes 1} &= V \\ V^{\otimes 2} &= V \otimes V \\ &\vdots \\ V^{\otimes k} &= \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ vezes}}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Para quaisquer $v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, seja

$$\bigotimes_{i=1}^n v_i = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n,$$

daí

$$V^{\otimes n} = \langle \{ \bigotimes_{i=1}^n v_i : v_i \in V, 1 \leq i \leq n \} \rangle.$$

A soma dos produtos em (A.1) define o espaço

$$\mathcal{T}(V) = \sum_{s \geq 0} V^{\otimes s},$$

que munido do produto tensorial é uma álgebra associativa com unidade gerada por V e chamada **álgebra tensorial de V** . Dado um elemento $x \in \mathcal{T}(V)$ a componente de x em $V^{\otimes 0}$ é chamada **termo constante** de x e a componente de x em $V^{\otimes k}$ é dito o **termo de grau k** de x .

Definição A.0.8 *Um elemento $x \in \mathcal{T}(V)$ é dito **homogêneo** se x está em uma única componente $V^{\otimes k}$, para algum k . Caso contrário, x é dito **não homogêneo**.*

Seja

$$v_1 \dots v_n = \prod_{i=1}^n v_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \bigotimes_{i=1}^n v_{\sigma(i)}$$

o **tensor simétrico** em $v_i \in V$, para $1 \leq i \leq n$, e

$$\mathcal{S}^n(V) = \langle \{ \prod_{i=1}^n v_i : v_i \in V, 1 \leq i \leq n \} \rangle$$

o **espaço dos tensores simétricos** de grau n em V .

Definição A.0.9 *A soma dos espaços dos tensores simétricos de V*

$$\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}^n(V)$$

*é chamada a **álgebra simétrica** de V .*

A.0.3 Produtos Tensoriais e Formas Bilineares

Se U, V são espaços vetoriais e $\phi : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação bilinear, denotamos por

$$\tilde{\phi} : U \otimes V \rightarrow \mathbb{K} \tag{A.2}$$

a única aplicação linear tal que $\tilde{\phi}(u \otimes v) = \phi(u, v)$, para todos $u \in U, v \in V$.

Proposição A.0.10 *Se U e V são espaços vetoriais com formas bilineares, então o espaço vetorial $U \otimes V$ possui uma forma bilinear definida por*

$$(u_1 \otimes v_1 | u_2 \otimes v_2) = (u_1 | u_2)(v_1 | v_2), \tag{A.3}$$

para todos $u_1, u_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in V$. Mais ainda, se as formas sobre U e V são não degeneradas então a forma sobre $U \otimes V$ é não degenerada.

Demonstração: Sejam $\phi : U \times U \rightarrow \mathbb{K}$, $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ as formas bilineares sobre U e V , respectivamente. Defina

$$\begin{aligned} \nu : (U \otimes U) \times (V \otimes V) &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) &\mapsto \tilde{\phi}(u_1 \otimes u_2) \tilde{\psi}(v_1 \otimes v_2) \end{aligned}$$

onde as aplicações $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ são definidas por (A.2). Então ν é bilinear e define, por (A.2), uma aplicação linear

$$\tilde{\nu} : (U \otimes U) \otimes (V \otimes V) \rightarrow \mathbb{K}.$$

Como $(U \otimes U) \otimes (V \otimes V) \cong (U \otimes V) \otimes (U \otimes V)$ a aplicação $\tilde{\nu}$ pode ser considerada como uma forma bilinear

$$(\cdot | \cdot) : (U \otimes V) \times (U \otimes V) \rightarrow \mathbb{K}.$$

Se $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, então

$$\begin{aligned} (u_1 \otimes v_1 | u_2 \otimes v_2) &= \tilde{\nu}(u_1 \otimes u_2 \otimes v_1 \otimes v_2) \\ &= \nu(u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) \\ &= \tilde{\phi}(u_1 \otimes u_2) \tilde{\psi}(v_1 \otimes v_2) \\ &= \phi(u_1, u_2) \psi(v_1, v_2) \end{aligned}$$

é a forma bilinear procurada. O fato de ser não degenerada, caso as formas sobre U e V sejam, segue da definição da forma dada em (A.3). ■

Proposição A.0.11 *Sejam V um espaço vetorial com uma forma bilinear e n um inteiro não negativo. O espaço dos tensores simétricos de grau n em V , $\mathcal{S}^n(V)$, possui uma forma bilinear definida por*

$$\left(\prod_{i=1}^n u_i | \prod_{i=1}^n v_i \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \prod_{i=1}^n (u_i | v_{\tau(i)}),$$

para quaisquer $u_i, v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$. Mais ainda, se a forma sobre V é não degenerada então a forma sobre $\mathcal{S}^n(V)$ também é não degenerada.

Demonstração: Seja $\mathcal{A}(V)$ o ideal bilateral de $\mathcal{T}(V)$ gerado pelos elementos do conjunto

$$\{v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 : v_1, v_2 \in V\}.$$

Assim, $\mathcal{T}(V) = \mathcal{S}(V) \oplus \mathcal{A}(V)$ é uma soma direta. Daí, para qualquer $n \geq 0$,

$$V^{\otimes n} = \mathcal{S}^n(V) \oplus \mathcal{A}^n(V) \tag{A.4}$$

é uma soma direta de espaços vetoriais, onde $\mathcal{A}^n(V)$ denota a componente homogênea de grau n de $\mathcal{A}(V)$. Pela Proposição A.0.10, $V^{\otimes n}$ possui uma forma bilinear definida por

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n u_i | \bigotimes_{i=1}^n v_i \right) = \prod_{i=1}^n (u_i | v_i), \quad \text{para todos } u_i, v_i \in V, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{A.5}$$

Para quaisquer $u_i, v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n (u_i | v_{\sigma(i)})$$

independe da enumeração dos elementos $v_1, \dots, v_n$. Segue que a soma direta (A.4) é ortogonal com respeito a forma bilinear (A.5). A forma é definida sobre $\mathcal{S}^n(V)$ pela restrição da forma sobre $V^{\otimes n}$. Para quaisquer $u_i, v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^n u_i | \prod_{i=1}^n v_i \right) &= \left(\frac{1}{n!} \right)^2 \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \prod_{i=1}^n (u_{\sigma(i)} | v_{\tau(i)}) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \prod_{i=1}^n (u_i | v_{\tau(i)}). \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{S}^n(V)$ possui uma forma bilinear. Se a forma sobre V é não degenerada então, pela Proposição A.0.10, a forma sobre $V^{\otimes n}$ é não degenerada e, como a soma (A.4) é ortogonal, a restrição da forma a $\mathcal{S}^n(V)$ é não degenerada também.

■

Apêndice B

A Álgebra de Witt Sobre os Complexos

A álgebra de Witt $\mathfrak{W}$ sobre o corpo dos complexos é a álgebra de Lie das derivações da álgebra dos polinômios de Laurent $A = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Uma base dessa álgebra é dada pelos vetores

$$L_m := z^{m+1} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

e o colchete de Lie é dado por $[x, y] = xy - yx$, para x e y na álgebra de Witt. Vamos calcular, explicitamente, o colchete entre dois elementos da base:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= z^{m+1} \frac{d}{dz} \left(z^{n+1} \frac{d}{dz} \right) - z^{n+1} \frac{d}{dz} \left(z^{m+1} \frac{d}{dz} \right) \\ &= z^{m+1} (n+1) \frac{d}{dz} \left(z^n \frac{d}{dz} \right) - z^{n+1} (m+1) \frac{d}{dz} \left(z^m \frac{d}{dz} \right) \\ &= (n+1) \frac{d}{dz} \left(z^{m+1+n} \frac{d}{dz} \right) - (m+1) \frac{d}{dz} \left(z^{n+1+m} \frac{d}{dz} \right) \\ &= nz^{m+1+n} \frac{d}{dz} + (-m)z^{n+1+m} \frac{d}{dz} + (1-1)z^{n+1+m} \frac{d}{dz} \\ &= nz^{m+1+n} \frac{d}{dz} + (-m)z^{n+1+m} \frac{d}{dz} \\ &= nL_{m+n} - mL_{m+n} \\ &= (n-m)L_{m+n}. \end{aligned}$$

Dado $m \in \mathbb{Z}$ é possível mostrar que $\langle \{L_{-m}, L_0, L_m\} \rangle \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ou seja, existem infinitas cópias de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ em $\mathfrak{W}$.

Referências Bibliográficas

- [1] CURTIS, Charles W., REINER, Irving, *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience, New York, 1962.
- [2] FULTON, William, HARRIS, Joe, *Representation Theory - A first course*. Graduate Texts in Mathematics **129**. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] HUMPHREYS, James E., *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Third Printing, Revised, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [4] KAC, Victor G., *Infinite-dimensional Lie algebras*. Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [5] MAZORCHUK, Volodymyr e ZHAO, Kaiming *Characterization of simple highest weight modules*. 2011. Disponível em arXiv:1105.1123.
- [6] MOODY, Robert V. e PIANZOLA, Arturo, *Lie algebras with triangular decompositions*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1995.
- [7] SAN MARTIN, Luiz A. B., *Álgebras de Lie*. Editora da UNICAMP, 1999.
- [8] TAKIFF, Steven J., *Rings of invariant polynomials for a class of Lie algebras*. Transactions of the American Mathematical Society **160** (1971) 249-262.
- [9] VERMA, N., *Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras*. Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968) 160-166.
- [10] WILSON, Benjamin J., *Representations of truncated current Lie algebras*. Technical papers (2007) 279-282.
- [11] WILSON, Benjamin J., *Representations of infinite-dimensional Lie algebras*. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, University of Sidney, Austrália, (2007).