

MICHELY SANTOS OLIVEIRA

O PROBLEMA DE PAINLEVÉ PARA CAMPOS DE PFAFF

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

O48p
2013

Oliveira, Michely Santos, 1988-

O problema de Painlevé para campos de Pfaff / Michely Santos Oliveira. – Viçosa, MG, 2013.
vi, 130f. : il. ; 29cm.

Orientador: Maurício Barros Correa Júnior

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 127-130

1. Folheações (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514.72

MICHELY SANTOS OLIVEIRA

O PROBLEMA DE PAINLEVÉ PARA CAMPOS DE PFAFF

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2013.

Anderson Luis Albuquerque de Araújo

Thiago Fassarella do Amaral

Marinês Guerreiro
(Coorientadora)

Rogério Carvalho Picanço
(Coorientador)

Maurício Barros Correa Júnior
(Orientador)

*“Nunca deixe que lhe diga
que não vale a pena acreditar
no sonho que se tem”.*
Renato Russo.

AGRADECIMENTOS

“Os sonhos de Deus são maiores que os nossos”. Agradeço a Deus por ter sonhado este sonho para mim. Por ter me dado a coragem necessária para ir até o fim e, principalmente, por ter colocado em meu caminho pessoas que foram indispensáveis e fundamentais nessa trajetória.

Agradeço a minha família. A minha mãe Amélia que sempre abriu mão dos seus sonhos em função dos meus; que sofreu comigo (talvez mais que eu) a cada prova e cada qualificação. Ao meu pai Carlos por ter me dado um grande ensinamento: “na vida, se você quiser conquistar algo, terá que correr atrás”. A minha irmã Franciele pela grande amizade, companheirismo fraterno, altas risadas e pela paciência que tinha quando esta faltava para mim. A madrinha Wânia e Sérgio que, mesmo longe, sempre torceram para minhas conquistas. A minha irmazinha emprestada Joyce, por não me deixar esquecer a beleza da inocência e dos sonhos de criança.

Agradeço ao meu orientador Maurício não só pelos ensinamentos matemáticos (que foram indiscutivelmente imensos), mas também pela confiança depositada na execução deste trabalho, pela disponibilidade, atenção e a grande amizade adquirida ao longo destes anos. Muito obrigada Maurício por, muitas vezes, confiar em mim mais que eu mesma, por me ensinar a ouvir o que realmente vale a pena e por querer sempre que eu voe mais alto.

Agradeço a minha co-orientadora e amiga, Marinês, com quem tudo começou. Pela oportunidade dada na Iniciação Científica que me fez ter gosto pela pesquisa matemática, por ter me dado um projeto que, como você mesma diz “fez meus olhos brilharem”, pela sabedoria quando me indicou o professor Maurício para continuar os estudos e, principalmente, obrigada pelos ouvidos nas horas de desabafo e pelos inúmeros conselhos.

Ao meu co-orientador amigo, grande matemático e que é um exemplo para mim de bom humor e competência, Rogério. Agradeço a oportunidade que este trabalho me deu de aproximar de você, Rogério, e também pelos ensinamentos.

E que caminhada faz sentido sem a presença dos amigos? Toda essa trajetória não teria feito nenhum sentido sem a presença de cada um dos meus amigos, que me fizeram ver que sempre é hora de ser feliz e que basta acreditar. Com vocês pude perceber também que para haver festa não precisamos fazer nada grandioso, apenas nos reunirmos pois nós somos a festa. Agradeço aos amigos do mestrado por serem esta grande festa. E depois de uma semana puxada de estudos, que tal um churrasquinho? Só precisamos de uma boa desculpa! A Anna Paula, Alana Cavalcanti, Robledo (cabelão), Gustavo (o jovem) e minha irmã acadêmica, Alana Nunes, por estarmos juntos deste o início do mestrado, pelas horas árduas de estudos e pelos conselhos; por sempre poder contar com vocês todas as horas.

Agradeço ao grupo “mais sem educação” que eu pude participar até hoje, que tem habilidade para dizer mais SIM do que NÃO, que não sabe o significado da palavra “moderação” e entende ao pé da letra que *cedo* é quando o dia está nascendo. Mas o melhor de tudo isso é que eu pude

aproximar de pessoas maravilhosas e que tornaram grandes amigas: Aline, Sabrina, Guemael (meu grande amigo mano e corinthiano) e Carlos Henrique. Agradeço também às participações especiais de Samara, Priscila (né bonitinha?!) e Anna Paula (companheira é companheira).

Agradeço também aos demais amigos do mestrado pela oportunidade de estar com vocês: Débora, Filipe, Luiz Henrique, Livia, Michele, Maisa, Renno, Rondinei, Serginei, Thiago, Fernando, Vinícius, Fred, Issac e Artur e Ana Paula.

Ao Carlos Henrique de modo especial agradeço pelo carinho, companheirismo, por me mostrar (mesmo que sem intenção) que recomeçar sempre é possível e por me fazer sonhar novos sonhos.

Não! Claro que não! Jamais esqueceria de te mencionar neste texto, meu grande e precioso amigo Victor. Obrigada pela amizade verdadeira, que resiste a distância, a brigas e “caras feias”. Amizade que aconselha (e como aconselha): obrigada pelos ouvidos SEMPRE, por ter sempre a palavra certa para falar no momento certo e com o tom certo, que só você sabe usar. E agradeço também por ter desencadeado tudo isso.

Agradeço aos amigos que sempre tocaram por mim: as amigas da república, Fernanda Aparecida, Maísa, Sebastião, Fernanda Veríssimo, Wanderley (moor), Márcia.

Agradeço aos grandes mestres que tive durante o mestrado: Anderson, Sônia e Simone. Posso dizer que vocês foram os responsáveis por todo o conhecimento matemático adquirido. Anderson, você é a referência para mim de humanidade, por querer sempre ajudar seus alunos e que, como você mesmo já disse, “não esqueceu que já foi aluno”. Sônia, nunca esqueci a frase que me disse ainda na graduação: “Michely, não desista. Você consegue ir longe”. Simone, obrigada pelos ensinamentos e pelo empenho na coordenação do mestrado.

Não poderia deixar de mencionar os grandes funcionários e amigos do Departamento de Matemática (DMA): Mírian e Paulo, sempre prestativos na secretaria da pós-graduação, Sr. Celino (com seus docinhos) e Sr. Jair (com o cafezinho sempre quentinho). Obrigada pela amizade adquirida neste tempo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro indispensável nestes dois anos.

E por fim, agradeço a Viçosa, minha eterna VICIOSA, pela recepção e por fazer destes últimos 7 anos, os melhores até então. Obrigada pelas festas, pelos amigos e até pelo clima tão inconstante. Mas agora eu preciso dizer, com aperto no coração: “*tchau, I have to go now*”.

SUMÁRIO

RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
INTRODUÇÃO	1
1 Preliminares	3
1.1 Funções Holomorfas	3
1.1.1 Funções Holomorfas em uma variável	3
1.1.2 Funções Holomorfas em várias variáveis	5
1.2 Variedades Complexas	7
1.3 Fibrados Vetoriais	9
1.3.1 Operações entre fibrados	12
1.3.2 Complexificação de fibrados vetoriais reais	13
1.3.3 Campo de vetores e formas diferenciais	14
1.4 Feixes	16
1.4.1 O Funtor Ext e Feixes	21
1.4.2 Feixes Coerentes	24
2 Rudimentos de geometria algébrica complexa	28
2.1 Variedades Algébricas Projetivas	29
2.1.1 Esquema Afim	29
2.1.2 Esquema Projetivo	32
2.1.3 Diferencial Kähler	34
2.1.4 Feixes de Diferenciais	41
2.1.5 Aplicações	45
2.1.6 Feixe Dualizante	50
2.1.7 Feixes localmente livres	53
2.1.8 Correspondência entre Feixes localmente livres e Fibrados vetoriais	56
2.2 Cohomologia de Čech	57
2.3 Classes de Chern	59
2.3.1 Propriedades das Classes de Chern	64
2.3.2 O Princípio da decomponibilidade	66
2.4 Fibrado Determinante	70

2.5	Fibrados Vetoriais Estáveis	79
2.6	Gênero Seccional	86
3	Folheações e Campos de Pfaff	88
3.1	Folheações	88
3.1.1	Mapas distinguidos e Folheações induzidas por submersões	90
3.1.2	Distribuições	92
3.1.3	Fibrados Associados a uma Folheação	93
3.2	Campos de Pfaff	94
4	O Problema de Painlevé para Campos de Pfaff	96
A	Álgebra Multilinear	104
	Aplicações multilineares e tensores	104
	Formas Exteriores	106
	Produto Exterior	107
	Álgebra de Grasmann	108
B	Funtor Derivado	110
C	Localização	115
D	Limite Direto	118
	Referências Bibliográficas	121

RESUMO

OLIVEIRA, Michely Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2013. **O Problema de Painlevé para Campos de Pfaff.** Orientador: Maurício Barros Correa Júnior. Coorientadores: Marinês Guerreiro e Rogério Carvalho Picanço.

Neste trabalho estudamos o Problema de Painlevé para Campos de Pfaff. A motivação para este estudo foi a questão levantada por Painlevé sobre a possibilidade de limitarmos o gênero da solução geral de uma equação diferencial algébrica em duas variáveis que possui uma integral primeira racional. Em *Some examples for Poincaré and Painlevé problem*, Lins Neto obteve uma família de folheações holomorfas que deram uma resposta negativa para este problema. Encontrar tal limitante tem sido um problema instigante para muitos matemáticos. Em *Bounds for sectional genera of varieties invariant under Pfaff fields*, Correa Junior e Jardim obtiveram um limitante para o gênero seccional de uma variedade projetiva invariante por um Campo de Pfaff. Este trabalho consiste em estudar a prova dada pelos autores Correa Junior e Jardim.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Michely Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2013. **The Painlevé Problem under Pfaff Field.** Adviser: Maurício Barros Correa Júnior. Co-advisers: Marinês Guerreiro and Rogério Carvalho Picanço.

In this work we studied the Painleve's Problem for Pfaff Fields. The motivation is Painleve's question about the possibility of giving a bound for the genus of the general solution of an algebraic differential equation in two variables which has a rational first integral. In *Some examples for Poincaré and Painlevé problem*, Lins Neto found a family of foliations that gave a negative answer to this question. In *Bounds for sectional genera of varieties invariant under Pfaff fields*, Correa Junior and Jardim found a bound to genera sectional of a projective variety invariant under Pfaff Fields. This work is to study the evidence given by the authors Correa Junior and Jardim.

INTRODUÇÃO

O estudo de equações diferenciais complexas foi introduzido, no final do século XIX e muitos matemáticos como E. Picard, G. Darboux, H. Poincaré, P. Painlevé dentre outros, deram contribuições significativas para a teoria. P. Painlevé, contudo, esteve sempre preocupado em classificar equações diferenciais racionais do tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

a partir do comportamento de suas soluções, em que P e Q são polinômios complexos. No entanto, o estudo das equações diferenciais ganhou novas dimensões com a introdução da Teoria de Folheações, Topologia Diferencial e Teoria de Várias Variáveis Complexas e, nas últimas décadas, este estudo tem tido um desenvolvimento acentuado.

Uma das questões levantadas por Painlevé foi: “*é possível limitarmos o gênero da solução geral de uma equação diferencial algébrica em duas variáveis que possui integral primeira racional*”? Esta questão está relacionada ao conhecido Problema de Poincaré, que busca encontrar um limitante para o grau de soluções algébricas de equações diferenciais algébricas sobre o plano complexo. No artigo *Some examples for Poincaré and Painlevé problem*, Lins Neto nos exhibe uma família de folheações holomorfas que dão uma resposta negativa para o problema de Painlevé. Muitos matemáticos como, por exemplo, Cerveau, Lins Neto, Carnicer, Brunella, Esteves, Kleiman, Cavalier, Lehmann, dentre outros, tem trabalhado neste problema e sobre algumas generalizações.

O objetivo principal desta dissertação é estudar o problema de encontrar um limitante para o gênero seccional de uma variedade projetiva invariante por um Campo de Pfaff. Tal problema é conhecido por “*Problema de Painlevé para Campos de Pfaff*”. O termo *Pfaff* foi introduzido por Esteves e Kleiman e, em linhas gerais, trata-se de um mapa não trivial de feixes

$$\eta : \Omega_V^k \rightarrow L,$$

em que V é um esquema não singular, L é um feixe invertível sobre V e k é o posto da aplicação η e varia de 1 a $n - 1$, com n sendo a dimensão da variedade X . Provamos que se X é uma variedade projetiva de dimensão n , invariante por um campo de Pfaff $\mathcal{F}$ de posto $k < n$ e tem

fibrado tangente estável, então

$$\frac{2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2}{\deg(X)} \leq \frac{\deg(\mathcal{F}) - k}{\binom{n-1}{k-1}} + n - 1.$$

Após exibirmos tal limitante para variedades algébricas projetivas por um campo de Pfaff, provaremos que também podemos limitar o gênero seccional de variedades Fano, Calabi-Yau e Gorenstein, pois estas variedades possuem fibrado tangente estável.

Em linhas gerais, este trabalho encontra-se dividido do seguinte modo.

No Capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos fundamentais para a compreensão deste trabalho como, por exemplo, conceitos de funções holomorfas, fibrados vetoriais complexos, feixes em variedades, grupos Ext e feixes coerentes.

No Capítulo 2 abordamos de maneira mais consistente conteúdos como variedades algébricas projetivas, dando destaque para esquemas afins e projetivos, diferencial Kähler, feixe de diferenciais, feixe dualizante, feixe localmente livre e mostramos que existe uma relação entre estes feixes e fibrados vetoriais. Estudamos ainda Classes de Chern, Cohomologia de Čech, fibrados determinante e estável e finalizamos este capítulo com o estudo de gênero seccional. Sempre que possível procuramos dar uma abordagem geométrica ao conteúdo.

O Capítulo 3 foi destinado para falarmos sobre Folheações Holomorfas em $\mathbb{P}^n$ e Campos de Pfaff. Introduzimos o conceito de Distribuição Holomorfa e provamos, utilizando o Teorema de Frobenius, que folheações holomorfas localmente induzem distribuições e estas, por sua vez, induzem Campos de Pfaff. Mostramos assim que o campo sobre o qual trabalharemos no teorema principal desta dissertação é mais geral. Além disso, este campo possui características fundamentais que são utilizadas fortemente na demonstração do teorema, a saber, o fato de variedades invariantes por um Campo de Pfaff possuir seções globais não nulas.

No quarto capítulo abordamos o resultado principal da dissertação: O Problema de Painlevé para Campos de Pfaff. Abordamos um pouco o contexto histórico do problema e provamos que, para variedades projetivas X invariantes por um Campo de Pfaff $\mathcal{F}$, o gênero seccional é limitado pelo grau e posto do Campo $\mathcal{F}$ e também pela dimensão e grau da variedade X . Mostramos ainda que se as variedades Fano e Calabi-Yau possuírem fibrado tangente estável o teorema pode ser aplicado a elas e então provamos que o grau de uma variedade Fano é limitado pelo grau e posto do Campo $\mathcal{F}$. No caso da variedade Calabi-Yau invariante por um Campo de Pfaff, provamos que o posto do campo é sempre menor ou igual que seu grau, o que nos dá uma condição para dizermos quando uma variedade Calabi-Yau não é invariante por $\mathcal{F}$. Finalizamos este capítulo mostrando que para variedades Gorenstein X , o gênero seccional é limitado pelos graus do campo $\mathcal{F}$ e da variedade X .

Este trabalho ainda conta com o Apêndice que trata de alguns conteúdos importantes na compreensão de assuntos tratados nos Capítulos 1 e 2, como, por exemplo, Álgebra multilinear, funtor derivado, localização e limite direto.

Capítulo 1

Preliminares

Introduzimos esta dissertação apresentando alguns conceitos que nos permitem ter melhor compreensão do assunto a ser tratado neste trabalho. Nas duas primeiras seções falamos sobre aplicações holomorfas e variedades complexas, respectivamente, já que são sobre variedades complexas que fazemos nosso estudo e precisamos saber o que são aplicações holomorfas entre variedades. Na Seção 3 estudamos um pouco sobre fibrados vetoriais, apresentando sua definição, mostrando que fazendo operações entre fibrados podemos obter novos fibrados e, encerramos a seção falando sobre um importante fibrado para nós neste contexto, o fibrado tangente. A última seção deste capítulo é dedicada ao assunto de feixes: definimos pré-feixes e feixes, apresentamos algumas propriedades e definimos sequência exata de feixes. Na sequência, estudamos grupos Ext e feixes: para o estudo de grupos Ext foi necessário introduzirmos conceitos de espaço anelado, pois foi sobre este espaço que trabalhamos. Por fim, falamos um pouco sobre feixes coerentes, que são importantes neste trabalho.

1.1 Funções Holomorfas

1.1.1 Funções Holomorfas em uma variável

Nesta seção introduzimos o conceito de derivada de uma função complexa, análogo ao conceito de derivada de funções reais que já conhecemos.

Definição 1.1 *Sejam U um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Dizemos que f é uma **função holomorfa** em $z_0 \in \mathbb{C}$ se existe o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad (1.1)$$

e o número $f'(z_0)$ é dito **derivada** de f em z_0 .

Observe que a Equação 1.1 equivale a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = 0.$$

Assim, fazendo $o(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)$, $h = k + il$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $f'(z_0) = a_i b$, temos

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h \cdot f'(z_0) + o(h)$$

e

$$\begin{cases} u(z_0 + h) = u(x_0 + k, y_0 + l) = u(x_0, y_0) + ak - bl + o_1(h), \\ v(z_0 + h) = v(x_0 + k, y_0 + l) = v(x_0, y_0) + al - bk + o_2(h), \end{cases}$$

onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_1(h)}{|h|} = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_2(h)}{|h|} = 0$.

Facilmente percebemos que a matriz da transformação f' é dada por $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Então temos as seguintes relações

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -b = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{cases}$$

chamadas **Relações de Cauchy-Riemann**.

Com isso, temos uma prova para o teorema que segue.

Teorema 1.2 *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. São equivalentes:*

(a) *a função f é holomorfa em $z_0 \in U$.*

(b) *As partes real e imaginária de f satisfazem as condições de Cauchy-Riemann.*

Definição 1.3 *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é um **difeomorfismo** sobre $f(U)$, se $f(U)$ é aberto e $f : U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo com inversa f^{-1} diferenciável. Se f e f^{-1} são holomorfas, então dizemos que f é um **biholomorfismo**.*

Definição 1.4 *Seja U aberto de $\mathbb{C}$. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é **analítica** se, para todo $z_0 \in U$, existe uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)w^n$, com raio de convergência $\rho > 0$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n,$$

para todo $z \in U$ satisfazendo $|z - z_0| < \rho$.

Teorema 1.5 *Toda função analítica é holomorfa.*

Demonstração: Ver [14, Teorema 8, pag. 76] ■

Proposição 1.6 (Princípio de Identidade) *Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas em U , em que U é aberto e conexo. Se f e g coincidem num subconjunto A de U , então $f \equiv g$ em U .*

Demonstração: Ver [14, Corolário 2, pag. 111] ■

1.1.2 Funções Holomorfas em várias variáveis

Definição 1.7 *Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação e $p \in U$. Dizemos que f é diferenciável em p se existe uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ satisfazendo*

$$f(z) = f(p) + L(z - p) + \rho(z),$$

em que $\lim_{z \rightarrow p} \frac{\rho(z)}{\|z - p\|} = 0$.

A aplicação L é chamada **diferencial de f** em p e denotada por $df(p)$.

Proposição 1.8 *Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $p \in U$ e a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$. Então f é diferenciável em p se, e somente se, ela é diferenciável vista como uma aplicação de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2m}$ e sua diferencial real $L : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ em p é $\mathbb{C}$ -linear vista como aplicação $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$.*

Demonstração: Análogo ao caso de uma variável. ■

Definição 1.9 *Dizemos que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é **holomorfa em $p \in U$** se ela é diferenciável em todo ponto de uma vizinhança de p . Se f é holomorfa em todo ponto p de U , então dizemos que f é **holomorfa**.*

No sentido de provarmos que toda função analítica é holomorfa e vice-versa, vamos definir série de potência em várias variáveis.

Definição 1.10 *Uma **série de potências em $p \in \mathbb{C}^n$** com coeficientes em $\mathbb{C}^m$ é uma série da forma*

$$\sum_{\nu_1=0, \dots, \nu_n=0}^{\infty} A_{\nu_1, \dots, \nu_n} (z_1 - p_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - p_n)^{\nu_n},$$

*onde $A_{\nu_1, \dots, \nu_n} \in \mathbb{C}^m$. Dizemos que a série **converge** se existe um polidisco de centro em p e raio r*

$$\Delta = \Delta(p, r) = \{z \in \mathbb{C}^n; |z_i - p_i| < r_i, i = 1, \dots, n\},$$

tal que a série converge em cada ponto de Δ .

Definição 1.11 *Uma função em várias variáveis f é dita **analítica em p** se existe uma série de potências em p com coeficientes em $\mathbb{C}^m$ que converge em um polidisco $\Delta(p, r) \subset \mathbb{C}^n$ cuja soma coincide com o valor de f em p .*

Definição 1.12 *Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação contínua e $a \in U$. A aplicação f é **holomorfa na variável z_j** no ponto a se a função em uma variável $f(a_1, \dots, z_j, \dots, a_n)$ é derivável no ponto $z_j = a_j$, e denotamos sua derivada por $\frac{\partial f}{\partial z_j}(a)$. Dizemos simplesmente que f é **holomorfa em z_j** quando ela for derivável em z_j em todos os pontos do aberto U .*

Lema 1.13 *Se f é analítica em $a \in \mathbb{C}^n$, então f é analítica em uma vizinhança de a .*

Demonstração: Ver [21, Lema I.1.2, pag. 9]. ■

O Lema acima nos permite enunciar um resultado forte no estudo de aplicações holomorfas:

Teorema 1.14 *Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação contínua. A aplicação f é holomorfa em cada variável se, e somente se, f é analítica em U .*

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos $a = 0$. Tome $r > 0$ tal que

$$\overline{\Delta}(0, \underbrace{r, \dots, r}_{n\text{-vezes}}) \subset U.$$

Como f é holomorfa em cada variável, podemos aplicar n vezes a fórmula integral de Cauchy para uma variável, isto é,

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{|\xi_n|=r} \frac{d\xi_n}{\xi_n - z_n} \int_{|\xi_{n-1}|=r} \frac{d\xi_{n-1}}{\xi_{n-1} - z_{n-1}} \dots \int_{|\xi_1|=r} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1,$$

para todo $z \in \Delta(0, r, \dots, r)$.

Seja $\xi_j = re^{2\pi i t_j}$, com $0 \leq t_j \leq 1$ e $1 \leq j \leq n$. Pela continuidade de f podemos reescrever a integral acima como

$$\begin{aligned} f(z) &= r^n \int_{[0,1]^n} \frac{e^{2\pi i(t_1+\dots+t_n)} f(re^{2\pi i t_1}, \dots, re^{2\pi i t_n})}{(re^{2\pi i t_1} - z_1) \dots (re^{2\pi i t_n} - z_n)} dt_1 \cdot dt_n \\ &= \int_{[0,1]^n} \frac{f(re^{2\pi i t_1}, \dots, re^{2\pi i t_n})}{\left(1 - \frac{z_1}{re^{2\pi i t_1}}\right) \dots \left(1 - \frac{z_n}{re^{2\pi i t_n}}\right)} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Como $|z_j| < r$, para cada $j = 1, \dots, n$, segue

$$\frac{1}{1 - \frac{z_j}{re^{2\pi i t_j}}} = 1 + \frac{z_j}{re^{2\pi i t_j}} + \frac{z_j^2}{(re^{2\pi i t_j})^2} + \dots$$

e a série $\sum \frac{1}{1 - \frac{z_j}{re^{2\pi i t_j}}}$ é absolutamente convergente se $0 \leq t_j \leq 1$. Assim, fazendo o produto das séries para cada $j = 1, \dots, n$, teremos o desenvolvimento de f em série de potência convergente dentro do polidisco Δ . Portanto, f é analítica em 0 .

A recíproca segue do Lema 1.13. ■

Enunciaremos alguns resultados importantes no estudo de aplicações holomorfas. As provas serão omitidas e podem ser encontradas em [21].

Teorema 1.15 *Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se $|f|$ tem um valor máximo em U , então f é constante.*

Teorema 1.16 *Se $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é uma aplicação analítica não identicamente nula, então $f^{-1}(0)$ tem interior vazio. Em outras palavras, os zeros de uma função analítica são isolados.*

1.2 Variedades Complexas

Introduzimos agora o assunto que é a base do nosso trabalho: *variedades complexas*. Sobre elas definiremos praticamente todos os nossos objetos de estudo. Assim, a menos que se faça menção contrária, nesta seção o par (M, τ) denota o espaço topológico M com a topologia τ e $\mathbb{C}^n$ possui a topologia usual.

Definição 1.17 *Sejam $U \in \tau$ e $V \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Uma **carta local** de dimensão n é um homeomorfismo*

$$\varphi : U \in \tau \rightarrow V \subset \mathbb{C}^n.$$

*Se M pode ser coberto por domínios de cartas locais, então M é um **espaço topológico localmente euclidiano**.*

Definição 1.18 *Uma **variedade topológica** de dimensão n é um espaço topológico localmente euclidiano, Hausdorff e com base enumerável de abertos.*

Exemplo 1.19 *O exemplo canônico de variedade topológica é o espaço euclidiano $\mathbb{C}^n$.*

Definição 1.20 *Sejam $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$ e $\psi : V \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$ cartas de um espaço topológico. Dizemos que φ e ψ são **compatíveis** se, na interseção não vazia de abertos $U \cap V$, a função transição (ou função mudança de parâmetro)*

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

for holomorfa.

Definição 1.21 (i) *Um conjunto de cartas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ que cobrem o espaço topológico M é dito **atlas holomorfo** sobre uma variedade topológica M .*

(ii) *Dizemos que uma carta (V, ψ) é **compatível com um atlas** $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ se (V, ψ) é compatível com todas as cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ do atlas.*

(iii) *O atlas holomorfo é dito um **atlas maximal** se ele não está contido em um atlas maior.*

Proposição 1.22 *O atlas maximal existe e é único.*

Demonstração: A prova é feita por construção. Seja $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlas sobre um espaço localmente euclidiano. Adicione ao atlas $\mathcal{A}$ todas as cartas compatíveis com $\mathcal{A}$. Logo, as cartas são todas compatíveis umas com as outras, por definição. Essa coleção é um novo atlas, onde todas as cartas são compatíveis. Portanto, este atlas é maximal, por construção.

Para provarmos a unicidade, sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ dois atlas maximais. Como $\mathcal{A}$ é maximal, então $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Por outro lado, $\mathcal{A}'$ é maximal, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, e temos a unicidade. ■

Observação 1.23 *A prova da proposição anterior também pode ser feita utilizando o Lema de Zorn.*

Após as definições acima, podemos dizer o que é uma variedade complexa.

Definição 1.24 Uma **variedade complexa** n -dimensional M é um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável de abertos e uma cobertura $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ por abertos de M tal que existem homeomorfismos

$$\varphi_\gamma : U_\gamma \rightarrow V_\gamma \subset \mathbb{C}^n$$

satisfazendo a seguinte condição: se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a função transição

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é holomorfa.

Exemplo 1.25 (01) O espaço $\mathbb{C}^n$ com a topologia usual e o atlas $\phi = \{(\mathbb{C}^n, Id_{\mathbb{C}^n})\}$ é uma variedade complexa.

(02) Para cada aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ holomorfa, o **gráfico** de f , dado por

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbb{C}^m\}$$

é uma variedade diferenciável. Para provarmos, considere as cartas

$$\begin{array}{ccc} \varphi : Gr(f) & \rightarrow & U \\ (x, f(x)) & \mapsto & x \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \Psi : U & \rightarrow & Gr(f) \\ x & \mapsto & (x, f(x)). \end{array}$$

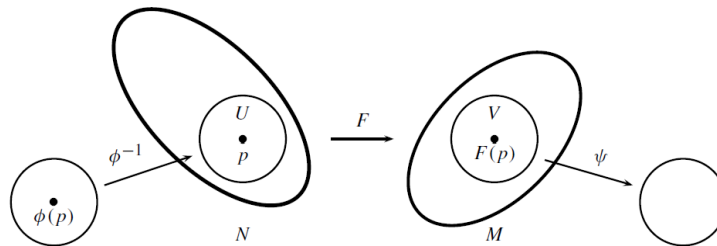
Observe que φ (projeção) e Ψ (imersão) são contínuas e inversas uma da outra, o que implica que Ψ é homeomorfismo. O atlas de f contém uma única carta dada por $\{(Gr(f), \varphi)\}$.

Aplicações diferenciáveis entre variedades

Sejam (M, ψ_1) e (N, ψ_2) variedades complexas com dimensão m e n , respectivamente. Considere a aplicação

$$F : N \rightarrow M.$$

Dizemos que F é **holomorfa** em $p \in N$ se existem cartas locais $(U, \varphi), (V, \Psi)$ tais que $p \in U$, $F(U) \subset V$ e $\Psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é holomorfa em $\varphi(p)$.



Observação 1.26 A aplicação $\Psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é chamada **expressão local** de F .

Definição 1.27 Dizemos que $F : N \rightarrow M$ é um **biholomorfismo** se F é uma bijeção holomorfa com inversa holomorfa.

Imersões, Submersões, Mergulhos e Subvariedades

Sejam (M, ψ_1) e (N, ψ_2) variedades complexas com dimensão m e n , respectivamente e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação holomorfa.

Definição 1.28 Dizemos que F tem **posto** k em um ponto $p \in M$, e denotamos por $rk_f(p)$, se existem cartas locais $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, com $p \in U$ e $\Psi : V \rightarrow \Psi(V)$, $F(U) \subset V$ tais que

$$D_{\varphi(p)}(\Psi \circ F \circ \varphi^{-1}) : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$$

tem posto k .

Definição 1.29 (i) Uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ é uma **imersão** se $rk_f(p) = m$, para todo $p \in M$, ou seja, a derivada $D_{\varphi(p)}(f)$ é injetiva. Se, para todo $p \in M$ temos $rk_f(p) = n$, então f é dita uma **submersão**.

(ii) Um **mergulho** é uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ que é uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem.

(iii) Uma **subvariedade complexa** N de dimensão m' é um subconjunto $N \subset M$ que possui estrutura de variedade complexa tal que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} i & : & N \rightarrow M \\ & & p \mapsto p \end{array}$$

é um mergulho holomorfo.

1.3 Fibrados Vetoriais

Esta seção destina-se ao estudo de *fibrados vetoriais*. Este é um conceito importante em Geometria Algébrica e que será bastante abordado neste trabalho. Ao longo desta seção M variedade complexa.

Definição 1.30 Um **fibrado vetorial complexo** de posto k sobre M é um espaço topológico E junto com uma aplicação contínua $\pi : E \rightarrow M$ satisfazendo:

- (i) Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x) = E_x$ tem estrutura de espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e é chamado **fibra** do fibrado E ;
- (ii) Existem uma cobertura por abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ (**cobertura trivializadora**) de M e homeomorfismos (**trivializações locais**)

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

tais que

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n$$

são isomorfismos de espaços vetoriais, para todos $\alpha \in \Lambda$ e $x \in U_\alpha$.

A terna (E, π, M) é dita o *fibrado vetorial com espaço total E , projeção π e espaço base M* .

A condição (ii) nos diz que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C} \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

é comutativo e, assim, nos garante a boa definição das fibras E_x . Aqui, p_1 é a projeção na primeira coordenada.

Um importante exemplo de fibrado é o

Exemplo 1.31 (Fibrado trivial) *O fibrado trivial de posto k sobre um espaço topológico M , denotado por $\underline{\mathbb{C}^k}$, é definido por*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{C}^k} & = & M \times \mathbb{C}^k \\ & & \downarrow \pi \\ & & M, \end{array}$$

onde $\pi(x, v) = x$.

Definição 1.32 *Seja E espaço topológico com estrutura de variedade complexa. Seja $\pi : E \rightarrow M$ projeção. Uma aplicação holomorfa*

$$s : M \rightarrow E,$$

*que satisfaz $\pi \circ s = I_M$ é chamada uma **seção holomorfa** de E . Denotamos por $\Gamma(M, E)$ o $\mathcal{O}(M)$ -módulo das seções holomorfas do fibrado E .*

Exemplo 1.33 *Seja $f \in \mathcal{O}(M)$. É fácil ver que a aplicação gráfico*

$$\begin{array}{ccc} s & : & M \rightarrow \mathbb{C}^n \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

é uma seção holomorfa de $\mathbb{C}^n$.

Sejam $\eta = (E, \pi, M)$ um fibrado de posto r , $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura trivializadora e $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ trivializações locais de E . Para $\alpha, \beta \in \Lambda$, suponhamos $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Assim, se $x \in U_{\alpha\beta}$, as aplicações

$$\varphi_{\alpha x}, \varphi_{\beta x} : E_x \rightarrow \mathbb{C}^r$$

são isomorfismos lineares. Logo, $\varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1}$ é um elemento do Grupo Linear Geral $r \times r$ sobre $\mathbb{C}$, ou seja,

$$\varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1} \in GL(r, \mathbb{C})$$

e também define a aplicação contínua

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\beta} &: U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(r, \mathbb{C}) \\ x &\mapsto \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1}.\end{aligned}$$

As aplicações φ_α e φ_β são chamadas **funções de transição** do fibrado E e elas satisfazem as **condições de cociclo**:

$$(i) \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1} \quad \text{e} \quad (ii) \quad \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = I \quad \text{em } U_{\alpha\beta\gamma}.$$

De fato.

$$(i) \quad \varphi_{\beta\alpha}^{-1} = (\varphi_{\beta x} \circ \varphi_{\alpha x}^{-1})^{-1} = \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x} = \varphi_{\alpha\beta}.$$

$$(ii) \quad \text{Temos } \varphi_{\alpha\beta}^{-1} = (\varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1}), \quad \varphi_{\beta\gamma}^{-1} = (\varphi_{\beta x} \circ \varphi_{\gamma x}^{-1}) \text{ e } \varphi_{\gamma\alpha}^{-1} = (\varphi_{\gamma x} \circ \varphi_{\alpha x}^{-1}). \text{ Assim,}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = (\varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1}) \circ (\varphi_{\beta x} \circ \varphi_{\gamma x}^{-1}) \circ \varphi_{\gamma x} \circ (\varphi_{\alpha x}^{-1}) = I.$$

Definição 1.34 *Sejam $\eta = (E, \pi_\eta, M)$ e $\varsigma = (F, \pi_\varsigma, M)$ fibrados vetoriais de posto r e s , respectivamente, e de mesmo espaço base. Um **morfismo de fibrados***

$$\psi : E \rightarrow F$$

é uma aplicação contínua que satisfaz:

$$(i) \quad \psi(E_x) = F_x \text{ e}$$

$$(ii) \quad \text{para cada } x \in M, \text{ a aplicação } \psi|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x \text{ é linear.}$$

Em outras palavras, uma aplicação entre fibrados é um morfismo se o for sobre cada fibra de seu fibrado.

Proposição 1.35 *Se $\psi : E \rightarrow F$ é um morfismo de fibrados, então existem uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ comum aos fibrados E e F , e uma coleção de aplicações contínuas $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tais que*

$$\theta_{\alpha\beta} \cdot a_\beta = a_\alpha \cdot \theta_{\alpha\beta}.$$

Demonstração: Considere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cobertura trivializadora comum aos fibrados E e F e $\{\varphi_\alpha\}$ e $\{\theta_\alpha\}$ as coberturas trivializadoras de E e F , respectivamente. Para cada $\alpha \in \Lambda$, a aplicação ψ induz outra aplicação

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^s.$$

Observe o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_\eta^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\psi} & \pi_\varsigma^{-1}(U_\alpha) \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow \theta_\alpha \\ U_\alpha \times \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\psi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C}^s \end{array}$$

Temos $\psi_\alpha : \theta_\alpha \circ \psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Como $\psi(E_x) \subset F_x$, para todo $x \in M$, então

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C}^r &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^s \\ (x, v) &\mapsto (x, \theta_\alpha \circ \psi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, v)) = (x, (\theta_\alpha \circ \psi_x \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot v). \end{aligned}$$

Agora, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r & \xleftarrow{\varphi_\beta} & \pi_\eta^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \\ \psi_\beta \downarrow & & \psi \downarrow & & \psi_\alpha \downarrow \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^s & \xleftarrow{\theta_\beta} & \pi_\zeta^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\theta_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^s \end{array}$$

Observe que

$$\psi_\beta = \theta_\beta \circ \theta_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} \circ \psi_\beta &= \psi_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \Leftrightarrow \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} \circ \psi_\beta(x, v) = \psi_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \theta_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta(x, v) &= \psi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}(x, v) \Leftrightarrow \theta_{\alpha\beta}(x, (\theta_{\beta x} \circ \psi_x \circ \varphi_{\alpha\beta}^{-1}) \cdot v) = \psi_\alpha(x, \varphi_{\alpha\beta} \cdot v) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot a_\beta \cdot v) &= (x, \theta_\alpha \circ \psi \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta} \cdot v) \Leftrightarrow (x, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot a_\beta \cdot v) = (x, a_\alpha \cdot \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v), \end{aligned}$$

onde $a_\alpha = \theta_\alpha \circ \psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ e $a_\beta = \theta_\beta \circ \psi \circ \varphi_\beta^{-1}$. Daí,

$$\theta_{\alpha\beta} \cdot a_\beta = a_\alpha \cdot \varphi_{\alpha\beta}.$$

■

A proposição acima nos mostra como a aplicação ψ relaciona as funções de transição de dois fibrados. A recíproca deste resultado também é válida.

1.3.1 Operações entre fibrados

Operações como soma direta, produto exterior, produto tensorial e o pull-back podem ser feitas entre fibrados. Para isso, os fibrados precisam estar definidos sobre uma mesma base e então trabalhamos utilizando suas respectivas matrizes das trivializações. O resultado que segue nos mostra como construir fibrados vetoriais holomorfos.

Considere o espaço topológico $\coprod_{\alpha \in \Lambda} (U_\alpha \times \mathbb{C}^r)$ com a topologia produto. Defina a relação de equivalência

$$“(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v) \Leftrightarrow y = x \text{ e } \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u.”$$

Proposição 1.36 *Sejam $\{U_\alpha\}$ uma cobertura por abertos da variedade complexa M . Se $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo, então*

$$E = \frac{\coprod U_\alpha \times \mathbb{C}^k}{\sim}$$

é um fibrado vetorial holomorfo.

Sejam $\eta = (E, \pi_\eta, M, \mathbb{C}^r)$ e $\varsigma = (F, \pi_\varsigma, M, \mathbb{C}^s)$ fibrados com mesma base M e trivializações locais $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ e $\{\theta_{\alpha\beta}\}$, respectivamente. Podemos construir os seguintes fibrados:

Fibrado	Trivializações locais	Fibras
E^*	$\{(\varphi_{\alpha\beta}^{-1})^t\}$	$(\mathbb{C}^r)^*$
$E \otimes F$	$\{\varphi_{\alpha\beta} \otimes \theta_{\alpha\beta}\}$	$\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s$
$E \oplus F$	$\{\varphi_{\alpha\beta} \oplus \theta_{\alpha\beta}\}$	$\mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^s$
$\bigwedge^n E$	$\{\bigwedge^n(\varphi_{\alpha\beta})\}$	$\bigwedge^n \mathbb{C}^r$

Sejam X e Y variedades complexa e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação entre variedades. Se $\eta = (E, \pi, M)$ é um fibrado vetorial de posto k , então o mapa f induz um fibrado f^*E sobre Y de mesmo posto, chamado **fibrado pull-back**, da seguinte maneira: considere o conjunto

$$f^*E = \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = \pi(e)\}.$$

Pelo modo como foi construído podemos perceber que usando as trivializações do fibrado E , as fibras de f^*E sobre Y são isomorfas a $E_{f(x)}$. E mais, os cociclos $g_{\alpha\beta}$ de E induzem os cociclos de f^*E , dados por $g_{\alpha\beta} \circ f$.

1.3.2 Complexificação de fibrados vetoriais reais

Seja V um espaço vetorial real. O produto tensorial

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

é um espaço vetorial complexo, chamado **complexificação** de V .

Sabemos que um fibrado fica determinado pelas suas fibras. Assim, para complexificarmos um fibrado vetorial real basta complexificar cada uma de suas fibras, ou seja, se para cada $x \in M$, E_x é uma fibra do fibrado E , então $E_x \otimes \mathbb{C}$ é uma fibra do fibrado complexificado, chamada **complexificação de E** . E mais, cada elemento $E_x \otimes \mathbb{C}$ é escrito de modo único como $u + iv$, com $u, v \in E_x$, ou seja,

$$E_x \otimes \mathbb{C} = E_x \oplus iE_x,$$

uma vez que um fibrado vetorial complexo $E \otimes \mathbb{C}$ é isomorfo a decomposição $E \otimes E$, como fibrado vetorial real.

Proposição 1.37 *Seja V um espaço vetorial complexo. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in V$, a equação $\lambda * v = \bar{\lambda}v$ define uma ação de $\mathbb{C}$ em V .*

Demonstração: A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda * v = \bar{\lambda}v \end{aligned}$$

é uma ação de $\mathbb{C}$ em V , pois

- (i) $\varphi(e, v) = e * v = \bar{e}v = ev = v$, para todo $v \in V$;
- (ii) $\varphi(\beta, \varphi(h, v)) = \beta * \varphi(h, v) = \bar{\beta} \cdot \varphi(h, v) = \bar{\beta}(\bar{h}v) = (\bar{\beta}\bar{h}v) = (\beta h) * v = \varphi(\beta h, v)$, para todo $\beta \in \mathbb{C}$ e para todo $v \in V$.

■

O conjunto V com estrutura de grupo aditivo, munido da ação definida acima como multiplicação é chamado **espaço vetorial conjugado** de V , denotado por $\bar{V}$ e nos permite construir o chamado **fibrado conjugado**, $\bar{E}$, cujas fibras são $\bar{E}_x$ e funções de transição $\bar{g}_{\alpha\beta}$.

1.3.3 Campo de vetores e formas diferenciais

O Fibrado Tangente

Considere o conjunto

$$TM := \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} \pi &: TM \rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto p. \end{aligned}$$

Sejam U um aberto de M e $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma carta local em M . Temos

$$\begin{aligned} T\varphi &: TU \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{2n} \\ (p, v) &\mapsto (\varphi(p), (d\varphi)_p \cdot v) \end{aligned}$$

Definição 1.38 A variedade $(TM, T\Phi)$ é chamada **fibrado tangente** com $\Phi = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ atlas maximal de M .

Campos de vetores

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Um **campo vetorial** de classe C^∞ sobre M é uma seção do fibrado tangente, de classe C^∞ . Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos C^∞ sobre M , ou seja,

$$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM).$$

Seja $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ um atlas diferenciável da variedade M e X um campo vetorial. Pelas trivializações locais do fibrado tangente percebemos que, em cada aberto U_α , o campo X é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} X|_{U_\alpha} &: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto (x, X_\alpha(x)), \end{aligned}$$

onde $X_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de classe C^∞ , chamada **representação local de M** . No entanto, se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, as representações locais do campo X em U_α e U_β se relacionam por

$$X_\beta = [D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta)_{\varphi_\alpha(x)}] \cdot X_\alpha(x),$$

onde $x \in U_{\alpha\beta}$.

Seja $\{(x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ um sistema de coordenadas locais de M . O espaço tangente $T_x M$ de M em cada ponto $x \in U$ é gerado pelos vetores

$$D\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)) \cdot e_j := \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

onde e_j são os vetores da base canônica de $\mathbb{C}^n$. Assim, uma representação local de um campo de vetores X em M no sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha$ é dada por

$$X = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

com $P_j \in C^\infty(U_\alpha)$.

Observação 1.39 *A representação acima nos permite visualizar um campo de vetores X como uma derivação $f \mapsto X(f) := df(X)$, que é a derivada direcional de f na direção do campo X . Em coordenadas locais, temos*

$$X(f) = \left(\sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f) = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Formas diferenciáveis

Definição 1.40 *Uma p -forma diferenciável em uma variedade M é uma seção diferenciável*

$$w : M \rightarrow \bigwedge^p (TM)^*$$

do fibrado $\bigwedge^p (TM)^$.*

Denotamos o espaço das p -formas diferenciáveis por $\bigwedge^p(M) = \Gamma(M, \bigwedge^p(TM)^*)$.

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cobertura por abertos de M . Lembremos que o espaço tangente $T_x M$ de M em cada ponto $x \in U_\alpha$ é gerado pelos vetores

$$D\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)) \cdot e_j := \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x).$$

Considere novamente um sistema de coordenadas locais $\{(x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ de M . Tome a base dual de $T_x M$ dada pelas formas lineares $\{dx_1(x), \dots, dx_n(x)\}$ tal que

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Portanto, uma p -forma diferenciável w pode ser dada localmente como uma aplicação

$$\begin{aligned} w|_{U_\alpha} : U_\alpha &\rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times (\bigwedge^p \mathbb{C}^n)^* \\ x &\mapsto (x, w_\alpha(x)), \end{aligned}$$

onde $w_\alpha : U_\alpha \rightarrow \bigwedge^n \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de classe C^∞ dita **representação local de w** . Então, a representação local de w pode ser escrita como

$$w = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} P_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

com $P_{i_1, \dots, i_p} \in C^\infty(U_\alpha)$.

Definição 1.41 Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores e uma p -forma diferenciável w , definimos a **contração** de w na direção de X por

$$\begin{aligned} i_X(w)(x) &: \underbrace{\mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n}_{p \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{C}^n \\ (v_1, \dots, v_p) &\mapsto w(x)(X(x), v_1, \dots, v_{p-1}), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.42 Seja $w \in \bigwedge^p(M)$ uma p -forma diferenciável. A **diferencial exterior** de w é a $(p+1)$ -forma, definida localmente por

$$dw := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} dP_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Proposição 1.43 Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, $w \in \bigwedge^q M$ e $\theta \in \bigwedge^p N$. Então

- (i) $f^*(w \wedge \theta) = f^*w \wedge f^*\theta \in \bigwedge^q M$;
- (ii) $df^*(w) = f^*(dw)$;
- (iii) $d^2(w) = 0$;
- (iv) $d(w \wedge \theta) = dw \wedge \theta + (-1)^{pq}w \wedge d\theta$.

Demonstração: Segue da definição de diferencial exterior. ■

1.4 Feixes

Definição 1.44 Seja X um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um **pré-feixe** de grupos abelianos sobre X se

- (a) para todo subconjunto aberto $U \subset X$ existe um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ e
- (b) para toda inclusão $V \subset U$ de subconjuntos abertos de X a aplicação $\rho_{uv} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ é um homomorfismo de grupos abelianos, satisfazendo:

- (i) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;

- (ii) $\rho_{uu} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ é a aplicação identidade e
- (iii) se $W \subset V \subset U$ são subconjuntos abertos, então $\rho_{uw} = \rho_{uv} \circ \rho_{vw}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{uw}} & \mathcal{F}(W) \\ & \searrow \rho_{uv} & \uparrow \rho_{vw} \\ & & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Definimos pré-feixes de grupos abelianos, mas podemos definir pré-feixe sobre qualquer categoria: grupos, anéis, conjuntos, de acordo com a necessidade de estudo.

Observação 1.45 (01) Se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe sobre um espaço topológico X , referimo-nos aos elementos do grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ sendo as **seções** do pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre o conjunto aberto U .

(02) É comum utilizarmos a notação $\Gamma(U, \mathcal{F})$ para denotarmos o grupo $\mathcal{F}(U)$.

(03) Chamamos as aplicações ρ_{uv} de **aplicações restrições**.

Definição 1.46 Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre um espaço topológico X . Dizemos que $\mathcal{F}$ é um **feixe** se satisfaz as seguintes condições adicionais:

- (c) (Localização) se U é um conjunto aberto, $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U e $s \in \mathcal{F}(U)$ é tal que $s|_{V_i} = 0$, para todo i , então $s = 0$;
- (d) (Globalização) se U é um conjunto aberto, $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U e $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ satisfaz, para cada i, j , $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$, para cada i .

Exemplo 1.47 Seja X uma variedade complexa. Para cada conjunto aberto $U \subset X$, considere

$$\mathcal{O}(U) = \{f \text{ holomorfa em } U\}$$

o anel das funções regulares de U em $\mathbb{C}$ e, para cada $V \subset U$, seja $\rho_{uv} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ o mapa restrição. Não é difícil verificar que $\mathcal{O}$ é um feixe de anéis sobre X . As condições de ser pré-feixes são satisfeitas pela natureza da aplicação e as de ser feixes seguem do Princípio da Identidade.

Seja $p \in X$ e $\mathcal{F}$ um feixe em X . Considere o par (U, s) , onde $U \subset X$ é aberto e $s \in \mathcal{F}(U)$. Defina a seguinte relação de equivalência

$$“ \langle U, s \rangle \sim \langle V, s' \rangle \text{ se existe um aberto } W \subset U \cap V \text{ tal que } s|_W = s'|_W.”$$

Definição 1.48 O **talo** de $\mathcal{F}$ em p , denotado por $\mathcal{F}_p$, é dado por

$$\mathcal{F}_p = \{ \langle U, s \rangle; U \text{ é um aberto contendo } p, s \text{ seção de } \mathcal{F} \text{ em } U \} / \sim.$$

As classes de equivalência são denominadas **germes** de $\mathcal{F}$ em p .

Definição 1.49 *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ pré-feixes sobre um espaço topológico X . Um **morfismo de feixes***

$$\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$$

consiste de um morfismo de grupos abelianos

$$\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U),$$

onde U é um aberto do espaço X tal que, sempre que $V \subset U$, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{uv} \downarrow & & \downarrow \rho'_{uv} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

*Se cada componente de $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é bijetora, então temos um **isomorfismo** em cada componte.*

Proposição 1.50 *Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes sobre um espaço topológico X . Então φ é um isomorfismo se, e somente se, a aplicação induzida sobre o talo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ é um isomorfismo, para todo $p \in X$.*

Demonstração: Suponhamos que φ seja um isomorfismo. Então φ é isomorfismo em cada vizinhança de $p \in X$. Portanto, φ_p é isomorfismo (pois é uma restrição).

Reciprocamente, se $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ é um isomorfismo para toda vizinhança de $p \in X$. Vamos mostrar que $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é isomorfismo para todo aberto U do espaço topológico X . Considere, para todo $s \in \mathcal{F}(U)$, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U) & : & \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \\ & & s \mapsto \varphi(s). \end{array}$$

Suponha $\varphi(s) \equiv 0$. Então, para toda vizinhança de $p \in U$, a imagem $\varphi(s)_p$ de $\varphi(s)$ no talo $\mathcal{G}_p$ é nula. Pela injetividade de φ_p em cada vizinhança de p segue que $s_p = 0$ em $\mathcal{F}_p$, para cada $p \in U$. Por outro lado, se $s_p = 0$, então s e 0 tem a mesma imagem. Logo, existe uma vizinhança aberta W_p de p com $W_p \subset U$ tal que $s|_{W_p} = 0$. Sendo assim, U é coberto por vizinhanças de W_p de todos os seus pontos e, pela condição (c) da Definição de Feixes temos $s = 0$ em U . Portanto, $\varphi(U)$ é injetora.

A sobrejetividade de $\varphi(U)$ é garantida pela colagem imposta pela condição (d) da definição de Feixes.

Suponha que tenhamos a seção $t \in \mathcal{G}(U)$. Para cada vizinhança de p no aberto U temos $t_p \in \mathcal{G}_p$ o germe da seção t na vizinhança de p . Como φ_p é sobrejetora, existe $s_p \in \mathcal{F}_p$ tal que $\varphi_p(s_p) = t_p$.

Considere que s_p seja representado por $s(p)$ em uma vizinhança V_p do ponto p . Então $\varphi(s(p))$ e $t|_{V_p}$ são dois elementos de $\mathcal{G}_p$ com os mesmos germes na vizinhança de p . Mas pode ser que $\varphi(s(p))$ e $t|_{V_p}$ sejam diferentes. Neste caso, podemos tomar uma vizinhança de V_p de p suficientemente pequena, de modo que tenhamos $\varphi(s(p)) = t|_{V_p}$ em $\mathcal{G}(V_p)$.

Do modo como estamos construindo, U é coberto por conjuntos abertos V_p e, para cada V_p temos uma seção $s(p) \in \mathcal{F}(V_p)$.

Sejam p, q pontos tais que $s(p) \mid_{V_p \cap V_q}$ e $s(q) \mid_{V_p \cap V_q}$ sejam duas seções de $\mathcal{F}(V_p \cap V_q)$ levadas por φ em $t \mid_{V_p \cap V_q}$. A injetividade de φ nos garante que $s(p) \mid_{V_p \cap V_q} = s(q) \mid_{V_p \cap V_q}$ e, pela condição (d) da Definição de Feixes, existe uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s \mid_{V_p} = s(p)$, para cada p .

Agora, note que $\varphi(s)$ e t são duas seções de $\mathcal{G}(U)$. Então, para cada p temos $\varphi(s) \mid_{V_p} = t \mid_{V_p}$, ou seja, $\varphi(s) \mid_{V_p} - t \mid_{V_p} = 0$. Daí, pela condição (c) da referida definição, segue que

$$\varphi(s) - t = 0 \Rightarrow \varphi(s) = t$$

e temos φ sobrejetora. ■

Definição 1.51 *Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes. Definimos*

(i) *o pré-feixe núcleo de φ por*

$$\begin{aligned} \phi & : X \rightarrow Ab \\ U & \mapsto \text{Ker}(\varphi(U)) \end{aligned}$$

(ii) *o pré-feixe co-núcleo de φ por*

$$\begin{aligned} \phi & : X \rightarrow Ab \\ U & \mapsto \text{Coker}(\varphi(U)) = \frac{\mathcal{G}}{\text{Im}(\varphi)} \end{aligned}$$

(iii) *pré-feixe imagem de φ sendo*

$$\begin{aligned} \phi & : X \rightarrow Ab \\ U & \mapsto \text{Im}(\varphi(U)) \end{aligned}$$

Proposição 1.52 *Se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe, então existem um feixe $\mathcal{F}^+$ e um morfismo $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ tal que, para qualquer feixe $\mathcal{G}$ e qualquer morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ existe único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. Além disso, o par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Para nos auxiliar na compreensão da demonstração, nosso objetivo é construir o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F}^+ \\ \downarrow \varphi & \searrow \psi & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

Dado o conjunto aberto U , considere $\mathcal{F}^+(U)$ o conjunto das funções

$$s : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} \mathcal{F}_p,$$

onde $\bigcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$ é a união dos talos de $\mathcal{F}$ sobre pontos do aberto U tal que para cada $p \in U$ temos $s(p) \in \mathcal{F}_p$ e existe uma vizinhança V de p contida em U e um elemento $t \in \mathcal{F}(V)$ tal que para todo ponto $q \in V$ o germe $t_q = s(q)$.

Note que $\mathcal{F}^+$ com a restrição natural de aplicações é um feixe e existe um morfismo natural $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ que é descrito pela propriedade universal, que garante a unicidade da aplicação $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$. Consequentemente, o feixe $\mathcal{F}^+$ também é único, a menos de isomorfismo. ■

O feixe $\mathcal{F}^+$ criado deste modo é chamado **feixe associado ao pré-feixe $\mathcal{F}$** . A importância em se definir feixes associados é que estes nos auxiliam na construção de novos feixes.

Definição 1.53 Um **sub-feixe** de um feixe $\mathcal{F}$ é um feixe $\mathcal{F}'$ tal que, para todo conjunto aberto $U \subset X$ temos $\mathcal{F}'(U)$ um subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ e as aplicações restrições do feixe $\mathcal{F}'$ são induzidas pelas aplicações do feixe $\mathcal{F}$.

Da definição anterior, para qualquer ponto p , o talo $\mathcal{F}'_p$ é um subgrupo de $\mathcal{F}_p$.

Definição 1.54 Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes. Definimos o **núcleo de φ** , e denotamos por $\text{Ker}(\varphi)$, sendo o pré-feixe núcleo de φ . Além disso, φ é monomorfismo se $\text{Ker}(\varphi) = 0$ e $\text{Ker}(\varphi)$ é um feixe.

Definimos a **imagem de φ** , e denotamos por $\text{Im}(\varphi)$, sendo o feixe associado ao pré-feixe imagem de φ . Assim, φ é epimorfismo se $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$.

Definição 1.55 Dizemos que uma sequência de feixes e morfismos

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

é **exata** se em cada etapa temos $\text{Ker}(\varphi^i) = \text{Im}(\varphi^{i-1})$.

Exemplo 1.56 Utilizando a definição de sequência exata, vemos facilmente que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

é exata se, e somente se, φ é monomorfismo. Analogamente, a sequência

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

é exata se, e somente se, φ é epimorfismo.

Proposição 1.57 Sejam feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X . A sequência

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

é exata se, e somente se, a sequência de talos, em cada $p \in X$

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}_p^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1,p}} \mathcal{F}_p^i \xrightarrow{\varphi^{i,p}} \mathcal{F}_p^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1,p}} \dots$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos abelianos.

1.4.1 O Funtor Ext e Feixes

Nesta seção estudaremos os *Grupos Ext*. Para isso, trabalharemos sobre espaços anelados $(X, \mathcal{O}_X)$.

Definição 1.58 (a) Um **espaço anelado** é um par $(X, \mathcal{O}_X)$ consistindo de um espaço topológico X e um feixe de anéis $\mathcal{O}_X$ sobre X .

(b) Um **morfismo de espaços anelados** $(X, \mathcal{O}_X)$ em outro $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um par de mapas contínuo $f : X \rightarrow Y$ e outro $f^\sharp \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ de feixes de anéis sobre Y .

(c) Um espaço anelado é dito **espaço localmente anelado** se, para cada $p \in X$, o talo $\mathcal{O}_{X,p}$ é um anel local.

(d) Um **morfismo de espaços localmente anelado** é um morfismo $(f, f^\sharp)$ de espaços anelados tal que, para cada ponto $p \in X$, o mapa induzido de anéis locais $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ é um homomorfismo local de anéis locais.

(e) Se o par de morfismos $(f, f^\sharp)$ tem inverso, então temos um **isomorfismo de espaços anelados**.

Utilizaremos as seguintes notações ao longo desta seção:

- (01) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ são $\mathcal{O}_X$ -módulos;
- (02) $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ denota o grupo dos homomorfismos entre $\mathcal{O}_X$ -módulos;
- (03) $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ representa o feixe de homomorfismos entre $\mathcal{O}_X$ -módulos.

Antes de começarmos vamos lembrar que, fixado um feixe $\mathcal{F}$, $\text{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$ é um funtor covariante exato a esquerda da categoria dos feixes de módulos sobre um espaço anelado, $\mathfrak{Mod}(X)$, na categoria dos grupos abelianos, $\mathfrak{U}(X)$. Além disso, $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \cdot)$ é um funtor covariante exato a esquerda da categoria $\mathfrak{Mod}(X)$ em $\mathfrak{Mod}(X)$. [Para melhor compreensão desta seção sugerimos ao leitor ver o Apêndice B.]

Suponhamos que $\mathfrak{Mod}(X)$ tenha injecções suficientes, ou seja, todo sub-objeto em $\mathfrak{Mod}(X)$ é isomorfo a um objeto injetivo nesta mesma categoria. Faz sentido a seguinte definição:

Definição 1.59 Sejam $(X, \mathcal{O}_X)$ espaço anelado e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$ -módulo. Definimos o **funtor** $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \cdot)$ sendo o funtor derivado a direita de $\text{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$ e $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \cdot)$ sendo o funtor derivado a direita de $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \cdot)$.

Lembremos que o funtor derivado a direita é definido sendo

$$R^i F(A) = h^i(F(I')) = \frac{\text{Ker } d^i}{\text{Im } d^{i-1}},$$

onde $d^i : A^i \rightarrow A^{i+1}$ é um elemento do complexo e A é um objeto numa categoria abeliana.

Observemos que, pela parte (b) do Teorema B.13, segue que

$$Ext^0(\cdot, \cdot) = R^0 Hom(\cdot, \cdot) = Hom(\cdot, \cdot).$$

E mais, pela parte (c) do mesmo resultado conseguimos uma sequência exata longa de funtores Ext a partir de uma sequência exata curta de objetos injetivos.

Suponhamos $\mathcal{G}$ objeto injetivo na categoria $\mathfrak{Mod}(X)$. Então

$$Ext^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = R^i Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \frac{Ker(Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^i}{Im(Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^{i-1}} = 0, \quad i > 0.$$

Lema 1.60 *Se $\mathcal{I}$ é um objeto injetivo na categoria dos feixes de módulos, $\mathfrak{Mod}(X)$, então para qualquer subconjunto $U \subset X$, a restrição $\mathcal{I}|_U$ também é um objeto injetivo de $\mathfrak{Mod}(X)$.*

Demonstração: Considere o mapa inclusão

$$j : U \rightarrow X$$

e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ objetos em $\mathfrak{Mod}(X)$ com $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Assim, dado o mapa

$$h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}|_U,$$

temos a inclusão $j(\mathcal{F}) \subset j(\mathcal{G})$ e uma aplicação

$$e : j(\mathcal{F}) \rightarrow j(\mathcal{I}|_U),$$

onde j é a extensão por zero, ou seja, j é zero fora de U . Como $\mathcal{I}$ é um objeto injetivo, $j(\mathcal{I}|_U)$ é um sub-feixe de $\mathcal{I}$ e, com isso, conseguimos uma aplicação que é uma extensão natural,

$$j(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{I}.$$

Novamente da hipótese de $\mathcal{I}$ ser um objeto injetivo e j uma extensão por zero, é possível obtermos uma aplicação que estende $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ e, consequentemente, temos uma extensão

$$j(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{I}.$$

Restringindo esta aplicação ao subconjunto U de X , temos o mapa de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{I}|_U$. ■

Proposição 1.61 *Sejam X espaço topológico e U subconjunto aberto de X . Vale*

$$Ext_X^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \cong Ext_U^i(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

Demonstração: Para $i = 0$, temos

$$Ext_X^0(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U = Hom_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U = Hom_U(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) = Ext_U^0(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U),$$

pelo que sabemos do funtor $\mathcal{H}om$.

Como $\mathcal{E}xt^i(\cdot, \mathcal{G})$ é um funtor exato, por definição $\mathcal{G}$ é um objeto injetivo. Daí, pelo Lema 1.60 segue que $\mathcal{G}|_U$ também é um objeto injetivo na categoria $\mathfrak{Mod}(X)$. Portanto,

$$\mathcal{E}xt_X^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \cong \mathcal{E}xt_U^i(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

■

Proposição 1.62 *Para qualquer objeto $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$, temos:*

- (a) $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$.
- (b) $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$, para $i > 0$.
- (c) $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong H^i(X, \mathcal{G})$, para todo $i \geq 0$, onde H^i é o i -ésimo grupo cohomologia.

Demonstração: Sejam A objeto injetivo em $\mathfrak{Mod}(X)$ e F um funtor. Considere a resolução injetiva

$$I : 0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

Aplicando o funtor F na resolução acima, temos

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(I^0) \longrightarrow F(I^1) \longrightarrow \dots$$

Faça $F = \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \cdot)$. Assim, $\mathcal{H}om(\cdot, I)$ nos dá a sequência

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \dots$$

e

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = R^i \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = h^i(I(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}))) = h^i(I(F)) = \begin{cases} F, & \text{se } i = 0; \\ 0, & \text{se } i > 0. \end{cases}$$

o que prova (a) e (b).

Para provarmos (c) precisamos provar a seguinte

Afirmção: Se $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço anelado, então o funtor derivado do funtor $\Gamma(X, \cdot)$ da categoria dos feixes de módulos $\mathfrak{Mod}(X)$ na categoria dos grupos abelianos $\mathfrak{Ab}$ coincide com o funtor cohomologia $H^i(X, \cdot)$.

De fato. Considere $\Gamma(X, \cdot)$ sendo um funtor da categoria dos feixes de módulos de um espaço anelado na categoria dos grupos abelianos. Tomemos uma resolução injetiva em $\mathfrak{Mod}(X)$. Sabemos que qualquer $\mathcal{O}_X$ -módulo injetivo é flácido [10, pag. 207], ou seja, para quaisquer abertos $U, V \in X$ com $V \subset U$, o mapa restrição $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ é sobrejetor. E mais, qualquer $\mathcal{O}_X$ -módulo flácido é acíclico [10, pag. 208]. Portanto, $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$, para todo $i > 0$. Pela Proposição B.15 segue que $R^i \Gamma(X, \cdot) \cong H^i(X, \cdot)$.

De posse da afirmação temos, para todo $i \geq 0$,

$$\text{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = R^i \text{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = R^i \Gamma(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong H^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}).$$

■

1.4.2 Feixes Coerentes

Vamos nos dedicar agora a falar um pouco sobre *feixes coerentes*. Entender a noção de coerência é importante pois, na sub-seção 2.1.6, iremos estudar um tipo especial de feixe para o nosso trabalho, que é o *feixe dualizante*. Em linhas gerais, um feixe dualizante é um feixe coerente que satisfaz algumas condições, como veremos posteriormente.

Definição 1.63 *Sejam $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado e $\mathcal{L}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos. O feixe $\mathcal{L}$ é dito **localmente finitamente gerado** se, para todo ponto $x_0 \in X$ podemos encontrar uma vizinhança Ω e seções $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{L}(\Omega)$ tais que, para cada $x \in \Omega$, o talo $\mathcal{L}_x$ é gerado por germes $F_{1,x}, \dots, F_{q,x}$ como um $\mathcal{A}_x$ -módulo.*

Lema 1.64 *Sejam $\mathcal{L}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente finitamente gerado sobre X e $G_1, \dots, G_N$ seções em $\mathcal{L}(U)$, com $U \subset X$ aberto, tais que $G_{1,x_0}, \dots, G_{N,x_0}$ geram $\mathcal{L}_{x_0}$, $x_0 \in X$. Então $G_{1,x}, \dots, G_{N,x}$ geram $\mathcal{L}_x$, para x próximo a x_0 .*

Demonstração: Por hipótese $\mathcal{L}$ é um feixe localmente finitamente gerado. Então, por definição, para todo ponto $x \in X$ podemos encontrar uma vizinhança aberta U de X e seções $F_1, \dots, F_N$ em $\mathcal{L}(U)$ tais que o talo $\mathcal{L}_x$ é gerado por $F_{1,x}, \dots, F_{N,x}$. Diminuindo o aberto U , se necessário, podemos tomar uma vizinhança $U' \subset U$ suficientemente próxima de x e a matriz $H_{jk} \in \mathcal{A}(U')$ tal que

$$F_j = \sum H_{jk} G_k$$

sobre U' . Daqui, segue que $G_{1,x}, \dots, G_{N,x}$ geram $\mathcal{L}_x$, para todo x suficientemente próximo a x_0 .

■

Seja $U \subset X$ um aberto. Denotaremos por $\mathcal{L}|_U$ a união de todos os talos $\mathcal{L}_x$, com $x \in U$.

Definição 1.65 *Sejam $U \subset X$ um aberto e $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{L}(U)$. O núcleo do homomorfismo de feixes*

$$\begin{aligned} F : \quad \mathcal{O}_X^{\oplus q}|_U &\rightarrow \mathcal{L}|_U \\ (g^1, \dots, g^q) &\mapsto \sum_{j=1}^q g^j F_{j,x} \end{aligned}$$

é um sub-feixe de $\mathcal{O}_X^{\oplus q}|_U$, chamado **feixe de relações** entre $F_1, \dots, F_q$, e denotado por $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$.

Definição 1.66 *Um feixe $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_X$ -módulos é um **feixe coerente** sobre o espaço topológico X se ele cumpre as seguintes condições:*

- (i) $\mathcal{L}$ é localmente finitamente gerado e

(ii) para todo aberto U de X e seções $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{L}(U)$, o feixe de relações é localmente finitamente gerado.

Observemos que a condição (i) da definição acima nos garante a sobrejetividade da aplicação

$$F : \mathcal{O}_X^{\oplus q} |_U \rightarrow \mathcal{L} |_U,$$

enquanto que a condição (ii) nos diz que $\text{Ker}(F)$ é finitamente gerado.

Se $\mathcal{L}$ é um feixe coerente, então existe um aberto U nas condições da definição anterior. Tomando este aberto U vemos que o feixe $\mathcal{L}$ admite, sobre U , uma representação finita em sequência exata à direita

$$\mathcal{O}_X^{\oplus p} |_U \xrightarrow{G} \mathcal{O}_X^{\oplus q} |_U \xrightarrow{F} \mathcal{L} \rightarrow 0,$$

onde G é dado pela matriz $(G_{jk})_{q \times p}$ de seções de $\mathcal{O}_X(U)$ cujas colunas $(G_{j1}), \dots, (G_{jp})$ são geradores do feixe de relações $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$.

O resultado a seguir nos dá outros feixes coerentes.

Teorema 1.67 *Se $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{G}$ é um $\mathcal{O}_X$ -morfismo de feixes coerentes, então $\text{Im}(\varphi)$ e $\text{Ker}(\varphi)$ também são feixes coerentes.*

Demonstração: Mostremos que $\text{Im}(\varphi)$ é feixe coerente. Sabemos que o conjunto imagem $\text{Im}(\varphi)$ é um subconjunto de $\mathcal{G}$. Assim, olhando como feixe, $\text{Im}(\varphi)$ é um sub-feixe do feixe $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ é coerente, segue que $\text{Im}(\varphi)$ também é coerente.

Como $\mathcal{F}$ é um feixe coerente, segue que $\mathcal{F}$ é localmente finitamente gerado e, dados $V \subset X$ e seções $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(U)$, o feixe de relações é localmente finitamente gerado, por definição. Sejam $x_0 \in X$, $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(U)$ geradores de $\mathcal{F}$ em uma vizinhança U de x_0 e $G_1, \dots, G_r \in \mathcal{A}(U')^{\oplus r}$ geradores do feixe de relações $\mathcal{R}(\varphi(F_1), \dots, \varphi(F_q))$ sobre uma vizinhança $U' \subset U$ de x_0 . Deste modo, $\text{Ker}(\varphi)$ é localmente finitamente gerado por seções

$$H_j = \sum_{k=1}^q G_j^k F_k \in \mathcal{F}(U'), \quad 1 \leq j \leq r,$$

o que mostra que $\text{Ker}(\varphi)$ é um feixe coerente. ■

Teorema 1.68 *Seja*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{L} \xrightarrow{g} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

uma sequência exata de $\mathcal{O}_X$ -módulos. Se dois dos feixes $\mathcal{F}, \mathcal{L}, \mathcal{G}$ são coerentes, então todos os feixes são coerentes.

Demonstração:

(i) Suponhamos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{G}$ feixes coerentes. Então o núcleo da aplicação $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$ também é feixe coerente, pelo teorema anterior. Mas, como a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{L} \xrightarrow{g} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

é exata, segue que $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f) = \mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{F}$ é feixe coerente.

- (ii) Suponhamos agora $\mathcal{L}$ e $\mathcal{F}$ feixes coerentes. Então esses feixes são localmente finitamente gerados e daí, $\mathcal{G}$ é localmente finitamente gerado por ser quociente de $\mathcal{L}/\mathcal{F}$. Logo, por definição, para todo $x_0 \in U$ existem seções $G_1, \dots, G_q \in \mathcal{G}(U)$. Como $\mathcal{L}$ é finitamente gerado, então para cada $x_0 \in U$ existe uma vizinhança U de x_0 e seções $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_q \in \mathcal{L}(U)$ que são aplicações de $G_1, \dots, G_q$ sobre U . Diminuindo U , se necessário, podemos considerar $\mathcal{F}|_U$ gerado por seções $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{F}(U)$. Assim, o feixe de relações $\mathcal{R}(G_1, \dots, G_q)$ é a projeção das últimas q -componentes de $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_p, G_1, \dots, G_q) \subset \mathcal{O}_X^{p+q}$. Sendo $\mathcal{L}$ coerente, então $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_p, G_1, \dots, G_q)$ é finitamente gerado e, consequentemente, sua projeção $\mathcal{R}(G_1, \dots, G_q)$ também é finitamente gerada. Portanto, $\mathcal{G}$ é um feixe coerente.
- (iii) Agora, considere $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ feixes coerentes. Então eles são feixes localmente finitamente gerados. Digamos que $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{F}(U)$ e $G_1, \dots, G_q \in \mathcal{G}(U)$ sejam seus respectivos geradores em uma vizinhança U de $x_0 \in U \subset X$ aberto. Os geradores $G_1, \dots, G_q$ são imagem dos elementos de $\mathcal{L}$ por g . Como g é uma aplicação entre $\mathcal{O}_X$ -módulos, existe uma vizinhança U' de x_0 tal que $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_q \in \mathcal{L}(U')$. Assim, $(F_1, \dots, F_p, \overline{G}_1, \dots, \overline{G}_q)$ geram $\mathcal{L}|_{U'}$ e com isso $\mathcal{L}$ é localmente finitamente gerado.

Considere as seções de $\mathcal{L}(U)$ dadas por $s_1, \dots, s_q$ e $\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_q$ suas imagens em $\mathcal{G}(U)$. Sendo $\mathcal{G}$ coerente, o feixe de relações $\mathcal{R}(\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_q)$ é finitamente gerado, digamos por $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{O}_X(U)^{\oplus q}$. Faça $P_j = (P_j^k)_{1 \leq k \leq q}$. Então

$$H_j = P_j^1 s_1 + \dots + P_j^q s_q, \quad 1 \leq j \leq s$$

são levados em 0 e assim podemos ver $(H_1, \dots, H_s)$ como seções em $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é coerente, então seu feixe de relações $\mathcal{R}(H_1, \dots, H_s)$ é finitamente gerado. Suponhamos que $Q_1, \dots, Q_t \in \mathcal{O}_X(U')^s$ sejam seus geradores. Assim, $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_q)$ é finitamente gerado sobre U' por

$$R_j = \sum Q_j^k P_k \in \mathcal{O}_X(U')$$

o que mostra que o feixe $\mathcal{L}$ é coerente. ■

Definição 1.69 *Sejam M uma variedade analítica complexa de dimensão n e $\mathcal{O}_M$ o feixe de germes de funções analíticas sobre M . Um **feixe analítico** sobre M é um feixe de $\mathcal{O}_M$ -módulos $\mathcal{L}$.*

Teorema 1.70 (da Coerência de Oka) *O feixe de anéis $\mathcal{O}_M$ é coerente para qualquer variedade complexa M .*

Demonstração: Ver [5, Teorema 3.19, pag.89]. ■

Proposição 1.71 *Seja*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de $\mathcal{O}_X$ -módulos em $\mathfrak{Mod}(X)$, então para qualquer feixe de módulos $\mathcal{G}$ temos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Ext}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \longrightarrow \dots$$

Análogo para o feixe $\mathcal{E}xt$.

Demonstração: Como $Hom(\cdot, \mathcal{G})$ é um funtor exato, então $\mathcal{G}$ é um objeto injetivo, por definição. Tome a resolução injetiva de $\mathcal{G}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I}.$$

Para qualquer feixe injetivo $\mathcal{I}$, o funtor $Hom(\cdot, \mathcal{I})$ é exato. Assim, temos a sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{F}'', \mathcal{I}) \longrightarrow Hom(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow Hom(\mathcal{F}', \mathcal{I}) \longrightarrow 0.$$

Para cada $i \geq 0$, a parte (c) do Teorema B.13 nos afirma que existe um morfismo natural

$$\delta^i : R^i Hom(\mathcal{F}', \mathcal{I}) \longrightarrow R^i Hom(\mathcal{F}'', \mathcal{I})$$

que nos dá uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow Ext^0(\mathcal{F}'', \mathcal{I}) \longrightarrow Ext^0(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow Ext^0(\mathcal{F}', \mathcal{I}) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{F}'', \mathcal{I}) \longrightarrow \dots$$

que equivale a sequência

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{F}'', \mathcal{I}) \longrightarrow Hom(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow Hom(\mathcal{F}', \mathcal{I}) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{F}'', \mathcal{I}) \longrightarrow \dots,$$

como queríamos.

Pelo Lema 1.60 conseguimos uma sequência análoga de feixes $\mathcal{E}xt^i$, já que $Hom(\cdot, \mathcal{I})$ é um funtor exato de $\mathfrak{Mod}(X)$ em $\mathfrak{Mod}(X)$. ■

Proposição 1.72 *Seja*

$$\dots \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

sequência exata em $\mathfrak{Mod}(X)$, onde $\mathcal{L}_i$ são feixes localmente livre de posto finito ($\mathcal{L}_i$ é uma resolução localmente livre do feixe de módulos $\mathcal{F}$). Para qualquer feixe $\mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$, temos

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong h^i(Hom(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G})).$$

Demonstração: Pela Proposição B.15 existe um isomorfismo

$$R^i Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong h^i(Hom(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G})).$$

Portanto,

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong h^i(Hom(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G})).$$

■

Convém fazermos uma observação importante. A categoria dos feixes de módulos, $\mathfrak{Mod}(X)$, não tem injecções suficientes, por esse motivo não podemos definir funtor derivado a direita de Hom ou $\mathcal{H}om$. Assim, os resultados anterior não valem na primeira variável.

Capítulo 2

Rudimentos de geometria algébrica complexa

Começamos o capítulo abordando um importante e vasto conteúdo: variedades algébricas projetivas. Ao longo desta seção tratamos com esquemas algébricos e projetivos e, para isso, precisamos de alguns conceitos de Álgebra como, por exemplo, espaço anelado, espectro, anéis graduados e ideais homogêneos. Estudamos inicialmente esquemas pois a seção segue abordando feixes de diferenciais de um esquema em outro: Diferencial Kähler. A seguir damos algumas aplicações do conteúdo em variedades singulares e não singulares, além de tratarmos um pouco sobre esquemas Cohen-Macaulay e feixe dualizante, importante feixe que possui características importantes e fundamentais na demonstração do principal resultado desta dissertação: o feixe dualizante é isomorfo ao feixe canônico. Finalizamos esta seção falando sobre feixes localmente livres e mostrando que existe uma relação entre estes feixes e fibrados vetoriais, abordados no Capítulo 1.

A segunda seção deste capítulo faz menção a um importante grupo de Cohomologia, a Cohomologia de Čech. A fim de definirmos o q -ésimo grupo de Cohomologia de Čech, definimos previamente os operadores de co-núcleo e cobordo. Seguindo, estudamos as classes de Chern, importante para a definição de grau de um fibrado. Ainda nesta seção provamos algumas propriedades fundamentais das classes de Chern. Na quarta seção estudamos os fibrados determinante e introduzimos conceitos como feixe coerente (livre) de torção, feixe reflexivo e feixe normal.

A quinta seção pode ser considerada a mais importante deste segundo capítulo, pois ela nos diz quando um fibrado é estável e, se retornarmos a introdução deste trabalho, lembraremos que uma das hipóteses do teorema principal que provaremos é a estabilidade do fibrado tangente. Definimos grau e inclinação de um fibrado, a partir daí definimos fibrados estáveis e semi-estáveis e provamos o principal resultado desta seção que nos afirma que *se $\mathcal{L}$ é um feixe semi-estável sobre uma variedade X com $\deg(L) < 0$, então $\mathcal{L}$ não admite seções holomorfas não nulas.*

A última seção aborda o gênero seccional de uma variedade X , que é o objeto que temos interesse neste trabalho.

2.1 Variedades Algébricas Projetivas

2.1.1 Esquema Afim

Nesta seção vamos discutir um pouco sobre *esquemas*, que é o espaço sobre o qual iremos obter muitos resultados de agora em diante. Além disso, todos os anéis considerados são comutativos.

Seja A um anel. Associamos a A um espaço topológico junto com um feixe de anéis $\mathcal{O}$ a ele associado, chamado $\text{Spec}(A)$ [definiremos a topologia e o feixe de anéis a seguir]. Se I é um ideal do anel A , denotaremos por $V(I) \subset \text{Spec}(A)$ o conjunto de todos os ideais primos contendo I .

Lema 2.1 *Seja A anel. São verdadeiras as afirmações:*

- (i) *Se I e J são ideais de A , então $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.*
- (ii) *Seja $\{I_i\}_{i \in \Lambda}$ conjunto de ideais de A . Então $V(\sum_{i \in \Lambda} I_i) = \bigcap V(I_i)_{i \in \Lambda}$.*
- (iii) *Se I e J são dois ideais de A , então $V(I) \subset V(J)$ se, e somente se, $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$.*

Demonstração:

- (i) Seja $P \in V(I) \cup V(J)$. Então $P \supset I$ ou $P \supset J$. Como P é ideal primo, segue que $P \supset IJ$ e temos $V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$. Por outro lado, suponhamos $P \supset IJ$. Sem perda de generalidade suponhamos $P \not\supset J$. Então existe $f \in J$ tal que $f \notin P$. Se $g \in I$, então $fg \in I \subset P$, pois I é ideal. Daí $fg \in P$ e, como P é ideal primo segue que $g \in P$ e temos $V(I) \cup V(J) \subset V(IJ)$ e segue o resultado.
- (ii) Seja P ideal contendo $\sum_{i \in \Lambda} I_i$. Então P contém cada I_i e temos $V(\sum_{i \in \Lambda} I_i) \subset \bigcap V(I_i)_{i \in \Lambda}$. Reciprocamente, se P contém cada I_i , então P contém $\sum_{i \in \Lambda} I_i$ e temos o resultado.
- (iii) Sabemos que o ideal radical é a interseção de todos os ideais primos contendo I . Então $V(I) \subset V(J)$ se, e somente se, $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$.

■

Observemos que, pela definição, $V(A) = \emptyset$, enquanto que $V((0)) = \text{Spec}(A)$. Deste fato e do lema anterior, podemos munir $\text{Spec}(A)$ com uma topologia tomando os subconjuntos $V(I)$ sendo subconjuntos fechados. Tal topologia é chamada *Topologia de Zariski*.

Iremos definir o feixe de anéis $\mathcal{O}$ em A . Para cada ideal primo $P \subset A$, consideremos A_P a localização de A em P [Apêndice C]. Seja $U \subset \text{Spec}(A)$ aberto e considere $\mathcal{O}(U)$ o conjunto das funções

$$s : U \rightarrow \prod_{P \in U} A_P,$$

tais que $s(P) \in A_P$, para cada ideal P .

Em outras palavras, para cada $p \in U$, queremos uma vizinhança V de p com $V \subset U$ e ideais $I, J \in A$ tais que, para cada $Q \in V$ com $I \notin Q$ tenhamos $s(Q) = \frac{I}{J} \in A_Q$. Assim, $\mathcal{O}(U)$ terá soma e produto bem definidos, e unidade sendo o 1 de cada localização A_P . Isto é, com essa estrutura, $\mathcal{O}(U)$ é um anel comutativo e com unidade.

Sejam U, V abertos com $V \subset U$. O mapa restrição

$$\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$$

é um homomorfismo de anéis e $\mathcal{O}$ satisfaz as condições de ser feixe.

A construção acima nos permite fazermos a seguinte

Definição 2.2 *Seja A um anel. O espectro de A é o par $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$, onde $\text{Spec}(A) = \{I; I \text{ é ideal primo}\}$ é espaço topológico e $\mathcal{O}$ é o feixe de anéis.*

Denotaremos por $D(I)$ os conjuntos abertos que são complementares de $V(I)$. Pelo Lema 2.1, estes abertos formam uma base para a topologia do espaço $\text{Spec}(A)$.

Proposição 2.3 *Sejam A anel e $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$ seu espectro.*

- (a) *Para qualquer ideal primo $P \in \text{Spec}(A)$, o talo $\mathcal{O}_P$ do feixe $\mathcal{O}$ é isomorfo ao anel local A_P .*
- (b) *Para qualquer elemento $f \in A$, o anel local $\mathcal{O}(D(f))$ é isomorfo ao anel localizado A_f .*
- (c) *$\Gamma(\text{Spec}(A), \mathcal{O}) \cong A$.*

Demonstração: Ver [10, Proposição 2.2, pag. 71]. ■

Proposição 2.4 (a) *Se A é um anel, então $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$ é localmente espaço anelado.*

- (b) *Todo morfismo de anéis $\varphi : A \rightarrow B$ induz um morfismo de espaços localmente anelado*

$$(f, f^\#) : (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}).$$

- (c) *Todo morfismo de espaço localmente anelado $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ induz um morfismo de anéis $\varphi : A \rightarrow B$.*

Demonstração:

- (a) Segue do item (a) da Proposição 2.3.
- (b) Sejam A, B anéis e $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Para P um ideal primo em $\text{Spec}(B)$, defina o mapa

$$\begin{array}{ccc} f & : & \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A) \\ & & P \mapsto \varphi^{-1}(P). \end{array}$$

A aplicação f é contínua, pois se I é um ideal do anel A temos $f^{-1}(V(I)) = V(\varphi(I))$.

Para cada ideal primo $P \in \text{Spec}(B)$ podemos localizar a aplicação φ e obter um homomorfismo local de anéis locais $\varphi_P : A_{\varphi^{-1}(P)} \rightarrow B_P$.

Agora, consideremos $V \subset \text{Spec}(A)$ um aberto. Compondo o homomorfismo local φ_P com a aplicação f e utilizando a definição do anel $\mathcal{O}$, conseguimos um homomorfismo de anéis

$$f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}(f^{-1}(V))$$

que nos dá um morfismo de feixes

$$f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}).$$

O mapa $f^\#$ induzido sobre os talos são homomorfismos locais φ_P , e então o par $(f, f^\#)$ é um morfismo local de espaço anelado.

- (c) Seja $(f, f^\#)$ um morfismo de espaço localmente anelado de $\text{Spec}(B)$ em $\text{Spec}(A)$. Tomando agora as seções globais, segue que $f^\#$ induz um homomorfismo de anéis

$$\varphi : \Gamma(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}) \rightarrow \Gamma(\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}),$$

que são os anéis A e B , respectivamente, pelo item (c) da Proposição 2.3.

Para qualquer ideal primo $P \in \text{Spec}(B)$ temos induzido um homomorfismo local sobre os talos, a saber $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A), f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(B), P}$ ou $A_{f(P)} \rightarrow B_P$ que são compatíveis com o mapa φ sobre as seções globais e o homomorfismo localização, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(P)} & \longrightarrow & B_P \end{array}$$

é comutativo. Além disso, como $f^\#$ é um homomorfismo local, segue que $\varphi^{-1}(P) = f(P)$, o que mostra que f coincide com o mapa $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ induzido por φ .

■

Definição 2.5 Um **esquema afim** é um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ que é isomorfo ao espectro de algum anel. Um **esquema** é um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ no qual todo ponto tem uma vizinhança aberta U tal que o espaço topológico U , junto com o feixe restrição $\mathcal{O}_X|_U$ é um esquema afim.

Definição 2.6 Seja S um esquema. Um **esquema sobre S** é um esquema X , junto com um morfismo $X \rightarrow S$. Se X e Y são esquemas sobre S , então um morfismo de X em Y (como esquemas sobre S) é um morfismo $f : X \rightarrow Y$ compatível com um dado morfismo de S .

Denotamos por $\mathfrak{Sch}(S)$ a categoria dos esquemas sobre S .

2.1.2 Esquema Projetivo

Uma importante classe de esquemas no nosso estudo são os *esquemas projetivos*. Definimos esquemas projetivos sobre anéis graduados.

Definição 2.7 Um **anel graduado** é um anel S que pode ser escrito como soma direta de grupos abelianos S_d , ou seja, $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ tal que, para quaisquer $d, e \geq 0$, temos $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$. Os elementos de S_d são chamados de **elementos homogêneos de grau d** .

Denotaremos por S_+ o ideal $\bigoplus_{d > 0} S_d$. Definimos o conjunto $Proj(S)$ formado por todos os ideais primos homogêneos P que não contém todo o ideal S_+ . Se I é um ideal homogêneo de S , definimos o subconjunto

$$V(I) = \{P \in Proj(S); P \supset I\}.$$

Observação 2.8 Dizemos que I é um **ideal homogêneo** se $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$.

Lema 2.9 (a) Se I e J são ideais homogêneos em S , então $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

(b) Se $I_{i \in \Lambda}$ é uma família qualquer de ideais homogêneos de S , então

$$V\left(\sum_{i \in \Lambda} I_i\right) = \bigcap V(I_i).$$

Demonstração: Análoga à demonstração do Lema 2.1. ■

Do mesmo modo como observamos na seção anterior, aqui também cabe observarmos que $V(A) = \emptyset$ e $V((0)) = Proj(S)$. Assim, também podemos definir uma topologia sobre $Proj(S)$, tomando os subconjuntos fechados sendo os subconjuntos da forma $V(I)$.

Vamos definir o feixe de anéis $\mathcal{O}$ sobre $Proj(S)$. Seja T o sistema multiplicativo contendo todos os elementos homogêneos de S que não estão no ideal primo P . Para cada ideal $P \in Proj(S)$, consideremos o anel $S_{(P)}$ de elementos de grau zero no anel localizado $T^{-1}S$. Para cada aberto U de $Proj(S)$, definimos $\mathcal{O}(U)$ sendo o conjunto das funções

$$\begin{aligned} s &: U \rightarrow \coprod S_{(P)} \\ P &\mapsto s(P), \end{aligned}$$

onde s é localmente quociente de elementos de S . Em outras palavras, para cada ideal primo $P \in U$, existe uma vizinhança V de P em U e elementos homogêneos $a, f \in S$ de mesmo grau tais que, para todo ideal $Q \in V$ temos $f \notin Q$ e $s(Q) = \frac{a}{f} \in S_{(Q)}$. Assim, analogamente a seção anterior, $\mathcal{O}(U)$ é um anel comutativo e com unidade.

Sejam U, V abertos de $Proj(S)$ com $V \subset U$. O mapa restrição

$$\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$$

é um homomorfismo de anéis e $\mathcal{O}$ satisfaz as condições de ser feixe, como queríamos.

Definição 2.10 *Seja S um anel graduado. Definimos $(\text{Proj}(S), \mathcal{O})$ sendo o espaço topológico junto com o feixe de anéis construído acima.*

Proposição 2.11 *Seja S um anel graduado.*

- (a) *Para qualquer ideal primo $P \in \text{Proj}(S)$, o talo $\mathcal{O}_P$ é isomorfo ao anel local $S_{(P)}$.*
- (b) *Para qualquer elemento homogêneo $f \in S_+$, defina*

$$D_+(f) = \{P \in \text{Proj}(S); f \notin P\}.$$

Então os conjuntos $D_+(f)$ formam uma cobertura por abertos de $\text{Proj}(S)$ e, para cada conjunto aberto temos um isomorfismo de espaços localmente anelado, ou seja,

$$(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \cong \text{Spec} S_{(f)},$$

onde $S_{(f)}$ é o subanel de elementos de grau zero no anel local $S_{(f)}$.

- (c) *$\text{Proj}(S)$ é um esquema.*

Demonstração:

- (a) Análoga à demonstração do item (a) da Proposição 2.3.
- (b) Observemos que $D_+(f) = \text{Proj}(S) - V((f))$ é um aberto. Sabemos que os elementos de $\text{Proj}(S)$ são ideais primos homogêneos de S que não contém todos os ideais de S_+ . Então os conjuntos abertos $D_+(f)$ cobrem $\text{Proj}(S)$. Fixemos $f \in S_+$, consideremos P ideal primo homogêneo e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : D_+(f) &\rightarrow \text{Spec}(S_{(f)}) \\ P &\mapsto (PS_f) \cap S_{(f)}, \end{aligned}$$

que é um isomorfismo devido às propriedades de localização.

Além disso, se I é um ideal homogêneo então $I \subset P$ se, e somente se, $\varphi(I) \subset \varphi(P)$. Então φ é um homeomorfismo. E mais, se $P \in D_+(f)$, então os anéis locais $S_{(P)}$ e $(S_{(P)})_{\varphi(P)}$ são isomorfos. Assim, o homeomorfismo φ induz um mapa natural de feixes $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec} S_{(f)}} \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_{\text{Proj} S|_{D_+(f)}})$ que é um isomorfismo, como queríamos.

- (c) Segue dos itens (a) e (b) que $\text{Proj}(S)$ é espaço localmente anelado e coberto por esquemas afins.

■

Observação 2.12 *O esquema $\text{Proj}(S)$ é chamado de esquema projetivo.*

Exemplo 2.13 *Considere $S = \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Pode-se mostrar que $\text{Proj}(S) = \mathbb{P}^n$ e que toda subvariedade projetiva de $\mathbb{P}^n$ é um esquema projetivo.*

2.1.3 Diferencial Kähler

Na seção 1.4, quando estudamos *feixes*, fizemos este estudo sobre grupos abelianos. No entanto, mencionamos que podemos definir feixes sobre outras estruturas, e é o que vemos fazendo ao longo deste trabalho. Esta seção se destina a estudarmos *feixes de diferencial* de um esquema em outro.

Ao longo desta seção, salvo menção contrária, A é um anel comutativo e com unidade, B é uma A -álgebra e M um B -módulo.

Definição 2.14 *Uma aplicação*

$$D : M \rightarrow M$$

é dita uma A-derivação de B em M se

(01) *D é uma aplicação aditiva;*

(02) *satisfaz a Regra de Leibniz, $D(bb') = bD(b') + b'D(b)$ e*

(03) *para todo $a \in A$, temos $D(a) = 0$.*

A condição (iii) da definição anterior nos diz que, para qualquer derivação D , $D^{-1}(0)$ é um subanel de A . Em particular, $D(1) = 0$ e assim, $1^2 = 1$.

Seja K um anel e A uma K -álgebra. Uma derivação $D : A \rightarrow M$ tal que $D(K \cdot 1_A) = 0$ é chamada **derivação sobre K** . Denotaremos por $Der_K(A, M)$ o conjunto de todas as derivações sobre K .

Sejam A e C anéis e N um ideal de C com $N^2 = 0$. Considere o mapa natural

$$j : C \rightarrow \frac{C}{N}$$

e os homomorfismos de anéis

$$u, u' : A \rightarrow C$$

satisfazendo $ju = ju'$. Defina $D = u' - u$.

Afirmção: Os homomorfismos u e u' induzem a mesma estrutura de A -módulo sobre N e $D : A \rightarrow N$ é uma derivação.

De fato.

$$\begin{aligned} u'(ab) &= u'(a)u'(b) = (u(a) + D(a))(u(b) + D(b)) \\ &= u(a)u(b) + u(a)D(b) + D(a)u(b) + D(a)D(b) \\ &= u(ab) + aD(b) + bD(a). \end{aligned}$$

Daí que,

$$u'(ab) - u(ab) = D(ab) = aD(b) + bD(a)$$

e D é uma derivação.

Os homomorfismos u e u' definem a mesma estrutura de A -módulo sobre N pelo modo como foram definidos. Além disso, vale a recíproca da afirmação anterior.

Sejam K um anel, A uma K -álgebra e $B = A \otimes_K A$. Considere os homomorfismos de K -álgebras

$$\begin{array}{lll} \epsilon : B & \rightarrow & A \\ (a \otimes a') & \mapsto & aa', \end{array} \quad \begin{array}{lll} \lambda_1 : A & \rightarrow & B \\ a & \mapsto & a \otimes 1, \end{array} \quad \begin{array}{lll} \lambda_2 : A & \rightarrow & B \\ a & \mapsto & 1 \otimes a. \end{array}$$

Damos a $B = A \otimes A$ estrutura de A -álgebra pela aplicação λ_1 . Denotaremos

- (i) $\text{Ker}(\epsilon) = I_{A/K}$, ou simplesmente $\text{Ker}(\epsilon) = I$;
- (ii) $\frac{I}{I^2} = \Omega_{A/K}$.

Da definição de produto tensorial, segue que I e I^2 são B -módulos. E mais, I, I^2 e $\Omega_{A/K}$ podem ser vistos como A -módulos, pela aplicação λ_1 .

Definição 2.15 Chamamos o A -módulo $\Omega_{A/K}$ de **módulo de diferenciais** ou **diferencial Kähler** de A sobre K .

Seja

$$v : B \rightarrow \frac{B}{I^2}$$

o homomorfismo definido de maneira natural. Considere

$$\begin{array}{lll} d^* = \lambda_2 - \lambda_1 : A & \rightarrow & B \\ a & \mapsto & 1 \otimes a - a \otimes 1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{lll} d = vd^* : A & \rightarrow & \frac{A}{I^2} \\ a & \mapsto & v(1 \otimes a - a \otimes 1). \end{array}$$

Afirmação: d é uma derivação. De fato.

- (i) d é aditivo pois $\text{Hom}(A, A') \rightarrow \text{Hom}(dA, dA')$ tem estrutura de A -módulos.
- (ii) Usando que v é homomorfismo, temos

$$\begin{aligned} d(ab) &= v(1 \otimes ab - ab \otimes 1) = v(1 \otimes ab) - v(ab \otimes 1) \\ &= v(1) \otimes v(a)v(b) - v(a)v(b) \otimes v(1) + v(a)v(b) \otimes v(1) - v(a)v(b) \otimes v(1) \\ &= v(a)(v(1) \otimes v(b) - v(b) \otimes v(1)) + v(b)(v(1)v(a) - v(a)v(1)) \\ &= ad(b) - bd(a). \end{aligned}$$

Proposição 2.16 O módulo de diferenciais $\Omega_{A/K}$ com derivação d tem a propriedade universal, no sentido que se D é uma K -derivação do anel A no A -módulo M , existe única aplicação A -linear $f : \Omega_{A/K} \rightarrow M$ tal que $D = f \circ d$, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_{A/K} \\ D \downarrow & \searrow f & \\ M & & \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Considere a extensão trivial $A * M$ e o homomorfismo de A -álgebras

$$\begin{aligned} \varphi : B = A \otimes A &\rightarrow A * M \\ (x \otimes y) &\mapsto (xy, xD(y)). \end{aligned}$$

Como $\varphi(I) \subset M$ e $M^2 = 0$, temos

$$\varphi(I^2) = (\varphi(I))^2 \subset M^2 = 0$$

e φ induz um homomorfismo de A -álgebras

$$\overline{\varphi} : \frac{B}{I^2} = A * \Omega \rightarrow A * M,$$

onde $dy \in \Omega = \frac{I}{I^2}$.

Observe que

$$\begin{aligned} \varphi(d^*y) &= \varphi(1 \otimes y - y \otimes 1) = \varphi(1 \otimes y) - \varphi(y \otimes 1) = (y, D(y)) - (y, yD(1)) \\ &= (y, D(y)) - (y, 0) = (0, D(y)). \end{aligned}$$

Assim, a aplicação $\overline{\varphi}|_{\Omega} : \Omega \rightarrow M$ é A -linear e nos fornece uma aplicação $f = \overline{\varphi}|_{\Omega} : \Omega \rightarrow M$ tal que $f \circ d = D$, e temos provada a existência da aplicação f .

Como já mencionamos, consideremos K um anel, A uma K -álgebra e $B = A \otimes A$. Assim

$$x \otimes y = xy \otimes 1 + x(1 \otimes y - y \otimes 1). \quad (2.1)$$

Como

$$\begin{aligned} \epsilon : B = A \otimes A &\rightarrow A \\ x \otimes y &\mapsto xy, \end{aligned}$$

segue que $x \otimes y = \epsilon(x \otimes y) + xd^*y$, onde $d^* : \lambda_2 - \lambda_1$.

Suponha

$$\sum (x_i \otimes y_i) \in I = \text{Ker}(\epsilon). \quad (2.2)$$

Da Equação (2.1) temos, para cada i ,

$$x_i \otimes y_i = x_i y_i \otimes 1 + x_i(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1) = \epsilon(x_i \otimes y_i) + x_i d^* y_i.$$

Assim, por (2.2),

$$x_i \otimes y_i = x_i d^* y_i,$$

pois $\epsilon(x_i \otimes y_i) = 0$ e, consequentemente,

$$\sum (x_i \otimes y_i) = \sum x_i d^* y_i.$$

Como $\frac{I}{I^2} = \Omega_{A/K}$, então $d^*y \mod I^2 = dy$ e assim, qualquer elemento de $\Omega_{A/K}$ tem a forma $\sum x_i dy_i$, com $x_i, y_i \in A$, ou seja, qualquer elemento de Ω é gerado por $\{dy; y \in A\}$ como A -módulo. Daí, segue que a aplicação $f : \Omega_{A/K} \rightarrow M$ é única. ■

Em consequência da proposição anterior, temos a aplicação

$$Der_K(A, M) \rightarrow Hom_A(\Omega_{A/K}, M).$$

Na linguagem de categoria, o par $(\Omega_{A/K}, d)$ representa o funtor covariante $M \rightarrow Der_K(A, M)$ da categoria de A -módulos nela mesma.

Proposição 2.17 *Sejam K' e A anéis e considere $A' = A \otimes K'$. Então*

$$\Omega_{A'/K'} \cong \Omega_{A/K} \otimes_A A'.$$

Além disso, se S é um sistema multiplicativo em A e $A' = S^{-1}A$, então

$$\Omega_{S^{-1}A/K} \cong S^{-1}\Omega_{A/K}.$$

Demonstração: Considere o diagrama comutativo de anéis e homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & K' \end{array}$$

e as extensões

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{A/K} = A/I^2 & \longrightarrow & A'/I^2 = \Omega_{A'/K'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & K' \end{array}$$

Da comutatividade do diagrama, podemos afirmar que existe um homomorfismo de A -módulos $\Omega_{A/K} \rightarrow \Omega_{A'/K'}$ e, além disso, a aplicação $\Omega_{A/K} \otimes_A A' \rightarrow \Omega_{A'/K'}$ também é um homomorfismo. Tomando $A' = A \otimes K'$, temos

$$\Omega_{A/K} \otimes_A A' = \Omega_{A/K} \otimes_A (A \otimes K') \cong \Omega_{A'/K'}.$$

Considere agora S um sistema multiplicativo e $A' = S^{-1}A$. Então

$$\Omega_{S^{-1}A/K} \cong \Omega_{A'/K} \cong \Omega_{A/K} \otimes_A S^{-1}A \cong S^{-1}\Omega_{A/K}.$$

■

Teorema 2.18 (A primeira sequência exata fundamental) *Sejam K, A, B anéis e $K \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B$ homomorfismos. Existe uma sequência exata natural de homomorfismos de B -módulos*

$$\Omega_{A/K} \xrightarrow{v} \Omega_{B/K} \xrightarrow{u} \Omega_{B/A} \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

Demonstração: Definimos as aplicações u e v por

$$\begin{array}{ccc} v : \Omega_{A/K} \otimes_A B & \rightarrow & \Omega_{B/K} \\ d_{A/K} \otimes b & \mapsto & b \cdot d_{B/K} \psi(a) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} u : \Omega_{B/K} & \rightarrow & \Omega_{B/A} \\ b \cdot d_{B/K}(b') & \mapsto & b \cdot d_{B/A}(b'), \end{array}$$

onde $a \in A$ e $b, b' \in B$.

Observe que o mapa u é sobrejetor, pelo modo como foi definido. E mais, como $\psi(a) \in B$, segue que $d_{B/A} \psi(a) = 0$ e daí

$$u(b \cdot d_{B/K}(b')) = 0 \Leftrightarrow uv = 0.$$

Para mostrarmos que a sequência (2.3) precisamos mostrar que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$. Seja $T = \text{Coker}(v) = \frac{\Omega_{B/K}}{\text{Im}(v)}$. Temos o isomorfismo

$$\text{Hom}_B(\Omega_{A/K} \otimes_A B, T) \cong \text{Hom}_A(\Omega_{A/K}, T) \cong \text{Der}_K(A, T)$$

que nos dá a sequência de aplicações

$$\begin{array}{ccccc} \text{Der}_A(B, T) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Der}_K(B, T) & \xrightarrow{\beta} & \text{Der}_K(B, T) \\ D & \mapsto & D \circ \varphi & \mapsto & D \circ \varphi \circ \psi. \end{array}$$

Assim, $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ e a sequência anterior é exata. Como $\text{Der}_K(A, T) \cong \text{Hom}_A(\Omega_{A/K}, T)$, temos

$$\text{Hom}_B(\Omega_{A/K} \otimes_A B, T) = \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, T) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B/K}, T) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B/K}, T),$$

que é uma sequência exata. Portanto,

$$\Omega_{A/K} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/K} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata, como queríamos. ■

Sejam K um anel, A uma K -álgebra, $\mathfrak{M}$ um ideal de A e $B = \frac{A}{\mathfrak{M}}$. Defina

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathfrak{M} & \rightarrow & \Omega_{A/K} \otimes_A B \\ x & \mapsto & d_{A/K} x \otimes 1. \end{array}$$

Observe que o mapa ψ leva $\mathfrak{M}^2$ em zero, o que induz um mapa B -linear

$$\delta : \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} \rightarrow \Omega_{A/K} \otimes_A B.$$

Teorema 2.19 (A segunda sequência exata) *Sejam K anel, A uma K -álgebra, $\mathfrak{M}$ um ideal de A e $B = \frac{A}{\mathfrak{M}}$. Considere o mapa*

$$\begin{aligned} \psi &: \mathfrak{M} \rightarrow \Omega_{A/K} \otimes_A B \\ x &\mapsto d_{A/K}x \otimes 1. \end{aligned}$$

São verdadeiras as seguintes afirmações:

(i) *A sequência de B -módulos*

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} \xrightarrow{\delta} \Omega_{A/K} \otimes_A B \xrightarrow{v} \Omega_{B/K} \longrightarrow 0$$

é exata.

(ii) *Se $A_1 = \frac{A}{\mathfrak{M}^2}$, então $\Omega_{A/K} \otimes_A B \cong \Omega_{A_1/K} \otimes_{A_1} B$.*

(iii) *O homomorfismo δ tem inverso a esquerda se, e somente se, a extensão*

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} \longrightarrow A_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

de uma K -álgebra B por $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2}$ é trivial sobre o anel K .

Demonstração:

(i) Sejam K, A, B anéis e $K \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B$ homomorfismos. Pelo Teorema 2.18 existe uma sequência exata de homomorfismos de B -módulos

$$\Omega_{A/K} \otimes_A B \xrightarrow{v} \Omega_{B/K} \xrightarrow{u} \Omega_{B/A} \longrightarrow 0,$$

onde

$$\begin{aligned} v &: \Omega_{A/K} \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/K} & u &: \Omega_{B/K} \rightarrow \Omega_{B/A} \\ d_{A/K} \otimes b &\mapsto b \cdot d_{B/K}\psi(a) & b \cdot d_{B/K}(b') &\mapsto b \cdot d_{B/A}(b'). \end{aligned}$$

A aplicação v será sobrejetora se ψ o for, pela definição de v . E mais, $v\delta = 0$. Assim, do mesmo modo como procedemos na prova do resultado anterior, basta mostrar que a sequência

$$\text{Hom}_B(\Omega_{B/K}, T) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{A/K} \otimes_A B, T) \longrightarrow \text{Hom}_B(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2, T)$$

é exata, para qualquer B -módulo T . Como $\text{Hom}_A(\Omega_{A/K}, T) \cong \text{Der}_K(A, T)$, temos

$$\text{Hom}_B(\Omega_{B/K}, T) \cong \text{Der}_K(B, T) = \text{Der}_B(A/\mathfrak{M}, T).$$

Assim, a sequência dos homomorfismos $\text{Hom}_B(\cdot, T)$ é isomorfa a sequência

$$\text{Der}_K(A/\mathfrak{M}, T) \longrightarrow \text{Der}_K(A, T) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathfrak{M}, T),$$

onde

$$\begin{array}{ccccc} \text{Der}_A(A/\mathfrak{M}, T) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Der}_K(A, T) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}_K(\mathfrak{M}, T) \\ Dm & \mapsto & D & \mapsto & D/\mathfrak{M}. \end{array}$$

Observe que $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ e a sequência acima é exata. Portanto,

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} \longrightarrow \Omega_{A/K} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/K} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata.

- (ii) Observemos inicialmente que um homomorfismo de B -módulos $N' \rightarrow N$ é um isomorfismo se, e somente se, o mapa induzido $\text{Hom}_B(N, T) \rightarrow \text{Hom}_B(N', T)$ for um isomorfismo, para todo B -módulo T . Assim, $\Omega_{A/K} \otimes_A B \cong \Omega_{A_1/K} \otimes_{A_1} B$ se, e somente se, $\text{Hom}_B(\Omega_{A_1/K} \otimes_{A_1} B, T) \rightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{A/K} \otimes_A B, T)$ é isomorfismo. Ora, mas isso ocorre se, e somente se, $\text{Der}_K(A_1, T) \rightarrow \text{Der}_K(A, T)$ é isomorfismo.

Afirmção: A aplicação

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \text{Der}_K(A/\mathfrak{M}^2, T) & \rightarrow & \text{Der}_K(A, T) \\ \overline{D} & \mapsto & D \end{array}$$

é um isomorfismo, para todo $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ -módulo T . De fato

- (a) Sejam $\overline{D}, \overline{E} \in \text{Der}_K(A/\mathfrak{M}^2, T)$ com $\overline{D} = \overline{E}$. Então

$$D = \gamma(\overline{D}) = \gamma(\overline{E}) = E$$

e γ está bem definida.

- (b) Se $D, E \in \text{Der}_K(A, T)$ com $D = E$, então

$$\gamma(\overline{D}) = D = E = \gamma(\overline{E})$$

e γ é injetora.

- (c) A aplicação γ é sobrejetora pelo modo como foi construída.

- (d) Finalmente observe que γ é homomorfismo, pois

$$\gamma(\overline{D \circ E}) = D \circ E = \gamma(\overline{D}) \circ \gamma(\overline{E}).$$

Portanto, $\text{Hom}_B(\Omega_{A/K} \otimes_A B, T) \cong \text{Hom}_B(\Omega_{A_1/K} \otimes_{A_1} B, T)$ e, conseqüentemente,

$$\Omega_{A/K} \otimes_A B \cong \Omega_{A_1/K} \otimes_{A_1} B.$$

- (iii) Pelo isomorfismo obtido no item anterior, a sequência

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} \longrightarrow \Omega_{A/K} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/K} \longrightarrow 0$$

pode ser reescrita do seguinte modo

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} \longrightarrow \Omega_{A_1/K} \otimes_{A_1} B \longrightarrow \Omega_{B/K} \longrightarrow 0.$$

Suponhamos $\mathfrak{M}^2 = 0$ e que δ tenha inverso a esquerda dado por

$$\begin{aligned} w & : \Omega_{A/K} \otimes_A B \rightarrow \mathfrak{M} \\ da \otimes 1 & \mapsto w(da \otimes 1) = Da, \end{aligned}$$

onde, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned} D & : A \rightarrow \mathfrak{M} \\ x & \mapsto x \end{aligned}$$

é uma derivação. Vamos mostrar que a extensão

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2} \longrightarrow A_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

da K -álgebra B por $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2}$ é trivial sobre K .

Defina o mapa

$$\begin{aligned} f & : A \rightarrow A \\ a & \mapsto a - Da \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b) - D(a+b) = a+b - D(a) - D(b) = (a - D(a)) + (b - D(b)) \\ &= f(a) + f(b), \end{aligned}$$

ou seja, f é homomorfismo de K -álgebras com $f(\mathfrak{M}) = 0$, pela definição da derivação D e induz um homomorfismo

$$\bar{f} : B = \frac{A}{\mathfrak{M}} \rightarrow A.$$

Por definição do mapa f e do fato de $Dx = x$, para todo $x \in \mathfrak{M}$, segue que

$$f(a) \equiv a \pmod{\mathfrak{M}}$$

e $\bar{f}$ é uma seção da extensão de anéis $0 \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$.

Para provar a recíproca basta inverter os argumentos.

■

2.1.4 Feixes de Diferenciais

Vamos agora definir Diferencial Kähler sobre feixes. Para isso, vamos considerar $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de esquemas.

Definição 2.20 *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de esquemas. O morfismo diagonal é o único*

morfismo $\delta : X \rightarrow X \times_Y X$ tal que a composição com ambas projeções

$$p_1, p_2 : X \times_Y X \rightarrow X$$

é o mapa identidade de $X \rightarrow X$.

Definição 2.21 (i) Um morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ é uma **imersão fechada** se f é um homeomorfismo de X em um subconjunto de Y e um epimorfismo na categoria de feixes.

(ii) Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é dito **separado** se o morfismo diagonal δ é uma imersão fechada. E neste caso dizemos que X é **separado** sobre Y .

Proposição 2.22 Todo morfismo de esquema afim $f : X \rightarrow Y$ é separado.

Demonstração: Ver [10, Proposição 4.1, pag. 96]. ■

Corolário 1 Uma condição necessária e suficiente para que um morfismo $f : X \rightarrow Y$ seja separado é que a imagem do morfismo diagonal seja um subconjunto fechado de $X \times_Y X$.

Demonstração: Se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo separado, então o morfismo diagonal é um subconjunto fechado de $X \times_Y X$, por definição.

Para provarmos a recíproca, devemos mostrar que o morfismo $\delta : X \rightarrow \delta(X)$ é um homeomorfismo e que o morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetor.

Seja $p_1 : X \times_Y X \rightarrow X$ a projeção na primeira coordenada. Por definição de morfismo diagonal, segue que $p_1 \circ \delta = Id_X$. Logo, δ é homeomorfismo sobre sua imagem $\delta(X)$.

Agora considere $p \in X$ e U uma vizinhança aberta afim de p suficientemente pequena tal que $f(U) \subset V \subset Y$, com V um aberto de Y . Então $U \times_V U$ é uma vizinhança aberta afim de $\delta(p)$ e, pela proposição anterior, $\delta : U \rightarrow U \times_V U$ é uma imersão fechada, pois é separado. Portanto, δ é um mapa de feixes sobrejetor em uma vizinhança de p , o que conclui nossa demonstração. ■

Voltemos ao morfismo diagonal $\delta : X \rightarrow X \times_Y X$ com morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$. Pela Proposição 2.22 temos f separado e, pelo corolário 1 a imagem de δ é um subconjunto fechado de $X \times_Y X$. Assim, δ induz um isomorfismo de X em sua imagem $\delta(X)$, a qual é um **sub-esquema localmente fechado** de $X \times_Y X$, ou seja, $\delta(X)$ é um sub-feixe fechado de um subconjunto aberto W de $X \times_Y X$.

Definição 2.23 Seja $\mathcal{I}$ um feixe de ideais de $\delta(X)$ em $W \subset X \times_Y X$ aberto. Definimos o **feixe de diferenciais** de X sobre Y sendo o feixe $\Omega_{X/Y} = \delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$.

Pelo que observamos na seção anterior, podemos ver que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ tem estrutura de $\mathcal{O}_{\delta(X)}$ -módulo. Como δ induz um isomorfismo de X sobre $\delta(X)$, então $\Omega_{X/Y}$ tem naturalmente estrutura de $\mathcal{O}_X$ -módulo.

Proposição 2.24 Seja X um esquema. Valem

- (i) Para qualquer sub-esquema fechado Y de X , o feixe de ideal correspondente $\mathcal{I}_Y$ é um feixe quase-coerente de ideais sobre X .
- (ii) Se X é noetheriano, então X é coerente.
- (iii) Qualquer feixe quase-coerente de ideais sobre X é o feixe de ideal unicamente determinado pelo sub-esquema fechado de X .

Demonstração: Ver [10, Proposição 5.9, pag. 116]. ■

Proposição 2.25 *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y' \rightarrow Y$ morfismos de esquemas e $f' := X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$. Então $\Omega_{X'/Y'} \cong (g')^*(\Omega_{X/Y})$, onde $g' : X' \rightarrow X$ é a projeção da primeira coordenada.*

Demonstração: Ver [10, Proposição 8.10, pag. 175]. ■

Proposição 2.26 *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ morfismos de esquemas. Então existe uma sequência exata de feixes sobre X , dada por*

$$f^*(\Omega_{X/Y}) \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Demonstração: Consideremos os morfismos de esquemas

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Pela Proposição 2.17, temos

$$\Omega_{Y/X} \times_Y Z \longrightarrow \Omega_{Z/X} \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0.$$

Aplicando o pull-back f^* temos

$$f^*(\Omega_{Y/X} \times_Y Z) \longrightarrow f^*(\Omega_{Z/X}) \longrightarrow f^*(\Omega_{Z/Y}) \longrightarrow 0$$

que, pela proposição anterior resulta na sequência exata de feixes sobre X , dada por

$$f^*(\Omega_{X/Y}) \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

■

Proposição 2.27 *Sejam $f : X \rightarrow Y$ morfismo de esquemas e Z um sub-esquema fechado de X com feixe de ideal $\mathcal{I}$. Então existe uma sequência exata de feixes sobre Z ,*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0.$$

Demonstração: A demonstração é análoga a demonstração do resultado anterior e pode ser encontrada em [10, Proposição 8.12, pag. 176]. ■

Variedades Não-Singulares

Definição 2.28 *Sejam $Y \subset A^n$ uma variedade afim e $f_1, \dots, f_t \in A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ conjunto de geradores do ideal Y . Dizemos que Y é **variedade não-singular no ponto** $p \in Y$ se o posto da matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right]$ é $n - r$, onde $r = \dim Y$. Se Y é não-singular em todo ponto $p \in Y$, então dizemos que Y é **variedade não-singular**.*

Usando a Regra da Cadeia, podemos verificar que a definição de variedade não-singular independe do conjunto de gerados escolhido para o ideal Y .

Definição 2.29 *Seja A anel local noetheriano com ideal maximal $\mathcal{M}$ e corpo $K = \frac{A}{\mathcal{M}}$. Dizemos que A é um **anel local regular** se $\dim_K \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2} = \dim A$.*

Teorema 2.30 *Sejam $Y \subset A^n$ uma variedade afim e $p \in Y$. Então Y é uma variedade não-singular em p se, e somente se, o anel local $\mathcal{O}_{p,Y}$ é regular.*

Demonstração: Seja $p = (a_1, \dots, a_n)$ um ponto em A^n e $a_p = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ o ideal maximal correspondente em $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Defina o mapa linear

$$\begin{aligned} \theta : A &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ f &\mapsto \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \rangle \end{aligned}$$

e observe que, para $i = 1, \dots, n$, $\theta(x_i - a_i)$ forma uma base para $\mathbb{C}^n$ (pela definição de θ). Além disso, $\theta(a_p)^2 = 0$. Assim, θ induz um isomorfismo

$$\theta' : \frac{a_p}{(a_p)^2} \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Considere b um ideal de Y em A e $f_1, \dots, f_t$ conjunto de geradores de b . Assim, o posto da matriz jacobiana $J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right]$ coincide com a dimensão de $\theta(b)$ como subespaço de $\mathbb{C}^n$. Do fato de θ ser linear, temos

$$\theta(b + a_p^2) = \theta(b) + \theta(a_p^2) = \theta(b).$$

Logo,

$$\dim \theta(b) = \dim \frac{(b + a_p^2)}{a_p^2}.$$

Por outro lado, o anel local $\mathcal{O}_p$ de p em Y é obtido de A quociente por b e localizando no ideal maximal a_p . Deste modo, se $\mathcal{M}$ é um ideal maximal de $\mathcal{O}_p$, então

$$\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2} \cong \frac{a_p}{b + a_p^2},$$

pois $\mathcal{M}^2 = a_p^2 = 0$. Assim, $\mathcal{M} \cong \frac{a_p}{b}$ e

$$\dim \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2} + rk J = n. \quad (2.4)$$

Se $\dim Y = r$, então $\dim \mathcal{O}_p = r$. Assim, o anel $\mathcal{O}_p$ é regular se, e somente se, $\dim \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2} = r$. Da Equação (2.4), isso equivale a $rkJ = n - r$, o que prova o resultado. ■

O resultado anterior nos motiva a seguinte definição:

Definição 2.31 Dizemos que Y é uma **variedade não-singular** em $p \in Y$ se o anel local $\mathcal{O}_{p,Y}$ é regular. Caso contrário, dizemos que Y é **variedade singular**.

Sobre corpos algebricamente fechado, temos:

Definição 2.32 Uma variedade X sobre um corpo algebricamente fechado é dita **não-singular** se todos os seus anéis locais são regulares.

Observação 2.33 Pelo Teorema das Funções Implícitas, uma variedade algébrica não singular é sempre uma variedade complexa.

O resultado que segue nos dá a relação entre “não-singularidade” e “diferenciais”. Embora esteja enunciado sobre o corpo dos complexos, ele vale para qualquer corpo algebricamente fechado.

Teorema 2.34 Seja X um esquema separado irredutível do tipo finito sobre $\mathbb{C}$. Então $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ é feixe localmente livre de posto $n = \dim X$ se, e somente se, X é variedade não-singular sobre $\mathbb{C}$.

Demonstração: Ver [10, Teorema 8.15, pag. 177]. ■

Teorema 2.35 Sejam X variedade não-singular sobre $\mathbb{C}$ e $Y \subset X$ sub-esquema fechado irredutível definido pelo feixe de ideais $\mathcal{I}$. Então Y é não-singular se, e somente se, $\Omega_{Y/\mathbb{C}}$ é localmente livre e a sequência

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

também é exata a esquerda, ou seja,

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/\mathbb{C}} \longrightarrow 0.$$

Além disso, neste caso $\mathcal{I}$ é localmente gerado por $r = \text{codim}(Y, X)$ elementos e $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2}$ é feixe localmente livre de posto r sobre Y .

Demonstração: Ver [10, Teorema 8.17, pag. 178]. ■

2.1.5 Aplicações

Iremos agora aplicar os resultados vistos nesta seção a fim de definirmos alguns invariantes de variedades não-singulares sobre $\mathbb{C}$.

Definição 2.36 *Seja X variedade não-singular sobre $\mathbb{C}$. Definimos o **feixe tangente** de X por*

$$\mathcal{T}_X = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X).$$

*Por definição, o feixe tangente é localmente livre cujo posto coincide com a dimensão da variedade X . O **feixe canônico** de X é, por definição, o n -ésimo produto exterior de feixe de diferenciais, ou seja,*

$$\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/\mathbb{C}},$$

onde $n = \dim X$. O feixe canônico é um feixe invertível sobre X .

Definição 2.37 *Seja X uma variedade projetiva e não-singular. Definimos o **gênero geométrico** de X por*

$$p_g = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \omega_X),$$

onde p_g é um inteiro não-negativo.

Mapas Racionais

Mapas racionais e equivalência birracional são importantes para a classificação de variedades algébricas.

Lema 2.38 *Sejam X e Y variedades e φ, ψ morfismos de X em Y . Se existe um aberto $U \subset X$ não vazio tal que $\varphi|_U = \psi|_U$, então $\varphi = \psi$.*

Definição 2.39 (i) *Sejam X, Y variedades. Um **mapa racional** $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma classe de equivalência de pares $\langle U, \varphi_U \rangle$, onde $U \subset X$ é um aberto e φ_U é um morfismo de U em Y .*

(ii) *Os pares $\langle U, \varphi_U \rangle$ e $\langle V, \varphi_V \rangle$ são **equivalentes** se φ_U e φ_V são compatíveis sobre $U \cap V \neq \emptyset$.*

(iii) *O mapa racional é dito **mapa dominante** se, para todo par $\langle U, \varphi_U \rangle$, a imagem φ_U é densa em Y .*

Definição 2.40 *Um **mapa birracional** $\varphi : X \rightarrow Y$ é um mapa racional com inversa $\psi : Y \rightarrow X$ racional tal que $\psi \circ \varphi = \text{Id}_X$ e $\varphi \circ \psi = \text{Id}_Y$. Se existe um mapa birracional de X em Y , então dizemos que X e Y são **birracionalmente equivalentes** ou **birracionais**.*

Lema 2.41 *Se A anel e Y uma hipersuperfície em A^n dada pela equação $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, então $A^n - Y$ é isomorfo a uma hipersuperfície H em A^n dada por $x_{n+1}f = 1$. Em particular, $A^n - Y$ é afim e seu anel afim é $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_f$.*

Demonstração: Ver [10, Lema 4.2, pag. 25]. ■

Proposição 2.42 *Para qualquer variedade Y existe uma base de subconjuntos abertos afins.*

Demonstração: Ver [10, Proposição 4.3, pag. 25]. ■

Considere $\varphi : X \rightarrow Y$ um mapa racional dominante representado pelo par $\langle U, \varphi_U \rangle$. Seja $f \in K(Y)$ uma função racional representada pelo par $\langle V, f \rangle$, onde V é um aberto de Y e f é regular sobre V . Como φ é um mapa dominante, então $\varphi_U(U)$ é denso em Y e, com isso, $\varphi_U^{-1}(V)$ é não vazio sobre X . Então $f \circ \varphi_U$ é uma função regular sobre $\varphi_U^{-1}(U)$ e nos dá uma função regular sobre X e um homomorfismo de K -álgebras de $K(Y)$ para $K(X)$.

Teorema 2.43 *Sejam $\varphi : X \rightarrow Y$ mapa racional dominante representado pelo par $\langle U, \varphi_U \rangle$ e $f \in K(Y)$ uma função racional representada por $\langle V, f \rangle$, onde V é um aberto de Y e f não singular sobre V . Para as variedades X, Y temos uma relação entre*

- (i) *o conjunto dos mapas racionais dominantes de X em Y e*
- (ii) *o conjunto dos homomorfismos de K -álgebras de $K(X)$ em $K(Y)$.*

E mais, esta correspondência nos dá uma equivalência das categorias de variedades e mapas racionais com a categoria das extensões finitamente geradas de $\mathbb{C}$.

Demonstração: Ver [10, Teorema 4.4, pag. 26]. ■

Definição 2.44 *Seja Y uma subvariedade não singular de uma variedade X não singular sobre $\mathbb{C}$. Chamamos o feixe localmente livre $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2}$ de **feixe conormal** de Y em X . O dual do feixe conormal é chamado **feixe normal** de Y em X e denotado por $\mathcal{N}_{Y/X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$.*

Como Y é não singular, o feixe normal é um feixe localmente livre de posto $r = \text{codim}(Y, X)$, pois $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ é localmente livre de posto r , pelo Teorema 2.34. No Teorema 2.35 mostramos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega_{X/\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega_{Y/\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

é exata. Tomando o dual de Y obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_{X/\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_{Y/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow 0$$

que equivale a

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow 0.$$

A seguinte proposição nos dá a chamada **fórmula de Adjunção**.

Proposição 2.45 *Seja Y uma subvariedade não singular de codimensão r em uma variedade não singular X sobre $\mathbb{C}$. Então*

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}.$$

No caso particular em que $r = 1$, considere Y como divisor e seja $\mathcal{L}$ o feixe invertível associado sobre X . Então

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y.$$

Demonstração: Sabemos que a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow 0$$

nos fornece a maior potência exterior de feixes localmente livres [10, pag. 128]. Assim,

$$\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \cong \omega_Y \otimes \bigwedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2).$$

Tomando o feixe dual, temos

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\omega_Y \otimes \bigwedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2))$$

que equivale a

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}.$$

No caso em que $r = 1$ temos

$$\mathcal{I}_Y \cong \mathcal{L}^{-1}.$$

Assim,

$$\frac{\mathcal{I}_Y}{\mathcal{I}_Y^2} \cong \frac{\mathcal{L}^{-1}}{\mathcal{I}_Y^2} \cong \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_Y$$

e, tomando o dual resulta em

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \Leftrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \cong \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y.$$

Logo, se $r = 1$ temos

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{N}_{Y/X} \Leftrightarrow \omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y.$$

■

Esquemas Cohen-Macaulay

Definição 2.46 (i) Sejam A anel e M um A -módulo. A sequência $x_1, \dots, x_r$ de elementos de A é dita **sequência regular** para M se x_1 não é um divisor de zero em M e, para todo $i = 2, \dots, r$, x_i não é um divisor de zero em $\frac{M}{(x_1, \dots, x_{i-1})M}$.

(ii) Se A é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}$, definimos a **profundidade** de M sendo o comprimento máximo de uma sequência regular $x_1, \dots, x_r$ para M , onde $x_i \in \mathcal{M}$, para todo $i = 1, \dots, r$.

(iii) Dizemos que um anel local noetheriano A é **anel Cohen-Macaulay** se a profundidade de A coincide com sua dimensão.

(iv) Um esquema afim é **Cohen-Macaulay** se todos seus anéis locais são Cohen-Macaulay.

Teorema 2.47 *Seja A anel local noetheriano com ideal maximal $\mathcal{M}$. Valem:*

- (a) *Se A é regular, então A é Cohen-Macaulay.*
- (b) *Se A é Cohen-Macaulay, então qualquer localização de A em um ideal primo também é Cohen-Macaulay.*
- (c) *Se A é Cohen-Macaulay, então o conjunto dos elementos $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{M}$ formam uma sequência regular para A se, e somente se, $\frac{\dim A}{(x_1, \dots, x_r)} = \dim A - r$.*
- (d) *Se A é Cohen-Macaulay e $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{M}$ é uma sequência regular para A , então $\frac{A}{(x_1, \dots, x_r)}$ também é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Ver [17, Teorema 36, pag. 121]. ■

Definição 2.48 *Dizemos que um anel local noetheriano A é **anel normal** se, para todo ideal primo P , a localização A_P é um domínio de integridade fechado, ou seja, se A_P é um domínio de integridade cujo fecho integral no seu corpo de frações é ele mesmo.*

O **feixo integral** de um ideal I é o conjunto dos elementos do anel A que são inteiros em I .

Definição 2.49 *Seja Y um sub-esquema fechado de uma variedade não singular X sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que Y é um **sub-esquema interseção completa local** em X se o feixe de ideais $\mathcal{I}_Y$ de Y em X pode ser localmente gerado por $r = \text{codim}(Y, X)$ elementos.*

O resultado que segue caracteriza os anéis noetherianos normais.

Proposição 2.50 *Seja Y um sub-esquema com interseção completa local de uma variedade não singular X sobre $\mathbb{C}$. Então*

- (i) *Y é Cohen-Macaulay;*
- (ii) *Y é normal se, e somente se, ele é regular em codimensão 1.*

Demonstração: Ver [10, Proposição 8.23, pag. 186]. ■

Teorema 2.51 (Serre) *Um anel noetheriano A é normal se, e somente se, ele satisfaz as duas condições que seguem:*

- (a) *para todo ideal primo $P \subset A$ de altura menor ou igual a 1, a localização A_P é regular;*
- (b) *para todo ideal primo $P \subset A$ de altura maior ou igual a 2, a profundidade da localização A_P é maior ou igual a 2.*

Demonstração: Ver [17, Teorema 39, pag. 125]. ■

2.1.6 Feixe Dualizante

Definição 2.52 A dimensão de um espaço topológico X é definida sendo o supremo de todos os inteiros n tal que existe uma cadeia de distintos subconjuntos fechados irredutíveis

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n.$$

A dimensão de um esquema é a sua dimensão vista como espaço topológico.

Definição 2.53 Seja X um esquema próprio de dimensão n sobre $\mathbb{C}$. O feixe dualizante de X é um feixe coerente $\widetilde{\omega}_X$ sobre X junto com uma aplicação traço

$$t : H^n(X, \widetilde{\omega}_X) \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que, para qualquer feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X , a aplicação

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \widetilde{\omega}_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \widetilde{\omega}_X)$$

seguida da aplicação traço fornece o isomorfismo

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \widetilde{\omega}_X) \cong H^n(X, \mathcal{F})^*.$$

Lema 2.54 Seja X um sub-esquema fechado de $P = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ com codimensão r . Então, para todo $i < r$, temos

$$\mathcal{E}xt_P^i(\mathcal{O}_X, \omega_P) = 0.$$

Demonstração: Ver [10, Lema 7.3, pag. 241]. ■

Lema 2.55 Seja X um sub-esquema fechado de $P = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ com codimensão r . Então, para qualquer $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ existe um isomorfismo funtorial

$$\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \widetilde{\omega}_X) \cong \text{Ext}_P^r(\mathcal{F}, \omega_P),$$

onde $\omega_P = \bigwedge^n \Omega_{P/\mathbb{C}}$.

Demonstração: Ver [10, Lema 7.4, pag. 242]. ■

Teorema 2.56 (Dualidade para $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$) Seja $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ espaço projetivo sobre $\mathbb{C}$. Valem:

(a) $H^n(X, \omega_X) \cong \mathbb{C}$, onde $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/\mathbb{C}}$.

(b) Para qualquer feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X , o mapa natural

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \omega) \times H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \omega) \cong \mathbb{C}$$

é um mapa perfeito (ou seja, a imagem inversa de compacto é compacto) de espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.

(c) Para todo $i \geq 0$, existe um isomorfismo funtorial natural

$$\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega) \rightarrow H^{n-i}(X, \mathcal{F})^*$$

Demonstração: Ver [10, Teorema 7.1, pag. 240]. ■

Proposição 2.57 *Seja X um esquema projetivo próprio sobre $\mathbb{C}$. Existe o feixe dualizante e ele é único, a menos de isomorfismo: se $\tilde{\omega}'$ é outro feixe dualizante, então existe um isomorfismo entre eles $\varphi : \tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}'$ tal que*

$$t = t' \circ H^n(\varphi).$$

Demonstração: Considere X um sub-esquema fechado de $P = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ com $\text{codim } X = r$. Seja

$$\tilde{\omega}_X = \mathcal{E}xt_P^r(\mathcal{O}_X, \omega_P).$$

Vamos mostrar que $\tilde{\omega}_X$ é um feixe dualizante.

Pelo Lema 2.55 temos

$$\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \tilde{\omega}_X) \cong \text{Ext}_P^r(\mathcal{F}, \omega_P),$$

onde $\mathcal{F}$ é um $\mathcal{O}_X$ -módulo. Como $\mathcal{F}$ é feixe coerente, pelo item (c) do Teorema 2.56, segue

$$\text{Ext}_P^r(\mathcal{F}, \omega_P) \cong H^{N-r}(P, \mathcal{F})^*.$$

Como, $N - r = n = \dim X$, então

$$\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \tilde{\omega}_X) \cong \text{Ext}_X^r(\mathcal{F}, \omega_P) \cong H^n(X, \mathcal{F})^*. \quad (2.5)$$

Tome $\mathcal{F} = \tilde{\omega}_X$. Como $1 \in \text{Hom}(\tilde{\omega}_X, \tilde{\omega}_X)$, conseguimos um homomorfismo

$$t : H^n(X, \tilde{\omega}_X) \rightarrow \mathbb{C},$$

que é o mapa traço. Então, tendo $\tilde{\omega}_X$ feixe coerente e o mapa traço, por (2.5) temos

$$\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \tilde{\omega}_X) \cong H^n(X, \mathcal{F})^*,$$

o que prova a existência do feixe coerente.

Para provarmos a unicidade, suponhamos $\tilde{\omega}'$ feixe dualizante com aplicação traço t' . Então, por definição,

$$\text{Hom}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') \cong H^n(\tilde{\omega})^*$$

e existe único morfismo $\varphi : \tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}'$ correspondendo ao elemento $t \in H^n(\tilde{\omega})^*$, ou seja,

$$t' \circ H^n(\varphi) = t.$$

Utilizando o fato que $\tilde{\omega}$ também é feixe dualizante, existe único morfismo $\psi : \tilde{\omega}' \rightarrow \tilde{\omega}$ tal que

$$t \circ H^n(\psi) = t'.$$

Assim,

$$t' \circ H^n(\varphi) \circ H^n(\psi) = t' \Rightarrow t' \circ H^n(\varphi \circ \psi) = t'.$$

Por um lado, sendo $\tilde{\omega}$ feixe dualizante, temos $\varphi \circ \psi = Id_{\tilde{\omega}}$. Por outro, como $\tilde{\omega}'$ também é feixe dualizante, segue que $\varphi \circ \psi = Id_{\tilde{\omega}'}$, e φ é um isomorfismo, o que prova a unicidade do feixe dualizante. ■

Os resultados a seguir são importantes neste estudo para a demonstração do nosso resultado principal.

Teorema 2.58 *Sejam X um sub-esquema fechado de $P = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ com interseção completa de codimensão r e $\mathcal{I}$ o feixe de ideais de X . Então*

$$\tilde{\omega}_X \cong \omega_X \otimes \bigwedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*,$$

onde $\omega_P = \bigwedge^n \Omega_{P/\mathbb{C}}$.

Demonstração: Ver [10, Teorema 7.11, pag. 245]. ■

Corolário 2 *Se X é uma variedade projetiva não singular sobre $\mathbb{C}$, então o feixe dualizante é isomorfo ao feixe canônico ω_X .*

Demonstração: Por hipótese, X é variedade projetiva não singular sobre $\mathbb{C}$. Seja $\mathcal{I}$ o feixe de ideais de X e suponha $X \subset P = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$. Pelo Teorema 2.35, o feixe de diferenciais $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ é localmente livre e $\Omega_{P/\mathbb{C}} = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \otimes \Omega_{X/\mathbb{C}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \bigwedge^n \Omega_{P/\mathbb{C}} &= \bigwedge^n \Omega_{X/\mathbb{C}} \otimes \bigwedge^n (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \Leftrightarrow \omega_P = \omega_X \otimes \bigwedge^n (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \\ \omega_X &= \omega_P \otimes \bigwedge^n (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^* = \tilde{\omega}_X \end{aligned}$$

e segue o resultado. ■

Os resultados que seguem são resultados particulares sobre esquemas.

Proposição 2.59 *Sejam X um esquema noeteriano (isto é, um esquema sobre o qual existe uma cadeia ascendentes de ideais estacionária), $\mathcal{F}$ feixe coerente sobre X , $\mathcal{G}$ um $\mathcal{O}_X$ -módulo e $x \in X$. Para todo $i \geq 0$, temos*

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong Ext_{\mathcal{O}_x}^i(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x).$$

Demonstração: Seja $U \subset X$ um aberto. Pela Proposição 1.61 temos

$$\mathcal{E}xt_X^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})_U \cong Ext_U^i(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U).$$

Suponhamos que X seja uma variedade afim. Então $\mathcal{F}$ tem uma resolução localmente livre

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0. \quad (2.6)$$

Seja $x \in X$. Então temos uma resolução induzida nos talos

$$(\mathcal{L})_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow 0.$$

Para a resolução (2.6), a Proposição 1.72 nos dá o isomorfismo

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong h^i(\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{G}))$$

que induz o isomorfismo nos talos, ou seja,

$$(\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \cong h^i(\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{G}))_x.$$

Como $\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{G})_x = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$, Utilizando este resultado no isomorfismo acima segue o resultado, pois

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong h^i(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}((\mathcal{L})_x, \mathcal{G}_x)) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_x}^i(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x).$$

■

O último resultado desta seção nos dá um isomorfismo sobre esquemas projetivos. Mas antes, precisamos definir alguns conceitos.

Definição 2.60 (a) Um **feixe invertível** é um feixe localmente livre de $\mathcal{O}_X$ -módulos de posto 1 sobre um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$.

(b) Seja X um esquema noetheriano sobre $\mathbb{C}$. Um feixe localmente livre $\mathcal{F}$ é dito **feixe amplo** se, para cada feixe coerente $\mathcal{G}$ sobre X , existe um inteiro $n_0(\mathcal{G})$ dependendo de $\mathcal{G}$ tal que o feixe $\mathcal{G} \otimes S^n \mathcal{F}$ é gerado por suas seções globais, para todo $n \geq n_0$ (aqui, $S^n \mathcal{F}$ denota a n -ésima potência simétrica de $\mathcal{F}$).

Proposição 2.61 Sejam X um esquema projetivo sobre um anel noetheriano A , $\mathcal{O}_X(1)$ um feixe invertível todo amplo e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ feixes coerentes sobre X . Existe um inteiro $n_0 > 0$, dependendo de $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ e i tal que, para todo $n \geq n_0$, temos

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \cong \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n))).$$

Demonstração: Ver [10, Proposição 6.9, pag. 236].

■

2.1.7 Feixes localmente livres

Definição 2.62 Seja $\mathcal{O}_X$ um feixe de anéis sobre um espaço topológico X , $p \in X$ e $\mathcal{L}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos. Dizemos que $\mathcal{L}$ é um **feixe localmente livre** de posto r sobre $\mathcal{O}_X$ se $\mathcal{L}$ é localmente

isomorfo a $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ em uma vizinhança de p , para todo $p \in X$. Em outras palavras, para todo $p \in X$ existem uma vizinhança U e seções $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{L}(U)$ tais que o homomorfismo de feixes

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A}^{\oplus r} |_U &\rightarrow \mathcal{L} |_U \\ (w_1, \dots, w_r) &\mapsto \sum_{i \leq j \leq r} w_j F_j \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Seja $\mathcal{L}$ um feixe localmente livre. Então, pela definição, existem abertos nas condições acima. Deste modo, existe uma cobertura $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ por abertos sobre $\mathcal{L}$ que admite geradores livres $F_\alpha^1, \dots, F_\alpha^r \in \mathcal{L}(U_\alpha)$. Observe que em cada aberto existem r seções em $\mathcal{L}(U_\alpha)$.

Sejam U_α, U_β abertos com $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Como $\mathcal{L}$ é localmente livre, para cada aberto temos r geradores livres que são expressos unicamente pelo isomorfismo. Assim, para cada par (α, β) , temos a matriz $r \times r$

$$G_{\alpha\beta} = (G_{\alpha\beta}^{jk})_{1 \leq j, k \leq r}, \quad \text{onde} \quad G_{\alpha\beta}^{jk} \in \mathcal{A}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

e os geradores se relacionam do seguinte modo

$$F_\beta^k = \sum_{1 \leq j \leq r} F_\alpha^j G_{\alpha\beta}^{jk},$$

sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. Assim, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\oplus r} |_U & \xrightarrow{F_\alpha} & \mathcal{L} |_U \\ \uparrow G_{\alpha\beta} & & \parallel \\ \mathcal{O}_X^{\oplus r} |_U & \xrightarrow{F_\beta} & \mathcal{L} |_U \end{array}$$

Observemos que a relação $G_{\alpha\beta} = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ obtida pelo diagrama acima nos afirma que a **matriz de transição** $G_{\alpha\beta}$ é invertível e satisfaz a condição

$$G_{\alpha\gamma} = G_{\alpha\beta} G_{\beta\gamma}$$

na interseção $U_{\alpha\beta\gamma}$. E mais, $G_{\alpha\alpha} = Id$ sobre U_α e $G_{\alpha\beta}^{-1} = G_{\beta\alpha}$, em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Os argumentos acima provam o seguinte resultado:

Proposição 2.63 *Sejam U_α, U_β dois abertos não vazios do espaço topológico X , tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Dado um feixe localmente livre $\mathcal{L}$ de posto r sobre $\mathcal{O}_X$ em $U_\alpha \cap U_\beta$, existem matrizes invertíveis $r \times r$, $G_{\alpha\beta}$, com coeficientes em $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$ que satisfaz a condição*

$$G_{\alpha\gamma} = G_{\alpha\beta} G_{\beta\gamma}$$

sobre $U_{\alpha\beta\gamma}$.

Observação 2.64 Vale a recíproca do resultado anterior.

Se voltarmos na seção de Fibrados Vetoriais veremos que a condição acima é a condição de cociclo. Assim, **a matriz transição $G_{\alpha\beta}$ definida acima satisfaz as condições de cociclo.**

Lema 2.65 *Sejam $(X, \mathcal{O}_X)$ espaço anelado e $\mathcal{L}$ um feixe localmente livre $\mathcal{O}_X$ -módulo de posto finito. Definimos o dual de $\mathcal{L}$, denotado por $\mathcal{L}^*$, sendo o feixe $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. São verdadeiras as afirmações:*

$$(a) \quad (\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L};$$

$$(b) \quad \text{Para qualquer } \mathcal{O}_X\text{-módulo } \mathcal{F}, \text{ temos } \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F};$$

$$(c) \quad \text{Para quaisquer } \mathcal{O}_X\text{-módulos } \mathcal{F}, \mathcal{G}, \text{ temos}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{G}));$$

$$(d) \quad \text{Se } f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) \text{ é um morfismo entre espaços anelados, } \mathcal{F} \text{ é um } \mathcal{O}_X\text{-módulo e } \mathcal{L} \text{ é um } \mathcal{O}_Y\text{-módulo localmente livre de posto finito, então existe um isomorfismo natural, } f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{L}) \cong f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}.$$

Lema 2.66 *Se $\mathcal{L} \in \mathfrak{Mod}(X)$ é um feixe localmente livre de posto finito e $\mathcal{I} \in \mathfrak{Mod}(X)$ é injetivo, então $\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}$ é injetivo.*

Demonstração: Para provarmos este fato, basta provar que o funtor $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{L} \otimes \mathcal{I})$ é exato. Pelo lema anterior, temos

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}, \cdot) &\cong \text{Hom}(\mathcal{I}, \text{Hom}(\mathcal{L}, \cdot)) \cong \text{Hom}(\mathcal{I}, \mathcal{L}^* \otimes \cdot) \cong \text{Hom}(\cdot, \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}) \\ &\cong \text{Hom}(\cdot \otimes \mathcal{L}^*, \mathcal{I}). \end{aligned}$$

Como $\cdot \otimes \mathcal{L}^*$ é exato [6, pag. 65] e $\mathcal{I}$ é injetivo, segue que $\text{Hom}(\cdot \otimes \mathcal{L}^*, \mathcal{I})$ é exato. Com isso, $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{L} \otimes \mathcal{I})$ é exato e consequentemente, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}$ é injetivo, como queríamos. ■

Proposição 2.67 *Sejam $\mathcal{L}$ um feixe localmente livre de posto finito e $\mathcal{L}^* = \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ seu dual. Para quaisquer $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$ temos o isomorfismo*

$$\text{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{G}).$$

Para o feixe $\mathcal{E}xt$, vale

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{L}^*.$$

Demonstração: Ver [10, Proposição 6.7, pag. 235]. ■

2.1.8 Correspondência entre Feixes localmente livres e Fibrados vetoriais

Na Proposição 2.63 vimos que dado um feixe localmente livre existe uma família de matrizes, chamadas matrizes de transição, que satisfazem as condições de cociclo, definidas na Seção 1.2. Mostraremos que existe uma correspondência entre feixes de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente livres e fibrados vetoriais holomorfos.

Para cada $x \in X$, considere o mapa sobrejetor

$$\begin{aligned} \varphi & : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{C} \\ w & \mapsto w(x) \end{aligned}$$

Afirmção: O núcleo da aplicação φ é um ideal maximal $\mathcal{M}_x$ de $\mathcal{O}_x$.

De fato, se $w \in \mathcal{O}_x$ é um elemento tal que $w(x) \neq 0$, então w é um elemento inversível em $\mathcal{O}_x$. Com isso, todo elemento de $\mathcal{O}_x$ que não pertence a $\text{Ker}(\varphi)$ é inversível. Assim, $\text{Ker}(\varphi)$ é um ideal maximal de $\mathcal{O}_x$. Consequentemente, pelo Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{M}_x} \cong \mathbb{C}.$$

Seja $\mathcal{L}$ um feixe localmente livre de posto r . Para cada $x \in X$, vamos associar um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial $E_x = \frac{\mathcal{L}_x}{\mathcal{M}_x}$. Como $\mathcal{L}$ é localmente livre, temos o isomorfismo induzido nos talos

$$\mathcal{L}_x \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus r} \otimes_x \mathbb{C}.$$

Assim, pelas observações acima

$$E_x \simeq \left(\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{M}_x} \right)^{\oplus r} = \mathbb{C}^r. \quad (2.7)$$

Considere o conjunto $E = \coprod_{x \in X} E_x$, união disjunta das seções E_x , e a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi & : E \rightarrow X \\ \xi & \mapsto \pi(\xi) := x, \end{aligned}$$

onde $\xi \in E$ e as fibras $E_x = \pi^{-1}(x)$ com estrutura de espaço vetorial complexo de dimensão r .

Tome $(F_\alpha^1, \dots, F_\alpha^r)$ como geradores de $\mathcal{O}_X(E)|_{U_\alpha}$. Então conseguimos $(e_\alpha^1(x), \dots, e_\alpha^r(x))$, geradores correspondentes na fibra E_x sobre $\mathbb{C}$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \theta_\alpha & : E|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r \\ \xi & \mapsto (x, (\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^r)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo, chamado **trivialização** de E sobre U_α . Isto dá a E uma estrutura holomorfa

Seja $U \subset X$ um aberto. De (2.7) segue que toda seção $s \in \mathcal{L}(U)$ dá origem a uma seção de E sobre U se fizermos $s(x) = s_x \bmod \mathcal{M}_x$. Deste modo, obtemos uma função

$$\begin{aligned} s &: U \rightarrow E \\ x &\mapsto s(x), \end{aligned}$$

com $s(x) \in E_x$ e $\pi \circ s = Id_U$.

Assim, se E é um fibrado vetorial holomorfo, então seu feixe será holomorfo e localmente livre.

Reciprocamente, dada uma coleção de matrizes $g_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{jk}) \in GL(\mathcal{O}_X)(U_{\alpha\beta})$ satisfazendo a condição de cociclo

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \quad \text{sobre} \quad U_{\alpha\beta\gamma},$$

podemos definir um $\mathcal{O}_X$ -fibrado vetorial

$$E = \frac{\coprod_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{C}^r}{\sim},$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência dada por

$$(x_\alpha, \xi_\alpha) \sim (x_\beta, \xi_\beta) \Leftrightarrow x_\alpha = x_\beta = x \in U_\alpha \cap U_\beta \quad \text{e} \quad \xi_\beta = g_{\alpha\beta}(x) \cdot \xi_\alpha.$$

Para ver que $\sim$ é uma relação de equivalência. Basta utilizar a definição de $g_{\alpha\beta}$. E assim mostramos que o fibrado é unicamente determinado pelas suas fibras.

2.2 Cohomologia de Čech

Salvo menção contrária, para nós M será uma variedade complexa, $\mathcal{O}$ denota o feixe de anéis das funções holomorfas e $\mathcal{O}^*$ o feixe de anéis das funções holomorfas não nulas.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} exp &: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \\ f &\mapsto e^{2\pi i f}. \end{aligned}$$

Observe que

$$Ker(exp) = \{f \in \mathcal{O}; e^{2\pi i f} = 1\} = \{f \in \mathcal{O}; 2\pi i f = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} = \{f \in \mathcal{O}; f = k, k \in \mathbb{Z}\},$$

ou seja, $Ker(exp) \cong \mathbb{Z}$ é o feixe constante, no sentido que para qualquer aberto $U \in M$, o grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ é sempre $\mathbb{Z}$.

Considere um aberto simplesmente conexo $U \in M$ no qual esteja definido o ramo do logaritmo. Assim, para todo $x \in U$

$$\begin{aligned} exp|_U &: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}^*(U) \\ f(x) &\mapsto e^{2\pi i f(x)} \end{aligned}$$

é uma aplicação bijetora. Deste modo, temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0.$$

Sejam $\mathcal{F}$ um feixe sobre um espaço topológico X e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura de X . Denotaremos $U_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}$, $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in \Lambda$.

Definição 2.68 *Uma q -cocadeia de $\mathcal{U}$ com coeficientes no feixe $\mathcal{F}$ é uma função que associa uma $(q+1)$ -upla ordenada $(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \Lambda^{q+1}$ a uma seção $f_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$.*

Notação:

- (a) $(f_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$ representa uma q -cocadeia;
- (b) $C^q(U, \mathcal{F})$ denota o conjunto das q -cocadeias.

Por definição, $C^q(U, \mathcal{F})$ é o conjunto de seções (germes de funções holomorfas) e, por isso, naturalmente tem estrutura de grupo abeliano.

Um homomorfismo de feixes

$$\Psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$$

induz uma aplicação entre grupos de seções

$$\begin{aligned} \Psi_q^* : C^q(U, \mathcal{F}) &\rightarrow C^q(U, \mathcal{G}) \\ (f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) &\mapsto \Psi^*((f_{\alpha_0 \dots \alpha_q})). \end{aligned}$$

Definição 2.69 *O operador*

$$\begin{aligned} d_q : C^q(U, \mathcal{F}) &\rightarrow C^{q+1}(U, \mathcal{F}) \\ (f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) &\mapsto (g_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}), \end{aligned}$$

onde

$$g_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho_k(f_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_k} \dots \alpha_{q+1}})$$

e ρ_k é o mapa restrição

$$\rho_k : \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_k} \dots \alpha_{q+1}}) \rightarrow \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k \dots \alpha_{q+1}})$$

é chamado **operador de cobordo**.

Lema 2.70 *Para os operadores de cobordo vale $d_{q+1} \circ d_q = 0$.*

Demonstração: Basta utilizar a definição do operador de cobordo e fazer cálculos. ■

Definição 2.71 *O núcleo do operador de cobordo $d_q : C^q(U, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(U, \mathcal{F})$ é definido por*

$$Z^q(U, \mathcal{F}) := \{f \in C^q(U, \mathcal{F}); d_q(f) = 0\}.$$

Os elementos de $Z^q(U, \mathcal{F})$ são chamados **q -cociclos**.

Já a **imagem** do operador $d_{q-1} : C^{q-1}(U, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(U, \mathcal{F})$ é o conjunto

$$B^q(U, \mathcal{F}) := \{f \in C^q(U, \mathcal{F}); \text{ existe } g \in C^{q-1}(U, \mathcal{F}) \text{ tal que } f = d_{q-1}(g)\},$$

para $q \geq 1$, e os elementos de $B^q(U, \mathcal{F})$ são chamados **q -cobordos**.

Pelo Lema 2.70, segue que $B^q(U, \mathcal{F}) \subset Z^q(U, \mathcal{F})$, ou seja, todo q -cobordo é um q -cociclo. Assim, temos a seguinte

Definição 2.72 Para $q > 0$, o q -ésimo grupo de cohomologia de Čech de $\mathcal{F}$ em relação a U é definido por

$$H^q(U, \mathcal{F}) := \frac{Z^q(U, \mathcal{F})}{B^q(U, \mathcal{F})}.$$

Para $q = 0$, temos

$$H^0(U, \mathcal{F}) = Z^0(U, \mathcal{F}).$$

Seja $f = (f_{\alpha_0}) \in H^0(U, \mathcal{F})$. Então

$$f \in Z^0(U, \mathcal{F}) \Leftrightarrow d_0(f) = 0 \Leftrightarrow g_{\alpha_0\alpha_1} = 0 \in U_{\alpha_0\alpha_1}.$$

Ainda

$$0 = g_{\alpha_0\alpha_1} = f_{\alpha_1} |_{U_{\alpha_0\alpha_1}} - f_{\alpha_0} |_{U_{\alpha_0\alpha_1}} \Leftrightarrow f_{\alpha_1} |_{U_{\alpha_0\alpha_1}} = f_{\alpha_0} |_{U_{\alpha_0\alpha_1}}.$$

Pelo Princípio da Identidade

$$f_{\alpha_0} = f_{\alpha_1}$$

e, portanto, os elementos de $H^0(U, \mathcal{F})$ definem uma seção global de $\mathcal{F}$.

Passando ao limite direto por todos os abertos $U \subset M$, temos

$$\lim_{\rightarrow} H^0(U, \mathcal{F}) = H^0(M, \mathcal{F})$$

Definimos o **anel de cohomologia** da variedade complexa M por

$$H^*(M, \mathbb{C}) := \bigoplus_{q \geq 0} H^q(M, \mathbb{C}).$$

2.3 Classes de Chern

Definição 2.73 O grupo das classes de isomorfismos de fibrados em retas holomorfas sobre a variedade complexa M com a operação produto tensorial é denominado **Grupo de Picard** de M e denotado por $\text{Pic}(M)$. Assim,

$$\text{Pic}(M) := \{\text{classes de equivalência de fibrados em retas holomorfas, módulo isomorfismo}\}.$$

Proposição 2.74 *A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} \psi & : & \text{Pic}(M) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \\ & & L \mapsto (g_{\alpha_0 \alpha_1}) \end{array}$$

é um isomorfismo.

Demonstração:

- (i) A aplicação ψ está bem definida, pois se L' é um fibrado isomorfo a L dado pelo cociclo $(g'_{\alpha_0 \alpha_1})$, então existe $f_{\alpha_0} \in \mathcal{O}^*$ tal que $f_{\alpha_0} = \left(\frac{g'_{\alpha_0 \alpha_1}}{g_{\alpha_0 \alpha_1}} \right) \cdot f_{\alpha_1}$ em $U_{\alpha_0 \alpha_1}$, ou seja, em $U_{\alpha_0 \alpha_1}$

$$(g'_{\alpha_0 \alpha_1}) - (g_{\alpha_0 \alpha_1}) = d_0(f_{\alpha_0}) = f_{\alpha_0} - f_{\alpha_1}$$

e $(g'_{\alpha_0 \alpha_1}), (g_{\alpha_0 \alpha_1})$ definem o mesmo elemento em $H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

- (ii) $\psi(L \otimes L') = (g_{\alpha_0 \alpha_1} + (g'_{\alpha_0 \alpha_1})) = (g_{\alpha_0 \alpha_1}) + (g'_{\alpha_0 \alpha_1}) = \psi(L) + \psi(L')$ e ψ é um homomorfismo de fibrados.

- (iii) A sobrejetividade de ψ segue do modo como a aplicação foi construída, pois dado um cociclo, existe um fibrado associado a ele.

- (iv) $\text{Ker}(\psi) = \{L \in \text{Pic}(M); g_{\alpha_0 \alpha_1} = \text{Id}\} = \{L \in \text{Pic}(M); L \text{ é trivial}\}$.

Pelo Teorema do Isomorfismo,

$$\text{Pic}(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}^*).$$

■

Como vimos na seção de Cohomologia [ver Apêndice B], dada uma sequência exata curta de categorias abelianas existem δ -funtores que nos dão uma sequência longa de funtores derivados. Aqui, estes “ δ -funtores” são os homomorfismos de grupos de cohomologia.

Teorema 2.75 *Seja*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\text{exR}} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de feixes sobre uma variedade complexa M . Então existem homomorfismos $\delta_q : H^q(M, \mathcal{O}^) \rightarrow H^{q+1}(M, \mathbb{Z})$ de modo que a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\text{exR}} \mathcal{O}^* \xrightarrow{\delta_0} H^1(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O})$$

é exata.

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura localmente finita de M . Para todo aberto $U \subset M$, sabemos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\text{exR}} \mathcal{O}^*(U) \longrightarrow 0$$

é exata por ser restrição de uma sequência exata a um aberto da variedade M . Como cada grupo $C^q(U, \mathbb{Z})$ é produto direto dos grupos $\mathbb{Z}(U_\alpha)$, faz sentido definir a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow C^q(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow C^q(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\exp} C^q(U, \mathcal{O}^*) \longrightarrow 0,$$

para todo $q \geq 0$.

Sabemos também que, para cada $q \geq 0$, temos definido o operador cobordo

$$d_q : C^q(U, \cdot) \rightarrow C^{q+1}(U, \cdot)$$

que faz com que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^0(U, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_0} & C^0(U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\exp_0} & C^0(U, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_0 & & \downarrow d_0 & & \downarrow d_0 & & \\ 0 & \longrightarrow & C^1(U, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_1} & C^1(U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\exp_1} & C^1(U, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & C^2(U, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_2} & C^2(U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\exp_2} & C^2(U, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_2 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow d_{q-1} & & \downarrow d_{q-1} & & \downarrow d_{q-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & C^q(U, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_q} & C^q(U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\exp_q} & C^q(U, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_q & & \downarrow d_q & & \downarrow d_q & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{q+1}(U, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_{q+1}} & C^{q+1}(U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\exp_{q+1}} & C^{q+1}(U, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

comute (note que as setas horizontais são sequências exatas curtas). Defina a aplicação entre grupos de cohomologia

$$\delta_q : H^q(U, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^{q+1}(U, \mathbb{Z}).$$

Esta aplicação está bem definida, pois se $h \in H^q(U, \mathcal{O}^*)$ é uma classe no quociente $\frac{Z^q(U, \mathcal{O}^*)}{B^q(U, \mathcal{O}^*)}$ representada pelo cociclo $(h_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) \in C^q(U, \mathcal{O}^*)$, da sobrejetividade da aplicação $\exp$, existe uma cocadeia $(g_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) \in C^q(U, \mathcal{O})$ tal que

$$\exp((g_{\alpha_0 \dots \alpha_q})) = (h_{\alpha_0 \dots \alpha_q}).$$

Da comutatividade do diagrama acima, temos $\exp(d_q(g_{\alpha_0 \dots \alpha_q})) = d_q((h_{\alpha_0 \dots \alpha_q})) = 0$. Além disso é possível encontrar uma cocadeia $(f_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}) \in C^q(U, \mathbb{Z})$ tal que

$$\varphi_{q+1}((f_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}})) = d_q(g_{\alpha_0 \dots \alpha_q}), \quad (2.8)$$

pois cada sequência horizontal é exata e o diagrama é comutativo. Este fato ainda nos fornece

$$\varphi_{q+2}(d_{q+1}((f_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}))) = d_{q+1}(\varphi_{q+1}((f_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}))) \stackrel{2.8}{=} d_{q+1}(d_q(g_{\alpha_0 \dots \alpha_q})) = 0$$

e, como φ_{q+2} é injetiva, segue que $(f_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}})$ é um cociclo, ou seja, corresponde a uma classe em $H^{q+1}(U, \mathbb{Z})$. Logo,

$$\begin{aligned} \delta_q : H^q(U, \mathcal{O}^*) &\rightarrow H^{q+1}(U, \mathbb{Z}) \\ (f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) &\mapsto (f_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}) \end{aligned}$$

define um homomorfismo, pois

$$\delta_q((f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) + (g_{\alpha_0 \dots \alpha_q})) = (f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) + (g_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) = \delta_q((f_{\alpha_0 \dots \alpha_q})) + \delta_q((g_{\alpha_0 \dots \alpha_q}))$$

e nos fornece a sequência longa

$$\dots \longrightarrow H^q(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\exp^*} H^q(U, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{q+1}(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \dots$$

Passando o limite direto, encontramos a sequência exata longa de grupos de cohomologia

$$\dots \longrightarrow H^q(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(M, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots,$$

como queríamos. ■

Dada uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

existe uma aplicação [ver Apêndice B]

$$\delta : H^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Vamos agora determinar a imagem desta aplicação. Temos

$$\begin{array}{ccc} C^1(U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\exp} & C^1(U, \mathcal{O}^*) \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & C^2(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow & C^2(U, \mathcal{O}) \end{array}$$

Considere U simplesmente conexo no qual esteja definido o ramo do logaritmo. Se $g_{\alpha_0 \alpha_1} \in C^1(U, \mathcal{O})$, então $\exp(g_{\alpha_0 \alpha_1}) = e^{2\pi i g_{\alpha_0 \alpha_1}}$. Daí, $(\frac{1}{2\pi i} \log(g_{\alpha_0 \alpha_1})) \in C^1(U, \mathcal{O})$ é a pré-imagem de $(g_{\alpha_0 \alpha_1})$ pela aplicação $\exp$. Deste modo, na interseção não vazia dos abertos $U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$, temos

$$\delta((g_{\alpha_0 \alpha_1})) = d_1 \left(\frac{1}{2\pi i} \log(g_{\alpha_0 \alpha_1}) \right) = \frac{1}{2\pi i} (\log(g_{\alpha_1 \alpha_2}) - \log(g_{\alpha_0 \alpha_2}) + \log(g_{\alpha_0 \alpha_1}))$$

e daí

$$\frac{1}{2\pi i} (\log(g_{\alpha_1 \alpha_2}) - \log(g_{\alpha_0 \alpha_2}) + \log(g_{\alpha_0 \alpha_1})) \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Definição 2.76 A primeira classe de Chern de um fibrado holomorfo em retas é definida por

$$c_1(L) := \delta(g_{\alpha_0\alpha_1}) = \frac{1}{2\pi i} (\log(g_{\alpha_1\alpha_2}) - \log(g_{\alpha_0\alpha_2}) + \log(g_{\alpha_0\alpha_1})),$$

na interseção não vazia $U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$.

Consequências:

(a) Se L é um fibrado trivial, então $c_1(L) = 0$, pois

$$c_1(L) = \frac{1}{2\pi i} \log(1) = 0.$$

(b) $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$. De fato,

$$\begin{aligned} c_1(L_1 \otimes L_2) &= \frac{1}{2\pi i} (\log(g_{\alpha_1\alpha_2} \cdot g'_{\alpha_1\alpha_2}) - \log(g_{\alpha_0\alpha_2} \cdot g'_{\alpha_0\alpha_2}) + \log(g_{\alpha_0\alpha_1} \cdot g'_{\alpha_0\alpha_1})) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\log g_{\alpha_1\alpha_2} + \log g'_{\alpha_1\alpha_2} - \log g_{\alpha_0\alpha_2} - \log g'_{\alpha_0\alpha_2} + \log g_{\alpha_0\alpha_1} + \log g'_{\alpha_0\alpha_1}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} [(\log g_{\alpha_1\alpha_2} - \log g_{\alpha_0\alpha_2} + \log g_{\alpha_0\alpha_1}) + (\log g'_{\alpha_1\alpha_2} - \log g'_{\alpha_0\alpha_2} + \log g'_{\alpha_0\alpha_1})] \\ &= c_1(L_1) + c_1(L_2). \end{aligned}$$

Seja E fibrado vetorial holomorfo. O **projetivizado** de E , denotado por $\mathbb{P}(E)$, é o espaço

$$\mathbb{P}(E) = \bigcup_{x \in M} \mathbb{P}(E_x),$$

em que $\mathbb{P}(E_x)$ é a projetivização da fibra E_x . Consideremos $\rho : E \rightarrow M$ um fibrado de posto n e $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow M$ o fibrado projetivizado.

Definição 2.77 Definimos o **subfibrado universal** S sobre $\mathbb{P}(E)$ por

$$S = \{(p, l_p, v) \in \pi^{-1}E; v \in l_p\}$$

cujas fibras na reta passando por p , l_p , são todos os pontos de l_p .

Façamos a restrição do subfibrado universal S sobre $\mathbb{P}(E)$ à fibra $\mathbb{P}(E_p)$. Essa restrição nos dá um subfibrado $\tilde{S}$ do espaço projetivo $\mathbb{P}(E_p)$. Deste modo, se $x = c_1(S^*)$ é a primeira classe de Chern do fibrado hiperplano, então $c_1(\tilde{S})$ é a restrição de x a fibra $\mathbb{P}(E_p)$. Portanto, as classes de cohomologia $1, x, \dots, x^{n-1}$ são classes globais sobre $\mathbb{P}(E)$.

Teorema 2.78 (Leray-Hirsch) Seja $\rho : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto n . Então $H^*(\mathbb{P}(E))$ é um $H^*(M)$ -módulo livre gerado por $1, x, \dots, x^{n-1}$, onde $H^*(M)$ é a Cohomologia de De Rham.

Demonstração: Ver [2, Teorema 5.11, pag. 50]. ■

O Teorema anterior nos permite escrever x^n como combinação linear de $1, x, \dots, x^{n-1}$ com coeficientes em $H^*(M)$, ou seja,

$$x^n + c_1(E)x^{n-1} + \dots + c_n(E) = 0.$$

Definição 2.79 *Seja E um fibrado vetorial de posto n . Chamamos $c_i(E)$ é a i -ésima classe de Chern de E e*

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E)$$

a classe de Chern total de E .

Teorema 2.80 *Vale*

$$H^*(\mathbb{P}^{n-1}) \cong \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^n \rangle}.$$

Demonstração: Ver [16] ■

Exemplo 2.81 *As classes de Chern de um fibrado trivial são todas nulas. De fato. Se E é um fibrado trivial, então $E = M \times \mathbb{P}^{n-1}$. Pelo Teorema anterior, $x^n = 0$ e, com isso*

$$c_1(E)x^{n-1} + c_2(E)x^{n-2} + \dots + c_n(E) = 0.$$

Como $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ é base, segue que $c_i(E) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n-1$.

2.3.1 Propriedades das Classes de Chern

Citaremos agora algumas propriedades que as Classes de Chern gozam.

Primeiras propriedades

1) Naturalidade: Se $f : Y \rightarrow X$ é uma aplicação entre variedades e E é um fibrado vetorial complexo sobre X , então

$$c(f^{-1}E) = f^*c(E).$$

Para verificarmos esta afirmação, vamos considerar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & & E \\ f^* \downarrow & & \rho \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

e S_E o subfibrado universal sobre $\mathbb{P}(E)$. Pelo diagrama podemos ver que

$$f^{-1}(\mathbb{P}(E)) = \mathbb{P}(f^{-1}(E)) \quad \text{e} \quad f^{-1}(S_E^*) = S_{f^{-1}(E)}^*.$$

Assim, se $x_E = c_1(S_E^*)$, então

$$x_{f^{-1}(E)} = c_1(S_{f^{-1}(E)}^*) = c_1(f^{-1}(S_E^*)) = f^{-1}(c_1(S_E^*)) = f^*x_E.$$

Como

$$x_E^n + c_1(E)x_E^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(E)x_E + c_n(E) = 0, \quad (2.9)$$

então

$$f^*x_E^n + f^*(c_1(E)x_E^{n-1}) + \cdots + f^*(c_{n-1}(E)x_E) + f^*(c_n(E)) = 0$$

equivale a

$$x_{f^{-1}(E)}^n + f^*c_1(E)x_{f^{-1}(E)}^{n-1} + \cdots + f^*c_{n-1}(E)x_{f^{-1}(E)} + f^*(c_n(E)) = 0. \quad (2.10)$$

Igualando as equações (2.9) e (2.10), temos $x_E^n = x_{f^{-1}(E)}^n$ e daí,

$$c_1(E)x_E^{n-1} = c_1(E)x_{f^{-1}(E)}^{n-1} = f^*c_1(E)x_{f^{-1}(E)}^{n-1}.$$

Portanto,

$$c_1(E) = c_1(f^{-1}(E)) = f^*c_1(E).$$

2) Se o fibrado E tem uma seção não nula, então a Classe de Chern top, $c_n(E)$, é nula.

Seja E um fibrado vetorial com seção s . Então s induz uma seção $\tilde{s}$ sobre o projetivizado $\mathbb{P}(E)$ do seguinte modo: em cada ponto $p \in M$, a imagem de p por $\tilde{s}$ é a reta em E_p passando pela origem na direção de $s(p)$.

$$M \xleftarrow{\tilde{s}} \mathbb{P}(E)$$

Considere o subfibrado universal S_E sobre $\mathbb{P}(E)$. Assim, $\tilde{s}^{-1}(S_E)$ é um fibrado complexo em retas sobre M cujas fibras em p são retas geradas por $s(p)$.

Seja $s \in \Gamma(M, L)$. Se $s(p) \neq 0$, para todo $p \in M$, podemos definir o isomorfismo fibra a fibra, para todo $p \in M$, por

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{C} \rightarrow L_p \\ \lambda &\mapsto \lambda \cdot s(p). \end{aligned}$$

Disso, segue que todo fibrado em retas com seção não nula é isomorfo ao fibrado trivial. Mas sabemos que todas as Classes de Chern de um fibrado trivial são nulas, então

$$\tilde{s}^*c_1(S_E) = 0.$$

Fazendo $x = c_1(S_E)$, temos $\tilde{s}^*x = 0$. Como

$$x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

segue

$$\tilde{s}^*x^n + \tilde{s}^*c_1x^{n-1} + \cdots + \tilde{s}^*c_n = 0.$$

Do fato de $\tilde{s}^*x = 0$ temos $c_n = 0$, já que a seção é não nula.

3) Seja E um fibrado vetorial de posto n sobre M . Então $c_k(E) = 0$, para todo $k > n$.

Este fato na verdade segue direto da definição de Classe de Chern.

2.3.2 O Princípio da decomponibilidade

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial complexo de posto n sobre uma variedade M . Pretendemos construir um espaço $F(E)$ e encontrar um mapa $f : F(E) \rightarrow M$ no qual valem

- (i) o pull-back do fibrado E em $F(E)$ cinde em soma direta de fibrados em retas e
- (ii) o mapa f^* é uma imersão de $H^*(M)$ em $H^*(F(E))$.

Teorema 2.82 *Seja E um fibrado vetorial complexo de posto n sobre uma variedade M . Existe uma variedade $F = F(E)$ e uma aplicação própria $f : F(E) \rightarrow M$ (ou seja, uma aplicação contínua onde a pré-imagem de todo compacto de M é um compacto de $F(E)$) tal que*

- (i) $f^* : H^*(M) \rightarrow H^*(F(E))$ é injetiva;
- (ii) $f^*(E) \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, para certos fibrados em reta $L_1, \dots, L_n$.

Demonstração: Ver [16, Teorema 18.10, pag. 188]. ■

Do princípio da decomponibilidade podemos obter mais propriedades das Classes de Chern.

Antes de continuarmos vamos esclarecer um abuso de linguagem que cometeremos neste texto. O princípio da decomponibilidade nos permite decompor o pull-back de um fibrado vetorial E de posto n em fibrados em retas, porém, algumas vezes faremos menção a decomponibilidade do fibrado E , mesmo sabendo que seu pull-back é o que se decompõe.

Mais propriedades das Classes de Chern

4) Vale a igualdade $c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E)$.

Isto decorre do seguinte fato: como E é um fibrado vetorial complexo, então $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$ e daí

$$E \otimes E^* = \text{Hom}(E, E)$$

é um fibrado trivial. Como as classes de Chern de um fibrado trivial são todas nulas, então

$$0 = c_1(E \otimes E^*) = C_1(E) + c_1(E^*) \Leftrightarrow c_1(E) = -c_1(E^*).$$

Pelo princípio da decomponibilidade, segue

$$c(E^*) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(L_i^*)) = \prod_{i=1}^n (1 - c_1(L_i)),$$

onde L_i são fibrados em retas e L_i^* os fibrados hiperplanos associados. Portanto,

$$c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E).$$

5) Fórmula Produto de Whitney: $c(E' \oplus E) = c(E')c(E)$.

Primeiramente vamos considerar o caso em que o fibrado E se decompõe em fibrados em retas, ou seja,

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n.$$

Considere $\pi^{-1}E$ o pull-back de E para a projetivização $\mathbb{P}(E)$ e S o subfibrado universal de $\pi^{-1}E$.

$$\begin{array}{ccc} & S \subset \pi^{-1}E & \\ & \downarrow & \\ E & & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow & \swarrow & \\ M & & \end{array}$$

Como o pull-back cinde em fibrados em retas, segue que S cinde sobre $\mathbb{P}(E)$. Seja s_i a projetivização de S a reta l_i . Então s_i é uma seção de $\text{Hom}(S, L_i) = L_i \otimes S^*$. Para todo ponto $p \in \mathbb{P}(E)$, a fibra associada a p é um subespaço vetorial de $\pi^{-1}E_p$ de dimensão 1. Assim, as projeções $s_1, \dots, s_n$ não podem ser todas nulas simultaneamente e, em decorrência disso, os conjuntos abertos

$$U_i = \{p \in \mathbb{P}(E); s_i \neq 0\}$$

formam uma cobertura para $\mathbb{P}(E)$. Logo, pelo que comentamos acima, para cada aberto U_i , o fibrado $(S^* \otimes L_i) |_{U_i}$ tem uma seção que não se anula, a saber, a seção s_i . Então o fibrado $(S^* \otimes L_i) |_{U_i}$ é trivial.

Afirmção: Se M é uma variedade C^∞ , então $H^p(M, \mathbb{C}) \cong H_{DR}^p(M, \mathbb{C})$. [ver [9] - página 43.]

A afirmação acima nos diz que a p -ésima Cohomologia de Čech é isomorfa a p -ésima Cohomologia de De Rham. Por definição, a p -ésima Cohomologia de De Rham é dada por

$$H_{DR}^p(\mathbb{C}^n) = \frac{\{p - \text{forma fechada}\}}{\{p - \text{forma exata}\}}.$$

Assim, vamos considerar ξ_i a 2-forma fechada global que representa $c_1(S^* \otimes L_i)$. Então

$$\xi_i |_{U_i} = d\omega_i, \tag{2.11}$$

para alguma 1-forma ω_i sobre U_i .

É possível mostrar ver [2] que existe uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{P}(E)$ com $\overline{V_i} \subset U_i$ e função $\rho_i \in C^\infty$ a qual assume valor 1 em $\overline{V_i}$ e 0 fora de U_i . Assim, $\rho_i \omega_i$ é uma forma global que

concorda com ω_i sobre V_i . Portanto,

$$\xi_i - d(\rho_i \omega_i)$$

é uma forma global que representa $c_1(S^* \otimes L_i)$ e se anula sobre V_i , pois

$$\xi_i - d(\rho_i \omega_i) = \xi_i - \omega_i d\rho_i - \rho_i d\omega_i = \xi_i - d\omega_i = 0,$$

pela Equação (2.11). Como $\{V_i\}_{i \in I}$ cobre $\mathbb{P}(E)$, pelos cálculos acima temos

$$\prod_{i=1}^n c_1(S^* \otimes L_i) = 0.$$

Fazendo $x = c_1(S^*)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{i=1}^n c_1(S^* \otimes L_i) = \prod_{i=1}^n (c_1(S^*) + c_1(L_i)) = \prod_{i=1}^n (x + c_1(L_i)) \\ &= x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_n, \end{aligned}$$

onde σ_i é o i -ésimo elemento polinomial simétrico de $c_1(L_1), \dots, c_1(L_n)$ obtido pela expansão em Binômio de Newton. Observe que esta expressão é a definição da classe de Chern total de E , $c(E)$. Portanto, $\sigma_i = c_i(E)$ e

$$c(E) = c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(L_i)) = \prod_{i=1}^n c(L_i),$$

o que prova a Fórmula Produto de Whitney quando E cinde sobre fibrados em retas.

Para provarmos o caso geral, considere dois fibrados vetoriais E e E' de posto n e m , respectivamente e

$$\pi : F(E) \rightarrow M \quad \text{e} \quad \pi' : F(\pi^{-1}(E)) \rightarrow F(E)$$

tais que

$$\begin{array}{ccccc} & & & & L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \oplus L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_m \\ & & & & \downarrow \\ & & L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \oplus \pi^{-1} E' & & F(\pi^{-1} E) \\ & & \downarrow & \swarrow \pi' & \\ E \oplus E' & & F(E) & \swarrow \pi & \\ \downarrow & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

A construção acima faz sentido pois o pull-back de um fibrado cinde em fibrados em retas. Seja $\sigma = \pi \circ \pi'$. Então, pela propriedade da Naturalidade e pelo que provamos anteriormente,

segue

$$\begin{aligned}\sigma^*c(E \oplus E') &= c(\sigma^{-1}(E \oplus E')) = c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \oplus L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_m) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} c(L_i)c(L'_j) = \sigma^*c(E) \cdot \sigma^*c(E')\end{aligned}$$

Da injetividade de σ^* , temos

$$c(E \oplus E') = c(E)c(E').$$

Cálculo de algumas Classes de Chern

Como exemplo, calcularemos as Classes de Chern de alguns fibrados.

Produto Exterior

Seja V um espaço vetorial com base $\{v_1, \dots, v_n\}$. O produto exterior $\bigwedge^p V$ é o espaço vetorial de base $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$. Assim, se $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, então é possível mostrar que

$$\bigwedge^p E = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} (L_{i_1} \otimes \cdots \otimes L_{i_p}).$$

Usando a Fórmula de Whitney, segue que a Classe de Chern total do produto exterior do fibrado E , de posto n , é dada por

$$c\left(\bigwedge^p E\right) \prod_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} (1 + c_1(L_{i_1} \otimes \cdots \otimes L_{i_p})) = \prod_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_p}),$$

onde $x_{i_1} = c_1(L_{i_1})$.

Produto Simétrico

Considere V e W espaços vetoriais com base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$, respectivamente. O p -ésimo produto simétrico, $S^p V$ de V , é o espaço vetorial de base $\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$. Já o produto tensorial $V \otimes W$ é o espaço vetorial com base $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$.

Sejam E e F fibrados vetoriais de posto n e m , respectivamente. Suponhamos que E e F cindem em fibrados em reta. Então

$$c(E) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \quad \text{e} \quad c(F) = \prod_{j=1}^m (1 + y_j),$$

onde $x_i = c_1(L_i)$ e $y_j = c_1(L_j)$. Assim,

$$c(S^p E) = \prod_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} (1 + c_1(L_{i_1} \otimes \cdots \otimes L_{i_p})) = \prod_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_p})$$

e

$$c(E \otimes F) = c(E) + c(F) = \prod_{1 \leq i, j \leq n, m} (1 + x_i + y_j).$$

O fibrado dual

Seja L um fibrado complexo em retas. Sabemos

$$c_1(L^*) = -c_1(L).$$

Considere agora E um fibrado cindido, ou seja,

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n.$$

Utilizando novamente a Fórmula Produto de Whitney, temos

$$c(E) = c(L_1) \cdots c(L_n) = (1 + c_1(L_1)) \cdots (1 + c_1(L_n)).$$

Por outro lado,

$$E^* = L_1^* \oplus L_2^* \oplus \cdots \oplus L_n^*$$

e

$$c(E^*) = (1 - c_1(L_1^*)) \cdots (1 - c_1(L_n^*)).$$

Portanto, a k -ésima classe de Chern do fibrado dual é dada por

$$c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E).$$

2.4 Fibrado Determinante

Na subseção 2.1.8 vimos que a um feixe coerente localmente livre podemos associar um fibrado vetorial e vice-versa. Deste modo, uma sequência exata de fibrado vetoriais holomorfos

$$0 \longrightarrow E_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0 \quad (2.12)$$

induz uma sequência exata de feixes coerentes localmente livres

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow 0,$$

onde, para cada $i = 1, \dots, m$, $\mathcal{E}_i$ denota o feixe de germes de seções holomorfas de E_i .

Reciprocamente, uma sequência exata de feixes coerentes localmente livres induz uma sequência exata de fibrados vetoriais holomorfos.

Definição 2.83 *Seja E um fibrado vetorial holomorfo de posto r . Definimos seu **fibrado determinante**, denotado por $\det E$, por*

$$\det E = \bigwedge^r E.$$

Lema 2.84 *Considere a sequência exata de fibrados vetoriais holomorfos*

$$0 \longrightarrow E_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0.$$

O fibrado em retas

$$\bigotimes_{i=0}^m (\det E_i)^{(-1)^i} = \det E_0 \otimes (\det E_1)^* \otimes \det E_2 \otimes \cdots \otimes (\det E_m)^{(-1)^m}$$

é isomorfo ao fibrado trivial em retas.

Demonstração: Faremos indução sobre m . Se $m = 0$

$$\bigotimes_{i=0}^0 (\det E_i)^{(-1)^i} = \det E_0,$$

que é fibrado trivial em retas.

Se $m = 1$, temos

$$\bigotimes_{i=0}^1 (\det E_i)^{(-1)^i} = \det E_0 \otimes (\det E_1)^*.$$

Como $\det E_0$ e $(\det E_1)^*$ são fibrados triviais em reta, ou seja, são fibrados de posto 1, segue que

$$\det E_0 \otimes (\det E_1)^*$$

também é um fibrado trivial em retas.

Suponha $m > 1$. Vamos reduzir a sequência 2.12 em duas sequência exatas

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0 \quad \text{e}$$

$$0 \longrightarrow E_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_2 \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

onde $E = \text{Ker}(E_1 \rightarrow E_0) = \text{Im}(E_2 \rightarrow E_1)$.

Como

$$\det E_1 = (\det E) \otimes (\det E_0)$$

e $\det E, \det E_0$ são isomorfos a fibrados triviais em retas, segue que $\det E$ é isomorfo ao fibrado trivial em retas. Consequentemente,

$$\bigotimes_{i=0}^2 (\det E_i)^{(-1)^i} = (\det E_0) \otimes \underbrace{(\det E_0)^* \otimes (\det E)^*}_{\det E_1} \otimes (\det E_2)$$

é isomorfo ao fibrado trivial em retas. Tome agora as sequências exatas

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0 \quad \text{e} \\ 0 \longrightarrow E_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_3 \longrightarrow E \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde $E = \text{Ker}(E_2 \rightarrow E_1) = \text{Im}(E_3 \rightarrow E_2)$ e aplique o mesmo raciocínio. Assim, indutivamente, teremos o resultado. $\blacksquare$

Seja M uma variedade complexa. Podemos definir um fibrado determinante associado a um feixe coerente $\mathcal{L}$, e denotá-lo por $\det \mathcal{L}$. Para isso, devemos considerar uma resolução $\mathcal{L}_U$, onde U é um aberto em M e mostrar que $\det \mathcal{L}_U$ independe da escolha da resolução tomada.

Seja

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_U \longrightarrow 0, \quad (2.13)$$

uma resolução de $\mathcal{L}_U$ por feixes coerentes localmente livre. Para cada $i = 1, \dots, m$, seja E_i o fibrado vetorial correspondente ao feixe $\mathcal{E}_i$. Defina

$$\det \mathcal{L}_U = \bigotimes_{i=0}^m (\det E_i)^{(-1)^i}$$

Proposição 2.85 *O fibrado determinante associado a um feixe coerente localmente livre*

$$\det \mathcal{L}_U = \bigotimes_{i=0}^m (\det E_i)^{(-1)^i}$$

está bem definido.

Demonstração: Seja

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}'_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{E}'_1 \longrightarrow \mathcal{E}'_0 \longrightarrow \mathcal{L}_U \longrightarrow 0, \quad (2.14)$$

outra resolução localmente livre do feixe coerente $\mathcal{L}_U$, onde E'_i é o fibrado correspondente ao feixe $\mathcal{E}'_i$.

Afirmação:

$$\bigotimes_{i=0}^m (\det E_i)^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i=0}^m (\det E'_i)^{(-1)^i}. \quad (2.15)$$

Para provar a afirmação devemos considere uma terceira resolução de $\mathcal{L}_U$, de modo que tenhamos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_m & \xrightarrow{f_m} & \cdots & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{E}_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{L}_U & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \updownarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}''_m & \xrightarrow{f''_m} & \cdots & \xrightarrow{f''_2} & \mathcal{E}''_1 & \xrightarrow{f'_1} & \mathcal{E}''_0 & \xrightarrow{f'_0} & \mathcal{L}_U & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}'_m & \xrightarrow{f'_m} & \cdots & \xrightarrow{f'_2} & \mathcal{E}'_1 & \xrightarrow{f'_1} & \mathcal{E}'_0 & \xrightarrow{f'_0} & \mathcal{L}_U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

e mostrar que as setas verticais são aplicações sobrejetoras.

Para construir $\mathcal{E}_0$, considere

$$\mathcal{G}_0 = \{(u, u') \in \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}''_0; f_0(u) = f'_0(u')\}$$

e $\mathcal{E}''_0$ feixe coerente localmente livre cujo mapa é sobrejetor sobre $\mathcal{G}_0$. Seja

$$f''_0 : \mathcal{E}''_0 \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{L}_U.$$

Sabemos que

$$\varphi_0 : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{G}_0$$

é sobrejetora. Assim, restringindo $\mathcal{G}_0$ a $\mathcal{E}_0$, a aplicação $\mathcal{E}''_0 \rightarrow \mathcal{E}_0$ também é sobrejetora. De modo análogo, prova-se que a aplicação $\mathcal{E}''_0 \rightarrow \mathcal{E}'_0$ é sobrejetora.

Agora vamos construir $\mathcal{E}''_1$. Sejam

$$\text{Ker}(f_0) = \mathcal{L}_0, \quad \text{Ker}(f'_0) = \mathcal{L}'_0, \quad \text{e} \quad \text{Ker}(f''_0) = \mathcal{L}''_0.$$

Observe o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{L}_0 & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow p & & \\
& & \mathcal{L}''_0 & & \\
& & \downarrow p' & & \\
\mathcal{E}'_1 & \xrightarrow{f'_1} & \mathcal{L}'_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

com p, p' sobrejeções. Sejam

$$\mathcal{G}_1 = \{(u, u') \in \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}'_1; f_1(u) = p(u'') \text{ e } f'_1(u') = p'(u''), \text{ para algum } u'' \in \mathcal{L}''_0\}$$

e $\mathcal{E}''_1$ feixe localmente livre com mapa sobrejetor sobre $\mathcal{G}_1$.

Seja

$$f''_1 : \mathcal{E}''_1 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{E}''_0 = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}'_0.$$

Sabemos que a aplicação $\mathcal{E}''_1 \rightarrow \mathcal{G}_1$ é sobrejetora. Assim, restringindo a $\mathcal{E}'_1$ e $\mathcal{E}''_1$, as aplicações

$$\mathcal{E}''_1 \rightarrow \mathcal{E}'_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{E}''_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$$

também serão sobrejetoras. Continuando o processo teremos o diagrama acima.

Agora devemos provar que as duas resoluções consideradas para construir o diagrama tem o mesmo fibrado determinante. Para isso, vamos considerar o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_U & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}''_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}''_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}''_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_U & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_0 & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

onde $\mathcal{F}_i = \text{Ker}(\mathcal{E}''_i \rightarrow \mathcal{E}_i)$. Como Ker é subfeixe, então $\mathcal{F}_i$ é feixe localmente livre, pois é núcleo de uma aplicação sobrejetora entre feixes localmente livres. Seja F_i o fibrado vetorial correspondente ao feixe $\mathcal{F}_i$. Pelo Lema 2.84, temos

$$\det E''_1 \simeq (\det E_i) \otimes (\det F_i)$$

que implica em

$$\det F_i \simeq (\det E_i)^* \otimes (\det E''_i).$$

Assim,

$$\bigotimes_{i=0}^m (\det F_i)^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i=0}^m ((\det E_i)^* \otimes (\det E''_i))^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i=0}^m ((\det E_i)^*)^{(-1)^i} \bigotimes_{i=0}^m (\det E''_i)^{(-1)^i}$$

é isomorfo ao fibrado trivial em retas.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i=0}^m (\det E''_i)^{(-1)^i} &\simeq \bigotimes_{i=0}^m [(\det E_i) \otimes (\det F_i)]^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i=0}^m [(\det E_i)^{(-1)^i} \otimes (\det F_i)^{(-1)^i}] \\
&\simeq \bigotimes_{i=0}^m (\det E_i)^{(-1)^i}.
\end{aligned}$$

Fazendo um raciocínio análogo encontramos

$$\det E''_i = (\det E'_i) \otimes (\det F_i)$$

e, com isso,

$$\bigotimes_{i=0}^m (\det E''_i)^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i=0}^m (\det E'_i)^{(-1)^i}.$$

Portanto,

$$\bigotimes_{i=0}^m (\det E''_i)^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i=0}^m (\det E'_i)^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i=0}^m (\det E_i)^{(-1)^i}$$

e $\det \mathcal{L}_U$ está bem definida. ■

Proposição 2.86 *Se*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de feixes coerentes, então existe um isomorfismo canônico

$$\det \mathcal{L} = (\det \mathcal{L}') \otimes (\det \mathcal{L}'').$$

Demonstração: Devemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}'_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}'_U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}''_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}''_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}''_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}''_U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

onde as sequências horizontais são resoluções localmente livres e as verticais são sequências exatas. Para construirmos o diagrama devemos escolher, inicialmente, $\mathcal{E}'_0$ e $\mathcal{E}''_0$, fazer

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}'_0 \oplus \mathcal{E}''_0$$

e considerar os mapas

$$\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{L}_U \quad \text{e} \quad \mathcal{E}'_0 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}''_0.$$

Agora, considere

$$\mathcal{L}'_1 = \text{Ker}(\mathcal{E}'_0 \rightarrow \mathcal{L}'_U) \quad \mathcal{L}_1 = \text{Ker}(\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{L}_U) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}''_1 = \text{Ker}(\mathcal{E}''_0 \rightarrow \mathcal{L}''_U).$$

Repetindo o mesmo raciocínio $(n-1)$ vezes teremos o diagrama comutativo. Assim, con-

siderando E_0 o fibrado vetorial holomorfo associado ao feixe coerente $\mathcal{E}_0$, segue

$$\det E_0 = (\det E'_0) \otimes (\det E''_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det \mathcal{L} &= \bigotimes_{i=0}^m (\det E_i)^{(-1)^i} = \bigotimes_{i=0}^m [(\det E'_i) \otimes (\det E''_i)]^{(-1)^i} \\ &= \left[\bigotimes_{i=0}^m (\det E'_i)^{(-1)^i} \right] \otimes \left[\bigotimes_{i=0}^m (\det E''_i)^{(-1)^i} \right] = (\det \mathcal{L}') \otimes (\det \mathcal{L}''), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Definição 2.87 *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e A um M -módulo. Dizemos que um elemento $u \in M$ é um **elemento de torção** se $au = 0$, para todo elemento $a \in A$ não nulo. Se M não possui elementos de torção, então dizemos que M é **livre de torção**.*

Proposição 2.88 *Se $\mathcal{L}$ é um feixe coerente livre de torção, então*

$$\dim S_m(\mathcal{L}) \leq m - 1,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, em que $S_m(\mathcal{L}) = \{x \in M : \mathcal{L}_x \text{ não é livre}\}$ denota o conjunto de singularidades de $\mathcal{L}$.

Demonstração: Ver [11, Corolário 5.15, pag. 159]. ■

A proposição 2.88 nos diz que um feixe $\mathcal{L}$ livre de torção é localmente livre fora do conjunto singular S_{n-1} de codimensão pelo menos 2.

Definição 2.89 *O feixe coerente definido por*

$$\mathcal{L}^* = \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$$

*é chamado **feixe dual** de $\mathcal{L}$.*

Existe um homomorfismo natural

$$\sigma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{**}.$$

O núcleo deste homomorfismo é, por definição, um feixe de torção.

Definição 2.90 *Se a aplicação*

$$\sigma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{**}$$

*é uma bijeção, então $\det \mathcal{L}$ é dito **feixe reflexivo**.*

Observe que se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{**}$ são isomorfos, então $\text{Ker}(\sigma) = \{0\}$. Logo, todo feixe localmente livre é reflexivo e todo feixe reflexivo é livre de torção.

Proposição 2.91 *O dual $\mathcal{L}^*$ de qualquer feixe coerente é reflexivo.*

Demonstração: Ver [11, Proposição 5.18, pag. 160]. ■

Definição 2.92 *Seja M uma variedade complexa. Um feixe coerente $\mathcal{L}$ sobre M é chamado **feixe normal** se para todo aberto $U \subset M$ e todo subconjunto analítico $A \subset U$ de codimensão maior ou igual a 2, o mapa restrição*

$$\Gamma(U, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(U - A, \mathcal{L})$$

é isomorfismo.

Proposição 2.93 *Um feixe coerente $\mathcal{L}$ é reflexivo se, e somente se, ele é um feixe livre de torção e normal.*

Demonstração: Ver [11, Proposição 5.21, pag. 160]. ■

Proposição 2.94 *Seja $\mathcal{L}$ um feixe coerente livre de torção de posto r . Então existe um isomorfismo*

$$\det \mathcal{L} = \left(\bigwedge^r \mathcal{L} \right)^{**}.$$

Demonstração: Denote por $A = S_{n-1}(\mathcal{L})$ o conjunto singular de $\mathcal{L}$. Assim, em A , o feixe coerente $\mathcal{L}$ deixa de ser localmente livre. Por hipótese, $\mathcal{L}$ é um feixe coerente livre de torção. Então, pela Proposição 2.88, temos

$$\dim S_{n-1} \leq n - 2,$$

ou seja, $\mathcal{L}$ é um subconjunto analítico de codimensão maior ou igual a 2. E mais, $\mathcal{L}$ é localmente livre sobre o conjunto $M - A$. Logo, a aplicação

$$f : \det \mathcal{L}_{M-A} \rightarrow \left(\bigwedge^r \mathcal{L} \right)_{M-A}^{**}$$

é um isomorfismo. Como $\bigwedge^r \mathcal{L}_{M-A}$ é um feixe coerente, pois $\mathcal{L}$ o é, segue da Proposição 2.91 que $\bigwedge^r \mathcal{L}_{M-A}^{**}$ é um feixe reflexivo e, consequentemente um feixe normal, pela Proposição 2.93. Com isso, podemos estender f ao homomorfismo

$$\bar{f} : \det \mathcal{L} \rightarrow \left(\bigwedge^r \mathcal{L} \right)^{**}.$$

A prova fica completa se mostrarmos que $\bar{f}$ é uma bijeção.

Sendo f bijetora, então existe a inversa de f , digamos g . Como $\bigwedge^r \mathcal{L}_{M-A}^{**}$ é normal e f isomorfismo de fibrados, então $\mathcal{L}_{M-A}$ é normal e daí, g se estende ao homomorfismo

$$\bar{f} : (\bigwedge^r \mathcal{L})^{**} \rightarrow \det \mathcal{L}.$$

Mas $f \circ g$ e $g \circ f$ são endomorfismos identidade de $\bigwedge^r \mathcal{L}_{M-A}^{**}$ e $\mathcal{L}_{M-A}$, respectivamente, então $\bar{f} \circ \bar{g}$ e $\bar{g} \circ \bar{f}$ são endomorfismos identidade de $\bigwedge^r \mathcal{L}^{**}$ e $\mathcal{L}$, respectivamente. Portanto, $\bar{f}$ é bijetora, o que completa a prova. ■

Proposição 2.95 *Se $\mathcal{L}$ é um feixe coerente livre de torção, então existe um isomorfismo canônico*

$$(\det \mathcal{L})^* = \det \mathcal{L}^*.$$

Demonstração: Pela proposição anterior, segue

$$(\det \mathcal{L})^* = (\bigwedge^r \mathcal{L})^* \quad \text{e} \quad (\det \mathcal{L}^*) = (\bigwedge^r \mathcal{L}^*)^{**}.$$

Novamente, denotemos por $A = S_{n-1}(\mathcal{L})$ o conjunto das singularidades de $\mathcal{L}$. Deste modo, a aplicação

$$f : \det \mathcal{L}_{M-A} \rightarrow (\bigwedge^r \mathcal{L})_{M-A}^{**}$$

é um isomorfismo de fibrados. Logo,

$$(\bigwedge^r \mathcal{L})_{M-A}^* = (\bigwedge^r \mathcal{L}^*)_{M-A}^{**}$$

e, pelos mesmos resultados e argumentos utilizados na prova da proposição anterior podemos estender a aplicação f a aplicação

$$\bar{f} : (\bigwedge^r \mathcal{L})^* \rightarrow (\bigwedge^r \mathcal{L}^*)^{**}.$$

Portanto,

$$(\det \mathcal{L})^* = (\bigwedge^r \mathcal{L})^* \stackrel{2.94}{=} (\det \mathcal{L}^*).$$

■

Proposição 2.96 *Todo monomorfismo entre feixes coerentes livre de torção $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ de mesmo posto induz um monomorfismo entre seus fibrados determinantes $\det \mathcal{L}' \rightarrow \det \mathcal{L}$.*

Demonstração: Considere $A = S_{n-1}(\mathcal{L})$ e $A' = S_{n-1}(\mathcal{L}')$ os conjuntos de singularidades de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, respectivamente. Sabemos que fora do conjunto $A \cup A'$, o morfismo $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ induz um isomorfismo

$$\varphi : \det \mathcal{L}' \rightarrow \det \mathcal{L}$$

e ainda, $\text{Ker}(\varphi)$ é um feixe de torção.

Por outro lado, $\text{Ker}(\varphi)$ é um subfeixe de um feixe livre de torção. Portanto, $\text{Ker}(\varphi) \equiv \{0\}$ e φ é injetora e temos φ um monomorfismo. ■

2.5 Fibrados Vetoriais Estáveis

Consideremos o fibrado trivial de posto $n + 1$ sobre $\mathbb{P}^n$, ou seja,

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} := \underline{\mathbb{C}^{n+1}}.$$

O **fibrado tautológico** é o subfibrado de posto 1 de $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}$, que consiste dos pares $([w], z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ tais que z está na reta determinada por $[w]$ (isto justifica o nome *tautológico*). Assim,

$$\mathcal{O}(-1) := \{([w], z) : \text{existe } t \in \mathbb{C}, z = tw\}$$

que, em coordenadas locais temos

$$\mathcal{O}(-1) = \{((z_0 : \cdots : z_n), t(z_0, \cdots, z_n)), t \in \mathbb{C}\}.$$

Observemos que a fibra sobre cada ponto $[w]$ fixado é a reta que ele determina em $\mathbb{C}^{n+1}$. Além disso, as funções de transição do fibrado tautológico são dadas por $\theta_{ij} = \frac{z_i}{z_j}$, na interseção U_{ij} .

O dual de $\mathcal{O}(-1)$ é chamado **fibrado hiperplano** e é denotado por $\mathcal{O}(1)$. É sobre este fibrado que vamos trabalhar nesta seção.

Uma subvariedade complexa, compacta X de $\mathbb{P}^n$ é dita uma *variedade projetiva*. Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ subvariedade projetiva de dimensão m e $\mathcal{O}(1)$ o fibrado hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Considere o mapa inclusão

$$i : X \rightarrow \mathbb{P}^n$$

Por definição,

$$\mathcal{O}_X(1) := \mathcal{O}|_X = i^*\mathcal{O}(1).$$

Definição 2.97 O grau de X é definido por

$$\deg(X) := \int_X c_1(\mathcal{O}(1))^n.$$

Seja E um fibrado vetorial em $X \subset \mathbb{P}^n$. Definimos o **grau de E** por

$$\deg(E) := \int_X c_1(E) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1} = c_1(E) \cdot \mathcal{O}_X(1)^{n-1}.$$

Se $\mathcal{L}$ é um feixe coerente livre de torção, definimos sua primeira classe de Chern por

$$c_1(\mathcal{L}) = c_1(\det \mathcal{L}).$$

Assim, o **grau de $\mathcal{L}$** é

$$\deg(\mathcal{L}) = \int_X c_1(\det \mathcal{L}) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1}.$$

Definição 2.98 A **inclinação** de $\mathcal{L}$ é definida por

$$\mu(\mathcal{L}) := \frac{\deg(\mathcal{L})}{rk(\mathcal{L})},$$

onde $rk(\mathcal{L})$ denota o posto do feixe coerente $\mathcal{L}$.

Definição 2.99 Dizemos que $\mathcal{L}$ é **semi-estável** se, para todo subfeixe coerente $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, com $0 < rk(\mathcal{L}') < rk(\mathcal{L})$, temos

$$\mu(\mathcal{L}') \leq \mu(\mathcal{L}).$$

Se tivermos

$$\mu(\mathcal{L}') < \mu(\mathcal{L}),$$

com $0 < rk(\mathcal{L}') < rk(\mathcal{L})$, então o feixe $\mathcal{L}$ é dito **estável**.

Para fibrados também podemos definir o conceito de (semi)-estabilidade. Para isso, devemos olhar para o feixe de germes de seções holomorfas $\mathcal{O}(E)$.

Definição 2.100 Um fibrado vetorial holomorfo E sobre uma variedade diferenciável X é **semi-estável** (resp. **estável**) se o feixe de germes de seções holomorfas $\mathcal{O}(E)$ é semi-estável (resp. estável).

Lema 2.101 Se

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de feixes coerentes sobre X , então

$$r'(\mu(\mathcal{L}) - \mu(\mathcal{L}')) + r''(\mu(\mathcal{L}) - \mu(\mathcal{L}'')) = 0,$$

onde $r' = rk(\mathcal{L}')$ e $r'' = rk(\mathcal{L}'')$.

Demonstração: Pela Proposição 2.86,

$$\det \mathcal{L} = (\det \mathcal{L}') \otimes (\det \mathcal{L}'').$$

Pela propriedade da classe de Chern, sabemos que

$$c_1(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}'') = c_1(\mathcal{L}') + c_1(\mathcal{L}'').$$

Assim,

$$\int_X c_1(\det \mathcal{L}) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1} = \int_X c_1(\det \mathcal{L}') \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1} + \int_X c_1(\det \mathcal{L}'') \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{L}) &= \deg(\mathcal{L}') + \deg(\mathcal{L}'') \Leftrightarrow \\ \mu(\mathcal{L})rk(\mathcal{L}) &= \mu(\mathcal{L}')rk(\mathcal{L}') + \mu(\mathcal{L}'')rk(\mathcal{L}''). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu(\mathcal{L})(r' + r'') = \mu(\mathcal{L}')r' + \mu(\mathcal{L}'')r'' \Leftrightarrow r'(\mu(\mathcal{L}) - \mu(\mathcal{L}')) + r''(\mu(\mathcal{L}) - \mu(\mathcal{L}'')) = 0.$$

■

O conceito de estabilidade e semi-estabilidade também pode ser definido a partir do feixe quociente $\mathcal{L}''$.

Proposição 2.102 *Seja $\mathcal{L}$ um feixe coerente livre de torção sobre X . Então $\mathcal{L}$ é semi-estável (resp. estável) se, e somente se, $\mu(\mathcal{L}) \leq \mu(\mathcal{L}'')$ (resp. $\mu(\mathcal{L}) < \mu(\mathcal{L}'')$), para todo feixe coerente quociente $\mathcal{L}'$ com $0 < rk(\mathcal{L}'') \leq rk(\mathcal{L})$ (resp. $0 < rk(\mathcal{L}') < rk(\mathcal{L})$).*

Demonstração: Faremos a demonstração para o caso em que $\mathcal{L}$ é semi-estável. O caso estável é análogo.

Da proposição anterior,

$$r'(\mu(\mathcal{L}) - \mu(\mathcal{L}')) = r''(\mu(\mathcal{L}'') - \mu(\mathcal{L})). \quad (2.16)$$

Por definição, um fibrado é semi-estável se, e somente se, $\mu(\mathcal{L}') \leq \mu(\mathcal{L})$. Ou seja, se e somente se, $\mu(\mathcal{L}) - \mu(\mathcal{L}') \geq 0$. Pela Equação (2.16), $\mu(\mathcal{L}) - \mu(\mathcal{L}') \geq 0$ se, e somente se, $\mu(\mathcal{L}'') - \mu(\mathcal{L}) \geq 0$, ou seja,

$$\mu(\mathcal{L}) \leq \mu(\mathcal{L}'').$$

■

Definição 2.103 *Sejam X uma variedade diferenciável compacta e $\eta \in H_{DR}^j(X)$ o q -ésimo elemento do grupo de cohomologia de De Rham. O dual de Poincaré de $\eta \in H_{DR}^j(X)$ é uma variedade V tal que*

$$\int_M \eta \wedge \omega = \int_V \omega,$$

para todo $\omega \in H_{DR}^j(X)$.

Teorema 2.104 (da Dualidade de Poincaré:) *Nas condições acima, existe uma correspondência biunívoca*

$$V \leftrightarrow c_1(\mathcal{O}(V)).$$

Lema 2.105 *Se $\mathcal{T}$ é um feixe coerente de torção, então*

$$\deg(\mathcal{T}) \geq 0.$$

Demonstração: A demonstração segue do Teorema da Dualidade de Poincaré. De fato, seja V o divisor de X definido com zeros de funções homomorfas de $\det \mathcal{T}$. Temos

$$\deg(\mathcal{L}) = \int_X c_1(\mathcal{L}) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1} = \int_V c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1} \geq 0.$$

■

Proposição 2.106 *Seja $\mathcal{L}$ um feixe coerente, reflexivo e livre de torção sobre X . Então:*

- (a) *Se $rk(\mathcal{L}) = 1$, então $\mathcal{L}$ é estável.*
- (b) *Seja $\mathcal{T}$ (o feixe de germes de seções holomorfas de) um fibrado em retas sobre X . Então $\mathcal{L} \otimes \mathcal{T}$ é estável (resp. semi-estável) se, e somente se, $\mathcal{L}$ é estável (resp. semi-estável).*
- (c) *O feixe $\mathcal{L}$ é estável (resp. semi-estável) se, e somente se, $\mathcal{L}^*$ é estável (resp. semi-estável).*

Demonstração:

- (a) Se $rk(\mathcal{L}) = 1$, então $\mathcal{L}$ é estável por definição.
- (b) Por hipótese, $\mathcal{T}$ é fibrado em retas. Então $rk(\mathcal{T}) = 1$ e, pelo item (a) temos $\mathcal{T}$ estável. Logo, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{T}$ é estável se, e somente se, $\mathcal{L}$ é estável.
O caso da semi-estabilidade é análogo, pois se $\mathcal{T}$ é estável, em particular é semi-estável.
- (c) Suponhamos $\mathcal{L}^*$ estável e consideremos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'' \longrightarrow 0,$$

onde $\mathcal{L}''$ é feixe coerente livre de torção. Dualizando a sequência acima, temos

$$0 \longrightarrow (\mathcal{L}'')^* \longrightarrow \mathcal{L}^* \longrightarrow (\mathcal{L}')^* \longrightarrow 0 \tag{2.17}$$

Afirmção: $\mu(\mathcal{L}) = -\mu(\mathcal{L}^*)$.

Segue da definição de inclinação e das propriedades da primeira classe de Chern:

$$\mu(\mathcal{L}) = \frac{1}{rk(\mathcal{L})} \cdot \int_X c_1(\mathcal{L}) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1} = \frac{1}{rk(\mathcal{L})} \cdot \int_X -c_1(\mathcal{L}^*) \wedge c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1} = -\mu(\mathcal{L}^*).$$

Aplicando a afirmação a sequência (2.17), obtemos

$$\mu(\mathcal{L}) = -\mu(\mathcal{L}^*) \quad \text{e} \quad \mu(\mathcal{L}'') = -\mu(\mathcal{L}''^*).$$

Sendo $\mathcal{L}^*$ estável, segue $\mu(\mathcal{L}''^*) < \mu(\mathcal{L}^*)$ e, conseqüentemente,

$$\mu(\mathcal{L}) = -\mu(\mathcal{L}^*) < -\mu(\mathcal{L}''^*) = \mu(\mathcal{L}''^*)$$

e $\mathcal{L}$ é estável, pela Proposição 2.102. Reciprocamente, suponha $\mathcal{L}$ estável e considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow (\mathcal{F}') \longrightarrow \mathcal{L}^* \longrightarrow (\mathcal{F}'') \longrightarrow 0,$$

onde $\mathcal{F}''$ é um feixe coerente livre de torção. Dualizando-a e utilizando a hipótese que $\mathcal{L}$ é reflexivo temos

$$0 \longrightarrow (\mathcal{F}'')^* \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow (\mathcal{F}')^* \longrightarrow 0. \quad (2.18)$$

Como $\mathcal{L}$ é estável, temos

$$-\mu(\mathcal{F}'') = \mu(\mathcal{F}'')^* < \mu(\mathcal{L}) = -\mu(\mathcal{L}^*).$$

Como $\mathcal{F}''$ é feixe quociente, segue a estabilidade do feixe $\mathcal{L}^*$. ■

Proposição 2.107 *Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ feixes coerentes livres de torção sobre X . Então $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ é semi-estável se, e somente se, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são semi-estáveis, com $\mu(\mathcal{L}_1) = \mu(\mathcal{L}_2)$.*

Demonstração: Suponha $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ semi-estáveis e com mesma inclinação, ou seja, $\mu = \mu(\mathcal{L}_1) = \mu(\mathcal{L}_2)$. Se $r = rk(\mathcal{L}_1)$ e $s = rk(\mathcal{L}_2)$, da igualdade temos

$$\frac{c_1(\mathcal{L}_1) \wedge (\mathcal{O}_X(1))^{n-1}}{r} = \frac{c_1(\mathcal{L}_2) \wedge (\mathcal{O}_X(1))^{n-1}}{s} \Leftrightarrow \frac{c_1(\mathcal{L}_1)}{r} = \frac{c_1(\mathcal{L}_2)}{s} \Leftrightarrow c_1(\mathcal{L}_1) = \frac{r}{s} \cdot c_1(\mathcal{L}_2).$$

Usando as propriedades da classe de Chern, temos

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) &= \frac{c_1(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)}{r+s} = \frac{c_1(\mathcal{L}_1)}{r+s} + \frac{c_1(\mathcal{L}_2)}{r+s} = \frac{\frac{rc_1(\mathcal{L}_2)}{s}}{r+s} + \frac{c_1(\mathcal{L}_2)}{r+s} \\ &= \frac{(r+s)c_1(\mathcal{L}_2)}{s(r+s)} = \frac{c_1(\mathcal{L}_2)}{s} = \mu(\mathcal{L}_2) = \mu. \end{aligned}$$

Para qualquer subfeixe $\mathcal{F}$ do feixe $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi_2 \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 \longrightarrow 0,
\end{array}$$

onde $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cap (\mathcal{L}_1 \oplus 0)$, $\mathcal{F}_2$ é a imagem de $\mathcal{F}$ pela aplicação $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ e φ_1 , φ , φ_2 são aplicações injetivas.

Como, para $i = 1, 2$, $\mathcal{L}_i$ é semi-estável, então

$$\mu(\mathcal{F}_i) \leq \mu(\mathcal{L}_i) = \mu \Rightarrow \deg(\mathcal{F}_i) \leq \mu \cdot rk(\mathcal{F}_i).$$

Daí que:

$$\mu\mathcal{F} = \mu(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) = \frac{\deg(\mathcal{F}_1) \oplus \mathcal{F}_2}{rk(\mathcal{F}_1) + rk(\mathcal{F}_2)} \leq \frac{\mu(rk(\mathcal{F}_1) + \mathcal{F}_2)}{rk(\mathcal{F}_1) + rk(\mathcal{F}_2)} = \mu = \mu(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)$$

e $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ é semi-estável.

Reciprocamente, suponha $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ semi-estável e observe que, para $i = 1, 2$, $\mathcal{L}_i$ é feixe quociente de $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Então, $\mathcal{L}_i$ é subfeixe de $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ e qualquer subfeixe $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}_i$ também é um subfeixe de $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Da semiestabilidade de $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ segue

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) = \mu(\mathcal{L}_i).$$

Portanto, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são feixes semi-estáveis. ■

Observação 2.108 *O resultado acima é válido para feixes coerentes semi-estáveis pois, caso contrário, não poderíamos ter $\mu(\mathcal{L}_1) = \mu(\mathcal{L}_2)$, que é o fato crucial na demonstração.*

Proposição 2.109 *Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ feixes coerentes semi-estáveis sobre X e $f : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ um homomorfismo de feixes.*

- (a) *Se $\mu(\mathcal{L}_1) > \mu(\mathcal{L}_2)$, então $f \equiv 0$.*
- (b) *Se $\mu(\mathcal{L}_1) = \mu(\mathcal{L}_2)$ e $\mathcal{L}_1$ é estável, então $rk(\mathcal{L}_1) = rk(f(\mathcal{L}_1))$ e f é injetora.*
- (c) *Se $\mu(\mathcal{L}_1) = \mu(\mathcal{L}_2)$ e $\mathcal{L}_2$ é estável, então $rk(\mathcal{L}_2) = rk(f(\mathcal{L}_2))$ e f é sobrejetora.*

Demonstração: Para todos os casos, assuma $f \neq 0$. Deste modo, $\mathcal{F} = f(\mathcal{L}_1)$ é um feixe quociente livre de torção de $\mathcal{L}_1$.

- (a) Por hipótese

$$\mu(\mathcal{L}_2) < \mu(\mathcal{L}_1).$$

Como $\mathcal{L}_1$ é semi-estável e $\mathcal{F}$ é feixe quociente, temos $\mu(\mathcal{L}_1) \leq \mu(\mathcal{F})$ e a semiestabilidade de $\mathcal{L}_2$ nos garante que $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{L}_2)$. Assim, das desigualdades acima obtemos

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{F}),$$

o que é um absurdo. Portanto, $f \equiv 0$.

(b) Suponhamos $\mathcal{L}_1$ estável e $rk(\mathcal{L}_1) > rk(\mathcal{F})$. Então

$$\mu(\mathcal{L}_1) < \mu(\mathcal{F}).$$

Mas, por hipótese, $\mu(\mathcal{L}_1) = \mu(\mathcal{L}_2)$, então

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{L}_2) = \mu(\mathcal{L}_1) < \mu(\mathcal{F}),$$

o que é um absurdo. Então $rk(\mathcal{L}_1) = rk(f(\mathcal{L}_1))$ e f é injetora.

Observe que $rk(\mathcal{L}_1) < rk(\mathcal{F})$ não acontece, pois $\mathcal{F}$ é subfeixe de $\mathcal{L}_1$.

(c) Suponhamos $\mathcal{L}_2$ estável e $rk(\mathcal{L}_2) > rk(\mathcal{F})$. Então

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{L}_2).$$

Sendo $\mathcal{L}_1$ estável, segue $\mu(\mathcal{L}_1) \leq \mu(\mathcal{F})$ e, com isso

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{L}_2) = \mu(\mathcal{L}_1) \leq \mu(\mathcal{F}),$$

o que é um absurdo. Portanto, $rk(\mathcal{L}_2) = rk(f(\mathcal{L}_2))$ e f é sobrejetora.

Como $\mathcal{F} = f(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_2$, não podemos ter $rk(\mathcal{L}_2) < rk(f(\mathcal{F}))$.

■

Corolário 3 *Sejam E_1 e E_2 fibrados vetoriais semi-estáveis sobre X com $rk E_1 = rk E_2$ e $deg(E_1) = deg(E_2)$. Se E_1 ou E_2 é estável, então qualquer homomorfismo $f : E_1 \rightarrow E_2$ não nulo é um isomorfismo.*

Demonstração: Suponhamos E_1 estável. Pelas hipóteses, temos $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. Segue, do item (b) da proposição anterior, que f é injetiva e assim, induz um homomorfismo não nulo

$$\det(f) : \det E_1 \rightarrow \det E_2.$$

Considere $\det f$ uma seção holomorfa do fibrado em retas

$$Hom(\det E_1, \det E_2) = (\det E_1)^{-1} \cdot (\det E_2) = L. \quad (2.19)$$

Afirmção: Se $deg(L) < 0$, então L não admite seção holomorfa não nula. [11, pag. 56].

Como $\det(f)$ admite seções holomorfas não nulas, então $deg(L) \geq 0$, pela afirmação. Mas se $deg(L) = 0$, então L é um fibrado em retas trivial. Assim, pela Equação (2.19),

$$\det E_1 \simeq \det E_2$$

e $\det(f)$ é isomorfismo. Logo, f é isomorfismo.

Agora, se o fibrado E_2 que for estável, basta tomar o dual de f e o raciocínio é análogo. ■

Corolário 4 *Se $\mathcal{L}$ é um feixe semi-estável sobre uma variedade X com $\deg(\mathcal{L}) < 0$, então $\mathcal{L}$ não admite seções holomorfas não nulas.*

Demonstração: Tome $\mathcal{O}$ o feixe semi-estável de germes de funções holomorfas sobre X e defina o homomorfismo de feixes

$$f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}.$$

Por hipótese, $\deg(\mathcal{L}) < 0$, então a inclinação $\mu(\mathcal{L})$ também é negativa.

Mas

$$\mu(\mathcal{O}) = \frac{1}{rk(\mathcal{O})} \cdot \int_X c_1(\mathcal{O}) \wedge (c_1(\mathcal{O}_X(1)))^{n-1} = 0,$$

pois $c_1(\mathcal{O}) = 0$. Assim,

$$\mu(\mathcal{L}) < 0 \Leftrightarrow \mu(\mathcal{L}) < \mu(\mathcal{O}) \Rightarrow f \equiv 0,$$

pelo item (a) da Proposição 2.109. Portanto, $\mathcal{L}$ não admite seções holomorfas não nulas. ■

Definição 2.110 *Um fibrado vetorial holomorfo E sobre uma variedade complexa compacta M é **simples** se todo homomorfismo de fibrados $f : E \rightarrow E$. Isto é, toda seção holomorfa de $\text{Hom}(E, E) = E^* \otimes E$, é a múltiplo por escalar do endomorfismo identidade.*

Corolário 5 *Todo fibrado vetorial estável E sobre X é simples.*

Demonstração: Considere o endomorfismo de fibrados

$$f : E \rightarrow E.$$

Para cada $x \in M$, considere a fibra E_x e a o autovalor da aplicação f restrita às fibras

$$f|_x : E_x \rightarrow E_x.$$

Aplicando o Corolário 3 a aplicação

$$f - aI_E : E_x - a \rightarrow E_x - a$$

temos $f - aI_E \equiv 0$, ou seja, $f \equiv aI_E$ e segue a simplicidade do fibrado E . ■

2.6 Gênero Seccional

Definição 2.111 *Um subesquema $X \subset \mathbb{P}^n$ é dito **Gorestein** se seu feixe dualizante é localmente livre.*

Definição 2.112 *Definimos o **gênero seccional** de um esquema Gorestein X , com respeito ao fibrado L , denotado por $g(X, L)$ sendo*

$$2g(X, L) - 2 = (K_X + (\dim X - 1)L) \cdot L^{\dim X - 1},$$

em que K_X é o divisor tal que $\omega_X = \mathcal{O}(K_X)$.

Teorema 2.113 (de Bertini) *Quase todas as fibras de um morfismo dominante entre variedades algébricas lisas, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, são lisas.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Como L é um fibrado amplo e X é suave, pelo Teorema de Bertini é possível escolher $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ elementos genéricos tais que o conjunto $\cap\{s_i = 0\} = C$ é não singular. Deste modo, segue

$$g(X, L) = g(C).$$

Capítulo 3

Folheações e Campos de Pfaff

Introduzimos este capítulo com o conceito de folheações holomorfas não singulares. Procuramos ser o mais didáticos possível, apresentando ilustração que auxiliem o leitor na compreensão deste conteúdo que pode, a princípio, parecer muito abstrato. Em seguida, definimos mapas distinguidos e mostramos que folheações também podem ser induzidas por submersões.

A segunda seção deste capítulo fala sobre o conceito de distribuição. Em linhas gerais, uma distribuição em uma variedade complexa é um subfibrado holomorfo $D \rightarrow TM$. Utilizamos o Teorema de Frobenius para provar que toda folheação holomorfa induz uma distribuição. Já a terceira e última seção deste capítulo é sobre campos de Pfaff, o campo sobre o qual nossa variedade projetiva X do teorema é invariante. Definimos campos de Pfaff sendo uma seção global não nula do fibrado $\bigwedge^k \Theta_X \otimes N$, onde Θ_X é o fibrado tangente, N é um fibrado em retas e $0 < k < n$. Um fato importante que observamos nesta seção é que variedades projetivas são invariantes por um campo de Pfaff se a aplicação $\xi_{\mathcal{L}}|_{\mathbb{P}^n}: N^*|_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \bigwedge^n \Theta_X|_{\mathbb{P}^n}$ induz uma seção global não nula em $(\Omega_{\mathbb{P}^n}^k)^* \otimes N|_{\mathbb{P}^n}$. Finalizamos este capítulo observando que distribuições holomorfas induzem campos de Pfaff localmente. Assim, uma pergunta natural é se vale a recíproca dessas implicações. Observamos que não e que uma condição para que um campo de Pfaff induza distribuições é que este campo seja decomponível.

3.1 Folheações

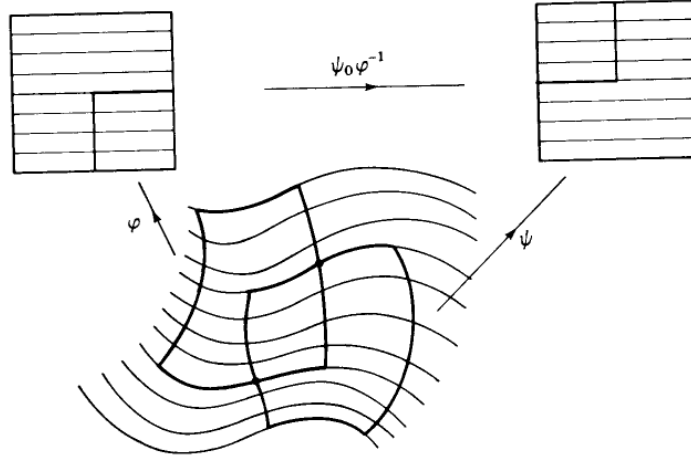
Nesta seção, salvo menção contrário, M é uma variedade complexa de dimensão $n \geq 1$.

Definição 3.1 *Uma folheação holomorfa não singular de dimensão k , $1 \leq k \leq n - 1$ em uma variedade complexa M é um atlas holomorfo $\mathcal{F} = \{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}$ em que:*

- (i) $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ é uma cobertura por abertos de M ,
- (ii) Para cada $\gamma \in \Lambda$, existe uma aplicação holomorfa $\varphi_\gamma: U_\gamma \rightarrow U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$,
- (iii) Dados dois abertos $U_\alpha, U_\beta \in \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) &\rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ (x, y) &\mapsto \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \end{aligned}$$

é um biholomorfismo.



Chamamos os abertos U_γ de **abertos trivializadores da folheação**.

Definição 3.2 Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão k sobre a variedade M de dimensão n , $0 < k < n$ e (U, φ) uma carta local de $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. Os conjuntos $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados **placas** da folheação $\mathcal{F}$. Um **caminho de placas** da folheação $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Pelas definições anteriores podemos observar que a variedade M é coberta por placas de $\mathcal{F}$. Assim, vamos definir a seguinte relação de equivalência:

“ $p \sim q$ se, e somente se, existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$.”

Não é difícil verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência:

- (i) Reflexiva: $p \sim p$ por vacuidade.
- (ii) Simétrica: Se $p \sim q$, então existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Tomando o caminho reverso, teremos $q \sim p$.
- (iii) Transitiva: Se $p \sim q$ e $q \sim t$, então existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$ e outro caminho de placas $\beta_1, \dots, \beta_s$ com $q \in \beta_1$ e $t \in \beta_s$. Tomando o caminho justaposto, teremos $p \sim t$.

As classes de equivalência dessa relação são chamadas **folhas** de $\mathcal{F}$.

Observação 3.3 (01) Do modo como foi definida, uma folha de uma folheação é um subconjunto conexo por caminhos.

(02) As folhas F da folheação $\mathcal{F}$ tem estrutura de uma variedade complexa de dimensão k induzida pelas cartas de $\mathcal{F}$. [ver [3, pag. 31]].

3.1.1 Mapas distinguidos e Folheações induzidas por submersões

Esta seção destina-se a mostrar que podemos induzir folheações localmente por submersões. Para isso, precisamos de algumas definições e resultados auxiliares. Iniciemos apresentando uma definição de folheação sobre outro ponto de vista.

Definição 3.4 *Uma folheação holomorfa de codimensão s de uma variedade M é uma coleção maximal de pares $(U_i, f_i)_{i \in I}$, com U_i abertos de M e $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^s$ submersões holomorfas satisfazendo:*

$$(i) \bigcup_{i \in I} U_i = M \text{ e}$$

(ii) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então existe um difeomorfismo g_{ij} de $\mathbb{R}^s$ tal que $f_i = g_{ij} \circ f_j$ sobre $U_i \cap U_j$.

Observação 3.5 (01) As submersões f_i 's definidas acima são chamadas **mapas distinguidos**.

(02) Nesta definição, as **placas** são componentes conexas do conjunto de nível $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{C}^s$.

Ora, não podemos ter duas maneiras de se definir o mesmo objeto. Logo, precisamos mostrar que as Definições 3.1 e 3.4 são equivalentes. Para isso, precisamos do seguinte

Lema 3.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade M . Existe uma cobertura $\mathcal{C} = \{U_i; i \in I\}$ de M por abertos da folheação tais que, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $U_i \cup U_j$ está contido em algum aberto de $\mathcal{F}$.*

Demonstração: Como M é variedade diferenciável Hausdorff e com base enumerável de abertos, então M é localmente compacta e daí podemos escrever M como união de compactos, ou seja, $M = \bigcup K_i$, com $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$. Assim, consideremos uma cobertura de M por compactos K_n tais que

$$K_n \subset \text{int}(K_{n+1}).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixemos uma cobertura de K_n por domínios de cartas locais da folheação $\mathcal{F}$, dada por $\{V_i^n; i = 1, \dots, K_n\}$.

Seja $\delta_n > 0$ o número de Lebesgue dessa cobertura com respeito a alguma métrica fixa sobre a variedade M . Do modo como construímos a cadeia de compactos podemos considerar a sequência (δ_n) decrescente. Tome uma cobertura de K_n por domínios $\{U_j^n; j = 1, \dots, l_n\}$ de cartas locais da folheação tal que o diâmetro de cada aberto U_j^n seja menor que $\frac{\delta_n}{2}$, para todo $j = 1, \dots, l_n$. Assim, se $U_i^n \cap U_j^n \neq \emptyset$, então diâmetro de $U_i^n \cup U_j^n < \delta_n$. Daí que

$$U_i^n \cup U_j^n \subset V_\mu^n,$$

onde $\mu \in \{1, \dots, k_n\}$. Como a inclusão vale para cada n , segue que

$$U_i \cup U_j \subset V_\mu$$

e temos o resultado. ■

Teorema 3.7 *As definições 3.1 e 3.4 são equivalentes.*

Demonstração: Suponhamos que a variedade M de dimensão m tenha um atlas $\mathcal{F}$ de codimensão s satisfazendo

- (a) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s$, com U_1, U_2 abertos de $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^s$, respectivamente e
- (b) Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenada é dada por

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V) \\ (x, y) &\mapsto (h_1(x, y), h_2(y)), \end{aligned}$$

onde $h : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow V \subset \mathbb{C}^m$ é difeomorfismo, como na Definição 3.1.

Seja U_i um domínio local de M . Defina, sobre a folheação $\mathcal{F}$, a aplicação $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s$ tal que $\varphi_i(U_i) = U_1^i \times U_2^i$, onde U_1^i, U_2^i são bolas abertas de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^s$, respectivamente.

Seja

$$p_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^s$$

a projeção na segunda coordenada. Assim, a aplicação

$$f_i = p_2 \circ \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^s$$

é uma submersão, por ser a composta de uma projeção com um difeomorfismo.

As placas de U_i são os conjuntos de nível $f_i^{-1}(c)$, onde $c \in U_2$. Além disso, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $U_i \cup U_j \subset V$, onde V é aberto de M , $(V, \varphi) \in \mathcal{F}$ e $\varphi(V) = V_1 \times V_2$.

Sejam α, β placas de U_i e U_j , respectivamente, com $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Assim, $\alpha \cup \beta$ está contida em uma placa γ de V e, se $\beta \cap U_i \subset \alpha$, então $f_i(\beta \cap U_i) \subset f(\alpha) = c$. Observe então que $f_i(\beta \cap U_i)$ é um único ponto. Assim, se $y \in f_j(U_i \cap U_j)$, então $f_i \circ f_j^{-1}(y)$ contém um único ponto, $g_{ij}(y)$ e a aplicação

$$g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$$

é um difeomorfismo.

Reciprocamente, suponhamos que exista uma coleção de pares $(U_i, f_i)_{i \in I}$ satisfazendo a Definição 3.4. Para todo $i \in I$, $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^s$ é uma submersão holomorfa. Então, pelo Teorema da Forma Local das Submersões segue, dado $p \in U_i$, existem abertos V_1, V_2 de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^s$, respectivamente, com $V_2 \subset f_i(U_i)$ e uma carta local holomorfa, $\varphi : V \subset U_i \rightarrow V_1 \times V_2$ tal que $f_i \circ \varphi^{-1} : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$ é a projeção na segunda coordenada.

Mostremos que o conjunto de todas as cartas (V, φ) construídas dessa maneira é um atlas de classe C^r da variedade M .

De fato, se (V, φ) e (W, ψ) são cartas locais como na definição 3.4, com $V \cap W \neq \emptyset$, $\varphi : V \subset U_i \rightarrow V_1 \times V_2$ e $\psi : W \subset U_j \rightarrow W_1 \times W_2$ tais que $f_i \circ \varphi^{-1} : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$ e $f_j \circ \psi^{-1} : W_1 \times W_2 \rightarrow W_2$, então $V \subset U_i$ e $W \subset U_j$, com $i, j \in I$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) &\rightarrow \varphi(V \cap W) \\ (x, y) &\mapsto (h_1(x, y), h_2(x, y)), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h_2(x, y) &= p_2 \circ \varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = f_i \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1})(x, y) = f_i \circ \psi^{-1}(x, y) \\ &= g_{ij} \circ f_j \circ \psi^{-1}(x, y) = g_{ij}(y), \end{aligned}$$

ou seja, h_2 depende somente da variável y . Com isso, provamos que as duas definições de folheação são equivalentes. ■

3.1.2 Distribuições

Vamos supor, nesta seção, que M seja uma variedade algébrica não singular.

Definição 3.8 *Uma folheação holomorfa singular de dimensão k , com $1 \leq k \leq n - 1$, em uma variedade complexa M é uma folheação holomorfa não singular de dimensão k em $M \setminus S$, onde S é o esquema algébrico em M de codimensão maior ou igual a 2.*

Chamamos o esquema algébrico S de **conjunto singular** da folheação, e o denotamos por $Sing(\mathcal{F})$. As folhas F da folheação $\mathcal{F}$ são folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$.

Dadas duas folheações singulares $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$, dizemos que elas são iguais se elas possuem o mesmo conjunto singular e as folhas regulares coincidem, ou seja, se

- (i) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$,
- (ii) As folhais regulares de $\mathcal{F}|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$ são iguais.

Definição 3.9 *Uma distribuição holomorfa de posto k em uma variedade complexa é um subfibrado holomorfo*

$$D \rightarrow TM.$$

O **espaço tangente** de uma folha F_p que passa por p é denotado por $T_p\mathcal{F}_p$.

Definição 3.10 *Sejam $U \subset M$ aberto e X, Y germes de campos holomorfos. Definimos o campo*

$$[X, Y] = XY - YX,$$

*chamado **colchete de Lie** de X e Y .*

Definição 3.11 *Uma distribuição holomorfa D é dita **involutiva** se, dados dois germes de campos de vetores e $p \in M$ tais que $X(p), Y(p) \in D(p)$, então $[X, Y](p) \in D(p)$.*

Teorema 3.12 (de Frobenius) *Uma distribuição holomorfa D é involutiva se, e somente se, existe uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ tal que $T_p\mathcal{F}_p = D(p)$, para todo $p \in M$.*

3.1.3 Fibrados Associados a uma Folheação

Definição 3.13 *Uma distribuição holomorfa singular de dimensão k em uma variedade complexa M é um subfeixe coerente D do fibrado tangente $\Theta_M = \mathcal{O}(TM)$ tal que $\frac{\Theta_M}{D}$ é livre de torção.*

O conjunto singular de D é definido por

$$\text{Sing}(D) = \text{Sing}(\Theta_M/D) = \{p \in M; (\Theta_M/D)_p \text{ não é um } \mathcal{O}_X - \text{módulo livre}\}.$$

O resultado a seguir caracteriza as distribuições holomorfas localmente livres.

Proposição 3.14 *Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição localmente livre de dimensão p sobre uma variedade complexa M . Então existe uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ por abertos de M tal que, para cada $\alpha \in \Lambda$, os campos de vetores $v_{\alpha,1}(x), \dots, v_{\alpha,p}(x)$ geram $T_x \mathcal{F}$, se $x \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ e, se $x \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, então $v_{\alpha,1}(x), \dots, v_{\alpha,p}(x)$ são linearmente dependentes.*

Reciprocamente, se existem campos de vetores $v_{\alpha,1}(x), \dots, v_{\alpha,p}(x)$ satisfazendo as condições acima e $\text{codim Sing}(\mathcal{F}) \geq 2$, então $\mathcal{F}$ é uma distribuição localmente livre.

Antes de provarmos este resultado, precisamos saber que

Teorema 3.15 (da Extensão de Hartogs) *Sejam $U = \Delta(a, r)$ e $V = \Delta(a, r')$ polidiscos com $r' < r$. Então toda função holomorfa em $U - V$ se estende a uma função holomorfa definida em U .*

Demonstração: Ver [[9, pag. 7]]. ■

Demonstração: (da Proposição 3.14) Suponhamos que exista tal cobertura por abertos $\{U_\alpha\}$ para a variedade M e que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Seja $x \in U_{\alpha\beta} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Pelo que sabemos de fibrados, existe único isomorfismo linear $G_{\alpha\beta} \in GL(k, \mathbb{C})$ tal que, para todo $i = 1, \dots, k$

$$v_{\alpha,i}(x) = G_{\alpha\beta}(x) \cdot v_{\beta,i}.$$

Defina a aplicação

$$G_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}) \rightarrow GL(k, \mathbb{C}).$$

Pelo Teorema de Hartogs, $G_{\alpha\beta}$ se estende a uma aplicação definida em todo aberto $U_{\alpha\beta}$ que, por abuso de notação, continuaremos chamando de $G_{\alpha\beta}$. Então

$$G_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(k, \mathbb{C}).$$

Afirmamos que a aplicação $G_{\alpha\beta}$ satisfaz as condições de coclico.

De fato,

- (i) $G_{\alpha\beta}(x)G_{\beta\alpha}(x) = (v_{\alpha,i})(v_{\beta,i})^{-1}(v_{\beta,i})(v_{\alpha,i})^{-1} = I_k$, para todo $x \in U_{\alpha\beta}$.
- (ii) $G_{\alpha\beta}(x)G_{\beta\gamma}(x)G_{\gamma\alpha}(x) = (v_{\alpha,i})(v_{\beta,i})^{-1}(v_{\beta,i})(v_{\gamma,i})^{-1}(v_{\gamma,i})(v_{\alpha,i})^{-1} = I_k$, para todo $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$.

E mais, as funções de transição do fibrado $T\mathcal{F}$ são dadas por $(G_{\alpha\beta}^t)^{-1}$. Vamos então definir o homomorfismo $f : T\mathcal{F} \rightarrow TM$ do seguinte modo: para cada α , consideremos a trivialização local $U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ do fibrado $T\mathcal{F}$ dada por

$$f(x, (t_1, \dots, t_k)) = t_1 v_{\alpha,1}(x) + \dots + t_k v_{\alpha,k}(x).$$

A definição da aplicação f concorda com a definição de aplicação de fibrados, já vista no Capítulo 1. Além disso, por definição f é injetora, para todo $x \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, e assim, a fibra de $T_x \mathcal{F}_x$ é levada na fibra $T_x M$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{F}$ uma distribuição localmente livre. Então $T\mathcal{F}$ é um fibrado vetorial de posto k sobre M e $f : T\mathcal{F} \rightarrow TM$ é homomorfismo de fibrados. Considere $\{U_\alpha\}$ cobertura por abertos trivializadores do fibrado $T\mathcal{F}$. Sejam $\{e_1, \dots, e_k\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^k$ e $s_{\alpha,i}$ seções de $T\mathcal{F}$ do aberto U_α correspondente, na trivialização $U_\alpha \times \mathbb{C}^k$. As seções $s_{\alpha,i}$ são os campos $v_{\alpha,i}$ e que satisfazem (i) e (ii), por construção. Suponhamos que $\mathcal{F}$ seja uma distribuição localmente livre. Então, por definição, existe um fibrado vetorial $T\mathcal{F}$ de posto p e um homomorfismo $f : T\mathcal{F} \rightarrow TM$ de fibrados. Considere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cobertura por abertos trivializadores de $T\mathcal{F}$. Sejam $\{e_1, \dots, e_p\}$ base canônica de $\mathbb{C}^p$ e, para cada $i = 1, \dots, p$, $s_{\alpha,i}$ a seção de $T\mathcal{F}$ do aberto respectivo U_α . ■

Definição 3.16 *Uma folheação holomorfa singular de dimensão k em uma variedade complexa M é uma distribuição $T\mathcal{F}$ tal que $[T\mathcal{F}, T\mathcal{F}] \subset T\mathcal{F}$.*

Proposição 3.17 *Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ é não singular se, e somente se, $T\mathcal{F}$ é um subfibrado do fibrado tangente a variedade M , TM .*

3.2 Campos de Pfaff

Nesta seção Θ_X denota o fibrado tangente a variedade X , que antes estávamos denotando por TX .

Definição 3.18 *Seja X uma variedade projetiva. Um campo de Pfaff $\mathcal{F}$ de posto k sobre X é uma seção global não nula do fibrado $\bigwedge^k \Theta_X \otimes N$, onde Θ_X é o fibrado tangente, N é o fibrado em retas e $0 < k < n$.*

Como

$$\bigwedge^k \Theta_X \otimes N \cong \text{Hom}(\Omega_X^k, N) \cong \text{Hom}(N^*, \bigwedge^k \Theta_X),$$

podemos ver um Campo de Pfaff como um mapa

$$\xi_{\mathcal{F}} : N^* \rightarrow \bigwedge^k \Theta_X$$

ou um mapa

$$\xi_{\mathcal{F}}^* : \Omega_X^k \rightarrow N.$$

Definição 3.19 O conjunto singular de um Campo de Pfaff $\mathcal{F}$ é

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{x \in X; \xi_{\mathcal{F}}(x) \text{ não é injetiva}\} = \{x \in X; \xi_{\mathcal{F}}^*(x) \text{ não é sobrejetora}\}.$$

Definição 3.20 Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um subesquema fechado de dimensão maior ou igual ao posto do Campo de Pfaff $\mathcal{F}$. Dizemos que X é **invariante** sobre $\mathcal{F}$ se $X \not\subset \text{Sing}(\mathcal{F})$ e existe um morfismo de feixes $\phi : \Omega_{\mathbb{P}^n}^k \rightarrow N|_X$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\mathbb{P}^n}^k|_X & \xrightarrow{\xi_{\mathcal{F}}^*|_X} & N|_X \\ \downarrow & \nearrow \phi & \\ \Omega_X^k & & \end{array}$$

comuta.

Finalizamos este capítulo fazendo a seguinte observação: se aplicarmos o funtor $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ no diagrama acima, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} N^*|_X & & \\ \downarrow \phi^* & \searrow \xi_{\mathcal{F}}|_X & \\ (\Omega_X^k)^* & \longrightarrow & \bigwedge^k \Theta_X|_X \end{array}$$

O diagrama acima nos permite dizer que uma variedade projetiva $\mathbb{P}^n$ é **invariante** sobre um Campo de Pfaff $\mathcal{F}$ se a aplicação $\xi_{\mathcal{F}}|_X$ **induz uma seção global não nula de** $(\Omega_X^k)^* \otimes N|_X$. Utilizaremos fortemente este fato na demonstração do Teorema referente ao Problema de Poincaré para Campos de Pfaff.

Toda distribuição D de dimensão k induz um Campo de Pfaff de dimensão k . De fato, tomando o determinante do mapa

$$D \rightarrow \Theta_M$$

obtemos o mapa

$$\bigwedge^k D \rightarrow \bigwedge^k \Theta_M$$

e, portanto, uma seção global $\eta_{\mathcal{F}} \in H^0(\bigwedge^k \Theta_M \otimes (\bigwedge^k D)^*)$.

Se $v_1, \dots, v_k$ são germes de campos holomorfos que geram D localmente em uma vizinhança aberta U de M , então $\eta_{\mathcal{F}}|_U = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. Portanto, toda distribuição induz um Campo de Pfaff localmente livre. Como exemplo, considere o Campo de Pfaff indecomponível

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Logo, Campos de Pfaff são mais gerais que distribuições, pois nem todo Campo de Pfaff induz uma distribuição.

Capítulo 4

O Problema de Painlevé para Campos de Pfaff

Uma das grandes questões de Painlevé (que ficou conhecida por *Problema de Painlevé*) é:

É possível limitar o gênero da solução geral de uma equação diferencial algébrica em duas variáveis que tem uma integral primeira racional?

Lins Neto, em [13], construiu uma família de folheações que fornece uma resposta negativa para a questão. Muitos matemáticos tem trabalhado neste problema, como Cerveau, Soares, Carnicer, Campilo-Olivares, Esteves Kleiman. Em [4], Barros Júnior e Jardim deram uma cota para o gênero seccional de uma variedade projetiva não singular invariante por um Campo de Pfaff.

No que segue, X é uma variedade projetiva não singular, $g(X, \mathcal{O}_X(1))$ denota o gênero seccional de X com respeito ao fibrado em retas $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$.

Teorema 4.1 *Seja X uma variedade projetiva não singular de dimensão m , invariante por um Campo de Pfaff $\mathcal{F}$ de posto k sobre $\mathbb{P}^n$. Se o fibrado tangente Θ_X é estável, então vale a desigualdade*

$$\frac{2g(X, \mathcal{O}(1)) - 2}{\deg(X)} \leq \frac{\deg(\mathcal{F}) - k}{\binom{m-1}{k-1}} + m - 1,$$

para $m \geq k$.

Demonstração: Começamos observando que se o fibrado tangente Θ_X é estável, então o fibrado $\bigwedge^k \Theta_X$ é semi-estável. Além disso, como X é invariante por Campo de Pfaff, então existe seção global $H^0(X, \bigwedge^k \Theta_X \otimes \mathcal{O}_X(d - k))$ não nula, onde $d = \deg(\mathcal{F})$.

Sendo o fibrado $\bigwedge^k \Theta_X$ semi-estável e sabendo que $\mathcal{O}_X(d - k)$ também é semi-estável, segue que $\bigwedge^k \Theta_X \otimes \mathcal{O}_X(d - k)$ é semi-estável. Na seção 2.4, quando falamos de Fibrados Determinante, observamos inicialmente que a um fibrado podemos associar um feixe coerente localmente livre. Vamos considerar o feixe $\mathcal{T}$ associado ao fibrado $\bigwedge^k \Theta_X \otimes \mathcal{O}_X(d - k)$. Assim, $\bigwedge^k \theta \otimes \mathcal{O}(d - k)$ é

semi-estável e admite seções holomorfas não nulas. Então, pela contra-positiva do Corolário 2.4, segue que

$$\deg(\bigwedge^k \Theta_X \otimes \mathcal{O}_X(d-k)) \geq 0. \quad (4.1)$$

Afirmção 1: $c_1(\bigwedge^k \Theta_X) = \binom{m-1}{k-1} c_1(\Theta_X)$.

A prova desta afirmação será feita por indução sobre a dimensão da variedade e o posto do Campo de Pfaff. Utilizaremos os cálculos da Classe de Chern do produto exterior.

Suponhamos que os fibrados Θ_X e $\bigwedge^k \Theta_X$ sejam decomponíveis. A Classe de Chern total de $\bigwedge^k \Theta_X$ é dada por

$$c(\bigwedge^k \Theta_X) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} (1 + x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}).$$

Suponhamos que $k = 2$. Vamos usar indução sobre m com k fixado.

(i) Se $m = 2$, então nada há para se fazer.

(ii) Suponhamos $m = 3$. Temos

$$c(\bigwedge^2 \Theta_X) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} (1 + x_{i_1} + x_{i_2}) = (1 + x_1 + x_2)(1 + x_1 + x_3)(1 + x_2 + x_3).$$

Para termos a primeira Classe de Chern devemos considerar apenas os termos com exponte 1 no produto acima, ou seja,

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^2 \Theta_X) &= (1 + 2x_1 + x_2 + x_3)(1 + x_2 + x_3) = 1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ &= \binom{2}{1} c_1(\Theta_X) = \binom{3-1}{2-1} c_1(\Theta_X). \end{aligned}$$

(iii) Suponhamos $m = 4$. A Classe de Chern total é dada por

$$\begin{aligned} c(\bigwedge^2 \Theta_X) &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} (1 + x_{i_1} + x_{i_2}) \\ &= (1 + x_1 + x_2)(1 + x_1 + x_3)(1 + x_1 + x_4)(1 + x_2 + x_3)(1 + x_2 + x_4)(1 + x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Considerando os termos de potência 1, a primeira Classe de Chern é dada por

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^2 \Theta_X) &= (1 + 2x_1 + x_2 + x_3)(1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(1 + x_2 + x_3 + 2x_4) \\ &= (1 + 2x_1 + x_2 + x_3)(1 + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) = 1 + 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ &= \binom{3}{1} c_1(\Theta_X) = \binom{4-1}{2-1} c_1(\Theta_X). \end{aligned}$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado seja válido para $m = n$, ou seja,

$$c_1(\bigwedge^2 \Theta_X) = \binom{n-1}{2-1} c_1(\Theta_X).$$

(iv) Seja $m = n + 1$. Temos

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^2 \Theta_X) &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n+1} (1 + x_{i_1} + x_{i_2}) \\ &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (1 + x_{i_1} + x_{i_2}) + (1 + x_1 + x_{n+1}) \cdots (1 + x_n + x_{n+1}) \\ &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (1 + x_{i_1} + x_{i_2}) + \prod_{1 \leq i_1 \leq n} (1 + x_{i_1} + x_{n+1}). \end{aligned}$$

Assim, usando a hipótese de indução na primeira parcela da soma acima, temos

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^2 \Theta_X) &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (1 + x_{i_1} + x_{i_2}) + \prod_{1 \leq i_1 \leq n} (1 + x_{i_1} + x_{n+1}) \\ &= \binom{n-1}{2-1} c_1(\Theta_X) + (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + nx_{n+1}) \\ &= (n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + nx_{n+1}) \\ &= 1 + nx_1 + nx_2 + \cdots + nx_n + nx_{n+1} = \binom{n}{2-1} c_1(\Theta_X). \end{aligned}$$

Agora vamos considerar $k = 3$.

(i) Suponhamos $m = 4$, pois se $m = 3$ nada há para se fazer. Temos

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^3 \Theta_X) &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} (1 + x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3}) \\ &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} (1 + x_1 + x_2 + x_3)(1 + x_1 + x_2 + x_4)(1 + x_1 + x_3 + x_4) \\ &\quad (1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^3 \Theta_X) &= (1 + 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)(1 + x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4) \\ &= 1 + 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \binom{4-1}{3-1} c_1(\Theta_X). \end{aligned}$$

(ii) Suponhamos $m = 5$. Temos

$$\begin{aligned}
c(\bigwedge^3 \Theta_X) &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} (1 + x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3}) \\
&= (1 + x_1 + x_2 + x_3)(1 + x_1 + x_2 + x_4)(1 + x_1 + x_2 + x_5)(1 + x_1 + x_3 + x_4) \\
&\quad (1 + x_1 + x_3 + x_5)(1 + x_1 + x_4 + x_5)(1 + x_2 + x_3 + x_4)(1 + x_2 + x_3 + x_5) \\
&\quad (1 + x_2 + x_4 + x_5)(1 + x_3 + x_4 + x_5) \\
&= 1 + 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 = \binom{5-1}{3-1} c_1(\Theta_X).
\end{aligned}$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $m = n$, ou seja,

$$c_1(\bigwedge^3 \Theta_X) = \binom{n-1}{3-1} c_1(\Theta_X).$$

(iii) Suponha $m = n + 1$. Temos

$$\begin{aligned}
c(\bigwedge^3 \Theta_X) &= \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (1 + x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3}) + (1 + x_1 + x_2 + x_{n+1})(1 + x_1 + x_3 + x_{n+1}) \cdots \\
&\quad \cdots (1 + x_1 + x_n + x_{n+1})(1 + x_2 + x_3 + x_{n+1})(1 + x_2 + x_4 + x_{n+1}) \cdots \\
&\quad (1 + x_2 + x_n + x_{n+1}) \cdots (1 + x_{n-1} + x_n + x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução, segue

$$\begin{aligned}
c_1(\bigwedge^3 \Theta_X) &= \binom{n-1}{2} c_1(\Theta_X) + 1 + (n-1)(x_1 + x_2 + x + 3 + \cdots + x_n + x_{n+1}) \\
&= \binom{n-1}{2} c_1(\Theta_X) + 1 + \frac{2n-2}{2}(x_1 + x_2 + x + 3 + \cdots + x_n + x_{n+1}) \\
&= 1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}(x_1 + x_2 + x + 3 + \cdots + x_n + x_{n+1}) + \\
&\quad + \frac{2n-2}{2}(x_1 + x_2 + x + 3 + \cdots + x_n + x_{n+1}) \\
&= 1 + \frac{n^2 - n}{2}(x_1 + x_2 + x + 3 + \cdots + x_n + x_{n+1}) = \binom{n}{2} c_1(\Theta_X).
\end{aligned}$$

Suponha que o resultado seja válido para $k < a$. Vamos mostrar que o resultado para $k = a$, arbitrário. Como $m \geq k$, consideremos $m = a + n$.

(i) Se $n = 1$, então $m = a + 1$ e temos

$$c(\bigwedge^a \Theta_X) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq a+1} (1 + x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + \cdots + x_{i_{a-1}} + x_{i_a}).$$

Observe que os $a + 1$ índices devem ser dispostos entre os a x'_i s, o que nos dá $\binom{a+1}{a} = a$ parcelas. Tirando somente os termos de ordem 1, pelo que observamos nos casos anteriores, temos

$$c_1(\bigwedge^a \Theta_X) = a \cdot c_1(\Theta_X) = \binom{a+1-1}{a-1} c_1(\Theta_X).$$

Suponhamos que vale para $m = a + n$. Assim,

$$c_1(\bigwedge^a \Theta_X) = \binom{a+n-1}{a-1} c_1(\Theta_X) = \frac{(a+n-1)(a+n-2) \cdots (a+1)a}{n!}.$$

Tome $m = a + n + 1$ e observe que no produtório $\prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n+a+1} (1 + x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + \cdots + x_{i_{a-1}} + x_{i_a})$ temos

$$\binom{a+n+1}{a} = \frac{(a+n+1)(a+n)(a+n-1) \cdots (a+1)}{(n+1)!}$$

parcelas. Fazendo o produto destas parcelas e tirando somente os termos de ordem 1, obtemos

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^a \Theta_X) &= \frac{(a+n-1)(a+n-2) \cdots (a+1)a}{n!} c_1(\Theta_X) + \\ &+ 1 + \sum_{i=1}^{a+1} \frac{(a+n-1)(a+n-2) \cdots (a+1)a(a-1)}{(n+1)!} x_i \\ &= \frac{(a+n)(a+n-1) \cdots (a+1)a}{(n+1)!} c_1(\Theta_X) = \binom{a+n}{a-1} c_1(\Theta_X), \end{aligned}$$

o que completa a prova da Afirmação 1. Por outro lado, sabemos que

$$c_1(\Theta_X) = c_1(\det \Theta_X) = -c_1(\det \Theta_X^*). \quad (4.2)$$

Além disso, por hipótese, K_X é o divisor tal que

$$c_1(K_X) = c_1(\det \Theta_X^*). \quad (4.3)$$

Usando as Equações (4.1) e (4.2) na Afirmação 1, teremos

$$c_1(\bigwedge^k \Theta_X) = -\binom{m-1}{k-1} c_1(K_X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(\bigwedge^k \Theta_X) \wedge c_1(\mathcal{O}(1))^{n-1} = -\binom{m-1}{k-1} c_1(K_X) \wedge (\mathcal{O}(1))^{n-1}.$$

Portanto,

$$\deg(\bigwedge^k \Theta_X) = -\binom{m-1}{k-1} \deg(K_X). \quad (4.4)$$

Considere a diferença

$$(2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2) - \left[\frac{\mathcal{O}_X(d-k)}{\binom{m-1}{k-1}} + (m-1)\mathcal{O}_X(1) \right] \mathcal{O}_X(1)^{m-1}.$$

Na seção 2.6 vimos que

$$2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2 = (K_X + (m-1)\mathcal{O}_X(1))\mathcal{O}_X(1)^{m-1}.$$

Substituindo esta equação na diferença acima, fica

$$\begin{aligned} K_X \mathcal{O}_X(1)^{m-1} + (m-1)\mathcal{O}_X(1)^m - \frac{\mathcal{O}_X(d-k)}{\binom{m-1}{k-1}} \mathcal{O}_X(1)^{m-1} - (m-1)\mathcal{O}_X(1)^m = \\ \left[K_X - \frac{\mathcal{O}_X(d-k)}{\binom{m-1}{k-1}} \right] \mathcal{O}_X(1)^{m-1} = - \left[-K_X + \frac{\mathcal{O}_X(d-k)}{\binom{m-1}{k-1}} \right] \mathcal{O}_X(1)^{m-1} = \\ - \left[\deg(\bigwedge^k \Theta_X) + \frac{\deg(\mathcal{O}_X(d-k))}{\binom{m-1}{k-1}} \right] = - \frac{\deg(\bigwedge^k \Theta_X \otimes \mathcal{O}_X(d-k))}{\binom{m-1}{k-1}} \leq 0. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2 \leq \left[\frac{\mathcal{O}_X(d-k)}{\binom{m-1}{k-1}} + (m-1)\mathcal{O}_X(1) \right] \mathcal{O}_X(1)^{m-1}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_X(d-k)}{\binom{m-1}{k-1}} \cdot \mathcal{O}_X(1)^{m-1} + (m-1)\mathcal{O}_X(1)^m &= \mathcal{O}_X(1)^m \left[\frac{d-k}{\binom{m-1}{k-1}} + (m-1) \right] = \\ &= \dim(X) \cdot \left[\frac{\deg(\mathcal{F})}{\binom{m-1}{k-1}} + (m-1) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2}{\deg(X)} \leq \frac{\deg(\mathcal{F}) - k}{\binom{m-1}{k-1}} + (m-1).$$

■

Apresentaremos agora algumas consequência deste resultado.

Definição 4.2 *Uma variedade projetiva não singular é **Fano** se o grau do seu fibrado canônico K_X é negativo. Se tivermos $\deg(K_X) = 0$, então dizemos que a variedade X é **Calabi-Yau**.*

Observação 4.3 *As variedades Fano e Calabi-Yau possuem fibrado tangente estável.*

Corolário 6 *Sejam X variedade Fano não singular com número de Picard 1, invariante sob um Campo de Pfaff $\mathcal{F}$ de posto $k = \dim X$, e $\mathcal{O}_X(1) := K_X^{-1}$. Então*

$$\deg_{K_X^{-1}}(X) \leq k^k(\deg(\mathcal{F}) + 2)^k,$$

onde $\deg_{K_X^{-1}}(X)$ é o grau da variedade X .

Demonstração: Nas hipóteses do corolário, temos

$$2g(X, K_X^{-1}) - 2 = (k - 2)\deg_{K_X^{-1}}(X).$$

Substituindo esta igualdade no Teorema 4.1 encontramos

$$k \leq \deg(\mathcal{F}) + 1.$$

Por outro lado, segue de [18] que

$$d(X) \leq k + 1 \quad \text{e} \quad \deg_{K_X^{-1}}(X) \leq (d(X)k)^k,$$

onde $d(X)$ é o menor inteiro positivo para o qual a variedade X pode ser coberta por curvas racionais de grau no máximo d . Portanto,

$$\deg(X) \leq (d(X)k)^k \leq k^k(k + 1)^k \leq k^k(\deg(\mathcal{F}) + 2)^k.$$

■

Corolário 7 *Se X é uma variedade Calabi-Yau (ou seja, $K_X = 0$) e invariante sob um Campo de Pfaff $\mathcal{F}$, então $rk(\mathcal{F}) \leq \deg(\mathcal{F})$.*

Demonstração: Como X é uma variedade Calabi-Yau, então $K_X = 0$. Pelo Corolário 6 temos

$$2g(X) - 2 = 0.$$

Pelo Teorema 4.1,

$$\deg(X) \left(\frac{d - k}{\binom{m-1}{k-1}} + m - 1 \right) \geq 0$$

e, daí,

$$k \leq d \Leftrightarrow rk(\mathcal{F}) \leq \deg(\mathcal{F}).$$

■

Teorema 4.4 *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva Gorenstein não singular em codimensão 1, invariante por um Campo de Pfaff de posto igual a dimensão de X . Então*

$$\frac{2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2}{\deg(X)} \leq \deg(\mathcal{F}) - 1.$$

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ variedade Gorenstein com dimensão k tal que $(\text{Sing}(X), X) \geq 2$. Então o dual do feixe canônico, ω_X^* , é localmente livre e, em particular, reflexivo. Além disso, ω_X^* é normal.

Por hipótese, X é invariante por um Campo de Pfaff. Então sabemos que existe seção global não nula $\eta_{\mathcal{F}} \in H^0((\Omega_X^k) \otimes \mathcal{O}_X(d-k))$, onde d e k são o grau e o posto do Campo de Pfaff $\mathcal{F}$, respectivamente. Considere a restrição $\eta_{\mathcal{F}}|_{X_0}$, em que $X_0 := X - \text{Sing}(X)$, e o mapa canônico $\gamma_X : \Omega_X^k \rightarrow \omega_X$. O mapa

$$\widetilde{\gamma}_X = \gamma_X^* \otimes 1_{\mathcal{O}_X(d-k)} : \omega_X^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k) \rightarrow (\Omega_X^k)^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k)$$

é um isomorfismo quando restrito a X_0 . Assim,

$$\widetilde{\gamma}_X|_{X_0} (\eta_{\mathcal{F},0}) \in H^0(X_0, \omega_X^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k)|_{X_0}).$$

Como o feixe ω_X^* é normal, segue que também é normal o feixe $\omega_X^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k)$. Logo, a seção acima se estende a uma seção global de $\omega_X^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k)$. Mas X é invariante por um Campo de Pfaff, então por definição $H^0(X, \omega_X^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k)) \neq \{0\}$ e, usando a contra-positiva do corolário 2.4, segue que $\deg(\omega_X^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k)) \geq 0$.

Seja K_X o divisor tal que $\mathcal{O}_X(K_X) = \omega_X$. Considere a diferença

$$(2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2) - [\mathcal{O}_X(d-k) + (k-1)\mathcal{O}_X(1)] \cdot \mathcal{O}_X(1)^{k-1}. \quad (4.5)$$

Sabemos, da seção 2.6 do Capítulo 2 que

$$2g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 2 = (K_X + (k-1)\mathcal{O}_X(1))\mathcal{O}_X(1)^{k-1}.$$

Substituindo esta equação na Equação 4.5, temos

$$\begin{aligned} & (K_X + (k-1)\mathcal{O}_X(1))\mathcal{O}_X(1)^{k-1} - [\mathcal{O}_X(d-k) + (k-1)\mathcal{O}_X(1)]\mathcal{O}_X(1)^{k-1} = \\ & = -(K_X^{-1} + \mathcal{O}_X(d-k))\mathcal{O}_X(1)^{k-1} = -\deg(\omega_X^* \otimes \mathcal{O}_X(d-k)) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2g(X, \mathcal{O}_X) - 2 \leq (d-k+k-1)\mathcal{O}_X(1)^k$$

e temos

$$\frac{2g(X, \mathcal{O}_X) - 2}{\deg(X)} \leq \deg(\mathcal{F}) - 1.$$

■

Apêndice A

Álgebra Multilinear

Nesta seção vamos tratar de alguns conceitos algébricos simples e que nos dão suporte para os cálculos que fazemos neste trabalho. As demonstrações contidas ao longo deste apêndice podem ser dadas utilizando a definição mais alguns com cálculos simples, logo elas serão omitidas.

Aplicações multilineares e tensores

Definição A.1 *Sejam $V_1, \dots, V_r, W$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$. Uma aplicação*

$$F : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$$

*é **r-linear** se ela satisfaz a igualdade*

$$F(v_1, \dots, v_{i-1} + \lambda u_i, v_{i+1}, \dots, v_r) = F(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r) + \lambda F(v_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_r),$$

para cada $1 \leq i \leq r$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e quaisquer $v_i, u_i \in V_i$.

*Em cada variável, a aplicação F é dita **linear**.*

O exemplo mais simples de aplicação multilinear é a função determinante.

Exemplo A.2 *Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ e considere a matriz $n \times n$ $A = [v_1, \dots, v_n]$.*

A aplicação

$$\begin{aligned} \det & : \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto \det([v_1, \dots, v_n]) \end{aligned}$$

é uma aplicação n -linear.

Isso segue do fato que

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v_{ij} A_{ij},$$

onde A_{ij} é o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ eliminando a linha i e a coluna j .

Definição A.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n + 1$ e $\beta = \{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ uma base de V . Definimos o **produto vetorial** por*

$$\begin{aligned} \bigwedge & : V \times \cdots \times V \rightarrow V \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \det(A_i) e_i, \end{aligned}$$

onde A_i é a matriz obtida eliminando a i -ésima linha da matriz (a_{ij}) de ordem $(n + 1) \times n$.

A aplicação produto vetorial é uma aplicação n -linear pelo modo como foi construída, já que a função determinante é n -linear, pelo exemplo anterior.

Notações:

$$(01) \quad \bigwedge(v_1, \dots, v_n) = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

$$(02) \quad \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W) \text{ é o espaço das aplicações } r\text{-lineares de } V_1 \times \cdots \times V_r \text{ em } W.$$

$$(03) \quad \text{Quando } V_i = V \text{ para todo } i = 1, \dots, r, \text{ o espaço das aplicações } r\text{-lineares de } V_1 \times \cdots \times V_r \text{ em } W \text{ é denotado por } \mathcal{L}_r(V; W).$$

Sejam $F, G \in \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Defina

$$\begin{aligned} + & : \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W) \times \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W) \rightarrow \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W) \\ & (F, G) \mapsto F(v_1, \dots, v_n) + G(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot & : \mathbb{C} \times \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W) \rightarrow \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W) \\ & (\lambda, F) \mapsto (\lambda F)(v_1, \dots, v_n) = \lambda F(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Com essas operações, $\mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W)$ tem estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Definição A.4 *Definimos o **produto tensorial** de s funcionais lineares $F_i \in \mathcal{L}(V_i; \mathbb{C})$, para $i = 1, \dots, s$ sendo a aplicação s -linear*

$$\begin{aligned} F_1 \otimes \cdots \otimes F_s & : V_1 \times \cdots \times V_s \rightarrow \mathbb{C} \\ (v_1, \dots, v_s) & \mapsto F_1(v_1) \cdots F_s(v_s). \end{aligned}$$

Da definição anterior, podemos ver que $F_1 \otimes \cdots \otimes F_s$ é um elemento de $\mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_s; \mathbb{C})$. Além disso, o produto tensorial de funcionais lineares resulta em aplicações multilineares de espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$.

Proposição A.5 *Sejam $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\beta^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ bases ordenadas de V e V^* , respectivamente. As formas r -lineares $e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^*$ formam uma base para $\mathcal{L}_r(V; \mathbb{C})$, para toda sequência de inteiros $(i_1, \dots, i_r)$, com $i_k \in \{1, \dots, n\}$ e $k = 1, \dots, r$.*

Podemos definir outros tipos de produto tensorial, como veremos.

Definição A.6 Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e E^* seu dual. Uma aplicação multilinear de

$$\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p\text{-vezes}} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{q\text{-vezes}}$$

em $\mathbb{C}$ é chamada de **tensor p -covariante, q -contravariante**.

Definição A.7 Seja $T : E^n \rightarrow F^m$ uma aplicação linear. Se $w \in \mathcal{L}_r(F)$ é uma p -forma multilinear, então T induz uma p -forma em E (chamada **pull-back**) dada por

$$T^*(w)(e_1, \dots, e_n) = w(Te_1, \dots, Te_n).$$

Formas Exteriores

Vamos agora introduzir um conceito particularmente importante neste trabalho: as *formas exteriores*. Aqui, $\mathfrak{S}_p$ denota o grupo de permutações do conjunto $\{1, \dots, p\}$ e $\epsilon(s)$ o sinal da permutação de $\mathfrak{S}_p$.

Seja $w \in \mathcal{L}_p(E)$. Uma permutação $s \in \mathfrak{S}_p$ induz uma forma p -linear do seguinte modo

$$s \circ w : (e_1, \dots, e_n) \rightarrow w(e_{s(1)}, \dots, e_{s(n)}),$$

de maneira que cada permutação $s \in \mathfrak{S}_p$ induz um automorfismo de $\mathcal{L}_p(E)$ dado por

$$\begin{array}{ccc} T_s & : & \mathcal{L}_p(E) \rightarrow \mathcal{L}_p(E) \\ w & \mapsto & s \circ w, \end{array}$$

e valem

$$Id \circ w = w \quad \text{e} \quad (s \circ t) \circ w = s \circ (t \circ w).$$

De fato.

Observe que

$$\begin{aligned} Ker(T_s) &= \{w \in \mathcal{L}_p(E); s \circ w = Id\} = \{w \in \mathcal{L}_p(E) : w(e_{s(1)}, \dots, e_{s(n)})\} \\ &= \{Id\}. \end{aligned}$$

Assim, vemos que T_s é uma aplicação linear injetiva entre espaços de mesma dimensão, ou seja, T_s é um isomorfismo linear. Portanto, T_s define, de fato, um automorfismo.

Definição A.8 Uma p -forma linear $w \in \mathcal{L}_p(E)$ é dita **antissimétrica** ou simplesmente, **forma exterior** de grau p se $s \circ w = \epsilon(s)w$, para todo $s \in \mathfrak{S}_p$. Denotamos por $\bigwedge^p E$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_p(E)$ de todas as p -formas exteriores.

Um exemplo canônico de forma antissimétrica é a função determinante.

Definimos o operador **antissimetrização** por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{L}_p(E) &\rightarrow \bigwedge^p E \\ w &\mapsto \mathcal{A}(w) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(s) s \circ w. \end{aligned}$$

Sobre este operador, seguem os resultados.

Proposição A.9 *Seja $w \in \mathcal{L}_p(E)$ uma p -forma multilinear. Valem:*

- (i) $\mathcal{A}(w)$ é antissimétrica;
- (ii) se $w \in \bigwedge^p E$, então $\mathcal{A}(w) = p!w$.

Lema A.10 *Sejam $w \in \mathcal{L}_p(F)$, $v \in \mathcal{L}_q(F)$ e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Então*

- (i) $T^*(\mathcal{A}(w)) = \mathcal{A}(T^*w)$;
- (ii) $T^*(w \otimes v) = T^*(w) \otimes T^*(v)$.

Proposição A.11 *Sejam $w \in \mathcal{L}_p(E)$ e $v \in \mathcal{L}_q(E)$. Então*

- (i) $\mathcal{A}(\mathcal{A}(w) \otimes v) = p!\mathcal{A}(w \otimes v)$;
- (ii) $\mathcal{A}(w \otimes \mathcal{A}(v)) = q!\mathcal{A}(w \otimes v)$;
- (iii) $\mathcal{A}(w \otimes v) = (-1)^{pq}\mathcal{A}(v \otimes w)$.

Produto Exterior

Definição A.12 *Sejam w e v p -forma e q -forma exteriores, respectivamente sobre um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial E . Definimos o **produto exterior** de w com v por*

$$w \wedge v = \frac{1}{p!q!} \mathcal{A}(v \otimes w).$$

Observação A.13 *Da definição dada acima, podemos fazer as seguintes observações:*

- (a) Se $w \in \bigwedge^p E$ e $v \in \bigwedge^1 E$, então

$$(w \wedge v)(e_1, \dots, e_{p+1}) = \sum_{1 \leq i \leq p+1} (-1)^{i-1} v(e_i) w(e_1, \dots, e_{i-1}, \widehat{e_i}, e_{i+1}, \dots, e_{p+1}).$$

- (b) Podemos definir uma aplicação, chamada **produto exterior**, por

$$\begin{aligned} \wedge : \bigwedge^q E \times \bigwedge^p E &\rightarrow \bigwedge^{p+q} E \\ (v, w) &\mapsto w \wedge v, \end{aligned}$$

com $w \in \bigwedge^p E$ e $v \in \bigwedge^q E$. É possível mostrar que esta aplicação é bilinear, devido a distributividade do produto tensorial em relação a soma.

Proposição A.14 *O produto exterior goza das seguintes propriedades:*

(i) *Anti-comutatividade:* $w \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge w$;

(ii) *Associatividade:* $w \wedge (v \wedge \beta) = (w \wedge v) \wedge \beta$, para quaisquer $w \in \bigwedge^p E$, $v \in \bigwedge^q E$ e $\beta \in \bigwedge^r E$.

Proposição A.15 *Sejam E um espaço vetorial complexo e E^* seu dual. Se $w_1, \dots, w_p \in E^*$ e $v_1, \dots, v_p \in E$, então*

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_p \cdot (v_1, \dots, v_p) = \det [w_i(v_j)],$$

para $i, j = 1, \dots, p$.

Definição A.16 *Uma p -forma exterior α sobre um espaço vetorial E é dita **decomponível** se existem formas lineares $w_1, \dots, w_p \in E^*$ tais que:*

$$\alpha = w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p.$$

O resultado seguinte nos diz que toda p -forma exterior pode ser escrita como combinação linear de p -formas decomponíveis.

Proposição A.17 *Sejam $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial E e $\beta^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ base do seu dual E^* . Então*

$$\bigwedge^p \beta = \{v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_p}^* : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n\}$$

forma uma base para o espaço das p -formas $\bigwedge^p E$.

Como dissemos anteriormente, a Proposição A.17 nos afirma que toda p -forma exterior é dada como combinação de p -formas decomponíveis. Assim, se $\alpha \in \bigwedge^p E$, então existem funcionais $f_{i_1}, \dots, f_{i_p} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} f_{i_1} \dots f_{i_p} v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_p}^*.$$

Álgebra de Grasmann

Seja E um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão n . Pelo que discutimos ao longo dessa seção,

$$\bigwedge E = \mathbb{C} \oplus E \oplus \bigwedge^2 E \oplus \dots \oplus \bigwedge^n E$$

tem, naturalmente, estrutura de espaço vetorial complexo com dimensão $\dim_{\mathbb{C}} (\bigwedge E) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} = 2^n$.

Observe que se $\Omega \in \bigwedge E$, então

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n,$$

onde $\omega_i \in \bigwedge^i E$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Vamos definir uma operação produto sobre o espaço vetorial $\bigwedge E$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \cdot : \bigwedge E \times \bigwedge E &\rightarrow \bigwedge E \\ (\Omega, \Theta) &\mapsto \Omega \cdot \Theta, \end{aligned}$$

onde $\Omega = \sum_{i=0}^n \omega_i$ e $\Theta = \sum_{i=0}^n \theta_i$.

Dáí,

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \Theta &= (\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n) \wedge (\theta_0 + \theta_1 + \cdots + \theta_n) \\ &= \omega_0 \theta_0 + (\omega_0 \theta_1 + \omega_1 \theta_0) + (\omega_0 \theta_2 + \omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_0) + \cdots \\ &= \sum_{r=0}^n \left(\sum_{i+j=r}^n \omega_i \wedge \theta_j \right). \end{aligned}$$

Por definição, $\bigwedge E$ é uma álgebra graduada, anti-comutativa (pela definição do produto exterior), associativa (por definição do operador $\wedge$) e com unidade, pois

$$(\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n) \wedge (1 + 0 + \cdots + 0) = \omega_0 \cdot 1 + (\omega_0 \cdot 0 + \omega_1 \cdot 1) + \cdots = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n.$$

O produto acima definido nos mostra que $\bigwedge E$ é uma **Álgebra de Grasmann**. E mais, $(\bigwedge^i E) \cdot (\bigwedge^j E) \subset \bigwedge^{i+j} E$, ou seja, $\bigwedge E$ é uma álgebra graduada.

Apêndice B

Funtor Derivado

As demonstrações omitidas neste apêndice podem ser encontradas em [10].

Definição B.1 *Uma categoria abeliana é uma categoria $\mathcal{U}$ onde quaisquer dois objetos $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{U})$, $\text{Hom}(A, B)$ tem estrutura de grupo abeliano e a composição de morfismos é linear. Além disso, existe soma direta finita definida, todo morfismo tem um núcleo e co-núcleo, todo monomorfismo é o núcleo do seu co-núcleo, todo epimorfismo é o co-núcleo do seu núcleo e todo morfismo pode ser fatorado em um epimorfismo e um monomorfismo.*

Exemplo B.2 *A categoria dos grupos abelianos e a categoria dos feixes de grupo abelianos sobre um espaço topológico X são categorias abelianas.*

Definição B.3 (01) *Um complexo A' em uma categoria abeliana $\mathcal{U}$ é uma coleção de objetos A^i , para cada $i \in \mathbb{Z}$ e morfismos $d^i : A^i \rightarrow A^{i+1}$ tal que, para todo $i \in \mathbb{Z}$*

$$d^{i+1} \circ d^i = 0,$$

(02) *Um morfismo de complexos $f : A' \rightarrow B'$ é um conjunto de morfismos $f^i : A^i \rightarrow B^i$ que comutam com d^i ;*

(03) *O i -ésimo objeto cohomologia $h^i(A')$ de um complexo A' é definido por*

$$h^i(A') = \frac{\text{Ker } d^i}{\text{Im } d^{i-1}}.$$

Seja $f : A' \rightarrow B'$ um morfismo de complexos. Então, por definição de morfismo de complexo, segue que f induz uma aplicação entre os i -ésimos objetos cohomologia

$$h^i(f) : h^i(A') \rightarrow h^i(B').$$

Uma pergunta natural que surge é: *dois morfismos de complexos podem induzir o mesmo morfismo entre os respectivos i -ésimos objetos cohomologia?* Veremos que sob certas condições a resposta desta pergunta é afirmativa.

Definição B.4 *Dois morfismos de complexos $f, g : A' \rightarrow B'$ são ditos **homotópicos**, e denotamos por $f \sim g$, se existe uma coleção de morfismos*

$$k^i : A^i \rightarrow B^{i-1},$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$, tal que

$$f - g = dk + kd.$$

Observação B.5 *A coleção de morfismos homotópicos $k = (k^i)$ é chamada **operador homotopia**.*

Definição B.6 *Dizemos que dois morfismos de complexos f e g induzem o mesmo morfismo $h^i(A') \rightarrow h^i(B')$ se $f \sim g$.*

Agora considere a sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0.$$

Do fato de a sequência acima ser exata, está bem definida a aplicação natural

$$\delta^i : h^i(C') \rightarrow h^{i+1}(A')$$

que nos permite construir uma sequência exata longa de i -ésimos objetos cohomologia

$$\cdots \longrightarrow h^i(A') \longrightarrow h^i(B') \longrightarrow h^i(C') \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A') \longrightarrow \cdots.$$

Definição B.7 *Um funtor covariante $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ entre categorias abelianas é dito **funtor aditivo** se, para quaisquer dois objetos $A, A' \in \mathcal{U}$, o mapa*

$$\text{Hom}(A, A') \rightarrow \text{Hom}(FA, FA')$$

é um homomorfismo de grupos abelianos.

Para obtermos alguns resultados, precisamos do conceito de funtor covariante exato à esquerda e à direita.

Definição B.8 *O funtor covariante $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ é **exato à esquerda** se ele é um funtor aditivo e, para toda sequência exata curta de complexos em $\mathcal{U}$*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

tivermos a sequência exata curta em $\mathcal{B}$

$$0 \longrightarrow FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA''.$$

Se podemos escrever

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0,$$

então dizemos que a sequência é **exata à direita**.

Uma sequência exata à direita e à esquerda é dita simplesmente **sequência exata**. Se a parte do meio da sequência for exata, então dizemos que a sequência é uma **sequência exata no meio**.

Observação B.9 *Toda a discussão que tivemos também é válida para funtores contra-variantes.*

O exemplo a seguir será particularmente útil em nossos estudos.

Exemplo B.10 *Sejam $\mathcal{U}$ uma categoria abeliana e A um objeto em $\mathcal{U}$ fixado. O funtor*

$$F_A : B \rightarrow \text{Hom}(A, B),$$

denotado por $\text{Hom}(A, \cdot)$ é um funtor covariante exato à direita.

Já o funtor

$$F_A : \text{Hom}(B, A) \rightarrow B,$$

denotado por $\text{Hom}(\cdot, A)$ é um funtor contra-variante exato à esquerda.

Definição B.11 *Um objeto I na categoria abeliana $\mathcal{U}$ é **injetivo** se o funtor contra-variante exato à esquerda $\text{Hom}(\cdot, I)$ é exato. Já uma **resolução injetiva** de um objeto $A \in \mathcal{U}$ é um complexo I' junto com um morfismo $\epsilon : A \rightarrow I^0$ tal que, para cada $i \geq 0$, I^i é um objeto injetivo de $\mathcal{U}$ e a sequência*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

é exata.

É importante sabermos também que se todo objeto $\mathcal{U}$ é isomorfo a um sub-objeto de um objeto injetivo de $\mathcal{U}$, então dizemos que $\mathcal{U}$ tem **injeções suficientes**. E, neste caso, todo objeto tem uma resolução injetiva.

Depois de tais definições e discussão, vamos definir o objeto central desta seção: *funtor derivado*. Definiremos e daremos alguns resultados para funtores derivado à direita, mas para os funtores derivados à esquerda os resultados são análogos. Optamos assim pois, quando estivermos falando de *feixe* $\mathcal{E}xt$, utilizaremos funtores derivados à direita.

Definição B.12 *Sejam $\mathcal{U}$ uma categoria abeliana com injeções suficientes e $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor covariante exato à esquerda. Para cada objeto injetivo $A \in \mathcal{U}$, tome uma resolução injetiva I' de A . O **funtor derivado à direita**, denotado por $R^i F$ é definido por*

$$R^i F(A) = h^i(F(I')).$$

Teorema B.13 *Sejam $\mathcal{U}$ uma categoria abeliana com injeções suficientes e $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor covariante exato à esquerda entre categorias abelianas. Então*

- (a) *Para cada $i \geq 0$, $R^i F$ é um funtor aditivo de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{B}$ e independe da escolha das resoluções injetivas.*
- (b) *Existe um isomorfismo natural $F \cong R^0 F$.*
- (c) *Para cada sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

e cada $i \geq 0$, existe um morfismo natural $\delta^i : R^i F(A'') \rightarrow R^{i+1} F(A')$ que nos dá a sequência exata longa

$$\cdots, \longrightarrow R^i F(A') \longrightarrow R^i F(A) \longrightarrow R^i F(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1} F(A') \longrightarrow R^{i+1} F(A) \longrightarrow 0.$$

- (d) *Dado um morfismo de sequências exatas como as de (c) em outra, digamos,*

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0,$$

os morfismos δ^i s definem um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} R^i F(A'') & \longrightarrow & R^{i+1} F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i F(B'') & \longrightarrow & R^{i+1} F(B') \end{array}$$

- (e) *Para cada objeto injetivo I da categoria $\mathcal{U}$ e $i > 0$, temos $R^i F(I) = 0$.*

Definição B.14 *Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor covariante exato à esquerda entre categorias abelianas. Dizemos que $J \in \mathcal{U}$ é **objeto acíclico** se $R^i F(J) = 0$.*

A condição (e) do Teorema B.13 mede o quanto o objeto deixa de ser injetivo. Já a definição anterior nos diz o quanto a sequência de complexos deixa de ser exata.

Proposição B.15 *Sejam $\mathcal{U}$ uma categoria abeliana com injeções suficientes e $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor covariante exato à esquerda entre categorias abelianas. Suponha que exista uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^0 \longrightarrow J^1 \longrightarrow \cdots,$$

onde J^i são objetos acíclicos para F e $i \geq 0$. Então, para cada $i \geq 0$, existe um isomorfismo natural

$$R^i F(A) \cong h^i(F(J)).$$

Definição B.16 Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ categorias abelianas. Um δ -funtor (covariante) de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{B}$ é uma coleção de funtores $T = (T^i)_{i \geq 0}$, com um morfismo $\delta^i : T^i(A'') \rightarrow T^{i+1}(A')$ para cada sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0,$$

tal que

(a) para $i \geq 0$ e toda sequência exata curta acima, existe uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow T^0(A') \longrightarrow T^0(A) \longrightarrow T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^i(A) \longrightarrow \cdots$$

(b) para cada morfismo de uma sequência exata curta como acima em outra $0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$, os funtores δ^i fazem o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \longrightarrow & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \longrightarrow & T^{i+1}(B') \end{array}$$

Definição B.17 O δ -funtor $T = (T^i) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ é **universal** se, dados outro δ -funtor $T' = (T'^i) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ e outro morfismo de funtores $f^0 : T^0 \rightarrow T'^0$, existe uma única sequência de morfismos $f^i : T^i \rightarrow T'^i$, para cada $i \geq 0$, o qual comuta com δ^i para cada sequência exata curta.

Pela definição anterior e a Definição B.16 segue que o funtor derivado satisfaz a condição universal.

Definição B.18 Um funtor aditivo $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ é **anulado** se, para cada objeto $A \in \mathcal{U}$, existe um monomorfismo $u : A \rightarrow M$ tal que $F(u) = 0$, para algum M . Se, para cada A e algum P , existe um epimorfismo $u : P \rightarrow A$ com $F(u) = 0$, então o funtor $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ é dito **co-anulado**.

Teorema B.19 Seja $T = (T^i)_{i \geq 0}$ um δ -funtor covariante de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{B}$. Se para cada $i \geq 0$, T^i é anulado, então T é universal.

Apêndice C

Localização

Esta seção nos auxilia na compreensão das subseções 2.1.1 e 2.1.2. As demonstrações podem ser encontradas em [17].

Definição C.1 *Seja A um anel. Um subconjunto S do anel A é dito **subconjunto multiplicativo** de A se*

$$(i) \quad 1 \in S \text{ e}$$

$$(ii) \text{ se } a, b \in S, \text{ então } ab \in S.$$

Seja S um subconjunto multiplicativo de A não contendo 0 e considere

$$M = \{J \subset A \text{ ideal}; J \not\subset S\} = \{J \subset A \text{ ideal}; 1 \notin J\}.$$

Como J é ideal e não está contido em S , segue que $0 \in M$. Assim, M é um conjunto não vazio e ordenado pela inclusão de conjuntos e, pelo Lema de Zorn, tem elemento maximal. Vamos mostrar que este elemento maximal é um ideal primo $P \in M$, utilizando a negação da definição de ser ideal primo.

Sejam $x \notin P$ e $y \notin P$. Então $Ax + P = S$ e $Ay + P = S$. Ou seja, existem $a, a' \in A$ e $s, s' \in S$ tais que

$$ax \equiv S \pmod{P} \quad \text{e} \quad a'y \equiv s' \pmod{P}.$$

Logo,

$$axa'y \equiv ss' \pmod{P} \Leftrightarrow Axy - S = P$$

e $ss' \in S$, pois $s, s' \in S$ e S é sistema multiplicativo. Consequentemente, $ss' \notin P$ e, daí, $xy \notin P$, o que mostra que P é ideal primo.

Um elemento maximal do conjunto M é chamado **ideal maximal com respeito ao conjunto multiplicativo S** .

Dos fatos acima obtemos algumas consequências:

- (i) Se S é um subconjunto multiplicativo de um anel A e $0 \notin S$, então existe um ideal primo P do anel A com $P \cap S = \emptyset$.

(ii) O conjunto dos elementos nilpotentes de um anel comutativo A ,

$$Nil(A) = \{a \in A; a^n = 0, \text{ para algum } n > 0\},$$

é a interseção de todos os ideais primos de A .

(iii) Seja A um anel e J ideal próprio de A . O radical do ideal J , chamado ideal radical, é a interseção de todos os ideais primos de A , contendo J .

Definição C.2 *Seja S um subconjunto multiplicativo do anel A . Chamamos **localização** do anel A com respeito ao sistema multiplicativo S , e denotamos por $S^{-1}A$, ao anel*

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s}; a \in A \text{ e } s \in S \right\},$$

onde

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Leftrightarrow s''(s'a - sa') = 0,$$

para algum $s'' \in S$ e a multiplicação e adição são as do anel A . Além disso, $S^{-1}A$ tem estrutura de A -álgebra.

A A -álgebra $S^{-1}A$ tem a propriedade universal: se $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de anéis tal que as imagens dos elementos de S são invertíveis em B , então existe um único homomorfismo $f_S : S^{-1}A \rightarrow B$ tal que $f = f_S \circ \varphi$, onde $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \varphi & \uparrow f_S \\ & & S^{-1}A \end{array}$$

é comutativo.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow S^{-1}A \\ a &\mapsto \frac{a}{1}. \end{aligned}$$

Observe que φ é um homomorfismo, pois

$$\varphi(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \left\{ a \in A; \frac{a}{1} = 0 \right\} = \left\{ a \in A; \frac{a}{1} = \frac{0}{s}, \text{ para algum } s \in S \right\} \\ &= \{ a \in A; sa = 0 \text{ para algum } s \in S \} = \{0\}. \end{aligned}$$

O homomorfismo φ induz um homomorfismo de espectros

$$\psi : Spec(S^{-1}(A)) \rightarrow Spec(A).$$

Sejam S um subconjunto multiplicativo do anel comutativo A e M um A -módulo. O conjunto

$$S^{-1}(M) = \left\{ \frac{x}{s}; x \in M, s \in S \right\}$$

é um $S^{-1}A$ -módulo, devido à definição de soma e produto usual e do fato de $S^{-1}A$ ser módulo.

Proposição C.3 *Nas condições acima, existe um isomorfismo natural*

$$S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M.$$

Corolário 8 *Sejam M e N A -módulos. Então*

$$S^{-1}(M \otimes_A N) = (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N).$$

Além disso, um A -módulo M tem uma representação finita se existe uma sequência exata da forma

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e, neste caso,

$$S^{-1}(\text{Hom}_A(M, N)) = \text{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Um resultado importante no estudo de *localização* é o seguinte

Lema C.4 (de Nakayama:) *Sejam A um anel comutativo, M um A -módulo e I um ideal de A . Se $IM = M$, então existe um elemento $a \in A$ da forma*

$$a = 1 + x, \quad x \in I$$

tal que $AM = 0$. Além disso, se $I \subset \text{rad}(A)$, então $M = 0$.

Apêndice D

Limite Direto

Destinamos esta seção para falar sobre *limite direto*, que foi um termo utilizado em nosso trabalho.

Definição D.1 Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere A_i grupos abelianos e mapas $\varphi_{ij} : A_i \rightarrow A_j$, sempre que $i \leq j$, satisfazendo

$$(i) \quad \varphi_{ii} = I_{A_i} \text{ e}$$

$$(ii) \quad \varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}, \text{ se } i \leq j \leq k.$$

O conjunto $\{A_i, \varphi_{ij}\}$ é chamado **sistema direto** de grupos.

Sejam

$$M = \bigoplus_i A_i,$$

onde A_i são grupos abelianos e N subgrupo gerado por elementos do tipo $a - \varphi_{ij}(a)$, para todo $a \in A_i$ e $i \leq j$. A composição natural dos mapas

$$A_i \rightarrow M \rightarrow M/N$$

descreve a propriedade do **limite direto**.

Definição D.2 O **limite direto** de grupos abelianos, denotado por $\varinjlim A_i$, para cada i , satisfaz a propriedade universal: seja $\varphi_i : A_i \rightarrow L$ um homomorfismo de grupos abelianos satisfazendo $\varphi_i := \varphi_j \circ \varphi_{ij}$, para $i \leq j$; se existe um grupo C com um mapa $\tau_i : A_i \rightarrow C$ tal que $\tau_i = \tau_j \circ \varphi_{ij}$, para $i \leq j$, então existe único homomorfismo de grupos $\tau : L \rightarrow C$ que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\varphi_i} & L \\ \tau_i \downarrow & \nearrow & \\ C & & \end{array}$$

Passemos a algumas propriedades do limite direto.

Sejam $\{A_i, \varphi_{ij}\}$ um sistema direto de grupos e pares (A_i, a_i) , com $a_i \in A_i$. Considere a relação $\sim$ dada por

$$“(A_i, a_i) \sim (A_j, a_j) \text{ se existe } k \geq i, j \text{ com } \varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}(a_j)”.$$

Em outras palavras, dizemos que dois pares se relacionam se existe uma aplicação que leva a_i em a_j . É de fácil verificação que $\sim$ é uma relação de equivalência. Denotamos as classes de equivalência por $[A_i, a_i]$.

Seja G o conjunto das classes de equivalência e defina, para $k \geq i, j$,

$$\begin{aligned} + : \quad G \times G &\rightarrow G \\ ([A_i, a_i], [A_j, a_j]) &\mapsto [A_i, a_i] + [A_j, a_j] = [A_k, \varphi_{ik}(a_i) + \varphi_{jk}(a_j)]. \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida pela relação $\sim$. Além disso, G tem estrutura de grupo abeliano com esta operação.

Definamos agora o homomorfismo

$$\begin{aligned} \sigma_i : A_i &\rightarrow G \\ a_i &\mapsto [A_i, a_i] \end{aligned}$$

tal que, se $\sigma_j(\varphi_{ij}(a_i)) = [A_j, \varphi_{ij}(a_i)]$, então $\sigma_i = \sigma_j \circ \varphi_{ij}$, para todo $i \leq j$.

Seja B grupo abeliano e suponha que, para cada i existe um homomorfismo de grupos abelianos $\tau_i : A_i \rightarrow B$, tal que $\tau_i = \tau_j \circ \varphi_{ij}$, para $i \leq j$.

Defina

$$\begin{aligned} \tau : G &\rightarrow B \\ [A_i, a] &\mapsto \tau_i(a_i). \end{aligned}$$

Se $[A_i, a_i] = [A_j, a_j]$, então por definição existem $k \geq i, j$ e aplicações $\varphi_{ik}, \varphi_{jk}$ tais que $\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}(a_j)$ e, assim,

$$\tau_i(a_i) = \tau_k(\varphi_{ik}(a_i)) = \tau_k(\varphi_{jk}(a_j)) = \tau_j(a_j)$$

e a aplicação τ está bem definida. Além disso, pelo modo como foi construída, τ é um homomorfismo de grupos e satisfaz $\tau_i = \tau \circ \sigma_i$.

Seja $\tau' : G \rightarrow B$ outro homomorfismo de grupos satisfazendo $\tau_i = \tau' \circ \sigma_i$. Assim,

$$\tau'([A_i, a_i]) = \tau'(\sigma_i(a_i)) = \tau_i(a_i) = \tau([A_i, a_i]).$$

Daí, podemos ver que G satisfaz as propriedades de limite direto.

Como percebemos, os mapas σ_i induzem um único homomorfismo

$$\sigma : \lim_{\rightarrow} A_i \longrightarrow G$$

com $\sigma_i = \sigma \circ \varphi_i$ para cada i . Analogamente, como G satisfaz a propriedade universal, temos induzido o mapa

$$\tau : G \rightarrow \varinjlim A_i$$

o qual satisfaz $\varphi_i = \tau \circ \sigma_i$. Além disso,

$$\sigma \circ \tau : G \rightarrow G$$

é tal que $\sigma_i = (\sigma \circ \tau) \circ \varphi_i$.

Por outro lado, $Id_G : G \rightarrow G$ também satisfaz $\sigma_i = Id_G \circ \varphi_i$. Pela unicidade da propriedade universal, concluímos que $\sigma \circ \tau = Id_G$.

Com raciocínio análogo, concluímos que $\sigma \circ \tau = Id_{\varinjlim A_i}$. Portanto,

$$\sigma : \varinjlim A_i \rightarrow G$$

é um isomorfismo. Ou seja, construímos um conjunto que tem a propriedade do limite direto.

Referências Bibliográficas

- [1] ATIYAH, M. F. & MACDONALD, I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, California, 1969.
- [2] BOTT, R. & TU, W. L., *Differential Forms in Algebraic Topology*, by Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] CAMACHO, C. & LINS NETO, A., *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser Sue E. Goodman - Boston, Basel; Stuttgart, 1985.
- [4] CORREA, M. & JARDIM, M., *Bounds for sectional genera of varieties invariant under Pfaff fields*, to appear in Illinois Math. Journal.
- [5] DEMAILLY, J.P., *Complex Analytic and Differential Geometry*, Université de Grenoble I, Institut Fourier, Paris, 1997.
- [6] EISENBUD, D., *Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, **150**, Springer-Verlag, New York, 1960.
- [7] FUKUMA, Y., *On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties I*, Comm. Algebra, **32** (2004), 1069-1100.
- [8] GARCIA, J., *Multiplicity of a foliation on projective spaces along an integral curve*, Revist. Matemática, University Complut. Madrid **6** (1993) 207-217.
- [9] GRIFFITHS P. & HARRIS J., *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [10] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer, 1997.
- [11] KOBAYASHI, S., *Differential Geometry of Complex Vector Bundle*, Publications of the Mathematical Society of Japan, **15**, 1987.
- [12] CAMACHO, C. & LINS NETO, A., *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [13] LINS NETO, A., *Some examples for the Poincaré and Painlevé problems*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, **35**, 2002, p. 231 - 266.

- [14] LINS NETO, A., *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [15] LIPMAN, J., *Dualizing sheaves, differentials and residues on algebraic varieties*, Astérisque **117** (1984).
- [16] MADSEN, I & TORNEHAVE, J., *From Calculus to Cohomology - de Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge University Press, 1997.
- [17] MATSUMURA, H., *Commutative Algebra*, 2ed. Cambridge- Verlag, London, 1980.
- [18] , NADEL, A. M., *The Boundedness of Degree of Fano Varieties with Picard Number One*, J. American Math. Soc. **4** (1991), 681–692.
- [19] NEEMAN, A., *Algebraic and Analytic Geometry*, Cambridge, 2007.
- [20] OKONEK, C., SCHNEIDER, M & SPINDLER, H., *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Progress in Mathematics, **3**.
- [21] SEBASTIANI, M., *Introdução à geometria analítica complexa*, 2ª edição, IMPA, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [22] STEFFENS, A., *On the stability of the tangent bundle of Fano manifolds*, Math. Ann. **304** (1996) 635-643.
- [23] SUBRAMANIAN, S., *Stability of the tangent bundle and existence of a Kähler-Einstein metric*, Math. Ann. **291** (1991) 573-577.
- [24] TU, W. L., *An introduction to manifolds*, 2ed. Springer-Verlag, New York, 2010.
- [25] UENO, K., *Algebraic Geometry 2, Sheaves and Cohomology*, Translations of Mathematical monographs, **182**, Tokyo, 1997.