

MARINA BATISTELLE

ESTABILIDADE TOPOLÓGICA E FLUXOS SINGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2019

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

B333e Batistelle, Marina, 1993-
2019 Estabilidade topológica e fluxos singulares / Marina
Batistelle. – Viçosa, MG, 2019.
vii, 39 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Bulmer Mejía García.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 38-39.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Topologia -
Estabilidade. 3. Singularidade (Matemática). I. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.39

MARINA BATISTELLE

ESTABILIDADE TOPOLÓGICA E FLUXOS SINGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2019.



Andrés Mauricio Lopez Barragán



Pouya Mehdipour Balagafsheh



Bulmer Mejía García
(Orientador)

*Dedico este trabalho ao meus pais Geraldo e Maria,
com amor e carinho.*

”Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira, você chega lá.”

Ayrton Senna

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pois sem sua graça não conseguiria as vitórias que me foram concedidas.

Sou muito grata aos meus pais Geraldo e Maria que, com humildade, me deram suporte para a vida, através dos exemplos de responsabilidade, dedicação e amor, ajudando a manter-me de pé e com a cabeça erguida a cada obstáculo encontrado. Agradeço também a minha irmã Marília por todo apoio e carinho, ao Gustavo por me ajudar a levantar e ter forças nos momentos de desânimo e desespero, e ao meu afilhado Murilo por me dar amor incondicional recarregando minhas energias quando necessário.

Agradeço aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação, em especial, ao meu orientador, Bulmer, que com seus conhecimentos e experiência, me auxiliou em todo o processo de realização desse trabalho, me dando suporte para que eu o desenvolvesse da melhor forma possível, além da paciência, carinho e amizade.

Aos meus amigos de Viçosa, pela parceria, aprendizados e pelas risadas que tornaram essa minha caminhada mais feliz e agradável.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

BATISTELLE, Marina, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019.
Estabilidade Topológica e Fluxos Singulares. Orientador: Bulmer Mejía García.

Neste trabalho o principal conceito usado é de estabilidade topológica para fluxos. O estudo da estabilidade topológica inicia-se com Walters [11]. Para fixar esse conceito, apresentamos as definições necessárias tais como: variedades topológicas e/ou diferenciáveis, conjuntos limites, índice de um fluxo e Fluxo Smale. O principal objetivo deste trabalho é provar o seguinte Teorema: Sejam φ um fluxo topologicamente estável, X uma componente de cadeia de φ , e γ_1, γ_2 órbitas fechadas hiperbólicas de φ contidas em X . Então γ_1 e γ_2 têm o mesmo índice. Esse resultado foi provado em [11]. Também será apresentado uma breve introdução do Modelo Geométrico do Atrator de Lorenz, com o objetivo de mostrar que esse Modelo Geométrico não é topologicamente estável.

Abstract

BATISTELLE, Marina, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019
Topological Stability and Singular Flows. Adviser: Bulmer Mejía García.

In this work, the main concept used is topological stability for flows. The study of topological stability starts with Walters [11]. To fix this concept, we will present the necessary definitions such as: topological and/or differentiable manifolds, limits sets, index of a flow, and Smale Flow. The main objective of this work is to prove the following Theorem: Suppose φ a topologically stable flow, X a chain recurrent component of φ , and γ_1, γ_2 closed hyperbolic orbits of φ contained in X . Then γ_1 and γ_2 have the same index. This result was proved in [11]. We also present brief introduction of the Geometric Model of the Atractor of Lorenz, with the objective of showing that this Geometrical Model is not topologically stable.

Sumário

Introdução	1
1 Noções Preliminares	3
1.1 Fluxo	3
1.2 Hiperbolicidade de órbitas fechadas e Transversalidade	8
1.3 Conjunto Cadeia recorrente ou Pseudo-Órbitas	14
1.4 Estabilidade Topológica	17
2 Principais Resultados	21
2.1 Fluxos Smale	21
2.2 Prova do Teorema Principal	26
3 Estabilidade do Atrator de Lorenz	30
3.1 Histórico e breve apresentação	30
3.2 Propriedades do Atrator de Lorenz	31
3.3 Modelo Geométrico do Atrator de Lorenz	33
Considerações Finais	37
Referências Bibliográficas	38

Introdução

Ao considerar uma unidade de tempo, segundos, dias, séculos, etc., suponha que num determinado momento observamos a qualidade de um objeto do universo. Como é natural no processo evolutivo, após um tempo, tudo muda. A pergunta natural é: quando o tempo crescer infinitamente, o que acontecerá com a qualidade do objeto observado?

É este tipo de questão que a Teoria dos Sistemas Dinâmicos tenta resolver. Esta teoria tem-se desenvolvido consideravelmente no final do século passado. Inicialmente, graças a importantes trabalhos de diversos matemáticos, como Poincaré, Andronov, Birkhoff, Liapunov, Smale, Peixoto, etc.

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos tem como objetivo principal, estudar o comportamento a longo prazo de um estado imerso num sistema, para o qual existe alguma regra de evolução desses estados. A evolução desses estados podem mostrar desde um comportamento muito simples e portanto previsível, até um comportamento bastante complicado e complexo, onde é impossível fazer algum tipo de previsão da evolução das órbitas de um ponto ou um conjunto a longo prazo.

Os estudos sobre Sistemas Dinâmicos surgiram a partir de questionamentos que as teorias existentes não explicavam de maneira satisfatória. Indagações sobre como se originavam novas formas de comportamentos, envolvendo a continuidade, a descontinuidade, e a variabilidade desses, levaram pesquisadores a buscar novos conceitos e princípios que a partir da década de 80 começaram a preencher uma série de lacunas deixadas pelas teorias anteriores, trazendo assim uma nova luz para o estudo.

O matemático francês Henri Poincaré é considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, tendo introduzido muitos dos aspectos do estudo qualitativo das equações diferenciais que permitiram estudar propriedades assintóticas das soluções (ou da maior parte das soluções) de uma equação diferencial, como estabilidade e periodicidade, sem ser necessário resolver explicitamente a equação diferencial.

O objetivo desse trabalho é introduzir o conceito de fluxos topologicamente estáveis através de uma perspectiva topológica, descrevendo as extensões de alguns dos resultados de difeomorfismos topologicamente estáveis em uma variedade compacta M .

Baseado no trabalho de Hurley [11] provaremos o seguinte teorema,

"Sejam φ um fluxo seja topologicamente estável, X uma componente de cadeia de φ , e γ_1, γ_2 órbitas fechadas hiperbólicas de φ contidas em X . Então γ_1 e γ_2 têm o mesmo índice."

No Capítulo 1 serão introduzidos noções preliminares da Teoria de Fluxos, como conjunto cadeia recorrente (pseudo-órbitas), conjuntos limites, variedades invariantes e hiperbolicidade de órbitas fechadas. Além disso, a definição topológica de fluxos topologicamente estáveis.

No Capítulo 2 serão abordados os Fluxos Smale e provaremos resultados que mostram o comportamento do fluxo topologicamente estável com sua componente de cadeia. Esses resultados facilitam a compreensão da demonstração do teorema principal, já citado acima, que também é encontrada nesse capítulo.

Finalmente, no Capítulo 3 temos o primeiro exemplo conhecido como um atrator estranho, introduzido no trabalho de Edward Lorenz [7] em 1963. Fazemos uma descrição breve desse exemplo do que seria o Modelo Geométrico do Atrator de Lorenz, com o objetivo final de mostrar que esse modelo não é topologicamente estável.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Primeiramente vamos estudar algumas definições e resultados para a compreensão de resultados importantes apresentados posteriormente. As principais referências desse capítulo são [3],[4],[11] e [18], entre outros.

1.1 Fluxo

Começamos apresentando a definição de variedade diferenciável, que é essencial para compreensão dessa parte inicial.

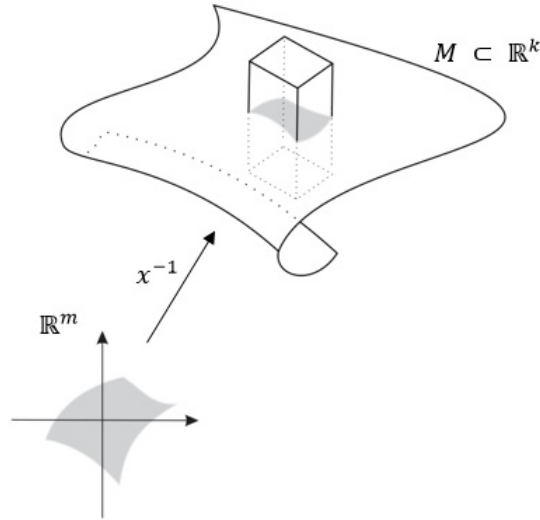
Definição 1.1. Dizemos que $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma **variedade diferenciável** de dimensão m se para cada ponto $p \in M$ existem uma vizinhança $U \subset M$ de p e um homeomorfismo $x : U \rightarrow U_0$, U_0 um aberto de $\mathbb{R}^m$, tais que o homeomorfismo inverso $x^{-1} : U_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ é uma imersão de classe C^∞ . Isto é, para cada $u \in U_0$ a derivada $dx^{-1}(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ é biunívoca.

Dizemos neste caso que (x, U) é uma **carta local** em torno de p e U é uma vizinhança coordenada de p . Se os homeomorfismos x^{-1} acima forem de classe C^r dizemos que M é uma variedade de classe C^r .

Um **atlas** $\mathfrak{A}$ em M é uma coleção $\{x_i : U_i \rightarrow U_i\}_{i \in I}$ de homeomorfismos, chamados de cartas locais de M , onde $U_i \subset M$ e $U_i \subset \mathbb{R}^m$ são abertos e $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. As aplicações

$$x_j \circ x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_j) \subset U_i \rightarrow x_j(U_i \cap U_j) \subset U_j$$

chamadas de mudança de coordenadas são homeomorfismos. Um atlas é de classe C^r se todas as mudanças de coordenadas do atlas são de classe C^r .



Definição 1.2. Uma **subvariedade** S de uma variedade M é um subconjunto $S \subset M$, o qual possui uma estrutura própria de variedade diferenciável, relativamente à qual a aplicação de inclusão $\phi : S \subset M$ é uma imersão.

Definição 1.3. Uma variedade M é dita **compacta** se como espaço topológico é compacto.

Exemplo: Alguns exemplos de variedades compactas são S^1 , S^n e $T^2 = S^1 \times S^1$.

Primeiro vamos mostrar que S^n é uma variedade diferenciável.

Considere os pontos $p_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ o polo norte e $p_s = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ o polo sul da esfera unitária e identifiquemos o $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ como o conjunto dos vetores tais que $x_{n+1} = 0$. Construiremos a seguir um difeomorfismo π_{p_n} entre $S^n \setminus \{p_n\}$ e $\mathbb{R}^n$.

Geometricamente, para cada $x \in S^n \setminus \{p_n\}$, π_{p_n} será o ponto em que a semireta $\overrightarrow{p_n x}$ encontra o hiperplano $x_{n+1} = 0$.

Explicitamente, seja $p_n + t(x - p_n)$ a semireta determinada pelos pontos $x \in S^n \setminus \{p_n\}$ e p_n .

Queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ de modo que

$$1 + t(x_{n+1} - 1) = 0,$$

ou seja,

$$t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$$

logo a aplicação

$$\pi_{p_n} : S^n \setminus \{p_n\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é dada algebricamente por

$$\pi_{p_n}(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Agora, realizando o processo inverso, dado $y \in \mathbb{R}^n$ queremos encontrar o ponto no qual a reta $\overrightarrow{p_n y}$ intercepta a esfera, ou seja, queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|p_n + t(y - p_n)\| = 1,$$

manipulando esta equação algebricamente, temos

$$\begin{aligned} \|(ty_1, \dots, ty_n, 1 - t)\| &= 1 \Rightarrow \\ t &= \frac{2}{1 + \|y\|^2}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\pi_{p_n}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \setminus \{p_n\}$$

que é dada algebricamente por

$$\pi_{p_n}^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

Analogamente construímos $\pi_{p_s} : S^n \setminus \{p_s\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\pi_{p_s}(x) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

com inversa,

$$\pi_{p_s}^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

Observe que $S^n \setminus \{p_n\} \cup S^n \setminus \{p_s\} = S^n$, e deste modo teremos que cada ponto possui uma vizinhança aberta difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$ e, consequentemente, concluímos que a esfera euclidiana é uma variedade diferenciável de dimensão n .

Como S^n é compacta logo é uma variedade compacta. Em particular, para $n = 1$ o resultado é válido, portanto S^1 é uma variedade compacta.

Assim, para mostrarmos que T^2 é uma variedade compacta, basta provarmos que o produto de variedades é uma variedade.

De fato, considere $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^l$ variedades de dimensão m e n , respectivamente.

Observe que $M \times N \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$. Seja $(x, y) \in M \times N$. Dotando o produto cartesiano das variedades com a topologia produto, dados dois abertos $U \subset M$ e $V \subset N$, temos $U \times V$ é um subconjunto aberto de $M \times N$.

Sendo M uma variedade, se $x \in M$ então existe um difeomorfismo $g : U \longrightarrow U_1$, com U vizinhança aberta do ponto x e $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Analogamente, como $y \in N$, existe uma aplicação $h : V \longrightarrow V_1$ que é um difeomorfismo, onde V é uma vizinhança de y e V_1 é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Defina a aplicação

$$f : U \times V \longrightarrow U_1 \times V_1$$

dada por

$$f(x, y) = (g(x), h(y)).$$

Por construção a aplicação f é um difeomorfismo, ficando demonstrado assim que $M \times N$ é uma variedade de dimensão $m + n$.

Portanto $T^2 = S^1 \times S^1$ é uma variedade compacta.

Definição 1.4. Denotaremos por TM a união disjunta de todos os planos tangentes a M , ou seja,

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

esse conjunto é chamado **fibrado tangente** associado à variedade M .

Definição 1.5. Um **campo vetorial** de classe C^r ($r \geq 1$) é uma aplicação $Y : M \longrightarrow TM$ de classe C^r , que a cada ponto $p \in M$, associa um vetor $Y(p) \in T_p M$.

Definição 1.6. Um **fluxo** de classe C^r , $r \geq 0$ sobre M é uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ de classe C^r , tal que :

- (i) $\varphi(0, x) = x, \forall x \in M$.
- (ii) $\varphi(s + t, x) = \varphi(s, (\varphi(t, x))), \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in M$.

Durante o trabalho vamos considerar $\varphi(t, x) = \varphi_t(x), \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in M$.

No que segue consideramos M uma variedade compacta e

$$\mathfrak{X}(M) = \{\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \varphi \text{ é fluxo } C^1\}$$

o conjunto dos fluxos C^1 em M munida da métrica

$$d_0(\varphi, \psi) = \sup \{\|\varphi'_0(x) - \psi'_0(x)\|; x \in M\}.$$

Definição 1.7. Um ponto $p \in M$ é chamado de **ponto fixo** para o fluxo φ se $\varphi_t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se o fluxo é obtido como solução de uma equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, então um ponto fixo é um ponto para o qual $f(p) = 0$. Esse ponto também é chamado de ponto **singular**.

Definição 1.8. A **órbita** de um ponto $p \in M$ com relação ao fluxo φ é o conjunto

$$\mathcal{O}(p) = \{\varphi_t(p) : t \in \mathbb{R}\}.$$

A **órbita positiva** e a **órbita negativa** de $p \in M$ com relação ao fluxo φ são, respectivamente

$$\mathcal{O}^+(p) = \{\varphi_t(p) : t \geq 0\} \text{ e } \mathcal{O}^-(p) = \{\varphi_t(p) : t \leq 0\}.$$

Dizemos que φ é **transitivo** se possui uma órbita densa, isto é, existe $x_0 \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(p)} = \overline{\{\varphi_t(p) : t \in \mathbb{R}\}} = M$.

Definição 1.9. Um ponto $p \in M$ é chamado de **ponto periódico** se existe $T > 0$ tal que $\varphi_T(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para $0 < t < T$. O menor tempo $T > 0$ com essa propriedade é chamado de **período da órbita**.

Exemplo: Seja o campo linear X de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ definido por $X(x, y) = (x, y)$. O fluxo associado ao campo X é $X_t(x, y) = e^t(x, y)$.

Note que X_t satisfaz a definição de fluxo e $X = 0$ é ponto fixo, assim dado qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ a órbita é dada por $\mathcal{O}(x, y) = \{e^t(x, y); t \in \mathbb{R}\}$.

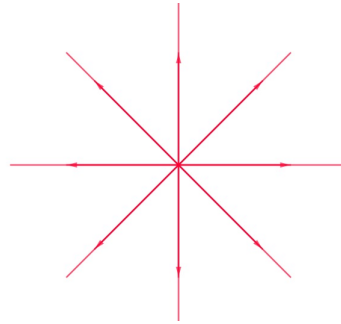


Figura 1.1: Órbita do fluxo gerado pelo campo linear X

Definição 1.10. Sejam φ um fluxo em M e S um subconjunto de M . Dizemos que S é **positivamente invariante** se $\varphi(S) \subset S$, e **negativamente invariante** se $\varphi^{-1}(S) \subset S$. Além disso, é dito **invariante** se $\varphi(S) = S$.

Definição 1.11. Um ponto $y \in M$ é um ponto **ω -limite** de x para φ se existe uma sequência t_k onde $t_k \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\varphi_{t_k}(x), y) = 0$$

O conjunto de todos os pontos ω -limite de x para φ é denotado por

$$\omega(x) = \{y \in M; \exists(t_k), t_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } \varphi_{t_k}(x) \rightarrow y\}.$$

O conjunto **α -limite** de x é definido da mesma forma mas para $t_k \rightarrow -\infty$. O conjunto de tais pontos é denotado por

$$\alpha(x) = \{y \in M; \exists(t_k), t_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } \varphi_{t_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Podemos dizer que o conjunto alfa-limite de um ponto é onde a órbita desse ponto "nasce" e o conjunto omega-limite desse ponto é onde ela "morre".

Exemplo: Considere a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Chamaremos de $p_n = (0, 0, 1)$ o polo norte e $p_s = (0, 0, -1)$ o polo sul de S^2 .

Definimos o campo Y em S^2 por

$$Y(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

Note que Y é de classe C^∞ e as singularidades de Y são p_n e p_s . De fato,

$$\begin{cases} -xz = 0 \\ -yz = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = 0$ então $x = 0$ e $y = 0$. Assim, se $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ logo $z = \pm 1$. Portanto p_n e p_s são as singularidades de Y .

Agora, considere a seguinte parametrização de S^2 dada por

$$\varphi(\theta) = (\cos\theta \sin\beta, \sin\theta \sin\beta, \cos\beta)$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \beta \leq \pi$.

Derivando φ em relação a β temos

$$\frac{d\varphi}{d\beta}(\theta, \beta) = (\cos\theta \cos\beta, \sin\theta \cos\beta, -\sin\beta),$$

e

$$Y(\varphi(\theta, \beta)) = (-\cos\theta \sin\beta \cos\beta, -\sin\theta \sin\beta \cos\beta, \sin^2\beta).$$

$$\text{Logo } Y(\varphi(\theta, \beta)) = -\sin\beta \frac{d\varphi}{d\beta}(\theta, \beta).$$

Portanto, o campo de vetores Y é tangente aos meridianos de S^2 apontando pra cima. Segue que $\omega(p) = p_n$ e $\alpha(p) = p_s$ para todo $p \in S^2 - \{p_n, p_s\}$.

1.2 Hiperbolicidade de órbitas fechadas e Transversalidade

Começaremos definindo os **conjuntos estáveis e instáveis** para um fluxo φ .

Definição 1.12. Dados φ um fluxo em M e x um ponto em M , defina o **conjunto estável** de x , por

$$W^s(x) = \{y \in M; d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \longrightarrow 0 \text{ quando } t \longrightarrow +\infty\},$$

e o **conjunto instável** de x , por

$$W^u(x) = \{y \in M; d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \longrightarrow 0 \text{ quando } t \longrightarrow -\infty\}.$$

Definição 1.13. Dados φ um fluxo em M , um ponto $x \in M$ e $\alpha > 0$, o **conjunto estável α -local** de x , é definido por

$$W_\alpha^s(x) = \{y \in W^s(x); d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \alpha, \forall t \geq 0\},$$

e o **conjunto instável α -local** de x é dado por

$$W_\alpha^u(x) = \{y \in W^u(x); d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \alpha, \forall t \leq 0\}.$$

Quando precisarmos enfatizar a dependência de qualquer um desses conjuntos do fluxo φ , escreveremos como $W^s(x; \varphi)$ no lugar de $W^s(x)$ e $W^u(x; \varphi)$ no lugar de $W^u(x)$.

Apresentaremos uma definição topológica para fluxos hiperbólicos.

Definição 1.14. Um fluxo φ é dito **hiperbólico** se existem constantes positivas $\varepsilon_0, \delta_0, c, r$, tais que:

- (i) $W_{\varepsilon_0}^s(x) = \{y \in M; d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \leq ce^{-rt}d(x, y), \forall t \geq 0\}$ $W_{\varepsilon_0}^u(x) = \{y \in M; d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \leq ce^{rt}d(x, y), \forall t \leq 0\}$.
- (ii) Para quaisquer $(x, y) \in B_{\delta_0} = \{(x, y) \in M \times M; d(x, y) < \delta_0\}$ e uma aplicação contínua $[\cdot, \cdot] : B_{\delta_0} \rightarrow M$, existem um único elemento $[x, y] \in M$ e uma aplicação contínua $\nu : B_{\delta_0} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $W_{\varepsilon_0}^s(\varphi_{\nu(x, y)}(x)) \cap W_{\varepsilon_0}^u(y) = [x, y]$.

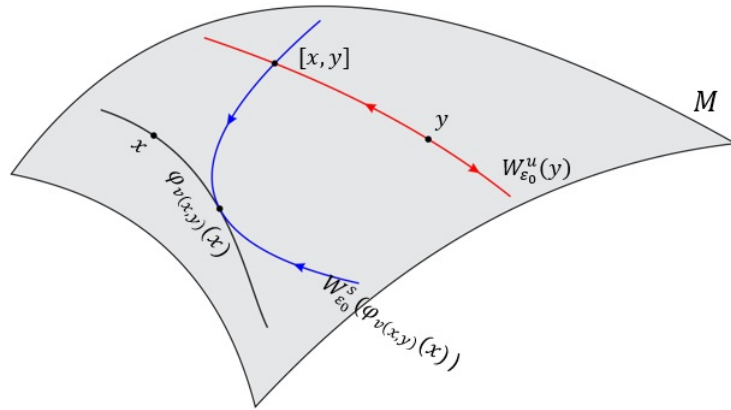


Figura 1.2: Fluxo hiperbólico

Definição 1.15. Se p é um ponto fixo de um fluxo φ , então p é dito **hiperbólico** se a aplicação linear $D\varphi_p : T_p M \rightarrow T_p M$ não possui autovalor com parte real 0.

Um ponto fixo hiperbólico é chamado de **atrator** ou **sumidouro** se a parte real de todos os autovalores de $D\varphi_p$ é negativa. É chamado de **repulsor** ou **fonte** se a parte real de todos os autovalores de $D\varphi_p$ é positiva e é chamado de **sela** se existem dois autovalores, um com a parte real positiva e o outro com a parte real negativa.

Exemplo: Seja $\ddot{x} + x - x^3 = 0$ a equação de segunda ordem.

Primeiro vamos encontrar os pontos fixos do fluxo. Como o fluxo é obtido pela solução da equação $\dot{x} = f(x)$ então encontramos p a partir de $f(p) = 0$ sem precisarmos encontrar o fluxo resolvendo a equação.

Assim, considere $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, logo

$$\dot{x}_2 + x_1 - x_1^3 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = x_1^3 - x_1 \text{ e } \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2.$$

Então, como $\dot{x} = f(x)$ podemos escrever

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_2, x_1^3 - x_1)$$

Fazendo $f(x_1, x_2) = (0, 0)$ temos $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ ou $x_1 = \pm 1$, portanto os pontos fixos do fluxo são $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$.

Logo,

$$Df_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora para verificar quais pontos fixos são hiperbólicos precisamos encontrar os autovalores,

$$\begin{aligned} \det(Df_{(x_1, x_2)} - \lambda I) = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 3x_1^2 - 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 3x_1^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{3x_1^2 - 1}. \end{aligned}$$

Para $(x_1, x_2) = (0, 0)$ temos $\lambda = \pm i$, ou seja $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, portanto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é um ponto fixo não hiperbólico.

Para $(x_1, x_2) = (\pm 1, 0)$ temos $\lambda = \pm \sqrt{2}$, ou seja, existe λ_+ e λ_- tal que $\operatorname{Re}(\lambda_+) > 0$ e $\operatorname{Re}(\lambda_-) < 0$. Portanto $(x_1, x_2) = (\pm 1, 0)$ são pontos fixos hiperbólicos de sela.

Definição 1.16. *Seja φ um fluxo em $\mathfrak{X}(M)$. Um subconjunto compacto, invariante, $\Lambda \subset M$, é dito **hiperbólico**, se existem constantes $k > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ e uma decomposição do fibrado tangente de M sobre Λ tais que:*

- (1) $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$
- (2) $\|D\varphi_t(x) \cdot v\| \leq ke^{-\lambda t}\|v\|$, $\forall v \in E^s$, $\forall t \geq 0$, $\forall s \in \Lambda$
- (3) $\|D\varphi_{-t}(x) \cdot w\| \leq ke^{-\lambda t}\|w\|$, $\forall w \in E^u$, $\forall t \geq 0$, $\forall s \in \Lambda$.

Onde E^s é o **subfibrado estável**, direção de contração pelo fluxo, E^u é o **subfibrado instável**, direção de expansão pelo fluxo e E^X é o subespaço unidimensional gerado pelo campo vetorial tangente ao fluxo.

Definição 1.17. Sejam $P \subset N$ uma subvariedade de classe C^r e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^k onde $k, r \geq 1$. Dizemos que f é **transversal** a P em um ponto $q \in M$ se

$$(df)_q(T_q M) + T_{f(q)}P = T_{f(q)}N$$

sempre que $q \in f^{-1}(P)$.

A equação acima diz que a imagem da derivada da aplicação em q juntamente com o espaço tangente de P em $f(q)$ abrange todo espaço tangente de N em $f(q)$.

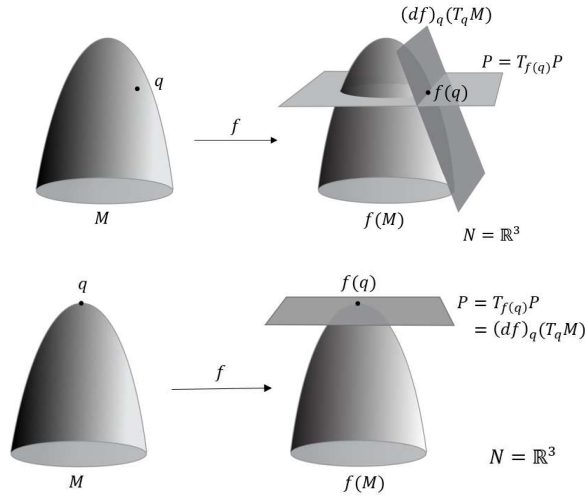


Figura 1.3: Transversal e não transversal

Definição 1.18. Se S e P são subvariedades de M , então dizemos que S é **transversal** a P se

$$T_p(S) + T_p(P) = T_p(M)$$

para todo $p \in S \cap P$.

Exemplo: Considere $M = \mathbb{R}^2$, S subvariedade dada pelo gráfico de $f(x) = x^3 - a$ onde $a \in \mathbb{R}$ e P o eixo x . Note que S é transversal a P se, e somente se, $a \neq 0$.

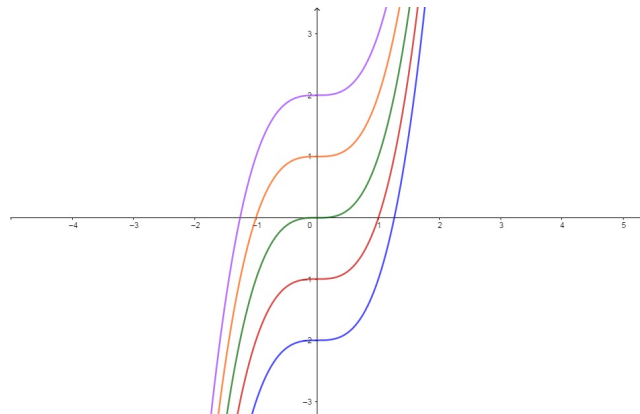


Figura 1.4: $S = \text{graf}(f)$ transversal ao eixo x

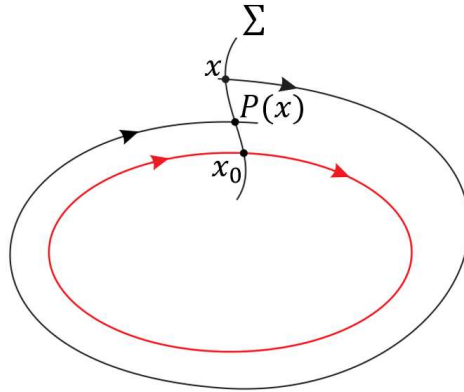
Definição 1.19. Dizemos que um fluxo φ satisfaz a **condição forte de transversalidade** se para todo $x \in M$, $W^s(x)$ e $W^u(x)$ se intersectam transversalmente em x .

Seja γ uma órbita fechada em M para um fluxo $\varphi \in \mathfrak{X}(M)$. Por um ponto $x_0 \in \gamma$ consideremos uma transversal ou seção transversal Σ a M .

A órbita por x_0 volta a interceptar Σ no tempo τ , onde τ é o período de γ . Pela continuidade do fluxo de M , a órbita por um ponto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de x_0 também volta a interceptar Σ em um tempo próximo a τ .

Portanto se $V \subset \Sigma$ é uma vizinhança de x_0 suficientemente pequena, podemos definir a aplicação $P : V \rightarrow \Sigma$ que associa a cada ponto $x \in V$ o ponto $P(x)$, sendo $P(x)$ o primeiro ponto onde a órbita de x volta a interceptar Σ . Esta aplicação é chamada de **Transformação de Poincaré** associada à órbita γ e a seção Σ .

Se $x \in V$ é um ponto fixo de P , então a órbita de x é fechada e seu período é aproximadamente igual ao período de γ se x estiver próximo a x_0 . Da mesma forma, se x for ponto periódico de P de período k então a órbita por x é periódica de período aproximadamente igual a $k\tau$.



Definição 1.20. Sejam $p \in \gamma$, onde γ é uma órbita fechada em M e Σ uma seção transversal a γ pelo ponto p . Dizemos que γ é uma **órbita fechada hiperbólica** de M se p é um ponto fixo hiperbólico da transformação de Poincaré $P : V \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Definição 1.21. Seja γ uma órbita fechada de φ , definimos o **conjunto estável** de γ por

$$W^s(\gamma) = \{y \in M; d(\varphi_t(y), \gamma) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\},$$

e o **conjunto instável** de γ por

$$W^u(\gamma) = \{y \in M; d(\varphi_t(y), \gamma) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}.$$

Observação 1.22. Comparando a definição anterior com a definição dos conjuntos α -limite e ω -limite, note que podemos definir o conjunto estável de γ por

$$W^s(\gamma) = \{y \in M; \omega(y) = \gamma\},$$

e o conjunto instável de γ por

$$W^u(\gamma) = \{y \in M; \alpha(y) = \gamma\}.$$

Definição 1.23. *Seja γ uma órbita fechada hiperbólica. O **índice** de γ é definido pelo par de inteiros (S, U) onde $S = \dim(W^s(\gamma))$ e $U = \dim(W^u(\gamma))$. Se γ é um ponto fixo hiperbólico p , então $S + U = \dim(M)$ e se γ é uma órbita hiperbólica periódica não trivial, então $S + U = \dim(M) + 1$.*

A segunda definição de índice acima é explicada, pelo fato de que de forma geral $\dim(W_\gamma^u) = U + 1$ e a $\dim(W_\gamma^s) = S + 1$ uma vez que γ é uma órbita hiperbólica, então $\dim(W_\gamma^u) + \dim(W_\gamma^s) = U + 1 + S + 1 = \dim M + 1$.

Os teoremas 1.24, 1.25 e 1.26 serão somente citados, uma vez que suas demonstrações são extensas para incluir neste trabalho. Para o leitor interessado, a prova detalhada de cada teorema pode ser encontrada em [16] e [4], respectivamente.

Teorema 1.24. (Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos) *Sejam $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo de classe C^1 , $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e p um ponto fixo hiperbólico de f . Então existem vizinhanças U de p em Δ e W de 0 em $\mathbb{R}^n$, e um homeomorfismo $h : U \rightarrow W$ tal que*

$$h \circ f = Df_p \circ h.$$

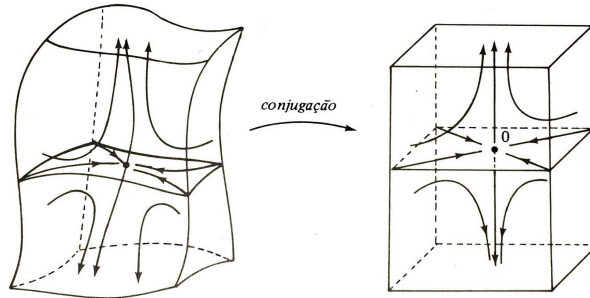


Figura 1.5: Teorema de Hartman-Grobman [19]

Teorema 1.25. (Teorema da Variedade Estável para Singularidades Hiperbólicas) *Seja $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de classe C^k exibindo uma singularidade hiperbólica $p \in U$. Designemos por φ o fluxo de Y . Então o conjunto estável de p*

$$W^s(p) := \{x \in U; \varphi_t(x) \rightarrow p \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

é uma variedade de classe C^k de dimensão igual ao índice de p , e injetivamente imersa em $\mathbb{R}^m$.

Exemplo: Seja $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $X((x_1, x_2)) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, onde

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

Observe que temos uma singularidade que é $(0, 0)$, que é uma singularidade hiperbólica pois

$$DY_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico temos $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, de onde $\lambda = -1$ então a parte real do autovalor de $DY_{(0,0)}$ é diferente de zero. A solução desse sistema é

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}$$

onde, c_1, c_2 são constantes positivas. O fluxo φ associado a Y é a solução do sistema, então quando $t \rightarrow +\infty$ temos

$$\varphi_t(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0).$$

Teorema 1.26. (Teorema da variedade estável para órbitas periódicas hiperbólicas) *Sejam $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de classe C^k e γ uma órbita periódica hiperbólica de φ , então o conjunto estável de γ*

$$W^s(\gamma) := \{y \in U; d(\varphi_t(y), \gamma) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

é uma variedade de classe C^k de dimensão igual ao índice de qualquer transformação de Poincaré π associada a γ mais 1, e injetivamente imersa em $\mathbb{R}^m$.

1.3 Conjunto Cadeia recorrente ou Pseudo-Órbitas

Definição 1.27. *Sejam C e α constantes positivas. Uma sequência $(t_i, x_i) \in \mathbb{R} \times M$ é chamada de (α, C) -cadeia recorrente (pseudo-órbita) para o fluxo φ , se*

- (1) $t_i \geq C$ para cada i , e
- (2) $d(x_{i+1}, \varphi_{t_i}(x_i)) < \alpha$ para cada i .

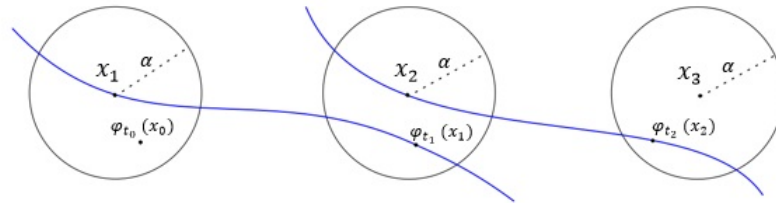
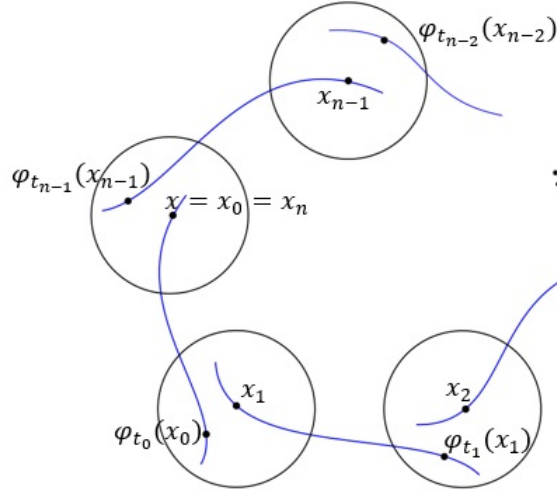


Figura 1.6: (α, C) -cadeia recorrente (pseudo-órbita)

Definição 1.28. *Dizemos que um ponto x em M está no conjunto cadeia recorrente de φ se para qualquer $C > 0$ fixo e cada $\alpha > 0$ existe uma sequência finita $(t_i, x_i), 0 \leq i \leq n (n > 0)$ que satisfaz (1), (2) da definição anterior e (3) $x_0 = x_n = x$.*

Denotamos o conjunto cadeia recorrente por $CR(\varphi)$.

Assim, $x \in CR(\varphi)$ se para algum C e cada $\alpha > 0$ existe uma (α, C) -cadeia recorrente finita que começa e termina em x .



Definição 1.29. Sejam $x, y \in CR(\varphi)$. Dizemos que x está relacionado a y , $x \sim y$, se, e somente se para algum $C > 0$ e cada $\alpha > 0$ existem duas (α, C) -cadeia recorrentes tais que uma começa em x e termina em y , e a outra começa em y e termina em x .

Note que a relação definida acima em $CR(\varphi)$, é naturalmente uma relação de equivalência.

De fato, se $x \in CR(\varphi)$ então para algum C e cada $\alpha > 0$ existe uma (α, C) -cadeia recorrente que começa e termina em x , portanto $x \sim x$.

Se $x \sim y$ então para algum $C > 0$ e cada $\alpha > 0$ existem duas (α, C) -cadeia recorrentes, uma começando em x e terminando em y , e a outra começando em y e terminando em x , portanto $y \sim x$.

E por fim se $x \sim y$ então para algum $C_1 > 0$ e cada $\alpha_1 > 0$ existem duas (α_1, C_1) -cadeia recorrentes, uma iniciando em x e terminando em y , e a outra iniciando em y e terminando em x . Se $y \sim z$ então para algum $C_2 > 0$ e cada $\alpha_2 > 0$ existem duas (α_2, C_2) -cadeia recorrentes, uma iniciando em y e terminando em z e a outra iniciando em z e terminando em y .

Para $C = \max \{C_1, C_2\}$ e $\alpha = \min \{\alpha_1, \alpha_2\}$ considere a (α, C) -cadeia recorrente que começa em x e termina em y , e a (α, C) -cadeia recorrente que começa em y e termina em z . Assim conseguimos duas (α, C) -cadeia recorrentes, uma que começa em x e termina em z e a outra que começa em z e termina em x . Portanto $x \sim z$.

Essa relação de equivalência permite escrever M como a união de conjuntos cadeia recorrentes.

Definição 1.30. As classes de equivalência sob essa relação de equivalência são chamados de **componentes de cadeia** de φ .

Lema 1.31. Um subconjunto X de M é uma componente de cadeia de φ se e somente se X é uma componente conexa de $CR(\varphi)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que X não seja uma componente conexa de $CR(\varphi)$, então considere U e V subconjuntos abertos e disjuntos tais que, $U \cap X \neq \emptyset$, $V \cap X \neq \emptyset$ e $U \cup V = X$. Para um ponto $x \in X$, considere $U(x) = \{t \in \mathbb{R}; \varphi_t(x) \in U\}$ e $V(x) = \{t \in \mathbb{R}; \varphi_t(x) \in V\}$. Como U e V são conjuntos abertos e disjuntos, logo $U(x)$ e $V(x)$ são abertos, disjuntos e $U(x) \cup V(x) = \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é conexo então $U(x) = \emptyset$ ou $V(x) = \emptyset$.

Afirmção 1: Os conjuntos $U \cap X$ e $V \cap X$ são abertos, invariantes e fechados em X . De fato, seja $x \in U \cap X$, como U é aberto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que a bola $B(x, \varepsilon) \subset U$ e como $U \cup V \subset X$ logo $B(x, \varepsilon) \subset X$, assim $B(x, \varepsilon) \subset U \cap X$, portanto $U \cap X$ é aberto. Analogamente para $V \cap X$. Agora, como $x \in U \cap X$, então $\varphi_t(x) \in U$ para $t \in \mathbb{R}$ e como $U \cup V \subset X$ então $\varphi_t(x) \in X$ para $t \in \mathbb{R}$. Assim $\varphi_t(x) \in U \cap X$, então $U \cap X$ é invariante. Da mesma forma para $V \cap X$. Além disso, o complementar desses conjuntos, em X , são abertos em X . Portanto $U \cap X$ e $V \cap X$ são fechados em X .

Como $U \cap V = \emptyset$ então $(U \cap X) \cap (V \cap X) = \emptyset$, assim para $x \in U \cap X$ temos $B(x, \delta) \cap (V \cap X) = \emptyset$ para algum $\delta > 0$. Seja $y \in V \cap X$, então existe uma sequência $\{(t_i, x_i)\}_{i=1}^n$ que é $(\delta, 1)$ -cadeia recorrente que começa em x e termina em y . Como $x = x_1 \in U \cap X$ e $U \cap X$ é invariante logo $\varphi_{t_1}(x_1) \in U \cap X$ e $d(\varphi_{t_1}(x_1), x_2) < \delta$ segue que $x_2 \in U \cap X$. Além disso, $x_3 \in U \cap X$ segue de $\varphi_{t_2}(x_2) \in U \cap X$ e $d(\varphi_{t_2}(x_2), x_3) < \delta$.

Continuando o processo, obtemos $y \in U \cap X$ para $\varphi_{t_n}(x_n) \in U \cap X$ e $d(\varphi_{t_n}(x_n), y) < \delta$. Isso implica que $(U \cap X) \cap (V \cap X) \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Logo X é conexo.

($\Leftarrow$) Seja X uma componente conexa de $CR(\varphi)$ e $x, y \in X$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um δ onde $0 < \delta < \varepsilon/2$ e $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \varepsilon/2$ quando $d(x, y) < \delta$ e $1 \leq t \leq 2$. Considere $\{B(x_i, \delta/2); x \in X\}$ uma cobertura aberta de X . Assim existe finitos pontos $x_i \in X$, $i \in I$ para algum conjunto de índice I , tal que $X \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \delta/2)$. Como X é conexo, para um subconjunto $I' \subset I$, temos

$$\left(\bigcup_{i \in I'} B(x_i, \delta/2) \right) \cap \left(\bigcup_{i \in I - I'} B(x_i, \delta/2) \right) \neq \emptyset.$$

Assim temos uma sequência finita $\{x_i\}_{i=1}^n$ em X tal que

- (i) $x_n = x_1$;
- (ii) $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ para $i = 1, \dots, n-1$;
- (iii) $X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta/2)$.

Daí para $i = 1, \dots, n$ temos uma $(\delta, 1)$ -cadeia recorrente $C_i = \{(t_{ij}, x_{ij})\}_{j=1}^{m_i}$ de x_i a x_i . Agora, podemos supor que $t_{ij} \leq 2$ para todo i, j . Seja $d(x_i, x) < \delta/2$ e $d(x_k, y) < \delta/2$. Então, para $i = k$, obtemos uma $(\varepsilon, 1)$ -cadeia recorrente de x a y :

$$(t_{i_1}, x), (t_{i_2}, x_{i_2}), \dots, (t_{i_{m_i}}, x_{i_{m_i}})$$

e uma $(\varepsilon, 1)$ -cadeia recorrente de y a x :

$$(t_{i_1}, y), (t_{i_2}, x_{i_2}), \dots, (t_{i_{m_i}}, x_{i_{m_i}}).$$

Para $i < k$, obtemos uma $(\varepsilon, 1)$ -cadeia recorrente de x a y :

$$(t_{i_1}, x), (t_{i_2}, x_{i_2}), \dots, (t_{i_{m_i}}, x_{i_{m_i}}), C_{i+1}, \dots, C_k$$

e uma $(\varepsilon, 1)$ -cadeia recorrente de y a x :

$$(t_{k_1}, y), (t_{k_2}, x_{k_2}), \dots, (t_{k_{m_k}}, x_{k_{m_k}}), C_{k+1}, \dots, C_n, C_1, \dots, C_i.$$

Isso implica que $x \sim y$. □

1.4 Estabilidade Topológica

Definição 1.32. Dados φ e ψ em $\mathfrak{X}(M)$. Dizemos que o fluxo ψ é **semiconjugado** ao fluxo φ se existem uma sobrejeção contínua $h : M \rightarrow M$ e uma aplicação contínua $\tau : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

- (i) para todo $x \in M$, $\tau(0, x) = x$ e $\tau(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo;
- (ii) para todo $x \in M$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, $h(\psi_t(x)) = \varphi_{\tau(t, x)}(h(x))$.

O par (h, τ) é dito **semiconjugação** de ψ para φ . Dizemos que o fluxo ψ é **conjugado** ao fluxo φ se $h : M \rightarrow M$ é um homeomorfismo e $\tau : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (i) e (ii).

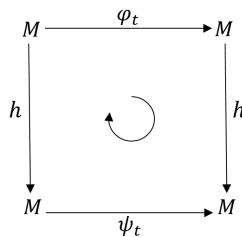


Figura 1.7: Semiconjugação/Conjugação

A noção de semiconjugação vale para

$$\text{Diff}(M) = \{f : M \longrightarrow M; f \text{ difeomorfismo de classe } C^r, r > 0\},$$

bem como a de conjugação, ressaltando que para difeomorfismo não precisamos da aplicação τ .

Exemplo: Considere as funções $g(y) = ay^2 - 1$ para $a \neq 0$ e $f(y) = \mu y(1 - y)$ para $\mu > 0$. Queremos encontrar uma sobrejeção contínua h tal que g seja semiconjugado a f .

Vamos encontrar h da forma $h(y) = my + b$, com m e b a determinar. Como queremos que g seja semiconjugado a f , temos

$$h(f(y)) = g(h(y)).$$

Resolvendo essa composta obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -m\mu = am^2 \\ m\mu = 2mab \\ b = ab^2 - 1 \end{cases}$$

Como $m \neq 0$ temos a solução

$$\begin{cases} m = -\frac{a}{\mu} \\ b = \frac{\mu}{2a} \\ b = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a} \end{cases}$$

Igualando os valores encontrados para b obtemos a condição $4a = \mu^2 - 2\mu$. Portanto $h(y) = -\frac{\mu}{a}y + \frac{\mu}{2a}$.

Fazendo a composta $h(f(y)) = g(h(y))$ concluímos o que queríamos mostrar.

Exemplo: Considere os campos lineares X e Y em $\mathbb{R}^2$ definidos por $X(x, y) = (x, y)$ e $Y(x, y) = (x+y, -x+y)$. Os fluxos correspondente são $\varphi_t(x, y) = e^t(x, y)$ e $\psi_t(x, y) = e^t(x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t)$.

Vamos construir um homeomorfismo h de $\mathbb{R}^2$ conjugando φ_t e ψ_t . Como 0 é a única singularidade de X e Y , devemos ter $h(0) = 0$. É fácil ver que o círculo unitário S^1 é transversal a X e a Y . Além disso, todas as trajetórias de X e Y distintas de 0 interseitam S^1 . Definimos $h(p) = p$ para $p \in S^1$. Se $q \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_t(q) = p \in S^1$. Colocamos $h(q) = \psi_{-t}(p) = \psi_{-t}(\varphi_t(q))$. A continuidade de h e de sua inversa na origem pode ser verificada utilizando-se os fluxos de X e Y .

Definição 1.33. Um fluxo φ é **topologicamente estável** se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança U de φ em $\mathfrak{X}(M)$ tal que:

- (i) para cada ψ em U existe uma semiconjugação (h, τ) de ψ para φ ;
- (ii) $d(h, id) = \sup\{d(h(x), x); x \in M\} < \varepsilon$.

Definição 1.34. Um fluxo φ é **estruturalmente estável** se existe uma vizinhança U de φ em $\mathfrak{X}(M)$ tal que para todo fluxo $\psi \in U$, ψ é conjugado ao fluxo φ .

Proposição 1.35. Seja φ um fluxo definido em uma variedade compacta M . Para cada $x \in M$, $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são não vazios, fechados, invariantes e cadeia recorrente.

Demonstração. Demonstraremos para ω -limite, pois a demonstração para α -limite é análoga. Considere $x \in M$.

Primeiramente mostraremos que $\omega(x)$ é não vazio. Seja $x \in M$, como M é compacto, definimos $(\varphi_{t_k}(x))$ uma sequência em M . Pela compacidade, tomando a subsequência se necessário $\varphi_{t_k}(x) \rightarrow y \in M$. Logo $y \in \omega(x)$, portanto $\omega(x)$ é não vazio.

Agora, queremos mostrar que $\omega(x)$ é fechado.

Seja $y \in \overline{\omega(x)}$, então para uma sequência (x_k) em $\omega(x)$, dado $\varepsilon > 0$, temos $d(x_k, y) < \varepsilon/2$. Além disso, pela definição de ω -limite, existe uma sequência $t_i \rightarrow +\infty$ tal que $d(\varphi_{t_i}(x), x_k) < \varepsilon/2$. Daí,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{t_i}(x), y) &\leq d(\varphi_{t_i}(x), x_k) + d(x_k, y) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso implica que $y \in \omega(x)$ e portanto $\omega(x)$ é fechado.

Para mostrarmos que $\omega(x)$ é invariante, considere $z \in \omega(x)$ então existe uma sequência $t_k \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi_{t_k}(x) \rightarrow z$. Como φ é homeomorfismo, para um $j \in \mathbb{N}$ fixado, temos $\varphi_{t_k+j}(x) \rightarrow \varphi_j(z)$. Logo $\varphi_j(y) \in \omega(x)$, assim $\varphi(\omega(x)) \subset \omega(x)$. E pelo fato de φ ser um homeomorfismo, concluímos também que $\varphi^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Portanto $\omega(x)$ é invariante.

Para concluirmos a prova, resta mostrar que $\omega(x)$ é cadeia recorrente. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que

$$\omega(x) = \{y \in M; \exists(t_k), t_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } d(\varphi_{t_k}(x), y) < \varepsilon/2\}.$$

Como $t_k \rightarrow +\infty$, existe $C > 0$ tal que $t_k \geq C$.

Considere a sequência $(t_k, x_k) = (t_k, \varphi_{t_k}(x)) \in \mathbb{R} \times M$ tal que $t_k \geq C$ e

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, \varphi_{t_k}(x_k)) &= d(\varphi_{t_{k+1}}(x), \varphi_{t_k}(\varphi_{t_k}(x))) \\ &\leq d(\varphi_{t_{k+1}}(x), y) + d(y, \varphi_{2t_k}(x)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\omega(x)$ é uma (ε, C) -cadeia recorrente.

□

Lema 1.36. *Sejam φ um fluxo topologicamente estável e X uma componente de cadeia de φ , então*

- (a) $X = \overline{\{y \in X; y \text{ está em uma órbita fechada de } \varphi\}}$
- (b) *existe um ponto $x \in X$ tais que os conjuntos α -limite de x e ω -limite de x são densos em X .*

Demonstração. (a) Como o fluxo φ é topologicamente estável, para cada fluxo ψ na vizinhança de φ existe uma semiconjugação (h, τ) tal que $h(\psi_t(x)) = \varphi_{\tau(t,x)}(h(x))$ para todo $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, ou seja, as órbitas fechadas do fluxo ψ são levadas nas órbitas fechadas de φ por (h, τ) .

Seja $z \in \overline{\{y \in X; y \text{ está em uma órbita fechada de } \varphi\}}$ então existe uma sequência (y_n) em $\{y \in X; y \text{ está em uma órbita fechada de } \varphi\}$ tal que $d(y_n, z) < \varepsilon/2$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Daí $(y_n) \in X$. Então para a sequência $(t_n, y_n) \in \mathbb{R} \times M$, dado $C > 0$ temos uma (ε, C) -cadeia recorrente tal que para $t_n \geq C$ tem-se $d(\varphi_{t_n}(y_n), y_{n+1}) < \varepsilon/2$.

Assim, $d(\varphi_{t_n}(y_n), z) \leq d(\varphi_{t_n}(y_n), y_{n+1}) + d(y_{n+1}, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. E isso nos diz que $z \in X$. Portanto $\{y \in X; y \text{ está em uma órbita fechada de } \varphi\} \subset X$.

Agora, considere $z \in X$, como X é uma componente de cadeia, tomemos a sequência $(t_i, x_i) \in \mathbb{R} \times M$, $0 < n < i$, e $x_n = z$ assim temos uma (ε, C) -cadeia recorrente tal que $t_i \geq C$ e $d(\varphi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$. Em particular para $i = n - 1$ temos $d(\varphi_{t_{n-1}}(x_{n-1}), z) < \varepsilon$.

Como X é componente de cadeia e (t_i, x_i) forma uma órbita fechada, então $z \in \overline{\{y \in X; y \text{ está em uma órbita fechada de } \varphi\}}$.

Portanto $X \subset \overline{\{y \in X; y \text{ está em uma órbita fechada de } \varphi\}}$.

(b) Mostraremos para ω -limite, pois é análogo a demonstração para α -limite. Seja $z \in X$, como X é uma componente de cadeia então existe uma (ε, C) -cadeia recorrente que começa e termina em z , ou seja, $z = x_1, x_2, \dots, x_n = z$ em X , então dada a sequência $(t_i, x_i) \in \mathbb{R} \times M$ temos $t_i \geq C$ e $d(\varphi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$. Em particular, para $i = n - 1$ temos $d(\varphi_{t_{n-1}}(x_{n-1}), x_n) = d(\varphi_{t_{n-1}}(x_{n-1}), z) < \varepsilon$. Defina $y_n = \varphi_{t_n}(x_1)$ uma sequência em $\omega(x_1)$, logo $\varphi_{t_n}(x_1) \rightarrow z$. Pela definição de ω -limite temos $z \in \omega(x_1)$. Portanto $\omega(x_1)$ é denso em X . $\square$

Capítulo 2

Principais Resultados

Nesse capítulo, o principal objetivo é demonstrar o seguinte teorema:

Sejam φ um fluxo topologicamente estável, X uma componente de cadeia de φ , e γ_1, γ_2 órbitas fechadas hiperbólicas de φ contidas em X . Então γ_1 e γ_2 têm o mesmo índice.

Para a prova deste teorema provaremos alguns resultados de fluxos topologicamente estáveis e daremos algumas definições adicionais. As principais referências desse capítulo são [5],[9],[10],[11] e [16].

2.1 Fluxos Smale

Definição 2.1. Para um fluxo φ em $\mathfrak{X}(M)$, um ponto p é chamado de **não errante** se para cada vizinhança U de p existe um tempo $t > 0$ tal que $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotaremos por $\Omega(\varphi)$ ou Ω o conjunto dos pontos não errantes de φ .

Definição 2.2. Um fluxo φ é dito **Axioma A** se

- (i) o conjunto das órbitas periódicas de φ são densos em $\Omega(\varphi)$;
- (ii) $\Omega(\varphi)$ é hiperbólico.

Exemplo: Os fluxos Anosov são Axioma A, onde $\Omega(\varphi) = M$. [1] De fato, um fluxo C^1 em uma variedade M é Anosov se M é um conjunto hiperbólico. Seja φ um fluxo Anosov, como M é um conjunto hiperbólico então $\Omega(\varphi) \subset M$. Seja $x \in M$ tal que sua órbita, $\mathcal{O}(x)$, é densa em M . Logo

$$\overline{\mathcal{O}(x)} = M \text{ e } \mathcal{O}(x) \subset \Omega(\varphi).$$

Assim,

$$M = \overline{\mathcal{O}(x)} \subset \overline{\Omega(\varphi)} = \Omega(\varphi),$$

ou seja,

$$M \subset \Omega(\varphi).$$

Definição 2.3. Dado um conjunto compacto e invariante Λ , dizemos que Λ é um **conjunto atrativo** quando existe um aberto $U \supset \Lambda$, tal que $\varphi_t(U) \subset U$ para todo $t \geq 0$ e

$$\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U) = \Lambda.$$

O aberto U é chamado de *bloco isolante*.

Definição 2.4. Seja $\varphi \in \mathfrak{X}(M)$. Um subconjunto Λ de $\Omega(\varphi)$ é chamado de **atrator** se

- (i) Λ é invariante;
- (ii) existe um vizinhança U de Λ em M tal que $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U) = \Lambda$;
- (iii) Existe um órbita densa em Λ .

Exemplo:

Considere a seguinte aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (x - x^3, -y).$$

Note que F possui três singularidades. De fato, fazendo $F(x, y) = (x - x^3, -y) = (0, 0)$ e resolvendo o sistema temos que as singularidades são $(0, 0)$ e $(\pm 1, 0)$. Então podemos escolher um aberto U suficientemente grande de tal forma que contenha as três singularidades, U será o bloco isolante de Λ , como mostra a figura a seguir, definido por

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U) = \{(x, 0); |x| \geq 1\}.$$

onde ϕ é o fluxo de F . Observe que o conjunto atrativo Λ não é um atrator, uma vez que $\phi|_{\mathbb{R} \times \Lambda}$ não é transitivo.

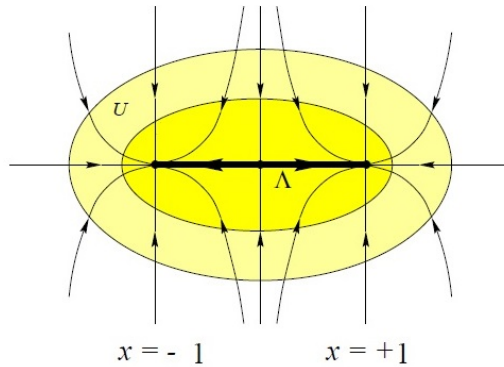


Figura 2.1: Conjunto Atrativo que não Atrator[14]

Uma importante classe de fluxos são os fluxos Smale.

Definição 2.5. Um fluxo φ é um **fluxo Smale** se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $CR(\varphi)$ tem uma estrutura hiperbólica;
- (ii) cada componente de cadeia de φ é unidimensional ou é um único ponto;
- (iii) φ satisfaz a condição forte de transversalidade.

As seguintes propriedades enunciadas aqui como Lemas são conhecidas da restrição de um fluxo Smale para qualquer uma das suas componentes da cadeia. [9]

Lema 2.6. Seja φ um fluxo Smale, se para $\alpha > 0$ existe um $\beta > 0$ tais que $d(x, y) < \beta$ para $x, y \in CR(\varphi)$, então

- (i) existe uma constante $\nu(x, y)$ com $|\nu(x, y)| \leq \alpha$;
- (ii) $W_\alpha^s(\varphi_{\nu(x, y)}(x)) \cap W_\alpha^u(y) = [x, y]$.

Demonstração. Como φ é um fluxo Smale então $CR(\varphi)$ tem estrutura hiperbólica, ou seja, existem constantes positivas $\varepsilon_0, \delta_0, c, r$ que satisfazem os itens (i) e (ii) da definição 1.14. Como $[x, x] = x$ então $\nu(x, x) = 0$.

Seja $\alpha < \alpha_0$, pela continuidade uniforme, existe $0 < \beta < \beta_0$ tal que se $d(x, y) < \beta$, então $d([x, x], [x, y]) = d(x, [x, y]) \leq \alpha/2c$ e $d([y, [x, y]]) \leq \alpha/2c$, além disso $|\nu(x, y) - \nu(x, x)| = |\nu(x, y)| \leq \alpha$. Assim, tomando $d(\varphi_{\nu(x, y)}(x), \varphi_{\nu(x, x)}(x)) \leq \alpha/2c$, temos

$$d(\varphi_{\nu(x, y)}(x), [x, y]) \leq d(\varphi_{\nu(x, y)}(x), x) + d(x, [x, y]) \leq \alpha/c.$$

Como $[x, y] \in W_{\alpha_0}^s(\varphi_{\nu(x, y)}(x))$ para $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\nu(x, y)+t}(x), \varphi_t([x, y])) &\leq ce^{-rt}d(\varphi_{\nu(x, y)}(x), [x, y]) \\ &\leq ce^{-rt}\frac{\alpha}{c} = e^{-rt}\alpha \leq \alpha. \end{aligned}$$

Portanto $[x, y] \in W_\alpha^s(\varphi_{\nu(x, y)}(x))$.

Como $[x, y] \in W_{\alpha_0}^u(y)$ para $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_{-t}(y), \varphi_{-t}([x, y])) &\leq ce^{-rt}d(y, [x, y]) \\ &\leq ce^{-rt}\frac{\alpha}{c} = e^{-rt}\alpha \leq \alpha. \end{aligned}$$

Portanto $[x, y] \in W_\alpha^u(y)$.

Assim $[x, y] \in W_\alpha^s(\varphi_{\nu(x, y)}(x)) \cap W_\alpha^u(y)$ e como a interseção é única temos

$$[x, y] = W_\alpha^s(\varphi_{\nu(x, y)}(x)) \cap W_\alpha^u(y).$$

□

Lema 2.7. *Se φ é um fluxo Smale e X é um componente de cadeia de φ , então para dois pontos $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{R}$,*

$$W^s(\varphi_t(x)) \cap W^u(\varphi_t(y))$$

é denso em X .

Demonstração. Dado $\alpha > 0$, seja $z = \{[x, y]\} \in X$ como no Lema anterior, onde $W_\alpha^s(\varphi_t(x)) \cap W_\alpha^u(y) = z$. Considere uma sequência (x_k) em $W^s(\varphi_t(x)) \cap W^u(\varphi_t(y))$, queremos mostrar que $x_k \rightarrow z$.

Como $(x_k) \in W^s(\varphi_t(x))$ então $d(\varphi_{t+s}(x_k), \varphi_{t+s}(x)) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$, ou seja, $d(\varphi_{t+s}(x_k), \varphi_{t+s}(x)) < \alpha/2$.

Da mesma forma, como $z \in W_\alpha^s(\varphi_t(x))$ então $d(\varphi_{t+s}(x), \varphi_{t+s}(z)) < \alpha/2$. Assim,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{t+s}(x_k), \varphi_{t+s}(z)) &\leq d(\varphi_{t+s}(x_k), \varphi_{t+s}(x)) + d(\varphi_{t+s}(x), \varphi_{t+s}(z)) \\ &< \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi_{t+s}(x_k) \rightarrow \varphi_{t+s}(z)$ para $s \rightarrow +\infty$, e como φ é homeomorfismo então $x_k \rightarrow z$. $\square$

Definição 2.8. *Seja φ um fluxo, dizemos que φ é **Kupka-Smale** se satisfaz as seguintes condições:*

- (a) *toda órbita fechada de φ é hiperbólica,*
- (b) *qualquer interseção entre os conjuntos estáveis e instáveis de órbitas fechadas é transversal.*

É conhecido na literatura que a coleção de fluxos Kupka-Smale é denso no conjunto de todos os fluxos C^1 em M , isso é feito usando o método da suspensão. A prova encontra-se em [16]. Seja φ um fluxo C^1 em M , $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré associada a φ e $h : M \rightarrow \Sigma$ um homeomorfismo onde φ é conjugado a P . Considere ψ um fluxo Kupka-Smale e $P' : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré associada a ψ , então podemos escrever $\psi = h^{-1} \circ P' \circ h$. Assim, como P' está próximo de P então ψ está próximo a φ .

A seguir, apresentaremos duas proposições e um lema necessários para a demonstração do teorema principal.

Proposição 2.9. *Sejam φ um fluxo topologicamente estável e X uma componente de cadeia de φ . Se ψ for um segundo fluxo em M e (h, τ) uma semiconjugação do fluxo ψ ao fluxo φ . Então*

- (a) $h(CR(\psi)) = CR(\varphi)$;
- (b) *se Y é uma componente de cadeia de ψ e $Y \cap h^{-1}(X) \neq \emptyset$, então $Y \subset h^{-1}(X)$;*

(c) $h(Y) = X$.

Demonstração. (a) Seja $\varepsilon > 0$ uma constante dada, e escolha $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(h(x), h(y)) < \varepsilon$, para $x, y \in M$ uma vez que $h : M \rightarrow M$ é uma sobrejeção contínua e M é compacto

Como φ é topologicamente estável, para cada $x \in M$ considere a aplicação contínua $\tau(-, x)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que $\tau(C, x) > 0$. Por compacidade de M e continuidade de τ segue que existe uma constante T que satisfaz $\tau(C, x) \geq T > 0$ para todo $x \in M$.

Agora, se $(t_i, x_i) \in \mathbb{R} \times M$ é uma (δ, C) -cadeia recorrente de ψ então $t_i \geq C$ e $d(x_{i+1}, \psi_{t_i}(x_i)) < \delta$, para cada i . Isso implica que $d(h(x_{i+1}), h(\psi_{t_i}(x_i))) < \varepsilon$, pois h é contínua. Além disso (h, τ) é semiconjugação do fluxo ψ ao fluxo φ , logo $h(\psi_{t_i}(x_i)) = \varphi_{\tau(t_i, x_i)}(h(x_i))$ daí $d(h(x_{i+1}), \varphi_{\tau(t_i, x_i)}(h(x_i))) < \varepsilon$.

Como $\tau(t_i, x_i) \geq T > 0$ para todo $x_i \in M$ então $(h(x_i), \tau(t_i, x_i)) \in \mathbb{R} \times M$ é uma (ε, T) -cadeia recorrente de φ .

Pelo fato de ε ser arbitrário e T independe de ε concluímos que $h(CR(\psi)) \subset CR(\varphi)$. Pelo item (c) temos a igualdade.

(b) Seja $x \in Y \cap h^{-1}(X)$, então $h(x) \in h(Y) \cap X$. Pelo Lema 1.31, $Y \subset CR(\psi)$ é conexo, então $h(Y) \subset CR(\varphi)$ também é conexo. Como X é uma componente conexa de $CR(\varphi)$ temos $h(Y) \subset X$. Assim $Y \subset h^{-1}(h(Y)) \subset h^{-1}(X)$.

(c) Sejam $x \in X$ e $y \in Y$, pelo item anterior $y = h^{-1}(x)$. Sabemos que $\omega_\varphi(x) = X$ e $\omega_\psi(y) = Y$ pelo Lema 1.36, portanto existe uma sequência $n_k \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi_{n_k}(x) \rightarrow q \in X$. Da mesma forma, existe uma sequência de $n_k \rightarrow +\infty$ (que também rotulamos por n_k) tal que $\psi_{n_k}(y) \rightarrow p \in Y$. Assim,

$$h(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(\psi_{n_k}(y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(h(y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(x) = q.$$

Portanto, $h(Y) = X$. □

Lema 2.10. *Considere (h, τ) uma semiconjugação do fluxo ψ ao fluxo φ e γ uma órbita fechada de φ . Se $p \in h^{-1}(\gamma)$, então $h(W^\sigma(p, \psi)) \subset W^\sigma(\gamma, \varphi)$ onde $\sigma = s$ ou u .*

Demonstração. Mostraremos para $\sigma = s$. A prova para $\sigma = u$ é análoga.

Seja $y \in W^s(p, \psi)$ então pela definição de $W^s(p, \psi)$ temos

$$d(\psi_t(p), \psi_t(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Como (h, τ) é uma semiconjugação do fluxo ψ ao fluxo φ então $h(\psi_t(p)) = \varphi_{\tau(t, p)}h(p)$, daí

$$d(h(\psi_t(p)), h(\psi_t(y))) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Isso implica que

$$d(\varphi_{\tau(t,p)}h(p), \varphi_{\tau(t,y)}h(y)) \longrightarrow 0 \text{ quando } t \longrightarrow +\infty.$$

Além disso $\varphi_{\tau(t,p)}h(p) \in \gamma$, uma vez que $h(p) \in \gamma$, e $\tau(t,y) \longrightarrow +\infty$ quando $t \longrightarrow +\infty$ então

$$d(\gamma, \varphi_t h(y)) \longrightarrow 0 \text{ quando } t \longrightarrow +\infty.$$

Isso significa que $h(y) \in W^s(\gamma, \varphi)$. Portanto $h(W^s(p, \psi)) \subset W^s(\gamma, \varphi)$, como queríamos. $\square$

Proposição 2.11. *Sejam φ um fluxo topologicamente estável, X uma componente de cadeia, e γ_1, γ_2 órbitas fechadas de φ em X . Então $W^s(\gamma_1; \varphi) \cap W^u(\gamma_2; \varphi) \cap X$ é denso em X .*

Demonstração. Como φ é topologicamente estável, existe uma semiconjugação (h, τ) do fluxo ψ ao fluxo φ . Pela Proposição 2.9, ψ possui uma componente de cadeia Y onde $Y = h^{-1}(X)$ então $h(Y) = X$. Daí, podemos escolher $y_j \in Y \cap h^{-1}(\gamma_j)$ para $j = 1, 2$, pois $\gamma_j \in X$ para $j = 1, 2$.

Considere ψ como sendo um Fluxo Smale, isto é possível por causa da densidade C^0 da coleção de Fluxos Smale [13], então a componente de cadeia de ψ é um único ponto ou é unidimensional. Se Y é um único ponto então X também é, logo não há nada para provar.

Agora, se Y é um conjunto hiperbólico unidimensional, então pelo Lema 2.7, a interseção do conjunto estável de qualquer órbita em Y com o conjunto instável de qualquer outra órbita de Y está contida e é denso em Y .

Denotaremos por $\mathcal{O}(y_j)$ a órbita de ψ de y_j para $j = 1, 2$ e $D = W^s(\mathcal{O}(y_1)) \cap W^u(\mathcal{O}(y_2)) \cap Y$ que é denso em Y .

Como $h : Y \longrightarrow X$ é contínua então

$$h(D) = h(W^s(\mathcal{O}(y_1))) \cap h(W^u(\mathcal{O}(y_2))) \cap h(Y)$$

que pelo Lema anterior

$$h(D) \subset W^s(\gamma_1, \varphi) \cap W^u(\gamma_2, \varphi) \cap X.$$

E como D é denso em Y e h é contínua, temos $h(D)$ é denso em X . $\square$

2.2 Prova do Teorema Principal

Nessa seção apresentaremos a demonstração do teorema principal.

Teorema 2.12. *Sejam φ um fluxo topologicamente estável, X uma componente de cadeia de φ , e γ_1, γ_2 órbitas fechadas hiperbólicas de φ contidas em X . Então γ_1 e γ_2 têm o mesmo índice.*

Demonstração. Se $\gamma_1 = \gamma_2$ a demonstração é imediata. Considere $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Pelo Teorema de Hartman-Grobman e estabilidade local das órbitas periódicas, encontrados em [16], existem vizinhanças disjuntas V_1 e V_2 de γ_1 e γ_2 , respectivamente, e uma vizinhança G' de φ em $\mathfrak{X}(M)$ tais que:

- (i) Como φ é topologicamente estável e γ_1, γ_2 são órbitas hiperbólicas fechadas de φ , então para qualquer fluxo $\psi \in G'$, existe uma órbita hiperbólica fechada $\lambda_1 \subset V_1$, $\lambda_2 \subset V_2$ de ψ tal que o índice $\lambda_1(\psi) = \text{índice } \gamma_1$ e índice $\lambda_2(\psi) = \text{índice } \gamma_2$. De fato, seja $x \in \gamma_1$ e como φ é topologicamente estável então existe uma semiconjugação (h, τ) do fluxo ψ ao fluxo φ onde $\varphi_{\tau(t,x)}(h(x)) = h(\psi_t(x))$, assim considere λ_1 a órbita hiperbólica fechada de ψ dada por $\lambda_1 = \{x \in M; \psi_t(x) \in V_1, \forall t \in \mathbb{R}\}$. Análogo para λ_2 .
- (ii) $\lambda_1(\psi)$ e $\lambda_2(\psi)$ são os únicos conjuntos ψ -invariantes em V_1 e V_2 , respectivamente. De fato são únicos, pois supondo que exista outro conjunto $\lambda_3(\psi)$, ψ -invariante em V_1 ou V_2 , então $\lambda_3(\psi) = \{x \in M; \psi_t(x) \in V_j, \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, 2\}$. Portanto $\lambda_3(\psi)$ é igual a $\lambda_1(\psi)$ ou $\lambda_2(\psi)$.

Assim, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(\gamma_1, \varepsilon) \subset V_1$ e $B(\gamma_2, \varepsilon) \subset V_2$. Além disso, existe uma vizinhança $G \subset G'$ de φ em $\mathfrak{X}(M)$ onde, para todo fluxo $\psi \in G$, existe uma semiconjugação (h, τ) de ψ a φ tal que $d(h, id) < \varepsilon$.

Então $h^{-1}(\gamma_j) \subset V_j$ para $j = 1, 2$. De fato, seja $x \in h^{-1}(\gamma_j)$ para $j = 1, 2$, então $h(x) \in \gamma_j$ para $j = 1, 2$. Portanto $d(\gamma_j, x) \leq d(h(x), x) \leq d(h, id) < \varepsilon$, logo $x \in B(\gamma_j, \varepsilon) \subset V_j$ para $j = 1, 2$.

Agora, $h^{-1}(\gamma_j)$ para $j = 1, 2$ é fechado e ψ -invariante pois γ_j para $j = 1, 2$ é fechado e φ -invariante. De fato, como γ_j para $j = 1, 2$ é fechado e h é uma sobrejeção contínua então $h^{-1}(\gamma_j)$ para $j = 1, 2$ é fechado. Além disso, considere $x \in h^{-1}(\gamma_j)$ para $j = 1, 2$ logo $h(x) \in \gamma_j$ para $j = 1, 2$, como γ_j é φ -invariante, implica que $\varphi(h(x)) \in \gamma_j$ e como $h(\psi(x)) = \varphi(h(x)) \in \gamma_j$ para $j = 1, 2$, então $h(\psi(x)) = \varphi(h(x)) \in \gamma_j$ logo $\psi(x) \in h^{-1}(\gamma_j)$ para $j = 1, 2$. Portanto $h^{-1}(\gamma_j)$ para $j = 1, 2$ é ψ -invariante. Consequentemente por (ii) temos $h^{-1}(\gamma_j) = \lambda_j(\psi)$ para $j = 1, 2$.

Como o conjunto de fluxos de Kupka-Smale é denso no conjunto de todos os fluxos C^1 em M , podemos encontrar um fluxo de Kupka-Smale ψ em G . Nós usaremos essa escolha particular de ψ no restante da prova.

Queremos mostrar que $W^s(\lambda_1(\psi), \psi) \cap W^u(\lambda_2(\psi), \psi) \neq \emptyset$.

Usando a Proposição 2.11, escolhemos $x \in W^s(\gamma_1, \varphi) \cap W^u(\gamma_2, \varphi)$ e $y = h^{-1}(x)$. Pela prova do item (c) da Proposição 2.9, a semiconjugação leva o conjunto ω -limite de ψ de y no conjunto ω -limite de φ de x , ou seja, $h(\omega_\psi(y)) = \omega_\varphi(x) = \gamma_1$ então $\omega_\psi(y) \subset h^{-1}(\gamma_1) = \lambda_1(\psi)$. Portanto $y \in W^s(\lambda_1(\psi), \psi)$.

Da mesma forma, $h(\alpha_\psi(y)) \subset \alpha_\varphi(x) = \gamma_2$, então $\alpha_\psi(y) \subset h^{-1}(\gamma_2) = \lambda_2(\psi)$ daí $y \in W^u(\lambda_2(\psi), \psi)$. Portanto $W^s(\lambda_1(\psi), \psi) \cap W^u(\lambda_2(\psi), \psi) \neq \emptyset$.

Invertendo os papeis de $\lambda_1(\psi)$ e $\lambda_2(\psi)$ temos $W^s(\lambda_2(\psi), \psi) \cap W^u(\lambda_1(\psi), \psi) \neq \emptyset$.

Como ψ é Kupka-Smale, a interseção da variedade instável e estável de qualquer órbita fechada de ψ é transversal, como já mostramos que a interseção é não vazia temos $W^s(\lambda_2(\psi), \psi) \cap W^u(\lambda_1(\psi), \psi)$ e $W^s(\lambda_1(\psi), \psi) \cap W^u(\lambda_2(\psi), \psi)$ são subvariedades de dimensão 1. Além disso, como $\gamma_1 \neq \gamma_2$ então $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Daí, seja (S_j, U_j) índice de $\lambda_j(\psi)$ para $j = 1, 2$ e $m = \dim(M)$ onde $S_j = \dim(W^s(\gamma_j))$ e $U_j = \dim(W^u(\gamma_j))$ para $j = 1, 2$.

Assim, pelos fatos apresentados acima, temos as seguintes desigualdades

$$(1) \quad U_1 + S_2 \geq m + 1,$$

$$(2) \quad U_2 + S_1 \geq m + 1.$$

Além disso, pela definição de índice temos

$$(3) \quad U_1 + S_1 \leq m + 1,$$

$$(4) \quad U_2 + S_2 \leq m + 1.$$

Finalmente, combinando (2) com (3) e (1) com (4) temos $U_1 = U_2$, e combinando (2) com (4) e (1) com (3) temos $S_1 = S_2$. Portanto o índice de γ_1 = índice de γ_2 . $\square$

Corolário 2.13. *Nas hipóteses do Teorema anterior, se X contém um ponto fixo hiperbólico, então X não contém outra órbita fechada hiperbólica.*

Demonstração. Pela demonstração do teorema anterior temos:

$$U_1 + S_2 + U_2 + S_1 \geq 2m + 2$$

e

$$U_1 + S_1 + U_2 + S_2 \leq 2m + 2.$$

Portanto $U_1 + S_2 + U_2 + S_1 = 2m + 2$. Mas pela definição de índice, se γ_1 for um ponto fixo logo $U_1 + S_1 = m$ o que contradiz o fato de $U_1 + S_1 \leq m + 1$ e daí γ_1 e γ_2 não seriam distintas. Então podemos concluir que X não teria outra órbita fechada hiperbólica. $\square$

Corolário 2.14. *Se um fluxo Kupka-Smale é topologicamente estável, cada um dos pontos fixos é uma componente de cadeia.*

Demonstração. Seja φ um fluxo Kupka-Smale que é topologicamente estável, pelo Lema 1.36, as órbitas fechadas de φ são densas em $CR(\varphi)$ e como φ é Kupka-Smale, cada uma dessas órbitas fechadas é hiperbólica. Logo, pelo corolário anterior, se X é uma componente de cadeia de φ que contém órbitas fechadas hiperbólicas então X não contém um ponto fixo. Portanto cada ponto fixo é uma componente de cadeia. $\square$

Observação 2.15. *Se a dimensão de M for 3, pode-se obter o resultado desse último corolário sem supor que o fluxo φ topologicamente estável é Kupka-Smale. De fato, $U + S = \dim(M) = 3$, então temos três opções:*

- (i) $U = 0$, logo só temos a dimensão da variedade estável, portanto o ponto fixo hiperbólico é atrator;
- (ii) $S = 0$, logo só temos a dimensão variedade instável, portanto o ponto fixo hiperbólico é um repulsor;
- (iii) $U = 1$ ou $S = 1$, temos que a dimensão da variedade estável ou instável é 1, o que provaremos na próxima proposição.

Proposição 2.16. *Suponham φ topologicamente estável e X uma componente de cadeia de φ que contém um ponto fixo hiperbólico p de φ . Se o conjunto estável ou instável desse ponto fixo é unidimensional, então $X = \{p\}$.*

Demonstração. Considere $\dim(W^u(p)) = 1$ e γ uma órbita fechada hiperbólica em X diferente de p . Como $\dim(W^u(p, \varphi)) = 1$ implica que $W^u(p)$ consiste em p mais duas outras órbitas de p , a órbita positiva e a órbita negativa de p , isto é $W^u(p, \varphi) = \{p, \mathcal{O}^+(p), \mathcal{O}^-(p)\}$.

Pela Proposição 2.11 temos $W^s(\gamma, \varphi) \cap W^u(p, \varphi) \cap X$ é denso em X , como γ e p são distintos e $W^u(p, \varphi) = \{p, \mathcal{O}^+(p), \mathcal{O}^-(p)\}$, logo $W^s(\gamma, \varphi)$ deve conter pelo menos uma das duas órbitas de p diferente de p .

Combinando isso com o fato de que $W^s(p) \cap W^s(\gamma) = \emptyset$ e $W^u(p) \cap W^u(\gamma) = \emptyset$ concluímos que X pode conter no máximo duas órbitas periódicas além de p . Usando o Lema 1.36, as órbitas fechadas de φ em X são densas em X , isso mostra que X deve consistir em um número finito de órbitas fechadas.

Mas, pela definição de componente de cadeia temos, se $y \in X$ para algum $C > 0$ e cada $\alpha > 0$ existem duas cadeias (α, C) -cadeia recorrentes, uma começando em p e terminando em y , e a outra começando em y e terminando em p , implica que X consiste em uma única órbita fechada. Portanto X consiste somente em p .

□

Capítulo 3

Estabilidade do Atrator de Lorenz

O objetivo desse capítulo é mostrar que nenhum modelo geométrico do Atrator de Lorenz é topologicamente estável. Portanto, vamos fazer uma breve apresentação da construção de um modelo geométrico do Atrator de Lorenz. Para interessados no assunto, mais detalhes podem ser encontrados em [8], [14] e [15].

3.1 Histórico e breve apresentação

Em 1963, o meteorologista do MIT, Edward Lorenz, publicou o notável artigo *Deterministic Nonperiodic Flow*[7]. Neste artigo introduziu o seguinte sistema não-linear de equações diferenciais abaixo.

Seja $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o campo vetorial definido por $X(x, y, z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, onde

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y}(t) = rx - y - xz \\ \dot{z}(t) = xy - bz \end{cases}$$

e σ, r, b são parâmetros reais positivos e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Inicialmente fixamos os parâmetros $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ numa vizinhança da origem. Ao escolher condição inicial próxima da origem deparou-se com uma órbita de comportamento muito estranho, limitada que não mostrava regularidade.

A figura a seguir mostra a solução e tem a aparência similar a uma borboleta, por essa razão ficou conhecida como *butterfly*.

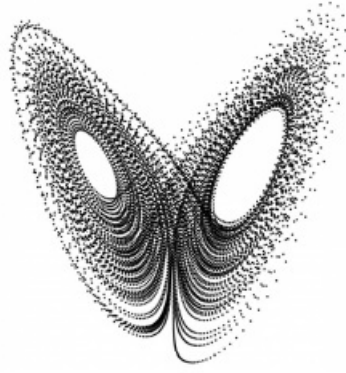


Figura 3.1: Atrator de Lorenz [15]

3.2 Propriedades do Atrator de Lorenz

A seguir mostraremos as propriedades que são obtidas diretamente das Equações de Lorenz.

- (i) Existe uma simetria natural $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ para quaisquer σ, r, b positivos, ou seja, se $(x(t), y(t), z(t))$ é solução, $(-x(t), -y(t), z(t))$ também é.
- (ii) Podemos calcular as singularidades procurando os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $X(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Assim,

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos três singularidades para $r > 1$,

$$\begin{aligned} p &= (0, 0, 0) \\ q^+ &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ q^- &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \end{aligned}$$

- (iii) Usando os parâmetros $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ as singularidades serão $p = (0, 0, 0); q^+ = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27); q^- = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$. Assim,

$$DX(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x(\dot{x}) & \partial_y(\dot{x}) & \partial_z(\dot{x}) \\ \partial_x(\dot{y}) & \partial_y(\dot{y}) & \partial_z(\dot{y}) \\ \partial_x(\dot{z}) & \partial_y(\dot{z}) & \partial_z(\dot{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

O cálculo dos autovalores de $DX(p), DX(q^-), DX(q^+)$, reduz-se a achar as raízes dos polinômios característicos dessas três derivadas.

$$DX(p) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$DX(q^+) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$DX(q^-) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Os polinômios característicos de $DX(p)$, $DX(q^-)$, $DX(q^+)$, com suas respectivas raízes, são:

$$(i) \quad f(\lambda) = \lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{722}{3}\lambda - 720$$

$$\lambda_1 \approx 11,83; \lambda_2 \approx -22,83; \lambda_3 \approx -2,67$$

$$(ii) \quad f(\mu) = \mu^3 + \frac{41}{3}\mu^2 + \frac{304}{3}\mu + 1440$$

$$\mu_1 \approx -13,85; \mu_2 \approx 0,094 + 10,19i; \mu_3 \approx 0,094 - 10,19i$$

$$(iii) \quad f(\xi) = \xi^3 + \frac{41}{3}\xi^2 + \frac{304}{3}\xi + 1440$$

$$\xi_1 \approx -13,85; \xi_2 \approx 0,094 + 10,19i; \xi_3 \approx 0,094 - 10,19i$$

(iv) A divergência de X é negativa. De fato,

$$\operatorname{div} (X(x, y, z)) = \operatorname{traço} (DX(x, y, z)) = -(\sigma + 1 + b) < 0.$$

Isso significa que o fluxo X_t associado ao campo X contrai o volume significativamente. Dado o volume inicial V_0 de um sólido é possível calcular o volume $V(t)$ desse sólido no tempo t :

$$V(t) = V_0 e^{-(\sigma+1+b)t}$$

Assim, poderíamos fazer $V_0 = \operatorname{vol}(U)$ onde U é o bloco isolante tendo como fronteira um bitoro. Em particular, para $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, temos

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{41}{3}t}.$$

Note que quando $t \rightarrow +\infty$ então $V(t) \rightarrow 0$. Assim o conjunto $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$ terá volume zero.

(v) Existe uma elipsoide onde eventualmente entram todas as órbitas e nunca mais voltam a sair. Na referencia tal, mostra como é obtido esse elipsoide.

Escolhendo uma função de Liapunov

$$V = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

verifica-se que as órbitas ingressam transversalmente no elipsóide.

Assim, existe uma região sólida K cuja fronteira é o elipsoide onde todas as órbitas acabam entrando. Supondo K compacto, então necessariamente estas órbitas terão que acumular em algum subconjunto de K . Na realidade as simulações mostram que existe um conjunto B homeomorfo a um bitoro de tal forma que toda órbita atravessa-o transversalmente e nunca mais volta a sair.

Logo existe uma região sólida, limita e aberta U , cuja a fronteira de U é $\partial U = B$. Consequentemente U será um bloco isolante, de tal forma que a origem é a única singularidade em U contida. Logo nosso candidato a ser atrator é o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U).$$

Para construir geometricamente esta região sólida U com fronteira homeomorfa a um bitoro, é só retirar uma vizinhança suficientemente pequena que contenha as variedade estáveis tanto de q^+ como de q^- . Assim teremos uma região que é homomorfa a um bitoro.

3.3 Modelo Geométrico do Atrator de Lorenz

Para a finalidade do nosso estudo usaremos o modelo geométrico do Atrator de Lorenz apresentado em [8].

Para esse modelo geométrico, mostrou-se que o modelo geométrico é um fluxo em 3 dimensões tal que :

- (1) Existe um ponto singular p .
- (2) Existe uma seção transversal ao fluxo.
- (3) Existe uma folheação invariante pela aplicação retorno á seção transversal.
- (4) A aplicação unidimensional induzida é expansora.

Para uma construção considere as equações de Lorenz numa vizinhança da origem, por uma mudança não linear de coordenadas as equações são conjugadas as equações linearizadas em uma vizinhança de p ,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda_1 x \\ \dot{y}(t) = \lambda_2 y \\ \dot{z}(t) = \lambda_3 z \end{cases}$$

onde $\lambda_1 \approx 11,83$; $\lambda_2 \approx -22,83$; $\lambda_3 \approx -2,67$.

A solução desse sistema é imediata

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 \\ z(t) = e^{\lambda_3 t} z_0 \end{cases}$$

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : |x|, |y| \leq \alpha\} \\ S' &= S \setminus \{(x, y, z) : |x| = 0\} = S^+ \cup S^- \\ \Sigma^\pm &= \{(x, y, z) : |y|, |z| \leq \beta\} \end{aligned}$$

com α e β constantes positivas e pequenas.

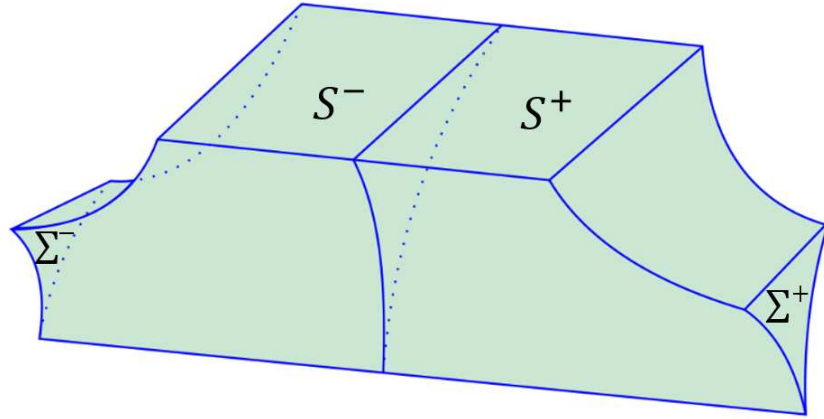


Figura 3.2: Região em forma de cúspide

Construimos duas aplicações $P_1 : S' \rightarrow \Sigma$ e $P_2 : \Sigma \rightarrow S$, definimos uma aplicação $P = P_2 \circ P_1 : S' \rightarrow S$, dada por $P(x, y) = (f(x), g(x, y))$.

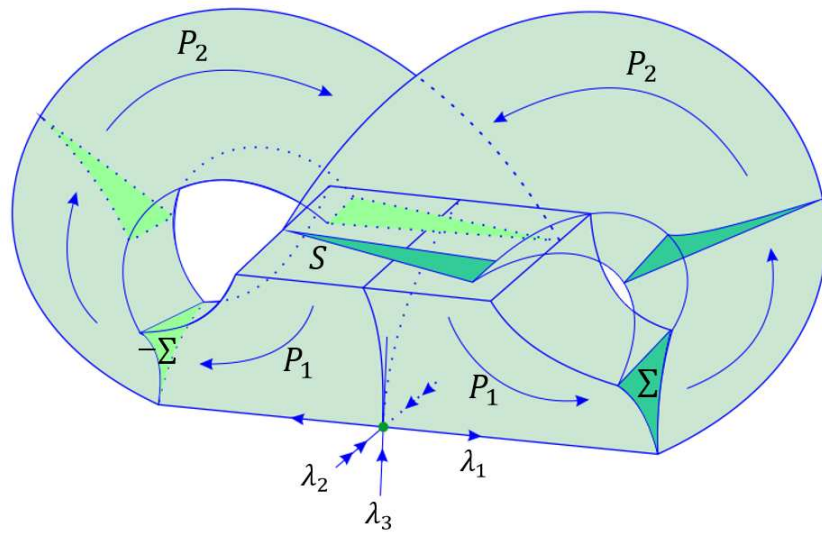


Figura 3.3: Aplicações P_1 e P_2

E, finalmente a projetamos na reta real.

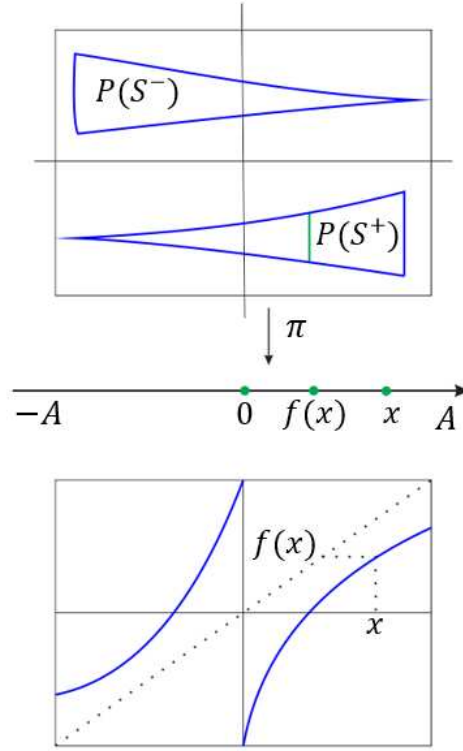


Figura 3.4: Transformação do modelo geométrico de Lorenz

A aplicação unidimensional $f : [-A, A] \setminus \{0\} \rightarrow [-A, A]$ possui as seguintes propriedades:

1. A simetria das equações de Lorenz implicam que

$$f(-x) = -f(x)$$

2. Tem única descontinuidade em $x = 0$ decorrente pelo fato de P não está definida em $\{(x, y, z) : |x| = 0\}$.

3. Os limites laterais em $x = 0$ são, respectivamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = A \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -A$$

4. f é diferenciável em $[-A, A] \setminus \{0\}$ e $f'(x) > \sqrt{2}$ ou seja, f é expansora.

5. Os limites laterais de f' em $x = 0$ são

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty.$$

Assim, estudar o fluxo tridimensional, reduz-se a estudar uma aplicação bidimensional que ajuda a compreender a dinâmica do fluxo, daí o estudo foi reduzido a uma aplicação unidimensional, chamada *Aplicação de Lorenz*.

Para a prova do último resultado desse trabalho precisamos citar os seguintes teoremas:

Teorema 3.1. *Sejam U uma vizinhança do campo de vetores Y em M e V um segundo conjunto em U tais que se $Z \in V$, então Z tem um ponto singular não isolado no conjunto não errante.*

Teorema 3.2. *Seja U uma vizinhança do campo de vetores Y em M tal que $V \subset U$, V aberto em M , então existem campos de vetores em V cujos conjuntos não errantes são homeomorfos um ao outro.*

As demonstrações dos teoremas 3.1 e 3.2 podem ser encontradas em [8].

Agora estamos em condições de enunciar o último resultado desse capítulo.

Teorema 3.3. *Nenhum modelo geométrico do Atrator de Lorenz é topologicamente estável.*

Demonstração. Usaremos o modelo explicado anteriormente para mostrarmos que esse modelo não é topologicamente estável.

Vamos supor que f seja topologicamente estável, onde f é a função descrita anteriormente. Considere o conjunto aberto U_0 que está no conjunto de campos vetoriais C^1 em S^3 . Denote U como o conjunto de fluxos em S^3 que são gerados pelos campos vetoriais em U_0 [8]. Em U , existe um subconjunto N de S^3 que é positivamente invariante sob cada fluxo f em U e que $f_1(\overline{N}) \subset N$. (f_1 é o fluxo onde $t = 1$).

Consequentemente $\Lambda_f = \bigcap_{t \geq 0} f_t(N)$ é um conjunto atrativo. Além disso, para cada f em U , Λ_f contém exatamente um ponto fixo p_f que é uma sela hiperbólica (veja propriedade (iii) seção 3.2).

Nas provas dos teoremas 3.1 e 3.2 de [8], que não mostraremos nesse trabalho por ser extenso, é mostrado que existe um subconjunto denso V de U tal que para cada fluxo g em V , o conjunto atrativo Λ_g é conexo e está contido em $CR(f)$. Assim, pelo Lema 1.31, Λ_g é uma componente de cadeia de g , de modo que cada g em V possui exatamente uma componente de cadeia contido em N .

Como $f_1(\overline{N}) \subset N$ para cada f em U , segue que qualquer componente de cadeia de f que esteja em $\overline{N}$ deve estar contido em N . Com esse fato, a densidade de V em U e o item (c) da Proposição 2.9 verifica-se que f tem uma única componente de cadeia em N . Denote este componente da cadeia por X .

Pela Proposição 2.16, temos $X = \{p_f\}$. Além disso $X = \Lambda_f$. De fato, seja $x \in \Lambda_f$, como Λ_f é invariante e fechado então o conjunto alfa-limite e o conjunto omega-limite estão em Λ_f e pela Proposição 1.35 são cadeia recorrente. Como X é a única componente de cadeia de f , isso obriga ambos conjuntos limites estarem contidos em X e daí $x \in X$. Então $\Lambda_f \subset X$. A inclusão contrária decorre do fato de que Λ_f é o conjunto maximal f -invariante definido em N .

Então concluímos que $\Lambda_f = \{p_f\}$, o que não acontece. Portanto, f não é topologicamente estável. $\square$

Considerações Finais

O presente trabalho, baseado na definição de estabilidade topológica de Walters nos permite:

1. Concluir que o índice de duas órbitas fechadas $\gamma_1, \gamma_2 \in CR(\varphi)$ do fluxo φ topologicamente estável é o mesmo.
2. O modelo geométrico do Atrator de Lorenz, apresentado nesse trabalho, não é topologicamente estável.

A definição de Walters não deixa clara se é possível que um fluxo topologicamente estável tenha singularidades. Este é o fenómeno que ocorre no modelo geométrico do Atrator de Lorenz. Assim, nos perguntamos se há uma definição de estabilidade topológica para fluxos com singularidades, talvez isto seja um motivo de pesquisa futura.

Não encontramos, durante a elaboração desse trabalho, referência publicada a esse respeito.

Referências Bibliográficas

- [1] BAUTISTA, S.; MORALES, C. *Lectures on Sectional-Anosov Flows*, Monograph, 2010.
- [2] BOWEN, R. *Periodic Orbits for Hyperbolic Flows*, American Journal of Mathematics, Vol. 94, No. 1 (Jan., 1972), pp. 1-30
- [3] BURNS, K. E GIDEA, M. *Differential Geometry and Topology With a View to Dynamical Systems*. CRC, 2005.
- [4] CASTRO JR, AUGUSTO ARMANDO DE. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA, (2009).
- [5] CHI, P. D., CHOI, K. S., PARK, S. J. *Structurally Stable Flows*, BOLL. AUSTRAL. MATH. SOC. VOL. 45 (1992) [79-90]
- [6] CONLEY C. *The Gradient Structure of a Flow: I*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1988), 11-26.
- [7] E. N. LORENZ. *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmos. Sci., 20 : 130-141, 1963.
- [8] GUCKENHEIMER J. *A strange, strange attractor*, pp. 368-381 in J. Marsden, M. McCracken and G. Oster, *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [9] HURLEY, M. *Combined structural and topological stability are equivalent to Axiom A and the strong transversality condition*, Ergodic Theory Dynamical Systems 4 (1984), 81-88.
- [10] HURLEY, M. *Consequences of topological stability*, Journal of differential Equations, vol. 54, n. 1, pag. 60 - 72, 1984.
- [11] HURLEY, M. *Fixed Points of Topologically Stable Flow*, American Mathematical Society, Volume 294, Number 2, April 1986.
- [12] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *A moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos*, Coordenação e revisão da tradução por Luis Barreira, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, (2005).
- [13] M. M. C. DE OLIVEIRA, *C^0 -density of structurally stable vector fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 786.

-
- [14] MARÓN, IVAN W. AGUILAR *O ATRATOR DE LORENZ: Persistência da Folheação Estável do Modelo Geométrico.*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.
 - [15] NUNES, THAMILES SANTOS, M.SC. *Sistemas Singulares Hiperbólicos*, Universidade Federal de Viçosa, Julho de 2017
 - [16] PALIS, J.; MELO, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1978.
 - [17] PERKO L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 2000.
 - [18] ROBINSON, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press Inc, 1995.
 - [19] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.